Л.И.Седов

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ. ТОМ 1

М.: Наука, 1970 г., 492 стр.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава I. Введение	**9**
§ 1. Предмет и методы механики сплошной среды	9
§ 2. Основные гипотезы	15
Глава II. Кинематика деформируемой среды	**22**
§ 1. Точка зрения Лагранжа на изучение движения сплошной среды	22
§ 2. Точка зрения Эйлера на изучение движения сплошной среды	32
§ 3. Скалярные и векторные поля и их характеристики	34
§ 4. Элементы тензорного исчисления	47
§ 5. Теория деформаций	64
§ 6. Тензор скоростей деформаций	96
§ 7. Распределение скоростей в бесконечно малой частице сплошной среды	98
§ 8. Теоремы Стокса и Гаусса — Остроградского и некоторые связанные с ними свойства векторных полей	108
Глава III. Динамические понятия и динамические уравнения механики сплошной среды	**124**
§ 1. Уравнение неразрывности	124
§ 2. Уравнения движения сплошной среды	133
§ 3. Уравнения моментов количества движения	147
§ 4. Главные оси и главные компоненты симметричного тензора напряжении	156
Глава IV. Замкнутые системы механических уравнений для простейших моделей сплошных сред. Некоторые сведения из тензорного анализа	**160**
§ 1. Идеальные жидкость и газ	160
§ 2. Линейное упругое тело и линейная вязкая жидкость	165
§ 3. Примеры уравнений в криволинейных системах координат и дополнительные сведения из тензорного анализа	177
Глава V. Основные понятия и уравнения термодинамики	**189**
§ 1. Теорема живых сил и работа внутренних поверхностных сил	189
§ 2. Первое начало термодинамики (закон сохранения энергии) и уравнение притока тепла	194
§ 3. Термодинамическая равновесность, обратимые и необратимые процессы	212
§ 4. Двухпараметрические среды. Совершенный газ. Цикл Карно	216
§ 5. Второе начало термодинамики и понятие энтропии	228
§ 6. Термодинамические потенциалы двухпараметрических сред	245
§ 7. Примеры идеальных и вязких сред и их термодинамические свойства. Теплопроводность	250

§ 8. Первый и второй законы термодинамики для конечных объемов сплошной среды. Производство энтропии в некоторых необратимых" процессах 261
Глава VI. Основные понятия и уравнения электродинамики **266**
§ 1. Основные понятия электродинамики. Электромагнитное поле. Уравнения Максвелла в пустоте 265
§ 2. Уравнения Максвелла в пространстве Минковского 277
§ 3. Преобразования Лоренца и инерциальные системы отсчета 283
§ 4. Взаимодействие электромагнитного поля с проводниками 296
§ 5. Взаимодействие электромагнитного поля с телами с учетом поляризации и намагничивания 305
§ 6. Магнитная гидродинамика 322
§ 7. Законы вмороженности магнитных и вихревых линий 325
Глава VII. О постановке задач в механике сплошной среды **333**
§ 1. Общие] основы постановки конкретных задач 333
§ 2. Типичные упрощения в постановках некоторых задач, связанные с уменьшением числа независимых переменных 342
§ 3. Линеаризация уравнений и задач механики сплошной среды 346
§ 4. Условия на поверхностях сильных разрывов 352
§ 5. Сильные разрывы в электромагнитном поле Л68
§ 6. Поверхности разрыва внутри идеальных сжимаемых сред 373
§ 7. Размерности физических величин и П-теорема 393
§ 8. Параметры, определяющие класс явлений, и типичные примеры приложения методов теории размерности 404
§ 9. Подобие и моделирование явлений 426
Добавление I
В. В. Лохин, Л. И. Седов, Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов 436
Добавление II
Л. И. Седов, Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы 465
Предметный указатель 487

Предметный указатель

Автомодельность 346
Аддитивность внутренней энергии 208
— энтропии 244
Адиабата Гюгонио 376, 378, 380, 382, 383
— Пуассона 223, 378—380
Валентность (ранг) тензора 54
Вектор 30, 52
— аксиальный 104, 183, 185, 188
— вихря скорости 103, 106, 109
— - градиент скалярной функции 37
— магнитной индукции 306
— — напряженности 270
— перемещения 77, 85
— плотности тока четырехмерный 308
— полярный 185
— пондеромоторной силы четырехмерный 309
— потока диффузии 129
— — тепла 259
— соленоидальный 114
— Умова — Пойнтинга 303

— электрической индукции 306
— — напряженности 269
Векторы базиса, зависимость от времени 64
— — ковариантные 29, 31, 49, 50, 60
— — контравариантные 56, 60
— — не единичные и единичные 29
Величины безразмерные 398
— ковариантные 51
— контравариантные 51
— размерные 394, 398
Взаимодействие элементарных частиц 17, 267
— гравитационное 266
— магнитное 268
— электромагнитное 266
— энергетическое в поле; поля с проводящей средой 302—305
Взаимооднозначность функций, определяющих закон движения 24
Взрыв точечный 386, 410
Вихрь изолированный 118
Возмущения малые 347
Волна взрывная 386
— детонации 388
— горения 388
— ударная (см. разрыв сильный)
— — воздушная 386
Волны прогрессивные 351
— стоячие 350
Время абсолютное 21
—, относительность понятия времени 291
— собственное 292
Газ идеальный 160, 253
— совершенный 217, 218, 254
Гидродинамика магнитная 12, 322—329, 357
Гипотеза сплошности 19
Гиротропия 168, 169
Горение 12, 388
Движение абсолютно твердого тела 64
— автомодельное 346
— безвихревое 112
— вихревое 112
— волновое 11, 349
— газа изотермическое 164
— континуума (сплошной среды) 23 и далее
— многокомпонентных реагирующих смесей 129
— одномерное неустановившееся 345
— осесимметричное 349
— плоскопараллельное 343
— — несжимаемой жидкости потенциальное 343
— потенциальное 44—47, 112, 113, 331, 332
— при очень больших числах Рейнольдса 422
— — — малых числах Рейнольдса 421
— разрывное 354—393
— с плоскими волнами 345
— с цилиндрическими волнами 345
— смеси многокомпонентной 126
— со сферическими волнами 345, 386, 410
— стационарное (установившееся) 39, 40, 342
— тела в вязкой несжимаемой жидкости 414
— — в идеальном газе 423
Детонация 388
Деформация бесконечно малая 66
— конечная 66
— чистая 95
Дивергенция вектора 107—109
— —, ее выражение в криволинейной системе 179
Дисперсия волн 351
Диссипация механической энергии в вязкой жидкости 257
Дифференцирование ковариантное 79— 83

— —, независимость от порядка в евклидовом пространстве 89, 173
— компонент вектора ковариантное 79, 82
— — тензора ковариантное 80—81
Длина вектора 58
Единицы измерения (первичные и вторичные) 395
Жидкость вязкая 165, 255
— идеальная 160, 251
— несжимаемая 130, 250—253
— сжимаемая 253
Жонглирование индексами 58
Задача Буссинеска 424
— Коши 43, 337
— краевая 342
— о поршне с детонационной волной 388
— о поршне с плоскими волнами 384
— о сильном точечном взрыве 411
— о сферическом поршне 386, 407
— о точечном взрыве 386, 410
— обтекания 415
Закон вмороженности вихревых и магнитных линий 325
— вязкости Ньютона 166
— Гука 166
— — для гиротропной среды 169
— — для изотропной среды 170
— движения континуума 23
— — точки 22
— Кулона 267, 270
— Навье — Стокса 166, 265
— — — для изотропной среды 170
— — — для гиротропной среды 169
— намагничивания 310
— — и поляризации в тензорной форме 312
— Ньютона второй 136
— Ома 299, 310
— поляризации 310
— сохранения количества движения 400
— — массы 124, 125
— — момента количества движения 400
— — полного заряда 298
— — энергии 205, 400
— теплопроводности Фурье 260, 265
Изотерма совершенного газа 222
— — —, взаимное расположение с адиабатой Пуассона 223
Изотропия 167—169
Инвариант вектора 62
Инварианты скалярные тензора 61, 62, 74
— — — деформаций 75
— — — напряжений 159
Инвариантность d***r*** относительно преобразований координат 51
Индивидуализация точек континуума 23
Источник 46
Кавитация 13, 430
Колебания стоячие 350
Количество движения индивидуального объема сплошной среды 138
— — системы 137
— — точки 136, 155
Компоненты вектора 30, 52
— — градиента скалярной функции 37, 38, 80
— — — — — — в ортогональной криволинейной системе 181
— — — — — — в цилиндрической и сферической системах 181
— — скорости 30
— — физические 179
— — ускорения 39
— — — в криволинейной ортогональной системе 180
— — — произвольной системе 146
Компоненты вектора ускорения в цилиндрической и сферической системах, физические 181

— векторного произведения в криволинейной системе 186
— тензора главные 63
— — —, способ определения 73
— — деформаций ковариантные 66
— — — —, выражения через компоненты вектора перемещения 85, 86
— — —, вычисление по закону движения 76
— — — ковариантные, геометрический смысл 68—70
— — ковариантные 56—58, 68
— — контравариантные 54—57
— — метрического (фундаментального) 58, 60
— — напряжений 145
— — — главные 158
— — — физические 147
— — скоростей деформаций главные 103
— — — —, кинематическое истолкование 142
— — смешанные 58, 60
— — физические 179
— тензоров деформаций главные 71
— — —, их связь 72
Конденсация газов в испытательной установке 430
Континуум непрерывный материальный (сплошная среда) 19
Координаты лагранжевы 27
— начальные 23
— точки 22
— эйлеровы 32
Коэффициент вязкости второй 172
— — динамический 172
— — кинематический 172
— кубического расширения 75
— относительного удлинения 66
— полезного действия тепловой машины 228
— Пуассона 172
Коэффициенты вязкости, их положительность 257, 258
— Ламе 170
— связности (символы Кристоффеля) 79
Критерии подобия 428
Критерий необратимости процесса 263
— обратимости процесса 263
Крыло 420
Линеаризация граничных условий 348
— задач механики сплошной среды 348, 352
Линия векторная 40, 115
— вихревая 115
— координатная 22
— тока 40, 41
Машина тепловая 227, 242
— холодильная 227
Метод исследования статистический 19
— — феноменологический 19
Механика ньютонианская 20
— сплошной среды 9
— — —, ее методы 14
— — —, ее проблемы 11
— — —, существенные для нее физико-химические процессы 17, 18
Модели, их выбор и построение 334
Моделирование 426, 430
— плавания кораблей 430
Моделирование по Фруду 431
— процессов в грунтах 432
— с использованием центробежной машины 432
— упругих конструкций 431
Модель вязкой жидкости 165, 255—256
— идеального газа 160, 253—255
— идеальной несжимаемой жидкости 250—253
— линейного упругого тела 166

— линейной вязкой жидкости 255—258, 260, 261
— проводящей жидкости в магнитной гидродинамике 322—329
— среды математическая, ее построение 160
— тела с наследственностью 196
— упругого тела 165
Модуль Юнга 172
Момент количества движения точки 147
— — — системы 148
— — — внутренний (собственный) 150, 153
— — — индивидуального объема сплошной среды 149—151
— — — орбитальный 150
— магнитный дипольный 270
— пондеромоторной силы 317
— пондеромоторный 316—319
— собственный поля 316
— электромагнитного поля и среды 320
Мощность источника (стока) 46
Намагничивание 305
Напряжения внутренние 135, 136, 140
Напряженность вихревой трубки 117
Начало термодинамики второе 228, 232, 236, 238—240
— — — для конечного объема сплошной среды 261
— — первое 205
— — — для конечного объема сплошной среды 261
Нелинейность задач механики сплошной среды 346
Необратимость разрывных движений 355, 363
Непрерывность функций, задающих закон движения 24
Область многосвязная 113
— односвязная 113
Обтекание клина и угла сверхзвуковое 391
— шара 420, 421
Оператор Лапласа от скалярной функции
в ортогональной системе координат 182—183
Операция альтернирования тензоров 55
— симметрирования тензоров 55
Оси тензора главные 63, 73
— — деформаций главные 73, 159, 169, 170
— — напряжений главные 157, 159, 169,
— — скоростей деформаций главные 70, 103, 159, 170
Пара массовая распределенная 151
— поверхностная распределенная 151
Парадокс часов 293
Параметры макроскопические 195
— определяющие 194, 195, 197, 405, 406
— —, полная система 197
— состояния 194—198
Переменные лагранжевы 23, 33
— эйлеровы 32, 33
Переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера 33
— — — Эйлера к переменным Лагранжа 33
П-теорема 403, 404
Плазма 267
Плотность внутренней энергии 210
— заряда 267
— истинная массовая 124
— кинетической энергии 192
— массовой силы 133
— поверхностной силы 134
— средняя массовая 124
— тока 296
— функции Лагранжа 473
Поверхность векторная 43, 115

— вихревая 115
— изотермическая 36
— разрыва 353, 364, 365
— — в идеальной сжимаемой среде 373— 393
— — скорости 330—331
— тензорная 62—63
— — тензора напряжений 156, 157, 159
— тока 43
— фазовая 350
— эквипотенциальная 36, 44
Поворот чистый 95
Подобие геометрическое 426
— при обтекании тел вязкой несжимаемой жидкостью 428
— — — — газом с учетом сжимаемости 429
— физическое 426 Поле 34
— векторное 35
— — потенциальное 44
— — соленоидальное 113
— гравитационное, его дифференциальные уравнения 271
— однородное 38
— скалярное 34
— скоростей потенциальное 44
— электромагнитное 266 и далее
— —, его инвариантные характеристики 295
Поляра ударная (гипоциссоида) 389
Поляризация 268, 305
Поршень плоский 384—385
— сферический 386
Постоянная Больцмана 217
— газовая 217
— — универсальная 217
Постулат о постоянстве скорости света 284
Потенциал векторный 279, 308
— скорости 44
— термодинамический Гиббса 247, 248
Потенциалы термодинамические 245—250
Преобразование аффинное 94
— — бесконечно малое 98, 104
— бесконечно малой частицы сплошной среды 93, 105
— векторов базиса ковариантных 51
— — базиса контравариантных 55, 56
— — основных электромагнитного поля 308
— — электрической и магнитной напряженности 293—296
— Галилея 282, 289
— компонент $d\boldsymbol{r}$ 51
— компонент тензора 53, 57| 58
— координат 47
Преобразование координат при переходе от одной инерциальной системы к другой в специальной теории относительности 285—287
— Лоренца 281, 287, 289,
— — бесконечно малое 289
— — частное 290
— ортогональное 289
— полиадных произведений 53, 57
— символов Кристоффеля 86
Принцип неубывания энтропии для изолированной системы 245
— относительности Галилея — Ньютона 26, 283
Приток тепла полный извне к двухпараметрической системе 224, 227
— энергии к среде 204, 219, 224, 258, 260, 262, 313—315
Проводимость 299
Проводник электрический 296
Произведение векторное 186
Произведения векторов базиса полиадные 52, 53
— — — диадные 52, 53

Производная индивидуальная (субстанциональная, полная) 36, 39, 192
— конвективная 36, 38, 39
— локальная (местная) 36, 39
— по направлению 37
Производные компонент вектора ковариантные 79, 82
— — тензора ковариантные 80, 81
Производство энтропии 261, 263—265
Пространство евклидово 20, 59, 88
— метрическое 20
— Минковского 278, 282, 287
— неевклидово 59
— псевдоевклидово 26, 59, 278
— состояний 199
Процесс 199
— адиабатический 220, 254
— — необратимый 244
— — обратимый 244
— баротропный 164, 221
— без диффузии 128
— замкнутый по параметрам внутренней энергии и незамкнутый по параметрам энтропии 243
— изотермический 220, 254
— необратимый 213
— непрерывный 200
— неравновесный 212
— нестационарный (неустановившийся) 39
— обратимый 213
— политропный 221
— равновесный 212
— разрывный 200
— с диффузией 129
— стационарный (установившийся) 39
Процессы физико-химические, существенные для механики сплошной среды 17, 18
Псевдотензор третьего ранга 185
Пучность 350
Работа внешних поверхностных сил 190
— внутренних поверхностных сил 191
— — — — в вязкой жидкости 256
— — — — в идеальной жидкости 199, 251
— — — — в среде с симметричным тензором напряжений 191
— — и внешних массовых сил 190, 192
—, совершаемая двухпараметрической системой 224, 226. 227
Равновесие термодинамическое 212
Размерность 395
Разрыв неподвижный 373
— слабый 358
— сильный 358, 359
— — в электромагнитном поле 368
— тангенциальный 366
Ранг (валентность) тензора 54
Распадение разрыва 365
Распределение скоростей в абсолютно твердом теле 101
— — в бесконечно малой частице сплошной среды 98
Распространение разрыва по частицам среды 374
Расход источника (стока) 46
Реология 160
Решения разрывные 353, 355
Ротация вектора 109
— — в криволинейной системе координат 185
Свертка 62
Свойства непрерывных отображений 25
Связь антисимметричного тензора второго ранга и аксиального вектора в трехмерном пространстве 104, 183

— — — — — — о аксиальным и полярным вектором в четырехмерном пространстве 186—188
— компонент тензоров деформаций и скоростей деформаций 97
Сила внешняя 134
— внутреннего трения 136
— внутренняя 134
— гравитационная 134
— инерции 134
— Лоренца 301
— массовая 133, 134
— обобщенная 476
— объемная 133, 134
— поверхностная 134
— подъемная 417
— пондеромоторная 300, 312
— распределенная 133
— сопротивления 417
— сосредоточенная 133
— термодинамическая обобщенная 264
Силы внутренних напряжений 135
Символ Кронекера 49
Символы Кристоффеля 79, 84, 86, 177
— — в ортогональной системе 177
Симметрия 167
— тензора напряжений в классическом случае 157
Система единиц измерения 395
— координат 22
— — в специальной теории относительности 285, 287
— — вмороженная (сопутствующая) 27, 291, 465, 466
— — инерциальная 26, 283
— — криволинейная 22
— определяющих параметров 466
— отсчета наблюдателя 26, 333
— координат прямолинейная 22
— — собственная 291
— термодинамическая 194
— —, взаимодействие с внешними объектами 201
— — голономная 198, 207
— — изолированная 245
Скаляр 62
Скачок внутренней анергии 375
— неподвижный 383
Скачок разрешения 367, 375, 382, 388
— уплотнения 367, 375, 382, 388
— — косой 390
— — прямой 390
Скорость 28
— относительного изменения объема 107
— — удлинения 101
— поверхности разрыва 365
— распространения прогрессивных волн
— света 273, 278
— чистой деформации 103
Сложение тензоров 55
Сопротивление 417, 422
Состояние начальное 67, 68
«Состояние начальное» 67, 68
Состояние системы 194
— — равновесное, наиболее вероятное 214
Спин 150, 269
— -тензор 54
Спинор 54
Среда анизотропная 167
— гиротропная 168
— двухпараметрическая 216—237, 245— 250
— идеальная 160
— изотропная 167
— многопараметрическая 194, 238
— несжимаемая 130
— с бесконечной проводимостью 300
— сплошная 19, 24
Сток 46
Строение реальных тел 15—16
Структура разрывов 354
Сумма тензоров 52

Суперпозиция решений 350
Тело материальное 124
— упругое 165
Температура 215
Тензор 47, 54
— Абрагама 320
— антисимметричный 55, 104, 183, 186— 188
— внутренних напряжений 145
— второго ранга 54, 61
— Леви-Чивита 185
— метрический (фундаментальный) 59, 60
— Минковского 308
— момента электромагнитного поля 319
— напряжений 145
— — в идеальной жидкости 161
— —, симметрия в классическом случае 154
— нулевого ранга 61
— первого ранга 54, 61
— пондеромоторного момента электромагнитного поля 318
— ранга *P* 61
— Римана — Кристоффеля 89
— симметричный 54
— скоростей деформаций 96
—, число его компонент 61
— шаровой 162
— электромагнитного поля 279, 282
— энергии-импульса 283, 308, 319, 320, 321
Тензоры деформаций 67, 95
Теорема Гаусса — Остроградского 120, 121
— живых сип 189, 203
Теорема живых сил для бесконечно малого объема сплошной среды 192
— — — для конечного объема сплошной среды 191
— Карно 228
— Коши — Гельмгольца о разложении скорости 107
— Лагранжа 331, 332
— Стокса 111
— Томсона 330
Теоремы Гельмгольца кинематические о вихрях 117
— — динамические 332
Теория волн 350
— дислокаций 467
— молекулярно-кинетическая 215
— Онзагера 265
— относительности 21
— — общая 26, 287, 466, 471—485
— — специальная 26, 277—296, 306— 322, 472
— пластичности 13, 467
— упругости 13, 95, 166, 350
Тепло джоулево 219, 303
— некомпенсированное 242, 257, 363
—, подвод к среде 204, 219, 224, 258, 262
— — — — за счет теплопроводности по закону Фурье 260
Теплоемкость при постоянном давлении 219
— — — объеме 218
Теплопроводность 219, 262
Теплосодержание 247
Течение вихревое 117
— поступательное 45
— потенциальное 44, 110, 112
Ток проводимости 296
— смещения 298
— Холла 300
Точка зрения Лагранжа 28, 32
— — Эйлера 32
Точки критические 43
— особые 43, 337
— — дифференциальных уравнений линий тока 43
Трубка векторная 44, 115
— вихревая 115
— тока 44, 130

Узел 350
Умножение тензора на число 55
— тензоров 61
Уравнение вариационное базисное 470, 473
— — Лагранжа 471
— вековое 74, 158
— волновое 278, 280
— динамики основное 136
— закона сохранения энергии 209
— импульсов 139, 362
— — с учетом пондеромоторных сил 301
Уравнение Клапейрона 164, 217
— количества движения системы 137
— — — для конечного объема сплошной среды 138, 139
— — — для точки 136
— Лапласа 272
— моментов 362
— — в четырехмерной форме 315—322
— — количества движения в дифференциальной форме 153
— — — — в классическом случае 152
— — — — для конечного объема сплошной среды 151
— — — — для системы точек 148
Уравнение моментов количества движения для точки 147
— неразрывности 130, 132, 302
— — в криволинейных координатах 179
— — в переменных Лагранжа 132
— — — — Эйлера 125
— — в цилиндрической и сферической системах координат 180
— — для процессов с диффузией 129
— притока тепла 209
— — — дифференциальное 210
— — — — для вязкого теплопроводного газа 260
— — — — для идеального газа 216
— — — для проводящей среды 305
— Пуассона 272
— состояния совершенного газа 217
— теории упругости основное 147
— теплопроводности 261
— Умова — Пойптинга 302, 304
— характеристическое (вековое) 74
— энергии 209, 362
— энтропии 363
Уравнения движения идеальной жидкости в цилиндрической и сферической системах 186
— — — —, полная система 163
— — — — при баротропных процессах (полная система) 164, 165
— — — — (уравнения Эйлера) 162
— — вязкой несжимаемой жидкости (полная система) 164, 165
— — сплошной среды 143, 146
— — упругого тела в перемещениях для малых деформаций (полная система) 175
— гравитационного поля дифференциальные 271
— движения в форме Лемба — Громеки 163
— Ламе 174—176
— линий тока 41
— магнитной гидродинамики для среды с бесконечной проводимостью 323
— Максвелла в электростатике 270
— — в интегральной форме 305, 368
— — в тензорной форме 277, 279, 307
— — в проводниках 277, 279, 297, 298
— — для электромагнитного поля в пустоте 273, 275, 282
— — в материальных поляризованных намагниченных телах 305, 307

— — в четырехмерном пространстве 277, 279, 307
— механики и термодинамики универсальные 362
— Навье — Стокса 173, 256, 417
— совместности деформаций конечных 86, 91, 337
— — — бесконечно малых 91
— — скоростей деформаций 97
— состояния 164, 217, 236, 253, 254, 256
Ускорение точки 31 (см. компоненты вектора)
Условие евклидовости пространства 90
— обтекания 339
— прилипания 338
Условия в бесконечности 336
Условия граничные (краевые) 338
— на величины, сохраняющие значение о индивидуальном объеме 125
— на поверхностях сильных разрывов 364, 365, 375
— — — — в электромагнитном поле 369—370
— на свободной границе 340
— — — — в идеальной жидкости 341
— начальные 337
— совместности деформаций, см. уравнения совместности деформации
Форма квадратичная фундаментальная 59
Формула Гиббеа 256
— дифференцирования по времени интеграла по жидкому объему 121 —125
— — — — потока соленоидального вектора через жидкую поверхность 326— 327
— Майера 219
— размерности 395
— Эйлера для распределения скоростей
в абсолютно твердом теле 101
Функция гармоническая 343
— диссипативная 264, 265
— тока 344
— характеристическая 344
Характеристики системы обыкновенных дифференциальных уравнений 44
Центр масс системы 137
Цикл 200
— Карно 225—239
Циркуляция вектора по контуру 109
Число Маха 391, 424, 429
— Рейнольдса 418, 428
— Фруда 423, 431
Энергия, ее различные виды 201
— внутренняя как термодинамический потенциал 246
— кинетическая индивидуального объема сплошной среды 189
— несжимаемой жидкости внутренняя 252
— свободная 246
— системы внутренняя 208, 246
— — полная 208
— совершенного газа внутренняя 217
— электромагнитного поля 303
Энтальпия 247
Энтропия 235—237, 240, 244
—, изменение вдоль адиабаты Гюгонио 377
— совершенного газа 236
Эффект гиромагнитный 153
— магнитотермический 242

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава I. **Введение** 9

§ 1. Предмет и методы механики сплошной среды 9
§ 2. Основные гипотезы 15

Глава II. **Кинематика деформируемой среды** 22

§ 1. Точка зрения Лагранжа на изучение движения сплошной среды 22
§ 2. Точка зрения Эйлера на изучение движения сплошной среды 32
§ 3. Скалярные и векторные поля и их характеристики 34
§ 4. Элементы тензорного исчисления 47
§ 5. Теория деформаций 64
§ 6. Тензор скоростей деформаций 96
§ 7. Распределение скоростей в бесконечно малой частице сплошной среды 98
§ 8. Теоремы Стокса и Гаусса—Остроградского и некоторые связанные с ними свойства векторных полей 108

Глава III. **Динамические понятия и динамические уравнения механики сплошной среды** 124

§ 1. Уравнение неразрывности 124
§ 2. Уравнения движения сплошной среды 133
§ 3. Уравнения моментов количества движения 147
§ 4. Главные оси и главные компоненты симметричного тензора напряжений 156

Глава IV. **Замкнутые системы механических уравнений для простейших моделей сплошных сред. Некоторые сведения из тензорного анализа** 160

§ 1. Идеальные жидкость и газ 160
§ 2. Линейное упругое тело и линейная вязкая жидкость 165
§ 3. Примеры уравнений в криволинейных системах координат и дополнительные сведения из тензорного анализа 177

Глава V. **Основные понятия и уравнения термодинамики** 189

§ 1. Теорема живых сил и работа внутренних поверхностных сил 189
§ 2. Первое начало термодинамики (закон сохранения энергии) и уравнение притока тепла 194
§ 3. Термодинамическая равновесность, обратимые и необратимые процессы 212
§ 4. Двухпараметрические среды. Совершенный газ. Цикл Карно 216
§ 5. Второе начало термодинамики и понятие энтропии 228
§ 6. Термодинамические потенциалы двухпараметрических сред 245
§ 7. Примеры идеальных и вязких сред и их термодинамические свойства. Теплопроводность 250

§ 8. Первый и второй законы термодинамики для конечных объемов сплошной среды. Производство энтропии в некоторых необратимых процессах 261

Глава VI. **Основные понятия и уравнения электродинамики** 266

§ 1. Основные понятия электродинамики. Электромагнитное поле. Уравнения Максвелла в пустоте 266
§ 2. Уравнения Максвелла в пространстве Минковского 277
§ 3. Преобразования Лоренца и инерциальные системы отсчета 283
§ 4. Взаимодействие электромагнитного поля с проводниками . . 296
§ 5. Взаимодействие электромагнитного поля с телами с учетом поляризации и намагничивания 305
§ 6. Магнитная гидродинамика 322
§ 7. Законы вмороженности магнитных и вихревых линий . . . 325

Глава VII. **О постановке задач в механике сплошной среды** 333

§ 1. Общие основы постановки конкретных задач 333
§ 2. Типичные упрощения в постановках некоторых задач, связанные с уменьшением числа независимых переменных . . . 342
§ 3. Линеаризация уравнений и задач механики сплошной среды 346
§ 4. Условия на поверхностях сильных разрывов 352
§ 5. Сильные разрывы в электромагнитном поле 368
§ 6. Поверхности разрыва внутри идеальных сжимаемых сред . 373
§ 7. Размерности физических величин и П-теорема 393
§ 8. Параметры, определяющие класс явлений, и типичные примеры приложения методов теории размерности 404
§ 9. Подобие и моделирование явлений 426

Добавление I

В. В. Лохин, *Л. И. Седов*, Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов 436

Добавление II

Л. И. Седов, Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы 465

Предметный указатель 487

ПРЕДИСЛОВИЕ

Познание природы и решение многих актуальных технических задач требуют построения новых моделей для глубокого и более детального описания микроскопических и макроскопических механических и вообще физических объектов, взаимодействий и явлений.

Опыт и внутренняя сущность науки указывают, что ответы на вопросы о строении материи, на вопросы астрофизики, на различные вопросы о существенных свойствах усложненных взаимодействий в телах живого, органического и неорганического мира во многом связаны с некоторыми нашими общими универсальными понятиями, представлениями, законами, идеями и методами.

К настоящему времени уже накоплена огромная научная информация, развиты теории и собраны экспериментальные данные о поведении физических полей, о движении и равновесии газов, плазмы жидкостей и твердых деформируемых тел.

Явное установление общих основ и внутренних связей между различными теориями и наблюдаемыми эффектами способствует углубленному пониманию действительного состояния науки, правильной оценке известных и развивающихся научных достижений и наилучшей ориентировке в богатстве добытой информации. Все это очень необходимо как исходный базис для дальнейшего научного развития.

При изложении основ механики и физики полезно руководствоваться следующим положением, которое необходимо подчеркнуть явно. Вводимые и применяемые понятия и связи имеют определенный точный смысл только в рамках некоторого множества моделей, которые конструируются для научного описания и исследования интересующих нас классов реальных явлений. Это относится и к таким фундаментальным понятиям, как пространство, время, сила, температура, энтропия и т. п. Как известно, представление о ньютоновской силе не имеет смысла в некоторых взаимодействиях, описываемых квантовой механикой, и совершенно недостаточно для описания механических взаимодействий в современных усложнен-

ных моделях сплошных сред. «Универсальные» понятия об энтропии и температуре не имеют смысла и не нужны в моделях аналитической механики.

Таким образом, нельзя говорить об основных понятиях и закономерностях вне совокупности очень широких или узких классов моделей, которые уже введены явно или могут быть еще введены, или подразумеваются неявно—потенциально в теориях и в опытных наблюдениях. Неучет этого положения, чрезмерная общность и оторванность от существа дела могут порождать беспредметные рассуждения о смысле силы, энтропии и т. п. В определенных правильно введенных моделях достигается необходимая ясность, и возникающие недоразумения легко устранимы. Но естественно, что все модели отражают действительность только приближенно и только в некоторой области; уточнение, усложнение, новое моделирование или в известном смысле упрощение существующих моделей — это постоянный процесс, связанный с научным прогрессом.

Очевидно, что изучение учащимися механики особенно полезно не только с точки зрения уже известных приложений, сколько с точки зрения перспективных проблем, которые станут предметом исследования и приложений в будущем.

В связи с этим в последние годы ясно выявилась необходимость введения в преподавание в высших учебных заведениях курса механики сплошной среды как общей основы для развития термодинамики, теории электромагнетизма, гидродинамики, газовой динамики, теории упругости, теории пластичности, теории ползучести и многих других разделов физики и механики. Общность и неразрывная связь перечисленных выше различных на первый взгляд разделов механики и физики заставляют нас рассматривать их как единое целое.

В свете сформулированных выше установок составлен предлагаемый курс механики сплошной среды. Этот курс возник в результате лекций, которые автор в течение многих лет читал в Московском государственном университете и которые были первоначально изданы на ротапринте в 1966—1968 годах.

Курс состоит из двух томов, в первом томе излагаются универсальные математические методы и понятия, основы термодинамики и электродинамики. Автор надеется, что краткое изложение основ термодинамики и электродинамики окажется полезным не только специалистам, работающим в области механики. Кроме того, в

первом томе устанавливаются основные физические уравнения и дополнительные соотношения на сильных разрывах, а также начальные, краевые и другие условия. Вместе с этим указываются важные свойства приближенных приемов, связанных, например, с линеаризацией задач. Таким образом, в первом томе подготавливаются предпосылки для построения конкретных моделей сплошных сред и выявляются типичные элементы схематических приемов при постановках конкретных задач.

В качестве добавления к первому тому присоединены еще две работы, органически связанные с излагаемым в курсе материалом. В первой из них развита общая теория симметрии в трехмерном пространстве, проблема классификации кристаллов с точечной симметрией и теория структуры нелинейных тензорных функций от нескольких тензорных аргументов. Во второй содержится систематическое изложение общего метода построения усложненных моделей сплошных сред с внутренними степенями свободы на основе универсального базисного вариационного уравнения.

Знакомство с этими работами полезно и необходимо для чтения серии других работ последнего времени, посвященных новым теориям и моделям в механике сплошной среды.

Второй том посвящен конкретным моделям и теориям в гидродинамике, газовой динамике, теории упругости и теории пластичности. Здесь дается решение типичных задач в рамках классических моделей и устанавливаются важнейшие закономерности, имеющие место в широких классах движений и процессов.

Во второй том (§§ 6—10 главы VIII) включена общая теория газовых и гидравлических машин; эти параграфы представляют собой усовершенствованное изложение специального курса лекций, читавшегося мною в Московском университете. Некоторые из основных выводов этой теории, имеющей инженерный характер, обоснованы более строго в последующих параграфах главы VIII, посвященных общей теории движения твердого тела в жидкости.

В основном дедуктивный стиль изложения, выбор материала и его расположение связаны со стремлением дать логический скелет теории движения сплошных сред и подчинены главной цели: создать для читателя при минимуме фактической информации, ограничиваясь наиболее простыми примерами, имеющими важнейшее практическое значение, благоприятную почву для детального понимания

сущности основ механики сплошной среды и главных известных эффектов, возникающих при движении сплошных сред. Иначе говоря, мы стремились при необходимом минимуме информации получить максимум понимания.

Некоторые очень важные разделы гидромеханики и механики твердых тел не включены в этот курс, так как, кроме общего курса механики сплошной среды, имеются дополнительные специальные курсы и другие книги, где более подробно развиваются соответствующие теории. Это относится, например, к теории плоскопараллельных движений жидкости и газа, к теории неустановившихся движений газа, к теории волн на поверхности тяжелой жидкости к более детальной теории размерности и подобия в механике, к теории пограничного слоя и турбулентности, к подробной теории пластичности и ползучести и к многому другому.

Основой для этого курса послужили записи моих лекций, сделанные В. В. Розанцевой и М. Э. Эглит; они оказали мне очень большую помощь и способствовали важным усовершенствованиям текста в результате весьма плодотворных обсуждений, проходивших при составлении и редактировании всего курса. Я выражаю свою глубокую благодарность В. В. Розанцевой и М. Э. Эглит за проделанную ими огромную работу, обеспечившую появление предлагаемого курса. Я очень благодарен В. П. Карликову, оказавшему мне большую помощь при составлении текста, посвященного гидродинамике, и Д. Д. Ивлеву, много помогавшему мне при составлении текста главы, посвященной плоской задаче теории упругости.

При подготовке и редактировании раздела, посвященного общей теории газовых и гидравлических машин, мне оказали большую помощь Г. М. Бам-Зеликович, Г. Ю. Степанов и А. Я. Черкез, которым я выражаю свою искреннюю благодарность.

Я также очень благодарен вложившей много труда Е. И. Свешниковой и многим другим моим сотрудникам и ученикам, которые помогали мне при составлении первого варианта ротапринтного издания курса.

Дополнительная литература по механике сплошной среды перечислена в конце II тома.

Л. И. Седов

Москва,
декабрь 1968 года

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Предмет и методы механики сплошной среды

Предмет механики сплошной среды

Механика сплошной среды — обширная часть механики, посвященная движению газообразных, жидких и твердых деформируемых тел.

В теоретической механике изучаются движения материальной точки, дискретных систем материальных точек и абсолютно твердого тела. В механике сплошной среды с помощью и на основе методов и данных, развитых в теоретической механике, рассматриваются движения таких материальных тел, которые заполняют пространство непрерывно, сплошным образом, и расстояния между точками которых во время движения меняются.

Помимо обычных материальных тел, подобных воде, воздуху или железу, в механике сплошной среды рассматриваются также особые среды — поля: электромагнитное поле, поле излучений, гравитационное поле (поле тяготения) и др.

Можно указать много разнообразных движений жидкостей, газов и твердых деформируемых тел, с которыми мы встречаемся при рассмотрении явлений природы и при решении многочисленных технических задач.

Многими движениями деформируемых тел мы можем управлять в необходимой степени, опираясь на повседневный элементарный личный опыт. Обыденные жизненные наблюдения создают у нас чувство реальности и «здравого смысла», которое часто позволяет верно предсказывать и создавать нужные нам механические эффекты.

Однако в сложных случаях требуется особое накапливание и концентрация схематизированного опыта, требуются специальные методы теоретических и экспериментальных исследований. Проведение подобных исследований привело к созданию и развитию механики сплошной среды как науки.

Легко привести примеры, когда каждый из нас может сразу указать способ решения важнейших практических вопросов о движении деформируемых тел. Например, как перелить воду из одного сосуда в другой, как сохранить теплый воздух внутри помещения, как защитить себя от ветра и дождя и т. п. Вместе с тем существует множество других вопросов, на которые можно

дать ответы только на основании специальных знаний. Например, какова скорость вытекания газа из отверстия в баллоне, в котором газ находится в сжатом состоянии; как будет двигаться в атмосфере воздушный циклон; как можно снизить воздушное сопротивление самолета или водяное сопротивление корабля; как построить телевизионную металлическую башню высотой в 500 *м*, мост с пролетом между двумя ближайшими опорами более двух километров; что произойдет с увеличением или уменьшением диаметра воздушного винта на самолете; что можно сказать о распределении давлений и о движении воздуха при взрыве бомбы и т. д. и т. п.

Отметим сразу, что существует весьма много вопросов и задач, на которые мы еще не можем дать требуемого удовлетворительного ответа с помощью известных нам экспериментальных и теоретических методов. Решение новых сложных проблем, имеющих научное и практическое значение, и задач, исследование которых подготовлено предшествующим развитием науки, составляет в настоящее время предмет научно-исследовательской работы.

Примерами новых актуальных проблем являются: снижение сопротивления тел при движении в воде с большими, порядка 100 *м/сек*, скоростями; создание и удержание плазмы с температурой в миллионы градусов; выяснение особенностей поведения материалов при больших нагрузках и больших температурах (с учетом явлений пластичности, ползучести и т. п.); определение сил, действующих на сооружения при взрывах; создание гиперзвукового самолета для дальних пассажирских полетов; объяснение общей циркуляции воздуха в атмосфере; прогноз погоды; изучение механических процессов в растениях и живых организмах; проблемы эволюции звезд, явлений, происходящих на Солнце, и др.

Прогресс науки и техники в указанных направлениях тесно связан и определяется исследовательской работой, тем не менее в настоящее время, наряду с точными научными данными, в технике большую роль играет также развитый «здравый смысл», талант, интуиция и механическое «чутье» конструктора и инженера, которые можно развить в результате большого опыта. Не следует думать, что все строящиеся машины, самолеты, корабли и т. п. могут быть рассчитаны и заранее проанализированы во всех деталях. В настоящее время многое из творений техники делается так же, как викинги более тысячи лет тому назад строили корабли. Тогда не существовало механики как науки даже в зачаточном состоянии, между тем викинги строили корабли, обладавшие хорошими мореходными качествами.

Вместе с тем современная техника усложнилась настолько, что теперь в технике уже нельзя обходиться без науки, без ис-

пользования накопленного и систематизированного опыта. Так же как современное производство немыслимо без соответствующей механизации, так же и развитие техники сейчас немыслимо без опоры на созданную научную базу.

Проблемы механики сплошной среды

Назовем некоторые наиболее существенные разработанные проблемы механики сплошной среды.

Проблема воздействия жидкости и газа на движущиеся в них тела. Силы, действующие со стороны жидкости на тело, определяются движением жидкости, поэтому изучение движения тел в жидкости непосредственно связано с изучением движения жидкости.

Особым стимулом развития этой проблемы послужили технические задачи о движении самолетов, вертолетов, дирижаблей, снарядов, ракет, кораблей, подводных лодок; задачи о создании различных двигательных приспособлений — таких, как водяные и воздушные винты, и т. д. и т. п.

Движение жидкости и газа по трубам и вообще внутри различных машин. В этих вопросах основное значение имеют законы взаимодействия жидкости с границами потока и, в частности, величина сопротивления подвижных и неподвижных твердых стенок; явления неравномерности в распределении скоростей и т. п. Эти задачи имеют непосредственное значение для проектирования газопроводов, нефтепроводов, насосов, турбин и других гидравлических машин.

Фильтрация — движение жидкости сквозь почву и другие пористые среды. Например, в почве постоянно наблюдается движение воды, которое необходимо учитывать при постройке фундаментов различных сооружений (плотин, опор мостов, гидростанций), при создании подземных туннелей и т. д. и т. п. Большое значение фильтрация имеет в нефтяном деле.

Гидростатика — равновесие жидкостей и тел, плавающих внутри и на поверхности жидкости; фигуры равновесия вращающихся масс жидкости под действием сил ньютонианского тяготения.

Волновые движения. Распространение волн в твердых телах; волны на поверхности моря; волны, вызываемые движением корабля; распространение волн в каналах и реках; приливы; сейсмические процессы; звуковые колебания; общая проблема шума в различных средах и т. п. Окружающая нас среда (жидкости, газы, твердые тела и различные поля) постоянно находится в состоянии вибраций и различных распространяющихся во времени и по объемам возмущенных движений. Непосредственно ясно, что эти явления играют очень важную роль в нашей жизни и существенны при решении многочисленных технических вопросов.

Неустановившиеся движения газов с химическими превращениями при взрывах, детонации и горении, например в потоке воздуха, в цилиндрах поршневых машин или камерах реактивных двигателей и т. д.

Защита твердых тел от сгорания и сильного оплавления при входе с большими скоростями в плотные слои атмосферы.

Теория турбулентных движений газов и жидкостей, представляющих собой в действительности очень сложные нерегулярные, случайного характера движения, пульсирующие около некоторых средних регулярных процессов, которые в рассматриваемых и ставящихся задачах существенны с практической точки зрения. Подавляющее число движений газов и жидкостей в звездах и космических облаках, в атмосфере Земли, в реках, каналах, в трубопроводах и других разнообразных технических сооружениях и машинах имеет турбулентный характер. Отсюда ясна огромная важность теории и экспериментов, посвященных изучению турбулентности. Исследования по турбулентности до настоящего времени еще никак нельзя считать достаточными для понимания многих особенностей и закономерностей в природе таких сложных движений.

Проблемы описания движения очень сильно сжатых жидкостей и газов с учетом усложненных физических свойств различных сред в таких состояниях, особенно при наличии высоких температур. Существуют интересные и важные отрасли техники, в которых необходимо иметь дело с телами, подверженными большим давлениям (порядка многих тысяч и миллионов атмосфер), например при искусственном изготовлении алмазов, при применении взрывов для штамповки деталей некоторых конструкций и в множестве других задач.

С другой стороны, очень важны явления, происходящие в сильно разреженных газах. При изучении различных процессов, связанных с движением сред при большом вакууме в лабораторных опытах, в космическом пространстве, в атмосферах планет и звезд, также требуется применять методы механики сплошной среды.

Проблемы магнитной гидродинамики и исследования движений ионизованных сред — плазмы с учетом их взаимодействий с электромагнитным полем в настоящее время приобретают первостепенное познавательное и техническое значение. В частности, такие явления нужно изучать при создании магнитогидродинамических генераторов электрического тока, в которых происходит непосредственное превращение энергии движения плазмы в энергию электрического тока. Отметим также, что решение проблемы использования термоядерной энергии теснейшим образом связано с разрешением задач о поведении высокотемпературной плазмы в сильных магнитных полях.

Наука о прогнозе погоды — метеорология в значительной степени представляет собой изучение движения воздушных масс в атмосфере Земли и является важным разделом механики сплошной среды, тесно связанным с множеством других разделов физики.

Основные проблемы астрофизики и космогонии изучаются в рамках механики сплошной среды. Сюда относятся вопросы о внутреннем строении звезд и строении их фотосфер, о движении туманностей и космических облаков, вспышках и взрывах переменных звезд, о колебаниях цефеид и, наконец, основная задача о развитии галактик и о строении и эволюции Вселенной.

Значительная часть механики сплошной среды посвящена исследованию движений и равновесий «твердых» деформируемых тел. Теория упругости является основой для постройки всякого рода сооружений и всевозможных машин. В настоящее время приобретают все большее значение отделы механики, посвященные изучению усложненных упругих свойств тел и учету неупругих эффектов в твердых телах, таких, как пластичность, связанная с появлением остаточных деформаций, ползучесть, связанная с постепенным нарастанием деформаций при неизменных внешних нагрузках и с жаропрочностью частей машин (явления ползучести проявляются при долговременной работе различных конструкций, а при повышенных температурах — и в короткие промежутки времени).

Большое значение имеют изучение различных видов усталости материалов, учет явлений наследственности в процессах движения и равновесия тел.

С появлением и использованием новых полимерных материалов становится совершенно необходимым учет их внутренней физической структуры, которая может изменяться в интересных для практики явлениях.

Наконец, большое значение имеют работы, посвященные общей задаче о прочности и о разрушении конструкций из различных материалов. Эта важнейшая практическая задача до сих пор еще не имеет ясного удовлетворительного решения.

Можно упомянуть еще о механических проблемах, связанных с движением всякого рода смесей, с движением песков, снега и различных грунтов, сплавов, жидких растворов, суспензий и эмульсий, жидкостей с полимерными добавками и т. д. и т. п. Интересны проблемы кавитации, характеризующейся образованием и исчезновением в движущейся жидкости пузырьков и больших каверн, наполненных газами и парами жидкости.

Нужно особенно подчеркнуть, что в последнее время вопросы технологии производства на химических предприятиях базируются на механических исследованиях о движениях соответствующих сплошных сред.

Важны новые современные теории, в которых исследуются проблемы взаимодействия мощных лазерных лучей с различными телами — задачи нелинейной оптики, взаимодействия движущихся тел с электромагнитными полями. Такие взаимодействия в макроскопических масштабах существенно связаны с эффектами, описываемыми в рамках квантовой механики. Аналогичное положение встречается при описании макроскопических свойств тел, связанных с движением при очень низких температурах или с учетом намагниченности и электрической поляризации.

В последнее время ставится очень много исследований в области биологической механики, в частности, строятся механические модели, позволяющие описывать движение крови в живых организмах и явление сокращения мышц.

Методы механики сплошной среды

Предлагаемый курс является теоретическим курсом механики сплошной среды. В нем будут рассматриваться математические методы изучения движения деформируемых тел. Эти методы характеризуются следующим.

Вводится ряд понятий, которые характеризуют и однозначно определяют движение сплошной среды. Эти понятия должны определяться с помощью чисел или других математических понятий. Примерами таких понятий могут служить поле скоростей, поле давлений, температура, циркуляция и т. п. В дальнейшем мы ознакомимся подробно с этими и с многими другими характеристиками движения сплошной среды.

В механике сплошной среды разрабатываются методы сведения механических задач к задачам математическим, т. е. к задачам об отыскании некоторых чисел или числовых функций с помощью различных математических операций.

Кроме того, важнейшей целью механики сплошной среды является установление общих свойств и законов движения деформируемых тел. В дальнейшем мы познакомимся с рядом законов о силах, действующих со стороны жидкости на движущиеся внутри нее тела; установим связь между давлением и скоростью, которая имеет место для ряда важных и довольно широких классов движений; выясним связь между внешними нагрузками и возникающими при этом деформациями и т. п.

Следует еще отметить, что само решение конкретных задач механики сплошной среды путем математических операций также обычно относится к механике сплошной среды. Это объясняется тем, что, как правило, даже в простейших случаях математически поставленные задачи механики сплошной среды получаются очень трудными и неразрешимыми эффективно современными средствами математики. Поэтому приходится видоизменять постановки задач и находить приближенные решения

на основе различных механических гипотез и соображений.

Под влиянием механики сплошной среды ряд отраслей математики получил большое развитие. Например, механика сплошной среды оказала большое влияние на развитие некоторых разделов теории функций комплексного переменного, краевых задач для уравнений с частными производными, интегральных уравнений и др.

Весьма полезны аналогии некоторым задачам механики сплошной среды, которые обнаруживаются при ближайшем рассмотрении в других отделах механики и физики.

Оказывается также, что различные проблемы механики сплошной среды и математические методы их исследования во многих случаях тесно связаны между собой. Так, например, исследования движения жидкости в трубах послужили для объяснения некоторых основных фактов движения жидкости около крыла самолета. Методы решения задачи об обтекании крыла самолета имеют много общего с математическими методами решения задач о фильтрации жидкости в почве. Многие результаты теории движения газов в трубах, оказывается, можно использовать при рассмотрении различных задач о волновых движениях воды в каналах и т. д. и т. п.

На первых порах мы будем далеки от изучения указанных выше задач. Вначале нам потребуется подготовить много материала общемеханического и математического характера. Вначале у читателя не будет чувства того, что он уже занимается или подходит непосредственно к изучению вопросов, касающихся реальных, наблюдающихся в природе и технике явлений. Утешением к такому положению вещей может послужить ссылка на историческое развитие механики сплошной среды. Прошло более ста лет, прежде чем математические методы механики сплошной среды в теории движения жидкостей и газов получили успех в практических вопросах.

В настоящем курсе излагаются основы механики сплошной среды, которые достаточны и необходимы для специального изучения различных конкретных вопросов.

§ 2. Основные гипотезы

а) Строение реальных тел и гипотеза сплошности

При изучении движения тел необходимо опираться на их реальные свойства. Как известно, все тела представляют собой совокупности разного сорта молекул и атомов. Иногда тела могут быть ионизованными, т. е. состоящими из электронов, ионов

(атомов и молекул с лишним или недостающим числом электронов) и нейтральных частиц. Приведем некоторые известные из физики данные об элементарных частицах.

Данные об элементарных частицах

Приведем данные о размерах и массе частиц: радиус ядра атома имеет порядок 10^{-13} *см*, радиус молекулы водорода $1{,}36 \cdot 10^{-8}$ *см*, т. е. радиус ядра атома много меньше радиуса молекулы, и в то же время именно в нем сосредоточена основная масса вещества: масса электрона $9{,}1066 \cdot 10^{-28}$ *г*, масса протона $1{,}6724 \cdot 10^{-24}$ *г*.

При обычных условиях (температура 0° С, атмосферное давление на уровне моря) в объеме воздуха в один кубический сантиметр содержится $N = 2{,}687 \cdot 10^{19}$ молекул. Если взять кубик с ребрами в одну тысячную сантиметра, что нередко лежит за пределами повседневной точности измерения длин в технике, то и в нем будет находиться $27 \cdot 10^9$ частиц. На высоте 60 *км*, что намного больше «потолка» современных самолетов, число частиц в атмосфере $N = 8 \cdot 10^{15}$ $1/см^3$. В межзвездной среде, где имеется сильно разреженный газ, $N = 1$ $1/см^3 = 10^{15}$ $1/км^3$. Расстояние в километр мало по сравнению с характерными космическими расстояниями, поэтому даже межзвездный газ можно рассматривать как среду с очень большим числом частиц в малых объемах.

На Луне нет атмосферы, там $N = 10^{10}$ $1/см^3$, т. е. в 2,7 миллиарда раз меньше, чем у поверхности Земли. Такого сильного вакуума в лабораторных условиях на Земле практически не получают. При таком вакууме при соприкосновении веществ во многих случаях происходит их сваривание.

Для железа (Fe) $N = 8{,}622 \cdot 10^{22}$ $1/см^3$, плотность

$$\rho_{Fe} = 7{,}8 \ г/см^3,$$

а плотность ядерного вещества

$$\rho_{яд.\ в.\ Fe} = 1{,}16 \cdot 10^{14} \ г/см^3 \text{ и } \rho_{Fe}/\rho_{яд.\ в.\ Fe} = 7 \cdot 10^{-14}.$$

Мы видим, что объемы, занимаемые телами, много больше объемов, в которых, собственно говоря, сосредоточено само вещество.

Итак, все тела, по существу, «состоят из пустоты» и в то же время в практически малых объемах пространства, занятого телом, всегда заключено большое число частиц.

Атомы и молекулы находятся в постоянном хаотическом движении.

При обычных атмосферных условиях средняя скорость $v_{ср}$ молекул водорода 1,692 *м/сек* (больше скорости современного пассажирского самолета). Молекулы все время сталкиваются друг с другом, путь свободного пробега молекулы во-

дорода в обычных атмосферных условиях $l = 11{,}2 \cdot 10^{-6}$ *см*. Для кислорода $v_{ср} = 425$ *м/сек*, $l = 6{,}5 \cdot 10^{-6}$ *см*, т.е. одна молекула за 1 секунду сталкивается $6{,}55 \cdot 10^9$ раз.

О взаимодействии частиц

Между частицами имеются определенные взаимодействия. В газе они связаны только со столкновениями. В жидкостях и твердых телах частицы расположены ближе, и в них существенны силы взаимодействия.

Силы, обеспечивающие прочность и упругость тел, имеют электрическую природу и, грубо говоря, сводятся к силам Кулона. Что касается ядерных сил и сил слабого взаимодействия, то они проявляются только при ядерных реакциях, когда частицы взаимодействуют на близких расстояниях друг к другу. Для того чтобы так сблизить частицы, требуется колоссальная энергия, которая может возникать за счет хаотического движения частиц при температурах в многие миллионы градусов.

О существенных для механики сплошной среды физико-химических процессах

Зная электрические силы взаимодействия между частицами, можно строить теорию твердых деформируемых тел. Поэтому для нас очень важна электродинамика.

При введении абстракций для моделирования реальных тел необходимо учитывать различные структурные особенности тел. Тела могут быть газообразными, жидкими, твердыми, кристаллическими, с различными фазами. При возрастании температуры возникают состояния, в которых вещество можно рассматривать одновременно как газ, жидкость или как твердое тело.

Помимо структуры важное значение имеют природа вещества и свойства составных частей смесей, растворов, сплавов.

Во многих случаях возникают механические задачи о движении тел с учетом изменения качества составных частей и их относительного содержания. Таковы, например, задачи о движении газов, сопровождаемом ядерными и химическими реакциями и, в частности, горением, диссоциацией, рекомбинацией, ионизацией и т. д.

При движении материальных тел важное значение могут иметь процессы фазовых переходов, такие, как конденсация, испарение, плавление, затвердевание, полимеризация, перекристаллизация и т. д.

При изучении движения сплошной среды — материальных континуумов необходимо вводить внутренние напряжения. В телах с дискретным молекулярным строением внутренние напряжения являются статистическими средними, обусловленными как непосредственными силами взаимодействия между молекулами, расположенными по разные стороны от рассматриваемого сечения, так и переносом макроскопического количества

движения через это сечение, происходящим в результате теплового движения молекул.

Свойство вязкости в газах объясняется действием теплового движения молекул, выравнивающим макроскопические движения соседних частиц газа. Таким образом, свойства внутренних напряжений в материальных средах определяются их молекулярным составом, силами взаимодействия между молекулами и атомами, проявляющимися только на очень близких между ними расстояниях, и тепловым движением, характеризуемым температурой.

Аналогичным образом объясняется явление теплопроводности. Для любых двух соседних частиц среды, между которыми имеется контакт, происходит обмен энергией либо путем столкновений, либо непосредственно за счет обмена быстрыми и медленными молекулами. Статистически средняя энергия теплового движения, характеризующаяся температурой, стремится к выравниванию.

Механизм диффузии в смесях также объясняется молекулярно-кинетическим процессом перемешивания молекул в результате теплового движения.

Несколько сложнее описывается явление излучения, происходящее за счет квантовых эффектов изменения уровней энергии в системе молекулы, или атома, или ядра атома, а также за счет ускоренных движений заряженных частиц. Явление излучения, которое можно рассматривать как испускание фотонов, во многих случаях тесно связано с хаотическим тепловым движением и существенным образом зависит от температуры, определяющей возможные возбуждения энергии при столкновении частиц. Исследование движений материальных сред при больших температурах необходимо производить с учетом эффектов передачи энергии и изменения температуры за счет сопутствующих процессов поглощения и рассеяния лучистой энергии.

Электрическая поляризация и намагничивание, связанные с правильным, упорядоченным расположением элементарных частиц в телах, также могут иметь существенное значение при различных движениях материальных тел.

Механизмы внутренних взаимодействий в твердых телах, в материалах со сложным строением молекул, в телах с очень большой плотностью при сравнительно низких температурах и в других случаях могут быть очень сложными и не описываются, вообще говоря, в рамках ньютонианской механики. Для понимания соответствующих взаимодействий во многих случаях необходимо использовать понятия и законы квантовой механики.

В перечисленных выше явлениях установление макроскопических законов на основании глубокого анализа физических

микроскопических механизмов и свойств элементарных частиц составляет одну из главных задач физики.

Статистический и феноменологический подходы

Заметим, что сложное строение молекул и удерживающие их электрические силы взаимодействия не всегда известны. Казалось бы, механику следует развивать на базе представления о материальном теле как совокупности элементарных частиц. Однако следить за движением каждой элементарной частицы из-за их весьма большого числа и неизвестности сил взаимодействия между ними невозможно. Очень важно отметить, что, как правило, даже несущественно знать движение каждой элементарной частицы.

Для практики требуются только некоторые средние, суммарные, или глобальные, характеристики.

Одним из общих методов подхода к исследованию поведения материальных сред является развиваемый в физике статистический метод.

В нем применяется вероятностный подход к изучаемым явлениям и вводятся средние по большому ансамблю частиц характеристики. Статистические методы всегда связаны с введением дополнительных гипотез о свойствах частиц, их взаимодействии и с упрощением этих свойств и взаимодействий. Заметим, что во многих случаях не существует даже базы для построения таких методов. В тех же случаях, когда они построены, они обычно не являются эффективными средствами решения задач в силу чрезмерной сложности соответствующих уравнений.

Другим общим методом подхода к исследованию движения материальных тел является построение феноменологической макроскопической теории, основанной на общих, добытых из опыта закономерностях и гипотезах. Макроскопические теории являются эффективным средством решения практически важных задач, и добытые с их помощью сведения согласуются с опытом.

В дальнейшем будем развивать феноменологическую макроскопическую теорию материальной среды.

Гипотеза сплошности

Введем понятие сплошной среды. Все тела состоят их отдельных частиц, но их много в любом существенном для нас объеме, поэтому тело можно приближенно рассматривать как среду, заполняющую пространство сплошным образом. Воду, воздух, железо и т. д. будем рассматривать как тела, целиком заполняющие некоторую часть пространства.

Непрерывным континуумом можно считать не только обычные материальные тела, но и различные поля, например электромагнитное поле.

Эта идеализация, в частности, необходима потому, что мы хотим при исследовании движения деформируемых тел использовать аппарат непрерывных функций, дифференциальное и интегральное исчисления.

б) О пространстве и времени

Под пространством понимают совокупность точек, задаваемых с помощью чисел, которые называются координатами.

Метрическое пространство Будем рассматривать непрерывные метрические многообразия — пространства, в которых определены расстояния между точками. Примером метрического пространства может служить обычное трехмерное евклидово пространство, точки которого задаются с помощью единой для всего пространства декартовой системы координат x, y, z и расстояние между двумя точками x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 определяется по формуле

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \qquad (2.1)$$

Евклидово пространство В любом ли пространстве можно ввести единую для всего пространства декартову систему координат? Рассмотрим для простоты двумерные пространства. Очевидно, что на плоскости всегда можно ввести единую для всей плоскости декартову систему координат. На поверхности сферы, кривизна которой не равна нулю, этого сделать нельзя, т. е. нельзя на сфере ввести систему координат так, чтобы расстояния между двумя любыми точками на ней определялись формулой (2.1). На сфере декартову систему координат можно ввести только в малой окрестности каждой точки. В случае трехмерных пространств также не всегда можно ввести единую для всего пространства декартову систему координат.

В дальнейшем мы в основном будем рассматривать только такие пространства, в каждом из которых можно ввести единую для всех точек декартову систему координат. Такие пространства называются евклидовыми, а развиваемая на их основе механика носит название ньютонианской. Опыт показывает, что физическое действительное пространство в не очень больших масштабах с большой точностью можно считать евклидовым.

Абсолютное время Понятие времени связано с опытом и необходимо в механике. Любое механическое явление всегда описывается с точки зрения какого-либо наблюдателя. Время, вообще говоря, может зависеть от системы отсчета наблюдателя.

Мы будем считать, что время течет одинаково для всех наблюдателей — в поезде, самолете, аудитории... Следовательно, мы

будем пользоваться абсолютным временем — идеализацией, которая пригодна для правильного описания реальности не всегда, а только тогда, когда не учитываются эффекты теории относительности.

Итак, будем рассматривать движение сплошной среды — континуума в евклидовом пространстве и будем пользоваться абсолютным временем. Таким образом, выше введены три фундаментальные гипотезы, с использованием которых будет строиться теория движения деформируемых тел. Выводы из теории, основанной на этих гипотезах, часто, но не всегда, согласуются с опытом. В нужных случаях принятую модель пространства и времени можно уточнять и обобщать. Однако все дальнейшие обобщения строятся с учетом и на основе механики Ньютона, базирующейся на описанных выше фундаментальных гипотезах. Сущность этих гипотез станет более понятной из развиваемой далее теории.

ГЛАВА II

КИНЕМАТИКА ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЫ

§ 1. Точка зрения Лагранжа на изучение движения сплошной среды

Системы координат

Движение всегда определяется по отношению к некоторой системе отсчета — системе координат. С помощью системы координат устанавливается соответствие между числами и точками пространства. Для трехмерного пространства точкам ставятся в соответствие три числа x^1, x^2, x^3, которые называются координатами точки. Линии, на которых какие-либо две координаты сохраняют постоянные значения, называются координатными линиями (рис. 1). Например, линия, вдоль которой $x^2 = \text{const}$, $x^3 = \text{const}$, определяет координатную линию x^1, вдоль этой линии различные точки фиксируются значениями x^1; направление роста координаты x^1 определяет направление вдоль этой линии. Через каждую точку пространства можно провести три координатные линии. Касательные к координатным линиям в каждой точке не лежат в одной плоскости и образуют, вообще говоря, неортогональный триэдр.

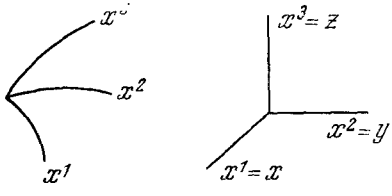


Рис. 1. Криволинейная и декартова системы координат.

Если координатные линии x^1, x^2, x^3 прямые, то это прямолинейная система координат; если нет, то — криволинейная. Дальше мы увидим, что криволинейные системы координат, по существу, необходимы в механике сплошной среды.

Обозначения координат и времени

Условимся через x^1, x^2, x^3 обозначать координаты относительно любой, в том числе иногда и декартовой, системы координат, а через x, y, z — координаты только относительно ортогональной декартовой системы координат, через t — время.

Движение точки

Точка движется относительно системы координат x^1, x^2, x^3, если ее координаты меняются в зависимости от времени:

$$x^i = f^i(t) \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{1.1}$$

Движущаяся точка в разные моменты времени отождествляется с разными точками пространства. Движение точки известно, если известны функции (1.1), называемые законом движения точки.

Движение континуума

Сплошная среда представляет собой непрерывную совокупность точек. По определению знать движение сплошной среды — это значит знать движение всех ее точек (изучения движения объема сплошной среды как целого вообще недостаточно).

Об индивидуализации точек континуума

Для этого необходимы правила индивидуализации отдельных, совершенно одинаковых с геометрической точки зрения точек континуума. В дальнейшем увидим, что используемые в теории правила индивидуализации определяются, вообще говоря, тем, что движение каждой точки сплошной среды подчиняется определенным физическим законам. Индивидуальные точки сплошной среды можно, например, задавать значениями их начальных координат. Координаты точек в начальный момент времени t_0 будем обозначать двояко: a, b, c или ξ^1, ξ^2, ξ^3, а координаты точек в любой момент времени — x^1, x^2, x^3.

Закон движения континуума

Для любой точки континуума, выделяемой координатами a, b, c, можно написать закон движения, в который входят функции уже не одной, как в случае движения точки, а четырех переменных — начальных координат a, b, c и времени t:

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= x^1(a, b, c, t), \\ x^2 &= x^2(a, b, c, t), \\ x^3 &= x^3(a, b, c, t) \end{aligned}\right\} \text{ или } x^i = x^i(a, b, c, t), \qquad (1.2)$$

Если в (1.2) a, b, c будут фиксированными, а t — переменным, то (1.2) дадут закон движения одной фиксированной точки континуума. Если a, b, c будут переменными, а t — фиксированным, то функции (1.2) дадут распределение точек континуума в пространстве в данный момент времени. Если переменными будут и a, b, c и t, то на (1.2) можно смотреть как на формулы, определяющие движение сплошной среды, и по определению функции (1.2) являются законом движения континуума.

Лагранжевы переменные

Координаты a, b, c или ξ^1, ξ^2, ξ^3, индивидуализирующие точки континуума (или иногда определенные функции от них), и время t называются переменными Лагранжа.

Основная задача механики сплошной среды заключается в определении функций (1.2).

В дальнейшем мы всегда явно или неявно будем опираться на понятие закона движения.

Ради общности заметим, что сплошная среда представляет собой совокупность точек, но не обязательно должна являться материальным телом. Так, например, иногда можно условиться изображать точками на плоскости цены различных товаров и изучать методами кинематики сплошной среды движение цен в экономике.

Можно также, и это часто делают, изучать законы перемещения в пространстве различных состояний движения материальных частиц, а не самих частиц. Например, на поверхности ржаного поля в ветреную погоду наблюдаются волны, и можно говорить о перемещениях в пространстве максимальных возвышений или впадин поверхности ржи, а не самих колосьев.

Таким образом, в кинематике сплошную среду можно рассматривать как абстрактный геометрический образ, а не только как материальное тело. Движение сплошной среды может управляться различными законами. Это могут быть, если мы рассматриваем движение материального тела, уже известные нам в основном физические законы или, если мы говорим, например, о движении цен, только познаваемые в настоящее время математические законы экономики.

Непрерывность функций, задающих закон движения

При изучении механики деформируемой среды мы хотим опереться на аппарат дифференциального и интегрального исчислений. Поэтому предположим, что функции, входящие в закон движения континуума, непрерывны и имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам. Это довольно общее допущение, но вместе с тем оно сильно ограничивает класс допустимых для изучения явлений.

Действительно, воду, например, можно разбрызгивать. При этом находившиеся первоначально бесконечно близко друг к другу частицы воды в последующие моменты времени не будут близки друг к другу. Описать такого рода явление в предположении о непрерывности закона движения нельзя. В последующем увидим, что во многих случаях предположение о непрерывности движения придется ослаблять и рассматривать такие движения, сами характеристики которых или их производные терпят разрывы на отдельных поверхностях. Такого рода разрывы, например ударные волны, мы будем рассматривать в дальнейшем. Однако заметим, что изучение разрывных движений ведется на базе теории непрерывных движений.

Взаимооднозначность закона движения

Основываясь на соображениях физического характера, предположим, что в каждый фиксированный момент времени $t = \text{const}$ функции $x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ являются взаимно однозначными функциями.

Как известно, в этом случае якобиан

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix} \neq 0,$$

т. е. формулы (1.2) можно разрешить относительно ξ^1, ξ^2, ξ^3 и представить решение в виде однозначных непрерывных функций

$$\xi^i = \xi^i(x^1, x^2, x^3, t). \tag{1.3}$$

Общие свойства непрерывных отображений

Совокупность значений x^1, x^2, x^3 образует в пространстве область D, занимаемую телом в данный момент времени t. Если координаты ξ^1, ξ^2, ξ^3 рассматривать как значения координат x^1, x^2, x^3 в некоторый другой момент времени t_0, то область D_0

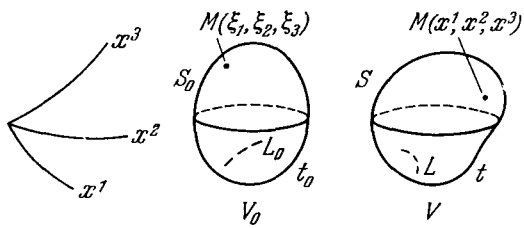


Рис. 2. Движение континуума. При $t = t_0$ $x^1 = \xi^1$, $x^2 = \xi^2$, $x^3 = \xi^3$.

изменений ξ^1, ξ^2, ξ^3 соответствует объему, занятому телом в момент t_0.

В этом случае закон движения (1.2) и (1.3) можно рассматривать как взаимно однозначное и непрерывное отображение областей D и D_0.

Как известно, общие топологические свойства таких преобразований заключаются в том, что любой объем V_0 переходит в объем V, поверхность S_0 — в поверхность S, линия L_0 — в линию L, причем замкнутая поверхность переходит в замкнутую, а замкнутая линия — в замкнутую линию (рис. 2). Например, объем не может перейти в точку, так как при этом нарушилось бы условие взаимооднозначности, а замкнутая линия не может перейти в незамкнутую линию, так как при этом нарушилось бы условие непрерывности.

Система отсчета

Как всякое движение, движение континуума всегда определяется по отношению к некоторой системе координат x^1, x^2, x^3 — системе отсчета наблюдателя. Эта система координат может быть выбрана произвольно. Она вводится по условию, и выбор ее зависит от исследователя. На практике она часто связана с Землей, но может быть связана и с Солнцем, звездами, самолетом, вагоном и т. д. По смыслу введения она может быть подвижной или может считаться неподвижной.

В ньютонианской механике особенное физическое значение имеет рассмотрение движения относительно инерциальных систем координат, движущихся относительно друг друга поступательно с постоянной по времени скоростью. Наличие таких систем координат (тесно связанное с постулатом о евклидовости физического пространства и постулатом об абсолютном и одинаковом собственном времени для разных точек) является основным постулатом механики Ньютона [1]).

Все физические законы в физике Ньютона обычно формулируются в инерциальных системах координат и не зависят от выбора инерциальной системы координат. В этом состоит знаменитый принцип Галилея — Ньютона.

На практике, в жизни, в качестве инерциальной системы координат можно выбрать декартову систему координат, в которой далекие звезды можно считать неподвижными.

Сопутствующая система

Вместе с тем в случае движения сплошной среды нужно ввести еще сопутствующую систему координат. Наряду с координатами x^1, x^2, x^3 лагранжевы координаты индивидуальных точек ξ^1, ξ^2, ξ^3 можно рассматривать как другие координаты тех же точек пространства в области D. Соответствующая система координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 в том же

---

[1]) В специальной теории относительности также постулируется наличие инерциальных систем координат, связанных между собой преобразованием Лоренца, однако физическое пространство задается как четырехмерное псевдоевклидово пространство Минковского (четвертая координата связана с собственным временем). В этой теории для наблюдателей, описывающих относительное движение, также можно пользоваться любыми подвижными системами координат.

В общей теории относительности любые движущиеся друг относительно друга системы координат считаются равноправными, а физическое пространство не задается, а определяется, однако в предположении, что физическое пространство четырехмерное и риманово, причем для малых объемов выполняются законы специальной теории относительности.

Любопытно отметить, что в результате решения соответствующих задач получается, что многосвязное в топологическом смысле пустое (отсутствуют массы и заряды) риманово пространство в известном смысле похоже на евклидово пространство с гравитационным и электрическим полями, обусловленными присутствующими массами и зарядами. См. Дж. У и л е р, Гравитация, нейтрино и Вселенная, ИЛ, Москва, 1962, перев. с англ.

пространстве образует подвижную деформируемую криволинейную систему координат, которая называется сопутствующей системой координат. Так, если в начальный момент t_0 выбрать в сплошной среде некоторые координатные линии ξ^1, ξ^2, ξ^3, состоящие из точек сплошной среды, то в следующий момент времени они вместе с точками континуума вновь перейдут в координатные линии сопутствующей системы. Однако если в

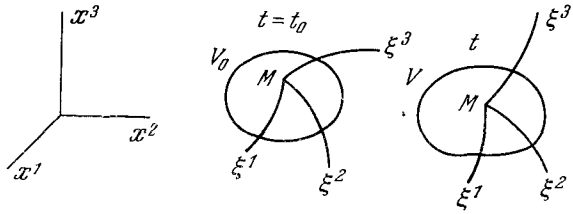


Рис. 3. x^1, x^2, x^3 — система отсчета, ξ^1, ξ^2, ξ^3 — сопутствующая лагранжева система.

начальный момент времени они и были выбраны прямыми, то в следующий момент они, вообще говоря, будут искривленными (рис. 3).

Таким образом, если рассматривать систему координат, связанную с частицами сплошной среды, то она с течением времени будет изменяться. Выбор такой системы координат в любой данный момент времени в нашей власти, но в следующие моменты времени она уже не подвластна нам, так как она «вморожена» в среду и деформируется вместе с ней. Такая вмороженная в среду система координат и определена выше как сопутствующая система. Все точки сплошной среды всегда покоятся относительно подвижной сопутствующей системы координат, так как их координаты ξ^1, ξ^2, ξ^3 в сопутствующей системе не меняются. Но сама система движется, растягивается, сжимается, извивается... Понятие сопутствующей системы координат является обобщением на случай сплошной среды собственной системы координат твердого тела в теоретической механике [1]).

Всегда, когда мы говорим о движении сплошной среды, необходимо индивидуализировать точки и, следовательно, пользоваться лагранжевыми координатами. Поэтому всегда при рассмотрении движения сплошной среды подразумевается

[1]) Очевидно, что для всякой системы координат и, в частности, для системы отсчета наблюдателя всегда можно ввести мысленно идеализированную среду, для которой рассматриваемая система координат является сопутствующей.

наличие системы отсчета x^1, x^2, x^3, относительно которой рассматривается движение, и сопутствующей системы координат.

Использование в качестве независимых переменных ξ^1, ξ^2, ξ^3 и t составляет точку зрения Лагранжа на изучение движения сплошной среды, которая, таким образом, существенно опирается на описание истории движения каждой точки сплошной среды в отдельности. Такое описание на практике оказывается часто слишком подробным и сложным, однако оно всегда подразумевается при формулировке физических законов. Кроме понятия закона движения, для описания движения сплошной среды необходимо ввести еще некоторые другие понятия, в частности понятия скорости и ускорения точек сплошной среды.

Скорость

Пусть некоторая точка сплошной среды в момент t находится в точке M пространства, а в момент $t + \Delta t$ — в точке M' и $\overline{MM'} = \Delta \boldsymbol{r}$.

Под $\Delta \boldsymbol{r}$ понимается малое направленное перемещение индивидуальной точки сплошной среды за время Δt. В случае, когда в пространстве можно ввести радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ (а в евклидовом пространстве это всегда возможно), $\Delta \boldsymbol{r}$, очевидно, представляет собой приращение радиуса-вектора рассматриваемой точки сплошной среды.

Предел отношения двух соответствующих бесконечно малых количеств $\Delta \boldsymbol{r}$ и Δt при $\Delta t \to 0$ в случае неевклидова пространства или частная производная радиуса-вектора точки сплошной среды относительно системы отсчета по времени $\partial \boldsymbol{r}/\partial t$ в случае евклидова пространства называется скоростью точки сплошной среды. Вектор скорости будем обозначать жирной буквой $\boldsymbol{v}$.

Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ зависит в общем случае от трех параметров ξ^1, ξ^2, ξ^3, индивидуализирующих точку сплошной среды, и времени t. Скорость вычисляется для индивидуальной точки сплошной среды, т. е. при фиксированных ξ^1, ξ^2, ξ^3, поэтому и берется частная производная от $\boldsymbol{r}$ по t:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}.$$

Скорость вычисляется относительно системы отсчета. Очевидно, что относительно сопутствующей системы координат среда покоится, и поэтому скорость относительно сопутствующей системы всегда равна нулю.

Векторы базиса

Через каждую точку пространства проходят три координатные линии, и в каждой точке пространства $M(x^1, x^2, x^3)$ можно рассмотреть элементарные прямолинейные направления $\Delta \boldsymbol{r}_1$, $\Delta \boldsymbol{r}_2$, $\Delta \boldsymbol{r}_3$, выходящие из этой точки M и соединяющие ее с точками $M_1(x^1 + \Delta x^1, x^2, x^3)$,

M_2 $(x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3)$, M_3 $(x^1, x^2, x^3 + \Delta x^3)$ соответственно. В каждой точке пространства можно ввести пределы отношений $\Delta \boldsymbol{r}_i/\Delta x_i$ или $\Delta \boldsymbol{r}_i/\Delta \xi^i$ (при $\Delta x^i \to 0$ или $\Delta \xi^i \to 0$) — векторы, которые, очевидно, будут направлены по касательным к соответствующим координатным линиям в точке M. В евклидовом пространстве эти пределы будут частными производными от $\boldsymbol{r}$ по соответствующим координатам. Если под Δx^i или $\Delta \xi^i$ понимать длины дуг вдоль соответствующих координатных линий, то $\partial \boldsymbol{r}/\partial x^i$, $\partial \boldsymbol{r}/\partial \xi^i$ по величине будут равны единице.

Введем обозначения

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} = \boldsymbol{э}_i \quad \text{и} \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^i} = \hat{\boldsymbol{э}}_i \tag{1.4}$$

и будем называть $\boldsymbol{э}_i$ и $\hat{\boldsymbol{э}}_i$ векторами базиса для системы отсчета и для сопутствующей системы соответственно. Если система координат x^1, x^2, x^3 декартова, то можно пользоваться обозначениями

$$\boldsymbol{э}_1 = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{э}_2 = \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{э}_3 = \boldsymbol{k},$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — единичные векторы по осям координат x, y, z соответственно. Если система координат x^1, x^2, x^3 или ξ^1, ξ^2, ξ^3 криволинейная, то $\boldsymbol{э}_i$ и $\hat{\boldsymbol{э}}_i$ меняются от точки к точке пространства и образуют, вообще говоря, в каждой точке пространства неортогональный триэдр.

Компоненты скорости

Бесконечно малое перемещение точки сплошной среды $\overline{MM'} = \Delta \boldsymbol{r}$ можно разложить по векторам базиса $\boldsymbol{э}_1$, $\boldsymbol{э}_2$, $\boldsymbol{э}_3$, взятым в точке M:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \Delta x^1 \boldsymbol{э}_1 + \Delta x^2 \boldsymbol{э}_2 + \Delta x^3 \boldsymbol{э}_3, \tag{1.5'}$$

где Δx^2, Δx^2, Δx^3 являются компонентами перемещения $\Delta \boldsymbol{r}$. Разложение (1.5′) можно записать в сокращенном виде:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} \Delta x^i \boldsymbol{э}_i = \Delta x^i \boldsymbol{э}_i, \tag{1.5}$$

где в последнем выражении знак суммы $\sum_{i=1}^{3}$ опущен. В дальнейшем мы обычно будем опускать знак суммы, подразумевая суммирование всякий раз, когда в выражениях типа (1.5) будут встречаться два одинаковых индекса, один из которых стоит вверху, а другой внизу.

Поделив (1.5) на элемент времени Δt, соответствующий перемещению точки сплошной среды из точки M в точку M' пространства наблюдателя, и взяв предел при $\Delta t \to 0$, получим

по определению скорость точки сплошной среды:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} = \frac{\partial x^i}{\partial t}\boldsymbol{\vartheta}_i = v^i\boldsymbol{\vartheta}_i = v^1\boldsymbol{\vartheta}_1 + v^2\boldsymbol{\vartheta}_2 + v^3\boldsymbol{\vartheta}_3, \qquad (1.6)$$

откуда

$$v^1 = \left(\frac{\partial x^1}{\partial t}\right)_{\xi^i},\quad v^2 = \left(\frac{\partial x^2}{\partial t}\right)_{\xi^i},\quad v^3 = \left(\frac{\partial x^3}{\partial t}\right)_{\xi^i},$$

где индексы ξ^i внизу указывают на то, что производные берутся при постоянных параметрах ξ^1, ξ^2, ξ^3, индивидуализирующих точку среды. Величины v^1, v^2, v^3 называются компонентами вектора скорости $\boldsymbol{v}$ в базисе $\boldsymbol{\vartheta}_1$, $\boldsymbol{\vartheta}_2$, $\boldsymbol{\vartheta}_3$. Скорость и ее компоненты зависят, вообще говоря, от ξ^1, ξ^2, ξ^3, t:

$$v^1 = v^1(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t),$$
$$v^2 = v^2(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t),$$
$$v^3 = v^3(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t).$$

Для дальнейшего установим следующие обозначения: буквами v с индексами 1, 2, 3 будем обозначать компоненты вектора скорости $\boldsymbol{v}$ в любой (в том числе иногда и декартовой) системе координат, а буквами u, v, w — компоненты вектора скорости только в декартовой системе координат. Причем u будет проекцией $\boldsymbol{v}$ на ось x, v — на ось y и w — на ось z. В декартовой системе координат положение точки среды характеризуется радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

и для скорости $\boldsymbol{v}$ имеем

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\right)_{\xi^i} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\xi^i}\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{\xi^i}\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{\xi^i}\boldsymbol{k},$$

т. е.

$$u = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\xi^i},\quad v = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{\xi^i},\quad w = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{\xi^i}.$$

О понятии вектора

Мы уже ввели в рассмотрение некоторые векторы, например скорость $\boldsymbol{v}$, радиус-вектор $\boldsymbol{r}$, перемещение $d\boldsymbol{r}$. Что же называется вектором? Вектор не скаляр, но в то же время, как и скаляр, является инвариантным, не зависящим от выбора системы координат, объектом. Определяя вектор, часто говорят, что это — три числа, называемые компонентами вектора, преобразующиеся при переходе от одной системы координат к другой определенным образом. Однако это определение недостаточно, так как вектор всегда задается в определенном базисе и, задавая вектор его компонентами, всегда надо указывать базис, в котором они заданы.

В декартовой системе координат компоненты вектора привязаны к $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, а в произвольной криволинейной системе координат — к меняющимся от точки к точке пространства векторам базиса $\boldsymbol{э}_i$. Таким образом, компоненты вектора в криволинейной системе координат, в противоположность компонентам вектора в декартовой системе, существенно связаны с точкой, в которой он рассматривается.

Говоря, например, о векторе скорости $\boldsymbol{v}$ в каждой точке пространства, надо рассматривать числа v^1, v^2, v^3 и векторы базиса $\boldsymbol{э}_1$, $\boldsymbol{э}_2$, $\boldsymbol{э}_3$ и определять вектор $\boldsymbol{v}$ по (1.6), где $\boldsymbol{э}_i$ являются базисными векторами, через которые можно представлять аналогичным способом каждый вектор в данной системе координат.

Ускорение

Кроме скорости требуется рассматривать еще ускорение $\boldsymbol{a}$ точки сплошной среды, которое также является вектором,

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right)_{\xi^i} = a^i \boldsymbol{э}_i,$$

где $a^i = a^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ — компоненты ускорения. Ускорение $\boldsymbol{a}$, как и скорость $\boldsymbol{v}$, вычисляется для индивидуальной точки сплошной среды. Определение ускорения связано с выбором системы координат наблюдателя x^1, x^2, x^3, в которой рассматривается закон движения (1.2). Система координат x^1, x^2, x^3 может быть подвижной.

Необходимо отметить, что соотношения

$$a^1 = \frac{\partial v^1}{\partial t}, \quad a^2 = \frac{\partial v^2}{\partial t}, \quad a^3 = \frac{\partial v^3}{\partial t}$$

справедливы только в декартовой системе координат и не справедливы в криволинейной. Действительно, вектор ускорения определяется как производная от вектора скорости по времени, $\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right)_{\xi^i}$, и при вычислении компонент ускорения следует иметь в виду, что точка среды с течением времени перемещается в пространстве, а векторы базиса $\boldsymbol{э}_i$ криволинейной системы меняются от точки к точке пространства. В декартовой системе координат верны также формулы

$$a^1 = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad a^2 = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad a^3 = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Во многих случаях исследования движений сплошной среды основная задача об отыскании законов движения может заменяться задачей определения функциональных зависимостей компонент скорости v^i или ускорения a^i от ξ^1, ξ^2, ξ^3 и t.

Подчеркнем специально, что точка зрения Лагранжа на изучение движения сплошной среды лежит в основе физических законов, так как они связаны с движением индивидуальных материальных частиц.

§ 2. Точка зрения Эйлера на изучение движения сплошной среды

Сущность точки зрения Эйлера

Предположим теперь, что нас интересует не история движения индивидуальных точек сплошной среды, а то, что происходит в разные моменты времени в данной геометрической точке пространства, связанного с системой отсчета наблюдателя. Пусть наше внимание концентрируется на данной точке пространства, в которую приходят разные частицы сплошной среды. Это и составляет сущность точки зрения Эйлера на изучение движения сплошной среды. Например, движение воды в реке можно изучать, либо следя за движением каждой частицы воды от верховьев реки до ее устья (это будет точка зрения Лагранжа), либо наблюдая изменение течения воды в определенных местах реки, не прослеживая движения отдельных частиц воды вдоль всей реки (это точка зрения Эйлера).

Переменные Эйлера

Точка зрения Эйлера весьма часто употребляется в приложениях. Геометрические координаты пространства x^1, x^2, x^3 и время t носят название переменных Эйлера. Движение, с точки зрения Эйлера, считается известным, если скорость, ускорение, температура и другие интересующие величины заданы как функции x^1, x^2, x^3 и t. Функции $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\ (x^1,\ x^2,\ x^3,\ t)$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\ (x^1,\ x^2,\ x^3,\ t)$, $T = T\ (x^1, x^2, x^3, t)$ и т. д. при фиксированных x^1, x^2, x^3 и переменном t определяют изменения со временем скорости, ускорения, температуры и т. д. в данной точке пространства для разных приходящих в эту точку частиц. При фиксированном t и переменных x^1, x^2, x^3 эти функции дают распределения характеристик движения в пространстве в данный момент времени t; при переменных x^1, x^2, x^3 и t — распределения характеристик движения в пространстве в разные моменты времени.

Отличие точек зрения Лагранжа и Эйлера на изучение движения сплошной среды

Таким образом, с точки зрения Лагранжа, мы интересуемся законами изменения скорости, ускорения, температуры и других величин для данной индивидуальной точки сплошной среды, а с точки зрения Эйлера — скоростью, ускорением, температурой и т. д. в данном месте. С точки зрения Эйлера, мы выделяем некоторую область пространства и хотим знать все данные о частицах, которые в нее приходят.

Ясно, что математически точка зрения Эйлера отличается от точки зрения Лагранжа только тем, что в первой переменными являются координаты точек пространства x^1, x^2, x^3 и время t, а во второй — параметры ξ^1, ξ^2, ξ^3, индивидуализирующие точку сплошной среды, и время t.

Переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера

Закон движения сплошной среды имеет вид

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), \qquad (2.1)$$

в котором независимые переменные ξ^1, ξ^2, ξ^3, t являются переменными Лагранжа. Разрешив его относительно ξ^1, ξ^2, ξ^3, получим

$$\xi^i = \xi^i(x^1, x^2, x^3, t), \qquad (2.2)$$

т. е. перейдем к переменным Эйлера. При фиксированных x^1, x^2, x^3 (2.2) указывает те точки (ξ^1, ξ^2, ξ^3) сплошной среды, которые в разные моменты времени приходят в данную точку пространства. Если скорость

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t),$$

ускорение

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t),$$

температура

$$T = T(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$$

и другие величины заданы с точки зрения Лагранжа, т. е. как функции ξ^1, ξ^2, ξ^3 и t, то (2.2) дают возможность найти скорость, ускорение, температуру и т. д. как функции переменных Эйлера x^1, x^2, x^3 и t. Таким образом, если движение с точки зрения Лагранжа известно и его надо определить с точки зрения Эйлера, то для этого требуется только разрешить закон движения (2.1) относительно ξ^1, ξ^2, ξ^3, т. е. записать его в виде (2.2); переход от движения, заданного по Лагранжу, к описанию движения по Эйлеру сводится только к разрешению неявных функций.

Переход от переменных Эйлера к переменным Лагранжа

Наоборот, пусть с точки зрения Эйлера задано распределение скоростей в пространстве. Как найти закон движения, т. е. перейти к описанию движения по Лагранжу? Возьмем декартову систему координат x, y, z, и пусть в ней известны

$$u = u(x, y, z, t), \; v = v(x, y, z, t), \; w = w(x, y, z, t).$$

Компоненты скорости u, v, w являются производными от соответствующих координат x, y, z по времени t при постоянных параметрах ξ^1, ξ^2, ξ^3, индивидуализирующих точку сплошной среды. Поэтому, если u, v, w заданы как функции

переменных Эйлера x, y, z и t, то на соотношения

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t),$$
$$\frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t),$$
$$\frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t)$$

можно смотреть как на систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно x, y, z. Решив эту систему, найдем x, y, z как функции t и трех произвольных постоянных C_1, C_2, C_3, которые определяются по значениям x, y, z в некоторый данный момент t_0 и, следовательно, являются параметрами, индивидуализирующими точку сплошной среды,— переменными Лагранжа. Таким образом, в результате решения этой системы дифференциальных уравнений находится закон движения (2.1), с помощью которого можно перейти от переменных Эйлера к переменным Лагранжа во всех формулах, определяющих распределения $\boldsymbol{a}$, T и т. д. Следовательно, переход от переменных Эйлера к переменным Лагранжа при заданном поле скоростей связан, вообще говоря, с интегрированием обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ясно, что задания движения сплошной среды с точек зрения Лагранжа и Эйлера в механическом отношении эквивалентны друг другу.

§ 3. Скалярные и векторные поля и их характеристики

Определение скалярного и векторного полей

При изучении движения сплошной среды необходимо вводить в рассмотрение скалярные и векторные величины: температуру T, скорость $\boldsymbol{v}$ и др. Их, вообще говоря, можно рассматривать в разных системах координат: в системе координат наблюдателя и в системе координат, вмороженной в среду. Они могут быть функциями x^1, x^2, x^3 или функциями ξ^1, ξ^2, ξ^3. В каждой из этих систем координат можно выделить некоторую конечную или бесконечную область и каждой точке этой области поставить в соответствие число, например температуру T, или вектор, например скорость $\boldsymbol{v}$, или, как увидим позднее, еще другие, более сложные характеристики.

Совокупность значений той или иной величины, заданных в каждой точке рассматриваемой области, называется полем этой величины. Если рассматриваемая величина — скаляр, т. е. число, значение которого в данной точке не зависит от выбора системы координат, то поле называется скалярным. Примерами скалярных полей могут служить поле температур, поле

плотностей и др. Если же рассматриваемая величина — вектор, как, например, скорость, ускорение, то поле называется векторным. Скорость в каждой системе координат x^1, x^2, x^3 имеет три компоненты v^1, v^2, v^3 и, следовательно, в данной точке и в данной системе координат определяется тремя числами. Поэтому поле скорости, как и любое другое векторное поле, равносильно трем полям проекций рассматриваемого вектора. Однако, хотя сам вектор не зависит от системы координат, его проекции зависят от системы координат. На примере поля температур T и поля скоростей v изучим некоторые общие характеристики скалярных и векторных полей.

Индивидуальная и местная производные по времени

Распределение температур можно задать как с точки зрения Лагранжа: $T(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$, так и с точки зрения Эйлера: $T(x^1, x^2, x^3, t)$. Если распределение T задано с точки зрения Лагранжа, то подсчитать изменение температуры T в единицу времени t в частице сплошной среды очень просто. Оно будет равно производной

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^i}.$$

Как вычислить ту же величину, если распределение температуры задано в зависимости от переменных Эйлера $T(x^1, x^2, x^3, t)$? Очевидно, для этого надо перейти от переменных Эйлера к переменным Лагранжа

$$T(x^1, x^2, x^3, t) = T[x^1(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), x^2(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), x^3(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), t]$$

и воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции. Тогда

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^i} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x^i} + \frac{\partial T}{\partial x^1}\left(\frac{\partial x^1}{\partial t}\right)_{\xi^i} + \frac{\partial T}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x^2}{\partial t}\right)_{\xi^i} + \frac{\partial T}{\partial x^3}\left(\frac{\partial x^3}{\partial t}\right)_{\xi^i},$$

где производные $\frac{\partial x^1}{\partial t}$, $\frac{\partial x^2}{\partial t}$, $\frac{\partial x^3}{\partial t}$ берутся при постоянных ξ^1, ξ^2, ξ^3, и, следовательно, являются компонентами скорости v^1, v^2, v^3 соответственно. Поэтому

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^i} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x^i} + v^i \frac{\partial T}{\partial x^i}.$$

Заметим, что при заданной функции $T(x^1, x^2, x^3, t)$ для вычисления $(\partial T/\partial t)_{\xi^i}$ полностью знать закон движения сплошной среды не нужно, нужно знать только поле скоростей v.

Производная $(\partial T/\partial t)_{\xi i}$ характеризует изменение температуры со временем в данной точке сплошной среды и называется индивидуальной, или субстанциональной, или полной производной температуры T по времени t. Она часто обозначается символом dT/dt. Производная $(\partial T/\partial t)_{x^i}$ характеризует изменение температуры T в единицу времени в данной точке пространства x^1, x^2, x^3. Она называется местной или локальной производной и обозначается $\partial T/\partial t$. В общем случае индивидуальная производная dT/dt не равна местной $\partial T/\partial t$, а отличается от нее на величину, зависящую от движения частицы и называемую конвективной производной. Итак,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v^i \frac{\partial T}{\partial x^i}.$$

Ниже разберем определение конвективной производной подробнее, а сейчас опять на примере поля температур познакомимся с понятиями, которые можно ввести для каждого скалярного поля.

Поверхности уровня

Если температура T задана как функция переменных Эйлера, то в каждый данный момент времени t можно рассмотреть поверхности

$$T(x, y, z, t) = \text{const},$$

которые называются поверхностями равного уровня или

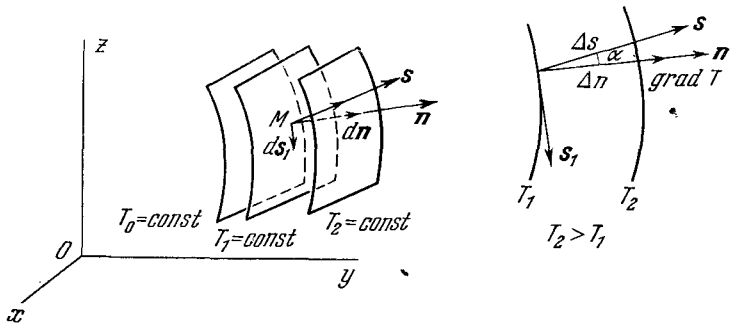


Рис. 4. Поверхности равного уровня и вектор-градиент температуры.

эквипотенциальными поверхностями. В случае поля температур эти поверхности называются изотермическими поверхностями.

Производная по направлению

Выбрав на поверхности равного уровня $T = \text{const}$ некоторую точку M, можно изучить, как будет меняться температура T в зависимости от направления, по которому можно выходить из этой точки. Обозначим это направление через s.

Предел

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta s} = \frac{\partial T}{\partial s}$$

называется производной T по направлению $\boldsymbol{s}$. Очевидно, что, если $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_1$, т. е. направление $\boldsymbol{s}$ лежит в касательной в точке M плоскости к поверхности уровня $T = \text{const}$, то

$$\frac{\partial T}{\partial s_1} = 0.$$

Так как ΔT равняется $T_2 - T_1$, причем $T_1 = \text{const}$, $T_2 = \text{const}$ — уравнения соседних поверхностей равного уровня, и для заданного ΔT имеет место формула $\Delta n = \Delta s \cos \alpha$ (см. рис. 4), то

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial T}{\partial n} \cos \alpha, \tag{3.1}$$

где $\partial T/\partial n$ — производная по направлению нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности равного уровня $T = \text{const}$, а α — угол между $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{s}$. Ясно, что наибольшее значение производной $\partial T/\partial s$ достигается в направлении нормали $\boldsymbol{n}$ (при $\alpha = 0$).

Вектор-градиент

Введем в рассмотрение вектор, направленный по нормали $\boldsymbol{n}$ в сторону роста T и равный по величине $\partial T/\partial n$. Назовем этот вектор вектором-градиентом скалярной функции, в данном случае температуры T, и будем обозначать его $\operatorname{grad} T$:

$$\operatorname{grad} T = \frac{\partial T}{\partial n} \boldsymbol{n}^0,$$

где $\boldsymbol{n}^0$ — единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}$, направленной в сторону роста T. Очевидно, абсолютная величина $\operatorname{grad} T$ больше там, где поверхности равного уровня $T = \text{const}$ расположены гуще. Согласно (3.1) проекция вектора-градиента температур на любое направление $\boldsymbol{s}$ есть производная от температуры по этому направлению:

$$(\operatorname{grad} T)_s = \frac{\partial T}{\partial s}.$$

В частности, проекции вектора-градиента на оси координат x^1, x^2, x^3 равны

$$(\operatorname{grad} T)_{x^i} = \frac{\partial T}{\partial x^i}$$

и в декартовой системе координат

$$\operatorname{grad} T = \frac{\partial T}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \boldsymbol{k}.$$

Заметим, что $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$, $\partial T/\partial z$ можно рассматривать как компоненты вектора, так как

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x}\,dx + \frac{\partial T}{\partial y}\,dy + \frac{\partial T}{\partial z}\,dz$$

есть инвариант, а dx, dy, dz — компоненты вектора $d\boldsymbol{r}$.

Конвективная производная

Мы назвали конвективной производной температуры по времени выражение $\sum_{i=1}^{3} v^i \frac{\partial T}{\partial x^i}$, которому, используя понятия вектора-градиента температуры и скалярного произведения, можно придать другой вид:

$$v^i \frac{\partial T}{\partial x^i} = \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} T.$$

Под производной всегда понимают предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю. Какое же приращение функции берется в случае определения конвективной производной? Запишем конвективную производную температуры в виде

$$\frac{\boldsymbol{v}\,\Delta t \cdot \operatorname{grad} T}{\Delta t}.$$

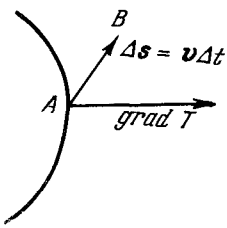


Рис. 5. К понятию конвективной производной.

Очевидно, $\boldsymbol{v}\,\Delta t$ равняется перемещению $\Delta \boldsymbol{s}$ (см. рис. 5) и

$$v^i \frac{\partial T}{\partial x^i} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{s} \cdot \operatorname{grad} T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\operatorname{grad} T)_s\,\Delta s}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\partial T}{\partial s} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t},$$

причем приращение ΔT температуры происходит за счет перемещения частицы сплошной среды из одной точки пространства в другую со скоростью $\boldsymbol{v}$ вдоль направления $\boldsymbol{s}$ (из точки A в точку B на рис. 5).

В общем случае конвективная производная отлична от нуля, так как значения температуры в точках A и B разные. Она может быть равной нулю при отсутствии движения, либо при отсутствии градиента температуры, т. е. тогда, когда температура в данный момент времени не меняется от точки к точке пространства (такое поле называется однородным), либо при движении вдоль поверхности уровня.

Формулы для определения компонент ускорения в декартовой системе координат

С понятиями индивидуальной, местной и конвективной производных по времени тесно связано правило определения компонент ускорения в том случае, когда скорость задана с точки зрения Эйлера. Пусть в декартовой системе координат нам заданы компоненты скорости v^1, v^2, v^3 как функции переменных Эйлера.

Как найти компоненты ускорения? Ускорение определяется для частицы сплошной среды, поэтому компоненты ускорения будут определяться как индивидуальные производные по времени от соответствующих компонент скорости, т. е.

$$a_x = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\xi^i} = \frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x^i} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$a_y = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{\xi^i} = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{x^i} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$a_z = \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{\xi^i} = \frac{dw}{dt} = \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{x^i} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Обратим внимание на то, что эти формулы верны только в декартовой системе координат.

Установившиеся и неустановившиеся движения

Различные процессы и движения называются установившимися или стационарными, если все характеризующие эти процессы или движения величины в случае задания их с точки зрения Эйлера зависят только от x^1, x^2, x^3 и не зависят явно от времени t. Таким образом, для установившихся процессов и движений локальные производные по времени от всех характеризующих их величин равны нулю, т. е.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial v^1}{\partial t} = \frac{\partial v^2}{\partial t} = \frac{\partial v^3}{\partial t} = \ldots = 0$$

В частности, поле температур установившееся, если $T = T(x^1, x^2, x^3)$; если же $T = T(x^1, x^2, x^3, t)$, то оно неустановившееся. Распределения температуры T, скорости v и других величин в пространстве x^1, x^2, x^3, взятые в разные моменты времени, совпадают друг с другом в случае установившихся движений и отличаются друг от друга в случае неустановившихся движений. Понятие установившихся движений очень важно для приложений. Во-первых, многие из встречающихся в приложениях течений являются установившимися, а, во-вторых, изучать такие движения с точки зрения Эйлера проще в силу того, что число независимых переменных при этом уменьшается на единицу (время выпадает).

Заметим, что одно и то же движение может быть как установившимся, так и неустановившимся. Это зависит от выбора

той системы координат, относительно которой оно изучается. Так, например, волновое движение воды, возникающее за кораблем, движущимся с постоянной скоростью, будет установившимся с точки зрения подвижного наблюдателя, находящегося на корабле, и неустановившимся с точки зрения наблюдателя на берегу. Понятие установившегося движения является относительным.

Отметим, что оба указанных наблюдателя рассматривают в своих системах координат движение, которое определено относительно одной и той же системы координат: либо абсолютное движение относительно берегов, либо относительное по отношению к кораблю.

Векторные линии; линии тока

Перейдем теперь к изучению понятия векторных линий, которые можно ввести для любого векторного поля, например для поля скоростей v, поля ускорения a, поля градиента температур $\operatorname{grad} T$ и т. д. Для определенности выясним смысл этого понятия на примере векторных линий поля скорости, которые называются линиями тока.

Как известно, для того чтобы задать поле v, нужно в каждой точке пространства x^1, x^2, x^3 и в каждый момент времени t задать вектор:

$$v = v^i e_i = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3,$$

где v^i (x^1, x^2, x^3, t) - компоненты скорости в базисе e_i. Требование задания скорости является весьма сильным требованием, и его можно несколько ослабить, например, можно потребовать задания v не во все времена t, а только в некоторый определенный момент времени t_0. Можно пойти еще дальше и потребовать задания в каждой точке пространства x^1, x^2, x^3 в данный момент t_0 только направления вектора скорости, без учета его величины. Очевидно, что ответ на такое требование дает построение семейства линий, касательные к которым в каждой точке пространства будут совпадать в данный момент t_0 с направлением вектора скорости v в этой точке. Такие линии в случае поля скоростей и называются линиями тока, а в случае произвольного векторного поля — векторными линиями.

Для каждого поля скорости v можно построить семейство линий тока, и если семейство линий тока построено, то в каждой точке с точностью до направления по ним будет известно направление вектора скорости v. На практике часто бывает весьма необходимым знать линии тока. Их можно определять экспериментально. Это связано с разработкой методов визуализации течений. Например, для экспериментального определения линий тока проводят фотографирование с малой выдержкой течений жидкостей с подмешанными в них взвешенными части-

цами специальных порошков, с созданными внутри жидкости пузырьками воздуха и т. д. Мелкие движущиеся вместе с жидкостью частицы оставляют на фотографиях короткие черточки, которые в целом воссоздают картину линий тока. Можно легко увидеть векторные линии магнитного поля. Для этого достаточно насыпать на лист бумаги мелкие железные опилки и снизу поднести к нему магнит. Можно увидеть и линии тока при обтекании крыла самолета. Для этого крыло обклеивают тонкими шелковинками и фотографируют картину его обтекания в аэродинамической трубе или непосредственно в полете.

Уравнения линий тока

Как найти семейство линий тока аналитически? Для этого необходимо указать математическую задачу, из решения которой определятся линии тока. Запишем условие того, что элемент

$$d\boldsymbol{r} = dx^i \boldsymbol{\vartheta}_i = dx^1 \boldsymbol{\vartheta}_1 + dx^2 \boldsymbol{\vartheta}_2 + dx^3 \boldsymbol{\vartheta}_3,$$

взятый вдоль линии тока, и вектор скорости

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{\vartheta}_i = v^1 \boldsymbol{\vartheta}_1 + v^2 \boldsymbol{\vartheta}_2 + v^3 \boldsymbol{\vartheta}_3$$

параллельны друг другу:

$$d\boldsymbol{r} = d\lambda \cdot \boldsymbol{v}.$$

Здесь $d\lambda$ — скалярный параметр. В компонентах получаем

$$\frac{dx^1}{v^1} = \frac{dx^2}{v^2} = \frac{dx^3}{v^3} = d\lambda,$$

или

$$\frac{dx^i}{d\lambda} = v^i(x^1, x^2, x^3, t), \qquad i = 1, 2, 3. \tag{3.2}$$

Это и есть дифференциальные уравнения линий тока. Они отличаются от дифференциальных уравнений, определяющих закон движения или траектории движения частиц сплошной среды, которые, очевидно, имеют вид

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i(x^1, x^2, x^3, t). \tag{3,3}$$

В уравнениях (3.3) как в правую, так и в левую части входит время t, а в уравнениях (3.2) производные берутся по λ, а правые части зависят от t. При интегрировании (3.2) t следует рассматривать как постоянный параметр, а в уравнениях (3.3) t необходимо считать переменным.

Таким образом, линии тока, вообще говоря, не совпадают с траекториями. Семейство линий тока $x^i = x^i(c^1, c^2, c^3, \lambda, t)$ зависит от времени и в разные моменты времени разное.

Однако параметр t входит в правые части (3.2) и (3.3) только в случае неустановившихся движений. В случае установившихся движений разница между уравнениями (3.2) и (3.3) пропадает, она сводится только к разному обозначению параметра по которому проводится дифференцирование, что не играет никакой роли. Поэтому линии тока и траектории при установившихся движениях совпадают.

Примеры линий тока и траекторий

Рассмотрим некоторые примеры. Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любой прямолинейный отрезок, взятый в теле, перемещается параллельно самому себе. Все точки твердого тела при поступательном движении имеют в данный момент времени одинаковые по величине и по направлению скорости. Следовательно, линии тока в этом случае всегда прямые. А траектории? Поступательное движение твердого тела может происходить по любой траектории, в том числе и по окружности (см. рис. 6). Поэтому линии тока и траектории в общем случае поступательного движения твердого тела не совпадают.

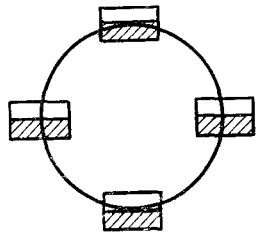


Рис. 6. Поступательное движение твердого тела по окружности.

В случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси линии тока и траектории совпадают. Они являются окружностями, расположенными в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения, и имеющими центры на оси вращения.

В случае произвольного движения твердого тела линии тока — винтовые линии, а траектории могут быть произвольными.

Существуют ли такие неустановившиеся движения, для которых линии тока все же совпадают с траекториями? Возьмем, например, прямолинейное движение твердого тела с переменной скоростью. В этом случае как линии тока, так и траектории будут прямыми, а само движение будет, конечно, неустановившимся. Аналогично линии тока и траектории будут совпадать в случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси с переменной угловой скоростью. В общем случае линии тока и траектории будут совпадать друг с другом при таких неустановившихся движениях, в которых скорости меняются в данной точке пространства с течением времени только по величине, но не по направлению.

Следовательно, линии тока и траектории совпадают для полей $\boldsymbol{v}\ (x^1, x^2, x^3)$ и $\boldsymbol{v}_1 = f(x^1, x^2, x^3, t)\ \boldsymbol{v}\ (x^1, x^2, x^3)$, где $f(x^1, x^2, x^3, t)$ — скалярная функция своих аргументов.

Существование линий тока Дифференциальные уравнения линий тока (3.2) можно переписать в виде

$$\frac{dx^2}{dx^1} = \frac{v^2}{v^1}, \qquad \frac{dx^3}{dx^1} = \frac{v^3}{v^1} \tag{3.4}$$

и поставить для них задачу Коши, т. е. задачу отыскания таких решений x^2 (x^1, t), x^3 (x^1, t), которые при заданном $x^1 = x_0^1$ обращаются в заданные величины x_0^2 (t) и x_0^3 (t) (t — постоянный параметр). Как известно из общей теории дифференциальных уравнений, задача Коши всегда имеет единственное решение, во всяком случае тогда, когда в (3.4) правые части и их производные по x^i непрерывны. Таким образом, вообще говоря, через каждую точку можно провести единственную линию тока.

Особые и критические точки Однако может случиться так, что все компоненты скорости v^i обратятся в некоторой точке x^1, x^2, x^3 в нуль или в бесконечность. В этих точках правые части уравнений (3.4) становятся неопределенными, и такие точки являются особыми точками дифференциальных уравнений линий тока. В них может нарушаться теорема единственности, и в них линии тока могут пересекаться. Особые точки могут иметь тип центра, фокуса, седла, узла и быть более сложными. В потоке жидкости особые точки дифференциальных уравнений линий тока носят название критических точек. Например, критической точкой в потоке является точка A — точка встречи набегающего потока с профилем крыла, в которой линия тока $\mathscr{L}$ разветвляется на две (рис. 7).

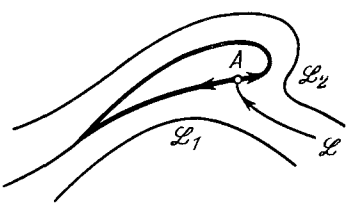


Рис. 7. Критическая точка на профиле крыла.

Поверхности тока, векторные поверхности Через каждую точку произвольной кривой C можно провести линию тока. При этом, если C не является линией тока, образуется поверхность, в каждой точке которой скорость $\boldsymbol{v}$ лежит в касательной плоскости. Эта поверхность называется поверхностью тока. Аналогично построенная поверхность для произвольного векторного поля называется векторной поверхностью. Как найти поверхность тока f $(x^1, x^2, x^3) = \text{const}$? Очевидно, $\operatorname{grad} f$, направленный по нормали к f $(x^1, x^2, x^3) = \text{const}$, будет перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{v}$, и, следовательно,

$$\operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{v} = 0,$$

т. е.

$$u\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y}+w\frac{\partial f}{\partial z}=0. \tag{3.5}$$

Мы получили дифференциальное уравнение в частных производных для определения функции $f(x, y, z)$.

Описанный выше способ построения поверхностей тока указывает способ интегрирования уравнений с частными производными, имеющих вид (3.5). Это интегрирование сводится к нахождению семейства линий тока, проходящих через контур C, т. е. к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (решения этих обыкновенных уравнений называются в общем случае характеристиками). Видно, что построить таким образом единственное решение можно лишь в случае, когда сам контур C не является линией тока (т. е. характеристикой).

Трубки тока, векторные трубки

Если кривая C замкнутая, то совокупность проведенных через ее точки линий тока образует трубку тока. В случае произвольного векторного поля аналогично построенная трубка носит название векторной трубки.

Потенциальное векторное поле, потенциальные течения

Выше мы рассмотрели вектор-градиент температуры T. Возникает вопрос: нельзя ли вектор скорости v представить в виде градиента некоторой скалярной функции $\varphi(x, y, z, t)$? Если существует такая функция $\varphi(x, y, z, t)$, что

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$
$$v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$
$$w=\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

то поле скоростей v называется потенциальным, а функция φ называется потенциалом скорости. Аналогично произвольное векторное поле $\underline{A}(x, y, z, t)$ является потенциальным, если есть функция $\Phi(x, y, z, t)$ такая, что

$$A=\operatorname{grad}\Phi(x, y, z, t).$$

Согласно свойствам вектора-градиента скорость v в случае потенциальных течений ортогональна поверхности равного потенциала $\varphi=\text{const}$ и больше там, где поверхности равного потенциала расположены гуще; проекция скорости v на любое направление s есть производная от потенциала φ по этому направлению: $v_s=\partial\varphi/\partial s$. Составим выражение

$$u\,dx+v\,dy+w\,dz. \tag{3.6}$$

Необходимое и достаточное условие существования потенциала

Если течение потенциальное, то (3.6) будет полным дифференциалом (по координатам x, y, z) функции φ. В самом деле,

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,dz = d\varphi.$$

Верно и обратное: если выражение (3.6) является полным дифференциалом, то течение потенциально. Известно, что для того, чтобы (3.6) было полным дифференциалом, должны выполняться равенства

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y},$$

которые являются необходимыми и достаточными условиями потенциальности течения. Далее мы увидим, что потенциальные течения играют важную роль, а пока рассмотрим некоторые примеры потенциальных течений.

Поступательное течение

Примером потенциального течения может служить поступательное течение с постоянной скоростью u_0 вдоль оси x. В этом случае $u = u_0$, $v = w = 0$, а потенциал φ, так как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

равен $\varphi = u_0 x + \text{const}$. Отсюда легко сделать два очевидных вывода. Во-первых, потенциал определяется с точностью до аддитивной постоянной по координатам, во-вторых, любое поступательное течение всегда потенциально. Действительно, в общем случае поступательного течения $u = u_0, v = v_0$, $w = w_0$ и $\varphi = u_0 x + v_0 y + w_0 z + C$; при этом u_0, v_0, w_0 и C могут быть функциями t.

Заметим, что изучать потенциальные течения проще, чем непотенциальные, так как потенциальные движения определяются одной функцией $\varphi(x, y, z, t)$, а движения общего вида — тремя: $v^1(x, y, z, t)$, $v^2(x, y, z, t)$, $v^3(x, y, z, t)$.

Источник и сток в пространстве

Рассмотрим еще один важный для дальнейшего пример потенциального течения. Пусть

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi r}, \tag{3.7}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а $Q = \text{const}$ или $Q = Q(t)$. Ясно, что поверхностями равного потенциала $\varphi = \text{const}$ являются в этом случае поверхности $r = \text{const}$, т. е. концентрические сферы с центром в начале координат. Скорость $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi$ ортогональна к этим сферам, т. е. направлена по радиусам. Линии тока являются лучами, выходящими из начала координат. Пусть

$Q > 0$; тогда, так как $\operatorname{grad}\varphi$ направлен в сторону роста φ, то $\boldsymbol{v}$ направлена по $\boldsymbol{r}$. Если $Q < 0$, то $\boldsymbol{v}$ направлена по $-\boldsymbol{r}$ (рис. 8). Величина скорости равна

$$|(\operatorname{grad}\varphi)_r| = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right| = \frac{|Q|}{4\pi r^2}.$$

Скорость стремится к нулю при $r \to \infty$ и к бесконечности при $r \to 0$. Точки нуль и бесконечность являются критическими. При $Q > 0$ имеем вытекание жидкости из начала координат во всех

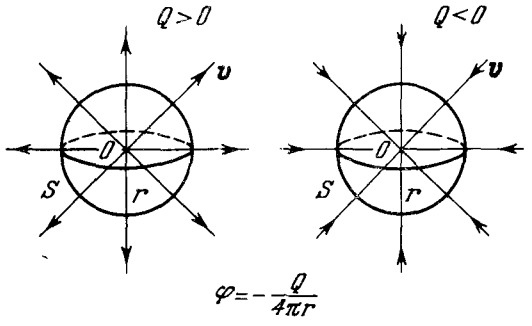


Рис. 8. Течения от точечных источника и стока в пространстве.

направлениях — это течение называется точечным пространственным источником. При $Q < 0$ — втекание жидкости в начало координат — сток. В первом случае в бесконечно удаленной точке имеем сток, а во втором — источник.

Вычислим объем жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность сферы S некоторого радиуса r с центром в начале координат. Через элемент сферы $d\sigma$ за единицу времени протекает объем жидкости $v\,d\sigma$, а через всю сферу

$$\int_S v\,d\sigma = v\int_S d\sigma = 4\pi r^2 v = Q$$

(v можно вынести за знак интеграла, так как $v = \text{const}$ на поверхности сферы). Заметим, что первые два равенства верны всегда, когда $v = v(r)$ и $\boldsymbol{v}$ ортогональна к поверхности сферы S. Вычисленный объем жидкости не зависит от r. Таким образом, несмотря на то, что на разных сферах разного радиуса с центром в начале координат скорости разные, постоянная Q в потенциале φ (3.7) является объемом жидкости, протекающей за единицу времени через каждую такую сферу. Величина Q называется расходом или мощностью источника (стока).

Если $Q = \text{const}$, то источник или сток имеет постоянную мощность; если $Q = Q(t)$ — то переменную. Если в некоторый момент времени Q меняется в начале координат, то мгновенно изменяется поле скоростей во всем пространстве. Сигналы изменения Q сразу сказываются на всем поле скоростей, что, конечно, не может иметь места в действительности. Возмущения должны распространяться с некоторой конечной скоростью. Поэтому рассмотренное поле скоростей является определенной идеализацией, которая может достаточно хорошо отражать действительность только в том случае, когда рассматриваются течения жидкости с большой скоростью распространения возмущений. Во многих случаях можно считать, что такой жидкостью является, например, вода, в которой скорость распространения слабых возмущений 1450 *м/сек*.

§ 4. Элементы тензорного исчисления

Многие характеристики движения сплошной среды имеют тензорную природу, поэтому рассмотрим основы тензорного исчисления. Заметим, что скаляр и вектор тоже являются тензорами, но наиболее простыми. Одних векторных и скалярных величин для описания движения сплошной среды недостаточно.

Система координат устанавливает соответствие между числами и точками пространства. В каждой точке пространства есть три координатные линии. Это могут быть координатные линии сопутствующей системы координат ξ^1, ξ^2, ξ^3, или системы отсчета наблюдателя x^1, x^2, x^3, или еще какой-нибудь системы координат. Поэтому для обозначения системы координат в этом разделе воспользуемся буквами ζ^1, ζ^2, ζ^3 или η^1, η^2, η^3.

Система координат вводится в рассмотрение исследователем, и ее выбор зависит от исследователя, а не от изучаемого явления. Законы движения могут содержать координаты, но не должны зависеть от выбора системы координат. Они должны быть инвариантными относительно выбора системы координат, что накладывает известные ограничения на вид математической записи этих законов.

Преобразование координат

Рассмотрим необходимые сведения из теории преобразования координат. Пусть наряду с системой координат ζ^1, ζ^2, ζ^3 есть система координат η^1, η^2, η^3 и законы движения можно рассматривать как относительно системы ζ^1, ζ^2, ζ^3, так и относительно η^1, η^2, η^3. Пусть есть соответствие между этими двумя системами

$$\zeta^i = \zeta^i(\eta^1, \eta^2, \eta^3), \tag{4.1}$$

называемое преобразованием координат. Будем рассматривать непрерывные взаимно однозначные преобразования координат. Они образуют группу. Будем искать соотношения, инвариантные относительно группы непрерывных взаимно однозначных преобразований. По (4.1) имеем

$$\left.\begin{aligned} d\zeta^1 &= \frac{\partial \zeta^1}{\partial \eta^1}\, d\eta^1 + \frac{\partial \zeta^1}{\partial \eta^2}\, d\eta^2 + \frac{\partial \zeta^1}{\partial \eta^3}\, d\eta^3, \\ d\zeta^2 &= \frac{\partial \zeta^2}{\partial \eta^1}\, d\eta^1 + \frac{\partial \zeta^2}{\partial \eta^2}\, d\eta^2 + \frac{\partial \zeta^2}{\partial \eta^3}\, d\eta^3, \\ d\zeta^3 &= \frac{\partial \zeta^3}{\partial \eta^1}\, d\eta^1 + \frac{\partial \zeta^3}{\partial \eta^2}\, d\eta^2 + \frac{\partial \zeta^3}{\partial \eta^3}\, d\eta^3, \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

или

$$d\zeta^i = \frac{\partial \zeta^i}{\partial \eta^j}\, d\eta^j, \tag{4.2'}$$

где по j идет суммирование от 1 до 3, а i пробегает значения 1, 2, 3, что в дальнейшем не будет указываться, но будет подразумеваться.

Итак, вблизи любой данной точки есть связь приращений координат $d\zeta^i$ и $d\eta^i$. Производные $\partial \zeta^i / \partial \eta^j$ являются функциями точки, но в заданной точке они постоянны, и (4.2) является линейной связью приращений координат $d\zeta^i$ и $d\eta^i$ в данной точке. Введем обозначения:

$$\frac{\partial \zeta^i}{\partial \eta^j} = a^{i}_{\cdot j}.$$

(Из дальнейшего следует, что расстановка индексов вверху и внизу и порядок написания индексов весьма важны.) Величины $a^{i}_{\cdot j}$ образуют матрицу

$$\| a^{i}_{\cdot j} \| = \mathsf{A},$$

где первый индекс, i, соответствует ее строке, а второй, j, — ее столбцу. Из взаимной однозначности следует, что якобиан преобразования, равный детерминанту матрицы $\| a^{i}_{\cdot j} \|$, отличен от нуля, т. е. $\Delta = | a^{i}_{\cdot j} | \neq 0$. Так как $\Delta \neq 0$, то линейные соотношения (4.2) можно разрешить относительно $d\eta^i$ и наряду с (4.2) написать формулы

$$d\eta^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial \zeta^j}\, d\zeta^j. \tag{4.3}$$

Введем матрицу

$$\mathsf{B} = \| b^{i}_{\cdot j} \|,$$

где

$$b^{i}_{\cdot j} = \frac{\partial \eta^i}{\partial \zeta^j}.$$

Матрицы A и B введены для прямого и обратного преобразований. Они взаимно обратны, т. е. их произведение равняется единичной матрице. Действительно,

$$\mathsf{A}\cdot\mathsf{B} = \| a^{i}_{\cdot j} \| \cdot \| b^{j}_{\cdot k} \| = \| a^{i}_{\cdot j} b^{j}_{\cdot k} \|,$$

но

$$a^{i}_{\cdot j} b^{j}_{\cdot k} = \frac{\partial \zeta^i}{\partial \eta^j}\frac{\partial \eta^j}{\partial \zeta^k} = \frac{\partial \zeta^i}{\partial \zeta^k} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k, \end{cases}$$

так как ζ^1, ζ^2, ζ^3, как и η^1, η^2, η^3, являются независимыми координатами. Дальше будем пользоваться символами Кронекера

$$\delta^{i}_{\cdot k} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

Имеем

$$\mathsf{A}\cdot\mathsf{B} = \| \delta^{i}_{\cdot k} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \mathsf{E},$$

где E — единичная матрица. Очевидно, что детерминант матрицы B

$$| b^{i}_{\cdot j} | = \frac{1}{\Delta}.$$

Приведенные выше рассуждения были проведены для трехмерного пространства, но они верны и для любого n-мерного пространства, в том числе одномерного, двумерного и четырехмерного, встречающихся в механике сплошной среды.

Заметим, что приводимые рассуждения не требуют введения метрики пространства. Пространство ζ^1, ζ^2, ζ^3 может быть неметрическим пространством или пространством с весьма сложной метрикой.

Векторы базиса

Теперь ради полноты изложения и подчеркивания употребляемых точек зрения повторим вопрос о введении векторов базиса $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$. В системе координат ζ^1, ζ^2, ζ^3 рассмотрим точку M с координатами ζ^1, ζ^2, ζ^3 и бесконечно близкую ей точку M' с координатами $\zeta^1 + d\zeta^1$, $\zeta^2 + d\zeta^2$, $\zeta^3 + d\zeta^3$ (рис. 9). Введем в рассмотрение новый объект

$$d\boldsymbol{r} = \overline{MM'},$$

т. е. пару бесконечно близких точек M и M', взятых в определенном порядке (упорядоченную пару точек), и изобразим его на чертеже стрелкой; $\overline{MM'}$ определяется только координатами точек M и M'. Наряду с $d\boldsymbol{r}$ введем в рассмотрение другой объект

$$k\,d\boldsymbol{r}, \tag{4.4}$$

где k — некоторое число; объект $k\,d\boldsymbol{r}$ направлен по $d\boldsymbol{r}$, если $k > 0$, и противоположно $d\boldsymbol{r}$, если $k < 0$. Проведем из точки M координатные линии и рассмотрим на них точки N_1, N_2, N_3,

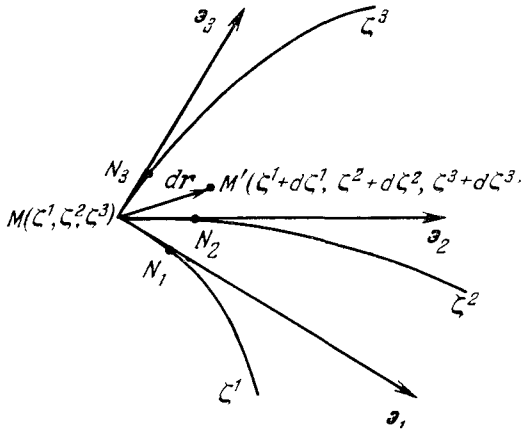


Рис. 9. Векторы базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

определяемые соответственно приращениями только одной из координат $d\zeta^1$, или $d\zeta^2$, или $d\zeta^3$. Аналогично объекту $d\boldsymbol{r}$ введем объекты $\overline{MN_1}$, $\overline{MN_2}$, $\overline{MN_3}$ или по (4.4), полагая $k_i = 1/d\zeta^i$, объекты

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \zeta^i} = \boldsymbol{e}_i,$$

которые мы назовем векторами базиса; они направлены по касательным к координатным линиям.

В общем случае $d\boldsymbol{r}$ направлен произвольно, и по определению можно написать

$$d\boldsymbol{r} = d\zeta^1\boldsymbol{e}_1 + d\zeta^2\boldsymbol{e}_2 + d\zeta^3\,\boldsymbol{e}_3.$$

Причем $d\zeta^1$, $d\zeta^2$, $d\zeta^3$ называются компонентами $d\boldsymbol{r}$. Очевидно, векторы базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ системы координат ζ^1, ζ^2, ζ^3 в системе координат ζ^1, ζ^2, ζ^3 всегда имеют компоненты (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) соответственно. Векторы базиса можно ввести как в си-

стеме координат ζ^1, ζ^2, ζ^3, так и в системе координат η^1, η^2, η^3. В разных системах координат в одной и той же точке они будут разными. Обозначим векторы базиса в системе координат η^1, η^2, η^3 через $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ и в системе координат η^1, η^2, η^3 будем иметь

$$d\mathbf{r} = d\eta^j \mathbf{e}'_j.$$

Очевидно, что компоненты $d\mathbf{r}$ и векторы базиса $\mathbf{e}_i$ зависят от выбора системы координат.

Преобразование векторов базиса и компонент $d\mathbf{r}$ при переходе от одной системы координат к другой

Получим формулы, с помощью которых векторы базиса $\mathbf{e}_i'$ в новой, η^1, η^2, η^3, системе координат могут быть выражены через векторы базиса $\mathbf{e}_i$ в старой, ζ^1, ζ^2, ζ^3. Для этого достаточно воспользоваться определением векторов базиса $\mathbf{e}'_i$ и $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{e}'_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta^j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta^i}\frac{\partial \zeta^i}{\partial \eta^j} = \mathbf{e}_i a^{i\cdot}_{\cdot j}. \tag{4.5}$$

Для компонент $d\mathbf{r}$ согласно (4.3) имеем связь

$$d\eta^i = b^{i\cdot}_{\cdot j}\, d\zeta^j. \tag{4.6}$$

Заметим, что векторы базиса $\mathbf{e}_i$ преобразуются согласно (4.5) с помощью матрицы A, а компоненты $d\mathbf{r}$ — по (4.6) с помощью матрицы B, обратной матрице A. (Необходимо обратить внимание на расположение индексов в (4.5) и в (4.6).)

Инвариантность $d\mathbf{r}$ относительно преобразований координат

Объект $d\mathbf{r}$ инвариантен относительно преобразований координат. В самом деле,

$$d\mathbf{r} = d\eta^j \mathbf{e}'_j = b^{j\cdot}_{\cdot i}\, d\zeta^i a^{s\cdot}_{\cdot j}\mathbf{e}_s = d\zeta^i \mathbf{e}_i,$$

так как

$$b^{j\cdot}_{\cdot i} a^{s\cdot}_{\cdot j} = \begin{cases} 1, & i = s \\ 0, & i \neq s \end{cases} = \delta^{s\cdot}_{\cdot i}.$$

Следовательно, выражение $d\mathbf{r}$ через компоненты и векторы базиса соответствующей системы координат не меняется при переходе от одной системы координат к другой; оно инвариантно относительно преобразований систем координат.

О ковариантных и контравариантных величинах

Величины, преобразующиеся аналогично векторам базиса $\mathbf{e}_i$ по (4.5), называются ковариантными. Величины, преобразующиеся аналогично компонентам $d\mathbf{r}$ по (4.6), называются контравариантными. Подчеркнем, что преобразования, образующие ковариантные и контравариантные величины, являются взаимно обратными.

Определение вектора

Теперь по примеру $d\boldsymbol{r}$ можно ввести объект $\boldsymbol{A}$, который представляется через базис следующим образом:

$$\boldsymbol{A} = A^i \boldsymbol{\vartheta}_i,$$

и его компоненты A^i при преобразовании координат преобразуются как компоненты $d\boldsymbol{r}$:

$$A'^j = b^j_{\cdot i} A^i.$$

Объект $\boldsymbol{A}$, инвариантный, как и $d\boldsymbol{r}$, относительно преобразований координат:

$$\boldsymbol{A} = A^i \boldsymbol{\vartheta}_j = A'^i \boldsymbol{\vartheta}'_i, \tag{4.7}$$

называется вектором.

Инвариантность вектора $\boldsymbol{A}$ обеспечивается взаимообратностью преобразований компонент вектора A^i и векторов базиса $\boldsymbol{\vartheta}_i$. Векторы базиса являются носителями каждого вектора, коэффициенты при них в (4.7) являются в общем случае числовыми функциями точки M.

Вектор $\boldsymbol{A}$ может иметь любую геометрическую или физическую природу, но через векторы базиса он всегда определяется разложением (4.7), где числа (функции) A^i зависят от системы координат. Векторы базиса $\boldsymbol{\vartheta}_i$ управляют числами A^i и создают новый объект — вектор $\boldsymbol{A}$.

Полиадные произведения векторов базиса

Возникает вопрос: нельзя ли, кроме $\boldsymbol{\vartheta}_i$, ввести еще какие-нибудь базисные объекты, которые, подобно $\boldsymbol{\vartheta}_i$, управляя числами, позволили бы ввести еще более сложные, чем вектор, понятия, инвариантные относительно преобразований координат? Такие объекты можно ввести, и, в частности, за такие объекты можно взять

$$\begin{aligned} &E_1 = \boldsymbol{\vartheta}_1\boldsymbol{\vartheta}_1,\ E_2 = \boldsymbol{\vartheta}_1\boldsymbol{\vartheta}_2,\ E_3 = \boldsymbol{\vartheta}_1\boldsymbol{\vartheta}_3,\ E_4 = \boldsymbol{\vartheta}_2\boldsymbol{\vartheta}_1,\\ &E_5 = \boldsymbol{\vartheta}_2\boldsymbol{\vartheta}_2,\ E_6 = \boldsymbol{\vartheta}_2\boldsymbol{\vartheta}_3,\ E_7 = \boldsymbol{\vartheta}_3\boldsymbol{\vartheta}_1,\ E_8 = \boldsymbol{\vartheta}_3\boldsymbol{\vartheta}_2,\ E_9 = \boldsymbol{\vartheta}_3\boldsymbol{\vartheta}_3 \end{aligned}$$

и рассмотреть

$$T = T^i E_i, \tag{4.8}$$

где T^i — числа, называемые компонентами T в базисе E_i ($i = 1, 2, \ldots, 9$).

Базисные объекты E_i называются полиадными произведениями векторов базиса $\boldsymbol{\vartheta}_i$ (в данном случае их можно назвать диадными, так как каждое произведение состоит из двух векторов, но можно вводить и произведения многих векторов вида $\mathscr{E}_s = \boldsymbol{\vartheta}_i\,\boldsymbol{\vartheta}_j\,\boldsymbol{\vartheta}_k\,\boldsymbol{\vartheta}_l$, в трехмерном пространстве $s = 1, 2, \ldots, 81$). По определению полиадные произведения векторов базиса считаются линейно независимыми, т. е. равенство $T = 0$ возможно,

только если 9 чисел T^i равны нулю. Вместо новых обозначений E_i удобно пользоваться непосредственно обозначениями $\mathfrak{e}_k\mathfrak{e}_j$ и писать равенство (4.8) в виде

$$T = T^{ij}\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_j.$$

Полиадное умножение векторов представляет собой некоторую операцию над векторами, приводящую к новым объектам (не векторам и не скалярам). Для определения этой операции достаточно указать ее свойства. В частности, существен порядок перемножаемых векторов ($\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2 \neq \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_1$). По определению операция полиадного умножения является линейной (выполняется свойство дистрибутивности, порядковое положение числовых множителей в произведении несущественно). Например, справедливо равенство

$$\mathfrak{e}_i(a\mathfrak{e}_j + b\mathfrak{e}_k) = a\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_j + b\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_k, \tag{4.9}$$

где a и b — числа.

Полиадные произведения векторов базиса $\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_j$, так же как и сами векторы базиса $\mathfrak{e}_i$, зависят от системы координат. Формулы преобразования величин $\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_j$ легко получить, зная формулы преобразования $\mathfrak{e}_i$ и пользуясь свойством линейности полиадного произведения. Эти формулы имеют вид

$$\mathfrak{e}'_i\mathfrak{e}'_j = a^{p}_{\cdot i}a^{q}_{\cdot j}\mathfrak{e}_p\mathfrak{e}_q. \tag{4.10}$$

Компоненты полиадных (диадных) произведений $\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_j$ в соответствующей им системе координат можно записать в виде матриц, состоящих из одной единицы и остальных нулей. Например, компоненты $\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2$ образуют матрицу

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

С помощью полиадных произведений можно вводить объекты, называемые тензорами.

Потребуем, чтобы $T^{ij}\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_j$ было инвариантно относительно преобразований систем координат, т. е.

$$T^{ij}\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_j = T'^{ij}\mathfrak{e}'_i\mathfrak{e}'_j, \tag{4.11}$$

где T^{ij} и T'^{ij} относятся к разным системам координат. Отсюда и из правила преобразования полиадных произведений (4.10) ясно, что T^{ij} должны преобразовываться при замене систем координат по формулам

$$T'^{ij} = b^{i}_{\cdot p}b^{j}_{\cdot q}T^{pq}. \tag{4.12}$$

Определение тензора

Инвариантный объект $T = T^{ij}\partial_i\partial_j$ называется тензором второго ранга или второй валентности. Рангом или валентностью тензора называется число индексов его компонент. Очевидно, вектор есть тензор первого ранга.

Как и в случае вектора A, инвариантность тензора T обеспечивается взаимообратностью преобразований полиадных произведений (4.10) и компонент тензора (4.12).

Аналогично тензору второго ранга можно ввести тензор любого ранга, например тензор пятого ранга, как

$$T = T^{ijklm}\partial_i\partial_j\partial_k\partial_l\partial_m = T'^{ijklm}\partial'_i\partial'_j\partial'_k\partial'_l\partial'_m, \qquad (4.13)$$

где объектами, управляющими числами T^{ijklm}, теперь являются полиадные произведения $\partial_i\partial_j\partial_k\partial_l\partial_m$, которые преобразуются аналогично (4.10), а компоненты тензора преобразуются аналогично (4.12).

Подчеркнем, что вектор и тензор определяются как объекты, не зависящие от преобразований координат, а не как просто набор компонент, которые преобразуются по заданному закону [1]).

Симметричные и антисимметричные тензоры

Введенные по (4.11) и (4.13) компоненты тензора T^{ij}, T^{ijklm} преобразуются контравариантным образом и называются контравариантными компонентами тензора.

В общем случае все компоненты тензора T разные. Если же при перестановке какой-либо пары индексов значение компонент тензора T сохраняется, $T^{ijklm} = T^{jiklm}$, то тензор T называется симметричным по этим индексам. Из правила преобразования компонент тензора (4.12) ясно, что свойство симмет-

---

[1]) Мы определили инвариантные объекты — векторы и тензоры, базисные объекты и компоненты которых преобразуются при преобразовании координат $\eta^i = \eta^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ с помощью взаимно обратных матриц $a^{i'}_{\cdot j} = \partial\xi^{i}/\partial\eta^{j}$ и $b^{i\cdot}_{\cdot j} = \partial\eta^i/\partial\xi j$. Аналогичным образом можно вводить другие базисные объекты e_i, преобразование которых определяется другими (связанными иным способом с преобразованием координат) матрицами A^{j}_{i} и B^{j}_{i}, и строить на их основе соответствующие инвариантные объекты $Q = Q^{i}e_i = Q'^{j}e'_j$, $P = P^{ij}e_ie_j = P'^{kl}e'_ke'_l$ и т. д. таким образом, чтобы

$$e'_i = A^{j}_{i}e_j, \quad Q'^{j} = B^{j}_{i}Q^{i}, \quad P'^{kl} = B^{k}_{i}B^{l}_{j}P^{ij}, \quad A^{i}_{j}B^{j}_{k} = \delta^{i}_{k}.$$

Например, при рассмотрении ортогональных преобразований, кроме векторов и тензоров, вводят спиноры и спин-тензоры, базисные объекты и компоненты которых преобразуются с помощью некоторых матриц A^{i}_{j} и B^{i}_{j}, являющихся другим (не совпадающим с $a^{i\cdot}_{\cdot j}$ и $b^{i\cdot}_{\cdot j}$) матричным представлением группы ортогональных преобразований пространства.

рии тензора инвариантно относительно преобразований координат.

Если при перестановке какой-нибудь пары индексов компоненты тензора T меняют знак, $T^{ijklm} = -T^{jiklm}$, то тензор T называется антисимметричным по этим индексам. Свойство антисимметрии тензора также инвариантно относительно преобразований координат.

Если взять тензор $T = T^{ij}\partial_i\partial_j$, то объект $T^* = T^{*ij}\partial_i\partial_j$, где $T^{*ij} = T^{ji}$, тоже будет тензором, причем $T = T^*$ только для симметричного тензора.

Сложение тензоров и умножение их на число

Возьмем два тензора $A = A^{ijk}\,\partial_i\partial_j\partial_k$ и $B = B^{ijk}\,\partial_i\partial_j\partial_k$ и составим комбинацию $A + B = (A^{ijk} + B^{ijk})\partial_i\partial_j\partial_k$, которая, очевидно, также будет тензором. Этот новый тензор $A + B$ называется суммой тензоров A и B. Таким образом, с помощью указанного правила из данных тензоров можно образовать новые, которые являются их суммой или разностью. Складывать и вычитать можно тензоры только одинаковых рангов.

Очевидно, что если мы имеем тензор A, то объект $C = k \cdot A$, где k — любое число, не зависящее от системы координат (скаляр), также будет тензором.

Операции симметрирования и альтернирования

Пользуясь правилами сложения и умножения тензоров на число, любому тензору второго ранга $T = T^{ij}\partial_i\partial_j$ можно поставить в соответствие симметричный тензор

$$T_0 = \frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji})\,\partial_i\partial_j$$

и антисимметричный тензор

$$T_1 = \frac{1}{2}(T^{ij} - T^{ji})\,\partial_i\partial_j.$$

Операции получения тензоров T_0 и T_1 носят название операций симметрирования и альтернирования соответственно. Если тензор T симметричный, то $T_0 = T$, а $T_1 = 0$; если T антисимметричный, то $T_0 = 0$, а $T_1 = T$.

Заметим, что по определению тензор равен нулю, если все его компоненты равны нулю.

Формулы преобразования контравариантных векторов базиса

Векторы базиса ∂_i, преобразующиеся по (4.5), носят название ковариантных векторов базиса. Пусть имеем некоторый тензор второго ранга $\varkappa = \varkappa^{ij}\partial_i\partial_j$ и в некоторой системе координат ζ^1, ζ^2, ζ^3 введем

$$\partial^i = \varkappa^{ij}\partial_j, \tag{4.14}$$

где, например, $\varkappa^{1j}\partial_j = \varkappa^{11}\partial_1 + \varkappa^{12}\partial_2 + \varkappa^{13}\partial_3 = \partial^1$ является суммой трех векторов базиса ∂_i, умноженных на числа $\varkappa^{1i}$.

Аналогично в другой системе координат η^1, η^2, η^3 можно ввести

$$\mathfrak{d}'^p = \varkappa'^{pq}\mathfrak{d}'_q.$$

Формулы преобразований $\varkappa^{pq}$ (4.12) и $\mathfrak{d}_q$ (4.5) нам известны, с их помощью получим формулы преобразования $\mathfrak{d}^i$:

$$\mathfrak{d}'^p = \varkappa'^{pq}\mathfrak{d}'_q = b^{p\cdot}_{\cdot i} b^{q\cdot}_{\cdot j}\varkappa^{ij} a^{k\cdot}_{\cdot q}\mathfrak{d}_k = b^{p\cdot}_{\cdot i}\varkappa^{ij}\mathfrak{d}_j = b^{p\cdot}_{\cdot i}\mathfrak{d}^i, \qquad (4.15)$$

так как $b^{q\cdot}_{\cdot j}a^{k\cdot}_{\cdot q} = \delta^{k\cdot}_{\cdot j}$. Видно, что $\mathfrak{d}^i$ преобразуются контравариантным образом. Они называются контравариантными векторами базиса.

Итак, с помощью произвольного тензора второго ранга $\varkappa$ можно ввести контравариантные векторы базиса $\mathfrak{d}^i$. Заметим, что если ковариантные векторы базиса $\mathfrak{d}_i$ зависели только от системы координат, то контравариантные векторы базиса $\mathfrak{d}^i$ зависят и от системы координат, и от тензора $\varkappa$, с помощью которого они образованы.

Ковариантные компоненты тензора $\varkappa$

Зная контравариантные векторы базиса $\mathfrak{d}^i$, можно найти ковариантные векторы базиса $\mathfrak{d}_i$, т. е. можно разрешить (4.14) относительно $\mathfrak{d}_i$. Для этого необходимо ввести матрицу $\|\varkappa_{ij}\|$, обратную матрице $\|\varkappa^{ij}\|$, что требует соблюдения условия $\mathrm{Det}\,\|\varkappa^{ij}\| \neq 0$. Из элементов алгебры известно, что

$$\varkappa_{ij} = \frac{k_{ij}}{\Delta}, \qquad (4.16)$$

где k_{ij} — дополнительные миноры матрицы $\|\varkappa^{ij}\|$, а $\Delta = \mathrm{Det}\,\|\varkappa^i\|$. Таким образом, зная матрицу $\|\varkappa^{ij}\|$, детерминант которой отличен от нуля, можно по (4.16) составить матрицу $\|\varkappa_{ij}\|$ и разрешить (4.14) относительно $\mathfrak{d}_i$. В некоторой системе координат $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ будем иметь

$$\mathfrak{d}_j = \varkappa_{ij}\mathfrak{d}^i. \qquad (4.17)$$

Аналогично в другой системе координат η^1, η^2, η^3

$$\mathfrak{d}'_j = \varkappa'_{ij}\mathfrak{d}'^i.$$

С помощью известных формул преобразований $\mathfrak{d}_j$ (4.5) и $\mathfrak{d}$ (4.15) получим формулу преобразования для компонент $\varkappa_{ij}$. Действительно,

$$\mathfrak{d}'_j = \varkappa'_{ij}\mathfrak{d}'^i = a^{i\cdot}_{\cdot j}\mathfrak{d}_i = a^{i\cdot}_{\cdot j}\varkappa_{ik}\mathfrak{d}^k = a^{i\cdot}_{\cdot j}a^{k\cdot}_{\cdot l}\varkappa_{ik}\mathfrak{d}'^l,$$

откуда

$$\varkappa'_{ij} = a^{p\cdot}_{\cdot i}a^{q\cdot}_{\cdot j}\varkappa_{pq}. \qquad (4.18)$$

Видно, что если составить выражение $\varkappa_{ij}\mathfrak{d}^i\mathfrak{d}^j$, где $\mathfrak{d}^i\mathfrak{d}^j$ — полиадные произведения контравариантных векторов базиса $\mathfrak{d}^i$, которые преобразуются по формулам

$$\mathfrak{d}'^i\mathfrak{d}'^j = b^{i\cdot}_{\cdot k}b^{j\cdot}_{\cdot l}\mathfrak{d}^k\mathfrak{d}^l,$$

то оно будет представлять собой объект, не зависящий от выбора системы координат, ибо $\varkappa_{ij}$ преобразуются ковариантным, а полиадные произведения $\mathfrak{d}^i\mathfrak{d}^j$ контравариантным образом. Кроме того, по (4.14) и (4.17)

$$\varkappa_{ij}\mathfrak{d}^i\mathfrak{d}^j = \varkappa^{ip}\varkappa^{jq}\varkappa_{ij}\mathfrak{d}_p\mathfrak{d}_q = \varkappa^{pq}\mathfrak{d}_p\mathfrak{d}_q.$$

Таким образом, мы видим, что $\varkappa_{ij}$ можно назвать ковариантными компонентами рассмотренного выше тензора второго ранга $\varkappa$ в контравариантном базисе $\mathfrak{d}^i$. Ради простоты в дальнейшем будем считать $\varkappa$ симметричным тензором, т. е. $\varkappa^{ij} = \varkappa^{ji}$, а следовательно, и $\varkappa_{ij} = \varkappa_{ji}$.

Ковариантные компоненты произвольного вектора

Для любого вектора A, очевидно, можно написать

$$A = A^j\mathfrak{d}_j = A^j\varkappa_{ij}\mathfrak{d}^i = A_i\mathfrak{d}^i,$$

если положить

$$A_i = \varkappa_{ij}A^j. \tag{4.19}$$

Видно, что у контравариантных компонент A^j вектора A, как и у контравариантных векторов базиса $\mathfrak{d}^i$ индекс опускается с помощью ковариантных компонент тензора $\varkappa$ (4.19) и (4.17). Следовательно, A_i преобразуются так же, как и $\mathfrak{d}_i$, т. е. ковариантным образом:

$$A'_i = a^{k\cdot}_{\cdot i}A_k;$$

A_i называются ковариантными компонентами вектора A в контравариантном базисе $\mathfrak{d}^i$. Следовательно, для каждого вектора A можно ввести компоненты A^i, преобразующиеся с помощью матрицы B, называемые контравариантными компонентами, и компоненты A_i, преобразующиеся с помощью матрицы A, называемые ковариантными компонентами. В общем случае ковариантные и контравариантные компоненты вектора отличаются друг от друга, $A^j \neq A_j$.

Ковариантные и смешанные компоненты тензора

Рассуждения, проведенные для вектора, можно применить к тензорам любого ранга и получить, например, для тензора четвертого ранга

$$T = T^{ijkl}\mathfrak{d}_i\mathfrak{d}_j\mathfrak{d}_k\mathfrak{d}_l = T^{ijkl}\varkappa_{ip}\varkappa_{jq}\varkappa_{km}\varkappa_{ln}\mathfrak{d}^p\mathfrak{d}^q\mathfrak{d}^m\mathfrak{d}^n = T_{pqmn}\mathfrak{d}^p\mathfrak{d}^q\mathfrak{d}^m\mathfrak{d}^n =$$
$$= T^{ijkl}\varkappa_{jp}\varkappa_{kq}\mathfrak{d}_i\mathfrak{d}^p\mathfrak{d}^q\mathfrak{d}_l = T^{i\cdots l}_{\cdot pq\cdot}\mathfrak{d}_i\mathfrak{d}^p\mathfrak{d}^q\mathfrak{d}_l. \tag{4.20}$$

Компоненты T_{pqmn} называются ковариантными, а $T^{i\ldots l}_{\cdot pq\cdot}$ — смешанными (ковариантными по индексам p, q и контравариантными по индексам i, l) компонентами тензора T. Формулы преобразования для смешанных компонент имеют вид

$$T'^{m\ldots s}_{\cdot nr\cdot} = T^{i\cdot\cdot l}_{\cdot pq\cdot} b^{m\cdot}_{\cdot i} a^{p\cdot}_{\cdot n} a^{q\cdot}_{\cdot r} b^{s\cdot}_{\cdot l},$$

т. е. преобразование ковариантное по нижним индексам n, r и контравариантное по верхним индексам m, s.

Жонглирование индексами

Мы видим, что с помощью тензора $\varkappa$ у компонент любого тензора можно опускать и поднимать индексы. Эта операция носит название операции жонглирования индексами. Например,

$$T = T_{ij}\vartheta^i\vartheta^j = T_{ij}\varkappa^{ik}\vartheta_k\vartheta^j = T^{k\cdot}_{\cdot j}\vartheta_k\vartheta^j; \qquad (4.21)$$

вместо записи тензора T с помощью ковариантных компонент T_{ij} мы получили его выражение через смешанные компоненты $T^{k\cdot}_{\cdot j}$. Ясно, что опускание индексов (4.20) проводится с помощью $\varkappa_{ij}$, а поднятие (4.21) с помощью $\varkappa^{ij}$.

Заметим, что складывать и вычитать можно только компоненты тензоров с одинаковыми строениями индексов. Свойства симметрии и антисимметрии тензоров также определялись нами относительно одинаково расположенных индексов.

Длина вектора

Все приведенные выше рассуждения относились к одной произвольной, но фиксированной точке пространства. Введем теперь метрику пространств, т. е. укажем способ определения длин в пространстве. Для определения длины вектора достаточно определить скалярные произведения векторов базиса

$$\vartheta_i \cdot \vartheta_j = g_{ij},$$

которые, вообще говоря, в данной точке могут быть произвольными числами. Квадрат длины вектора $d\boldsymbol{r}$ по определению будет равен

$$|d\boldsymbol{r}|^2 = ds^2 = d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = d\zeta^i d\zeta^j \vartheta_i \cdot \vartheta_j = d\zeta^i d\zeta^j g_{ij}, \qquad (4.22)$$

а квадрат длины любого вектора

$$|\boldsymbol{A}|^2 = A^i A^j g_{ij}.$$

Длина любого вектора выражается через его компоненты и скалярные произведения векторов базиса g_{ij}.

Условие инвариантности длины $|d\boldsymbol{r}|$ относительно выбора системы координат имеет вид

$$|d\boldsymbol{r}|^2 = g'_{pq} d\eta^p d\eta^q = g_{ij} d\zeta^i d\zeta^j = g_{ij} a^{i\cdot}_{\cdot p} a^{j\cdot}_{\cdot q} d\eta^p d\eta^q.$$

Фундаментальный метрический тензор

Отсюда вытекают тензорные формулы преобразования g_{ij}: $g'_{pq} = a^{i}_{\cdot p} a^{j}_{\cdot q} g_{ij}$. Таким образом, в силу инвариантности длины $|d\boldsymbol{r}|$ величины g_{ij} следует рассматривать как ковариантные компоненты тензора $g = g_{ij}\boldsymbol{\vartheta}^i\boldsymbol{\vartheta}^j$, который называется фундаментальным метрическим тензором.

Согласно определению скалярного произведения тензор g является симметричным тензором:

$$g_{ij} = g_{ji}.$$

Квадратичная относительно приращений координат $d\zeta^i$ форма (4.22) называется фундаментальной квадратичной формой, задающей метрику — расстояние между близкими точками пространства.

Из алгебры известно, что всякую квадратичную форму с постоянными коэффициентами можно привести к каноническому виду, т. е. в каждой выбранной точке можно найти такие координаты x^1, x^2, x^3, что квадратичная форма (4.22) запишется в виде суммы квадратов:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2, \tag{4.23}$$

а матрица тензора g приведется к виду

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Заметим, что выполнить такого рода преобразование сразу во всем пространстве, вообще говоря, нельзя, т. е. нельзя найти такую систему координат x^1, x^2, x^3, чтобы (4.22) во всем пространстве привелась к виду (4.23). Если такая система координат существует, то пространство называется евклидовым, если нет — неевклидовым. Если в n-мерном пространстве форму (4.22) с помощью вещественного преобразования координат можно во всем пространстве привести к виду $ds^2 = \alpha_i (dx^i)^2$, где $\alpha_i = \pm 1$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, и по крайней мере одно из α_i отличается знаком от других, то пространство называется псевдоевклидовым.

Очевидно, для тензора g наряду с ковариантными компонентами g_{ij} можно ввести контравариантные компоненты g^{ij} таким же способом, как для фигурировавшего ранее тензора $\varkappa$. При этом необходимо только, чтобы $\operatorname{Det} \| g_{ij} \| \neq 0$. С помощью g^{ij} можно ввести контравариантные векторы базиса $\boldsymbol{\vartheta}^j$:

$$\boldsymbol{\vartheta}^j = g^{ij}\boldsymbol{\vartheta}_i, \tag{4.24}$$

и проводить жонглирование индексами уже не с помощью произвольного тензора $\varkappa$, а с помощью фундаментального метрического тензора g.

Взаимосвязь ковариантного и контравариантного базисов, если в качестве $\varkappa$ используется тензор g

Установим свойства скалярных произведений $\mathfrak{d}^i \cdot \mathfrak{d}_p$.

Из (4.24) имеем

$$\mathfrak{d}^i \cdot \mathfrak{d}_p = g^{ij}\mathfrak{d}_i \cdot \mathfrak{d}_p = g^{ij}g_{ip} = \delta^j_p, \qquad (4.25)$$

т. е. $\mathfrak{d}^1 \cdot \mathfrak{d}_1 = 1$, $\mathfrak{d}^1 \cdot \mathfrak{d}_2 = 0$, $\mathfrak{d}^1 \cdot \mathfrak{d}_3 = 0$ и т. д.

Отсюда следует, что вектор базиса $\mathfrak{d}^1$ ортогонален площадке, образованной векторами $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_3$, и т. д. Нетрудно проверить, что для контравариантных векторов базиса верны следующие формулы:

$$\mathfrak{d}^1 = \frac{\mathfrak{d}_2 \times \mathfrak{d}_3}{\mathfrak{d}_1 \cdot (\mathfrak{d}_2 \times \mathfrak{d}_3)}, \quad \mathfrak{d}^2 = \frac{\mathfrak{d}_3 \times \mathfrak{d}_1}{\mathfrak{d}_1 \cdot (\mathfrak{d}_2 \times \mathfrak{d}_3)}, \quad \mathfrak{d}^3 = \frac{\mathfrak{d}_1 \times \mathfrak{d}_2}{\mathfrak{d}_1 \cdot (\mathfrak{d}_2 \times \mathfrak{d}_3)}, \qquad (4.26)$$

а для ковариантных — формулы:

$$\mathfrak{d}_1 = \frac{\mathfrak{d}^2 \times \mathfrak{d}^3}{\mathfrak{d}^1 \cdot (\mathfrak{d}^2 \times \mathfrak{d}^3)}, \quad \mathfrak{d}_2 = \frac{\mathfrak{d}^3 \times \mathfrak{d}^1}{\mathfrak{d}^1 \cdot (\mathfrak{d}^2 \times \mathfrak{d}^3)}, \quad \mathfrak{d}_3 = \frac{\mathfrak{d}^1 \times \mathfrak{d}^2}{\mathfrak{d}^1 \cdot (\mathfrak{d}_2 \times \mathfrak{d}_3)}, \qquad (4.27)$$

где знаком $\times$ обозначены обычные векторные произведения. Говорят, что ковариантные и контравариантные векторы базиса взаимны. Ясно, что в декартовой ортогональной системе координат $\mathfrak{d}^j = \mathfrak{d}_j$, следовательно, в такой системе координат нет разницы между ковариантными и контравариантными компонентами векторов и тензоров и поэтому написание индексов вверху и внизу становится несущественным.

Смешанные компоненты метрического тензора

Из (4.25) ясно, что смешанные компоненты $g^{i\cdot}_{\cdot j}$ фундаментального метрического тензора g в любой системе координат образуют единичную матрицу:

$$\left\| g^{i\cdot}_{\cdot j} \right\| = \begin{Vmatrix} g^{1\cdot}_{\cdot 1} & g^{1\cdot}_{\cdot 2} & g^{1\cdot}_{\cdot 3} \\ g^{2\cdot}_{\cdot 1} & g^{2\cdot}_{\cdot 2} & g^{2\cdot}_{\cdot 3} \\ g^{3\cdot}_{\cdot 1} & g^{3\cdot}_{\cdot 2} & g^{3\cdot}_{\cdot 3} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \left\| \delta^{i\cdot}_{\cdot j} \right\|.$$

Неопределенное умножение тензоров

Мы уже познакомились с некоторыми операциями над тензорами, укажем еще на операцию умножения тензоров. Пусть имеется вектор $A = A^i\mathfrak{d}_i$ и тензор $T = T^{k\cdot}_{\cdot j}\mathfrak{d}_k\mathfrak{d}^j$; формально образуем

$$B = A^iT^{k\cdot}_{\cdot j}\mathfrak{d}_i\mathfrak{d}_k\mathfrak{d}^j$$

и

$$B^* = A^iT^{k\cdot}_{\cdot j}\mathfrak{d}_k\mathfrak{d}^j\mathfrak{d}_i = T^{ik}A_j\mathfrak{d}_i\mathfrak{d}_k\mathfrak{d}^j.$$

Очевидно, B и B^* будут тензорами, но $B \neq B^*$. Эта операция, приводящая к получению тензоров более высокого, чем исходные, ранга, носит название операции неопределенного умножения тензоров. Ее результат зависит от порядка умножения. С помощью неопределенного умножения векторов можно образовать тензор любого ранга $A^iA^jA^k \ldots \partial_i\partial_j\partial_k \ldots$, но не всякий тензор можно представить как произведение векторов. С помощью неопределенного произведения можно вводить тензоры вида

$$\mathcal{D} = g^{ij}g^{pq}g^{rs} \ldots \partial_i\partial_j\partial_p\partial_q\partial_r\partial_s \ldots =$$
$$= g_{ii}g_{pq}g_{rs} \ldots \partial^i\partial^j\partial^p\partial^q\partial^r\partial^s \ldots = \delta^i_{\cdot j}\delta^{p\cdot}_{\cdot q}\delta^{r\cdot}_{\cdot s} \ldots \partial_i\partial^j\partial_p\partial^q\partial_r\partial^s \ldots$$

Очевидно, что смешанные компоненты тензоров $\mathcal{D}$ в любых системах координат одинаковы, т. е. они являются инвариантами преобразования координат. Эти компоненты равны нулю или единице.

Число компонент тензора

Скаляр k можно рассматривать как тензор нулевого ранга, он характеризуется одним числом ($3^0 = 1$), вектор — тензор первого ранга в трехмерном пространстве имеет три компоненты ($3^1 = 3$), тензор второго ранга имеет $3^2 = 9$ компонент и т. д., тензор ранга p имеет в трехмерном пространстве 3^p компонент, а тензор ранга r в n-мерном пространстве имеет n^r компонент. Иногда, например при наличии симметрии, число независимых компонент тензора может сокращаться. В частности, двухвалентный симметричный тензор ($T_{ij} = T_{ji}$) имеет только шесть независимых компонент, а антисимметричный ($T_{ij} = -T_{ji}$) имеет только три независимые компоненты. Понятие симметрии тензора означает инвариантность его компонент относительно некоторой группы преобразований. Например, указанные выше смешанные компоненты тензора $\mathcal{D}$ инвариантны относительно группы всех непрерывных преобразований. Компоненты тензора $\mathcal{D}$ с любым строением индексов инвариантны относительно группы ортогональных преобразований, определенной из условия инвариантности компонент фундаментального тензора g_{ij}.

Скалярные инварианты тензора

В общем случае компоненты тензора зависят от выбора системы координат, но можно поставить задачу: отыскать такие функции $\Phi(T^i_{\cdot j})$ от компонент тензора, которые будут инвариантными относительно выбора системы координат, т. е.

$$\Phi(T^i_{\cdot j}) = \Phi(T'^i_{\cdot j}).$$

Такие функции компонент тензора называются инвариантами тензора. Они являются числами или функциями точек простран-

ства. Именно такие функции компонент тензоров и векторов должны, наряду с другими инвариантными объектами, входить в математическую запись физических законов, которая должна быть инвариантной относительно способов описания физического явления и, в частности, не должна зависеть от системы координат. Аналогичным способом можно определить инвариантные функции от компонент нескольких тензоров. Такие функции называются скалярами. Укажем простые правила образования инвариантов вектора и тензора. Возьмем вектор

$$\boldsymbol{A} = A^i \boldsymbol{\vartheta}_i = A_j \boldsymbol{\vartheta}^j = A^i g_{ij} \boldsymbol{\vartheta}^j$$

и составим скалярное произведение

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = A^i A^j \boldsymbol{\vartheta}_i \cdot \boldsymbol{\vartheta}_j = A^i A^j g_{ij} = A^i A_i.$$

Полученное выражение является инвариантом (квадратом длины вектора $\boldsymbol{A}$), так как преобразования разноименных компонент вектора взаимно обратны. У вектора только один независимый инвариант — его длина, все остальные инварианты являются ее функциями.

Теперь возьмем любой тензор второго ранга

$$T = T^{ij} \boldsymbol{\vartheta}_i \boldsymbol{\vartheta}_j$$

и образуем свертку по обоим индексам с метрическим тензором $T^{ij} g_{ij}$ (сверткой называется операция суммирования по верхнему и нижнему индексам), которая даст число, не зависящее от системы координат, так как преобразования компонент с верхними и нижними индексами взаимно обратны. Можно записать

$$\text{Свертки} \quad \left.\begin{array}{c} T^{ij} g_{ij} = T^{i\cdot}_{\cdot i} = T^{1\cdot}_{\cdot 1} + T^{2\cdot}_{\cdot 2} + T^{3\cdot}_{\cdot 3}, \\ T^{i\cdot}_{\cdot j} T^{j\cdot}_{\cdot i}, \\ T^{i\cdot}_{\cdot j} T^{j\cdot}_{\cdot p} T^{p\cdot}_{\cdot i} \end{array}\right\} \qquad (4.28)$$

также будут инвариантами. Итак, для тензора второго ранга мы получили три инварианта: линейный, квадратичный и кубичный относительно компонент. Ниже будет показано, что в случае симметричного тензора второго ранга, особенно важном для наших приложений, все остальные скалярные инварианты будут функциями этих трех.

Тензорная поверхность

Возьмем произвольную точку O и близкую к ней точку M. Проведем в O координатные линии ζ^1, ζ^2, ζ^3 и рассмотрим вектор

$$\overline{OM} = d\boldsymbol{r} = d\zeta^i \boldsymbol{\vartheta}_i$$

и симметричный тензор

$$\boldsymbol{T} = T^{ij} \boldsymbol{\vartheta}_i \boldsymbol{\vartheta}_j = T_{ij} \boldsymbol{\vartheta}^i \boldsymbol{\vartheta}^j.$$

Очевидно, $T_{ij}d\zeta^i d\zeta^j$ является инвариантом, и мы можем положить

$$T_{ij}d\zeta^i d\zeta^j = T'_{ij}d\eta^i d\eta^j = c, \tag{4.29}$$

где c — некоторое число. В малой окрестности точки O уравнение (4.29) при фиксированном c и значениях T_{ij}, взятых в точке O, определяет поверхность второго порядка, которая называется тензорной поверхностью. Дифференциалы $d\zeta^i$ или $d\eta^i$ рассматриваются как координаты точек этой тензорной поверхности. Каждому симметричному тензору T второго ранга в каждой точке можно поставить в соответствие поверхность второго порядка (4.29).

Главные оси и главные компоненты тензора

Как известно, уравнение этой поверхности второго порядка с помощью преобразования координат можно привести к каноническому виду, т. е. в точке O можно выбрать систему координат x^1, x^2, x^3 так, что (4.29) примет вид

$$T_{11}(dx^1)^2 + T_{22}(dx^2)^2 + T_{33}(dx^3)^2 = c.$$

Система координат x^1, x^2, x^3 в точке O будет при этом ортогональной. Следовательно, в каждой точке пространства можно ввести оси координат так, что только три компоненты T_{11}, T_{22}, T_{33} симметричного тензора второго ранга будут отличными от нуля. Такие оси называются главными осями тензора, а прямоугольная декартова система координат, оси которой направлены по главным осям, называется главной системой координат тензора. Очевидно, разница между ковариантными и контравариантными компонентами в главной системе координат пропадает:

$$T^{ii} = T_{ii} = T^i_i = T_i$$

(суммирование по i здесь отсутствует). Три вообще различных и отличных от нуля компоненты тензора в главной системе называются его главными компонентами.

Теперь можно легко ответить на вопрос о числе независимых инвариантов симметричного тензора второго ранга. Все они в главной системе координат должны быть функциями только трех компонент, и, следовательно, их число не может быть больше трех, а из записи инвариантов (4.28) в главной системе ясно, что все три найденных ранее инварианта независимы.

На этом мы закончим изложение элементов тензорной алгебры. В дальнейшем нам потребуется ряд сведений из тензорного анализа, которые мы будем излагать по мере необходимости.

§ 5. Теория деформаций

Пусть относительно системы координат наблюдателя x^1, x^2, x^3 движется абсолютно твердое тело (рис. 10). Отметим два его положения — в начальный момент времени t_0 и в произвольный момент t.

О зависимости векторов базиса сопутствующей системы от времени

С каждой точкой M тела можно связать сопутствующую систему координат ξ^1, ξ^2, ξ^3. Сопутствующая система будет двигаться вместе с телом, и векторы базиса сопутствующей системы в моменты t_0 и t будут разными. Обозначим их в момент t_0 через $\mathring{\vec{e}}_i$, а в момент t — через $\hat{\vec{e}}_i$. Ясно, что векторы базиса сопутствующей системы зависят, вообще говоря, от точки M

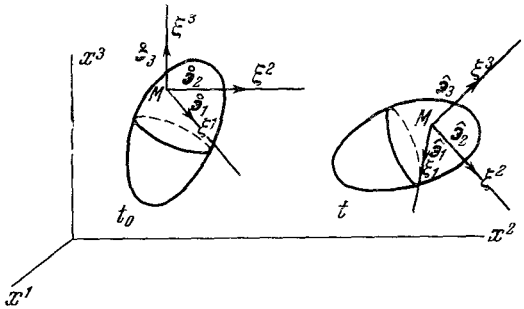


Рис. 10. Движение абсолютно твердого тела.

тела и, кроме того, меняются со временем. Очевидно, что, если система ξ^1, ξ^2, ξ^3 вморожена в среду, а среда движется как абсолютно твердое тело, то триэдры $\hat{\vec{e}}_i$ можно получить из триэдров $\mathring{\vec{e}}_i$ посредством поступательного перемещения и поворота

$$|\mathring{\vec{e}}_i| = |\hat{\vec{e}}_i| \quad \text{и} \quad \angle\, \mathring{\vec{e}}_i \mathring{\vec{e}}_j = \angle\, \hat{\vec{e}}_i \hat{\vec{e}}_j, \quad \text{т. е.} \quad \mathring{\vec{e}}_i \cdot \mathring{\vec{e}}_j = \hat{\vec{e}}_i \cdot \hat{\vec{e}}_j.$$

Сложнее будет обстоять дело в случае движения деформируемого тела. Действительно, при движении деформируемого тела расстояния между его точками M и M' меняются. Координатные линии сопутствующей системы координат деформируются, и векторы базиса $\hat{\vec{e}}_i$ меняются со временем так, что меняются и их величины и углы между ними.

Эффект изменения расстояний между точками сплошной среды во время движения очень важен. В частности, укажем на то, что силы взаимодействия между частицами зависят от изменения расстояний между ними.

Рассмотрим два произвольных положения деформируемого тела и, в частности, его точек M и M' в произвольные моменты времени t и t' (рис. 11). Векторы базиса в точке M в момент t'

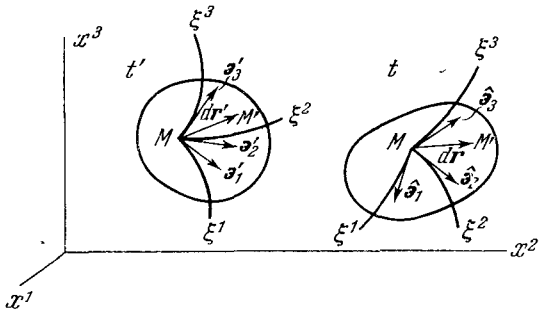


Рис. 11. Движение деформируемой среды.

обозначим через ∂_i', а в момент t — через $\hat{\partial}_i$. Очевидно, в сопутствующей системе координат будем иметь

$$d\boldsymbol{r} = d\xi^i \hat{\partial}_i$$

и

$$d\boldsymbol{r}' = d\xi^i \partial_i'.$$

Мы хотим ввести в рассмотрение характеристики изменения расстояний, поэтому необходимо ввести метрические тензоры сопутствующей системы координат в моменты времени t и t'.

Однако еще до введения метрики укажем, что любой бесконечно малый отрезок прямой, выходящий из точки M, в процессе движения сплошной среды переходит в малый отрезок прямой, выходящий из точки, соответствующей этой точке M.

Действительно, наряду с бесконечно малым элементом сплошной среды $d\boldsymbol{r}$ в момент t, которому в момент t' соответствовал $d\boldsymbol{r}'$, можно ввести в момент t элемент сплошной среды $k\,d\boldsymbol{r}$, где k—некоторое число. В пространстве ξ^1, ξ^2, ξ^3 в момент t' этому элементу соответствовал элемент $k\,d\boldsymbol{r}'$, так как в этом пространстве в силу сохранения лагранжевых координат всех точек сплошной среды должно иметь место разложение по векторам базиса ∂_i':

$$k\,d\xi^i \partial_i' = k\,d\boldsymbol{r}'.$$

При разных конечных k и данном $d\boldsymbol{r}$ элементы $k\,d\boldsymbol{r}$ определяют в момент t малый отрезок прямой, выходящий из точки M, которому в пространстве ξ^1, ξ^2, ξ^3 в момент t' соответствовал малый отрезок прямой $k\,d\boldsymbol{r}'$.

Теперь введем метрики пространств сопутствующей системы координат в моменты t и t'. Пусть в момент t

где
$$\left.\begin{aligned} |d\boldsymbol{r}| &= ds, \quad ds^2 = \hat{g}_{ij}d\xi^i d\xi^j, \\ \hat{g}_{ij} &= \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_j, \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

и в момент t'

где
$$\left.\begin{aligned} |d\boldsymbol{r}'| &= ds', \quad ds'^2 = g'_{ij}d\xi^i d\xi^j, \\ g'_{ij} &= \boldsymbol{\vartheta}'_i \cdot \boldsymbol{\vartheta}'_j. \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

Подчеркнем, что координаты точек M и M' в моменты t и t' в сопутствующей системе координат одинаковые, а компоненты $\hat{g}_{ij}$ и g'_{ij} разные.

Коэффициент относительного удлинения

Назовем коэффициентом относительного удлинения отношение

$$l = \frac{ds - ds'}{ds'} = \frac{ds}{ds'} - 1, \tag{5.3}$$

где ds и ds' проходят в соответствующие моменты времени через одни и те же индивидуальные точки среды. Коэффициент l зависит от точки M и направления элемента, для которого он вычисляется, и не зависит от длины $d\boldsymbol{r}$. Если l в каждой точке деформируемой среды и в каждом направлении бесконечно мал, то деформация называется бесконечно малой. Если l имеет конечное значение, то деформация конечная. По определению для абсолютно твердого тела все коэффициенты l равны нулю.

Обратим внимание, что деформации и коэффициенты относительного удлинения l можно вводить, рассматривая два совершенно произвольных положения сплошной среды, и что l для любого $d\boldsymbol{r}$ можно вычислить, зная $\hat{g}_{ij}$, g'_{ij} и направление $d\boldsymbol{r}$.

Тензоры деформаций

Введем обозначение:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - g'_{ij}); \tag{5.4}$$

по (5.1) и (5.2) будем иметь

$$ds^2 - ds'^2 = 2\varepsilon_{ij}d\xi^i d\xi^j.$$

Из (5.4) видно, что ε_{ij} можно рассматривать как ковариантные компоненты тензора. Как известно, с помощью любого тензора второго ранга $\varkappa$ можно по ковариантным компонентам некоторого тензора образовать его контравариантные компоненты. В метрическом пространстве мы условились в качестве тензора $\varkappa$ использовать фундаментальный тензор g. В нашем случае можно поднимать индексы либо с помощью g'^{ij}, либо с помощью $\hat{g}^{ij}$

и потому по ковариантным компонентам ε_{ij} можно образовать два разных набора контравариантных компонент: $\hat{\varepsilon}^{ij}$ (индексы поднимаются посредством $\hat{g}^{ij}$) и ε'^{ij} (индексы поднимаются посредством g'^{ij}). Это означает, что можно образовать два разных тензора:

$$\hat{\mathscr{E}} = \varepsilon_{ij}\hat{\vartheta}^i\hat{\vartheta}^j \text{ и } \mathscr{E}' = \varepsilon_{ij}\vartheta'^i\vartheta'^j,$$

имеющих одинаковые ковариантные компоненты (5.4), но отнесенных к разным базисам $\hat{\vartheta}^i$ и ϑ'^i. Эти два тензора называются тензорами деформаций. Контравариантные и смешанные компоненты тензоров $\hat{\mathscr{E}}$ и $\mathscr{E}'$ разные, и мы установим для них обозначения $\hat{\varepsilon}^{ij}$, ε'^{ij} и $\hat{\varepsilon}^i_j$, ε'^i_j соответственно; $\varepsilon'^i_j \neq \hat{\varepsilon}^i_j$, так как $\varepsilon'^i_j = \varepsilon_{pj}g'^{pi}$, а $\hat{\varepsilon}^i_j = \varepsilon_{pj}\hat{g}^{pi}$ и $g'^{pi} \neq \hat{g}^{pi}$.

Тензоры деформаций являются основными характеристиками возникающих в телах деформаций, и их компоненты входят в основные уравнения, описывающие движение сплошной среды.

Начальное состояние и «начальное состояние»

Ясно, что в интересующий нас момент t величины деформации зависят не только от рассматриваемого состояния тела, но и от того, по отношению к какому состоянию эти деформации вычисляются. Как выбрать это состояние, если мы хотим получить определенные физические характеристики деформации? Очевидно, оно не может быть совершенно произвольным, а должно быть определено из конкретных физических соображений. Отметим, что его можно определять по-разному, и сейчас в теории деформаций мы не будем фиксировать этот способ определения, а назовем каким-то образом выбираемое для сравнения с данным состоянием сплошной среды состояние начальным и укажем только на могущее встретиться при этом следующее обстоятельство. Это начальное состояние не обязательно должно реально осуществляться. Например, за начальное состояние можно принять такое мысленно введенное состояние, в котором структура каждого элемента сплошной среды упорядочена и элемент предоставлен самому себе, т. е. на него не действуют никакие силы. Обозначим метрику в этом мысленно введенном состоянии через $\mathring{g}_{ij}$, а векторы базиса сопутствующей системы в начальном состоянии через $\mathring{\vartheta}_i$. Очевидно, что введенная таким образом метрика может оказаться неевклидовой. Реальное же движение сплошной среды происходит в евклидовом пространстве, и, следовательно, в общем случае может не существовать действительного (реального) перехода сплошной среды из начального состояния в данное. Идеальное примысленное «начальное состояние» (в кавычках) можно использовать для оценки изменения метрики и для введения тензора деформаций.

Поясним сказанное на примере движения в двумерном евклидовом пространстве, т. е. на плоскости. Условимся рассматривать движение некоторой пленки в плоскости, а за начальное состояние выбирать такое, когда к пленке не приложены никакие силы. Пусть пленка растянута по краям и только благодаря этому растяжению остается плоской. Если же освободить пленку от растягивающих усилий, то она покоробится, покроется морщинами и, оставаясь двумерной, уже не будет плоской. Установить взаимно однозначное соответствие между точками плоской пленки в данный момент и покоробленной, морщинистой (в случае снятия с нее всех нагрузок) можно, но для этого, вообще говоря, нужно выйти в трехмерное пространство; оставаясь в двумерном пространстве, с сохранением типа метрики пространства, этого сделать нельзя. Поэтому нерастянутое покоробленное состояние пленки по отношению к движениям в двумерном евклидовом пространстве можно рассматривать только как «начальное состояние» (в кавычках). Итак, если вводимое по каким-то физическим соображениям начальное состояние как состояние сплошной среды может осуществляться мысленно или фактически с помощью некоторого движения, то это начальное состояние можно определить как начальное состояние без кавычек. Если же вводимое мысленно состояние сравнения не может быть получено непрерывным движением среды в том же самом пространстве, то это «начальное состояние» (в кавычках!)

Компоненты $\mathring{g}_{ij}$ в общем случае могут зависеть от ξ^1, ξ^2, ξ^3 и t; если примысленное «начальное состояние» фиксировано, то $\mathring{g}_{ij}$ могут зависеть только от ξ^1, ξ^2, ξ^3.

Геометрический смысл ковариантных компонент тензоров деформаций

Выясним теперь геометрический смысл ковариантных компонент тензоров деформаций $\hat{\mathscr{E}}$ и $\mathring{\mathscr{E}}$. Запишем компоненты метрических тензоров в следующем виде.

$$\hat{g}_{ij} = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_j = |\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_i| \cdot |\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_j| \cos \psi_{ij}, \tag{5.5}$$

где ψ_{ij} — углы между векторами $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_i$ и $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_j$, и

$$\mathring{g}_{ij} = \mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_i \cdot \mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_j = |\mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_i| \cdot |\mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_j| \cos \mathring{\psi}_{ij}, \tag{5.6}$$

где $\mathring{\psi}_{ij}$ — углы между векторами $\mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_i$ и $\mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_j$. Составим отношение

$$\frac{|\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_i|}{|\mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_i|} = \frac{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^i}\right|}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial \xi^i}\right|} = \frac{|d\boldsymbol{r}_i|}{|d\boldsymbol{r}_{0i}|} = \frac{ds_i}{ds_{0i}} = l_i + 1, \tag{5.7}$$

где ds_i и ds_{0i} — элементы дуг координатных линий ξ^i, а l_i —

коэффициенты относительных удлинений в направлениях ξ^i. Теперь с помощью (5.7) из (5.5) можно получить

$$\hat{g}_{ij} = |\overset{\bullet}{\partial}_i| \cdot |\overset{\bullet}{\partial}_j| (1 + l_i)(1 + l_j) \cos \psi_{ij}, \tag{5.8}$$

а с помощью (5.6), (5.8) и (5.4), приняв за состояние сплошной среды в момент t' начальное состояние или «начальное состояние» $\overset{\circ}{g}_{ij}$, получим следующие формулы:

$$2\varepsilon_{ij} = [(1 + l_i)(1 + l_j) \cos \psi_{ij} - \cos \overset{\circ}{\psi}_{ij}] \, |\overset{\circ}{\partial}_i| \cdot |\overset{\circ}{\partial}_j|, \tag{5.9}$$

которые удобны для геометрического истолкования ε_{ij}.

Рассмотрим сначала геометрическое истолкование ε_{ij} с одинаковыми индексами. Из (5.9) будем иметь

$$2\varepsilon_{ii} = [(1 + l_i)^2 - 1] \, \overset{\circ}{g}_{ii}, \tag{5.10}$$

откуда

$$l_i = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon_{ii}}{\overset{\circ}{g}_{ii}}} - 1. \tag{5.11}$$

Если деформации малы, то ε_{ij} малы; разложив (5.11) в ряд, получим

$$l_i \simeq \frac{\varepsilon_{ii}}{\overset{\circ}{g}_{ii}}. \tag{5.12}$$

Кроме того, если сопутствующая система в «начальном состоянии» взята декартовой, то $\overset{\circ}{g}_{ii} = 1$, и поэтому

$$l_i \simeq \varepsilon_{ii}, \tag{5.13}$$

т. е. ковариантные компоненты тензоров деформаций с одинаковыми индексами в случае бесконечно малых деформаций совпадают с коэффициентами относительных удлинений вдоль декартовых осей координат начального состояния.

Обратимся к вопросу о геометрическом истолковании компонент ε_{ij} с различными индексами (при $i \neq j$). Для этого ради простоты в «начальном состоянии» выберем в данной точке такую систему координат, в которой $\overset{\circ}{\partial}_i$ взаимно ортогональны, т. е.

$$\overset{\circ}{\psi}_{ij} = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда, положив

$$\psi_{ij} = \frac{\pi}{2} - \chi_{ij},$$

из (5.5), (5.6) и (5.4) получим

$$2\varepsilon_{ij} = |\hat{\partial}_i| \cdot |\hat{\partial}_j| \sin \chi_{ij},$$

или

$$\sin \chi_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{\hat{g}_{ii}}\sqrt{\hat{g}_{jj}}}, \tag{5.14}$$

откуда видно, что в общем случае углы, бывшие в «начальном состоянии» прямыми, после деформации перестают быть прямыми, и ковариантные компоненты ε_{ij} с различными индексами $(i \neq j)$ характеризуют скашивание первоначально прямого координатного угла. Если деформации бесконечно малы и система координат в «начальном состоянии» декартова, то $\overset{\circ}{g}_{ii} = 1$ и $\hat{g}_{ii} = 1 + O(\varepsilon)$ (ε — бесконечно малая величина). С помощью разложения в ряд легко получим

$$\sin \chi_{ij} \simeq 2\varepsilon_{ij}, \tag{5.15}$$

или

$$\chi_{ij} \simeq 2\varepsilon_{ij}. \tag{5.16}$$

Главные оси тензоров деформаций С каждым симметричным тензором, в том числе и с тензорами деформаций, можно связать квадратичную форму $\varepsilon_{ij}d\xi^i d\xi^j$. Известно, что в каждой точке можно найти такую ортогональную систему координат η^1, η^2, η^3, в которой квадратичная форма $\varepsilon_{ij}d\xi^i d\xi^j$ приведется к виду

$$\varepsilon_{ij}\, d\xi^i\, d\xi^j = \varepsilon_{11}(d\eta^1)^2 + \varepsilon_{22}(d\eta^2)^2 + \varepsilon_{33}(d\eta^3)^2. \tag{5.17}$$

Преобразование от ξ^i к η^i зависит от компонент ε_{ij}, поэтому соответствующий ортогональный триэдр η^i при движении будет вообще разным в различные моменты времени. Возьмем в пространстве $\overset{\circ}{g}_{ij}$ такие оси η^1, η^2, η^3 и покажем, что в результате движения они перейдут в пространстве $\hat{g}_{ij}$ (для сопутствующей системы) в такие направления осей η^1, η^2, η^3, для которых $\hat{\partial}_i$ тоже будут оргогональны. Действительно, для таких осей η^1, η^2, η^3 компоненты ε_{ij} при $i \neq j$ равны нулю, и, следовательно, по (5.14) $\chi_{ij} = 0$, т. е. оси η^1, η^2, η^3 останутся ортогональными. Ясно, что в таких осях в силу их ортогональности $\overset{\circ}{g}_{ij} = \hat{g}_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0$ при $i \neq j$, откуда следует, что и $\hat{\varepsilon}_i^j = \hat{\varepsilon}^{ij} = 0$ при $i \neq j$. Такие оси называются главными осями тензоров деформаций. В них одновременно приводятся к диагональному виду матрицы

$$\|\overset{\circ}{g}_{ij}\|,\ \|\hat{g}_{ij}\|,\ \|\overset{\circ}{g}{}^{ij}\|,\ \|\hat{g}^{ij}\|,\ \|\varepsilon_{ij}\|,\ \|\varepsilon^i_{\cdot j}\|,\ \|\varepsilon^{ij}\|.$$

Образуемый главными осями ортогональный триэдр при данном перемещении остается ортогональным: углы между главными осями не скашиваются, однако ортогональный триэдр

главных осей может перемещаться как твердое тело, т. е. смещаться поступательно и поворачиваться. Таким образом, с каждой точкой деформируемой среды можно связать ортогональный триэдр главных осей, который при данном перемещении ведет себя как абсолютно твердое тело. Заметим, что элементы $d\boldsymbol{r}$, взятые вдоль главных осей, во время движения могут сжиматься или растягиваться. Подчеркнем, что понятие главных осей тензора деформаций введено нами в случае произвольных конечных деформаций. Главные оси тензоров деформаций $\hat{\mathscr{E}}$ и $\overset{\circ}{\mathscr{E}}$ в соответствующих пространствах проходят через одни и те же индивидуальные точки среды.

Главные компоненты тензоров деформаций

Вдоль главных осей η^1, η^2, η^3 тензора деформаций в момент времени t

$$ds_i^2 = \hat{g}_{ii}(d\eta^i)^2 \tag{5.18}$$

(суммирование по i отсутствует), и в главных осях квадрат длины произвольно направленного элемента $d\boldsymbol{r}$ может быть представлен в виде

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2. \tag{5.19}$$

Аналогично в «начальном состоянии»

$$ds_{0i}^2 = \overset{\circ}{g}_{ii}(d\eta^i)^2 \tag{5.20}$$

(суммирование по i отсутствует) и

$$ds_0^2 = ds_{01}^2 + ds_{02}^2 + ds_{03}^2. \tag{5.21}$$

Взятые таким путем вдоль главных осей элементарные отрезки ds_i и ds_{0i} могут рассматриваться как обычные декартовы координаты в окрестности данной точки в данном состоянии и в «начальном состоянии» соответственно (масштабы координат ds_i, как и масштабы координат ds_{0i}, вдоль разных главных осей при этом одинаковы). В пространстве наблюдателя системы ds_{01}, ds_{02}, ds_{03} и ds_1, ds_2, ds_3 в общем случае не совпадают.

Воспользовавшись (5.18), (5.20) и определением ковариантных компонент тензоров деформаций (5.4), легко получим

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\sum_i \frac{\varepsilon'_{ii}}{\hat{g}_{ii}} ds_i^2 = 2\sum_i \frac{\varepsilon'_{ii}}{\overset{\circ}{g}_{ii}} ds_{(i}^2, \tag{5.22}$$

где штрих у ε'_{ii} вверху указывает, что ковариантные компоненты тензора деформаций взяты в главных осях. Матрицы $\|\overset{\circ}{g}_{ij}\|$ и $\|\hat{g}_{ij}\|$ имеют в главных осях диагональный вид, поэтому обратные им матрицы $\|\overset{\circ}{g}^{ij}\|$ и $\|\hat{g}^{ij}\|$ в главных осях также имеют диагональный вид и $\overset{\circ}{g}^{ii} = 1/\overset{\circ}{g}_{ii}$, а $\hat{g}^{ii} = 1/\hat{g}_{ii}$

Поэтому входящие в (5.22) отношения $\varepsilon'_{ii}/\mathring{g}_{ii}$ и $\varepsilon'_{ii}/\hat{g}_{ii}$ будут соответственно равны $\varepsilon'_{ii}\mathring{g}^{ii} = \mathring{\varepsilon}^{i}{}_{i} = \mathring{\varepsilon}_{i}$ и $\hat{\varepsilon}'_{ii}\hat{g}^{ii} = \hat{\varepsilon}^{i}{}_{i} = \hat{\varepsilon}_{i}$ (в последних двух выражениях суммирование по i отсутствует) и, следовательно, являются смешанными компонентами тензоров деформаций в соответствующих главных осях. Выражение (5.22) теперь может быть записано в виде

$$ds^2 - ds_0^2 = 2(\hat{\varepsilon}_1 ds_1^2 + \hat{\varepsilon}_2 ds_2^2 + \hat{\varepsilon}_3 ds_3^2) = \\ = 2\,(\mathring{\varepsilon}_1 ds_{01}^2 + \mathring{\varepsilon}_2 ds_{02}^2 + \mathring{\varepsilon}_3 ds_{03}^2). \qquad (5.23)$$

Итак, с каждой точкой движущейся среды можно связать обычную ортогональную декартову систему координат (s_{01}, s_{02}, s_{03}), направленную вдоль главных осей тензора деформаций, которая в процессе движения будет переходить также в обычную ортогональную декартову систему координат (s_1, s_2, s_3). Расположение индексов (вверху или внизу) в этих системах, поскольку они являются ортогональными декартовыми, несущественно. Соответствующие компоненты тензоров деформаций $\hat{\varepsilon}_i$ и $\mathring{\varepsilon}_i$ в этих системах являются главными компонентами.

Связь главных компонент тензоров деформаций $\hat{\mathscr{E}}$ и $\mathring{\mathscr{E}}$

Тензоры деформации $\hat{\mathscr{E}}$ и $\mathring{\mathscr{E}}$ имеют разные главные компоненты, т. е. $\hat{\varepsilon}_i \neq \mathring{\varepsilon}_i$, но между $\hat{\varepsilon}_i$ и $\mathring{\varepsilon}_i$ существует связь. Установим ее. Из (5.22) для направления $d\boldsymbol{r}_i$, взятого вдоль i-й главной оси, будем иметь

$$ds_i^2 - ds_{0i}^2 = 2\hat{\varepsilon}_i ds_i^2, \qquad (5.24)$$

откуда

$$2\hat{\varepsilon}_i = 1 - \frac{ds_{0i}^2}{ds_i^2}. \qquad (5.25)$$

Аналогично

$$ds_i^2 - ds_{0i}^2 = 2\varepsilon_i \mathring{ds}_{0i}^2 \qquad (5.26)$$

и

$$2\mathring{\varepsilon}_i = \frac{ds_i^2}{ds_{0i}^2} - 1. \qquad (5.27)$$

Из соотношений (5.25) и (5.27), в частности, видно, что $\mathring{\varepsilon}_i \neq \hat{\varepsilon}_i$, и из них же легко получить, что

$$2\hat{\varepsilon}_i = 1 - \frac{1}{1 + 2\mathring{\varepsilon}_i} = \frac{2\mathring{\varepsilon}_i}{1 + 2\mathring{\varepsilon}_i}, \qquad (5.28)$$

т. е. найти искомую связь главных компонент тензоров $\hat{\mathscr{E}}$ и $\mathring{\mathscr{E}}$. Установим еще связь между коэффициентами относительных удлинений в направлениях главных осей $l_i = \frac{ds_i - ds_{0i}}{ds_{0i}}$ и глав-

ными компонентами тензоров деформаций. Из (5.25) следует

$$l_i = \sqrt{\frac{1}{1-2\hat{\varepsilon}_i}} - 1, \tag{5.29}$$

и аналогично из (5.27)

$$l_i = \sqrt{1+2\mathring{\varepsilon}_i} - 1. \tag{5.30}$$

Формулы (5.29) и (5.30) верны для конечных деформаций. Если же деформации бесконечно малы, то малы компоненты тензоров деформаций $\hat{\mathscr{E}}$ и $\mathring{\mathscr{E}}$ и из (5.29) и (5.30) после разложения в ряд получим

$$l_i = \hat{\varepsilon}_i = \mathring{\varepsilon}_i,$$

т. е. коэффициенты относительных удлинений вдоль главных осей в случае бесконечно малых деформаций совпадают как с главными компонентами тензора деформаций $\hat{\mathscr{E}}$ в актуальном пространстве, так и с главными компонентами тензора деформаций $\mathring{\mathscr{E}}$ в «начальном» пространстве. Поэтому разница тензоров $\hat{\mathscr{E}}$ и $\mathring{\mathscr{E}}$ в случае бесконечно малых деформаций пропадает.

Способ определения главных компонент тензора

Теперь напомним способ, с помощью которого можно найти главные компоненты тензора деформаций. Ради краткости возьмем матрицу

$$C = \|c^i_j\| = \|\lambda\delta^i_j - \varepsilon^i_j\|,$$

где λ — некоторый числовой параметр, и будем под ней подразумевать как матрицу $\|\lambda\delta^i_j - \mathring{\varepsilon}^i_j\|$, так и матрицу $\|\lambda\delta^i_j - \hat{\varepsilon}^i_j\|$. В главных осях матрица C имеет вид

$$C^* = \begin{Vmatrix} \lambda-\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-\varepsilon_3 \end{Vmatrix}.$$

Если взять Det C^* и приравнять его нулю, то мы, очевидно, получим кубическое относительно λ уравнение

$$\left.\begin{aligned} &(\lambda-\varepsilon_1)(\lambda-\varepsilon_2)(\lambda-\varepsilon_3) = 0 \\ &\text{или, в развернутом виде,} \\ &\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.31}$$

Корни λ_1, λ_2, λ_3 этого уравнения будут главными компонентами ε_1, ε_2, ε_3 соответствующего тензора деформаций. Так обстоит дело, если (5.31) составлено в главной системе η^1, η^2, η^3.

Возьмем произвольную, не главную, систему координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 и в ней составим матрицу C. Рассмотрим преобразование от η^1, η^2, η^3 к ξ^1, ξ^2, ξ^3. Компоненты матрицы C, как разности компонент двух тензоров δ и $\mathscr{E}$, являются компонентами тензора, и согласно формулам преобразования смешанных компонент тензора мы получим

$$C^* = \| c^p{}_q b^i_p a^q_j \| = \mathbf{BCB}^{-1},$$

откуда видно, что $\operatorname{Det} C^* = \operatorname{Det} C$, и, следовательно, уравнение (5.31) или

$$|\lambda\delta^i_j - \varepsilon^i_j| = 0 \tag{5.32}$$

инвариантно относительно выбора системы координат и корни его всегда определяют главные компоненты тензоров деформаций. Если в (5.32) вместо $\varepsilon^i{}_j$ стоят $\hat{\varepsilon}^i{}_j$, то получим корни $\hat{\varepsilon}_i$; если вместо $\varepsilon^i{}_j$ взять $\mathring{\varepsilon}^i{}_j$, то получим корни $\mathring{\varepsilon}_i$. Уравнение (5.32) называется характеристическим или вековым уравнением; как известно, для симметричного тензора оно всегда имеет три действительных корня. Коэффициенты векового уравнения (5.31) являются инвариантами относительно преобразования координат, так как они полностью определяются корнями, т. е. главными значениями тензора деформаций. Раскрывая (5.31) и 5.32), получим формулы для I_1, I_2, I_3:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon^\alpha{}_\alpha, \\ I_2 &= \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 = \frac{1}{2}[(\varepsilon^\alpha{}_\alpha)^2 - \varepsilon^\alpha{}_\beta\varepsilon^\beta{}_\alpha], \\ I_3 &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = \operatorname{Det}\| \varepsilon^i{}_j \|. \end{aligned}\right\} \tag{5.33}$$

Итак, для определения главных компонент тензоров деформаций следует составить в данной системе координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 вековое уравнение (5.32) с коэффициентами (5.33) и найти его корни.

Инварианты I_1, I_2, I_3 для тензора $\mathring{\mathscr{E}}$ будем обозначать через $\mathring{I}_1$, $\mathring{I}_2$, $\mathring{I}_3$, а для тензора $\hat{\mathscr{E}}$ через $\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$, $\hat{I}_3$; инварианты $\mathring{I}_1$, $\mathring{I}_2$, $\mathring{I}_3$, очевидно, выражаются через $\mathring{\varepsilon}_1$, $\mathring{\varepsilon}_2$, $\mathring{\varepsilon}_3$, а $\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$, $\hat{I}_3$ — через $\hat{\varepsilon}_1$, $\hat{\varepsilon}_2$, $\hat{\varepsilon}_3$, и, поскольку $\mathring{\varepsilon}_i \neq \hat{\varepsilon}_i$, $\mathring{I}_i \neq \hat{I}_i$. Главные компоненты $\mathring{\varepsilon}_i$ и $\hat{\varepsilon}_i$ связаны друг с другом, поэтому и инварианты $\mathring{I}_i$ связаны с инвариантами $\hat{I}_i$. В случае бесконечно малой деформации $\mathring{\varepsilon}_i = \hat{\varepsilon}_i$ и инварианты $\mathring{I}_i$ и $\hat{I}_i$ совпадают. В случае конечной деформации по (5.28) и (5.33) легко найти следующую связь между

инвариантами $\mathring{I}_i$ и $\hat{I}_i$:

$$\left.\begin{aligned}
\hat{I}_1 &= \hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3 = \frac{\mathring{I}_1 + 4\mathring{I}_2 + 12\mathring{I}_3}{1 + 2\mathring{I}_1 + 4\mathring{I}_2 + 8\mathring{I}_3}, \\
\hat{I}_2 &= \hat{\varepsilon}_1\hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_2\hat{\varepsilon}_3 + \hat{\varepsilon}_3\hat{\varepsilon}_1 = \frac{\mathring{I}_2 + 6\mathring{I}_3}{1 + 2\mathring{I}_1 + 4\mathring{I}_2 + 8\mathring{I}_3}, \\
\hat{I}_3 &= \hat{\varepsilon}_1\hat{\varepsilon}_2\hat{\varepsilon}_3 = \frac{\mathring{I}_3}{1 + 2\mathring{I}_1 + 4\mathring{I}_2 + 8\mathring{I}_3}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.34}$$

Коэффициент кубического расширения Изучив соответствие линейных элементов ds и ds_0 в актуальном и «начальном» состояниях, найдем соответствие элементарных объемов в этих состояниях. Возьмем в главных осях тензора деформации в начальном состоянии элементарный прямоугольный параллелепипед с ребрами ds_{01}, ds_{02}, ds_{03}, его объем dV_0 определяется формулой $dV_0 = ds_{01}ds_{02}ds_{03}$. При движении ему соответствует прямоугольный параллелепипед с ребрами ds_1, ds_2, ds_3 и с объемом $dV = ds_1ds_2ds_3$. Назовем коэффициентом кубического расширения θ величину относительного изменения объема:

$$\theta = \frac{dV - dV_0}{dV_0}. \tag{5.35}$$

Согласно (5.26) равенству (5.35) можно придать вид

$$\theta = \sqrt{(1 + 2\mathring{\varepsilon}_1)(1 + 2\mathring{\varepsilon}_2)(1 + 2\mathring{\varepsilon}_3)} - 1, \tag{5.36}$$

а по (5.33) — вид

$$\theta = \sqrt{1 + 2\mathring{I}_1 + 4\mathring{I}_2 + 8\mathring{I}_3} - 1. \tag{5.37}$$

Величина θ определена как инвариантная геометрическая характеристика. Формула (5.37) дает выражение для θ, пригодное при использовании любой системы координат.

Аналогичным путем можно ввести θ для элементарных параллелепипедов в любой криволинейной системе координат. Ниже покажем, что определенный формулой (5.35) коэффициент кубического расширения не зависит от формы первоначального объема dV_0. Он равен относительному изменению любых малых объемов вблизи данной точки в случае конечных деформаций.

В случае бесконечно малых деформаций из (5.36) или (5.37) следует формула

$$\theta \simeq I_1 = \hat{\varepsilon}^i{}_i \simeq \overset{\bullet}{\varepsilon}{}^i{}_i.$$

Таким образом, первый инвариант тензора деформаций в случае бесконечно малых деформаций можно рассматривать как коэффициент кубического расширения.

Вычисление компонент тензора деформаций по закону движения

Обратимся теперь к вопросу о том, как определять ковариантные компоненты тензора деформаций ε_{ij} по известному закону движения

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), \qquad \xi^i = \xi^i(x^1, x^2, x^3, t), \tag{5.38}$$

$$x^i_0 = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t_0), \qquad \xi^i = \xi^i(x^1_0, x^2_0, x^3_0, t_0) \tag{5.39}$$

и известной метрике g_{ij} пространства наблюдателя x^1, x^2, x^3. Подчеркнем, что время t рассматривается как параметр при преобразовании координат от сопутствующей системы к системе наблюдателя. Если начальное состояние соответствует положению среды в момент t_0, то преобразование координат от системы наблюдателя к лагранжевой системе для начального состояния определяется формулами (5.39). Ковариантные компоненты тензора деформаций в сопутствующей системе координат определяются равенствами

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}),$$

где $\hat{g}_{ij}$ — метрика актуального пространства в сопутствующей системе. Так как

$$\hat{g}_{ij}\, d\xi^i\, d\xi^j = g_{pq}\, dx^p\, dx^q,$$

то

$$\hat{g}_{ij} = g_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^q}{\partial \xi^j},$$

и, следовательно, в сопутствующей системе координат

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(g_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^q}{\partial \xi^j} - \overset{\circ}{g}_{ij}\right), \tag{5.40}$$

где производные $\partial x^p/\partial \xi^i$ определены из (5.38). Заметим, что о метрике $\overset{\circ}{g}_{ij}$ пространства «начального состояния» в общем случае ничего сказать нельзя, так как она может вводиться в разных случаях с помощью различных физических соображений. Однако влиять на компоненты метрического тензора $\overset{\circ}{g}_{ij}$ все же можно посредством выбора системы ξ^1, ξ^2, ξ^3 в «начальном состоянии».

Если переход от системы наблюдателя к начальному состоянию определен (5.39), то в лагранжевой системе начального состояния имеем

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\hat{g}_{ij} - g_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^q}{\partial \xi^j}\right),$$

где $\partial x^m_0/\partial \xi^n$ определены из (5.39).

На основании формул преобразования компонент тензора $\hat{\mathscr{g}}$ от сопутствующей системы к системе наблюдателя, наряду с формулами (5.40) в сопутствующей системе, в системе координат наблюдателя будем иметь

$$\varepsilon_{ij}^{(x^i)} = \frac{1}{2}\left(g_{ij} - \overset{\circ}{g}_{pq}\frac{\partial \xi^p}{\partial x^i}\frac{\partial \xi^q}{\partial x^j}\right),$$

где производные $\partial\xi^m/\partial x^n$ определены из (5.38).

Вектор перемещения

Рассмотрим случай, когда начальное состояние может реально осуществляться и его метрика $\overset{\circ}{g}_{ij}$, как и метрика $\hat{g}_{ij}$, является евклидовой. В этом случае можно ввести вектор перемещения $\boldsymbol{w}$ (рис. 12):

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{w}, \tag{5.41}$$

где $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{r}$ — радиусы-векторы относительно системы отсчета x^1, x^2, x^3 одной и той же точки M сплошной среды в начальный момент времени t_0 и в данный момент t соответственно.

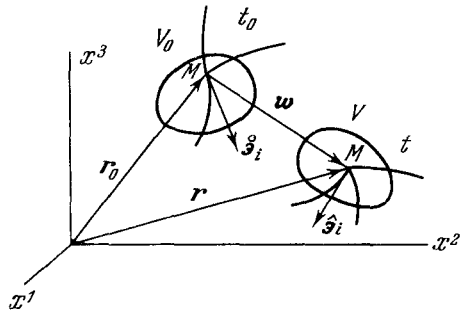


Рис. 12. Вектор перемещения.

С помощью (5.41) можно легко установить связь между векторами базисов $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_i$ и $\overset{\circ}{\boldsymbol{\vartheta}}_i$ и с ее помощью написать формулы для компонент тензора деформаций ε_{ij}. Продифференцировав (5.41) по ξ^i, получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial \xi^i} = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_i - \overset{\circ}{\boldsymbol{\vartheta}}_i,$$

откуда

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_i = \overset{\circ}{\boldsymbol{\vartheta}}_i + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i}, \quad \text{или} \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\vartheta}}_i = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_i - \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i}, \tag{5.42}$$

поэтому

$$\hat{g}_{ij} = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_j = \overset{\circ}{\boldsymbol{\vartheta}}_i \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\vartheta}}_j + \overset{\circ}{\boldsymbol{\vartheta}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^j} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\vartheta}}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^j}$$

и

$$\overset{\circ}{g}_{ij} = \overset{\circ}{\mathfrak{d}}_i \cdot \overset{\circ}{\mathfrak{d}}_j = \hat{\mathfrak{d}}_i \cdot \hat{\mathfrak{d}}_j - \hat{\mathfrak{d}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^j} - \hat{\mathfrak{d}}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^j}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}) = \frac{1}{2}\left[\overset{\circ}{\mathfrak{d}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^j} + \overset{\circ}{\mathfrak{d}}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^j}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} \cdot \hat{\mathfrak{d}}_j + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^j} \cdot \hat{\mathfrak{d}}_i - \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^j}\right]. \qquad (5.43)$$

Формулы (5.43) верны при любом выборе вообще криволинейных лагранжевых координат ξ^1, ξ^2, ξ^3. Заметим, что в выражении (5.43) для компонент ε_{ij} входят только первые производные от вектора перемещения $\boldsymbol{w}$ по координатам ξ^1, ξ^2, ξ^3, которые характеризуют относительные перемещения точек сплошной среды.

О дифференцировании вектора и его компонент по координатам

Мы получили выражения для компонент тензора деформаций ε_{ij} через вектор перемещения $\boldsymbol{w}$. Теперь получим выражения компонент тензора деформаций ε_{ij} через компоненты вектора перемещений $\boldsymbol{w}$. Для этого необходимо установить, как выражается производная от вектора через производные от его компонент.

Очевидно, обычные производные от компонент не определяют изменения самого вектора, так как при переходе от точки к точке пространства меняются, вообще говоря, и векторы базиса. В самом деле, возьмем, например, полярную систему координат на плоскости и рассмотрим поле постоянного как по величине, так и по направлению во всех точках плоскости вектора $\boldsymbol{A}$. Вектор $\boldsymbol{A}$ при переходе от точки к точке плоскости не меняется, и его производная, очевидно, должна равняться нулю. Координатами ξ^1 и ξ^2 будут радиус r и угол φ, векторы базиса будут направлены следующим образом: $\mathfrak{d}_1$ — по лучам, выходящим из начала координат, а $\mathfrak{d}_2$ — по касательным к окружностям $r = \text{const}$. В разных точках плоскости $\mathfrak{d}_1$ и $\mathfrak{d}_2$ будут направлены по разному, и проекции постоянного вектора $\boldsymbol{A}$ на направления $\mathfrak{d}_1$ и $\mathfrak{d}_2$ в разных точках плоскости будут разными (см., например, точки B и C на рис. 13), т. е. производные от компонент постоянного вектора не будут равны нулю.

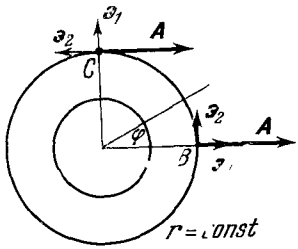


Рис. 13. Полярная система координат на плоскости.

В декартовой системе координат

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}(w^k \boldsymbol{\vartheta}_k) = \frac{\partial w^k}{\partial x^i}\boldsymbol{\vartheta}_k,$$

так как базисные векторы $\boldsymbol{\vartheta}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{\vartheta}_2 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{\vartheta}_3 = \boldsymbol{k}$ не изменяются от точки к точке.

Ковариантное дифференцирование компонент тензоров и векторов и его свойства

В произвольной криволинейной системе координат η^1, η^2, η^3 векторы базиса $\boldsymbol{\vartheta}_i$ переменны, и поэтому нужно написать

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial \eta^i}\boldsymbol{\vartheta}_k + w^k \frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}_k}{\partial \eta^i}. \tag{5.44}$$

Очевидно, по определению можно принять, что производная $\partial \boldsymbol{\vartheta}_k / \partial \eta^i$ также представляет собой вектор, характеризующий свойства криволинейной системы координат. Разложим этот вектор по базису $\boldsymbol{\vartheta}_j$ и обозначим компоненты этого разложения символами Γ^j_{ki}

$$\frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}_k}{\partial \eta^i} = \Gamma^j_{ki}\boldsymbol{\vartheta}_j. \tag{5.45}$$

Величины Γ^j_{ki} являются функциями координат η^1, η^2, η^3 и называются символами Кристоффеля или коэффициентами связности. Ниже мы изучим величины Γ^j_{ki} подробно. На основании (5.45) равенство (5.44) принимает вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial \eta^i}\boldsymbol{\vartheta}_k + w^k \Gamma^j_{ki}\boldsymbol{\vartheta}_j.$$

Второй член представляет собой сумму по k и j. Поменяем в ней обозначения индексов суммирования k на j и j на k. Тогда можно написать

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial \eta^i}\boldsymbol{\vartheta}_k + w^j \Gamma^k_{ji}\boldsymbol{\vartheta}_k = \left(\frac{\partial w^k}{\partial \eta^i} + w^j \Gamma^k_{ji}\right)\boldsymbol{\vartheta}_k. \tag{5.46}$$

Коэффициенты при $\boldsymbol{\vartheta}_k$, т. е. $\dfrac{\partial w^k}{\partial \eta^i} + w^j \Gamma^k_{ji}$, с двумя индексами имеют специальное обозначение $\nabla_i w^k$; они называются ковариантными производными контравариантных компонент вектора $\boldsymbol{w}$:

$$\nabla_i w^k = \frac{\partial w^k}{\partial \eta^i} + w^j \Gamma^k_{ji}. \tag{5.47}$$

Установим свойства $\nabla_i w^k$.

В декартовой системе координат ($\eta^i = x^i$), так как $\partial \mathfrak{e}_k/\partial x^i = 0$, т. е. $\Gamma^k_{ji} = 0$, имеем

$$\nabla_i w^k = \frac{\partial w^k}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial x^i},$$

ковариантная производная совпадает с обычной производной компонент вектора по координате.

Ковариантные производные образуют компоненты тензора. В самом деле, пусть ζ^1, ζ^2, ζ^3 — новая, а η^1, η^2, η^3 — старая системы координат. Тогда

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \zeta^k} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i}\frac{\partial \eta^i}{\partial \zeta^k},$$

и видно, что, так как $\boldsymbol{w}$ инвариантный объект, то $\partial \boldsymbol{w}/\partial \eta^i$ преобразуются, как ковариантные компоненты вектора. Поэтому

$$T = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i}\boldsymbol{\mathfrak{e}}^i$$

представляет собой инвариантный объект; но по (5.46) и (5.47) мы имеем

$$T = \nabla_i w^k \boldsymbol{\mathfrak{e}}_k \boldsymbol{\mathfrak{e}}^i,$$

т. е. T является тензором второго ранга, смешанными компонентами которого являются ковариантные производные $\nabla_i w^k$.

Заметим, что производные $\partial w^k/\partial \eta^i$ не являются компонентами тензора. Действительно, если под знак производной $\partial/\partial \eta^i$ вместо w^k подставить их выражение в новой системе координат

$$w^k = w'^j \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^j},$$

то по η^i нужно будет дифференцировать и $\partial \eta^k/\partial \zeta^j$, и мы не получим тензорного закона преобразования для $\partial w^k/\partial \eta^i$.

Из определения ковариантной производной очевидно, что ковариантные производные от скаляра φ совпадают с обычными производными

$$\nabla_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta^i}$$

и определяют вектор, который является вектором-градиентом скалярного поля φ. Этот вектор как характеристику поля φ мы рассмотрели подробно выше.

Определим теперь ковариантную производную контравариантных компонент тензора. Возьмем для конкретности тензор

второго ранга $H = H^{jk}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$ и проведем вычисление следующим образом:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta^i} = \frac{\partial H^{jk}}{\partial \eta^i}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k + H^{jk}\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \eta^i}\mathbf{e}_k + H^{jk}\mathbf{e}_j\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \eta^i} =$$

$$= \frac{\partial H^{jk}}{\partial \eta^i}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k + H^{jk}\Gamma^l_{ji}\mathbf{e}_l\mathbf{e}_k + H^{jk}\mathbf{e}_j\Gamma^l_{ki}\mathbf{e}_l.$$

Во второй сумме поменяем обозначения индексов суммирования l и j, а в третьей l и k, тогда получим

$$\frac{\partial H}{\partial \eta^i} = \left(\frac{\partial H^{jk}}{\partial \eta^i} + H^{lk}\Gamma^j_{li} + H^{jl}\Gamma^k_{li}\right)\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k = \nabla_i H^{jk}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k,$$

где по определению

$$\nabla_i H^{jk} = \frac{\partial H^{jk}}{\partial \eta^i} + H^{lk}\Gamma^j_{li} + H^{jl}\Gamma^k_{li}$$

называется ковариантной производной контравариантных компонент тензора второго ранга H. Легко видеть, что в связи с тензором второго ранга H можно ввести тензоры третьего ранга по формулам

$$T_1 = \frac{\partial H}{\partial \eta^i}\mathbf{e}^i = \nabla_i H^{jk}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}^i,$$

или

$$T_2 = \nabla_i H^{jk}\mathbf{e}^i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k,$$

или

$$T_3 = \nabla_i H^{jk}\mathbf{e}_j\mathbf{e}^i\mathbf{e}_k.$$

Очевидно, что тензоры T_1, T_2, T_3 вообще различны.

Аналогично можно построить ковариантную производную от контравариантных компонент тензоров любого ранга.

Из определения ковариантной производной (ее линейности по компонентам вектора) ясно, что ковариантная производная от суммы контравариантных компонент равна сумме ковариантных производных:

$$\nabla_i(v^k + w^k) = \nabla_i v^k + \nabla_i w^k.$$

Покажем, что правило дифференцирования произведений в ковариантном смысле совпадает с правилом дифференцирования произведений в обычном смысле. Пусть требуется вычислить $\nabla_i(v^j w^k)$. Для этого необходимо воспользоваться правилом ковариантного дифференцирования контравариантных компонент тензора, так как произведения $v^j w^k$, как известно из

предыдущего (§ 4 гл. II), являются компонентами тензора второго ранга. Итак,

$$\nabla_i(v^j w^k) = \frac{\partial (v^j w^k)}{\partial \eta^i} + v^l w^k \Gamma^j_{li} + v^j w^l \Gamma^k_{li} =$$
$$= \left(\frac{\partial v^j}{\partial \eta^i} + v^l \Gamma^j_{li}\right) w^k + v^j \left(\frac{\partial w^k}{\partial \eta^i} + w^l \Gamma^k_{li}\right) =$$
$$= (\nabla_i v^j) \cdot w^k + v^j \nabla_i w^k,$$

что и доказывает требуемое утверждение. Совершенно аналогично будет дифференцироваться в ковариантном смысле произведение произвольного числа членов.

Рассмотрим вопрос о ковариантном дифференцировании в в том случае, когда вектор задан не контравариантными, а ковариантными компонентами. Пусть

$$\boldsymbol{w} = w_j \boldsymbol{\vartheta}^j$$

и требуется вычислить $\dfrac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i}$. Тогда

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w_j}{\partial \eta^i} \boldsymbol{\vartheta}^j + w_j \frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}^j}{\partial \eta^i}. \tag{5.48}$$

Очевидно, $\partial \boldsymbol{\vartheta}^j / \partial \eta^i$, так же как и $\partial \boldsymbol{\vartheta}_j / \partial \eta^i$, будет вектором; разложим его по $\boldsymbol{\vartheta}^k$. В случае евклидова пространства и в более общем случае римановых пространств верна формула

$$\frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}^j}{\partial \eta^i} = -\Gamma^j_{ki} \boldsymbol{\vartheta}^k, \tag{5.49}$$

где Γ^j_{ki} — введенные ранее символы Кристоффеля. Для установления справедливости (5.49) возьмем скалярное произведение

$$\boldsymbol{\vartheta}^j \cdot \boldsymbol{\vartheta}_k = \delta^j_k$$

и продифференцируем это равенство, верное во всех точках пространства, по координате η^i:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}^j}{\partial \eta^i} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_k + \boldsymbol{\vartheta}^j \cdot (\Gamma^l_{ki} \boldsymbol{\vartheta}_l) = 0.$$

В последней сумме отличен от нуля только тот член, в котором $l = j$; поэтому

$$\frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}^j}{\partial \eta^i} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_k = -\Gamma^j_{ki}.$$

Очевидно, что эта формула равносильна (5.49). Формула (5.48) с учетом (5.49) примет вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w_j}{\partial \eta^i}\boldsymbol{\vartheta}^j - w_j\Gamma^j_{ki}\boldsymbol{\vartheta}^k.$$

После замены в последней сумме индексов суммирования j на k, а k на j получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i} = \left(\frac{\partial w_j}{\partial \eta^i} - w_k\Gamma^k_{ji}\right)\boldsymbol{\vartheta}^j = \nabla_i w_j \boldsymbol{\vartheta}^j.$$

Выражение $\dfrac{\partial w_j}{\partial \eta^i} - w_k\Gamma_{ji}{}^k$ определяет ковариантную производную от ковариантных компонент вектора:

$$\nabla_i w_j = \frac{\partial w_j}{\partial \eta^i} - w_k\Gamma^k_{ji}.$$

Аналогично можно ввести ковариантную производную от ковариантных компонент любого тензора.

Заметим, что $\nabla_i w_j$ являются ковариантными, а $\nabla_i w^j$ — смешанными компонентами одного и того же тензора второго ранга

$$T = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i}\boldsymbol{\vartheta}^i = \nabla_i w_j \boldsymbol{\vartheta}^j\boldsymbol{\vartheta}^i = \nabla_i w^j \boldsymbol{\vartheta}_j\boldsymbol{\vartheta}^i.$$

Отсюда следует, что компоненты метрического тензора g_{ij} и g^{ij}, несмотря на то что они зависят от η^1, η^2, η^3, должны вести себя по отношению к ковариантному дифференцированию как постоянные величины. Иначе говоря, не меняя результата, их можно вносить и выносить за знак ∇_i. Действительно, между $\nabla_i w^j$ и $\nabla_i w_k$, как между различными компонентами одного и того же тензора, существует связь:

$$\nabla_i w^j = g^{jk}\nabla_i w_k, \tag{5.50}$$

но

$$w^j = g^{jk}w_k, \tag{5.51}$$

и, следовательно,

$$\nabla_i(g^{jk}w_k) = g^{jk}\nabla_i w_k,$$

т. е. $\nabla_i g^{jk} = 0$. Аналогично получится, что

$$\nabla_i g_{jk} = 0,$$

если вместо (5.50) взять $\nabla_i w_k = g_{kj}\nabla_i w^j$, а вместо (5.51) $w_k = g_{kj}w^j$.

Свойства символов Кристоффеля

Остановимся теперь на вопросе о вычислении символов Кристоффеля в метрическом евклидовом пространстве и выясним свойства символов Кристоффеля. Заметим, что существуют более сложные пространства, чем евклидовы или римановы пространства, в которых символы Кристоффеля не вычисляются, а задаются, и способ их задания входит в определение пространства.

Символы Кристоффеля не являются компонентами какого-либо тензора. Это видно, например, из того, что в одном и том же пространстве они в декартовой системе координат равны нулю, а в криволинейной отличны от нуля. Очевидно, что компоненты тензора таким свойством обладать не могут.

В евклидовом пространстве символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам:

$$\Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_{jk}.$$

Покажем это. В евклидовом пространстве всегда существует радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ (η^1, η^2, η^3) и $\boldsymbol{\vartheta}_j = \partial \boldsymbol{r}/\partial \eta^j$, а

$$\frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}_j}{\partial \eta^k} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial \eta^k \partial \eta^j} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial \eta^j \partial \eta^k} = \frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}_k}{\partial \eta^j}, \tag{5.52}$$

откуда

$$\Gamma^i_{jk}\boldsymbol{\vartheta}_i = \Gamma^i_{kj}\boldsymbol{\vartheta}_i.$$

Дадим формулы для вычисления символов Кристоффеля по компонентам метрического тензора g.

Возьмем соотношение

$$\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} = \frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}_j}{\partial \eta^k} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_s + \frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}_s}{\partial \eta^k} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_j$$

и из него получим

$$\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} - \frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}_s}{\partial \eta^k} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_j = \Gamma^l_{jk}\boldsymbol{\vartheta}_l \cdot \boldsymbol{\vartheta}_s = \Gamma^l_{jk} g_{ls}$$

и аналогично

$$\frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} - \frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}_s}{\partial \eta^j} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_k = \Gamma^l_{kj}\boldsymbol{\vartheta}_l \cdot \boldsymbol{\vartheta}_s = \Gamma^l_{kj} g_{ls}.$$

Сложив эти два равенства и воспользовавшись симметрией символов Кристоффеля по нижним индексам, равенством (5.52) и тем, что

$$\frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}_k}{\partial \eta^s} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_j + \frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}_j}{\partial \eta^s} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_k = \frac{\partial g_{jk}}{\partial \eta^s},$$

получим

$$\frac{\partial g_{is}}{\partial \eta^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial \eta^s} = 2\Gamma^l_{jk} g_{ls}.$$

Свернув последнее соотношение с $\frac{1}{2} g^{si}$, получим требуемые формулы:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is}\left(\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \eta^s}\right). \tag{5.53}$$

Выражение тензора деформаций через компоненты вектора перемещения

Вернемся теперь к формуле (5.43) и получим формулы, выражающие компоненты тензора деформаций через компоненты вектора перемещения. Вектор перемещения $\boldsymbol{w}$ можно разложить как по актуальному $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_i$, так и по начальному $\mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_i$ базису и соответственно этому ввести два сорта компонент одного и того же вектора $\boldsymbol{w}$, т. е. $\hat{w}^k$ и $\mathring{w}^k$:

$$\boldsymbol{w} = \mathring{w}^k \mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_k = \hat{w}^k \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_k.$$

Можно ввести и два сорта ковариантных производных:

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} = \mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k \mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_k \tag{5.54}$$

и

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} = \hat{\nabla}_i \hat{w}^k \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_k. \tag{5.55}$$

Первая из ковариантных производных вычисляется в начальном пространстве, и в ней символы Кристоффеля вычисляются по $\mathring{g}_{ij}$, а вторая — в актуальном пространстве, и в ней символы Кристоффеля вычисляются по $\hat{g}_{ij}$. Подставим (5.54) в первое равенство (5.43), получим

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[(\mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k)\mathring{g}_{kj} + (\mathring{\nabla}_j \mathring{w}^k)\,\mathring{g}_{ki} + (\mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k \cdot \mathring{\nabla}_j \mathring{w}^l)\,\mathring{g}_{kl}\right].$$

Воспользовавшись тем, что компоненты метрического тензора можно, не меняя результата, вводить под знак ковариантной производной, будем иметь

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\mathring{\nabla}_i \mathring{w}_j + \mathring{\nabla}_j \mathring{w}_i + \mathring{\nabla}_i \mathring{w}_k \mathring{\nabla}_j \mathring{w}^k\right]. \tag{5.56}$$

Аналогично с помощью (5.55) и второго равенства (5.43) можно получить

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\hat{\nabla}_i \hat{w}_j + \hat{\nabla}_j \hat{w}_i - \hat{\nabla}_i \hat{w}_k \hat{\nabla}_j \hat{w}^k\right]. \tag{5.57}$$

В случае бесконечно малых относительных перемещений после отбрасывания квадратичных по $\boldsymbol{w}$ членов получим

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\,[\mathring{\nabla}_i \mathring{w}_j + \mathring{\nabla}_j \mathring{w}_i) = \frac{1}{2}\,[\hat{\nabla}_i \hat{w}_j + \hat{\nabla}_j \hat{w}_i). \qquad (5.58)$$

Очевидно, что ε_{ij} совпадают с компонентами симметризованного тензора $\nabla_i w_j \boldsymbol{\vartheta}^i \boldsymbol{\vartheta}^j$.

В декартовой системе координат

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_j}{\partial x^i} + \frac{\partial w_i}{\partial x^j}\right). \qquad (5.59)$$

Подчеркнем, что формулы (5.43) и (5.56) для компонент тензора деформаций справедливы только тогда, когда можно ввести вектор перемещения $\boldsymbol{w}$ для всех точек движущейся среды, тогда как тензор деформаций и его компоненты определяются по метрикам ds^2 и ds_0^2 по формулам (5.4) или (5.40) независимо от предположения о существовании вектора перемещения.

О существовании уравнений совместности

Тензор деформаций имеет девять компонент, из которых в силу симметрии ε_{ij} различных только шесть. При наличии перемещений $\boldsymbol{w}$ эти шесть компонент ε_{ij} по (5.56) выражаются в каждой данной точке через девять производных $\partial w_i/\partial \xi^j$ и, следовательно, могут быть в данной точке пространства произвольными числами. Однако ε_{ij} не могут быть произвольными функциями точек пространства ξ^1, ξ^2, ξ^3, так как по тем же формулам (5.56) шесть функций ε_{ij} от ξ^1, ξ^2, ξ^3 выражаются через производные только трех функций w_i от ξ^1, ξ^2, ξ^3. Поэтому ε_{ij} должны удовлетворять определенным уравнениям, которые называются уравнениями совместности деформаций.

Уравнения совместности должны существовать только тогда, когда вектор перемещения $\boldsymbol{w}$ существует, т. е. тогда, когда как актуальное, так и начальное состояния сплошной среды принадлежат евклидову пространству. Поэтому рассмотрим предварительно условия евклидовости пространства.

Формулы преобразования символов Кристоффеля

Символы Кристоффеля Γ_{ij}^k, как известно, не являются компонентами какого-либо тензора, в трехмерном пространстве они образуют экстенсив из двадцати семи величин. Символы Кристоффеля связаны с компонентами метрического тензора формулами

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\,g^{ks}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s}\right), \qquad (5.53а)$$

которые выше были получены для евклидова пространства и по определению справедливы для риманова пространства.

Обозначим символы Кристоффеля в системе координат η^i через Γ'^{k}_{ij}, а в системе координат ξ^i через Γ^{k}_{ij} и установим формулы преобразования символов Кристоффеля при переходе от системы координат ξ^i к системе η^i. Очевидно, что

$$\mathfrak{e}'_i = \mathfrak{e}_\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i};$$

продифференцировав это равенство по η^j и учитывая, что

$$\frac{\partial \mathfrak{e}'_i}{\partial \eta^j} = \Gamma'^{\alpha}_{ij}\mathfrak{e}'_\alpha, \quad \frac{\partial \mathfrak{e}_\alpha}{\partial \xi^\beta} = \Gamma^{\omega}_{\alpha\beta}\mathfrak{e}_\omega = \Gamma^{\omega}_{\alpha\beta}\frac{\partial \eta^\gamma}{\partial \xi^\omega}\mathfrak{e}'_\gamma,$$

так как $\mathfrak{e}_\omega = \dfrac{\partial \eta^\gamma}{\partial \xi^\omega}\mathfrak{e}'_\gamma$, получим

$$\Gamma'^{\alpha}_{ij}\mathfrak{e}'_\alpha = \left[\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta}\frac{\partial \eta^\gamma}{\partial \xi^\omega}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^j} + \frac{\partial^2 \xi^\omega}{\partial \eta^i \partial \eta^j}\frac{\partial \eta^\gamma}{\partial \xi^\omega}\right]\mathfrak{e}'_\gamma.$$

Умножив обе части этого равенства скалярно на $\mathfrak{e}'^{\gamma}$, будем иметь искомую формулу:

$$\Gamma'^{\gamma}_{ij} = \left(\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^j} + \frac{\partial^2 \xi^\omega}{\partial \eta^i \partial \eta^j}\right)\frac{\partial \eta^\gamma}{\partial \xi^\omega}.$$

Уравнения, определяющие систему координат, в которой $\Gamma^{k}_{ij} = 0$

Можно ли найти такую систему координат η^i, чтобы все Γ'^{γ}_{ij} обратились в нуль?

В евклидовом пространстве можно ввести единую для всего пространства декартову систему координат, в которой $g_{ik} = \text{const}$ и, следовательно, все $\Gamma'^{\gamma}_{ij} = 0$ во всех точках пространства. В римановых пространствах дело обстоит не так. Напишем уравнения, определяющие систему координат, в которой $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$. $\text{Det}\left\|\dfrac{\partial \eta^\gamma}{\partial \xi^\omega}\right\| \neq 0$, поэтому все Γ'^{γ}_{ij} могут обратиться в нуль только при условии выполнения равенств

$$\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^j} + \frac{\partial^2 \xi^\omega}{\partial \eta^i \partial \eta^j} = 0 \qquad (5.60)$$

($\omega, i, j = 1, 2, 3$).

И в евклидовом, и в римановом пространстве этим равенствам всегда можно удовлетворить в некоторой заданной точке, т. е. всегда можно ввести новые координаты η^i так, чтобы в заданной точке η^i_0, соответствующей точке ξ^i_0, все $\Gamma'^{\gamma}_{ij} = 0$. Для этого,

очевидно, достаточно положить

$$\xi^\omega - \xi_0^\omega = \delta_s^\omega (\eta^s - \eta_0^s) - \frac{1}{2}\Gamma_{c\alpha\beta}^{\omega}(\eta^\alpha - \eta_0^\alpha)(\eta^\beta - \eta_0^\beta) + \ldots$$

Условие евклидовости пространства

Если же потребовать, чтобы равенства (5.60) выполнялись во всем пространстве, т. е. потребовать, чтобы пространство было евклидовым, то эти равенства будут представлять собой систему дифференциальных уравнений для определения преобразования данной системы ξ^i в декартову систему η^i во всем пространстве. В общем случае эта система неинтегрируема. Условие евклидовости пространства совпадает с условиями интегрируемости системы дифференциальных уравнений (5.60). Выпишем эти условия. Для этого продифференцируем (5.60) по η^k и исключим из полученного равенства вторые производные с помощью (5.60), будем иметь

$$\left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\omega}}{\partial \xi^s} - \Gamma_{\lambda\beta}^{\omega}\Gamma_{\alpha s}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\omega}\Gamma_{\beta s}^{\lambda}\right)\frac{\partial \xi^s}{\partial \eta^k}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^j} + \frac{\partial^3 \xi^\omega}{\partial \eta^i \partial \eta^j \partial \eta^k} = 0.$$

Переставив индексы суммирования s и β и индексы k и j и воспользовавшись симметрией символов Кристоффеля по нижним индексам, получим другие аналогичные равенства:

$$\left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha s}^{\omega}}{\partial \xi^\beta} - \Gamma_{\lambda s}^{\omega}\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\omega}\Gamma_{\beta s}^{\lambda}\right)\frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^j}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i}\frac{\partial \xi^s}{\partial \eta^k} + \frac{\partial^3 \xi^\omega}{\partial \eta^i \partial \eta^k \partial \eta^j} = 0.$$

Вычитанием соответствующих равенств исключим третьи производные. Воспользовавшись еще тем, что детерминант преобразования от ξ_s^i к η^i должен быть отличным от нуля, получим необходимые и достаточные условия интегрируемости системы (5.60) в следующем виде:

$$R_{\beta s\alpha}^{\cdots\omega} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\omega}}{\partial \xi^s} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha s}^{\omega}}{\partial \xi^\beta} + \Gamma_{\lambda s}^{\omega}\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\beta}^{\omega}\Gamma_{\alpha s}^{\lambda} = 0. \qquad (5.61)$$

Если пространство евклидово, то эти равенства должны выполняться в любой системе координат. Если пространство не евклидово, то равенства (5.61) не удовлетворяются.

Тензор Римана — Кристоффеля

В общем случае риманова пространства введенные таким путем величины $R_{\beta s\mu}^{\cdots\alpha}$ можно рассматривать как компоненты тензора четвертого ранга. Для доказательства этого утверждения возьмем некоторый дифференцируемый вектор $\boldsymbol{a}$ и рассмотрим два следующих тензора:

$$T = \nabla_j \nabla_i a^\alpha \partial_\alpha \partial^i \partial^j \quad \text{и} \quad T^* = \nabla_i \nabla_j a^\alpha \partial_\alpha \partial^i \partial^j.$$

Очевидно, что вообще $T \neq T^*$. Если непосредственно вычислить разность $T - T^*$, то получится, что

$$T - T^* = R_{ij\mu\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} a^\mu \vartheta_\alpha \vartheta^i \vartheta^j.$$

Так как $T - T^*$ — тензор, а a — произвольный вектор, то величины $R_{ij\mu\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}$ должны преобразовываться как компоненты тензора четвертого ранга. Этот тензор носит название тензора Римана — Кристоффеля.

Для евклидова пространства тензор Римана — Кристоффеля тождественно равен нулю, и *результат повторного ковариантного дифференцирования в евклидовом пространстве не зависит от порядка его выполнения.*

Выражение компонент тензора Римана—Кристоффеля через компоненты метрического тензора

Чисто ковариантные компоненты тензора Римана — Кристоффеля имеют вид

$$R_{ij\mu\nu} = g_{\alpha\nu} R_{ij\mu\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\nu\mu i}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial \Gamma_{\nu\mu j}}{\partial \xi^i} + g^{\alpha\omega}[\Gamma_{\omega\mu j}\Gamma_{\alpha\nu i} - \Gamma_{\omega\mu i}\Gamma_{\alpha\nu j}], \quad (5.61')$$

где согласно (5.53а)

$$\Gamma_{\nu\alpha j} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial g_{j\nu}}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial \xi^\nu}\right].$$

В любой заданной точке можно выбрать систему координат так, чтобы $\Gamma_{\nu\alpha j} = 0$, однако производные от $\Gamma_{\nu\alpha j}$, если пространство не евклидово, отличны от нуля, поэтому и в связи с тем, что $\Gamma_{\nu\alpha j} = \Gamma_{\alpha\nu j}$, для компонент тензора Римана — Кристоффеля в такой системе координат x^i всегда можно написать следующую формулу:

$$R_{ij\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{\nu i}}{\partial x^j \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu j}}{\partial x^i \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\mu i}}{\partial x^j \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\nu j}}{\partial x^i \partial x^\mu}\right].$$

Свойства симметрии компонент тензора Римана—Кристоффеля

Из этой формулы непосредственно вытекают следующие свойства симметрии, которые по свойствам тензорных преобразований выполняются в любых системах координат и в любой точке пространства:

$$R_{ij\mu\nu} = -R_{ji\mu\nu}, \qquad R_{ii\rho\nu} = 0,$$
$$R_{ij\mu\nu} = -R_{ij\nu\mu}, \qquad R_{ij\nu\nu} = 0,$$
$$R_{ij\mu\nu} = R_{\mu\nu ij}, \; R_{ij\mu\nu} + R_{\mu ij\nu} + R_{j\mu i\nu} = 0.$$

Отметим, что не все из отмеченных здесь свойств симметрии независимы между собой.

Число независимых компонент тензора Римана-Кристоффеля при $n=3$

В трехмерном пространстве ($n=3$) тензор Римана—Кристоффеля имеет только шесть независимых компонент, которые в общем случае риманова пространства могут отличаться от нуля. Это, например, следующие компоненты:

$$R_{1212},\ R_{1313},\ R_{2323},\\ R_{1213},\ R_{2123},\ R_{3132}. \tag{5.62}$$

Для перечисления этих компонент можно использовать следующие соображения. Согласно указанным выше свойствам симметрии $R_{iiii}=0$. Если среди индексов имеется только два различных, то для фиксированных двух индексов все компоненты выражаются через одну. Таким образом, при $n=3$ с двумя различными индексами имеются только три независимые компоненты, например указанные в первой строке (5.62). Если различны три индекса, то при $n=3$ среди четырех индексов компонент два всегда одинаковы. Эти равные индексы для компонент, отличных от нуля, должны принадлежать разным парам. Их можно считать расположенными на первом и третьем местах. При фиксированных равных индексах только одна компонента $R_{iji\kappa}$ независима. Всего таких независимых компонент получается три. Все они перечислены во второй строке (5.62).

Условие евклидовости пространства заключается в равенстве нулю тензора Римана — Кристоффеля. Условие об обращении в нуль тензора Римана — Кристоффеля, а следовательно и условие евклидовости пространства, равносильно шести уравнениям, которые получаются приравниванием нулю шести компонент, например (5.62).

Уравнения совместности деформаций

Компоненты тензора деформации определяются равенствами

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}=\hat{g}_{\alpha\beta}-\mathring{g}_{\alpha\beta}.$$

При условии существования вектора перемещения $\boldsymbol{w}$ обе квадратичные формы

$$ds^2=\hat{g}_{\alpha\beta}\,d\xi^\alpha\,d\xi^\beta \quad\text{и}\quad ds_0^2=\mathring{g}_{\alpha\beta}\,d\xi^\alpha\,d\xi^\beta$$

определяют квадрат элемента длины в евклидовом пространстве. Поэтому тензоры Римана — Кристоффеля, составленные для фундаментальных тензоров $\hat{g}_{\alpha\beta}$ и $\mathring{g}_{\alpha\beta}$, должны обращаться в нуль. Это приводит к уравнениям

$$\mathring{R}_{ij\mu\nu}=0 \quad\text{и}\quad \hat{R}_{ij\mu\nu}=0. \tag{5.63}$$

Один из координатных базисов $\hat{\partial}_i$ или $\mathring{\partial}_i$ можно выбрать произ-

вольно, второй после этого вполне определяется деформацией. Следовательно, одни из уравнений (5.63) удовлетворяются автоматически в результате выбора координатного базиса в евклидовом пространстве, а вторые можно рассматривать как уравнения для компонент тензора деформаций. Эти уравнения носят название уравнений совместности деформаций. Их можно легко выписать в развернутом виде с помощью формул (5.61′). В частности, если в актуальном деформированном состоянии выбрана прямолинейная декартова (вообще не ортогональная) система координат, то $\partial \hat{g}_{\alpha\beta}/\partial \xi^j = 0$, поэтому уравнения совместности $\hat{R}_{ij\mu\nu} = 0$ можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\mu} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\mu} + \\ &\quad + \overset{\circ}{g}{}^{\alpha\omega} [G_{\omega\mu j} G_{\alpha\nu i} - G_{\omega\mu i} G_{\alpha\nu j}] = 0, \\ &\text{где} \\ &G_{\nu\alpha j} = \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\nu}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \varepsilon_{j\nu}}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial \varepsilon_{\alpha j}}{\partial \xi^\nu}, \end{aligned}\right\} \tag{5.63a}$$

а компоненты $\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\omega}$ определяются как элементы матрицы, обратной матрице с компонентами $\hat{g}_{\alpha\omega} - 2\varepsilon_{\alpha\omega}$:

$$\| \overset{\circ}{g}{}^{\alpha\omega} \| = \| \hat{g}_{\alpha\omega} - 2\varepsilon_{\alpha\omega} \|^{-1}.$$

Аналогично записываются уравнения совместности $\hat{R}_{ij\mu\nu} = 0$, когда лагранжева система в начальном состоянии прямолинейна и $\overset{\circ}{g}{}_{\alpha\beta} = \text{const}$.

Уравнения (5.63a) представляют собой для шести функций $\varepsilon_{\alpha\beta}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка, линейные относительно вторых производных и нелинейные относительно первых производных.

При всевозможных значениях индексов i, j, μ, ν из набора 1, 2, 3 система уравнений (5.63a) состоит всего из шести независимых уравнений. Ясно, что формулы (5.57), выражающие ε_{ij} через w_α, являются общим интегралом системы уравнений совместности (5.63a).

Уравнения совместности в случае бесконечно малых деформаций

В случае бесконечно малых деформаций уравнения совместности (5.63a) имеют вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\mu} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\mu} = 0 \tag{5.63b}$$

и называются уравнениями совместности Сен-Венана. Непосредственной подстановкой формул (5.58) в уравнения (5.63b)

можно проверить, что формулы (5.58) при произвольных трех функциях w_α являются общим интегралом системы уравнений (5.63b).

Уравнения совместности (5.63b) в случае бесконечно малых деформаций представляют собой шесть независимых линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка относительно ε_{ij}.

Итак, в том случае, когда между начальным и рассматриваемым состояниями сплошной среды можно ввести вектор перемещения $\boldsymbol{w}$, должны выполняться уравнения совместности, и выражения для ε_{ij} через компоненты $\boldsymbol{w}$ можно рассматривать как общие решения этих уравнений.

Остановимся теперь более подробно на геометрической картине деформации сплошной среды при перемещении.

Преобразование при перемещении абсолютно твердого тела

Рассмотрим сначала перемещения абсолютно твердого тела. Возьмем два его произвольных положения I и II (рис. 14). Если точку M' совместить с точкой M, т. е. исключить из рассмотрения поступательное перемещение, то это преобразование будет простым поворотом.

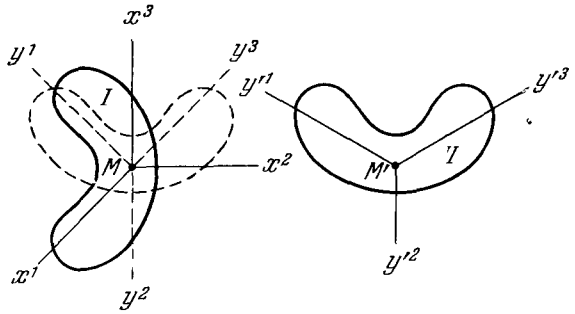


Рис. 14. Преобразование при перемещении абсолютно твердого тела.

В положении I возьмем вмороженные в тело оси координат x^1, x^2, x^3, с началом в точке M, в положении II они перейдут в оси y'^1, y'^2, y'^3 с началом в M' (см. рис. 14). Обозначим через y^1, y^2, y^3 оси, получившиеся при поступательном смещении y'^1, y'^2, y'^3 из точки M' в точку M. Преобразование поворота при переходе от x^i к y^i может быть записано в виде

$$y^i = c^i{}_j x^j,$$

где $\|c^i{}_j\|$ — одна и та же ортогональная матрица для всех точек M твердого тела. Таким образом, произвольное перемещение

твердого тела (за вычетом поступательного перемещения) является просто ортогональным преобразованием.

Пусть теперь тело может деформироваться. Возникающее при этом преобразование имеет самый общий вид, мы предположим только, что оно удовлетворяет свойствам взаимооднозначности, непрерывности и дифференцируемости по координатам.

Преобразование бесконечно малой частицы сплошной среды

Если рассмотреть бесконечно малую окрестность точки M сплошной среды, то это преобразование с точностью до малых первого порядка можно считать аффинным. Покажем это. В момент t_0 векторы базиса лагранжевой системы координат в точке M обозначаются через $\mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_i$, а положение всех точек окрестности M полностью задается $d\boldsymbol{r}_0$, причем

$$d\boldsymbol{r}_0 = d\xi^i \mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_i.$$

Положение всех точек окрестности точки M', в которую в рассматриваемый момент t перейдет точка M, определяется вектором $d\boldsymbol{r}$, компоненты которого в базисе $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_i$ также равны $d\xi^i$:

$$d\boldsymbol{r} = d\xi^i \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_i.$$

Если совместить точки M и M' и взять разложение $d\boldsymbol{r}$ по векторам базиса $\mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_i$, то компоненты этого разложения будут отличаться от $d\xi^i$, обозначим их через $d\eta^i$:

$$d\boldsymbol{r} = d\eta^i \mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_i.$$

Связь между $d\eta^i$ и $d\xi^i$ определяет преобразование частицы сплошной среды. Это преобразование найдем из равенства

$$d\boldsymbol{r} = d\xi^i \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_i = d\eta^i \mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_i. \tag{5.64}$$

На основании связи (5.42) между $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_i$, $\mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_i$ и $\boldsymbol{w}$:

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_i = \mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_i + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} = \mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_i + \mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k \mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_k = (\delta_i^k + \mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k)\, \mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_k = c_i{}^k \mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_k,$$

где

$$c_i{}^k = \delta_i^k + \mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k, \tag{5.65}$$

можно написать

$$d\boldsymbol{r} = d\xi^i \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_i = d\xi^i c_i{}^k \mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_k = d\eta^k \mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_k,$$

откуда получим

$$d\eta^k = c_i{}^k d\xi^i. \tag{5.66}$$

Преобразование от $d\xi^i$ к $d\eta^i$ — однородное линейное преобразование с матрицей $\|c_i{}^k\|$, которая не зависит от дифференциалов $d\xi^i$, т. е. приближенных координат близких точек; $c_i{}^k$

могут зависеть только от координат точки M. Следовательно, коэффициенты c_i^k для малой частицы постоянны, а преобразование (5.66) аффинно.

Свойства аффинных преобразований

Перечислим теперь свойства аффинных преобразований, вытекающие непосредственно из линейности формул (5.66).

При аффинных преобразованиях прямые переходят в прямые, плоскости — в плоскости, причем параллельные прямые и плоскости переходят в параллельные прямые и плоскости. В частности, параллелограмм переходит в параллелограмм. Отсюда следует, что все равные, одинаково направленные отрезки растягиваются (или сжимаются) одинаково.

Отношение длин любого отрезка до и после преобразования (в силу того, что оно является отношением однородных функций первого порядка) не зависит от первоначальной длины отрезка, а зависит только от его направления. Отсюда следует, что коэффициент относительного удлинения любого отрезка также не зависит от его длины, а зависит только от его направления.

Отрезок всегда переходит в отрезок, причем отношение, в котором точка делит отрезок, остается неизменным.

Алгебраическая кривая или поверхность переходит в алгебраическую кривую или поверхность того же порядка. Например, поверхность второго порядка переходит в поверхность второго порядка: сфера переходит в эллипсоид или в сферу, причем сопряженные диаметры сферы переходят в сопряженные диаметры эллипсоида. У сферы все сопряженные диаметры ортогональны, у эллипсоида в общем случае существует единственная тройка ортогональных сопряженных диаметров, следовательно, всегда существует по крайней мере один ортогональный триэдр, который переходит в ортогональный триэдр, т. е. существуют главные направления.

Объемы при аффинных преобразованиях, вообще говоря, меняются, но величина относительного изменения объема $\theta = (V - V_0)/V_0$ не зависит от первоначальных формы и размеров объема.

Именно поэтому, когда мы вычисляли величину относительного изменения объема через компоненты тензора деформаций, используя для этого элементарный параллелепипед, мы получили результат, справедливый для любых малых объемов.

Геометрическая картина преобразования малой частицы сплошной среды

Всякая выделенная в сплошной среде бесконечно малая сфера преобразуется при деформации в эллипсоид. Если при этом преобразовании главные направления не меняют своей ориентации в пространстве, то говорят, что произошла чистая деформация, которая сводится к растя-

жению или сжатию по трем взаимно перпендикулярным главным осям.

Если сфера преобразуется в эллипсоид так, что главные направления меняют свою ориентацию в пространстве, то говорят, что имеет место общий случай аффинного преобразования, который сводится к чистой деформации (растяжениям по трем главным осям) и повороту в пространстве. Заметим, что в случае чистой деформации любые отрезки в частице, не направленные по главным осям, меняют, вообще говоря, свое направление в пространстве.

При движении частицы как абсолютно твердого тела сфера переходит в сферу того же радиуса, причем все взаимно перпендикулярные триэдры можно рассматривать как главные, все они поворачиваются около одной и той же оси и на один и тот же угол. В этом случае говорят, что произошел чистый поворот.

Матрица аффинного преобразования $\|c_i^k\|$ определяется по (5.66) девятью производными от компонент вектора перемещения $\boldsymbol{w}$ по координатам ξ^1, ξ^2, ξ^3; в общем случае в данной точке эта матрица образована из произвольных девяти чисел. Чистая деформация характеризуется тремя главными компонентами тензора деформаций и тремя параметрами, определяющими направления главных осей в пространстве (или шестью компонентами тензора деформаций); поворот главных осей в пространстве характеризуется тремя оставшимися параметрами. В случае чистого поворота матрица ортогональная и зависит только от трех независимых параметров (направления оси поворота и угла поворота).

Итак, произвольное перемещение бесконечно малой частицы сплошной среды сводится к поступательному перемещению в пространстве, повороту и чистой деформации (сжатию или растяжению по трем взаимно перпендикулярным главным осям).

Геометрические характеристики деформаций важны в основном для твердых тел. В жидкостях и газах характеристики деформаций сами по себе играют гораздо меньшую роль. Например, перелитая из сосуда в сосуд жидкость (если она однородна) остается все такой же жидкостью, хотя при переливании в ней могли произойти сколь угодно сложные и сильные деформации. В жидкостях и газах свойства деформаций проявляются существенно только через изменения объемов. Жидкости и газы оказывают сопротивление сжатию; сжатые жидкость и газ отличаются от несжатых.

Тензор деформаций играет основную и определяющую роль в теории деформирования твердых тел. В теории движения жидкости и газа — гидродинамике (и теории деформирования

некоторых твердых тел) играет бо́льшую роль другая характеристика — тензор скоростей деформаций. Может быть так, что сами деформации несущественны, однако существенно, насколько быстро они происходят.

§ 6. Тензор скоростей деформаций

Определение тензора скоростей деформаций

Тензор деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \mathring{g}_{ij}) \tag{6.1}$$

вводится в связи с двумя состояниями сплошной среды: данным, рассматриваемым $\hat{g}_{ij}$ и, вообще говоря, «начальным» $\mathring{g}_{ij}$. Если начальное состояние $\mathring{g}_{ij}$ реализуется в действительности, то существует вектор перемещения $\boldsymbol{w}$ всех точек сплошной среды из начального состояния, достигаемого в момент t_0, в рассматриваемое состояние в момент t, и для тензора деформаций имеют место формулы (5.56), (5.57). Помимо этих двух состояний сплошной среды рассмотрим еще состояние в момент $t + \Delta t$, близкий к рассматриваемому $\hat{g}_{ij}$. Компоненты метрического тензора в этот момент $t + \Delta t$ обозначим через $\hat{g}'_{ij}$. Очевидно, можно ввести компоненты тензора деформаций по отношению к состояниям сплошной среды в моменты t и $t + \Delta t$. Обозначив эти компоненты через $\Delta\varepsilon_{ij}$, будем иметь

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}'_{ij} - \hat{g}_{ij}) = \frac{1}{2}(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i + \nabla_i w^p \nabla_j w_p), \tag{6.2}$$

где $\boldsymbol{w} = w_i \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^i$, а ковариантные производные вычисляются в данном случае в начальном пространстве $\hat{g}_{ij}$. Формула (6.2) имеет место в связи с тем, что перемещение $\boldsymbol{w}$ из состояния в момент t в состояние в момент $t + \Delta t$ существует. Очевидно, что

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}\,\Delta t = v_i \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^i \Delta t,$$

т. е. $w_i = v_i \Delta t$ имеет порядок Δt и является бесконечно малым перемещением, если Δt мало. Поэтому

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varepsilon_{ij}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) = e_{ij}. \tag{6.3}$$

Величины e_{ij} являются компонентами симметричного тензора, который называется тензором скоростей деформаций. Если поле скоростей $\boldsymbol{v}$ известно, то компоненты e_{ij} можно вычислить по (6.3). Очевидно, что формулы $e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$ сохраняют свой вид в любой подвижной криволинейной системе координат при учете того, что вектор $\boldsymbol{v}$ определен с помощью системы наблюдателя и сопутствующей системы, положенных в основу рассмотрения движения континуума.

Связь компонент тензоров деформаций и скоростей деформаций

Из (6.2) непосредственно видно, что для компонент тензора скоростей деформаций верна формула

$$\hat{e}_{ij} = \frac{1}{2}\frac{d\hat{g}_{ij}}{dt}, \tag{6.4}$$

справедливая в сопутствующей системе координат.

Из (6.3) с помощью (5.4), если «начальное состояние» $\overset{\circ}{g}_{ij}$ не зависит от времени t, легко следуют формулы, связывающие компоненты тензоров деформаций и скоростей деформаций в сопутствующей системе координат:

$$\hat{e}_{ij} = \frac{d\hat{\varepsilon}_{ij}}{dt}. \tag{6.6}$$

Подчеркнем еще раз, что равенство (6.6) верно только тогда, когда $\overset{\circ}{g}_{ij} = \text{const}$ по времени, а равенство (6.4) по определению верно всегда.

Тензоры деформаций и скоростей деформаций являются разными тензорами, но $e_{ij}\Delta t$ являются компонентами тензора бесконечно малых деформаций, соответствующего перемещению за время Δt, т. е.

$$e_{ij}\Delta t = \varepsilon_{ij}. \tag{6.7}$$

Заметим, что тензор деформаций $\mathscr{E}$ вводится в результате сравнения двух состояний сплошной среды, а тензор скоростей деформаций является характеристикой данного состояния в данный момент времени.

Условия совместности для компонент тензора скоростей деформаций

Ясно, что компоненты тензора деформаций (6.7) должны удовлетворять условиям совместности. Подставив (6.7) в (5.63а) и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим следующие условия совместности для компонент тензора скоростей деформаций:

$$\frac{\partial^2 e_{\nu i}}{\partial\xi^j\,\partial\xi^\mu} + \frac{\partial^2 e_{\mu j}}{\partial\xi^i\,\partial\xi^\nu} - \frac{\partial^2 e_{\mu i}}{\partial\xi^j\,\partial\xi^\nu} - \frac{\partial^2 e_{\nu j}}{\partial\xi^i\,\partial\xi^\mu} = 0. \tag{6.8}$$

Так же как и система уравнений (5.63b), система уравнений (6.8) содержит шесть независимых линейных уравнений в частных производных второго порядка. Соответствующие независимые уравнения можно получить для указанных в (5.62) комбинаций индексов. Формулы (6.3) при произвольных трех функциях v_i дают общий интеграл системы уравнений (6.8).

Аналогично тензору скоростей деформаций можно ввести другие тензоры, компоненты которых являются производными от ε_{ij} по t более высоких порядков. Можно рассмотреть также тензоры, компоненты которых являются производными от ε_{ij} по пространственным координатам, например, тензор $\nabla_k \varepsilon_{ij} \partial^k \partial^i \partial^j$.

§ 7. Распределение скоростей в бесконечно малой частице сплошной среды

Бесконечно малое аффинное преобразование малой частицы сплошной среды за время Δt

Возьмем бесконечно малую частицу сплошной среды и изучим вопрос о распределении скоростей в этой частице. Под бесконечно малой частицей будем понимать совокупность точек среды с координатами $\xi^i + d\xi^i = \xi^i + \rho^i$, удаленных от данной точки O с координатами ξ^1, ξ^2, ξ^3, называемой центром частицы, на бесконечно малые расстояния ρ. Поле скоростей v предполагаем непрерывным и имеющим производные по крайней мере первого порядка.

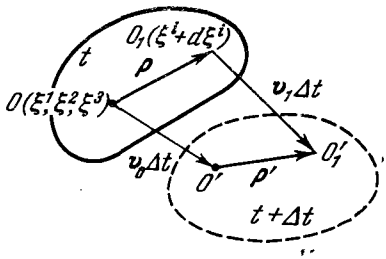


Рис. 15. Перемещение бесконечной малой частицы сплошной среды Δt.

Пусть скорость точки O есть v_0, а любой точки O_1 малой частицы среды — v_1. За бесконечно малое время Δt все время состоящий из одних и тех же частиц среды вектор $\overline{OO_1} = \rho$ превратится в вектор $\overline{O'O'_1} = \rho'$, и, очевидно (рис. 15),

$$\rho' = \rho + (v_1 - v_0)\,\Delta t. \quad (7.1)$$

Возьмем разложение v в окрестности O с точностью до малых первого порядка по ρ:

$$v_1 = v_0 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi^i}\right)_0 \rho^i + \rho O(\rho). \quad (7.2)$$

Подставив (7.2) в (7.1), получим

$$\rho' = \rho + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi^i}\right) \rho^i \Delta t + \rho O(\rho)\,\Delta t. \quad (7.3)$$

Отсюда видно, что с точностью до $\rho O(\rho)\Delta t$ бесконечно малая частица сплошной среды за бесконечно малое время Δt претерпевает бесконечно малое аффинное преобразование (значения производных от v по ξ^i берутся в центре частицы O).

Распределение скоростей в бесконечно малой частице деформируемой сплошной среды.

Перепишем (7.2), выражающее скорость любой точки O_1 бесконечно малой частицы сплошной среды $\boldsymbol{v}_1$ через скорость ее центра $\boldsymbol{v}_0$, производные от $\boldsymbol{v}$ в центре и координаты рассматриваемой точки, в другом виде:

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0 + \nabla_i v_k \rho^i \boldsymbol{\vartheta}^k + \rho \boldsymbol{O}(\rho) =$$
$$= \boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{2}(\nabla_i v_k + \nabla_k v_i)\rho^i \boldsymbol{\vartheta}^k + \frac{1}{2}(\nabla_i v_k - \nabla_k v_i)\rho^i \boldsymbol{\vartheta}^k +$$
$$+ \rho \boldsymbol{O}(\rho) = \boldsymbol{v}_0 + e_{ki}\rho^i \boldsymbol{\vartheta}^k + \omega_{ki}\rho^i \boldsymbol{\vartheta}^k + \rho \boldsymbol{O}(\rho). \qquad (7.4)$$

В последней формуле (7.4) выделены члены, содержащие симметричный тензор e_{ki} и антисимметричный тензор ω_{ki}:

$$\omega_{ki} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_k - \nabla_k v_i) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial \xi^i} - \frac{\partial v_i}{\partial \xi^k}\right), \qquad (7.5)$$

Рассмотрим теперь механическое истолкование каждого члена формулы (7.4) для скоростей точек малой частицы сплошной среды. В связи с этим для наглядности перепишем (7.4) в проекциях на декартовы оси координат, считая, что

$$\rho = x^1 \boldsymbol{i} + x^2 \boldsymbol{j} + x^3 \boldsymbol{k} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k}.$$

Получим

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_0 + e_{1i}x^i + \omega_{1i}x^i, \\ v_1 &= v_0 + e_{2i}x^i + \omega_{2i}x^i, \\ w_1 &= w_0 + e_{3i}x^i + \omega_{3i}x^i. \end{aligned}\right\} \qquad (7.6)$$

Компоненты e_{ji} и ω_{ji} в этих формулах не зависят от x^i, а члены более высокого порядка по x^i, чем первый, опущены. Введем квадратичную форму:

$$\Phi = \frac{1}{2} e_{pq} x^p x^q; \qquad (7.7)$$

очевидно, будем иметь

$$e_{ki}x^i = \frac{\partial \Phi}{\partial x^k}. \qquad (7.8)$$

Формулы (7.6) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} + \omega_{1i}x^i, \\ v_1 &= v_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} + \omega_{2i}x^i, \\ w_1 &= w_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} + \omega_{3i}x^i. \end{aligned}\right\} \qquad (7.9)$$

Таким образом, скорость точек бесконечно малой частицы сплошной среды разбита на три составляющие, первая из которых $\boldsymbol{v}_0$ (u_0, v_0, w_0) не зависит от координат x^1, x^2, x^3 и, следовательно, представляет собой скорость поступательного движения всей частицы (она совпадает со скоростью движения центра частицы), а вторая составляющая $(\partial\Phi/\partial x^1, \partial\Phi/\partial x^2, \partial\Phi/\partial x^3)$ имеет потенциал Ф. Для более детального исследования третьей составляющей $(\omega_{1i}x^i, \omega_{2i}x^i, \omega_{3i}x^i)$ введем в декартовой системе координат антисимметричную матрицу

$$\|\omega_{ji}\| = \begin{Vmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Vmatrix},$$

т. е. введем обозначения

$$\omega_1 = \omega_{32}, \quad \omega_2 = \omega_{13}, \quad \omega_3 = \omega_{21}. \tag{7.10}$$

По (7.5) и (7.10) в декартовой системе координат будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \omega_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \\ \omega_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что формулы (7.11) легко получаются из следующего символического представления:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{i} + \omega_2\boldsymbol{j} + \omega_3\boldsymbol{k} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}. \tag{7.12}$$

После введения обозначений ω_1, ω_2, ω_3 по (7.10) формулы (7.9) перепишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \omega_2 z - \omega_3 y, \\ v_1 &= v_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \omega_3 x - \omega_1 z, \\ w_1 &= w_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \omega_1 y - \omega_2 x \end{aligned}\right\} \tag{7.13}$$

или согласно (7.12) в виде

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + (\omega \times \rho)_x, \\ v_1 &= v_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (\omega \times \rho)_y, \\ w_1 &= w_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} + (\omega \times \rho)_z. \end{aligned}\right\} \tag{7.14}$$

В векторном виде имеем окончательную формулу

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0 + \operatorname{grad} \Phi + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \rho \boldsymbol{O}(\rho), \tag{7.15}$$

заменяющую формулы (7.4) и (7.14).

Сравнение (7.15) с формулой Эйлера для распределения скоростей в абсолютно твердом теле

Для распределения скоростей в абсолютно твердом теле, как известно, имеет место формула Эйлера

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho},$$

где $\boldsymbol{v}_0$ — скорость некоторой определенной точки абсолютно твердого тела, $\boldsymbol{v}_1$ — скорость произвольной точки тела, $\boldsymbol{\Omega}$ — вектор мгновенной угловой скорости твердого тела, $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор $\overrightarrow{OO_1}$. Формула (7.15) для скоростей точек бесконечно малой частицы сплошной среды отличается по виду от формулы Эйлера присутствием членов grad Φ и $\rho \boldsymbol{O}(\rho)$, последний из которых бесконечно мал по сравнению с ρ, и его в первом приближении можно не учитывать.

Скорость относительного удлинения

Выясним роль члена grad Φ. В результате движения сплошной среды вектор $\boldsymbol{\rho}$ переходит в $\boldsymbol{\rho}'$. Изменение вектора $\boldsymbol{\rho}$, т. е. $\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho} = \Delta\boldsymbol{\rho}$, может быть обусловлено только тем, что разные точки бесконечно малой частицы движутся с разными скоростями; действительно, из (7.1) в пределе при $\Delta t \to 0$ имеем

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0. \tag{7.16}$$

Вычислим отличную от нуля для деформируемого тела величину, называемую скоростью относительного удлинения отрезка среды в направлении $\boldsymbol{\rho}$:

$$e_\rho = \frac{1}{|\rho|}\frac{d|\rho|}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho^2}{dt} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}\frac{d(\rho \cdot \rho)}{dt} = \frac{1}{\rho^2}\left(\rho \cdot \frac{d\rho}{dt}\right).$$

Воспользуемся равенствами (7.16), (7.15) и, так как $\rho\cdot(\omega\times\rho)=0$, получим

$$e_\rho=\frac{1}{\rho^2}\left(\rho\cdot\frac{d\rho}{dt}\right)=\frac{1}{\rho^2}(\rho\cdot\operatorname{grad}\Phi)=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}x+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y+\frac{\partial\Phi}{\partial z}z\right)=$$
$$=\frac{2\Phi}{\rho^2}=e_{ij}\frac{x^i}{\rho}\frac{x^j}{\rho}=e_{ij}\alpha^i\alpha^j, \tag{7.17}$$

где $\alpha^i=\dfrac{x^i}{\rho}=\cos(\rho,x^i)$.

Итак, если известны компоненты тензора скоростей деформаций e_{ij} и направление ρ, то можно вычислить скорость относительного удлинения e_ρ в этом направлении.

Кинематическое истолкование компонент тензора скоростей деформаций

Из (7.17) непосредственно вытекает кинематическое истолкование компонент тензора скоростей деформаций с одноименными индексами. Пусть ρ направлено по оси x^i, тогда все члены, кроме одного, в правой части (7.17) обратятся в нуль, и мы получим

$$e_{x^i}=e_{ii}.$$

Таким образом,

$$e_x=e_{11},\qquad e_y=e_{22},\qquad e_z=e_{33},$$

т. е. компоненты тензора скоростей деформаций с одноименными индексами являются скоростями относительных удлинений отрезков среды, первоначально направленных параллельно соответствующим координатным осям. То же самое истолкование получается и в результате другого рассуждения. За время Δt бесконечно малая частица среды, по (7.1), претерпевает бесконечно малую деформацию по отношению к состоянию сплошной среды в момент времени t. Можно ввести тензор деформаций $\mathscr{E}$ по отношению к состояниям среды в моменты t и $t+\Delta t$, и тогда будем иметь

$$\varepsilon_{ij}=e_{ij}\Delta t.$$

Отсюда ясно кинематическое истолкование компонент e_{ij}, с точностью до множителя Δt совпадающих с компонентами ε_{ij} тензора бесконечно малых деформаций. Величины ε_{ij} при $i\neq j$ характеризуют скашивание прямых углов между отрезками среды, первоначально расположенными вдоль координатных осей x, y, z. Компоненты e_{ij} при $i\neq j$ равны половине скорости скашивания первоначально прямых углов, образованных отрезками среды, в данный момент времени параллельными соответствующим координатным осям. Из (7.17) видно, что член grad Φ в формуле (7.15) для

скоростей точек бесконечно малой частицы сплошной среды ответственен за деформацию частицы. Введем обозначение

$$\boldsymbol{v}^* = \operatorname{grad} \Phi \tag{7.18}$$

и назовем эту скорость скоростью чистой деформации. Если $\boldsymbol{v}^* = 0$, то все $e_\rho = 0$ и деформация отсутствует, т. е. длины отрезков ρ, взятых в любом направлении, не меняются. Наоборот, если деформация отсутствует, то все $e_\rho = 0$, и тогда по (7.17)

$$\operatorname{grad} \Phi = \boldsymbol{v}^* = 0.$$

Главные оси и главные компоненты тензора скоростей деформаций

Как для всякого симметричного тензора второго ранга, для тензора скоростей деформаций можно ввести главные оси; в декартовой системе координат, направленной по главным осям, матрица компонент e_{ij} тензора скоростей деформаций будет иметь вид

$$\begin{Vmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{Vmatrix}.$$

Можно указать главные оси тензора скоростей деформаций в любой данный момент времени t и в любой точке O среды. Величины e_1, e_2, e_3 называются главными компонентами тензора скоростей деформаций. Для нахождения главных осей тензора скоростей деформаций следует привести к каноническому виду квадратичную форму Φ (x^1, x^2, x^3) (7.7). Очевидно, $e_i > 0$ соответствует растяжению, а $e_i < 0$ — сжатию вдоль i-й оси.

Как и со всяким симметричным тензором, с тензором скоростей деформаций можно связать тензорную поверхность. Она будет эллипсоидом, если все e_i одного знака, и гиперболоидом, если e_i имеют разные знаки. Главные оси тензора деформаций и скоростей деформаций, вообще говоря, разные.

Вектор ω; связь антисимметричных тензоров с векторами в трехмерном пространстве

Рассмотрим третий член формулы (7.15), т. е. $\omega \times \rho$. Прежде всего покажем, что введенная выше в декартовой системе координат величина ω является вектором. В самом деле, формула (7.15) представляет собой векторное равенство и, следовательно, $\omega \times \rho$ — вектор, а скалярное произведение $(\omega \times \rho) \cdot \boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c}$—произвольный вектор,— инвариантная величина. Очевидно, в записи инвариантной величины $(\omega \times \rho) \cdot \boldsymbol{c}$ можно переставить члены и записать ее в виде $\omega \cdot (\rho \times \boldsymbol{c}) = (\omega, \boldsymbol{b})$, где ρ, $\boldsymbol{c}$ и $\rho \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$ — произвольные векторы. Из того, что скалярное произведение ω на произвольный вектор $\boldsymbol{b}$ — инвариантная величина, следует

что ω — вектор, и по общим правилам преобразования компонент вектора с помощью (7.11) ω_i могут быть найдены в произвольной системе координат.

Из проведенных рассуждений вытекает, что полю скоростей v всегда можно поставить в соответствие тензор $e_{ij}\vartheta^i\vartheta^j$ и вектор ω.

Из способа введения ω получается общий вывод, а именно: в трехмерном пространстве любому антисимметричному тензору второго ранга

$$\Omega = \omega_{ik}\vartheta^i\vartheta^k$$

всегда можно поставить в соответствие вектор[1]) ω так, что в декартовой системе координат компоненты Ω и ω будут связаны формулами (7.10).

О коммутативности бесконечно малых аффинных преобразований

Как было показано выше, бесконечно малая частица среды во время непрерывного движения за бесконечно малое время dt испытывает бесконечно малое аффинное преобразование, которое теперь можно записать в виде

$$\rho' = \rho + \operatorname{grad}\Phi\, dt + (\omega \times \rho)\, dt + \rho O(\rho) dt, \qquad (7.19)$$

где второй и третий члены имеют порядок малости ρdt. Равенство (7.19) можно переписать следующим образом:

$$x'^i = (\delta^i{}_j + c^i{}_j)\, x^j = x^i + c^i{}_j x^j, \qquad (7.20)$$

где x'^i и x^i — компоненты ρ' и ρ соответственно, а $c^i{}_j$ имеют порядок dt.

Напомним, что в случае конечных деформаций бесконечно малая частица среды также испытывает аффинное, но конечное преобразование с матрицей (5.65). Допустим, что мы имеем два последовательных аффинных преобразования:

$$x'^i = (\delta^i{}_j + a^i{}_j)\, x^{*j} \qquad (a)$$

и

$$x^{*j} = (\delta^j{}_p + b^j{}_p)\, x^p. \qquad (b)$$

Составим результирующее преобразование

$$x'^i = (\delta^i{}_p + a^i{}_p + b^i{}_p + a^i_j b^j{}_p)\, x^p, \qquad (7.21)$$

соответствующее сначала преобразованию (b), а потом (a). Если же, наоборот, сначала выполнить преобразование (a), а

---

[1]) Отметим, что ω ведет себя как обычный полярный вектор не при всех преобразованиях координат. См. стр, 183—188.

потом (b), то получим

$$x'^i = (\delta^i{}_p + b^i{}_p + a^i{}_p + b^i{}_j a^j{}_p)x^p.$$

Но так как вообще $a^i{}_j b^j{}_p \neq b^i{}_j a^j{}_p$, то отсюда следует, что аффинные преобразования в общем случае некоммутативны. Однако если аффинные преобразования бесконечно малы, то члены матриц $\| a^i{}_j b^j{}_p \|$, $\| b^i{}_j a^j_p \|$ имеют второй порядок малости; бесконечно малые аффинные преобразования с точностью до этих членов коммутативны.

Разложение преобразования бесконечно малой частицы среды за время Δt на сумму простейших преобразований.

Вернемся теперь к формуле (7.19), описывающей преобразование бесконечной малой частицы среды. Это преобразование можно разбить, не заботясь о последовательности проведения преобразований, на два, а именно на преобразование, определяющееся тензором скоростей деформаций:

$$\rho^* = \rho + \operatorname{grad} \Phi \, dt, \tag{7.22}$$

и преобразование, определяющееся вектором ω:

$$\rho' = \rho^* + (\omega \times \rho^*) \, dt. \tag{7.23}$$

Квадратичную форму $\Phi = \frac{1}{2} e_{ij} x^i x^j$ поворотом осей координат можно привести к каноническому виду:

$$\Phi = \frac{1}{2}(e_1 x^2 + e_2 y^2 + e_3 z^2),$$

и преобразование (7.22) можно написать в главных осях в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= (1 + e_1 dt)\, x, \\ y^* &= (1 + e_2 dt)\, y, \\ z^* &= (1 + e_3 dt)\, z, \end{aligned}\right\} \tag{7.24}$$

где

$$e_1 \simeq \frac{x^* - x}{x\, dt}, \quad e_2 \simeq \frac{y^* - y}{y\, dt}, \quad e_3 \simeq \frac{z^* - z}{z\, dt}$$

являются главными скоростями удлинений ($e_i > 0$) или сжатий ($e_i < 0$). Преобразование (7.22), очевидно, может быть заменено тремя преобразованиями вида

$$\left.\begin{aligned} x^{**} &= (1 + e_1 dt)\, x, \\ y^{**} &= y, \\ z^{**} &= z, \end{aligned}\right\} \tag{7.25}$$

каждое из которых представляет собой чистое растяжение или сжатие по одной из главных осей.

Итак, любое бесконечно малое преобразование бесконечно малой частицы сплошной среды можно разложить на четыре преобразования, одно из которых, (7.23), определяется вектором ω, а три, (7.25), представляют собой чистые удлинения по трем взаимно перпендикулярным главным осям. При этом, в противоположность случаю конечных деформаций бесконечно малой частицы среды, порядок выполнения указанных преобразований несущественен.

Заметим, что все рассуждения были проведены применительно к вектору ρ, выходящему из центра частицы O. Но, на основании свойств аффинных преобразований, изменение длин всех параллельных отрезков одинаково, и поэтому произвольный малый вектор (не выходящий из точки O) испытывает те же самые преобразования. Все векторы, параллельные оси x, удлиняются на $e_1 dt$, параллельные y — на $e_2 dt$, и параллельные z — на $e_3 dt$, произвольный вектор ρ удлиняется на $e_\rho dt$ на каждую единицу длины.

Вектор вихря и его кинематическое истолкование

Дадим кинематическое истолкование вектору ω. Возьмем преобразование (7.23), обусловленное вектором ω, и составим изменение вектора ρ, вызванное этим преобразованием:

$$\rho' - \rho^* = d\rho^*.$$

Если мы составим скалярное произведение $\rho^* \cdot d\rho^*$, то в силу (7.23) оно окажется равным нулю, т. е. изменение вектора ρ^* ортогонально самому вектору ρ^*. Следовательно, все $e_{\rho_*} = 0$. Таким образом, при преобразовании (7.23) бесконечно малая частица среды ведет себя как абсолютно твердое тело, и мы можем истолковать $(\omega \times \rho^*)dt$ как перемещение при вращении с мгновенной угловой скоростью ω бесконечно малой частицы сплошной среды, мгновенно затвердевшей до или после происшедшей деформации. Итак, вектор ω следует толковать как мгновенную угловую скорость вращения тела, связанного с бесконечно малой частицей среды, которое за время dt остается твердым, т. е. триэдра главных осей тензора скоростей деформаций. Таким образом, вектор ω, называемый вектором вихря скорости, является мгновенной угловой скоростью вращения главных осей тензора скоростей деформаций.

В случае конечной деформации бесконечно малой частицы среды движение также сводится к повороту и чистой деформации. Найти вектор поворота, зная компоненты матрицы аффинного преобразования $\|c^i_j\|$, можно, но эта задача сложна. В случае движения бесконечно малой частицы сплошной среды за время dt, когда описывающее его преобразование является бесконечно малым аффинным преобразованием, вектор поворота равен $\omega\, dt$.

Теорема Коши—Гельмгольца о разложении скорости точек бесконечно малой частицы среды

Наконец, соберем вместе результаты всех предыдущих рассуждений. Сформулируем теорему Коши—Гельмгольца о разложении скорости точек бесконечно малой частицы сплошной среды. Скорость $\boldsymbol{v}_1$ любой точки O_1 (7.15) бесконечно малой частицы сплошной среды с центром в O равняется

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \operatorname{grad} \Phi \tag{7.26}$$

и складывается из скорости поступательного $\boldsymbol{v}_0$ и вращательного $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ движений частицы как абсолютно твердой и скорости $\boldsymbol{v}^* = \operatorname{grad} \Phi$ чистой деформации

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_{\text{вращ}} + \boldsymbol{v}^*. \tag{7.27}$$

О дивергенции скорости

Введем понятие дивергенции вектора скорости $\boldsymbol{v}$. Возьмем в момент t бесконечно малую сферу

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

состоящую из точек среды.

Через время Δt она перейдет в эллипсоид, уравнение которого в главных осях будет, очевидно, иметь вид

$$\frac{x^{*2}}{(1 + e_1 \Delta t)^2} + \frac{y^{*2}}{(1 + e_2 \Delta t)^2} + \frac{z^{*2}}{(1 + e_3 \Delta t)^2} = R^2$$

(причем сфера обязательно переходит в эллипсоид или в частном случае в сферу, так как $e_i dt$ малы по сравнению с 1).

Посмотрим, как изменится за время dt объем такой бесконечно малой сферы. Очевидно, в момент t объем $V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3$, а в момент $t + \Delta t$ те же частицы среды будут составлять объем эллипсоида

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 (1 + e_1 \Delta t)(1 + e_2 \Delta t)(1 + e_3 \Delta t).$$

Составим и вычислим предел относительного изменения бесконечно малого объема среды при $\Delta t \to 0$ и $V_0 \to 0$, имеем:

$$\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ V_0 \to 0}} \frac{V - V_0}{V_0 \Delta t} = e_1 + e_2 + e_3. \tag{7.28}$$

Сумма $e_1 + e_2 + e_3$ является, очевидно, инвариантной величиной—первым инвариантом тензора скоростей деформаций. Как известно, через компоненты тензора скоростей деформаций в произвольной системе координат этот инвариант можно

записать следующим образом:

$$e_1 + e_2 + e_3 = e_\alpha^\alpha = g^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}.$$

Из определения e_{ij} (6.3) видно, что

$$e_\alpha^\alpha = \nabla_\alpha v^\alpha.$$

По определению инвариантная величина $\nabla_\alpha v^\alpha$ называется дивергенцией вектора скорости и обозначается $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$:

$$\operatorname{div} v = \nabla_\alpha \boldsymbol{v}^\alpha. \tag{7.29}$$

В декартовой системе координат, очевидно, будем иметь

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Из (7.28) видно, что $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ с механической точки зрения представляет собой скорость относительного изменения бесконечно малого индивидуального объема сплошной среды:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ V_0 \to 0}} \frac{V - V_0}{V_0 dt}.$$

§ 8. Теоремы Стокса и Гаусса — Остроградского некоторые связанные с ними свойства векторных полей

Ротация и дивергенция вектора

Пусть имеется непрерывное поле некоторого вектора $\boldsymbol{A}$, и пусть вектор $\boldsymbol{A}$ имеет производные первого порядка по координатам. Все рассуждения, проведенные относительно поля $\boldsymbol{v}$, можно повторить применительно к полю $\boldsymbol{A}$ и получить

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A} + \operatorname{grad} \Psi + \frac{1}{2} \Omega \times \rho + \rho \boldsymbol{O}(\rho),$$

где

$$\Psi = \frac{1}{2} a_{ij} x^i x^j, \qquad a_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i A_j + \nabla_j A_i)$$

и в декартовой системе координат

$$\Omega = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}. \tag{8.1}$$

Этот символический определитель можно составить и тогда, когда вместо компонент вектора A_1, A_2, A_3 взяты просто какие-

нибудь три дифференцируемые функции P, Q, R от x, y, z (в фиксированной системе координат любые три числа можно рассматривать как компоненты вектора).

Если $\boldsymbol{A}$ — вектор, то вектор $\boldsymbol{\Omega}$, вводимый по определению равенством (8.1), называется ротацией вектора $\boldsymbol{A}$ и обозначается следующим образом:

$$\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}.$$

Аналогично (7.29) можно определить дивергенцию вектора $\boldsymbol{A}$ как

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla_\alpha A^\alpha$$

или в декартовой системе координат как

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}.$$

Таким образом, можно считать, что

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v},$$

т. е. вектор вихря равен половине ротации вектора скорости.

Циркуляция вектора

Возьмем в области определения векторного поля $\boldsymbol{A}$ некоторый разомкнутый $\mathscr{L}$ или замкнутый C контур. Составим скалярное произведение $\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}$, где $d\boldsymbol{s}$—направленный элемент контура $\mathscr{L}$ или C. Это скалярное произведение будет, очевидно, инвариантной величиной. Образуем интеграл

$$\int_{AB} (\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}) = \Gamma.$$

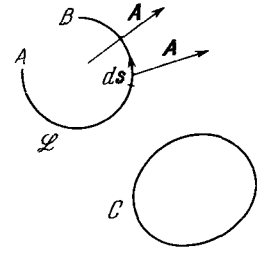


Рис. 16. К определению циркуляции.

Введенный таким путем скаляр Γ называется циркуляцией вектора $\boldsymbol{A}$ по контуру $\mathscr{L}$. Направление обхода по контуру должно быть указано. Циркуляция Γ зависит в общем случае от контура $\mathscr{L}$, по которому она вычисляется. Очевидно,

$$\Gamma_{AB} = -\Gamma_{BA}.$$

Если вектор $\boldsymbol{A}$ есть скорость точек сплошной среды $\boldsymbol{v}$, то

$$\Gamma = \int_{AB} (\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s}) = \int_{AB} u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

называется циркуляцией скорости.

Пусть вектор скорости $\boldsymbol{v}$ имеет потенциал

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi,$$

тогда

$$\Gamma = \int\limits_{AB} (\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s}) = \int\limits_{AB} \frac{\partial \varphi}{\partial s}\, ds = \varphi_B - \varphi_A.$$

Отсюда видно, что в случае потенциальных движений циркуляция скорости зависит от координат точек A и B; значение Γ не зависит от вида контура $\mathcal{L}$, если потенциал φ является однозначной функцией координат. Например, при $\varphi = \frac{Q}{4\pi r}$, где $Q = \text{const}$, Γ не зависит от $\mathcal{L}$, и отсюда следует, что в этом случае циркуляция по замкнутому контуру C равна нулю, $\Gamma_C = 0$. Если же, например,

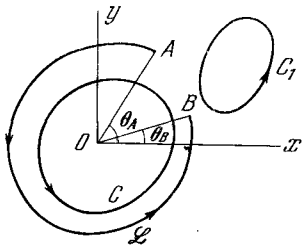


Рис. 17. Циркуляция в случае (8.2): $\Gamma_C = 2\pi k$, $\Gamma_{C1} = 0$, $\Gamma_C = 2\pi kn$ при обходе точки O n раз.

$$\varphi = k\theta = k \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \qquad (8.2)$$

(k — постоянная величина), то

$$\varphi_B - \varphi_A = k(\theta_B - \theta_A),$$

и отсюда следует, что в этом случае существуют такие замкнутые контуры C, охватывающие начало координат, по которым циркуляция отлична от нуля (рис. 17).

Теорема Стокса

Пусть теперь скорость $\boldsymbol{v}$ не потенциальна. Возьмем замкнутый контур C и допустим, что на него можно натянуть гладкую поверхность Σ, на которой поле $\boldsymbol{v}$ непрерывно и дифференцируемо, т. е. допустим, что контур C можно стянуть в точку, оставаясь в области непрерывности и дифференцируемости $\boldsymbol{v}$. Разбив поверхность Σ контурами C так, как показано на рис. 18, будем иметь

$$\Gamma = \int\limits_C (\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s}) = \sum_k \int\limits_{C_k} (\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s}). \qquad (8.3)$$

Это равенство очевидно, так как интегралы, взятые по общим сторонам контуров C_k, при суммировании сократятся из-за противоположных направлений обхода (рис. 18).

Контуры C_k можно взять сколь угодно малыми, и при вычислении $\Gamma_{C_k} = \int\limits_{C_k} (\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s})$ можно считать, что скорость $\boldsymbol{v}$ на C_k

определяется по теореме Коши—Гельмгольца о разложении скорости точек малой частицы сплошной среды с центром в некоторой точке O_k, лежащей на поверхности Σ внутри контура,

$$\boldsymbol{v}_{C_k} = \boldsymbol{v}_{O_k} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \operatorname{grad} \Phi + \rho \boldsymbol{O}(\rho). \tag{8.4}$$

При вычислении Γ_{c_k} слагаемые с $\boldsymbol{v}_{O_k}$ и grad Φ дадут нули, так как это потенциальные векторы и потенциалы их однозначны,

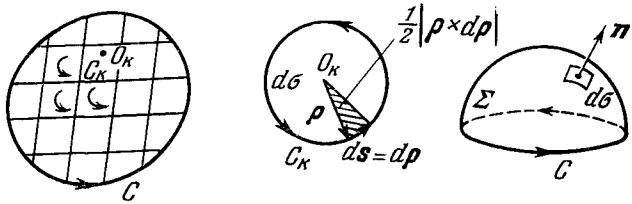


Рис. 18. К выводу теоремы Стокса.

а вклад от члена $\rho \boldsymbol{O}(\rho)$ будет малой высшего порядка по сравнению с членом $\int\limits_{C_k} [(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot d\boldsymbol{s}]$.

Легко убедиться (см. рис. 18), что

$$\int\limits_{C_k} [(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot d\boldsymbol{s}] = \int\limits_{C_k} [(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot d\boldsymbol{\rho}] = \int\limits_{C_k} [\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\rho} \times d\boldsymbol{\rho})] = \boldsymbol{\omega} \cdot \int\limits_{C_k} (\boldsymbol{\rho} \times d\boldsymbol{\rho}) =$$

$$= 2\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} d\sigma = 2\omega_n d\sigma, \tag{8.5}$$

так как вектор $\boldsymbol{\omega}$ в пределах бесконечно малого контура C_k постоянен (он зависит только от O_k), $\int\limits_{C_k} (\boldsymbol{\rho} \times d\boldsymbol{\rho})$ равен по величине $2d\sigma$ и направлен по нормали $\boldsymbol{n}$ к $d\sigma$ в ту сторону, с которой поворот $\boldsymbol{\rho}$ к $d\boldsymbol{\rho}$ виден против часовой стрелки, а область поверхности Σ, натянутая на бесконечно малый контур C_k, может считаться плоской ($\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали).

Теперь по (8.4) и (8.5) в пределе при $k \to \infty$ и C_k, стягиваемых в точку, получим формулу, называемую теоремой Стокса:

$$\int\limits_C v_s ds = 2 \int\limits_\Sigma \omega_n d\sigma, \tag{8.6}$$

т. е. циркуляция скорости по замкнутому контуру C равняется удвоенному потоку вектора вихря сквозь поверхность Σ, натянутую на этот контур. Подчеркнем, что в (8.6) направление нормали $\boldsymbol{n}$ должно быть выбрано так, чтобы с ее конца обход контура C был виден происходящим против часовой стрелки.

Очевидно, теорема Стокса верна не только для вектора скорости $\boldsymbol{v}$ сплошной среды, но и для любого другого вектора $\boldsymbol{A} = A_i\boldsymbol{e}^i$, удовлетворяющего необходимым условиям непрерывности и дифференцируемости. Напишем теперь теорему Стокса для вектора $\boldsymbol{A}$ в разных видах:

$$\int_C A_s ds = \int_C A_i\, dx^i = \int_\Sigma (\operatorname{rot} \boldsymbol{A})_n d\sigma =$$

$$= \int_\Sigma \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\cos(n, x) + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\cos(n, y) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\cos(n, z)\right] d\sigma.$$

Потенциальные и безвихревые движения

Движение сплошной среды называется в некоторой области безвихревым, если $\boldsymbol{\omega} = 0$ во всех точках этой области, и вихревым, когда $\boldsymbol{\omega} \neq 0$. В случае безвихревых движений волокна, расположенные в данный момент времени вдоль главных осей тензора скоростей деформаций, сохраняют в течение бесконечно малого промежутка времени свою ориентацию в пространстве.

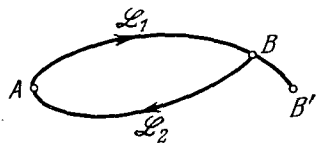


Рис. 19. К эквивалентности безвихревых и потенциальных течений.

Формальной проверкой легко получить, что если $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi$, то $\boldsymbol{\omega} = 0$, и, следовательно, циркуляция по любому замкнутому контуру, удовлетворяющему условиям теоремы Стокса, равна нулю. Таким образом, если движение потенциальное, то оно и безвихревое.

Покажем обратное, т. е., если движение безвихревое, $\boldsymbol{\omega} = 0$, то оно потенциальное, т. е. существует такая функция φ, что $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi$.

Для доказательства возьмем между данными точками A и B два контура $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ (рис. 19), которые можно деформировать друг в друга в области непрерывного безвихревого движения. По теореме Стокса имеем

$$\int_{\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2} u\, dx + v\, dy + w\, dz = 0,$$

поэтому

$$\Gamma_{AB} = \int_{\mathscr{L}_1} u\, dx + v\, dy + w\, dz = \int_{-\mathscr{L}_2} u\, dx + v\, dy + w\, dz.$$

Так как контуры $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ произвольные, то отсюда следует, что

$$\int_{AB} u\,dx + v\,dy + w\,dz = \varphi(x, y, z),$$

т. е. циркуляция между точками A и B не зависит от пути интегрирования, а зависит только от координат конечной точки B, если начальная точка A фиксирована. Приращение Γ на любом бесконечно малом участке BB', очевидно, будет равно

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = d\varphi,$$

и следовательно, в силу произвольности dx, dy, dz будем иметь

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Таким образом, понятия потенциальных и безвихревых движений эквивалентны.

Многозначность потенциала и неодносвязность области течения

Как известно, область называется односвязной, если любой замкнутый контур, взятый в этой области, можно стянуть в точку, не выходя за пределы области; в противном случае область называется многосвязной. Очевидно, что если область непрерывного потенциального движения односвязна, то потенциал φ — однозначная функция координат; если эта область многосвязна, то φ может быть многозначной функцией координат. В многосвязной области циркуляция Γ по контурам, не стягивающимся в точку, может отличаться от нуля и одинакова по контурам, которые можно перевести друг в друга, не выходя за пределы области. В примере (8.2) область непрерывности потенциального движения $\varphi = k\theta$ не односвязна, ось z является особой линией.

Соленоидальные поля и их свойства

Поле вектора $\boldsymbol{B}$ называется соленоидальным, если имеет место инвариантное уравнение

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = \nabla_\alpha B^\alpha = 0.$$

Пользуясь определениями $\operatorname{div} \boldsymbol{B}$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, непосредственной проверкой легко установить, что поле ротации любого вектора $\boldsymbol{A}$ всегда соленоидально, т. е. если

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A},$$

то

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0.$$

В частности,

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v};$$

поэтому при движении любой сплошной среды для поля вихрей верно равенство

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = 0$$

или, в декартовой системе координат,

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} = 0.$$

Таким образом, поле вектора вихря скорости (поле вихрей) всегда соленоидально.

Если среда несжимаемая, т. е. ее объем во время движения не меняется, то по (7.28) имеем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0,$$

т. е. поле скоростей несжимаемой среды соленоидально.

Как известно из физики, поле вектора магнитной напряженности $\boldsymbol{H}$ также всегда является соленоидальным:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0.$$

Любой соленоидальный вектор $\boldsymbol{B}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}. \tag{8.7}$$

В самом деле, частное представление вектора $\boldsymbol{B}$ по формуле (8.7) через вектор $\boldsymbol{A}_1$ можно построить следующим образом. Возьмем декартову систему координат и положим $A_{1z} = 0$. Тогда равенство $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_1$ приводит к следующей системе уравнений для определения A_{1x} и A_{1y}:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{2}\frac{\partial A_{1y}}{\partial z} &= B_x, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial A_{1x}}{\partial z} &= B_y, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial A_{1x}}{\partial y}\right) &= B_z. \end{aligned}\right\} \tag{8.7'}$$

Эта система при условии $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$ будет удовлетворена, если положить

$$A_{1y} = -2\int_{z_0}^{z} B_x dz + 2\int_{x_0}^{x} B_z(x, y, z_0)\, dx,$$

$$A_{1x} = 2\int_{z_0}^{z} B_y dz.$$

Действительно, непосредственно видно, что первые два уравнения (8.7′) при этом удовлетворяются. Третье уравнение (8.7′) также удовлетворяется, так как в силу равенства

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

получается, что

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial A_{1x}}{\partial y}\right) = -\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\right)dz + B_z(x, y, z_0) =$$

$$= \int_{z_0}^{z}\frac{\partial B_z}{\partial z}\,dz + B_z(x, y, z_0) = B_z(x, y, z).$$

Очевидно, что все векторы A, удовлетворяющие условию (8.7), могут быть представлены в виде

$$A = A_1 + \operatorname{grad}\Psi,$$

где Ψ — произвольная скалярная функция. Действительно, для разности $A - A_1$ должно выполняться равенство

$$\operatorname{rot}(A - A_1) = \operatorname{rot} A - \operatorname{rot} A_1 = 0,$$

т. е. эта разность должна представляться в виде градиента некоторой функции Ψ.

На примере поля вектора вихря ω рассмотрим общие свойства соленоидальных полей.

Как для всякого векторного поля, для поля вектора вихря можно ввести (см. § 3 гл. II) понятия векторных линий, поверхностей и трубок, т. е. понятия вихревых линий, поверхностей и трубок. Вихревой линией называется линия, касательная в каждой точке которой совпадает с направлением вектора вихря ω. Дифференциальные уравнения вихревых линий имеют вид

$$\frac{dx}{\omega_1} = \frac{dy}{\omega_2} = \frac{dz}{\omega_3}. \tag{8.8}$$

Вихревая поверхность $f(x, y, z) = \text{const}$ сплошь состоит из вихревых линий, и ее уравнение имеет вид

$$\omega_1\frac{\partial f}{\partial x} + \omega_2\frac{\partial f}{\partial y} + \omega_3\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{8.9}$$

Вихревая трубка образуется, если через все точки замкнутой кривой C (не являющейся вихревой линией) провести вихревые линии. Боковая поверхность вихревой трубки — вихревая поверхность, и на ней $\omega_n = 0$.

Рассмотрим свойства вихревых трубок. На боковой поверхности вихревой трубки возьмем два контура C_1 и C_2 так, как-

показано на рис. 20. Соединим эти контуры разрезом $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$. К образовавшейся при этом поверхности Σ, целиком лежащей на боковой поверхности вихревой трубки, применим теорему Стокса. Получим

$$\int\limits_{\text{по границе } \Sigma} (\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s}) = 0.$$

Направление обхода границы поверхности Σ указано на рис. 20, два берега $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ разреза при интегрировании проходятся в разных направлениях, и поэтому интегралы по ним

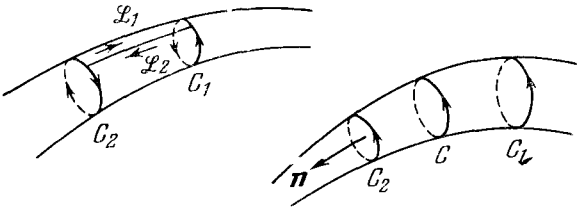


Рис. 20. К свойствам вихревых трубок.

в сумме дают нуль. Контуры C_1 и C_2 также проходятся в противоположных направлениях, и, следовательно, сменив обход одного из них на обратный, получим

$$\int\limits_{C_1} (\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s}) = \int\limits_{C_2} (\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s}),$$

или

$$\Gamma_{C_1} = \Gamma_{C_2}.$$

Контуры C_1 и C_2 могут быть при этом, очевидно, произвольными контурами, охватывающими один раз данную вихревую трубку. Следовательно,

$$\Gamma_C = \text{const},$$

где C — произвольный контур, охватывающий один раз данную вихревую трубку.

Циркуляция

$$\Gamma_C = \int\limits_C (\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s})$$

или равная ей по теореме Стокса величина

$$2 \int\limits_{\Sigma} \omega_n d\sigma,$$

где Σ — поверхность, ограниченная C, а направления обхода C и нормали n к Σ связаны так, как указывалось при выводе теоремы Стокса, называется напряженностью вихревой трубки.

Кинематические теоремы Гельмгольца о вихрях

Напряженность вихревой трубки одинакова вдоль трубки и является характеристикой данной трубки. Это утверждение носит название первой кинематической теоремы Гельмгольца о вихрях.

Вторая кинематическая теорема Гельмгольца состоит в том, что вихревые трубки не могут начинаться и кончаться внутри среды. Это непосредственно вытекает из условия непрерывности поля ω и невозможности пересечения вихревых линий. Таким образом, вихревые трубки либо могут быть замкнутыми, либо могут кончаться и начинаться на границах движущейся среды, либо, если среда неограничена, могут уходить в бесконечность.

Примеры вихревых течений

Интуитивно кажется, что течение жидкости всегда вихревое ($\omega \neq 0$), если в потоке имеются замкнутые линии тока. Действительно, если в потоке наблюдается распределение скоростей, аналогичное показанному на рис. 21, *а*, то циркуляция по нарисованной на рисунке линии тока отлична от нуля,

$$\Gamma_C = \int_C v_s ds \neq 0,$$

так как подынтегральное выражение на всем промежутке интегрирования не меняет знака; по теореме Стокса на поверхности, натянутой на контур C, должны существовать точки с $\omega_n \neq 0$, течение вихревое. Но этот вывод справедлив только в условиях применимости теоремы Стокса, т. е. тогда, когда на C можно натянуть поверхность Σ, на которой поле v вместе со своими частными производными непрерывно. Например, нельзя сделать вывода о том, что течение при наличии распределения скоростей (рис. 21, *а*) вихревое, если контур C охватывает твердое цилиндрическое тело с образующей, параллельной оси z (рис. 21, *б*). Нельзя сделать такого вывода и тогда, когда поля v или ω имеют внутри C особенности.

В этой связи остановимся подробнее на примере течения

$$\varphi = k\theta = k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \tag{8.10}$$

Это течение потенциально, $v = \operatorname{grad}\varphi$, его линии тока ортогональны поверхностям $\varphi = \text{const}$ и являются, следовательно, в плоскости xOy окружностями. Скорость направлена в сторону роста φ, и поэтому, если $k > 0$, течение направлено

так, как показано на рис. 21, *в*. Циркуляция Г по любой окружности, совпадающей с линией тока, отлична от нуля, хотя течение потенциально всюду, кроме начала координат, где потенциал не определен. Если мы подсчитаем вектор вихря для этого течения, то увидим, что он будет равен нулю всюду, кроме оси z; на оси z величину ω нужно приравнять бесконечности. Таким образом, вдоль оси z поля $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ имеют особенности.

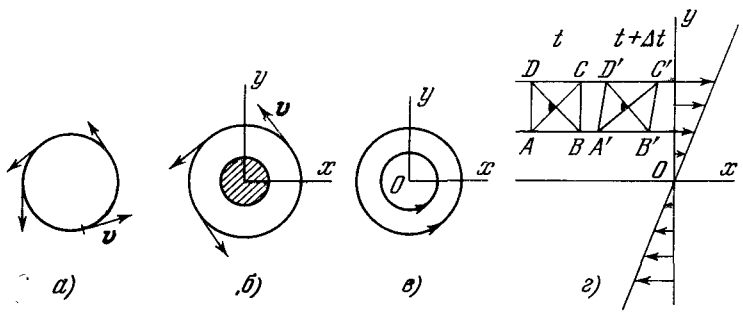


Рис. 21. Примеры возможных вихревых течений.

Вдоль оси z имеется изолированная вихревая нить конечной интенсивности $\Gamma = 2\pi k$. Это течение носит название течения от изолированного вихря. Не следует думать, что вихревые течения обязательно связаны с наличием в потоке замкнутых линий тока. Рассмотрим течение (рис. 21, *г*)

$$u = ay, \qquad v = w = 0,$$

где a — постоянная положительная величина.

Траектории, совпадающие с линиями тока в этом течении, — прямые, параллельные оси x. Распределение скоростей вдоль любой прямой $x = \text{const}$ линейное. Непосредственное вычисление компонент $\boldsymbol{\omega}$ в декартовых осях координат дает

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = -\frac{a}{2},$$

т. е. течение вихревое, $\boldsymbol{\omega}$ направлен против оси z и не меняется от точки к точке. Бесконечно малая жидкая частица, взятая в момент t в виде квадрата $ABCD$, в момент $t + \Delta t$ перейдет в ромб $A'B'C'D'$. Можно показать, что главные оси тензора скоростей деформаций в момент t совпадают с диагоналями квадрата, а в момент $t + \Delta t$ они переходят в диагонали ромба. Углы между главными осями в процессе движения остаются, очевидно, прямыми, но их ориентация в пространстве меняется. Они вращаются с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = -\frac{a}{2}\boldsymbol{k}$.

Теорема Гаусса—Остроградского

Напомним теперь теорему Гаусса — Остроградского. Возьмем в движущейся среде в момент t индивидуальный объем V сплошной среды, ограниченный поверхностью Σ. В каждой точке поверхности Σ выберем внешнюю по отношению к V нормаль n. В момент $t + \Delta t$ этот объем перейдет в объем V', а Σ — в поверхность Σ', ограничивающую V' (рис. 22).

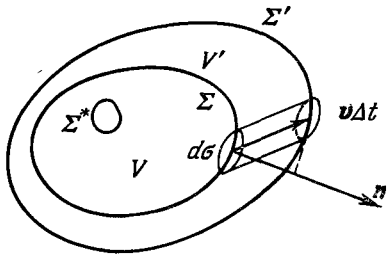


Рис. 22. К теореме Гаусса—Остроградского.

Изменение объема $V' - V$, очевидно, будет равно

$$V' - V = \int_{\Sigma} v_n \Delta t \, d\sigma.$$

Уменьшение V' по отношению к V учитывается при этом автоматически условием о том, что нормаль всегда внешняя к V.

Скорость изменения объема равна

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{V' - V}{\Delta t} = \int_{\Sigma} v_n d\sigma.$$

Аналогично для бесконечно малого объема V^*, ограниченного поверхностью Σ^*, будем иметь

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{V'^* - V^*}{\Delta t} = \int_{\Sigma^*} v_n d\sigma.$$

Воспользовавшись определением дивергенции вектора скорости (7.28) и вспомнив ее механический смысл, в декартовой системе координат получим

$$\int_{\Sigma^*} v_n d\sigma = \int_{\Sigma^*} [u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z)] \, d\sigma =$$

$$= V^* \operatorname{div} v + V^* \varepsilon = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) V^* + V^* \varepsilon, \qquad (8.11)$$

где ε — бесконечно малая величина.

Конечный объем V всегда можно разбить на бесконечно малые объемы V^* и для каждого из них написать равенство (8.11), если $\boldsymbol{v}$ внутри V непрерывно и дифференцируемо. Просуммировав (8.11) по всем составляющим V^* и взяв предел при числе разбиений, стремящемся к бесконечности, и $V^* \to 0$, получим

$$\int_{\Sigma} [u\cos(n, x) + v\cos(n, y) + w\cos(n, z)]\, d\sigma = \int_{V} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) d\tau, \quad (8.12)$$

так как в левой части интегралы, взятые по смежным поверхностям Σ^*, в силу противоположных направлений нормалей к ним сократятся и в пределе останется интеграл только по внешней поверхности Σ.

Равенство (8.12) и представляет собой теорему Гаусса — Остроградского о преобразовании интеграла, взятого по замкнутой поверхности Σ, в интеграл, взятый по ограниченному этой поверхностью Σ объему V. Равенство (8.12) можно написать в виде, независимом от выбора системы координат:

$$\int_{\Sigma} v_n d\sigma = \int_{V} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, d\tau. \quad (8.13)$$

Очевидно, любой непрерывный и имеющий первые непрерывные производные внутри V и на поверхности Σ вектор $\boldsymbol{A}$ можно трактовать как скорость $\boldsymbol{v}$ и получить для него формулу Гаусса — Остроградского:

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{V} \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, d\tau.$$

Более того, так как в данной системе координат любые три величины P, Q, R можно трактовать как компоненты вектора, теорему Гаусса — Остроградского можно написать для любых трех непрерывных и дифференцируемых функций P, Q, R от x, y, z, а именно:

$$\int_{\Sigma} [P\cos(n, x) + Q\cos(n, y) + R\cos(n, z)]\, d\sigma = \int_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) d\tau.$$

Под интегралами в формуле Гаусса — Остроградского как справа, так и слева стоят инвариантные, не зависящие от

выбора системы координат величины. Если они известны в декартовой системе координат, то их легко вычислить в любой другой системе координат. А именно, пусть в любой системе η^1, η^2, η^3

$$\boldsymbol{A} = A^k \boldsymbol{\vartheta}_k, \quad \boldsymbol{n} = n_i \boldsymbol{\vartheta}^i;$$

тогда

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} = A^k_{\ldots} n_k$$

и

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla_k A^k = \frac{\partial A^k}{\partial \eta^k} + A^i \Gamma^k_{ki},$$

где символы Кристоффеля Γ^i_{kj} вычисляются согласно полученным выше формулам по g_{ij} в пространстве η^1, η^2, η^3 (g_{ij} можно вычислить по формулам преобразования от декартовой системы координат к данной системе η^1, η^2, η^3).

Теперь теорему Гаусса — Остроградского можно написать в следующем виде:

$$\int_\Sigma A^k n_k d\sigma = \int_V \nabla_k A^k d\tau, \tag{8.14}$$

который справедлив в произвольной криволинейной системе координат. Заметим, что число измерений пространства при выводе теоремы Гаусса — Остроградского может быть произвольным. В механике и в физике эта теорема часто применяется для двумерных, трехмерных и четырехмерных областей.

Формула дифференцирования по времени интеграла, взятого по подвижному объему

Выведем еще одну полезную для дальнейшего формулу векторного анализа. Пусть имеется произвольная функция f (она может быть и тензором), зависящая от координат точек пространства и от времени t. Рассмотрим интеграл

$$\int_V f(x, y, z, t)\, d\tau$$

по подвижному объему V. Вычислим производную

$$\frac{d}{dt} \int_V f(x, y, z, t)\, d\tau,$$

где от t зависит не только подынтегральная функция, но и область интегрирования V. По определению производной (см.

рис. 22) можно написать

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} f(x, y, z, t)\,d\tau = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int\limits_{V'} f(x, y, z, t+\Delta t)\,d\tau - \int\limits_{V} f(x, y, z, t)\,d\tau}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int\limits_{V}[f(x, y, z, t+\Delta t) - f(x, y, z, t)]\,d\tau + \int\limits_{V'-V} f(x, y, z, t+\Delta t)\,d\tau}{\Delta t} =$$

$$= \int\limits_{V}\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t}\,d\tau + \int\limits_{\Sigma} f v_n d\sigma, \qquad (8.15)$$

так как объем $V' - V$ состоит из элементарных цилиндров (см. рис. 22).

$$d\tau = v_n d\sigma\,\Delta t$$

и при $\Delta t \to 0$ поверхность Σ' стягивается к Σ, а

$$f(x, y, z, t+\Delta t) \to f(x, y, z, t).$$

Применив к последнему интегралу (8.15) формулу Гаусса — Остроградского, получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V} f(x, y, z, t)\,d\tau = \int\limits_{V}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_i(fv^i)\right]d\tau. \qquad (8.16)$$

Область интегрирования V подвижна, и, естественно, результат дифференцирования зависит от поля скоростей $\boldsymbol{v}$, с которым движутся точки объема V.

Очевидно, всегда верно следующее кинематическое равенство:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_i(fv^i) = \frac{\partial f}{\partial t} + v^i\nabla_i f + f\nabla_i v^i = \frac{df}{dt} + f\nabla_i v^i, \qquad (8.17)$$

где

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v^i\nabla_i f \qquad (8.18)$$

есть выражение полной производной от функции f по времени t в произвольной системе координат.

Поэтому формулу (8.16) можно записать еще в виде

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V} f(x, y, z, t)\,d\tau = \int\limits_{V}\left[\frac{df}{dt} + f\nabla_i v^i\right]d\tau. \qquad (8.19)$$

Применим формулу (8.16) к частному случаю. Пусть

$$f = \frac{1}{V},$$

где V — объем сплошной среды. Очевидно, в этом случае функция f зависит от переменного объема V — области интегрирования (8.15), т. е. она зависит только от t и не зависит от координат. Ясно, что всегда верно кинематическое тождество

$$\int_V \frac{d\tau}{V(t)} = 1$$

и по (8.16)

$$\int_V \left[\frac{\partial \frac{1}{V}}{\partial t} + \nabla_i \left(\frac{1}{V} v^i\right)\right] d\tau = 0 \tag{8.20}$$

или

$$\int_V \left[\frac{d\frac{1}{V}}{dt} + \frac{1}{V} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\right] d\tau = 0. \tag{8.21}$$

Это тождество может быть написано как для всего объема V движущейся среды, так и для любой его части.

Применяя (8.21) к бесконечно малому объему ΔV, получим

$$\frac{d\left(\frac{1}{\Delta V}\right)}{dt} + \frac{1}{\Delta V} \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{8.22}$$

где $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ взята в той точке, к которой стягивается ΔV. Подчеркнем, что это равенство верно для любых сред и никак не связано со свойствами движущейся среды. В частности, оно верно и для нематериальных сред, например фазового пространства.

ГЛАВА III

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

§ 1. Уравнение неразрывности

Перейдем к изучению движения физических объектов, т. е. материальных тел и полей. В этом и в ряде последующих разделов в основном будут рассматриваться законы движения только материальных тел. Материальными телами называются тела, обладающие свойством инерции. Свойство инерции характеризуется массой. Массу можно ввести как для всего тела в целом m, так и для любой его части m_i. По определению масса всего тела m равна сумме масс m_i всех составляющих тело частей.

Закон сохранения массы; плотность; уравнение неразрывности в переменных Эйлера

Фундаментальным законом ньютонианской механики является закон сохранения массы m любого индивидуального объема, т. е. объема, состоящего из одних и тех же частиц среды. Этот закон можно рассматривать как опытно установленный закон природы, верный в определенном приближении.

Одно из основных уравнений механики сплошной среды заключается в том, что для любого индивидуального объема

$$m = \text{const}.$$

Это уравнение можно записать еще в другой форме, а именно:

$$\frac{dm}{dt} = 0. \tag{1.1}$$

Введем среднюю плотность

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

где ΔV — объем, занятый массой Δm; истинную плотность определим как следующий предел:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

В механике сплошной среды почти всегда вместо массы m рассматривают плотность ρ. Для малого объема верно равенство

$$\Delta m \simeq \rho \Delta V;$$

для конечного объема — равенство

$$m = \int_V \rho \, d\tau,$$

где интеграл взят по подвижному индивидуальному объему. Таким образом, зная ρ, можно найти m.

Плотность ρ для индивидуальной частицы может и не сохраняться, так как объем частицы во время движения может меняться.

Закон сохранения массы для индивидуального объема сплошной среды можно, очевидно, теперь записать в виде

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \, d\tau = 0. \tag{1.2}$$

Применив правило дифференцирования (8.16) интеграла, взятого по подвижному объему, при условии соблюдения закона сохранения массы, будем иметь

$$0 = \frac{dm}{dt} = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \boldsymbol{v} \right) d\tau = \int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} \right) d\tau$$

или, так как это равенство справедливо для любого индивидуального объема, получим первое основное дифференциальное уравнение механики сплошной среды:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{1.3}$$

которое носит название уравнения неразрывности в переменных Эйлера.

Это же уравнение, так как масса сохраняется для любого индивидуального объема, можно, очевидно, непосредственно получить из формулы (8.22).

Условия на величины, сохраняющие свои значения в индивидуальном объеме

Кроме массы m есть и другие физические характеристики, остающиеся во время движения постоянными в любом индивидуальном объеме сплошной среды. Например, пусть N — число молекул или атомов в произвольном индивидуальном объеме. Часто N постоянно в индивидуальном объеме. Введя число молекул или атомов в единице объема $n = \lim\limits_{V \to 0} \frac{N}{V}$, на основании предположения о постоянстве N в любом индивидуальном объеме с помощью формулы (8.22) получим для n

аналогичное (1.3) дифференциальное уравнение:

$$\frac{dn}{dt} + n \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{1.4}$$

Если в сплошной среде происходят химические реакции, то уравнение (1.3) выполняется, а уравнение (1.4) нет.

Существуют и другие скалярные, векторные или тензорные величины, сохраняющие свое значение в любом индивидуальном объеме. Обозначим такую сохраняющуюся величину через Φ и введем плотность этой величины:

$$f = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta V};$$

Очевидно, что для Φ и f выполняются следующие условия:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0,$$

$$\Phi = \int_V f \, d\tau,$$

$$\frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0.$$

В физике во многих случаях последнее условие выполняется для плотности заряда e. Установление тех характеристик, которые сохраняют свою величину в индивидуальном объеме, является одной из основных проблем физики.

Уравнения неразрывности для многокомпонентных смесей

Пусть мы имеем смесь, состоящую из n компонент, например: смесь водорода, кислорода и паров воды ($n = 3$); сплав олова и меди; раствор соли в воде; плазму — смесь свободных электронов и ионов — и т. п. Все такого рода многокомпонентные смеси можно представить себе как совокупность n континуумов, заполняющих один и тот же объем, занятый смесью. Для каждого из этих континуумов можно ввести свою плотность и свою скорость. Обозначим их через $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ и $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$. В каждой точке объема, занятого смесью, будет n плотностей ρ_i и n скоростей $\boldsymbol{v}_i$, каждая из которых относится к своему континууму.

Таким образом, в этой постановке механика смеси является механикой набора континуумов, заполняющих один и тот же объем.

Рассмотрим сначала случай, когда в смеси не происходят химические реакции или ионизация. В этом случае для каждой из n компонент смеси должен выполняться закон сохранения мас-

сы, и мы будем иметь n уравнений

$$\frac{dm_i}{dt} = 0$$

или

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_i \boldsymbol{v}_i = 0. \tag{1.5}$$

Если же в смеси происходят химические реакции или ионизация (этот случай интересен с точки зрения приложений), то массы компонент m_i могут меняться. Введем $\varkappa_i$ — изменение массы m_i i-й компоненты смеси в единицу времени на единицу объема за счет химической реакции или ионизации. Величины $\varkappa_i$ определяются в химии. Тогда уравнения неразрывности для компонент смеси можно записать в виде

$$\frac{dm_i}{dt} = \int_V \varkappa_i d\tau$$

или

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_i \boldsymbol{v}_i = \varkappa_i. \tag{1.6}$$

Основной закон химических реакций заключается в том, что общая масса смеси остается постоянной, и поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i = 0. \tag{1.7}$$

Кроме n плотностей и n скоростей компонент смеси можно ввести одну плотность ρ и одну скорость $\boldsymbol{v}$ смеси как целого. По определению масса смеси в данном объеме равна сумме масс компонент в этом же объеме:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i,$$

а плотность смеси ρ определим как

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

Плотность компонент смеси

$$\rho_i = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta V},$$

и поэтому

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho_i.$$

Соотношение, являющееся результатом суммирования (1.5), с учетом (1.7) можно написать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \sum_{i=1}^{n} \rho_i \boldsymbol{v}_i = 0.$$

Это уравнение будет иметь обычный вид уравнения неразрывности (1.3), если скорость $\boldsymbol{v}$ смеси в целом определена следующим образом:

$$\rho \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \boldsymbol{v}_i,$$

$$m\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i,$$

т. е.

$$\boldsymbol{v} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho_i \boldsymbol{v}_i}{\rho}. \tag{1.8}$$

Заметим, что так определенная скорость $\boldsymbol{v}$ представляет собой скорость общего центра масс n индивидуальных объемов, соответствующих n компонентам смеси.

Уравнение неразрывности в случае процессов с диффузией

Может случиться, что все компоненты смеси движутся с одинаковыми скоростями, которые совпадают в этом случае со скоростью движения смеси в целом:

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \ldots = \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{v}.$$

Такого рода процессы называются процессами без диффузии.

Если скорости компонент $\boldsymbol{v}_i$ разные, то имеет место диффузия; в этом случае одни компоненты смеси движутся относительно других. Электрический ток представляет собой пример такого процесса. При наличии электрического тока в неподвижном проводнике имеем $\boldsymbol{v} = 0$, а $\boldsymbol{v}_i \neq 0$, движение электронов и ионов в проводнике и образует электрический ток.

В случае процессов с диффузией уравнения неразрывности (1.5) или (1.6) можно видоизменить и ввести в уравнение нераз-

рывности каждой компоненты скорость $\boldsymbol{v}$ движения смеси как целого.

В общем случае при наличии химического взаимодействия и диффузии уравнения (1.6) можно написать в виде

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_i \boldsymbol{v} = \varkappa_i - \operatorname{div} \boldsymbol{I}_i, \tag{1.9}$$

где

$$\boldsymbol{I}_i = \rho_i (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}).$$

Разность $\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}$ является, очевидно, скоростью i-й компоненты относительно среды в целом. Члены $\operatorname{div} \boldsymbol{I}_i$ в уравнениях (1.9) характеризуют изменение массы i-й компоненты в объеме, движущемся со скоростью $\boldsymbol{v}$, за счет того, что этот объем, если $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{v}_i$, не является индивидуальным объемом для i-й компоненты.

Частицы, составляющие i-ю компоненту, входят в этот объем и выходят из него. Векторы $\boldsymbol{I}_i$ носят название векторов потока диффузии.

Для вычисления векторов потока диффузии $\boldsymbol{I}_i$ необходимо опираться на законы физики. Законы диффузии в разных случаях могут быть разными, но в любом случае из (1.8) следует, что выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{I}_i = 0.$$

Вместо n уравнений неразрывности (1.9) для компонент смеси можно использовать $n - 1$ независимых уравнений неразрывности (1.9) для компонент смеси и уравнение неразрывности для смеси в целом

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \boldsymbol{v} = 0.$$

Таким образом, изучая движение многокомпонентной смеси, можно не вводить явно n континуумов, заполняющих один и тот же объем и движущихся с разными скоростями $\boldsymbol{v}_i$, а вместо $\boldsymbol{v}_i$ ввести в рассмотрение только векторы потока диффузии $\boldsymbol{I}_i$ и рассмотреть уравнения (1.9) как уравнения для плотностей ρ_i компонент смеси.

Ясно, что при изучении движения многокомпонентных реагирующих смесей необходимо объединять законы механики с законами физики и химии для величин $\varkappa_i$ и $\boldsymbol{I}_i$.

Уравнение неразрывности и свойства трубок тока в случае несжимаемой среды

Уравнение неразрывности (1.3) получено для произвольной сплошной среды.

Среда называется несжимаемой, если любой ее индивидуальный объем остается во все время движения постоянным по величине. Поэтому плотность в частице несжимаемой среды также остается постоянной. Уравнение неразрывности имеет вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{1.10}$$

Среда называется однородной, если плотность ρ одинакова во всех частицах среды, т. е. ρ не зависит от пространственных координат x, y, z и неоднородной; если плотность ρ разная в разных частицах среды, $\rho = \rho(x, y, z)$. *Уравнение неразрывности (1.10), очевидно, справедливо как для однородной, так и для неоднородной несжимаемой среды.*

Поле скоростей несжимаемой жидкости всегда соленоидально, и, следовательно, его векторные трубки, т. е. трубки тока, обладают свойствами, изложенными в § 8 гл. II. Например, напряженность трубки тока

$$\int_{\Sigma} v_n d\sigma = Q,$$

(Σ — поперечное сечение трубки, а $\boldsymbol{n}$ — нормаль к нему), называемая расходом трубки тока, остается постоянной вдоль трубки тока. Трубки тока не могут начинаться и кончаться внутри объема несжимаемой среды.

Уравнение неразрывности в переменных Лагранжа

Получим уравнение неразрывности в другой форме, а именно выведем уравнение неразрывности в переменных Лагранжа. Для этого в данный момент времени t в произвольной точке M сплошной среды на малых векторах $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_1 d\xi^1$, $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_2 d\xi^2$, $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_3 d\xi^3$, направленных вдоль осей сопутствующей системы координат ξ^1, ξ^2, ξ^3, построим элементарный бесконечно малый косоугольный параллелепипед. Его объем будет равен

$$V = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_1 \cdot (\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_2 \times \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_3)\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3.$$

В другой произвольный момент t_0 этому параллелепипеду соответствовал элементарный косоугольный параллелепипед, построенный на векторах $\mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_1 d\xi^1$, $\mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_2 d\xi^2$, $\mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_3 d\xi^3$, взятых в той же индивидуальной точке M. Объем этого параллелепипеда был равен

$$V_0 = \mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_1 \cdot (\mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_2 \times \mathring{\boldsymbol{\vartheta}}_3) d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3.$$

Обозначим плотность среды в моменты t и t_0 соответственно через ρ и ρ_0. По закону сохранения масс будем иметь

$$\rho_0 V_0 = \rho V,$$

или

$$\rho = \rho_0 \frac{V_0}{V} = \rho_0 \frac{\mathring{\mathfrak{d}}_1 \cdot (\mathring{\mathfrak{d}}_2 \times \mathring{\mathfrak{d}}_3)}{\hat{\mathfrak{d}}_1 \cdot (\hat{\mathfrak{d}}_2 \times \hat{\mathfrak{d}}_3)}. \tag{1.11}$$

Для вычисления смешанных произведений векторов базиса введем еще декартову прямоугольную систему отсчета x^1, x^2, x^3 с векторами базиса $\mathfrak{d}_1 = \boldsymbol{i}$, $\mathfrak{d}_2 = \boldsymbol{j}$, $\mathfrak{d}_3 = \boldsymbol{k}$, относительно которой происходит движение среды. Обозначим координаты точек среды относительно этой системы в момент t через x^1, x^2, x^3, а в момент t_0 через x_0^1, x_0^2, x_0^3. Очевидно,

$$x_0^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t_0),$$
$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t),$$

т. е. x_0^i и x^i являются значениями функций, задающих закон движения, взятыми при разных значениях независимой переменной t. Так как радиус-вектор точки M относительно системы отсчета есть

$$\boldsymbol{r} = x^k \mathfrak{d}_k, \quad \text{а} \quad \hat{\mathfrak{d}}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^i},$$

то

$$\hat{\mathfrak{d}}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \mathfrak{d}_k,$$

и смешанное произведение $\hat{\mathfrak{d}}_1 \cdot (\hat{\mathfrak{d}}_2 \times \hat{\mathfrak{d}}_3)$ можно представить в виде детерминанта:

$$\hat{\mathfrak{d}}_1 \cdot (\hat{\mathfrak{d}}_2 \times \hat{\mathfrak{d}}_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix} = \hat{\Delta},$$

где $\hat{\Delta}$ — якобиан преобразования от переменных ξ^1, ξ^2, ξ^3 к переменным x^1, x^2, x^3. Аналогично

$$\mathring{\mathfrak{d}}_1 \cdot (\mathring{\mathfrak{d}}_2 \times \mathring{\mathfrak{d}}_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_0^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x_0^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x_0^3}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial x_0^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x_0^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x_0^3}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial x_0^1}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x_0^2}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x_0^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix} = \mathring{\Delta},$$

где $\mathring{\Delta}$ — якобиан преобразования от переменных ξ^1, ξ^2, ξ^3 к переменным x_0^1, x_0^2, x_0^3. Теперь уравнение (1.11), используя свойство якобианов, можно представить в виде

$$\rho = \rho_0 \frac{\mathring{\Delta}}{\hat{\Delta}} = \rho_0 \mathrm{Det} \left\| \frac{\partial x_0^i}{\partial x^k} \right\|. \tag{1.12}$$

Преобразуем далее полученное уравнение (1.12). Обозначим для наглядности компоненты $\partial x^i/\partial \xi^j$ векторов $\hat{\partial}_j$ в системе x, y, z через $\hat{\partial}_{jx}$, $\hat{\partial}_{jy}$, $\hat{\partial}_{jz}$. Тогда, очевидно,

$$[\hat{\partial}_1 \cdot (\hat{\partial}_2 \times \hat{\partial}_3)]^2 = \hat{\Delta}^2 = \begin{vmatrix} \hat{\partial}_{1x} & \hat{\partial}_{1y} & \hat{\partial}_{1z} \\ \hat{\partial}_{2x} & \hat{\partial}_{2y} & \hat{\partial}_{2z} \\ \hat{\partial}_{3x} & \hat{\partial}_{3y} & \hat{\partial}_{3z} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \hat{\partial}_{1x} & \hat{\partial}_{1y} & \hat{\partial}_{1z} \\ \hat{\partial}_{2x} & \hat{\partial}_{2y} & \hat{\partial}_{2z} \\ \hat{\partial}_{3x} & \hat{\partial}_{3y} & \hat{\partial}_{3z} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \hat{\partial}_{1x} & \hat{\partial}_{2x} & \hat{\partial}_{3x} \\ \hat{\partial}_{1y} & \hat{\partial}_{2y} & \hat{\partial}_{3y} \\ \hat{\partial}_{1z} & \hat{\partial}_{2z} & \hat{\partial}_{3z} \end{vmatrix} = \mathrm{Det} \| \hat{g}_{ik} \| = \hat{g},$$

так как $\hat{g}_{ik} = \hat{\partial}_i \cdot \hat{\partial}_k$.

Аналогично

$$[\mathring{\partial}_1 \cdot (\mathring{\partial}_2 \times \mathring{\partial}_3)]^2 = \mathrm{Det} \| \mathring{g}_{ik} \| = \mathring{g},$$

и, следовательно, (1.11) можно представить в виде

$$\rho = \rho_0 \sqrt{\frac{\mathring{g}}{\hat{g}}}. \tag{1.13}$$

Уравнения (1.11), (1.12) и (1.13) — разные виды уравнения неразрывности в переменных Лагранжа.

Заметим, что в общем случае для плотности f любой величины Ф, сохраняющей свое значение в индивидуальном объеме сплошной среды, выполняется уравнение

$$f = f_0 \sqrt{\frac{\mathring{g}}{\hat{g}}} = f_0 \Delta, \tag{1.14}$$

где Δ — детерминант матрицы преобразования от переменных x^i к переменным x_0^i.

Уравнение неразрывности носит весьма универсальный характер и выполняется при движениях любой материальной среды, его вид не зависит от свойств среды. Оно одинаково для всех сред: воды, воздуха, металла и т. д. В уравнение неразрывности в случае сжимаемой среды (1.3) входят четыре неизвестные

функции: плотность ρ и три компоненты скорости; в случае несжимаемой среды (1.10) в него входят только три неизвестные функции — компоненты скорости. Очевидно, что для решения задач механики сплошной среды одного уравнения неразрывности недостаточно. Перейдем к выводу других уравнений, выполняющихся при движении любой сплошной среды.

§ 2. Уравнения движения сплошной среды

Будем изучать движение материальной сплошной среды в связи с причинами, которые это движение вызывают. Для этого введем в рассмотрение силы. Силы являются векторными величинами. Дадим основную классификацию сил, с которыми приходится иметь дело в механике сплошной среды. Понятие силы в механике сплошной среды по сравнению с механикой материальной точки и твердой неизменяемой системы усложняется.

Сосредоточенные и распределенные силы

В теоретической механике в основном имеют дело с сосредоточенными, или концентрированными силами, т. е. конечными силами, действующими в точке. В механике сплошной среды мы встречаемся в основном с распределенными силами, т. е. действующими в каждой части объема V или на каждом элементе поверхности Σ сплошной среды, причем при стремлении бесконечно малого элемента объема или поверхности к нулю главный вектор действующих на него сил также стремится к нулю.

Сосредоточенные силы встречаются в механике сплошной среды только в исключительных случаях. Из второго закона Ньютона

$$\mathsf{F} = \Delta m\, \boldsymbol{a},$$

где Δm — масса малого элемента сплошной среды, а $\boldsymbol{a}$ — его ускорение, видно, что концентрированная сила может быть только в той точке, где $\boldsymbol{a}$ (или ρ) обращается в бесконечность.

Объемные, или массовые, и поверхностные силы

Силы, распределенные по объему V, называются объемными или массовыми силами. Обозначим через F главный вектор массовых сил, действующих на элемент массы Δm. Тогда плотность $\boldsymbol{F}$ массовой силы в данной точке есть

$$\boldsymbol{F} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\mathsf{F}}{\Delta m}.$$

Для малой частицы

$$\mathsf{F} \simeq \boldsymbol{F}\, \Delta m.$$

Иногда рассматривают силу Φ, приходящуюся не на единицу

массы, а на единицу объема. Очевидно,

$$\boldsymbol{\Phi} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\mathsf{F}}{\Delta V},$$

т. е.

$$\boldsymbol{\Phi} = \rho \boldsymbol{F},$$

$\boldsymbol{\Phi} dV$ и $\boldsymbol{F} dm$ имеют размерности силы, $\boldsymbol{F}$ — размерность ускорения, а $\boldsymbol{\Phi}$ — размерность ускорения, умноженную на размерность плотности.

Число различных видов массовых сил невелико. Это — сила тяжести (вес) $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{\Phi} = \rho \boldsymbol{g}$ и вообще гравитационные силы, подчиняющиеся закону всемирного тяготения Ньютона; электромагнитные силы; силы инерции, которые приходится вводить при изучении движения в неинерциальных системах координат и которые с точки зрения самого движущегося тела являются обычными реальными внешними массовыми силами. Иногда при изучении конкретных движений сплошной среды массовые силы вводятся искусственно. Так, например, рассматривая движение профиля крыла в жидкости, можно считать, что область, занятая профилем крыла, также заполнена жидкостью, но для того, чтобы искусственно введенная жидкость продолжала двигаться как профиль крыла, к ней необходимо приложить распределенные массовые силы.

В механике абсолютно твердого тела действие любой системы сил эквивалентно действию ее главного вектора и главного момента. В механике деформируемых сред существенен характер распределения сил по телу.

Поверхностные силы

В механике сплошной среды основную роль играют не массовые, а поверхностные, т. е. распределенные по поверхности сплошной среды, силы. Так, например, если взять воду, налитую в сосуд, то на поверхности S соприкосновения воды со стенками сосуда будет, очевидно, наблюдаться силовое взаимодействие. Взяв элемент $d\sigma$ поверхности S, можно ввести элементарную поверхностную силу $d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} d\sigma$, где $\boldsymbol{p} = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta \sigma}$ — плотность поверхностных сил, действующих на площадку $d\sigma$. Плотность $\boldsymbol{p}$ поверхностной силы можно ввести в каждой точке поверхности S, и она будет, вообще говоря, разной.

Внутренние и внешние силы

Силы можно разбить на внутренние и внешние. Силы называются внутренними, если они вызваны объектами, принадлежащими к системе, движение которой рассматривается, и внешними, если они вызваны внешними по отношению к рассматриваемой системе объектами.

Понятие внешних и внутренних сил относительно. Так, например, если мы рассматриваем движение воздуха в атмосфере и Земли вместе, то сила тяжести воздуха — внутренняя сила. Если же рассматриваем движение только воздуха, то сила тяжести — внешняя. Если рассматривается движение материального тела и электромагнитного поля, то электромагнитные силы — внутренние; если же рассматривается движение только материального тела, то поле является внешним по отношению к нему агентом, и электромагнитные силы — внешние.

Силы внутренних напряжений

Мысленно выделим в сплошной среде некоторый произвольный объем V и разобьем его сечением S на две части V_1 и V_2 (рис. 23). Если мы будем рассматривать движение одной из частей V, например V_1, то при этом действие на нее второй части, т. е. V_2, необходимо заменить распределенными по V_1 массовыми силами и распределенными по S поверхностными силами. Так введенные силы взаимодействия будут внешними для V_1. Если же мы будем рассматривать движение объема V в целом, то эти силы будут внутренними. Сечение S можно проводить по-разному, и, очевидно, распределенные по поверхности S поверхностные силы будут на разных S разными.

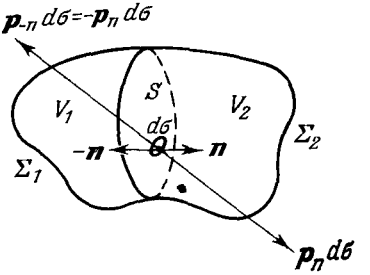


Рис. 23. Силы внутренних напряжений.

Возьмем некоторую точку M внутри тела и рассмотрим в этой точке различные площадки $d\sigma$. Ориентацию этих площадок будем определять нормалью $\boldsymbol{n}$ к ним, а полную силу, действующую со стороны части среды в объеме V_2 на часть среды в объеме V_1 на площадке $d\sigma$ с нормалью $\boldsymbol{n}$, обозначим через $d\boldsymbol{P}$. Дальше примем, что $d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_n d\sigma$, где $\boldsymbol{p}_n$ — конечный вектор. Вектор $\boldsymbol{p}_n$ можно рассматривать как поверхностную плотность силы взаимодействия разделенных частей вдоль площадки $d\sigma$. В общем случае $\boldsymbol{p}_n$ может зависеть от ориентации площадки $d\sigma$ и других ее геометрических свойств. Направление нормали $\boldsymbol{n}$ будем выбирать всегда так, чтобы она была внешней по отношению к той части среды, на которую действует вводимая сила $\boldsymbol{p}_n d\sigma$. Так, например, влияние объема V_2 на V_1 будем заменять распределенными силами $\boldsymbol{p}_n d\sigma$, а влияние объема V_1 на V_2 — распределенными силами $\boldsymbol{p}_{-n}\,d\sigma$ (рис. 23). Такого рода поверхностные силы можно вводить в любой точке сплошной среды, они называются силами внутренних напряжений.

Силу внутренних напряжений $\boldsymbol{p}_n d\sigma$ в каждой точке сплошной среды можно разложить на две составляющие — по нормали $\boldsymbol{n}$

и касательной τ к элементарной площадке $d\sigma$:

$$\boldsymbol{p}_n d\sigma = p_{nn}\boldsymbol{n}\, d\sigma + p_{n\tau}\boldsymbol{\tau}\, d\sigma,$$

где $p_{nn}d\sigma$ — нормальная компонента силы внутреннего напряжения, а $p_{n\tau}d\sigma$ — касательная, которая носит также название тангенциальной силы или, в случае жидкости, силы внутреннего трения.

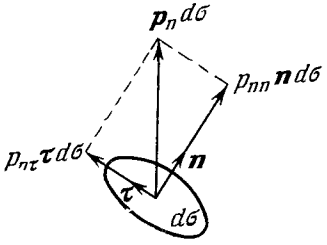


Рис. 24. Нормальная и касательная составляющие сил внутренних напряжений.

Поверхностные силы $\boldsymbol{p}_n d\sigma$ могут быть, очевидно, и внешними силами, т. е. силами, действующими на внешней поверхности, ограничивающей сплошную среду.

В каждой точке $\boldsymbol{M}$ сплошной среды существует бесконечно много векторов $\boldsymbol{p}_n$, соответствующих бесконечному набору площадок $d\sigma$, проходящих через эту точку. Однако между ними имеется универсальная, не зависящая от частных свойств движущейся среды, связь, которую мы ниже получим.

Основным динамическим уравнением движения материальной точки является второй закон Ньютона:

$$\mathsf{F} = m\boldsymbol{a}.$$

Нам предстоит сформулировать более сложное, но являющееся прямым обобщением второго закона Ньютона соотношение, описывающее движение сплошной материальной среды.

Уравнение количества движения для материальной точки и для системы точек

Рассмотрим движение одной материальной точки массы m относительно системы координат x, y, z. Так как масса m точки постоянна, будем иметь

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dm\boldsymbol{v}}{dt} = \mathsf{F}. \qquad (2.1)$$

Произведение массы на скорость $m\boldsymbol{v}$ называется количеством движения точки. Имеем уравнение количества движения для одной материальной точки — производная по времени от количества движения материальной точки равна сумме всех сил, действующих на эту точку.

С помощью основного уравнения количества движения (2.1) можно решать две типичные задачи — по известным силам найти закон движения точки или по известному закону движения точки найти действующую на нее силу.

Если мы имеем систему из n материальных точек, каждая из которых имеет массу m_i и в результате действия на нее

суммарной силы F_i, движется со скоростью v_i, то для каждой из этих точек можно написать уравнение количества движения (2.1):

$$\frac{dm_i v_i}{dt} = \mathsf{F}_i,$$

причем в F_i войдут все силы, действующие на точку с номером i, как внешние, так и внутренние по отношению ко всей системе из n материальных точек. Сложив уравнения количества движения (2.1) для всех n точек, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dm_i v_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{F}_i^{(e)},$$

где справа стоит сумма всех только внешних по отношению к системе сил, так как внутренние силы взаимодействия по третьему закону Ньютона существуют попарно и при суммировании сокращаются.

Сумма

$$Q = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i = m v^*, \quad \text{где} \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

—масса всей системы, а v^* — скорость центра масс системы из n точек,

$$v^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i v_i}{m},$$

называется количеством движения системы, и мы приходим к уравнению количества движения для системы из n материальных точек:

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{F}_i^{(e)} \quad \text{или} \quad m\frac{dv^*}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{F}_i^{(e)}.$$

Производная по времени от количества движения системы материальных точек равняется сумме всех действующих на систему внешних сил. Или иначе — масса, умноженная на ускорение центра масс системы, равняется сумме всех внешних сил, действующих на систему.

Таким образом, движению любой системы материальных точек можно поставить в соответствие движение одной материальной точки — центра масс системы. При малых размерах системы для далеких наблюдателей движение системы точек во многих вопросах можно свести к движению одной точки — центра масс системы.

Уравнение движения материальной точки имеет универсальное значение, его можно применять к всевозможным механиче-

ским системам: галактикам, звездам, планетам, любым летательным аппаратам, человеку, птицам, насекомым и т. д. и т. п.

Уравнение количества движения для конечного объема сплошной среды

Обобщим теперь уравнение количества движения на случай конечного объема V сплошной среды, ограниченного поверхностью Σ. Напишем это уравнение, так как

$$\int_V \frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\rho\, d\tau) = \int_M \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\, dm = \frac{d}{dt}\int_M \boldsymbol{v}\, dm = \frac{d}{dt}\int_V \boldsymbol{v}\rho\, d\tau,$$

в виде

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \int_V \boldsymbol{F}\rho\, d\tau + \int_\Sigma \boldsymbol{p}_n d\sigma,$$

где

$$\boldsymbol{Q} = \int_V \boldsymbol{v}\rho\, d\tau$$

по определению есть количество движения сплошной среды, занимающей объем V, а

$$\int_V \boldsymbol{F}\rho\, d\tau \text{ и } \int_\Sigma \boldsymbol{p}_n d\sigma$$

— суммы внешних массовых и поверхностных сил, действующих на среду в объеме V, соответственно.

Таким образом, для любого индивидуального объема V сплошной среды можно написать уравнение количества движения:

$$\frac{d}{dt}\int_V \boldsymbol{v}\rho\, d\tau = \int_V \boldsymbol{F}\rho\, d\tau + \int_\Sigma \boldsymbol{p}_n d\sigma, \qquad (2.2)$$

т. е. производная по времени количества движения объема V сплошной среды равняется сумме всех внешних действующих на него массовых и поверхностных сил. Выделяемый мысленно объем V является произвольным субстанциональным подвижным деформируемым объемом, состоящим по определению из одних и тех же частиц среды.

Если на массу в объеме V, кроме внешних распределенных сил, действуют еще внешние сосредоточенные в точке силы или силы, сосредоточенные вдоль некоторых линий, то их сумму следует добавить в правую часть уравнения (2.2).

Равенство (2.2) является основным постулируемым динамическим соотношением механики сплошной среды. Подобно тому как второй закон Ньютона является исходным уравнением в механике точки, уравнение количества движения (2.2) положено

в основу механики сплошной среды. Все предшествующие рассуждения следует рассматривать как наводящие эвристические соображения, связывающие уравнение (2.2) для сплошной среды и уравнение Ньютона для материальной точки.

В обоснование уравнения (2.2) можно привести также следующее соображение. По формуле $m\boldsymbol{v}^* = \int\limits_V \boldsymbol{v}\rho\, d\tau$ можно ввести скорость $\boldsymbol{v}^*$ центра масс объема V сплошной среды и сформулировать уравнение количества движения (2.2) как уравнение движения центра масс индивидуального объема V сплошной среды:

$$m\frac{d\boldsymbol{v}^*}{dt} = \int\limits_V \boldsymbol{F}\rho\, d\tau + \int\limits_\Sigma \boldsymbol{p}_n d\sigma.$$

Заметим, что соотношение (2.2) часто называют уравнением импульсов, так как его можно записать еще в следующем виде:

$$d\int\limits_V \boldsymbol{v}\rho\, d\tau = \int\limits_V \boldsymbol{F}\rho\, d\tau\, dt + \int\limits_\Sigma \boldsymbol{p}_n dt\, d\sigma.$$

На соотношение (2.2) можно смотреть как на равенство, определяющее силы. Действительно, все известные для сил законы получены из этого уравнения, т. е. обобщенного второго закона Ньютона [1]). Эти законы можно получать на основании наблюдений в опытах, с помощью различных гипотез или с помощью «мысленных экспериментов», формулируемых как обобщение практических данных. Определив законы для сил с помощью (2.2) в предварительных исследованиях, в других случаях, уже зная силы, из (2.2) можно находить соответствующие этим силам движения.

Уравнение количества движения (2.2) является исходным уравнением для любых движений сплошной среды, в том числе и для разрывных движений, когда характеристики движения и состояния сплошной среды не являются всюду в объеме V непрерывными функциями координат, и для ударных процессов, когда характеристики движения и состояния в рассматриваемом объеме среды являются разрывными функциями времени.

В частности, в области непрерывных движений интегральная теорема количества движения (2.2) эквивалентна дифференциальным уравнениям движения сплошной среды, которые мы установим ниже; из уравнения (2.2) следует также, что поверхно-

[1]) Более подробно этот вопрос освещен в книге Л. И. Седова «Методы подобия и размерности в механике», изд. 6-е, гл. I, § 5, стр. 19—25, Изд-во «Наука», 1967.

стные напряжения p_n для любых сред и любых движений должны удовлетворять некоторым универсальным соотношениям, к выводу которых мы и переходим.

Основное свойство внутренних напряжений

Итак, перейдем к выводу ограничений, которые накладывает уравнение количества движения (2.2) на возможный вид зависимости напряжений p_n от ориентации соответствующих площадок, взятых в данной точке, в случае непрерывных движений сплошной среды.

Возьмем мысленно объем V и разделим его произвольным сечением S на две части V_1 и V_2 (рис. 23). Применив уравнение количества движения (2.2) отдельно к V_1 и V_2 и ко всему объему V в целом и замечая, что взаимодействие разделенных частей может осуществляться с помощью массовых распределенных сил и посредством поверхностных сил, распределенных по сечению S, можем написать:

$$\int_{V_1} \frac{dv}{dt} \rho \, d\tau = \int_{V_1} F' \rho \, d\tau + \int_{\Sigma_1} p_n d\sigma + \int_S p_n d\sigma,$$

$$\int_{V_2} \frac{dv}{dt} \rho \, d\tau = \int_{V_2} F'' \rho \, d\tau + \int_{\Sigma_2} p_n d\sigma + \int_S p_{-n} d\sigma,$$

$$\int_V \frac{dv}{dt} \rho d\tau = \int_V F \rho \, d\tau + \int_\Sigma p_n d\sigma,$$

где через F' и F'' обозначены плотности массовых распределенных сил, действующих соответственно на объемы V_1 и V_2. После сложения двух первых равенств и вычитания из их суммы третьего при условии, что для внутренних массовых сил всегда выполняется закон равенства действия и противодействия, т. е.

$$\int_{V_1} F' \rho \, d\tau + \int_{V_2} F'' \rho \, d\tau = \int_V F \rho \, d\tau,$$

будем иметь

$$\int_S (p_n + p_{-n}) \, d\sigma = 0.$$

Отсюда в силу произвольности объемов V, V_1, V_2 и сечения S вытекает, что

$$p_n = - p_{-n}. \tag{2.3}$$

Отметим, что предположение о непрерывности движения существенно. Например, равенство (2.3), как будет показано ниже (см. гл. VII), не выполняется, если внутри V имеется поверхность разрыва скорости v, через которую переходят ча-

стицы материальной среды. В этом случае его надо заменить другим соотношением.

Уравнение количества движения (2.2) применимо к любому, в том числе и сколь угодно малому, материальному объему V. Выясним те ограничения, которые накладывает на подынтегральные функции, входящие в уравнение количества движения (2.2), применимость этого уравнения в написанной форме к *любому сколь угодно малому* индивидуальному объему сплошной среды. Для этого, предположив характеристики движения непрерывными и конечными, составим выражение

$$\Omega = \int_V F\rho\, d\tau + \int_\Sigma p_n d\sigma - \int_V \frac{dv}{dt}\rho\, d\tau,$$

которое для любого индивидуального объема V должно точно равняться нулю.

Очевидно, что при стягивании в точку объема V независимо от вида подынтегральных функций верно предельное равенство

$$\lim_{V\to 0} \Omega = 0.$$

Оно выполняется при любых конечных функциях, входящих в подынтегральные выражения Ω.

Возьмем теперь в данный момент времени произвольную точку M сплошной среды и проведем из нее направления, параллельные осям декартовой системы координат (рис. 25). Отложим на них произвольные бесконечно малые отрезки $dx = MA$, $dy = MC$ и $dz = MB$ и рассмотрим объем V в виде построенного таким путем бесконечно малого тетраэдра $MABC$. Его грани MBC, MAB, MAC перпендикулярны к соответствующим осям координат, а грань ABC ориентирована произвольно. Ее ориентация определяется единичным вектором нормали

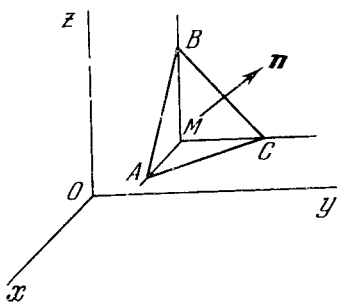


Рис. 25. К свойству внутренних напряжений.

$$\boldsymbol{n} = \cos(nx)\,\boldsymbol{i} + \cos(ny)\,\boldsymbol{j} + \cos(nz)\,\boldsymbol{k} = n_i \boldsymbol{e}^i.$$

Напряжения на площадках с нормалями $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{n}$ обозначим соответственно через $\boldsymbol{p}^1$, $\boldsymbol{p}^2$, $\boldsymbol{p}^3$ и $\boldsymbol{p}_n$, а площадь грани ABC — через S. Площади граней MBC, MAB, MAC при этом, очевидно, будут равны $S\cos(nx)$; $S\cos(ny)$, $S\cos(nz)$, а объем тетраэдра

$V = \frac{1}{3} hS$, где h — высота, опущенная из вершины M на грань ABC. Если тетраэдр будет стягиваться в точку, оставаясь подобным самому себе, то h будет бесконечно малой первого, а S — второго порядка.

Вычислим Ω для объема сплошной среды, находящегося в данный момент времени в объеме этого тетраэдра; воспользовавшись свойством внутренних напряжений (2.3), очевидно, получим

$$\Omega = -\left(\frac{dv}{dt}\rho\right)_M \cdot \frac{1}{3} Sh + (F\rho)_M \cdot \frac{1}{3} Sh + p_n S - p^1 S\cos(nx) - \\ - p^2 S\cos(ny) - p^3 S\cos(nz) + O(h^{2+\lambda}),$$

где $\lambda > 0$. Пусть теперь тетраэдр стягивается в точку, оставаясь подобным самому себе. Тогда, так как $\Omega = 0$ в силу (2.2), должны, в частности, выполняться предельные равенства

$$\lim_{V\to 0} \frac{\Omega}{h} = 0, \quad \lim_{V\to 0} \frac{\Omega}{h^2} = 0, \quad \lim_{V\to 0} \frac{\Omega}{h^3} = 0.$$

Первый предел в случае непрерывных и конечных характеристик движения, очевидно, всегда равен нулю, т. е. вновь не получается никаких ограничений на вид подынтегральных функций Ω. Из условия

$$\lim_{V\to 0} \frac{\Omega}{S} = 0$$

вытекает, что всегда должно выполняться равенство

$$p_n = p^1\cos(nx) + p^2\cos(ny) + p^3\cos(nz), \qquad (2.4)$$

которое показывает, что напряжение p_n на любой площадке $d\sigma$ взятой в точке M сплошной среды, всегда по формуле (2.4) выражается линейно через напряжения p^1, p^2, p^3 на взятых в той же точке M фиксированных площадках, параллельных координатным плоскостям прямоугольной декартовой системы координат.

Соотношение (2.4) показывает также, что сумму внешних поверхностных сил $\int\limits_\Sigma p_n d\sigma$, действующих на объем V сплошной среды, ограниченный поверхностью Σ, можно по формуле Гаусса — Остроградского преобразовать в интеграл, взятый по объему:

$$\int\limits_\Sigma p_n d\sigma = \int\limits_V \left(\frac{\partial p^1}{\partial x} + \frac{\partial p^2}{\partial y} + \frac{\partial p^3}{\partial z}\right) d\tau. \qquad (2.5)$$

Уравнения движения сплошной среды в декартовой системе координат

Рассмотрим, наконец, условие

$$\lim_{V\to 0}\frac{\Omega}{V}=0.$$

Используя (2.5), представим Ω в виде

$$\Omega=\int_V \boldsymbol{F}\rho\,d\tau+\int_V\left(\frac{\partial \boldsymbol{p}^1}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{p}^2}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{p}^3}{\partial z}\right)d\tau-\int_V\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\rho\,d\tau$$

и из условия

$$\lim_{V\to 0}\frac{\Omega}{V}=0$$

получим

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\rho\boldsymbol{F}+\frac{\partial \boldsymbol{p}^1}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{p}^2}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{p}^3}{\partial z}. \tag{2.6}$$

Это векторное уравнение является основным дифференциальным уравнением движения сплошной среды. Оно выполняется для любых непрерывных движений любых сред и в случае непрерывных движений полностью эквивалентно уравнению количества движения (2.2), так как из него следует, что $\Omega=0$ для любого объема V. Подчеркнем, что равенства (2.6) и (2.5) получены при допущении непрерывности и дифференцируемости векторов $\boldsymbol{p}^i$. Уравнение (2.2) постулируется для более общих случаев.

Разложим векторы $\boldsymbol{p}^1$, $\boldsymbol{p}^2$, $\boldsymbol{p}^3$ по векторам базиса $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{k}$ декартовой системы координат:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{p}^1&=p^{k1}\boldsymbol{e}_k,\\ \boldsymbol{p}^2&=p^{k2}\boldsymbol{e}_k,\\ \boldsymbol{p}^3&=p^{k3}\boldsymbol{e}_k,\end{aligned}\right\}\quad\text{или}\quad \boldsymbol{p}^i=p^{ki}\boldsymbol{e}_k, \tag{2.7}$$

и введем матрицу

$$\begin{Vmatrix}p^{11}&p^{12}&p^{13}\\ p^{21}&p^{22}&p^{23}\\ p^{31}&p^{32}&p^{33}\end{Vmatrix}=\|p^{ik}\|=P,$$

состоящую из девяти чисел. Согласно свойству напряжений (2.4) компоненты p_n^i напряжения

$$\boldsymbol{p}_n=p_n^1\boldsymbol{e}_1+p_n^2\boldsymbol{e}_2+p_n^3\boldsymbol{e}_3=p_n^i\boldsymbol{e}_i$$

на произвольно ориентированной площадке, взятой в данной

точке сплошной среды, представятся формулами

$$\left.\begin{aligned} p_n^1 &= p^{11}\cos(nx) + p^{12}\cos(ny) + p^{13}\cos(nz) = p^{1i}n_i,\\ p_n^2 &= p^{21}\cos(nx) + p^{22}\cos(ny) + p^{23}\cos(nz) = p^{2i}n_i,\\ p_n^3 &= p^{31}\cos(nx) + p^{32}\cos(ny) + p^{33}\cos(nz) = p^{3i}n_i. \end{aligned}\right\} \quad (2.8)$$

Таким образом, матрица P определяет преобразование от компонент n_i вектора $\boldsymbol{n} = n_i\boldsymbol{\vartheta}^i$ к компонентам p_n^i вектора $\boldsymbol{p}_n$.

Девять функций p^{ik} входят в векторное уравнение движения сплошной среды (2.6), которое в проекциях на оси декартовой системы координат записывается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \rho\frac{du}{dt} &= \rho F_x + \frac{\partial p^{11}}{\partial x} + \frac{\partial p^{12}}{\partial y} + \frac{\partial p^{13}}{\partial z},\\ \rho\frac{dv}{dt} &= \rho F_y + \frac{\partial p^{21}}{\partial x} + \frac{\partial p^{22}}{\partial y} + \frac{\partial p^{23}}{\partial z},\\ \rho\frac{dw}{dt} &= \rho F_z + \frac{\partial p^{31}}{\partial x} + \frac{\partial p^{32}}{\partial y} + \frac{\partial p^{33}}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \quad (2.9)$$

где через F_x, F_y, F_z обозначены проекции на оси координат плотности массовой силы $\boldsymbol{F}$.

Если к этим уравнениям движения добавить уравнение неразрывности (1.3), то мы получим систему четырех уравнений, в которой при заданных внешних массовых силах будет содержаться, вообще говоря, тринадцать неизвестных функций: плотность ρ, компоненты скорости u, v, w и девять компонент внутренних поверхностных напряжений p^{ik}.

Тензор напряжений

Зависимость (2.4) вектора напряжений $\boldsymbol{p}_n$ на произвольно ориентированной площадке от векторов напряжений $\boldsymbol{p}^1$, $\boldsymbol{p}^2$, $\boldsymbol{p}^3$ на координатных площадках может быть с помощью (2.8) записана в виде

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}^i n_i = p^{ki}\boldsymbol{\vartheta}_k n_i = \boldsymbol{p}^i(\boldsymbol{\vartheta}_i\cdot\boldsymbol{n}) = p^{ki}\boldsymbol{\vartheta}_k(\boldsymbol{\vartheta}_i\cdot\boldsymbol{n}). \quad (2.10)$$

Это равенство дает линейное (с коэффициентами p^{ki}) преобразование от компонент вектора $\boldsymbol{n}$ к компонентам вектора $\boldsymbol{p}_n$. Оно было получено с использованием ортогональной декартовой системы координат, и, следовательно, p^{ki} были определены в произвольных ортогональных декартовых системах координат. Равенство (2.10) является соотношением между векторами $\boldsymbol{p}_n$ и $\boldsymbol{n}$ и поэтому может быть написано в любой криволинейной системе координат. Отсюда следует, что не только в ортогональных декартовых осях, но и в произвольных криволинейных системах координат с помощью равенства (2.10) можно ввести величины p^{ki}, которые следует рассматривать как контравариантные

компоненты тензора

$$P = p^{ki}\mathfrak{d}_k\mathfrak{d}_i.$$

Этот тензор называется тензором внутренних напряжений. При этом в любой системе координат будет выполняться равенство

$$\boldsymbol{p}_n = P\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}^i n_i,$$

где $\boldsymbol{p}_n$ — напряжение на произвольной площадке с нормалью $\boldsymbol{n}$, а n_i — ковариантные компоненты $\boldsymbol{n}$.

Физические компоненты тензора напряжений

Заметим, что равенство $\boldsymbol{p}^i = \boldsymbol{p}_n$ на соответствующих координатных площадках выполняется, вообще говоря, только в случае ортогональной декартовой системы координат; легко убедиться, что в произвольной криволинейной системе координат $\boldsymbol{p}^i \neq \boldsymbol{p}_n$ на соответствующих площадках.

Действительно, для данной криволинейной системы координат рассмотрим площадку, определяемую векторами базиса $\mathfrak{d}_{i+1}$ и $\mathfrak{d}_{i+2}$ (индексы определены по модулю 3), положительное направление нормали к этой площадке определим как направление контравариантного вектора базиса

$$\mathfrak{d}^i = \frac{\mathfrak{d}_{i+1}\times\mathfrak{d}_{i+2}}{\sqrt{g}},$$

единичный вектор этого направления определится, очевидно, формулой

$$n^i = \frac{\mathfrak{d}_i}{\sqrt{g^{ii}}},$$

где $g^{ii} > 0$, а квадратный корень здесь и дальше берется с положительным знаком. Согласно (2.10) вектор напряжения $\boldsymbol{p}_n$ на такой площадке, который мы обозначим через $\boldsymbol{p}_i^*$, представится в виде

$$\boldsymbol{p}_i^* = \frac{p^{\alpha k}\mathfrak{d}_\alpha\,(\mathfrak{d}_k\cdot\mathfrak{d}^i)}{\sqrt{g^{ii}}} = \frac{p^{\alpha i}\mathfrak{d}_\alpha}{\sqrt{g^{ii}}},$$

и, следовательно, вообще не равен вектору $\boldsymbol{p}^i = p^{\alpha i}\,\mathfrak{d}_\alpha$. Вектор напряжения $\boldsymbol{p}_i^*$ можно разложить по единичным векторам базиса $\mathfrak{d}_\alpha$, взятым в рассматриваемой точке:

$$\boldsymbol{p}_i^* = X^{\alpha i}\,\frac{\mathfrak{d}_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}.$$

Величины $X^{\alpha i}$ называются физическими компонентами вектора напряжения $\boldsymbol{p}_i^*$. На основании двух последних равенств можно написать, что

$$p^{\alpha i} = X^{\alpha i}\sqrt{\frac{g^{ii}}{g_{\alpha\alpha}}}$$

(суммирование по α в этой формуле отсутствует). Отсюда ясно, что физические компоненты $X^{\alpha i}$ не являются компонентами какого-либо тензора.

В декартовой ортогональной системе координат $p^{\alpha i} = X^{\alpha i}$.

Уравнения движения сплошной среды в произвольной системе координат

Из векторного уравнения количества движения (2.2)

$$\int\limits_V \rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\,d\tau = \int\limits_V \boldsymbol{F}\rho\,d\tau + \int\limits_\Sigma \boldsymbol{p}_n d\sigma$$

и из теоремы Гаусса — Остроградского

$$\int\limits_\Sigma \boldsymbol{p}_n d\sigma = \int\limits_\Sigma \boldsymbol{p}^i n_i d\sigma = \int\limits_V \nabla_i \boldsymbol{p}^i d\tau$$

получим, что в случае непрерывных движений выполняются следующие уравнения движения:

$$\rho\boldsymbol{a} = \rho\boldsymbol{F} + \nabla_i \boldsymbol{p}^i \quad \text{или} \quad \rho a^k = \rho F^k + \nabla_i p^{ki}, \tag{2.11}$$

справедливые в любой криволинейной системе координат.

В уравнениях движения (2.11)

$$a^k = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^i\nabla_i v^k = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^i\left(\frac{\partial v^k}{\partial \eta^i} + v^s\Gamma^k_{si}\right)$$

и

$$\nabla_i \boldsymbol{p}^i = \frac{\partial \boldsymbol{p}^i}{\partial \eta^i} + \boldsymbol{p}^s\Gamma^i_{si} = \nabla_i p^{ki}\boldsymbol{e}_k.$$

Векторное уравнение (2.11) верно как в подвижной, так и в неподвижной системе координат, в частности, как в системе отсчета, так и в сопутствующей системе. Однако нужно иметь в виду, что вектор $\boldsymbol{a}$ является ускорением индивидуальных точек среды относительно какой-либо инерциальной системы координат, а $\boldsymbol{F}$ является плотностью заданных массовых сил. Если же движение и ускорение рассматривать относительно неинерциальной системы координат, то в выражение для $\boldsymbol{F}$ нужно включать силы инерции.

Выделим в сплошной среде бесконечно малую частицу с массой $\rho\,d\tau$, на нее будут действовать массовые силы $\rho\boldsymbol{F}\,d\tau$, силы

$-\rho \boldsymbol{a}\, d\tau$, которые в сопутствующей системе координат являются силами инерции; силы $\nabla_i \boldsymbol{p}^i\, d\tau = \nabla_i p^{ki} \boldsymbol{e}_k\, d\tau$, которые можно рассматривать как массовые силы, возникающие за счет действия поверхностных сил на границе частицы. Уравнение (2.11) можно рассматривать как условие равновесия относительно сопутствующей системы координат; согласно (2.11) сумма всех сил, действующих на частицу, равна нулю.

Заметим, что если тензор $P = p^{ki}\, \boldsymbol{e}_k\, \boldsymbol{e}_i$ постоянен во всех точках среды, то $\nabla_i \boldsymbol{p}^i = 0$. В декартовой системе координат компоненты тензора напряжений p^{ki} входят в уравнение движения только тогда, когда они зависят от координат x, y, z. Вместе с тем равенство

$$\nabla_i \boldsymbol{p}^i = 0 \text{ или } \nabla_i p^{ki} = 0$$

и равенство $P = p^{ki} \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_i = \text{const}$ не эквивалентны. Например, если среда, на которую не действуют массовые силы, покоится, то

$$\nabla_i p^{ki} = 0.$$

Это уравнение является основным уравнением теории упругости, где часто рассматривают задачи о равновесии различных объектов, нагруженных только внешними поверхностными силами.

§ 3. Уравнения моментов количества движения

Как указывалось выше, полученная система универсальных уравнений движения сплошной среды еще не является замкнутой. Можно получить еще другие универсальные уравнения, не зависящие от частных свойств движущейся среды. С этой целью рассмотрим другое общее уравнение механики — уравнение моментов количества движения.

Уравнение моментов количества движения для материальной точки системы точек

Умножив уравнение

$$m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mathsf{F}$$

векторно слева на радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ рассматриваемой материальной точки массы m относительно точки O — начала некоторой инерциальной системы координат, получим уравнение моментов количества движения для точки:

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \mathfrak{M}, \tag{3.1}$$

где

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} \text{ и } \mathfrak{M} = \boldsymbol{r} \times \mathsf{F}$$

— момент количества движения материальной точки и момент действующих на нее сил F относительно точки O соответственно. Уравнение моментов количества движения для одной материальной точки является, таким образом, тривиальным следствием второго закона Ньютона.

Если мы имеем систему n материальных точек массы m_i, движущихся со скоростями $\boldsymbol{v}_i$, то для каждой из них можно написать уравнение моментов количества движения (3.1):

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{r}_i \times \mathsf{F}_i,$$

где F_i — главный вектор всех, в том числе и внутренних по отношению ко всей системе, сил, действующих на рассматриваемую точку m_i. Сложив эти равенства для всех n точек системы и определив момент количества движения системы как

$$\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i),$$

очевидно, получим уравнение моментов количества движения для системы точек:

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i \times \mathsf{F}_i^{(e)},$$

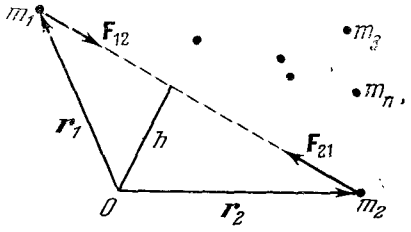


Рис. 26. Сумма моментов всех внутренних сил относительно точки O равна нулю.

где справа в силу третьего закона Ньютона (см. рис. 26) будет стоять сумма моментов, только внешних для всей системы сил. Производная по времени от момента количества движения системы точек относительно некоторой точки O равняется сумме моментов всех внешних действующих на систему сил относительно той же точки O.

Отметим, что момент количества движения системы материальных точек можно записать в виде

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{r}^* \times m\boldsymbol{v}^* + \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_{i\,\text{отн}} \times m_i\boldsymbol{v}_{i\,\text{отн}}),$$

где $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$, $\boldsymbol{r}^*$ — радиус-вектор центра масс системы, $\boldsymbol{v}^*$ — скорость центра масс, $\boldsymbol{r}_{i\text{отн}}$ — радиус-вектор i-й точки относительно центра масс, $\boldsymbol{v}_{i\text{отн}}$ — скорость i-й точ-

ки относительно системы координат, движущейся поступательно вместе с центром масс.

Момент количества движения конечного объема сплошной среды; собственные моменты количества движения

Моментом количества движения объема V сплошной среды обычно называют

$$\boldsymbol{K} = \int_V (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})\,\rho\,d\tau, \qquad (3.2)$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиусы-векторы точек сплошной среды относительно некоторой неподвижной точки O, а $\boldsymbol{v}$ — их скорости. Рассмотрим, однако, этот вопрос подробнее.

Пусть мы имеем некоторый объем τ сплошной среды с массой m. Ясно, что скорость $\boldsymbol{v}$ произвольной точки M этого объема можно представить (рис. 27) в виде суммы

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{v}_{\text{отн}},$$

где $\boldsymbol{v}^*$ — скорость центра масс O^* объема τ, а $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ — скорость рассматриваемой точки относительно центра масс. Тогда, очевидно, момент количества движения объема τ относительно некоторой точки O будет равен сумме момента количества движения материальной точки массы m, совпадающей с центром масс объема, относительно точки O и моментов количества движения всех точек M объема τ относительно центра масс O^*, т. е.

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{Q} + \int_\tau (\boldsymbol{r}_{\text{отн}} \times \boldsymbol{v}_{\text{отн}})\,\rho\,d\tau,$$

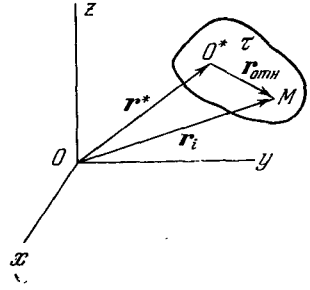


Рис. 27. К уравнению моментов количества движения для конечного объема сплошной среды.

где $\boldsymbol{Q} = m\boldsymbol{v}^*$ — количество движения материальной точки массы m, совпадающей с центром масс, или

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}^*; \quad \boldsymbol{K}^* = \int_\tau (\boldsymbol{r}_{\text{отн}} \times \boldsymbol{v}_{\text{отн}})\,\rho d\tau.$$

Рассмотрим теперь бесконечно малый объем $d\tau$. Во многих случаях для бесконечно малого объема моментом количества движения $\boldsymbol{K}^*$ можно пренебречь по сравнению с $\boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{Q}$. Возьмем, например, $d\tau$ в виде бесконечно малой однородной сферы радиуса R, вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси, проходящей через ее центр O^*; тогда

$$\boldsymbol{K}^* = I\boldsymbol{\omega} = ml^2\boldsymbol{\omega}$$

где I — момент инерции, а l — радиус инерции этой сферы относительно ее оси вращения. Очевидно, ml^2 имеет порядок R^5, а $\boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{Q}$ — порядок R^3, и $\boldsymbol{K}^*$, если только $\boldsymbol{\omega}$ конечна, мал по сравнению с $\boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{Q}$, момент количества движения объема V сплошной среды $\boldsymbol{K}$ в пределе равен

$$\int_V (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) \rho \, d\tau.$$

Однако если угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ настолько велика, что ωl^2 конечно, то $\boldsymbol{K}^*$ и $\boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{Q}$ имеют одинаковый порядок R^3 и момент количества движения объема V сплошной среды должен быть равен

$$\boldsymbol{K} = \int_V (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) \rho \, d\tau + \int_V \boldsymbol{k} \rho \, d\tau, \tag{3.3}$$

где через $\boldsymbol{k}$ обозначена плотность так называемых собственных или внутренних моментов количества движения.

Посмотрим на изучаемый вопрос с физической микроскопической точки зрения.

Рассмотрим систему, состоящую из ядра и вращающегося вокруг него электрона, т. е. атом. Электрон вращается по орбите со скоростью порядка скорости света, и поэтому, несмотря на малый размер атома, система ядро — электрон обладает значительным собственным моментом количества движения. Момент количества движения, происходящий за счет вращения электрона по орбите, называется орбитальным моментом количества движения.

Кроме того, электрон, а также ядро обладают собственным моментом количества движения — спином, наличие которого нельзя объяснить с помощью введения соответствующего механического движения.

Таким образом, все атомы, вообще говоря, обладают собственными моментами количества движения $\boldsymbol{k}$. Но сумма этих моментов количества движения $\boldsymbol{k}$ для всех атомов в силу хаотичности движения во многих случаях равна нулю. Однако движение элементарных частиц можно упорядочить, наложив, например, магнитное поле, и тогда сумма внутренних моментов всех атомов будет отличной от нуля. В этом случае в выражение для момента количества движения макроскопической частицы сплошной среды должна, вообще, входить сумма собственных моментов количества движения

$$\boldsymbol{K}' = \int_V \boldsymbol{k} \rho \, d\tau.$$

Таким образом, если, например, мы хотим в механике сплошной среды описывать движения реальных сред в электромагнитных полях, то мы должны вводить в рассмотрение собственные моменты k и определять момент количества движения объема V сплошной среды с учетом этих моментов по (3.3).

Собственные моменты количества движения стали рассматриваться в механике сплошной среды только в последнее время, когда круг задач механики сплошной среды в связи с запросами современной техники сильно расширился. В классических вопросах механики сплошной среды внутренние моменты k не учитываются и момент количества движения объема V сплошной среды определяется как

$$\int_V (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) \rho \, d\tau.$$

Распределенные массовые и поверхностные пары

Введя в рассмотрение внутренние моменты k, мы должны допустить существование распределенных массовых и поверхностных пар.

На каждую частицу сплошной среды действуют распределенные массовые и поверхностные силы. Но может случиться так, что действие внешних материальных объектов на частицу сплошной среды нельзя заменить только этими силами, а потребуется вводить также массовые и поверхностные пары.

Обозначим через h и Q_n отнесенные к единице массы и поверхности моменты соответственно массовых и поверхностных пар. Примером распределенных массовых пар могут служить пары, действующие на каждый элемент стрелки компаса, помещенной в магнитное поле Земли.

Уравнение моментов количества движения для конечного объема сплошной среды

Сформулируем теперь как обобщение уравнений моментов количества движения для одной материальной точки и для системы точек уравнение моментов количества движения для конечного индивидуального объема V сплошной среды, ограниченного поверхностью Σ:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_V (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) \rho \, d\tau + \int_V \boldsymbol{k} \rho \, d\tau\right] = \int_V (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}) \rho \, d\tau + \int_\Sigma (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_n) \, d\sigma + \int_V \boldsymbol{h} \rho \, d\tau + \int_\Sigma \boldsymbol{Q}_n \, d\sigma. \quad (3.4)$$

Производная по времени от момента количества движения произвольного индивидуального объема V сплошной среды (с учетом собственных моментов) равна сумме моментов внешних массовых и поверхностных сил, действующих на этот объем, и

сумме моментов действующих на этот объем распределенных массовых и поверхностных пар, вызванных внешними по отношению к объему материальными объектами.

Уравнение моментов количества движения, как и уравнение количества движения, постулируется для индивидуального объема V сплошной среды подобно тому, как для одной материальной точки постулируется закон Ньютона $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Подчеркнем, что уравнение моментов количества движения для индивидуального объема V сплошной среды не вытекает из уравнения моментов количества движения механики системы материальных точек, а является самостоятельным уравнением. Все предшествующие его формулировке рассуждения следует рассматривать только как наводящие, эвристические соображения.

Уравнение (3.4) для любых конечных индивидуальных мысленно выделенных объемов принимается наряду с уравнением количества движения в качестве базисного векторного уравнения механики сплошной среды. Это уравнение применяется для любых сплошных сред и для любых движений как непрерывных, так и с наличием характеристик, разрывных по координатам точек пространства и по времени.

Заметим, что в настоящее время приходится вводить в рассмотрение другие моменты более высокого порядка и формулировать другие новые основные соотношения механики сплошной среды, аналогичные уравнению моментов количества движения (3.4) первого порядка.

Уравнение моментов количества движения в классическом случае

В классическом случае при отсутствии внутренних моментов количества движения и распределенных массовых и поверхностных пар уравнение моментов количества движения имеет вид

$$\frac{d}{dt}\int_V (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\,\rho\,d\tau = \int_V (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F})\,\rho\,d\tau + \int_\Sigma (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_n)\,d\sigma. \quad (3.5)$$

Производная по времени от момента количества движения индивидуального объема V сплошной среды относительно некоторой точки O (связанной с инерциальной системой координат) равняется сумме моментов внешних массовых и поверхностных сил, действующих на этот объем, относительно той же точки O.

Если на тело внешние силы не действуют, то, очевидно,

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = 0$$

и момент количества движения $\boldsymbol{K}$ постоянен.

Гирома
уравне
чества

§ 3. Ура

ый эффект
оментов ко
кения

Е
на
ме
эт
в
из
ре
по
дв

в магнит
агнитится,
тов k в н
стержен
устоте и
за хаоти
нних мом
рядочны
вижения

ние
хра
дви
дол

При эт
ие объек
хранитьс
движения
должен

сте
объ
расп

Опыт
стержен
Это
объясн
распре

Уравнение
чества дв
ференциаль

внеш
того

внеш
того

Мо
p_n, м
предст

Тогда

сумме моментов действующих на этот объем распределенных массовых и поверхностных пар, вызванных внешними по отношению к объему материальными объектами.

Уравнение моментов количества движения, как и уравнение количества движения, постулируется для индивидуального объема V сплошной среды подобно тому, как для одной материальной точки постулируется закон Ньютона $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Подчеркнем, что уравнение моментов количества движения для индивидуального объема V сплошной среды не вытекает из уравнения моментов количества движения механики системы материальных точек, а является самостоятельным уравнением. Все предшествующие его формулировке рассуждения следует рассматривать только как наводящие, эвристические соображения.

Уравнение (3.4) для любых конечных индивидуальных мысленно выделенных объемов принимается наряду с уравнением количества движения в качестве базисного векторного уравнения механики сплошной среды. Это уравнение применяется для любых сплошных сред и для любых движений как непрерывных, так и с наличием характеристик, разрывных по координатам точек пространства и по времени.

Заметим, что в настоящее время приходится вводить в рассмотрение другие моменты более высокого порядка и формулировать другие новые основные соотношения механики сплошной среды, аналогичные уравнению моментов количества движения (3.4) первого порядка.

Уравнение моментов количества движения в классическом случае

В классическом случае при отсутствии внутренних моментов количества движения и распределенных массовых и поверхностных пар уравнение моментов количества движения имеет вид

$$\frac{d}{dt}\int_V (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\,\rho\,d\tau = \int_V (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F})\,\rho\,d\tau + \int_\Sigma (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_n)\,d\sigma. \qquad (3.5)$$

Производная по времени от момента количества движения индивидуального объема V сплошной среды относительно некоторой точки O (связанной с инерциальной системой координат) равняется сумме моментов внешних массовых и поверхностных сил, действующих на этот объем, относительно той же точки O.

Если на тело внешние силы не действуют, то, очевидно,

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = 0$$

и момент количества движения $\boldsymbol{K}$ постоянен.

Гиромагнитный эффект и уравнение моментов количества движения

Рассмотрим опыт, который указывает на то, что внутренние моменты количества движения и распределенные массовые пары, вообще говоря, нужно учитывать. Если в магнитное поле поместить железный стержень, то он намагнитится, и можно показать, что сумма внутренних моментов $\boldsymbol{k}$ в нем станет отличной от нуля. В самом деле, пусть этот стержень свободно подвешен при наличии магнитного поля в пустоте и находится в покое. Снимем магнитное поле. Тогда из-за хаотического теплового движения распределение внутренних моментов $\boldsymbol{k}$ в стержне через некоторое время станет беспорядочным, и поэтому сумма внутренних моментов количества движения обратится в нуль.

При этом, так как на стержень не действуют никакие внешние объекты, полный момент количества движения должен сохраниться. Поэтому должен возникнуть момент количества движения за счет вращения стержня как целого, и стержень должен начать вращаться.

Опыт показывает, что после снятия магнитного поля такой стержень действительно начинает вращаться.

Это так называемый гиромагнитный эффект. Его нельзя объяснить без учета внутренних моментов количества движения и распределенных массовых пар.

Уравнение моментов количества движения в дифференциальной форме

В случае непрерывных движений сплошной среды можно воспользоваться равенством (2.4) и теоремой Гаусса — Остроградского и получить для суммы моментов внешних поверхностных сил выражение в виде интеграла, взятого по объему V:

$$\int_{\Sigma}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_n)\,d\sigma=\int_{\Sigma}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}^i)\,n_i\,d\sigma=\int_{V}\nabla_i(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}^i)\,d\tau.$$

Можно показать, что, аналогично внутренним напряжениям $\boldsymbol{p}_n$, моменты распределенных поверхностных пар $\boldsymbol{Q}_n$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{Q}_n=\boldsymbol{Q}^i n_i.$$

Тогда с помощью теоремы Гаусса — Остроградского получим

$$\int_{\Sigma}\boldsymbol{Q}_n\,d\sigma=\int_{\Sigma}\boldsymbol{Q}^i n_i\,d\sigma=\int_{V}\nabla_i\boldsymbol{Q}^i\,d\tau.$$

Воспользуемся еще преобразованием

$$\int_V \nabla_i (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}^i)\, d\tau = \int_V (\boldsymbol{r} \times \nabla_i \boldsymbol{p}^i)\, d\tau + \int_V (\nabla_i \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}^i)\, d\tau =$$
$$= \int_V (\boldsymbol{r} \times \nabla_i \boldsymbol{p}^i)\, d\tau + \int_V (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_k)\, p^{ki}\, d\tau,$$

так как $\nabla_i \boldsymbol{r} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} = \boldsymbol{e}_i$.

Теперь при условии, что масса $dm = \rho\, d\tau$ постоянна, теорему моментов количества движения (3.4) можно записать в виде

$$\int_V \left[\boldsymbol{r} \times \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho} \nabla_i \boldsymbol{p}^i\right)\right] \rho\, d\tau + \int_V \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} \rho\, d\tau =$$
$$= \int_V \boldsymbol{h} \rho\, d\tau + \int_V \nabla_i \boldsymbol{Q}^i\, d\tau + \int_V (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_k)\, p^{ki}\, d\tau$$

или, в силу уравнения количества движения (2.11), в виде

$$\int_V \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} \rho\, d\tau = \int_V \boldsymbol{h} \rho\, d\tau + \int_V \nabla_i \boldsymbol{Q}^i\, d\tau + \int_V (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_k)\, p^{ki}\, d\tau.$$

Отсюда, так как объем V сплошной среды произволен, получим уравнение моментов количества движения в случае непрерывных движений сплошной среды в дифференциальной форме:

$$\rho \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \rho \boldsymbol{h} + \nabla_i \boldsymbol{Q}^i + (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_k)\, p^{ki}. \tag{3.6}$$

В классическом случае, при отсутствии внутренних моментов и массовых и поверхностных распределенных пар, уравнение моментов количества движения (3.6) приобретает вид

$$(\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_k)\, p^{ki} = 0. \tag{3.7}$$

Симметрия тензора напряжений в классическом случае

Уравнение моментов (3.7), очевидно, можно записать еще следующим образом:

$$\sum_{k<i} (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_k)\, p^{ki} + \sum_{k>i} (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_k)\, p^{ki} = 0.$$

В последней сумме заменим индексы суммирования k на i, а i на k и получим

$$\sum_{k<i} (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_k)\, p^{ki} + \sum_{k<i} (\boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{e}_i)\, p^{ik} = 0$$

или, по свойству векторных произведений,

$$\sum_{k<i} (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_k)\, (p^{ki} - p^{ik}) = 0.$$

Отсюда вытекает, что $p^{ki} = p^{ik}$ при $k \neq i$, т. е.

$$p^{13} = p^{31}, \quad p^{12} = p^{21}, \quad p^{23} = p^{32}.$$

Таким образом, уравнение моментов в классическом случае сводится к следствию — тензор напряжений симметричен. Очевидно, что уравнение моментов количества движения (3.7) удовлетворяется тождественно, если тензор напряжений симметричен. Подчеркнем, что симметрия тензора напряжений вытекает из уравнения моментов количества движения, вообще говоря, только в случае отсутствия внутренних моментов количества движения и внешних массовых и поверхностных пар взаимодействия.

Напомним, что ранее мы получили четыре универсальных уравнения, описывающих движение сплошной среды. Теперь к ним добавились три уравнения моментов количества движения. В классическом случае эти три дополнительных уравнения не содержат новых неизвестных, а просто уменьшают число независимых компонент тензора напряжений до шести.

Однако полученная система уравнений движения все еще незамкнута. В дальнейшем мы увидим, что для компонент тензора напряжений p^{ik} в ряде случаев можно написать дополнительные формулы, связанные с физическими особенностями конкретных моделей сплошных сред, и после этого значительно продвинуться на пути получения замкнутой системы уравнений.

Сделаем еще следующее общее замечание по поводу понятий векторов количества движения $\boldsymbol{Q}$ и момента количества движения $\boldsymbol{K}$. В ньютонианской механике векторы $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}$ можно рассматривать как инвариантные объекты, так как эти величины и соответствующие уравнения сохраняются при переходе от одной системы координат к любой другой декартовой или криволинейной системе, неподвижной относительно первоначальной. Однако эти «инвариантные» объекты существенным образом связаны с выбором системы отсчета наблюдателя. При переходе от одной системы отсчета к другой, подвижной относительно первоначальной, эти векторы изменяются, даже если этот переход происходит от одной инерциальной системы к другой, также инерциальной.

В общем случае при переходе к произвольной подвижной (неинерциальной) системе координат соответствующие уравнения (уравнения количества движения и момента количества движения) изменяются за счет появления в правых частях добавочных внешних сил инерции.

Подчеркнем, что хотя векторы $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}$ в указанном выше смысле инвариантны, однако они не могут быть определены незави-

симо от выбора системы отсчета в классе систем, движущихся друг относительно друга [1]). Если рассматривать все процессы для среды в сопутствующей системе координат, то в этой системе количество движения всегда равно нулю.

§ 4. Главные оси и главные компоненты симметричного тензора напряжений

Тензорная поверхность тензора напряжений

Построим тензорную поверхность тензора напряжений. Выберем любую точку O среды и рассмотрим проходящие через нее площадки $d\sigma$, характеризуемые разными нормалями $\boldsymbol{n}$. На каждой из этих площадок действует поверхностная сила плотности $\boldsymbol{p}_n$, которую иногда называют напряжением. Спроектировав напряжение $\boldsymbol{p}_n$ на соответствующую нормаль $\boldsymbol{n}$, получим

$$p_{nn} = \boldsymbol{p}_n \cdot \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{p}^i \cdot \boldsymbol{n})\, n_i = p^{ki} n_k n_i.$$

Будем пользоваться для простоты декартовой системой координат, в которой, как известно, расположение индексов несущественно. Введем векторы $\boldsymbol{r} = x_i \boldsymbol{e}^i$, выходящие из точки O и направленные по $\boldsymbol{n}$; тогда, очевидно, $n_i = \cos(nx_i) = x_i/r$. Выберем длину векторов $\boldsymbol{r}$ так, чтобы

$$p_{nn} r^2 = p^{ki} x_k x_i = 2\Phi(x, y, z) = \text{const},$$

где $2\Phi(x, y, z)$ — квадратичная форма, соответствующая симметричному тензору напряжений P. Геометрическое место точек, для которых

$$p^{ki} x_k x_i = 2\Phi(x, y, z) = \text{const},$$

образует поверхность второго порядка, которая является тензорной поверхностью тензора напряжений. Основное свойство внутренних напряжений (2.4) можно записать в виде

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}^i n_i = \boldsymbol{p}^i \frac{x_i}{r}$$

или, в проекциях на оси x_k декартовой системы координат в виде

$$r p_n^k = p^{ki} x_i.$$

[1]) Это обстоятельство (зависимость уравнений и глобальных характеристик Q и K от выбора системы отсчета) проявляется особенно парадоксально в общей теории относительности — с одной стороны, в связи с осложнением вопроса о суммировании трехмерных векторов, заданных в различных точках риманова пространства, и, с другой стороны, в связи с тем, что нельзя, вообще говоря, выделить физически какие-либо преимущественные системы отсчета.

Непосредственной проверкой можно установить, что

$$p^{ki}x_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}$$

и, следовательно,

$$rp_n^k = \frac{\partial \Phi}{\partial x_k},$$

т. е.

$$r\boldsymbol{p}_n = \operatorname{grad}\Phi.$$

Поэтому, зная тензорную поверхность $\Phi = \text{const}$, можно геометрически следующим образом найти направление напряжения $\boldsymbol{p}_n$, действующего на площадке $d\sigma$ с нормалью $\boldsymbol{r}$. Из точки O перпендикулярно к заданной площадке проводится вектор $\boldsymbol{r}$ (рис. 28). В точке пересечения $\boldsymbol{r}$ с поверхностью $\Phi = \text{const}$ проводится касательная плоскость σ к тензорной поверхности; очевидно, что вектор $\boldsymbol{p}_n$ перпендикулярен касательной плоскости σ.

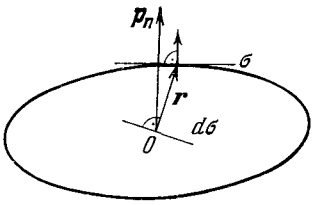


Рис. 28. Тензорная поверхность тензора напряжений.

Главные оси симметричного тензора напряжений

Как известно, поверхности второго порядка имеют по крайней мере три направления $\boldsymbol{r}$, для которых касательные плоскости σ перпендикулярны к $\boldsymbol{r}$. Такие направления называются главными направлениями, и для них, очевидно, $\boldsymbol{p}_n$ ортогонально $d\sigma$. В общем случае таких направлений только три. Они образуют ортогональный триэдр и называются главными осями тензора напряжений. Если тензорная поверхность $\Phi = \text{const}$ — поверхность вращения, например сфера, то таких направлений бесконечно много.

Для площадок, ортогональных главным направлениям, $\boldsymbol{p}_n$ коллинеарно $\boldsymbol{n}$, и, следовательно, должны выполняться равенства

$$\boldsymbol{p}_n = p^{ki}n_i\boldsymbol{\vartheta}_k = \lambda\boldsymbol{n} = \lambda n_i\boldsymbol{\vartheta}^i \tag{4.1}$$

или

$$p_k^i n_i \boldsymbol{\vartheta}^k = \lambda\delta_k^i n_i \boldsymbol{\vartheta}^k,$$

откуда

$$(p_k^i - \lambda\delta_k^i)\, n_i\boldsymbol{\vartheta}^k = 0,$$

или

$$(p_k^i - \lambda\delta_k^i)\, n_i = 0. \tag{4.2}$$

Мы получили однородную систему трех алгебраических уравнений для определения направляющих косинусов трех главных направлений n_i. Эта система будет иметь нетривиальное решение только при условии

$$\Delta = \operatorname{Det} \| p_k^i - \lambda \delta_k^i \| = | p_k^i - \lambda \delta_k^i | = 0,$$

$$\begin{vmatrix} p_1^1 - \lambda & p_1^2 & p_1^3 \\ p_2^1 & p_2^2 - \lambda & p_2^3 \\ p_3^1 & p_3^2 & p_3^3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4.3}$$

или, в развернутом виде,

$$-\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0, \tag{4.4}$$

где $p_\alpha^\alpha = I_1$,

$$\begin{vmatrix} p_2^2 & p_2^3 \\ p_3^2 & p_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_3^3 & p_3^1 \\ p_1^3 & p_1^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1^1 & p_1^2 \\ p_2^1 & p_2^2 \end{vmatrix} = I_2,$$

$$\operatorname{Det} \| p_k^i \| = I_3.$$

Мы получили вековое уравнение. Как известно, если тензор p^{ij} симметричный, то это уравнение имеет три действительных корня. Корни λ_1, λ_2, λ_3 этого уравнения, по (4.1), определяют напряжения на площадках, ортогональных главным направлениям (главных площадках):

$$\lambda_1 = p_{n1} = p_1; \quad \lambda_2 = p_{n2} = p_2; \quad \lambda_3 = p_{n3} = p_3,$$

и называются главными компонентами тензора напряжений.

Зная p_1, p_2, p_3, из системы уравнений (4.2) найдем компоненты n_i векторов $\boldsymbol{n}$, определяющих главные направления (при этом надо использовать также условия ортогональности и условия $\boldsymbol{n}^2 = 1$). Очевидно, что формула (4.1), уравнения (4.2) и (4.3) верны в любой криволинейной системе координат.

Уравнение тензорной поверхности $2\Phi = \text{const}$ приводится в главных осях x, y, z к каноническому виду:

$$2\Phi = p_1 x^2 + p_2 y^2 + p_3 z^2 = \text{const}.$$

Для компонент тензора напряжений в главных осях имеем

$$p^{ii} = p_i^i = p_{ii} = \lambda_i = p_i$$

и

$$p^{ki} = p_k^i = p_{ki} = 0 \quad \text{при } k \neq i.$$

На площадках, перпендикулярных к главным осям напряжений, отличны от нуля только нормальные составляющие на-

пряжений, а касательные составляющие напряжений равны нулю.

Если $p_1 = p_2 = p_3$, то тензорная поверхность тензора напряжений — сфера.

Мы ввели в рассмотрение главные оси тензора деформаций, тензора напряжений и тензора скоростей деформаций. В общем случае все эти оси разные. Условия их совпадения связаны, как мы увидим в дальнейшем, с сильными физическими допущениями относительно свойств рассматриваемых сред.

Если $p_1 \neq 0$, а $p_2 = p_3 = 0$, то в данной точке сплошной среды мы имеем чистое растяжение вдоль оси x_1, если $p_1 > 0$, и чистое сжатие, если $p_1 < 0$.

Таким образом, любое напряженное состояние в данной точке сплошной среды можно рассматривать как совокупность трех чистых растяжений или сжатий вдоль главных осей тензора напряжений.

Коэффициенты векового уравнения (4.4) являются инвариантами тензора напряжений. Они, очевидно, выражаются через корни векового уравнения по формулам

$$I_1 = p_1 + p_2 + p_3,$$
$$I_2 = p_2p_3 + p_1p_2 + p_1p_3,$$
$$I_3 = p_1p_2p_3.$$

ГЛАВА IV

ЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ МЕХАНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПРОСТЕЙШИХ МОДЕЛЕЙ СПЛОШНЫХ СРЕД. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

§ 1. Идеальные жидкость и газ

Дифференциальные уравнения неразрывности, движения и моментов количества движения выполняются при любых непрерывных движениях всех сплошных сред. Однако различные реальные среды при одних и тех же внешних условиях ведут себя по-разному.

Следовательно, одних этих уравнений, даже с добавлением соответствующих граничных условий, недостаточно для описания движения конкретной сплошной среды. Этот факт проявляется в том, что число уравнений меньше числа входящих в них неизвестных, система незамкнута.

Построение замкнутой системы уравнений, описывающих движение конкретной сплошной среды, связано с поисками дополнительных соотношений между параметрами данной сплошной среды. Построить замкнутую систему уравнений — это значит построить математическую модель изучаемой среды.

Построение новых моделей сплошных сред — важный раздел механики. Он носит название реологии. Построение новых моделей связано с экспериментальным изучением свойств материала. При этом всегда необходимо использовать также известные общие принципы механики и физики, например термодинамические соотношения. Полезным оказывается использование вариационных принципов.

В этой главе мы рассмотрим некоторые простейшие классические модели сплошных сред. При этом мы ограничимся только теми случаями, когда свойства сред и изучаемые классы процессов таковы, что для описания механического движения не нужно определять термодинамические свойства сред, система механических уравнений оказывается замкнутой без привлечения термодинамических уравнений.

В общем случае при рассмотрении всевозможных процессов в таких средах приходится также обращаться к соотношениям термодинамики.

Начнем с изучения моделей идеальных жидкости и газа.

Определение идеальной жидкости

Назовем идеальной жидкостью или идеальным газом такую среду, в которой вектор напряжения $\boldsymbol{p}_n$ на любой площадке с нормалью $\boldsymbol{n}$ ортогонален площадке, т. е. $\boldsymbol{p}_n \| \boldsymbol{n}$.

Экспериментальные данные и общие физические соображения показывают, что любая среда при очень больших температурах и давлениях практически обладает таким свойством.

Тензор напряжений в идеальной жидкости шаровой

Тензорная поверхность в этом случае будет, очевидно, сферой, и, следовательно, $p_1 = p_2 = p_3$, т. е. главные компоненты тензора напряжений одинаковы. Обозначим их через $-p$ и назовем p давлением. Выбор знака диктуется желанием ввести давление как положительную величину, так как опыт показывает, что среды, для которых годится модель идеальной жидкости, в типичных случаях находятся в сжатом состоянии при $p > 0$.

Любые три взаимно ортогональных направления для такой среды являются главными направлениями, и поэтому в любой декартовой системе координат матрица компонент тензора напряжений имеет вид

$$\begin{Vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{Vmatrix}.$$

В частности, для смешанных компонент p^i_k можно написать

$$p^i_k = -p\delta^i_k. \tag{1.1}$$

Компоненты δ^i_k тензора $\delta^i_k \boldsymbol{e}\, \boldsymbol{e}_i$ при преобразовании координат, очевидно, не меняются ($\delta'^i_k = \delta^i_k$), и поэтому формула (1.1) для смешанных компонент тензора напряжений в идеальной жидкости верна не только в декартовой, но и в любой криволинейной системе координат.

Контравариантные компоненты этого тензора имеют вид

$$p^{ki} = g^{ks}p^i_s = -pg^{ks}\delta^i_s = -pg^{ki}, \tag{1.2}$$

а ковариантные компоненты будут иметь вид

$$p_{ki} = g_{ks}p^s_i = -pg_{ks}\delta^s_i = -pg_{ki}.$$

Следовательно, тензор напряжений в идеальной жидкости задается одним числом p, а не девятью или шестью числами p^{ki}, как это имеет место в общем случае.

Для идеальной жидкости

$$P = -pG,$$

где G — метрический тензор.

Заметим, что любой тензор T, тензорная поверхность которого есть сфера, называется шаровым. Все шаровые тензоры имеют вид

$$T = kG, \text{ причем } k \text{ — скаляр.}$$

Уравнения движения идеальной жидкости

Уравнения движения сплошной среды ((2.11) гл. III) в любой криволинейной системе координат

$$\rho a^k = \rho F^k + \nabla_i p^{ki}$$

в силу (1.2) запишутся для идеальной жидкости следующим образом:

$$\rho a^k = \rho F^k - g^{ki}\nabla_i p. \tag{1.3}$$

При написании (1.3) учтено, что компоненты тензора g^{ki} ведут себя при ковариантном дифференцировании как постоянные величины.

Напишем эти уравнения в векторном виде. Величины $\nabla_i p$ являются, очевидно, ковариантными компонентами вектора-градиента p, а $g^{ki}\nabla_i p$ — его контравариантными компонентами. Поэтому уравнения (1.3) в векторном виде имеют вид

$$\rho \boldsymbol{a} = \rho \boldsymbol{F} - \operatorname{grad} p. \tag{1.4}$$

В проекциях на декартовы оси координат эти уравнения запишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} &= F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dw}{dt} &= F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

Они называются уравнениями Эйлера.

Уравнения движения идеальной жидкости в форме Лемба — Громеки

Запишем эти уравнения в несколько другом виде.

Легко видеть, что ускорение всегда можно записать следующим образом:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}, \tag{1.7}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор вихря.

В самом деле, используя декартову систему координат, для проекции ускорения на ось x имеем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2+w^2) - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)v + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)w =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{v}^2}{\partial x} + 2(\omega_y w - \omega_z v) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{v}^2}{\partial x} + 2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})_x.$$

Аналогичные формулы получаются для проекций ускорения на оси y и z. Поэтому ускорение $d\boldsymbol{v}/dt$ в векторном виде запишется в форме (1.7), а уравнения движения идеальной жидкости в векторном виде — в форме

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\operatorname{grad}\boldsymbol{v}^2 + 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p. \tag{1.8}$$

Эти уравнения носят название уравнений движения Эйлера в *форме Лемба — Громеки*. Такое преобразование ускорения можно применять для любых сплошных сред, и оно оказывается, в частности, очень полезным при изучении многих вопросов гидромеханики.

К трем уравнениям движения идеальной жидкости следует добавить уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\boldsymbol{v} = 0.$$

Мы получили систему четырех уравнений, которая при известных массовых силах F_x, F_y, F_z содержит пять неизвестных функций: u, v, w, p, ρ. Такая система все еще *незамкнута*.

Полная система уравнений движения идеальной несжимаемой (вообще неоднородной) жидкости

В некоторых случаях можно дополнительно считать, что рассматриваемая идеальная жидкость является несжимаемой, т. е. такой жидкостью, плотность каждой частицы которой постоянна. Тогда к этой системе четырех уравнений добавляется условие

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\rho = 0$$

или, в декартовой системе координат,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0.$$

Это условие замыкает систему уравнений, описывающих движение идеальной несжимаемой жидкости. Приведем эту систему полностью:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p, \\ &\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \\ &\frac{d\rho}{dt} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

Заметим, что в случае однородной несжимаемой жидкости плотность ρ постоянна в частице и одинакова для всех частиц, поэтому она перестает быть существенной искомой функцией. Полная система механических уравнений состоит в этом случае из уравнений Эйлера и уравнения неразрывности:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j\nabla_j v^i = F^i - \frac{1}{\rho}g^{ij}\nabla_j p, \\ &\nabla_\alpha v^\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Замкнутая система уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости в случае баротропных процессов

При движении сжимаемой жидкости (газа) во многих случаях можно считать, что

$$p = f(\rho),$$

т. е. в каждой частице давление зависит только от плотности. *Процессы, в которых*

$$p = f(\rho),$$

называются баротропными. Примером баротропного процесса может служить изотермическое движение газа, подчиняющегося уравнению Клапейрона

$$p = R\rho T,$$

где R — газовая постоянная. (При изотермическом движении температура T — постоянный параметр, одинаковый для всех частиц.)

Очевидно, что условие баротропии (если функция $f(\rho)$ известна) позволяет замкнуть систему уравнений, описывающих движение идеальной сжимаемой жидкости.

Полная система уравнений в этом случае в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}=0,\\
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},\\
&p=f(\rho).
\end{aligned}\right\} \qquad (1.11)$$

В общем случае при движении жидкостей и газов условие баротропии, конечно, не выполняется, и для того, чтобы описать такие движения, необходимо ввести дополнительные уравнения термодинамической природы.

§ 2. Линейное упругое тело и линейная вязкая жидкость

Рассмотрим другие частные модели сплошных сред: модель линейного упругого тела и модель линейной вязкой жидкости. Построение этих моделей проводится параллельно, так как способы их введения, как мы увидим, формально аналогичны. По существу же эти две модели описывают два совершенно различных типа механического поведения реальных сред.

Упругие тела

Упругим телом называется среда, в которой компоненты тензора напряжений p^{ki} в каждой частице являются функциями компонент тензора деформации ε_{ij}, компонент метрического тензора g_{ij}, температуры T и, возможно, других параметров физико-химической природы χ_i (например, концентрации фаз):

$$p^{ij}=f^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, \chi_1, \ldots, \chi_n). \qquad (2.1)$$

Вязкие жидкости

Вязкой жидкостью называется среда, в которой компоненты тензора напряжений представляются в виде

$$p^{ij}=-pg^{ij}+\tau^{ij}, \qquad (2.2)$$

причем

$$\left.\begin{aligned}
p&=p(\rho, T, \chi_1, \ldots, \chi_n),\\
\tau^{ij}&=\varphi^{ij}(e_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, \chi_1, \ldots, \chi_n),
\end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

где $e_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора скоростей деформаций.

В этом параграфе мы будем изучать зависимость f^{ij} от $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $g^{\alpha\beta}$ и зависимость φ^{ij} от $e_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$, поэтому в дальнейшем параметры T и χ_i указывать не будем.

Законы Гука и Навье — Стокса

Конкретный вид функций $f^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, \chi_i)$ и $\varphi^{ij}(e_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T\ \chi_i)$ может быть различным для различных конкретных моделей упругих и вязких сред. Опыт показывает, что напряжения и деформации во многих твердых телах, например в металлах, при обычных условиях (при не очень больших температурах и напряжениях) связаны между собой так называемым законом Гука, а вязкие напряжения и скорости деформаций во многих жидких средах, например, в воде и воздухе, связаны между собой законом Навье — Стокса. Эти законы можно ввести с помощью следующих рассуждений, которые мы проведем для закона Гука.

Предположим, что функции f^{ij} могут быть разложены в ряд Тейлора по $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и что в отсутствие напряжений ($p^{ij} = 0$) деформации также отсутствуют ($\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$), и наоборот [1]).

При этих предположениях получим

$$p^{ij} = f^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}) = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + \ldots$$

Здесь коэффициенты $A^{ij\alpha\beta}$ могут зависеть от T и χ_s. Если деформации малы, то в этом разложении p^{ij} в ряд можно сохранить только линейные члены и просто написать

$$p^{ij} = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}. \tag{2.4}$$

Аналогичные предположения относительно функций φ^{ij} приводят к равенствам

$$\tau^{ij} = B^{ij\alpha\beta}e_{\alpha\beta}. \tag{2.5}$$

Соотношения (2.4) называются законом Гука, а соотношения (2.5) — законом Навье — Стокса (или законом вязкости Ньютона).

Мы получили (2.4) и (2.5) в предположении, что $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (для закона Гука) и $e_{\alpha\beta}$ (для закона Навье — Стокса) малы. Отметим, однако, что, в частности, закон Навье — Стокса для воды, воздуха и некоторых других жидкостей оказывается применимым и в тех случаях, когда компоненты тензора скоростей деформаций не малы. Из общих термодинамических соотношений получается, что закон Гука физически допустим только как приближенный закон для малых деформаций.

Раздел механики сплошной среды, в котором изучается поведение сплошных сред, подчиняющихся закону Гука или более общему закону (2.1), носит название теории упругости, а раз-

[1]) Заметим, что деформации могут возникать и при $p^{ij} = 0$ (например, тепловое расширение). Сейчас для простоты мы изучаем p^{ij} как функции ε_{ij} при $T = \text{const}$ и $\chi = \text{const}$.

дел, в котором рассматриваются движения сплошной среды, подчиняющейся закону Навье — Стокса или более общему закону (2.2) — (2.3),— теорией движения вязкой жидкости.

Из инвариантных относительно выбора систем координат равенств (2.4) и (2.5) непосредственно вытекает, что $A^{ij\alpha\beta}$ и $B^{ij\alpha\beta}$ являются компонентами четырехвалентных тензоров. Они являются физическими характеристиками данной сплошной среды и зависят, вообще говоря, от температуры T и других физико-химических параметров, характеризующих состояние рассматриваемой среды.

Тензор четвертого ранга имеет $3^4 = 81$ компоненту, но из-за симметрии тензора напряжений (в классическом случае) и симметрии тензоров деформаций и скоростей деформаций независимых компонент $A^{ij\alpha\beta}$ и $B^{ij\alpha\beta}$ будет только 36, так как тензоры A и B должны быть симметричными по паре индексов i и j и их можно принять симметричными по паре индексов α и β. Если среда, поведение которой описывается законом Гука или Навье — Стокса, обладает какими-либо геометрическими свойствами симметрии, то число независимых компонент $A^{ij\alpha\beta}$ и $B^{ij\alpha\beta}$ еще больше сокращается. В частности, если соответствующая среда изотропна, то все $A^{ij\alpha\beta}$ и $B^{ij\alpha\beta}$ определяются двумя параметрами.

Свойства анизотропии, изотропии и гиротропии среды

Изотропной средой называют такую среду, свойства которой одинаковы по всем направлениям. Если свойства среды в разных направлениях разные, то говорят, что среда анизотропна. Анизотропные среды могут обладать симметрией различных типов.

Дадим более точное математическое определение свойства симметрии и, в частности, изотропии. Механические и физические свойства среды обычно можно описать с помощью некоторых тензоров и тензорных уравнений (например, если выполняется закон Гука, упругие свойства задаются с помощью тензора $A^{ij\alpha\beta}$). Говорят, что среда обладает симметрией, если существует группа преобразований координат, содержащая не только тождественное преобразование, такая, что компоненты тензоров, задающих свойства среды, не меняются при преобразованиях, принадлежащих этой группе.

В частности, среда называется изотропной, если компоненты тензоров, определяющих ее свойства, не меняются при любых ортогональных преобразованиях. Заметим, что ортогональные преобразования можно определить как преобразования, при которых сохраняются компоненты метрического тензора (т. е. не изменяются скалярные произведения векторов базиса)

$$g'_{ij} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} = g_{ij}.$$

Полная ортогональная группа содержит преобразования вращения (детерминант преобразования равен $+1$) и преобразования вращения, сочетающиеся с зеркальными отражениями (детерминант равен -1).

Если свойства среды инвариантны только относительно группы вращений и не инвариантны относительно зеркальных отражений, то среда называется гиротропной.

Посмотрим несколько более подробно, что означает свойство изотропии (или гиротропии) для упругого тела, подчиняющегося закону Гука. Возьмем в некоторой точке такой сплошной среды в данный момент времени две декартовы системы координат: одну x^1, x^2, x^3 и другую y^1, y^2, y^3, повернутую относительно первой. Компоненты рассматриваемых тензоров в системе x^1, x^2, x^3 будем обозначать буквами без штрихов, а в системе y^1, y^2, y^3 — соответствующими буквами со штрихами. Очевидно,

$$A'^{ij\alpha\beta} = \frac{\partial y^i}{\partial x^p}\frac{\partial y^j}{\partial x^q}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\mu}A^{pq\lambda\mu}. \tag{2.6}$$

Записывая закон Гука в системе x^1, x^2, x^3, мы должны пользоваться коэффициентами $A^{ij\alpha\beta}$, а в системе y^1, y^2, y^3 — коэффициентами $A'^{ij\alpha\beta}$. Рассмотрим два деформированных состояния сплошной среды, которые имеют одинаковый вид в разных (повернутых друг относительно друга) системах x^i и y^i, т. е.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij}.$$

Ясно, что в изотропной среде напряженные состояния в этом случае также должны в системах x^i и y^i иметь одинаковый вид. Если $A'^{ij\alpha\beta} = A^{ij\alpha\beta}$, т. е. коэффициенты в законе Гука в обеих системах координат одинаковы, то $p^{ij} = p'^{ij}$. Сплошная среда в этом случае является изотропной или гиротропной. Если же $A'^{ij\alpha\beta} \neq A^{ij\alpha\beta}$, т. е. коэффициенты в законе Гука в системах координат x^1, x^2, x^3 и y^1, y^2, y^3 разные, то $p^{ij} \neq p'^{ij}$ и среда является анизотропной. Опыт показывает, что анизотропными средами, для которых свойства среды в разных направлениях разные, являются, например, кристаллические среды с правильным упорядоченным расположением молекул или атомов, а также волокнистые материалы.

Изотропными средами, для которых одна система координат не имеет преимуществ перед другими, повернутыми относительно первой, являются, например, вода и другие среды, имеющие так называемое аморфное строение, а также среды, которые состоят из маленьких кристаллов, если только эти элементарные кристаллы расположены неупорядоченно, хаотически. Таковы обычно употребляемые в технике металлы.

Законы Гука и Навье — Стокса для гиротропной среды

Теперь покажем, что для изотропных и гиротропных тел из общего числа — 81 компоненты тензора $A^{ij\alpha\beta}$, которые все могут отличаться от нуля, только две компоненты являются независимыми [1]). Направим оси координат вдоль главных направлений тензора деформаций ε_{ij}. Очевидно, что в этом случае в закон Гука будут входить только коэффициенты вида $A^{ij\alpha\alpha}$. Докажем, что $A^{ij\alpha\alpha} = 0$ при $i \neq j$. Действительно, в результате поворота выбранной системы координат относительно i-й оси на 180° мы получим новую систему координат, в которой i-я ось останется прежней, а остальные две оси изменят свои направления на противоположные, и согласно правилу преобразования (2.6) компонент тензора A мы при $i \neq j$ и любом α получим

$$A'^{ij\alpha\alpha} = -A^{ij\alpha\alpha},$$

но если среда гиротропна или изотропна, то должно быть $A'^{ij\alpha\alpha} = A^{ij\alpha\alpha}$ и, следовательно, $A^{ij\alpha\alpha} = 0$ при $i \neq j$. Отсюда, так как в этой системе координат $p^{ij} = 0$ при $i \neq j$, следует, что главные оси тензора деформаций и тензора напряжений в гиротропной, и подавно в изотропной, среде, подчиняющейся закону Гука, совпадают.

В формулах закона Гука в главных осях из всех восьмидесяти одного коэффициента $A^{ij\alpha\beta}$ существенны только девять коэффициентов $A^{ii\alpha\alpha}$.

Порядок нумераций осей в силу свойства гиротропии среды несущественен [2]), и поэтому мы будем иметь

$$A^{1111} = A^{2222} = A^{3333} = 2\mu + \lambda,$$
$$A^{1122} = A^{1133} = A^{2233} = \lambda,$$
$$A^{ii\alpha\alpha} = A^{\alpha\alpha ii},$$

где $2\mu + \lambda$ и λ введены как новые обозначения для указанных выше двух различных и, вообще говоря, отличных от нуля компонент тензора A. (Заметим, что компоненты A^{ijij}, $i \neq j$, также отличны от нуля. Ниже мы покажем, что эти компоненты равны μ (см. формулу (2.12).)

Все приведенные выше рассуждения можно провести и для гиротропной (и подавно для изотропной) среды, подчиняющейся закону Навье — Стокса, и получить, что для гиротропной среды, подчиняющейся закону Навье — Стокса, главные оси

---

[1]) Для тензора четвертого ранга понятия изотропии и гиротропии совпадают.

[2]) Ось x^2, например, очевидно, можно перевести в положение x^1 поворотом системы координат вокруг оси x^3 на 90°.

тензора скоростей деформаций совпадают с главными осями тензора напряжений, а все коэффициенты $B^{ij\alpha\beta}$ выражаются через два коэффициента λ_1 и μ_1.

Теперь закон Гука

$$p^{ij} = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}$$

для изотропной среды в главных осях тензора деформаций и тензора напряжений имеет вид

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_1, \\ p_2 &= \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_2, \\ p_3 &= \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_3; \end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

λ и μ называются коэффициентами Ламе.

Аналогично закон Навье — Стокса для изотропной среды в главных осях тензора скоростей деформаций и тензора напряжений запишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \lambda_1(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu_1 e_1, \\ \tau_2 &= \lambda_1(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu_1 e_2, \\ \tau_3 &= \lambda_1(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu_1 e_3. \end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

Выведем теперь закон Гука для изотропной (гиротропной) среды в произвольной системе координат. Для этого умножим равенства (2.7) соответственно на $(dx^1)^2$, $(dx^2)^2$, $(dx^3)^2$, сложим их и при произвольных dx^1, dx^2, dx^3 будем иметь

$$p_1(dx^1)^2 + p_2(dx^2)^2 + p_3(dx^3)^2 = \\ = \lambda I_1(\varepsilon) ds^2 + 2\mu[\varepsilon_1(dx^1)^2 + \varepsilon_2(dx^2)^2 + \varepsilon_3(dx^3)^2], \qquad (2.9)$$

где $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$, а $I_1(\varepsilon)$ — первый инвариант тензора деформаций. Так как

$$p_1(dx^1)^2 + p_2(dx^2)^2 + p_3(dx^3)^2 = 2\Phi(dx^1, dx^2, dx^3)$$

— инвариантная относительно выбора системы координат квадратичная форма тензора напряжений, записанная в главных осях тензора напряжений, а

$$\varepsilon_1(dx^1)^2 + \varepsilon_2(dx^2)^2 + \varepsilon_3(dx^3)^2 = 2F(dx^1, dx^2, dx^3)$$

— инвариантная относительно выбора системы координат квадратичная форма тензора деформаций, записанная в главных осях тензора деформаций, то равенство (2.9) представляет собой инвариантное соотношение и может быть записано в любой криволинейной системе координат η^1, η^2, η^3 в виде

$$2\Phi(d\eta^1, d\eta^2, d\eta^3) = \lambda I_1(\varepsilon) g_{ij} d\eta^i d\eta^j + 4\mu F(d\eta^1, d\eta^2, d\eta^3), \qquad (2.10)$$

где

$$2\Phi = p_{ij}\,d\eta^i\,d\eta^j, \quad 2F = \varepsilon_{ij}\,d\eta^i\,d\eta^j, \quad I_1(\varepsilon) = \varepsilon^\alpha_\alpha = g^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta},$$
$$ds^2 = g_{ij}\,d\eta^i\,d\eta^j.$$

Выражение (2.10) справедливо при произвольных $d\eta^1$, $d\eta^2$, $d\eta^3$, и поэтому в любой системе координат будем иметь

$$p_{ij} = \lambda I_1(\varepsilon)\,g_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{2.11}$$

или

$$p^{ij} = \lambda I_1(\varepsilon)\,g^{ij} + 2\mu g^{i\alpha}g^{j\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}. \tag{2.11'}$$

Формулы (2.11') или (2.11) представляют собой запись закона Гука для изотропной среды в произвольной криволинейной системе координат.

Из (2.11') легко получить выражение для коэффициентов $A^{ij\alpha\beta}$ в произвольной криволинейной системе координат:

$$A^{ij\alpha\beta} = \lambda g^{ij}g^{\alpha\beta} + \mu\,(g^{i\alpha}g^{j\beta} + g^{i\beta}g^{j\alpha}). \tag{2.12}$$

Проведя аналогичные рассуждения применительно к закону Навье — Стокса, получим, что закон Навье — Стокса для изотропной среды в произвольной криволинейной системе координат будет иметь вид

$$\tau_{ij} = \lambda_1 I_1(e)\,g_{ij} + 2\mu_1 e_{ij} \tag{2.13}$$

или

$$\tau^{ij} = \lambda_1 I_1(e)\,g^{ij} + 2\mu_1 g^{i\alpha}g^{j\beta}e_{\alpha\beta}. \tag{2.14}$$

На основании (2.2) получим следующую связь между компонентами тензора напряжений и скоростей деформаций для изотропной вязкой жидкости в произвольной криволинейной системе координат:

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \lambda_1 \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, g^{ij} + 2\mu_1 g^{i\alpha}g^{j\beta}e_{\alpha\beta}. \tag{2.15}$$

В декартовой (не главной) системе координат закон Гука для изотропной среды имеет вид

$$p_{ii} = \lambda I_1(\varepsilon) + 2\mu\varepsilon_{ii} \tag{2.16}$$

и при $i \neq j$

$$p_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij},$$

а закон Навье — Стокса — вид

$$p_{ii} = -p + \lambda_1 \operatorname{div}\boldsymbol{v} + 2\mu_1 \frac{\partial v_i}{\partial x^i}$$

и при $i \neq j$

$$p_{ij} = 2\mu_1 e_{ij} = \mu_1\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right). \tag{2.17}$$

Модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициенты вязкости

Вместо коэффициентов Ламе λ и μ в теории упругости принято вводить следующие характеристики материала:

модуль Юнга

$$E = \mu \frac{(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

и коэффициент Пуассона

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

В теории движения вязкой жидкости принято вводить динамический коэффициент вязкости $\mu = \mu_1$ и кинематический коэффициент вязкости $\nu = \mu/\rho$, а также второй коэффициент вязкости

$$\zeta = \lambda_1 + \frac{2}{3}\mu.$$

В дальнейшем коэффициент Ламе λ_1 в случае движения вязкой жидкости мы будем обозначать просто через λ.

Приведем числовые значения E, σ, μ, ν для некоторых сред.

Материал	E, кГ/см²	σ
Железо	20 000	0,3
Алюминий	7 000	0,34
Бронза	10 000	0,31

Среда	μ, г/сек см	ν, см²/сек
Вода	0,01	0,01
Воздух	$1{,}8 \cdot 10^{-4}$	0,15
Глицерин	8,5	6,8
Ртуть	0,156	0,0012

Законы Гука и Навье — Стокса при $T = \text{const}$, $\chi_i = \text{const}$ позволяют замкнуть систему уравнений движения для изотропных упругих сред и вязкой несжимаемой жидкости.

Уравнения Навье — Стокса

Для того чтобы выписать полную систему уравнений движения сплошной среды в случае вязкой несжимаемой жидкости, выведем предварительно уравнения движения вязкой, вообще сжимаемой жидкости, удовлетворяющей закону Навье—Стокса (2.15) или

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v} g^{ij} + 2\mu e^{ij}, \qquad (2.18)$$

которые называются уравнениями Навье — Стокса и получаются в результате подстановки закона Навье — Стокса (2.18), в уравнение импульсов.

Предварительно заметим, что в евклидовом пространстве верны равенства

$$\nabla_i \nabla_j v^\alpha = \nabla_j \nabla_i v^\alpha.$$

Действительно $T^\alpha_{ij} \equiv \nabla_i \nabla_j v^\alpha - \nabla_j \nabla_i v^\alpha$ являются компонентами тензора третьего ранга; в декартовой системе координат $T^\alpha_{ij} = \frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial x^j \partial x^i} = 0$, и, следовательно, $T^\alpha_{ij} = 0$ в любой криволинейной системе координат. Таким образом, результат неоднократного ковариантного дифференцирования не зависит от порядка проведения дифференцирования, если в пространстве можно ввести единую для всего пространства декартову систему координат, т. е. если пространство является евклидовым [1]).

Вычислим теперь $\nabla_j p^{ij}$, когда p^{ij} определяются по (2.18), а λ и μ постоянны:

$$\begin{aligned}
\nabla_j p^{ij} &= -g^{ij}\nabla_j p + \lambda g^{ij}\nabla_j \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu \nabla_j e^{ij} = \\
&= -g^{ij}\nabla_j p + \lambda g^{ij}\nabla_j \nabla_\alpha v^\alpha + \mu \nabla_j g^{i\alpha} g^{j\beta} (\nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha) = \\
&= -g^{ij}\nabla_j p + \lambda g^{ij}\nabla_j \nabla_\alpha v^\alpha + \mu g^{i\alpha}\nabla_j \nabla_\alpha v^j + \mu g^{j\beta}\nabla_j \nabla_\beta v^i = \\
&= -g^{ij}\nabla_j p + (\lambda + \mu) g^{ij}\nabla_j \nabla_\alpha v^\alpha + \mu \nabla^\beta \nabla_\beta v^i = \\
&= -\nabla^i p + (\lambda + \mu)\nabla^i \operatorname{div} v + \mu \Delta v^i.
\end{aligned}$$

Здесь $\nabla^i = g^{ij}\nabla_j$ и $\Delta = \nabla^\beta \nabla_\beta = \nabla^2$ — оператор Лапласа. В декартовой системе координат

$$\Delta v^i = \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^i}{\partial z^2}.$$

В векторном виде будем иметь

$$\nabla_j \boldsymbol{p}^j = -\operatorname{grad} \boldsymbol{p} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \mu \Delta \boldsymbol{v}. \qquad (2.19)$$

Таким образом, уравнения Навье — Стокса в произвольной криволинейной системе координат на основании (2.11) гл. III и (2.19) будут иметь вид

$$\boldsymbol{a}^i = F^i - \frac{1}{\rho} g^{ij} \frac{\partial p}{\partial x^j} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} g^{ij} \frac{\partial \operatorname{div} \boldsymbol{v}}{\partial x^j} + \nu \Delta v^i.$$

---

[1]) В римановом пространстве тензор T^α_{ij} отличен от нуля из-за кривизны пространства, так как в искривленном пространстве невозможно обратить в нуль в данной точке одновременно Γ^k_{ij} и $\partial \Gamma^k_{ij}/\partial x^s$ (см. § 5 гл. II).

В векторной форме уравнения Навье — Стокса можно написать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{\lambda+\mu}{\rho}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \frac{\mu}{\rho}\Delta\boldsymbol{v}. \quad (2.20)$$

Полная система уравнений движения несжимаемой вязкой жидкости

Для вязкой несжимаемой жидкости уравнения Навье — Стокса упрощаются:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{\mu}{\rho}\Delta\boldsymbol{v}. \quad (2.21)$$

Эти уравнения вместе с уравнением неразрывности

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$$

составят полную систему уравнений движения однородной вязкой несжимаемой жидкости, подчиняющейся закону Навье — Стокса, в случае постоянного коэффициента вязкости μ.

В декартовой ортогональной системе координат полная система уравнений движения вообще неоднородной вязкой несжимаемой жидкости имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),\\
&\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (2.22)$$

Уравнения движения в перемещениях для упругого тела; случаи замкнутых систем уравнений

Уравнения движения в перемещениях для упругого тела, удовлетворяющего закону Гука в случае *малых деформаций*

$$p^{ij} = \lambda I_1(\varepsilon)\, g^{ij} + 2\mu\varepsilon^{ij},$$

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}(\nabla^j w^i + \nabla^i w^j), \quad (2.23)$$

где w^i — компоненты вектора перемещений, а $I_1(\varepsilon)$ — первый инвариант тензора деформаций ($I_1(\varepsilon) = \nabla_i w^i$), носят название уравнений Ламе. Дальше примем, что модули Ламе λ и μ можно считать заданными постоянными. Для вывода уравнений Ламе в уравнения импульсов (2.11) гл. III следует подставить закон Гука в случае бесконечно малых деформаций (2.23). Вывод этих уравнений вполне аналогичен приведенному

выше выводу уравнений Навье — Стокса. Уравнения Ламе имеют вид

$$(\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{w} + \mu\Delta\boldsymbol{w} + \rho\boldsymbol{F} = \rho\boldsymbol{a}. \tag{2.24}$$

В декартовой системе координат они записываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\rho a_x &= (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\\
&+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\rho F_x,\\
\rho a_y &= (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\\
&+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\rho F_y,\\
\rho a_z &= (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\\
&+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\rho F_z,
\end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

где через u, v, w обозначены компоненты вектора перемещений w.

Уравнения Ламе выведены в предположении, что деформации малы, в частности, мало изменение плотности ($\rho = \rho_0 + \rho'$, $\rho' \ll \rho_0$). Поэтому в этих уравнениях с точностью до малых первого порядка нужно писать ρ_0 вместо ρ.

Система уравнений Ламе для динамических задач становится замкнутой, если к ней добавить определение ускорения:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right)_{x^i} + v^\alpha \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^\alpha},$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{w}}{dt}.$$

Уравнение неразрывности в теории упругости с малыми деформациями можно не рассматривать. Оно служит для определения ρ', которое не входит в основные уравнения Ламе.

Уравнения (2.24) установлены для малых деформаций, при этом перемещения, скорости и ускорения могут быть конечными.

Однако часто рассматривают случай, когда *малы не только деформации, но и сами перемещения, скорости и ускорения.*

В этом случае после пренебрежения нелинейными членами получим

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2},$$

а упрощенные уравнения Ламе приобретают вид

$$\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2}\right)_{x^i} = \boldsymbol{F} + \frac{\lambda + \mu}{\rho_0} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{w} + \frac{\mu}{\rho_0} \Delta \boldsymbol{w}. \qquad (2.26)$$

В задачах теории упругости, как правило, требуется найти смещение индивидуальных частиц среды, например изменение формы внешних границ «твердого» тела. Поэтому в теории упругости обычно используют точку зрения Лагранжа и лагранжеву систему координат.

Раньше было выяснено, что можно применять две лагранжевых системы координат — начальную и актуальную (см. гл. II). Все уравнения составляются для состояния среды в определенный актуальный момент времени. Поэтому очевидно, что как уравнения импульсов для сплошной среды, так и получившиеся на их основании уравнения Ламе в компонентах, соответствующих лагранжевой актуальной системе координат, имеют такой же вид, как в системе отсчета.

При переходе от актуальной лагранжевой системы координат к начальной лагранжевой системе координат уравнения в компонентах изменяют свой вид. Это связано с тем, что формулы перехода от компонент векторов и тензоров в начальной лагранжевой системе координат к соответствующим компонентам в актуальной лагранжевой системе не совпадают с обычными формулами преобразования компонент тензоров при переходе от одной системы координат к другой в одном и том же пространстве. Пространства начального состояния и актуального состояния с одинаковыми координатами точек ξ^1, ξ^2, ξ^3 необходимо рассматривать как разные пространства с различной метрикой, $ds^2 \neq ds_0$, из-за деформаций [1]).

Однако если деформации и перемещения малы, то начальная и актуальная лагранжевы системы координат отличаются мало, и поэтому с точностью до малых первого порядка можно считать, что уравнения в компонентах, соответствующих актуальной и начальной лагранжевым системам координат, совпадают. Использование начальной лагранжевой системы координат может оказаться более удобным, чем использование актуальной системы координат, так как при применении

[1]) Этот вопрос применительно к общему уравнению движения сплошной среды рассмотрен подробно в книге Л. И. Седова «Введение в механику сплошной среды», Физматгиз, Москва, 1962, стр. 150.

актуальной лагранжевой системы для полного решения задачи надо определять еще и положение этой системы координат по отношению к системе отсчета.

О необходимости построения других моделей

Обширные разделы гидродинамики и теории упругости развиты в рамках перечисленных выше простых моделей. Тем не менее далеко не всегда движения реальных сред могут быть достаточно точно описаны с помощью этих простейших моделей.

Например, для изучения движения ионизованных газов или даже нейтральных газов при отсутствии баротропии требуются более сложные модели.

Во многих случаях закон Гука для «твердых» тел неприменим, например, он несправедлив, когда после освобождения «твердых» тел от напряжений в них остаются деформации (асфальт, замазка, а также металлы при больших нагрузках). Поэтому необходимо строить модели с учетом пластичности, ползучести и ряда других свойств. Для усложненных моделей сплошных сред введенный выше запас понятий и характеристик, связанных с движением и состоянием частиц среды, недостаточен.

Необходимо рассматривать еще другие характеристики, такие, как температура T, внутренняя энергия U, энтропия S, остаточные деформации, характеристики электромагнитного поля и многие другие. Система механических уравнений в этих случаях должна быть дополнена. Для этого требуется использовать еще дополнительные соотношения физики и, в частности, термодинамики.

§ 3. Примеры уравнений в криволинейных системах координат и дополнительные сведения из тензорного анализа

Для приложений полезно иметь в готовом виде уравнения неразрывности и уравнения движения в различных конкретных криволинейных системах координат.

Символы Кристоффеля в ортогональных и уравнение неразрывности в произвольных системах координат

Выпишем формулы, выражающие символы Кристоффеля $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ через компоненты метрического тензора g_{ij} в произвольных ортогональных системах координат. Символы Кристоффеля в евклидовом и римановом пространствах определены формулами

$$\Gamma^{j}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{js} \left(\frac{\partial g_{\alpha s}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta s}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{s}} \right). \qquad (3.1)$$

Отсюда в ортогональной системе координат ($g_{ij} = 0$ при $i \neq j$)

легко получим

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\beta}}, \tag{3.2}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^{\alpha}}, \tag{3.3}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\alpha}}, \tag{3.4}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta, \ \beta \neq \gamma, \ \alpha \neq \gamma. \tag{3.5}$$

С помощью формулы (3.2) для суммы $\sum\limits_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}$ можно получить следующую формулу в ортогональных системах координат:

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\beta}}, \tag{3.6}$$

где g — определитель матрицы $\| g_{ij} \|$.

Приведем доказательство формулы (3.6) в *произвольной* системе координат. Имеем

$$g = |g_{ij}| = |(\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j)| \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathfrak{e}_k}{\partial x^{\beta}} = \Gamma^{\omega}_{k\beta} \mathfrak{e}_{\omega}.$$

При составлении производной $\partial g / \partial x^{\beta}$ необходимо дифференцировать в каждом элементе детерминанта g скалярное произведение двух векторов $\mathfrak{e}_i$ и $\mathfrak{e}_j$.

При дифференцировании первого фактора $\mathfrak{e}_i$ получим три детерминанта, в каждом из которых члены одной строки с номером i заменены членами вида $\Gamma^{\omega}_{i\beta} g_{\omega j}$. Легко видеть, что каждый из этих детерминантов равен $\Gamma^{i}_{i\beta} g$, где i — фиксированный индекс, равный номеру соответствующей строки. (Детерминанты при фиксированных $\omega \neq i$ равны нулю.) Сумма трех детерминантов равна $\sum\limits_{i=1}^{3} \Gamma^{i}_{i\beta} g$. Из симметрии g_{ij} очевидно, что при дифференцировании вторых факторов $\mathfrak{e}_j$ получится точно такая же сумма.

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\beta}} = 2g\Gamma^{i}_{i\beta},$$

причем в этой формуле по индексу i производится суммирование.

Выражение для дивергенции любого вектора в произвольной системе координат можно теперь записать следующим образом:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla_\alpha v^\alpha = \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} + v^\beta \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{v^\beta}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial v^\alpha \sqrt{g}}{\partial x^\alpha}. \tag{3.7}$$

Уравнение неразрывности в произвольной криволинейной системе координат принимает вид

$$\sqrt{g} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^1 \sqrt{g}}{\partial x^1} + \frac{\partial \rho v^2 \sqrt{g}}{\partial x^2} + \frac{\partial \rho v^3 \sqrt{g}}{\partial x^3} = 0. \tag{3.8}$$

Напомним, что v^α являются компонентами вектора v при разложении его по векторам ковариантного базиса $\boldsymbol{э}_\alpha$, которые не являются, вообще говоря, единичными векторами.

Физические компоненты векторов и тензоров

Для вектора скорости $\boldsymbol{v}$ можно написать также формулу

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{э}_i = u^1 \frac{\boldsymbol{э}_1}{\sqrt{g_{11}}} + u^2 \frac{\boldsymbol{э}_2}{\sqrt{g_{22}}} + u^3 \frac{\boldsymbol{э}_3}{\sqrt{g_{33}}}, \tag{3.9}$$

где $\boldsymbol{e}_i = \dfrac{\boldsymbol{э}_i}{\sqrt{g_{ii}}}$ — единичные векторы. Если система координат ортогональная, то компоненты

$$u^i = v^i \sqrt{g_{ii}}$$

(суммирование по i отсутствует) равны проекциям скорости $\boldsymbol{v}$ на касательные к координатным линиям и называются физическими компонентами вектора скорости. Очевидно, что для ортогональных систем координат величины $u_i = v_i \sqrt{g^{ii}}$ (суммирование по i отсутствует) совпадают с введенными физическими компонентами u^i. Аналогично можно ввести физические компоненты любого вектора, например ускорения $\boldsymbol{a}$ или $\operatorname{grad} p$, и вообще тензора любого ранга [1]).

При использовании физических компонент уравнение неразрывности (3.8) в произвольной ортогональной системе координат приобретает вид

$$\sqrt{g} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \sqrt{g_{22} g_{33}}\, u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \rho \sqrt{g_{11} g_{33}}\, u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \rho \sqrt{g_{11} g_{22}}\, u^3}{\partial x^3} = 0. \tag{3.10}$$

[1]) Например, для тензора $T = T^i_j \boldsymbol{э}_i \boldsymbol{э}^j$ физические компоненты можно определить следующим образом:

$$T = T^i_j \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g^{jj}} \frac{\boldsymbol{э}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\boldsymbol{э}^j}{\sqrt{g^{jj}}} = (T^i_j)_{\text{физ}} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}^j.$$

Уравнение неразрывности в цилиндрической и сферической системах координат

В случае цилиндрической системы координат $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

т. е.
$$|\mathfrak{e}_1| = 1, \quad |\mathfrak{e}_2| = r, \quad |\mathfrak{e}_3| = 1,$$
$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = 1, \quad g_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Уравнение неразрывности в цилиндрических координатах записывается следующим образом:

$$r\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_r r}{\partial r} + \frac{\partial \rho u_\varphi}{\partial \varphi} + r\frac{\partial \rho u_z}{\partial z} = 0.$$

В случае сферической системы координат $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$ (широта), $x^3 = \lambda$ (долгота), $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \cos^2\varphi\, d\lambda^2$, $g_{11} = 1$, $g_{22} = r^2$, $g_{33} = r^2\cos^2\varphi$ и уравнение неразрывности будет иметь вид

$$r^2\cos\varphi\frac{\partial \rho}{\partial t} + \cos\varphi\frac{\partial \rho u_r r^2}{\partial r} + r\frac{\partial \rho u_\varphi \cos\varphi}{\partial \varphi} + r\frac{\partial \rho u_\lambda}{\partial \lambda} = 0.$$

Компоненты ускорения в ортогональных системах координат

Для того чтобы написать в ортогональных криволинейных системах координат уравнения движения Эйлера, получим формулу, выражающую компоненты ускорения dv^i/dt через g^{ij} и v^i. Для компоненты ускорения $d\boldsymbol{v}/dt$ имеем

$$a^j = \frac{\partial v^j}{\partial t} + v^i \nabla_i v^j = \frac{\partial v^j}{\partial t} + v^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} + v^i v^\beta \Gamma^j_{i\beta}.$$

Преобразуем последний член этой формулы:

$$v^i v^\beta \Gamma^j_{i\beta} = \underset{\substack{\beta\neq j \\ \text{(суммирование по } j \text{ отсутствует)}}}{2 v^j v^\beta \Gamma^j_{\beta j}} + (v^\beta)^2 \Gamma^j_{\beta\beta} =$$

$$= \underset{\substack{\beta\neq j \\ \text{(суммирование по } j \text{ отсутствует)}}}{2 v^j v^\beta \Gamma^j_{\beta j}} + (v^j)^2 \Gamma^j_{jj} + \underset{j\neq\beta}{(v^\beta)^2 \Gamma^j_{\beta\beta}}.$$

В ортогональной системе координат с помощью формул (3.2) — (3.5), выражающих символы Кристоффеля $\Gamma^j_{\alpha\beta}$ через g_{ij}, получим

$$\boldsymbol{a}^j = \frac{\partial \boldsymbol{v}^j}{\partial t} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} v^i + \underset{\substack{\beta\neq j \\ \text{(суммирование по } j \text{ отсутствует)}}}{\frac{v^j v^\beta}{g_{jj}} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^\beta}} + \frac{1}{2}\frac{(v^j)^2}{g_{jj}}\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^j} - \frac{(v^\beta)^2}{2 g_{jj}}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^j}. \tag{3.11}$$

Отсюда физические компоненты ускорения в цилиндрической системе координат, если вместо v^i по (3.9) ввести физические

компоненты скорости u^i, будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} a_r &= \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r},\\ a_\varphi &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_z\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r},\\ a_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}; \end{aligned}\right\} \quad (3.12)$$

физические компоненты ускорения в сферической системе координат запишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} a_r &= \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{u_\lambda}{r\cos\varphi}\frac{\partial u_r}{\partial \lambda} - \frac{u_\varphi^2 + u_\lambda^2}{r},\\ a_\varphi &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\lambda}{r\cos\varphi}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \lambda} + \frac{u_r u_\varphi - u_\lambda^2\operatorname{tg}\varphi}{r},\\ a_\lambda &= \frac{\partial u_\lambda}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\lambda}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \varphi} + \frac{u_\lambda}{r\cos\varphi}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{u_r u_\lambda + \operatorname{tg}\varphi\, u_\varphi u_\lambda}{r}. \end{aligned}\right\} \quad (3.13)$$

Компоненты вектора-градиента скалярной функции в ортогональной системе координат

Определим проекции вектора grad p на оси ортогональной системы координат. Имеем

$$\operatorname{grad} p = \frac{\partial p}{\partial x^i}\vartheta^i = (\nabla_i p)\vartheta^i = A_i\frac{\vartheta^i}{\sqrt{g^{ii}}}.$$

Отсюда физические компоненты A_i вектора grad p в ортогональной системе координат будут равны

$$A_i = \frac{\partial p}{\partial x^i}\sqrt{g^{ii}} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\frac{\partial p}{\partial x^i} = A^i.$$

(суммирование по i отсутствует)

Физические компоненты вектора grad p в цилиндрической системе координат будут следующими:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{grad} p|_r &= \frac{\partial p}{\partial r},\\ \operatorname{grad} p|_\varphi &= \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi},\\ \operatorname{grad} p|_z &= \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \quad (3.14)$$

а в сферической системе координат — следующими:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{grad} p|_r &= \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \operatorname{grad} p|_\varphi &= \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}, \\ \operatorname{grad} p|_\lambda &= \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial \lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

Уравнения Эйлера в цилиндрической и сферической системах координат

С помощью (3.12) и (3.14) легко написать уравнения Эйлера в цилиндрической, а с помощью (3.13) и (3.15) в сферической системах координат.

Уравнения Эйлера в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r}u_r + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_r}{\partial z}u_z - \frac{u^2_\varphi}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial t} &= F_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}u_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}u_\varphi + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}u_z + \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} &= F_\varphi - \frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial u_z}{\partial r}u_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}u_\varphi + \frac{\partial u_z}{\partial z}u_z + \frac{\partial u_z}{\partial t} &= F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

а в сферической — вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{u_\lambda}{r\cos\varphi}\frac{\partial u_r}{\partial \lambda} - \frac{u^2_\varphi + u^2_\lambda}{r} &= \\ = F_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, & \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\lambda}{r\cos\varphi}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \lambda} + \frac{u_r u_\varphi}{r} - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{r}u^2_\lambda &= \\ = F_\varphi - \frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \varphi}, & \\ \frac{\partial u_\lambda}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\lambda}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \varphi} + \frac{u_\lambda}{r\cos\varphi}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{u_r u_\lambda}{r} + \frac{\operatorname{tg}\varphi\, u_\varphi u_\lambda}{r} &= \\ = F_\lambda - \frac{r}{\rho r\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial \lambda}. & \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

Оператор Лапласа от скалярной функции в ортогональной системе координат

Положив

$$v = \operatorname{grad}\Phi,$$

с помощью формулы (3.7) легко получим, что оператор Лапласа от скалярной функции Φ в произволь-

ной ортогональной системе координат имеет вид

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = \nabla^2\Phi = \Delta\Phi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}\right)}{\partial x^1} + \frac{\partial\left(\sqrt{\frac{g_{33}g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\right)}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\left(\sqrt{\frac{g_{22}g_{11}}{g_{33}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\right)}{\partial x^3}\right]. \qquad (3.18)$$

Отсюда следует, что в цилиндрической системе имеем

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}, \qquad (3.19)$$

а в сферической имеем

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\lambda^2}\right]. \qquad (3.20)$$

Рассмотренные примеры иллюстрируют применение общих формул на важных частных случаях.

Эквивалентность в трехмерном пространстве антисимметричного тензора второго ранга аксиальному вектору

В трехмерном пространстве всякому антисимметричному тензору второго ранга $A_{ij}\partial^i\partial^j$ соответствует аксиальный вектор $\boldsymbol{B} = B^i\partial_i$, контравариантные компоненты которого определены формулами

$$B^\gamma = \frac{1}{\sqrt{g}}A_{\alpha\beta}, \qquad (3.21)$$

где система трех индексов α, β, γ получается из системы 1, 2, 3 круговой перестановкой, а $g = \operatorname{Det}\|g_{\alpha\varrho}\|$. Для доказательства этого утверждения рассмотрим формулы преобразования величин B^γ при переходе от системы координат x^i к системе y^i. При этом будем пользоваться тензорными формулами преобразования компонент мензора $g_{ij}\,\partial^i\partial^j$ и компонент тензора $A_{ij}\partial^i\partial^j$, а также свойством антисимметрии A_{ij}.

Для определителя g имеем [1])

$$g = |g_{ij}| = |g'_{kl}|\left|\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\right|\left|\frac{\partial y^l}{\partial x^j}\right| = g'\Delta^2,$$

где Δ — детерминант матрицы $\|\partial y^k/\partial x^i\|$.

[1]) Для дальнейшего важна формула преобразования величины g; связь g с метрикой вообще несущественна.

Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{g}} A_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{1}{|\Delta|} A'_{pq} \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g'}} A'_{\alpha\beta} \frac{\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \dfrac{\partial y^\beta}{\partial x^j} - \dfrac{\partial y^\beta}{\partial x^i} \dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^j}}{|\Delta|}. \qquad (3.22)$$

(суммирование только по таким $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, что $\alpha > \beta$).

Легко видеть, что величины

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} - \frac{\partial y^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j}$$

являются дополнительными минорами для элемента $\partial x^k/\partial y^\gamma$ матрицы, обратной матрице $\|\partial y^i/\partial x^j\|$, и, следовательно,

$$\frac{1}{|\Delta|} \left[\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} - \frac{\partial y^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j} \right] = \frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma} \frac{\Delta}{|\Delta|},$$

причем индексы α, β, γ и i, j, k должны представлять собой круговые перестановки из 1, 2, 3.

Поэтому формулы (3.22) можно переписать в виде

$$B^k = B'^\gamma \frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma} \frac{\Delta}{|\Delta|}. \qquad (3.23)$$

Эти формулы совпадают с обычными формулами преобразования контравариантных компонент вектора только при условии $\Delta > 0$.

Поэтому вектор $\boldsymbol{B} = B^i \boldsymbol{e}_i$, определенный формулами (3.21), называется аксиальным вектором или псевдовектором, в отличие от обычного — полярного вектора.

При преобразовании инверсии, например при преобразовании

$$y^i = -x^i,$$

компоненты полярного вектора $\boldsymbol{b}$ меняют знак:

$$b'^k = b^i \frac{\partial y^k}{\partial x^i} = -b^k,$$

а компоненты аксиального вектора $\boldsymbol{B}$, как видно из формул (3.23), не меняют знака:

$$B'^k = -B^i \frac{\partial y^k}{\partial x^i} = B^k.$$

Определение ротора вектора в криволинейных системах координат

Вектор $\boldsymbol{c} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ вводится по определению по формулам

$$\boldsymbol{c} = c^{\gamma} \boldsymbol{e}_{\gamma},$$

$$c^{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\nabla_{\alpha} A_{\beta} - \nabla_{\beta} A_{\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right)$$

(α, β, γ образуют круговую перестановку из 1, 2, 3).

Очевидно, что если $\boldsymbol{A}$ — полярный вектор, то $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ является аксиальным вектором.

В декартовой системе координат компоненты вектора $\boldsymbol{c} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ вычисляются по формулам

$$c^{\gamma} = \frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$$

(α, β, γ образуют круговую перестановку из 1, 2, 3).

Тензор Леви-Чивита $\varepsilon = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \boldsymbol{e}_{\alpha} \boldsymbol{e}_{\beta} \boldsymbol{e}_{\gamma}$

Очевидно, что ротор вектора $\boldsymbol{A} = A_{\alpha} \boldsymbol{e}^{\alpha}$ можно рассматривать как результат свертки тензора $\nabla_{\alpha} A_{\beta} \boldsymbol{e}^{\alpha} \boldsymbol{e}^{\beta}$ с антисимметричным по всем индексам псевдотензором третьего ранга $\varepsilon = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \boldsymbol{e}_{\alpha} \boldsymbol{e}_{\beta} \boldsymbol{e}_{\gamma}$, компоненты которого определены формулами

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{g}}, & \text{если } \alpha, \beta, \gamma \text{ образуют четную перестановку из } 1, 2, 3, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{g}}, & \text{если } \alpha, \beta, \gamma \text{ образуют нечетную перестановку из } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{если среди } \alpha, \beta, \gamma \text{ есть два одинаковых индекса.} \end{cases} \tag{3.24}$$

Нетрудно проверить непосредственно, что формулы (3.24) действительно определяют компоненты псевдотензора, т. е. что формулы преобразования $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ при переходе к другой системе координат y^i могут быть записаны в виде

$$\varepsilon'^{ijk} = \frac{\Delta}{|\Delta|} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial y^i}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial y^j}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial y^k}{\partial x^{\gamma}},$$

причем ε'^{ijk} представляются через $g' = \operatorname{Det} \| g'_{ij} \|$ по формулам, аналогичным (3.24). Название тензора Леви-Чивита — псевдотензор связано с наличием в формуле преобразования знака, определенного множителем $\Delta/|\Delta|$. Для собственных преобразований ($\Delta > 0$) псевдотензоры неотличимы от обычных тензоров.

Итак, компоненты вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ могут быть записаны в виде

$$c^{\gamma} = \varepsilon^{\gamma\alpha\beta} \nabla_{\alpha} A_{\beta}.$$

Компоненты векторного произведения в криволинейной системе координат

Рассмотрим еще в криволинейной системе координат операцию векторного произведения двух векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. По определению примем, что компоненты c^γ векторного произведения $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ представляются формулами

$$c^\gamma = \varepsilon^{\gamma\alpha\beta} A_\alpha B_\beta,$$

т. е.

$$c^\gamma = \frac{1}{\sqrt{g}} (A_i B_j - A_j B_i)$$

(i, j, γ образуют круговую перестановку из 1, 2, 3).

Отсюда, в частности, видно, что векторное произведение двух полярных векторов есть аксиальный вектор (псевдовектор).

Примеры аксиальных векторов

Физическими примерами аксиальных векторов — по существу антисимметрических тензоров второго ранга — могут служить векторы вихря скорости $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$, магнитной напряженности $\boldsymbol{H}$, магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ и т. п.

Эквивалентность антисимметричного по двум индексам тензора аксиальному по этим индексам вектору имеет место только в трехмерном пространстве.

В n-мерном пространстве при $n > 3$ подобной эквивалентности нет.

В современной физике наряду с трехмерным пространством с пространственными координатами x^1, x^2, x^3 имеет непосредственный физический смысл пространство четырех измерений с координатами точек пространства x^1, x^2, x^3 и времени $t = x^4$.

При формулировании основных физических уравнений требуется рассматривать векторы и тензоры в четырехмерном пространстве с координатами x^1, x^2, x^3, x^4 и считать, что координаты точек четырехмерного пространства — времени взаимно связаны и в некотором смысле равноправны.

О соответствии в четырехмерном пространстве антисимметричного тензора второго ранга аксиальному и полярному векторам

В физических уравнениях в таком четырехмерном пространстве также встречаются и играют фундаментальную роль антисимметричные тензоры второго ранга.

Пусть F_{ik} — антисимметричный тензор в четырехмерном пространстве. По определению имеем

$$F_{ik} = -F_{ki},$$

и, следовательно,

$$F_{ii} = 0.$$

При преобразовании координат

$$x^i = f^i(y^k), \quad i, k = 1, 2, 3, 4, \tag{3.25}$$

компоненты тензора F_{ik} преобразуются по обычным формулам:

$$F_{ik}^{(y)} = F_{pq}^{(x)} \frac{\partial x^p}{\partial y^i} \frac{\partial x^q}{\partial y^k}. \tag{3.25'}$$

Формулы преобразования (3.25′) и нижеследующие выводы независимы от способа введения метрики в четырехмерном пространстве. Однако удобно вместе с четырехмерным пространством рассматривать еще трехмерное обычное подпространство x^1, x^2, x^3 с метрикой, определенной обычным способом формулой вида

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Для четырехмерной матрицы тензора F_{ik} можно написать

$$\| F_{ik} \| = \begin{Vmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & 0 & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & \sqrt{g}H^3 & -\sqrt{g}H^2 & E_1 \\ -\sqrt{g}H^3 & 0 & \sqrt{g}H^1 & E_2 \\ \sqrt{g}H^2 & -\sqrt{g}H^1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{3.26}$$

где

$$g = \mathrm{Det} \| g_{\alpha\beta} \|.$$

Буквами H^α и E_α ($\alpha = 1, 2, 3$) обозначены соответствующие элементы матрицы F_{ik}. Формулы преобразования (3.25′) для компонент F_{ik} можно рассматривать также как формулы преобразования для величин H^α и E_α. Если наряду с общим преобразованием координат (3.25) рассмотреть частные преобразования координат

$$\left.\begin{aligned} x^\alpha &= f^\alpha(y^1, y^2, y^3) \qquad (\alpha = 1, 2, 3), \\ x^4 &= y^4, \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

в которых преобразуются только пространственные координаты и сохраняется неизменной временная координата, то общие формулы преобразования (3.25′) дадут специальные формулы преобразования для величин, обозначенных во второй матрице (3.26) через H^α и E_α. Из этих формул следует, что для специальных преобразований (3.27) величины H^α и E_α можно соответственно рассматривать как контравариантные

компоненты трехмерного аксиального вектора

$$\boldsymbol{H} = H^{\gamma}\,\boldsymbol{\vartheta}_{\gamma} \qquad (\gamma = 1, 2, 3),$$

$$H^{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,F_{\alpha\beta}$$

(α, β, γ образуют круговую перестановку из 1, 2, 3)

и ковариантные компоненты полярного вектора

$$\boldsymbol{E} = E_{\gamma}\,\boldsymbol{\vartheta}^{\gamma} \qquad (\gamma = 1, 2, 3),$$

$$E_{\gamma} = F_{\gamma 4}.$$

Очевидно, что формулы преобразования для H^{γ} и E_{γ} в общем случае четырехмерного преобразования (3.25) не являются векторными. С точки зрения четырехмерного пространства трехмерные векторы $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{E}$ не являются инвариантными объектами.

Ниже мы увидим, что векторы электрической напряженности и магнитной напряженности можно рассматривать как векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ для соответствующего четырехмерного тензора

$$F = F_{ik}\,\boldsymbol{\vartheta}^{i}\boldsymbol{\vartheta}^{k}.$$

Подчеркнем, что предыдущие связи между F_{ik}, E_{γ} и H^{γ} независимы от метрики четырехмерного пространства. В (3.26) вместо трехмерного метрического тензора $g_{\alpha\beta}\,\boldsymbol{\vartheta}^{\alpha}\boldsymbol{\vartheta}^{\beta}$ можно было бы воспользоваться любым другим пространственным трехмерным тензором второго ранга, для которого составленный из его компонент детерминант не равен нулю.

ГЛАВА V

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИКИ

§ 1. Теорема живых сил и работа внутренних поверхностных сил

Одним из наиболее важных общих следствий динамических уравнений движения сплошной среды является теорема живых сил.

Пусть V — произвольный конечный объем, движущийся вместе с частицами материальной среды, Σ — ограничивающая его поверхность. Предположим, что внутри объема V компоненты тензора напряжений $P = p^{ij}\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_j$ и вектора скорости $\boldsymbol{v} = v^i\mathfrak{e}_i = v_i\mathfrak{e}^i$ — непрерывные дифференцируемые функции пространственных координат и времени.

Возьмем вектор $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,dt$ — вектор перемещения бесконечно малого объема сплошной среды $d\tau$ за время dt; умножим скалярно уравнение импульсов на $d\boldsymbol{r}$ и проинтегрируем по объему V. Получим

$$\int_V \rho\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}\,dt\,d\tau = \int_V \rho\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}\,d\tau + \int_V (\nabla_j p^{ij})\,v_i dt\,d\tau. \tag{1.1}$$

Преобразуем каждый из входящих в это соотношение интегралов.

Кинетическая энергия объема V сплошной среды

Скалярную (инвариантную) величину $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}$ можно вычислить, используя любую систему координат.

Например, в декартовой системе координат легко получим

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = \frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dz}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}^2.$$

Так как масса $dm = \rho\,d\tau$ постоянна, то, очевидно, что

$$\int_V \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}\rho\,d\tau\,dt = \int_M d\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right)dm = d\int_M \frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\,dm = dE,$$

где по определению

$$E = \int_V \frac{\rho\boldsymbol{v}^2}{2}\,d\tau \tag{1.2}$$

— **кинетическая энергия объема V сплошной среды.**

Работа внутренних и внешних массовых сил

Массовые силы $\boldsymbol{F}$ разобьем на две группы: $\boldsymbol{F}^{(i)}$ — внутренние и $\boldsymbol{F}^{(e)}$ — внешние по отношению ко всему объему V. Тогда

$$\int_V \rho \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}\, d\tau = \int_V \rho \boldsymbol{F}^{(e)} \cdot d\boldsymbol{r}\, d\tau + \int_V \rho \boldsymbol{F}^{(i)} \cdot d\boldsymbol{r}\, d\tau = dA_m^{(e)} + dA_m^{(i)}, \quad (1.3)$$

где $dA_m^{(e)}$ и $dA_m^{(i)}$ — элементарные работы внешних и внутренних по отношению к объему V массовых сил, действующих на этот объем, при бесконечно малом перемещении.

Заметим, что сумма всех внутренних массовых сил, действующих на весь объем V, всегда равна нулю, а работа этих сил может отличаться от нуля.

Последний интеграл в выражении (1.1) запишем в виде следующих двух интегралов:

$$\int_V (\nabla_j p^{ij})\, v_i dt\, d\tau = \int_V \nabla_j\, (p^{ij} v_i)\, dt\, d\tau - \int_V p^{ij} \nabla_j v_i dt\, d\tau. \quad (1.4)$$

Для преобразования первого из написанных справа в (1.4) интегралов воспользуемся теоремой Гаусса — Остроградского, а для преобразования второго — очевидным тождеством

$$\nabla_j v_i = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j) + \frac{1}{2}(\nabla_j v_i - \nabla_i v_j) = e_{ij} + \omega_{ij}.$$

В результате получим

$$\int_V (\nabla_j p^{ij})\, v_i dt\, d\tau = \int_\Sigma p^{ij} v_i n_j d\sigma\, dt - \int_V p^{ij} e_{ij} dt\, d\tau - \int_V p^{ij} \omega_{ij} dt\, d\tau, \quad (1.5)$$

где Σ — поверхность, ограничивающая объем V, а n_j — ковариантные компоненты единичного вектора внешней по отношению к объему V нормали к Σ.

Заметим, что в силу антисимметрии тензора $\omega_{ij}\boldsymbol{\vartheta}^i\boldsymbol{\vartheta}^j$ верны равенства

$$p^{ij}\omega_{ij} = \underset{[i<j]}{p^{ij}\omega_{ij}} + \underset{[i<j]}{p^{ji}\omega_{ji}} = \underset{[i<j]}{(p^{ij} - p^{ji})\,\omega_{ij}}. \quad (1.5')$$

Поэтому в классическом случае, когда тензор напряжений симметричен ($p^{ij} = p^{ji}$), последний интеграл в (1.5) равен нулю.

Работа внешних поверхностных сил

Так как $p^{ij} n_j \boldsymbol{\vartheta}_i = \boldsymbol{p}_n$, то можно написать

$$\int_\Sigma p^{ij} v_i n_j d\sigma\, dt = \int_\Sigma \boldsymbol{p}_n \cdot d\boldsymbol{r}\, d\sigma = dA_{\text{пов}}^{(e)}, \quad (1.6)$$

где через $dA_{\text{пов}}^{(e)}$ обозначена работа внешних поверхностных сил, действующих на поверхности Σ выделенного объема V,

при бесконечно малых перемещениях $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,dt$ точек поверхности Σ.

Определение работы внутренних поверхностных сил

Последний из интегралов в (1.4), являющийся инвариантной величиной, по определению называется работой внутренних поверхностных сил напряжений в объеме V:

$$-\int_V p^{ij}\nabla_j v_i dt\,d\tau = dA^{(i)}_{\text{пов}}. \tag{1.7}$$

Теорема живых сил для конечного объема сплошной среды

Таким образом, равенство (1.1) можно записать в виде

$$dE = dA^{(e)}_m + dA^{(i)}_m + dA^{(e)}_{\text{пов}} + dA^{(i)}_{\text{пов}}, \tag{1.8}$$

т. е. для действительного движения дифференциал кинетической энергии конечного индивидуального объема сплошной среды равен сумме элементарных работ внешних массовых, внутренних массовых, внешних поверхностных и внутренних поверхностных сил, действующих на этот объем. Это утверждение носит название теоремы живых сил в применении к конечному объему сплошной деформируемой среды.

Нужно иметь в виду, что в формулировке теоремы живых сил (1.8) dE является полным дифференциалом функции E — кинетической энергии объема сплошной среды, а остальные члены $dA^{(e)}_m$, $dA^{(i)}_m$, $dA^{(e)}_{\text{пов}}$ и $dA^{(i)}_{\text{пов}}$ в общем случае — просто бесконечно малые количества — элементарные работы соответствующих сил на системе непрерывных бесконечно малых перемещений

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,dt,$$

определенных в каждой точке сплошной среды.

Выражение для работы внутренних поверхностных сил в случае симметричного тензора напряжений

Из (1.4), (1.5), (1.5′) видно, что выражение для работы внутренних поверхностных сил можно записать в следующем виде:

$$dA^{(i)}_{\text{пов}} = -\int_V p^{ij}e_{ij}dt\,d\tau - \int_V p^{ij}\omega_{ij}dt\,d\tau, \tag{1.9}$$

или в случае симметричного тензора напряжений в виде

$$dA^{(i)}_{\text{пов}} = -\int_V p^{ij}e_{ij}dt\,d\tau. \tag{1.10}$$

Как известно, антисимметричному тензору ω_{ij} в трехмерном пространстве всегда можно поставить в соответствие аксиальный вектор $\boldsymbol{\omega}$ — вектор вихря скорости (см. гл. IV, § 3). Из приведенных выше рассуждений следует, что наличие вихрей

в движущейся сплошной среде в случае симметричного тензора напряжений (в частности, при отсутствии внутренних моментов количества движения и внешних массовых и поверхностных пар) не оказывает непосредственного влияния на величину элементарной работы внутренних поверхностных сил, а следовательно, на изменение кинетической энергии.

Теорема живых сил для бесконечно малого объема сплошной среды

Запишем теперь теорему живых сил для бесконечно малого объема сплошной среды. Для этого применим теорему о среднем ко всем интегралам (1.2), (1.3), (1.4), входящим в равенство (1.8), выражающее теорему живых сил для конечного объема, разделим результат на массу объема M и перейдем к пределу при $V \to 0$. Получим

$$\frac{dv^2}{2} = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \frac{1}{\rho}\nabla_j (p^{ij}v_i)\,dt - \frac{1}{\rho}p^{ij}\nabla_j v_i dt.$$

Величину $v^2/2$ можно назвать плотностью кинетической энергии, а величины $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$, $\frac{1}{\rho}\nabla_j (p^{ij}v_i)\,dt$, $-\frac{1}{\rho}p^{ij}\nabla_j v_i dt$ — плотностями работы массовых и поверхностных внешних и внутренних сил.

В теорему живых сил для бесконечно малого объема сплошной среды не входит элементарная работа внутренних массовых сил, так как она во всех известных случаях стремится к нулю при $V \to 0$.

Пусть, например, внутренние массовые силы суть силы ньютоновского тяготения между частицами объема V. Тогда работа внутренних массовых сил в объеме V с массой M, очевидно, записывается в виде

$$\int_M \int_M \frac{dm_1\, dm_2}{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2} \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Предел этого выражения, разделенного на M, при $M \to 0$ равен нулю.

Таким образом, теорема живых сил, имеющая место для каждой бесконечно малой частицы, формулируется так: в каждой точке сплошной среды дифференциал плотности кинетической энергии равняется сумме плотностей элементарных работ внешних массовых, внешних поверхностных и внутренних поверхностных сил, действующих на эту среду.

Как видим, теорема живых сил является непосредственным следствием уравнений импульсов и представляет собой уравнение баланса механической энергии. Теорема живых сил имеет энергетическую природу, но это соотношение не является в общем случае законом сохранения энергии. Его можно

трактовать как закон сохранения энергии (в рамках механической постановки задач) только в том случае, когда механическая энергия рассматриваемой системы не переходит в тепловую или в другие виды энергии. Заметим, что общий закон сохранения энергии в этом случае распадается на два — законы сохранения механической и немеханической энергий в отдельности.

Получим выражения для плотности работы внутренних поверхностных сил $\frac{1}{dm}dA^{(i)}_{\text{пов}}$ в некоторых частных случаях. Имеем:

$$\frac{1}{dm}dA^{(i)}_{\text{пов}} = -\frac{1}{\rho}p^{ij}e_{ij}dt - \frac{1}{\rho}p^{ij}\omega_{ij}dt =$$
$$= -\frac{1}{\rho}p^{ij}e_{ij}dt - \frac{1}{\rho}\sum_{[i<j]}(p^{ij}-p^{ji})\,\omega_{ij}dt$$

Если среда движется как твердое тело, то все $e_{ij}=0$ и

$$\frac{1}{dm}dA^{(i)}_{\text{пов}} = -\frac{1}{\rho}\sum_{[i<j]}(p^{ij}-p^{ji})\,\omega_{ij}.$$

Если тензор напряжений несимметричен ($p^{ij}\neq p^{ji}$), то при движении среды как абсолютно твердого тела работа внутренних поверхностных сил может отличаться от нуля, так как угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ и, следовательно, ω_{ij} могут быть не равными нулю (при вращении).

Если тензор напряжений симметричен, то верно равенство

$$\frac{1}{dm}dA^{(i)}_{\text{пов}} = -\frac{1}{\rho}p^{ij}e_{ij}dt, \tag{1.11}$$

т. е. в этом случае работа внутренних поверхностных сил обусловлена, вообще говоря, деформациями. Если среда с симметричным тензором напряжений движется как абсолютно твердое тело, то работа внутренних поверхностных сил в ней всегда равна нулю.

Плотность работы внутренних сил в случае идеальной жидкости

Для идеальной среды $p^{ij} = -pg^{ij}$, поэтому

$$\frac{1}{dm}dA^{(i)}_{\text{пов}} = \frac{p}{\rho}g^{ij}e_{ij}dt = \frac{p}{\rho}e^{i}_{i}dt =$$
$$= \frac{p}{\rho}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dt.$$

Заменяя $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ с помощью уравнения неразрывности, получим

$$\frac{1}{dm}dA^{(i)}_{\text{пов}} = -\frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}dt = p\,d\frac{1}{\rho} = p\,dV, \tag{1.12}$$

где V — удельный объем.

Для бесконечно малой частицы идеальной среды теорема живых сил в областях непрерывного движения среды имеет вид

$$d\frac{v^2}{2} = \frac{1}{dm}dA_m^{(e)} + \frac{1}{dm}dA_{\text{пов}}^{(e)} + p\,d\frac{1}{\rho} = \\ = \boldsymbol{F}^{(e)}\cdot\boldsymbol{v}dt - \frac{1}{\rho}\nabla_k(pv^k)\,dt + p\,d\frac{1}{\rho}. \quad (1.13)$$

Небесполезно отметить, что при движении сплошной среды относительно фиксированной подвижной или неподвижной системы координат величина плотности работы внутренних сил вообще не равняется с обратным знаком плотности работы всех внешних поверхностных и массовых сил.

§ 2. Первое начало термодинамики (закон сохранения энергии) и уравнение притока тепла

Параметры состояния

Начнем с выяснения понятий, лежащих в основе термодинамики и тем самым всей механики сплошной среды, а именно понятий «состояния» системы и «параметров состояния». Мы будем говорить, что состояние нашей системы (например, некоторого объема сплошной среды) задано, если заданы значения некоторых параметров $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n$, которыми полностью определяются все интересующие нас характеристики системы (среды). Определяющие параметры μ^i, которые могут принимать вообще в некоторых диапазонах произвольные значения, называются при этом параметрами состояния.

Набор параметров состояния и их число различны для различных моделей сплошных сред.

Что значит знать состояние среды? На этот вопрос можно дать следующий ответ. Все тела состоят из атомов и молекул, и, если в каждый момент времени известно положение и движение всех элементарных частиц, составляющих тело, известно и состояние всего тела. Однако этот ответ не может нас удовлетворить. В самом деле, если мы захотим, например, задать состояние одного кубического сантиметра покоящегося воздуха, то нам придется задать $3\cdot27\cdot10^{19}$ функций от времени координат молекул (считаемых материальными точками), содержащихся в этом объеме, так как молекулы даже покоящегося газа движутся. В то же время известно, что с макроскопической точки зрения во многих случаях состояние покоящегося воздуха (и других газов) определяется заданием всего только двух параметров — давления p и плотности ρ.

Макроскопическая точка зрения — это точка зрения, в которой учитываются процессы, эффекты и свойства сущест-

венные[1]) только для конечных тел, которые мы наблюдаем или применяем в различного рода явлениях в природе и в технике.

Отнюдь не тривиальная проблема перехода от большого числа параметров, определяющих состояние среды, рассматриваемой как дискретная система, к меньшему числу параметров, подобных ρ и p для газа и определяющих макроскопическое состояние среды, составляет важнейший предмет физики жидкостей, газов и твердых тел. Разрешение этой проблемы всегда связано с дополнительными гипотезами — законами вероятностной и другой природы, гипотезами, которые должны проверяться и черпаться в опытах и наблюдениях.

Макроскопические параметры могут строиться как статистические средние, вычисленные при некоторых допущениях по отношению к совокупностям большого числа молекул, движущихся и расположенных вообще произвольно. Например, в газах макроскопическую скорость $\boldsymbol{v}$ можно вводить как скорость центра тяжести совокупности молекул в физически малом объеме; температуру T — как среднюю энергию хаотического движения атомов и молекул относительно макроскопического движения, приходящуюся на одну степень свободы; напряжение $\boldsymbol{p}_n$ на некоторой площадке — как среднюю характеристику импульса, переносимого молекулами через эту площадку при их хаотическом движении, и т. п.

В общем случае определяющие параметры вводятся для определенных рассматриваемых классов задач с помощью гипотез, при этом опираются на опытные данные и теоретические исследования. Во многих сложных случаях проблема введения определяющих параметров еще открыта и является предметом исследования, например для моделей вязко-пластических твердых тел, для неравновесных явлений в усложненных физических, химических или биологических системах, в различного рода явлениях, сопровождаемых излучением, и во многих, многих других проблемах.

О числе параметров состояния для сплошных сред

Внутреннее состояние малой частицы материального континуума, вообще говоря, можно характеризовать конечным и гораздо меньшим числом определяющих параметров, чем дискретную систему элементарных частиц. Например, внутреннее состояние частицы твердого деформируемого тела в классической теории упругости характеризуется только семью переменными параметрами — шестью компонентами тензора деформаций ε_{ij} и температурой T, а также постоянными для

[1]) Понятие о существенности связано с постановкой задачи, с разумной и целесообразной точностью принятых измерений и определений.

данной конкретной среды физическими константами — модулем Юнга E, коэффициентом Пауссона σ и теплоемкостью c. Вместе с тем не исключается возможность того, что число параметров, определяющих состояние даже бесконечно малой частицы континуума, в какой-нибудь модели континуума (сплошной среде) будет бесконечным.

Примерами такого рода моделей являются модели тел с наследственностью. При введении таких моделей считают, что напряжения p^{ij} зависят не только от деформаций и температуры в данный момент, но от всей предыстории деформирования тела, т. е. от функций $\varepsilon_{ij}(t)$ и $T(t)$. Это равносильно утверждению, что p^{ij} зависят от ε_{ij}, T и всех их производных по времени, т. е. число параметров состояния таких сред бесконечно. Другим, более сложным примером могут служить континуумы, встречающиеся в кинетических теориях, развиваемых в статистической физике, например газ, описываемый уравнением Больцмана. Однако такого рода модели сложны, и опыт теории и практики показывает, что в большинстве практически важных случаев для задания состояния малой частицы можно обойтись конечным и, вообще, небольшим числом параметров. В сложных кинетических теориях при построении решений также часто применяются приближенные методы, равносильные с физической точки зрения переходу к моделям с конечным числом степеней свободы для бесконечно малых частиц.

Заметим, что для определения состояния конечного объема сплошной среды нужно, вообще говоря, всегда задавать функции (а не числа) — распределение деформаций, температуры и т. д. Задание функции равносильно заданию бесконечного числа параметров (например, коэффициентов Фурье для этой функции). Поэтому число определяющих параметров для конечного объема в общем случае для любых моделей сплошных сред всегда бесконечно.

Однако в малом все функции, задающие состояние тела, можно приближенно считать либо линейными, либо квадратичными, либо полиномами не очень высокой степени. Поэтому коэффициенты этих полиномов образуют конечное число параметров, задающих состояние бесконечно малых элементов сплошной среды.

При построении механики сплошной среды бесконечно малые частицы рассматриваются как термодинамические системы, для которых определены механические понятия о положении и характеристиках движения, а также физические понятия о внутреннем состоянии.

Ниже мы примем, что для бесконечно малой частицы существует конечная система характеристик — определяющих па-

раметров, задаваемых в употребляемой системе координат и системе единиц измерения числами.

Некоторые из этих параметров могут быть геометрическими или механическими, как, например, пространственные координаты, скорость, плотность, характеристики деформации и т. п., а другие — физическими или химическими, как, например, температура, концентрации различных компонент, параметры структуры, фазовые характеристики вещества, коэффициенты теплопроводности, вязкости, модули упругости и т. д. и т. п.

Условимся через μ^i обозначать параметры, которые в принятой системе отсчета могут быть переменными, а через k^i — физические постоянные. Некоторые из параметров μ^i, k^i могут быть компонентами различных векторов и тензоров.

Полная система определяющих параметров

По определению для фиксированной малой частицы величины $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n, k^1, k^2, \ldots, k^m$ образуют базис (полную систему определяющих параметров), т. е. они могут быть заданы независимо и в известных диапазонах произвольно, а их набор обладает тем свойством, что все другие рассматриваемые в данном классе задач характеристики состояний и движений можно выразить в универсальной, не зависящей от частной конкретной задачи, форме через них.

Например, ниже мы увидим, что плотность и температура для частицы газа в известных пределах могут быть заданы произвольно, а другие термодинамические функции, например энтропия и давление, определяются через них.

Следует различать систему определяющих параметров в данной конкретной задаче и систему параметров, определяющих состояние среды. В первом случае это система параметров, характеризующих условия задачи, выделяющая единичное глобальное явление для конечных тел на основании системы уравнений и добавочных краевых и других условий (выделение этой системы связано с постановкой конкретных задач); во втором — это характеристики состояния, для которых необходимо составить уравнения, выполняющиеся для всевозможных конкретных задач, процессов.

Фиксирование системы параметров, определяющих физическое состояние элементов среды, является важным и в логическом смысле первоначальным этапом в определении модели сплошной среды, предназначаемой для описания движения некоторой реальной среды при некоторых определенных классах внешних условий.

С математической точки зрения параметры состояния $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n, k^1, k^2, \ldots, k^m$ представляют собой аргументы функций, входящих в замкнутую систему уравнений, описываю-

щих поведение среды [1]). Ясно, что эти функции могут зависеть от разного набора независимых переменных, и в соответствии с этим система определяющих параметров, фиксирующих данную модель сплошной среды, может составляться из разных величин. Например, в случае газа это могут быть p и ρ, или p и T, или ρ и T и т. п.

С физической же точки зрения эти различные системы определяющих параметров для данной модели сплошной среды могут оказаться неравноправными. Как мы увидим в дальнейшем, в заданиях внутренней энергии как функции ρ и энтропии S или p и ρ содержится разное количество информации. При введении системы определяющих параметров необходимо подразумевать и иметь в виду систему величин и характеристик, которые рассматриваются как определяемые величины. Очевидно, что система определяющих параметров по своему числу и составу для различных определяемых величин может быть вообще различной.

О голономных и неголономных термодинамических системах

Можно провести аналогию между понятиями числа степеней свободы в теоретической механике и числа определяющих параметров в механике сплошной среды.

В самом деле, число степеней свободы определяется обычно как число независимых параметров, определяющих положение механической системы. Например, абсолютно твердое тело обладает шестью степенями свободы. Заметим, что если абсолютно твердое тело рассматривается как физическая система, то для его задания необходимо задать еще десять постоянных параметров — массу, положение центра масс в теле и компоненты тензора инерции в центре масс.

В теоретической механике рассматриваются неголономные системы. В механике сплошной среды также возможно такое положение, когда определяющие параметры μ^i изменяются в определенных пределах произвольно, а их приращения $\delta\mu^i$ по условиям рассматриваемого класса задач связаны между собой, например, m неинтегрируемыми соотношениями вида

$$A_i \delta\mu^i = 0,$$

где A_i — некоторые функции определяющих параметров. Тогда число $n - m$ независимых приращений $\delta\mu^i$ оказывается меньше, чем число независимых переменных определяющих параметров μ^i, и термодинамическая система называется неголономной.

---

[1]) По самому смыслу понятия определяющих параметров подразумевается, что фактические функциональные связи устанавливаются соответствующими законами, гипотезами и непосредственными определениями.

Для неголономных систем число степеней свободы определяется как число независимых приращений $\delta\mu^i$.

Рассмотрим пример неголономных соотношений, вытекающих только из определения параметров μ^i. Пусть, для примера, $\mu^1(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ — некоторый скалярный параметр (например, плотность частицы ρ), t — время, ξ^1, ξ^2, ξ^3 — лагранжевы координаты центра выделенной частицы, а параметры μ^2 и μ^3 являются первой и второй производной от μ^1 по t, т. е. определены формулами

$$\mu^2 = \frac{\partial \mu^1}{\partial t}, \qquad \mu^3 = \frac{\partial \mu^2}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mu^1}{\partial t^2}. \tag{2.1}$$

По естественному физическому условию, примем, что время t явно не входит в систему μ^i.

Ясно, что в различных внешних условиях возможны состояния с различными произвольными в некоторых пределах μ^1, μ^2, μ^3, тогда как приращения $d\mu^1$ и $d\mu^2$ за счет изменения времени dt при постоянных ξ^1, ξ^2, ξ^3 всегда связаны одним и тем же неголономным соотношением

$$\mu^2 d\mu^2 - \mu^3 d\mu^1 = 0, \tag{2.2}$$

которое при наличии равенств (2.1) выполняется тождественно. Из равенств (2.1) следует, что для произвольных $\delta\mu^1$ и и $\delta\mu^2$ соотношения (2.2) не выполняются. Такого рода неголономные соотношения встречаются при использовании моделей сплошных сред, для которых среди определяющих параметров имеются последовательные производные по времени. Уравнения (2.1), (2.2) не связаны с наблюдениями или опытами, но как опытный результат надо рассматривать то, что последовательные производные можно и целесообразно вводить в число определяющих параметров при построении моделей сплошных сред и что их следует рассматривать как аргументы некоторых функций, которые в конечном счете черпаются из данных, полученных в опытах.

Пространство состояний

Введем в рассмотрение пространство состояний, т. е. пространство, координатами которого являются параметры состояния μ^i (фазовое пространство).

Разным состояниям термодинамических систем, очевидно, будут соответствовать разные точки пространства состояний.

Процессы и циклы

Совокупность состояний среды, соответствующая некоторой последовательности значений параметров состояния, называется процессом. Особенное значение имеют физически реальные процессы, т. е. процессы, в которых в рамках применяемой модели последо-

вательность состояний может осуществляться с течением времени. В зависимости от внешних и внутренних взаимодействий можно рассматривать различные реальные процессы.

Процессы могут быть непрерывными, когда совокупность состояний для данной частицы μ^1, μ^2, ..., μ^n образует в пространстве состояний непрерывную кривую. В теории встречаются также процессы с разрывами значений параметров состояния μ^1, μ^2, ..., μ^n и, в частности, разрывные процессы, составленные из участков непрерывных кривых в пространстве состояний. В механике сплошной среды изучаются непрерывные процессы и разрывные процессы с отдельными точками разрыва на непрерывных кривых в пространстве состояний.

Между двумя данными одними и теми же состояниями можно, вообще говоря, проводить много различных процессов, как непрерывных, так и разрывных. Семейство кривых, отвечающих реальным процессам, которые могут обусловливаться разнообразными внешними условиями, обладает, вообще говоря, большим произволом, однако в некоторых случаях, например для неголономных систем, соответствующие кривые характеризуются некоторыми легко обнаруживаемыми специальными свойствами. В рассмотренном выше примере из соотношений (2.1) следует, что непрерывный процесс с $\mu^1 = \text{const}$ при $\mu^2 \neq 0$ невозможен. Однако и в этом случае в пространстве состояний наличие равенств (2.1) не исключает реального непрерывного процесса между любыми двумя точками с произвольно заданными координатами $\mu^{1'}$, $\mu^{2'}$, $\mu^{3'}$ и $\mu^{1''}$, $\mu^{2''}$, $\mu^{3''}$.

Число изменяемых параметров и их характер для различного рода процессов могут быть разными. Например, процессы могут быть чисто механическими, когда все параметры немеханической природы сохраняют постоянные значения.

Процесс, в результате которого система возвращается в пространстве состояний к своему первоначальному положению, называется циклом.

В случае непрерывных процессов циклу в пространстве состояний соответствует замкнутая кривая.

В этой главе мы рассмотрим непрерывные процессы, в дальнейшем, в гл. VII, будут изучаться процессы с точками разрыва.

Можно зафиксировать некоторое состояние A и рассматривать всевозможные непрерывные циклы, проходящие через состояние A и некоторое состояние B. Различным процессам или циклам соответствуют различные внешние условия. Это проявляется в том, что уравнения, определяющие μ^1, μ^2, ..., μ^n, содержат некоторые функции, которые могут быть различными, ими можно распоряжаться и этим влиять на рассматриваемые

процессы. Известные примеры моделей сплошных сред показывают, что при фиксированном состоянии A состояние B может, вообще говоря, совпадать со всеми возможными состояниями в фазовом объеме, определяемом физически допустимыми значениями определяющих параметров.

О взаимодействии системы с внешними объектами

Совершая некоторый процесс, система в общем случае взаимодействует с внешними телами и полями. Основная задача при построении моделей сплошных сред состоит в установлении законов и механизмов взаимодействия выделенной частицы сплошной среды с внешними по отношению к ней телами и полями, в частности с соседними частицами той же самой среды. Для приложений и в механике сплошной среды необходимы макроскопические соотношения с малым числом определяющих параметров. Нередко такие соотношения обусловливаются представлениями на микроскопическом уровне о молекулах, атомах и других частицах, о их расположении, движении и силах взаимодействия между ними в теле. Однако все детали таких представлений никогда не известны до конца. И важно подчеркнуть, что даже все известные детали учесть невозможно, а главное, и не нужно. Поэтому при построении моделей сплошных сред всегда в том или ином виде требуется формулировать и использовать феноменологические гипотезы, которые после проверки их полезности для описания наблюдений в опытах называются законами природы.

В физике и, в частности, в механике сплошной среды большое значение имеет учет энергообмена между данной частицей (термодинамической системой) и соседними частицами, внешними телами и внешним полем. Понятие об энергии тесно связано с представлениями о различных видах энергии. Это может быть кинетическая энергия частиц, потенциальная энергия, связанная с относительным расположением частиц, тепловая энергия, электромагнитная энергия, энергия химических связей и некоторые другие виды энергии. При более детальном исследовании на микроскопическом уровне понятия о различных видах (и число видов) энергии меняются. Однако практика показывает, что на макроскопическом уровне можно по некоторым феноменологическим признакам различать перечисленные выше и другие виды энергии и можно говорить о превращениях энергии из одного вида в другой.

Мы будем исходить из основного физического положения о существовании признаков, которые дают возможность на макроскопическом уровне различать виды энергии системы и виды притоков к системе энергии из-за взаимодействия ее с внешними телами и полем, и необходимости учета превращения энергии из одного вида в другой.

Рассмотрим систему, которая характеризуется конечным числом определяющих параметров, например бесконечно малую частицу сплошной среды или конечный объем V при условии, что все частицы этого объема совершают одинаковые процессы (параметры состояния в этом случае постоянны по объему).

Будем подразумевать, что с точки зрения данных о характеристиках внутреннего состояния частицы $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n$ и их бесконечно малых изменений $d\mu^1, d\mu^2, \ldots, d\mu^n$ можно судить о различных суммарных макроскопических притоках энергии к частице извне. Данные об этих притоках в зависимости от элементарного процесса за счет приращений $d\mu^1, \ldots, d\mu^n$ можно и, вообще говоря, нужно рассматривать как описание свойств модели, которое составляет важнейшую часть конструктивного построения модели. Естественно, что вместо этих данных о свойствах различных энергопритоков к частице извне в качестве данных, входящих в определение модели, можно выбирать и другие (в действительности это так и делается), из которых эти сведения об энергообмене можно получить с помощью некоторой цепи универсальных или частных для данной модели соотношений.

В механике до последнего времени главное значение имели приток энергии к частице механической природы, т. е. работа внешних макроскопических объемных или массовых и поверхностных внешних сил над частицей, и приток тепловой энергии, который частица может получать за счет теплопроводности, излучения, химических превращений, течения электрического тока и других механизмов. (Энергии, соответствующие этим притокам, отдаваемым или получаемым частицей, могут превращаться друг в друга внутри частицы или вне ее.)

В настоящее время во многих случаях требуется учитывать электромагнитные взаимодействия; возникает необходимость рассматривать энергообмен частицы с внешней средой за счет более сложных механизмов взаимодействия, таких, например, как работа распределенных поверхностных пар, энергообмен за счет химических, структурных и фазовых превращений и т. п.

Заметим, что в настоящее время происходит исследование новых макроскопических механизмов энергообмена между выделенной частицей и окружающей средой и законов энергообмена между элементарными частицами. На микроскопическом уровне, а во многих случаях на макроскопическом уровне (свойства металлов, взаимодействия внутри тела при низких температурах, взаимодействие лазерных лучей с обычными телами и т. п.) сущность механизма взаимодействий можно понять только в рамках квантовой механики, тогда как нужную феноменологическую формулировку этих взаимодействий мож-

но давать в усложненных моделях сплошной среды в рамках механики Ньютона.

Полный внешний приток энергии для элементарного процесса $d\mu^1$, $d\mu^2$, ..., $d\mu^n$ к малой частице можно представить в виде

$$dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}, \tag{2.3}$$

где $dA^{(e)}$ — работа внешних макроскопических массовых и поверхностных сил, $dQ^{(e)}$ — приток тепла, а dQ^{**} — внешний приток энергии к частице, который возникает за счет различных механизмов взаимодействия, отличных от работы макроскопических сил и теплообмена, например за счет взаимодействия с электромагнитным полем при учете энергии, затрачиваемой на намагничивание и электрическую поляризацию среды, и других причин.

Для элементарной работы внешних сил в соответствии с основным смыслом системы определяющих параметров и в связи с рядом допущений, которые входят в определение модели сплошной среды, для бесконечно малого элементарного процесса, соответствующего изменению параметров $d\mu^1$, $d\mu^2$, ..., $d\mu^n$, можно написать формулу вида

$$dA^{(e)} = P_i(\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n, k^1, k^2, \ldots, k^m)\, d\mu^i. \tag{2.4}$$

В этой формуле работа внешних сил $dA^{(e)}$ представлена через внутренние параметры рассматриваемой частицы и их приращения. Вид функций P_i по своему существу связан с формулировкой основных постулатов, необходимых для определения модели.

Формулу (2.4) для малой частицы сплошной среды можно рассматривать как обобщение формулы

$$dA^{(e)} = mv\, dv \tag{2.5}$$

для материальной точки массы m, движущейся со скоростью $\boldsymbol{v}$, или формулы для абсолютно твердого тела любых конечных размеров

$$dA^{(e)} = mv^*\, dv^* + Ap\, dp + Bq\, dq + Cr\, dr, \tag{2.6}$$

где m — масса тела, $\boldsymbol{v}^*$ — скорость центра масс тела, A, B и C — моменты инерции относительно центральных осей инерции, а p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости на центральные оси.

Для идеальной жидкости, в которой давление задано как функция параметров состояния, на основании теоремы живых

сил (1.13) можно написать

$$\frac{1}{dm} dA^{(e)} = v\,dv - p\,d\frac{1}{\rho}. \qquad (2.7)$$

Каждое из соотношений (2.4) — (2.7) можно рассматривать как определение $dA^{(e)}$ через внутренние параметры среды.

Каждое из этих соотношений может привести к уравнению, определяющему значения параметров в конкретном процессе, если из добавочных исследований для величины $dA^{(e)}$ известен закон, дающий энергообмен между данной частицей и внешними телами в зависимости от внешних условий. Так, для материальной точки можно использовать выражение для $dA^{(e)}$, отличное от (2.5), а именно $dA^{(e)} = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{F}$ — сила. Если сила $\boldsymbol{F}$ известна (известен механизм взаимодействия точки с внешними объектами), то (2.5) приводит к уравнению, определяющему движение точки. Подчеркнем, что законы взаимодействия, характеризующие данную модель, можно устанавливать на основании наблюдений в опытах, в которых измеряется правая часть в (2.4), после соответствующей обработки и обобщений результатов этих наблюдений.

Аналогично (2.4) на основании физических признаков и, вообще говоря, на основании специальных физических допущений, входящих в определение рассматриваемой модели среды, можно также написать

$$dQ^{*} = dQ^{(e)} + dQ^{**} = Q_i(\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n, k^1, \ldots, k^m)\, d\mu^i. \qquad (2.8)$$

Например, для недеформируемого твердого тела или для идеальной несжимаемой жидкости принимается, что

$$dQ^{*} = dQ^{(e)} = c(T)\,dT, \qquad (2.9)$$

где $c(T)$ — коэффициент теплоемкости, а T — температура. Соотношение (2.9) может служить для определения на опыте величины $dQ^{(e)}$. Если для $dQ^{(e)}$ установлен закон теплопередачи, то соотношение (2.8) при $dQ^{**} = 0$ переходит в уравнение распространения тепла.

В более общих случаях формулы (2.4) и (2.9) усложняются. Например, для вязкой несжимаемой жидкости в правой части (2.4) присутствует некоторый положительный член и такой же отрицательный член присутствует в (2.8). Этот член соответствует диссипирующейся работе сил вязких напряжений; эта работа внутренних сил превращается в тепло (об этом подробнее см. в § 7 этой главы). Такое положение типично для тех случаев, когда в частице происходит превращение одного вида энергии в другие виды энергии. Из дальнейшего следует, что

наибольшее значение имеют величины, представляемые суммой $P_i + Q_i$.

Притоки энергии dQ^*, $dQ^{(e)}$ и dQ^{**}, как и элементарная работа внешних макроскопических сил $dA^{(e)}$, не являются в общем случае дифференциалами каких-либо функций, а представляют собой бесконечно малые количества.

Закон сохранения энергии — первое начало термодинамики

Допустим, что имеется процесс, протекающий в пространстве состояний от точки A со значениями параметров состояния μ_0^i по кривой $\mathscr{L}_1$ до точки B со значениями параметров μ^i (рис. 29).

Введем понятие полного притока энергии, который система получает извне в этом процессе. Он, очевидно, равен

$$A^{(e)} + Q^* = \int\limits_{AB(\mathscr{L}_1)} P_i\, d\mu^i + \int\limits_{AB(\mathscr{L}_1)} Q_i\, d\mu^i \qquad (2.10)$$

и, на первый взгляд, должен зависеть от процесса, т. е. от пути интегрирования $\mathscr{L}_1$ в пространстве состояний.

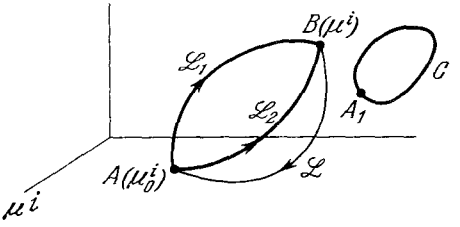


Рис. 29. К закону сохранения энергии.

Первое начало термодинамики, или закон сохранения энергии, можно сформулировать как невозможность осуществления вечного двигателя первого рода, т. е. циклически работающей машины, которая могла бы служить источником полезной энергии, без использования какого-либо внешнего по отношению к этой машине источника энергии.

Это утверждение следует рассматривать как закон, подтверждающийся всеми известными опытными данными.

Пусть теперь система совершает цикл, например C. Тогда первое начало термодинамики, или закон сохранения энергии, сводится к утверждению, что полный приток энергии, поступающий извне к системе, совершающей любой осуществимый цикл, равен нулю, т. е.

$$\oint\limits_C (P_i + Q_i)\, d\mu^i = 0. \qquad (2.11)$$

Отсюда непосредственно вытекает, что полный приток энергии (2.10) к системе извне не зависит от процесса $\mathscr{L}_1$, а зависит только от начального и конечного состояний системы. В самом деле, введем между состояниями A и B, кроме рассматриваемого произвольного процесса $\mathscr{L}_1$, еще другой процесс $\mathscr{L}_2$ и процесс $\mathscr{L}$, протекающий от состояния B к состоянию A. Процессы $\mathscr{L}_1\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}_2\mathscr{L}$ образуют замкнутые циклы, и из закона сохранения энергии сразу следует, что

$$A^{(e)} + Q^* = \int\limits_{\mathscr{L}_1} (P_i + Q_i)\, d\mu^i = \int\limits_{\mathscr{L}_2} (P_i + Q_i)\, d\mu^i = \\ = -\int\limits_{\mathscr{L}} (P_i + Q_i)\, d\mu^i. \qquad (2.12)$$

Полная энергия системы

Поэтому, если начальное состояние A системы фиксировано, то для всех осуществимых процессов полный приток энергии к системе извне зависит только от конечного состояния системы, т. е.

$$A^{(e)} + Q^* = \mathscr{E}(\mu^1, \ldots, \mu^2) - \mathscr{E}(\mu_0^1, \ldots, \mu_0^n),$$

где $\mathscr{E}$ — однозначная функция параметров состояния системы, называемая ее полной энергией. Таким образом, из первого закона термодинамики следует, что существует функция состояния $\mathscr{E}(\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n)$, полный дифференциал которой для осуществимых процессов равен сумме элементарных работ внешних массовых и поверхностных макроскопических сил $dA^{(e)}$ и элементарных притоков к системе извне других видов энергии:

$$d\mathscr{E} = dA^{(e)} + dQ^* = (P_i + Q_i)\, d\mu^i. \qquad (2.13)$$

Легко видеть, что полная энергия системы $\mathscr{E}(\mu^1, \ldots, \mu^n)$ определена с точностью до аддитивной постоянной — значения $\mathscr{E}$ в начальном состоянии системы (A).

Первое начало термодинамики (2.11), если внешние притоки энергии к системе известны, может служить основой для определения полной энергии системы $\mathscr{E}$. Наоборот, если энергия откуда-либо известна, то закон сохранения энергии можно использовать для выяснения механизма взаимодействия рассматриваемой частицы с внешними телами, т. е. для определения $dA^{(e)} + dQ^*$.

Для определения полной энергии системы $\mathscr{E}(\mu^1, \ldots, \mu^n)$ нужно, вообще говоря, знать функции P_i и Q_i. В силу равенства (2.13) P_i и Q_i не могут быть произвольными функциями параметров состояния.

В самом деле, перепишем равенство (2.13) в виде

$$\left(P_i + Q_i - \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \mu^i}\right) d\mu^i = 0. \tag{2.14}$$

Если система голономна, т. е. все $d\mu^1$, $d\mu^2$, ..., $d\mu^n$ независимы (в частности, среди параметров μ^i нет последовательных производных по времени), то из (2.14) вытекает, что

$$P_i + Q_i = \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \mu^i},$$

и, следовательно, $P_i + Q_i$ должны удовлетворять условиям интегрируемости

$$\frac{\partial (P_i + Q_i)}{\partial \mu^k} = \frac{\partial (P_k + Q_k)}{\partial \mu^i}. \tag{2.15}$$

Для неголономных систем можно написать

$$P_i + Q_i = \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \mu^i} + R_i.$$

Для всех процессов, для которых выполняется первый закон термодинамики, величины R_i должны удовлетворять равенству

$$R_i d\mu^i = 0, \tag{2.16}$$

т. е. для всех осуществимых процессов R_i не дают вклада в баланс энергии. Однако сами R_i могут быть отличны от нуля. Для некоторых важных случаев можно указать [1]) общий вид функций R_i, удовлетворяющих условию (2.16).

Для неголономных систем вместо условий (2.15) для осуществимых процессов должны выполняться условия

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial (P_i + Q_i - R_i)}{\partial \mu^k} &= \frac{\partial (P_k + Q_k - R_k)}{\partial \mu^i}, \\ R_i d\mu^i &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

Заметим, что так как равенства (2.15) или (2.17) являются необходимыми и достаточными условиями существования функции $\mathscr{E}(\mu^1, \ldots, \mu^n)$, удовлетворяющей для осуществимых процессов равенству (2.13), то их также можно рассматривать как одну из возможных формулировок закона сохранения энергии.

Условия (2.15) могут быть использованы либо для проверки экспериментальных результатов при определении $P_i + Q_i$,

[1]) См. Л. И. Седов, Некоторые проблемы построения новых моделей сплошных сред. Труды XI конгресса по прикладной и теоретической механике в Мюнхене, 1964.

1156

либо для уменьшения числа экспериментальных измерений. В последнем случае некоторые из величин P_i+Q_i определяются экспериментально, а другие вычисляются по (2.15).

Внутренняя энергия системы

Выше была введена функция $E = v^2/2$ — плотность кинетической энергии среды; $E\rho d\tau$ не совпадает, вообще говоря, с функцией $\mathscr{E}$ — полной энергией частицы. Положим

$$\mathscr{E} = (E + U)\,\rho\, d\tau,$$

где U — скалярная функция параметров состояния, называемая плотностью внутренней энергии. Плотность внутренней энергии, или внутренняя энергия единицы массы, или удельная внутренняя энергия U, как и полная энергия системы $\mathscr{E}$, определяется с точностью до аддитивной постоянной и существует для каждой термодинамической системы.

Удельная внутренняя энергия U не зависит явно от пространственных координат и времени, если пространство и время можно считать однородными. Свойство однородности означает, что во всех точках пространства и во все моменты времени при одинаковых внешних условиях в данной термодинамической системе процессы протекают одинаково.

Полную энергию и внутреннюю энергию можно вводить как для всего тела в целом, так и для отдельных его частей. Внутренняя энергия конечной части тела или тела в целом, вообще говоря, не обладает свойством аддитивности, т. е. внутренняя энергия тела в целом не равна сумме внутренних энергий составляющих это тело частей.

Так, например, при прочих одинаковых условиях (одинаковая температура и т. п.) внутренняя энергия двух мелких капель воды не будет равна внутренней энергии одной большой капли, масса которой равна сумме масс двух мелких, если учитывается энергия, связанная с поверхностным натяжением [1]). Очевидно, что внутренняя энергия, связанная с взаимным притяжением частей тела по закону всемирного тяготения, также не аддитивна.

Однако во многих случаях внутреннюю энергию можно считать аддитивной, в частности, так будет для воды в тех случаях, когда не нужно учитывать поверхностное натяжение, или для упругого тела, подчиняющегося закону Гука. Если

[1]) Здесь полезно предостеречь от неясностей, которые могут возникнуть в связи с тем, что если рассматривать самопроизвольный процесс медленного слияния двух изолированных капель в одну, то в силу закона сохранения энергии внутренняя энергия одной большой покоящейся капли будет, конечно, равна сумме энергий двух вначале покоившихся малых капель. Однако температура одной большой капли будет при этом больше, чем одинаковая температура двух малых капель до слияния.

внутренняя энергия аддитивна, то полная энергия произвольного конечного объема V определяется следующим образом:

$$\mathscr{E} = \int_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + U \right) d\tau.$$

Дальнейшие рассуждения ведутся в основном для бесконечно малой частицы и поэтому справедливы как для случая, когда внутренняя энергия обладает свойством аддитивности, так и для того случая, когда она им не обладает.

Заметим, что понятие внутренней энергии, как и все другие термодинамические соотношения и понятия, необходимо в общем случае изучения движений сплошной среды, но существуют некоторые частные примеры сплошных сред, в частности перечисленные в гл. IV, когда понятие внутренней энергии не нужно для замыкания системы уравнений, описывающих непрерывные движения. Понятие внутренней энергии в явной форме не требуется при изучении механического движения идеальной несжимаемой жидкости, без этого понятия так же можно обойтись и в теории упругих тел, если не рассматривать тепловые эффекты.

Уравнение закона сохранения энергии

Таким образом, универсальное соотношение, выражающее собой закон сохранения энергии, можно представить в виде

$$dE + dU_m = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}, \tag{2.18}$$

где dU_m — изменение внутренней энергии рассматриваемого тела, dE — изменение его кинетической энергии, $dA^{(e)}$ — элементарная работа внешних макроскопических сил, $dQ^{(e)}$ — элементарный приток тепла к телу извне, а dQ^{**} — элементарный приток к телу извне других, отличных от работы макроскопических механических сил, нетепловых видов энергии.

Уравнение притока тепла

Вычитая из этого соотношения равенство (1.8), выражающее теорему живых сил для сплошной среды, получим уравнение

$$dU_m = -dA^{(i)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}$$

или

$$dU_m = -dA^{(i)} + dQ^{*}, \tag{2.19}$$

которое носит название уравнения притока тепла и может заменять собой закон сохранения энергии.

Если процесс очень плавный, так что ускорениями можно пренебречь, то $dE = 0$, и поэтому для таких процессов можно принять, что работа внешних сил равна работе внутренних

сил, взятой с обратным знаком:

$$dA^{(e)} = -dA^{(i)}.$$

Таким образом, для таких процессов, например для квазистатических процессов, уравнение притока тепла можно записать еще в следующем виде:

$$dU_m = dA^{(e)} + dQ^*.$$

Дифференциальное уравнение притока тепла

Уравнение притока тепла (2.19) можно записать для любых мысленно выделенных объемов сплошной среды. Составим его для бесконечно малой частицы сплошной среды. Для плотности U внутренней энергии имеем

$$U = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{U_{\Delta m}}{\Delta m}$$

(предполагается, что такой предел существует). Аналогично введем элементарные притоки внешних энергий к единице массы среды:

$$dq^{(e)} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{dQ^{(e)}}{\Delta m},$$

$$dq^{**} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{dQ^{**}}{\Delta m}.$$

Разделив (2.19) на Δm, устремив Δm к нулю и вспомнив, что плотность работы внутренних поверхностных сил равна

$$-\frac{1}{\rho} p^{ij} \nabla_j v_i \, dt,$$

запишем дифференциальное уравнение притока тепла в виде

$$dU = \frac{1}{\rho} p^{ij} \nabla_j v_i \, dt + dq^{(e)} + dq^{**}. \tag{2.20}$$

Из теории деформаций известно [1]), что компоненты тензора скоростей деформаций представляются в виде

$$\hat{e}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{\nabla}_j \hat{v}_i + \hat{\nabla}_i \hat{v}_j) = \frac{1}{2} \frac{d\hat{g}_{ij}}{dt};$$

[1]) См. гл. II, § 6.

если метрика начального состояния $\overset{\circ}{g}_{ij}$ не зависит от времени, то

$$\hat{e}_{ij}\,dt = d\hat{\varepsilon}_{ij},$$

причем дифференциалы компонент тензора деформаций определены в сопутствующей системе координат. Поэтому уравнение притока тепла при $p^{ij} = p^{ji}$ можно переписать еще в следующем виде:

$$dU = \frac{1}{\rho}\,\hat{p}^{ij}\,d\hat{\varepsilon}_{ij} + dq^{(e)} + dq^{**}. \tag{2.21}$$

Дифференциалы компонент тензора деформаций $d\hat{\varepsilon}_{ij}$, определенные в сопутствующей системе координат, как и сами компоненты тензора деформаций $\hat{\varepsilon}_{ij}$, можно рассматривать в любой произвольной системе координат. Обозначим компоненты тензора $d\hat{\varepsilon}_{ij}$ в произвольной системе координат через $d\varepsilon_{ij} = e_{ij}dt$. В произвольной (не сопутствующей) системе координат так введенные компоненты $d\varepsilon_{ij}$ не будут дифференциалами компонент тензора деформаций ε_{ij} в этой же системе координат. С учетом этого замечания уравнение (2.21) можно в произвольной системе координат записать в виде

$$dU = \frac{1}{\rho}\,p^{ij}\,d\varepsilon_{ij} + dq^{(e)} + dq^{**}, \tag{2.22}$$

где

$$d\varepsilon_{ij} = e_{ij}\,dt.$$

Для каждого состояния при различных движениях сплошной среды величины $d\varepsilon_{ij}$, а также приращения определяющих параметров, от которых зависят dU, $dq^{(e)}$ и dq^{**}, могут принимать до известной степени произвольные значения. Это связано с тем, что уравнение (2.22) не содержит внешних массовых сил, не зависит явно от граничных и других внешних условий, которые могут быть различными и которые оказывают существенное влияние на приращения определяющих параметров, входящих в уравнение (2.22). Вместе с тем уравнение (2.22) является универсальным уравнением, пригодным для всевозможных процессов.

Произвол, связанный с линейной независимостью соответствующей совокупности дифференциалов определяющих параметров для всевозможных процессов, можно использовать для получения из одного уравнения (2.22) нескольких уравнений типа уравнений состояния.

§ 3. Термодинамическая равновесность, обратимые и необратимые процессы

Термодинамическое равновесие

Как известно, можно рассматривать механическое равновесие абсолютно твердых тел. Говорят, что тело находится в положении механического равновесия, если оно может находиться в этом положении при сохранении всех внешних условий неопределенно долго. Термодинамически равновесным состоянием системы называется такое состояние, в котором все характеристики внутреннего состояния системы (в том числе и механические) при сохранении внешних условий могут сколь угодно долго сохранять свои значения. В пространстве состояний состояние термодинамического равновесия изображается точкой.

Если среди определяющих параметров имеются субстанциональные производные по времени, то в состоянии равновесия эти параметры равны нулю.

Равновесные и неравновесные процессы

Термодинамические процессы могут протекать как быстро, так и медленно. Можно рассматривать предельный случай процесса, протекающего столь медленно, что скорости изменения всех параметров в нем бесконечно малы. В пространстве состояний такой процесс изображается кривой, каждая точка которой является точкой равновесия. Бесконечно медленные процессы, в которых каждое промежуточное состояние является состоянием равновесия, называются равновесными; в соотношениях, описывающих равновесные процессы, несущественна величина скорости изменения параметров, однако направление изменения определяющих параметров в равновесном процессе может быть существенным.

Процессы, протекающие с конечными скоростями (если скорости оказывают влияние на физические связи), носят название неравновесных.

Когда говорят, что система совершает некоторый процесс, то имеют в виду определенный субстанциональный материальный объект, параметры состояния которого изменяются, т. е. применяют точку зрения Лагранжа. Очевидно, что определения равновесных и установившихся (стационарных) процессов при наличии движения среды в общем случае не совпадают. Процесс может быть установившимся, т. е. все параметры состояния системы могут не изменяться со временем в данной точке геометрического пространства ($\partial\mu^j/\partial t = 0$), и в то же время быть неравновесным, т. е. иметь существенно влияющие на процессы в частицах среды конечные скорости изменения параметров ($d\mu^k/dt \neq 0$).

Обратимые и необратимые процессы

Процесс, протекающий от некоторого состояния A к состоянию B, называется обратимым, если для каждого промежуточного состояния все уравнения *для бесконечно малых приращений параметров* удовлетворяются также при замене знаков этих приращений на обратные. Таким образом, если некоторая последовательность состояний образует в пространстве состояний обратимый процесс, то эту последовательность система может проходить как в прямом, так и в обратном направлении, причем соответствующие каждому элементу пути внешние притоки энергии $dA^{(e)}$, $dQ^{(e)}$ и dQ^{**} в прямом и обратном процессе отличаются только знаками. Если процесс не обладает таким свойством, то он называется необратимым.

Заметим, что в число определяющих параметров для необратимых процессов существенно входят величины, характеризующие направление изменения некоторых определяющих параметров; для обратимых процессов направления изменения термодинамических параметров несущественны. Обычно рассматриваются обратимые процессы, которые одновременно являются равновесными [1]). Однако можно рассматривать обратимые процессы, не составленные из термодинамически равновесных состояний.

Строго говоря, все реальные процессы в макроскопических масштабах протекают с конечными скоростями, направления их существенны, и поэтому они являются в действительности необратимыми, но практически многие процессы можно считать термодинамически обратимыми. С практической и теоретической точек зрения в ряде приложений можно моделировать действительные явления с помощью обратимых процессов.

Пример процесса, который практически можно считать обратимым

Например, исследования показывают, что иногда практически можно считать обратимым даже очень быстро протекающий процесс истечения частицы газа из сопла реактивного двигателя, в котором частица газа переходит за время порядка тысячных долей секунды от состояния практического покоя с давлением порядка 70 *атм* в камере сгорания реактивного

---

[1]) Понятия равновесных и обратимых процессов в общем случае различны. Однако бесконечно медленные равновесные процессы, для которых в конечных соотношениях между определяющими параметрами не только скорости, но и вообще направление изменения определяющих параметров несущественны (не являются существенными аргументами), можно рассматривать как обратимые.

С другой стороны, примером необратимого процесса для системы в целом может служить явление установившейся теплопередачи теплопроводностью в покоящейся среде; в этом случае состояния всех малых частиц среды можно рассматривать как равновесные.

двигателя к состоянию движения со скоростями порядка 3000 *м/сек* и с почти нулевым давлением в свободном пространстве. Так происходит движение газов при полете на больших высотах ракеты с работающим ракетным двигателем. В этом процессе обмен тепловой энергией между частицами газа с различной температурой не успевает осуществиться; однако переменные термодинамические характеристики в частице связаны практически так же, как и при равновесии.

О равновесных и наболее вероятных состояниях

Рассмотрим некоторый набор макроскопических параметров состояния, введенных как статистические средние соответствующих характеристик микроскопического движения молекул, например температуру T и плотность ρ. Очевидно, что каждым конкретным значениям T и ρ может соответствовать много распределений характеристик микроскопического движения. Оказывается, равновесным значениям макроскопических параметров соответствует наибольшее число возможных различных микросостояний. Поэтому, если термодинамическая система предоставлена самой себе, то наиболее вероятным состоянием из всех, в которых она может находиться, является равновесное. В связи с этим все изолированные системы или уже находятся в состоянии равновесия, или стремятся к нему.

Макроскопические характеристики, вероятности средних и необратимость

Заметим еще, что все известные микроскопические законы, описывающие движение и взаимодействие элементарных частиц, например закон гравитационного притяжения Ньютона и законы электромагнитного взаимодействия, обратимы. Необратимость же появляется только за счет статистических законов, верных для больших ансамблей частиц, и является своего рода платой за возможность введения вместо сложной системы огромного числа частиц (с известными, вообще говоря, лишь приближенно законами взаимодействия и начальными условиями) простой подставной системы, описываемой небольшим числом макроскопических характеристик, связанных с наиболее вероятными состояниями.

Благодаря большому числу частиц в практически малых объемах распределение вероятностей имеет очень острый пик; это значит, что имеются шансы для реализации только вполне определенных значений средних величин.

При необратимых процессах сами распределения вероятностей, вообще, зависят от времени.

О понятии температуры

Одной из основных характеристик состояния физических тел является температура. В нашей повседневной жизни первоначальное представление о температуре тела непосредственно связано с чувственными ощущениями. Мы говорим, что тело A имеет большую,

чем тело B, температуру ($T_A > T_B$), если при контакте тела A с телом B обязательно возникает переход тепловой энергии от тела A к телу B. Два находящихся в термодинамическом равновесии тела, будучи приведены в соприкосновение, имеют одинаковую температуру, если между ними не возникает потока тепловой энергии. Из опыта известно, что если привести в соприкосновение любые два тела A и B и затем предоставить эту систему самой себе, то в ней произойдет процесс, результатом которого будет выравнивание температур тел A и B. Этот факт делает возможным устройство термометров — приборов, с помощью которых можно количественно измерять температуру в некоторой шкале, например в шкале Цельсия, характерными точками в которой являются точки кипения и замерзания воды при атмосферном давлении.

Понятие температуры не имеет смысла в аналитической механике для систем с небольшим числом степеней свободы. На практике температуру можно приписывать всевозможным телам, состоящим из большого числа частиц.

В отличие от механики материальной точки и абсолютно твердого тела, в механике сплошной среды нельзя, вообще говоря, обойтись без понятия температуры. Выражение для внешнего притока тепла $dq^{(e)}$ входит в уравнение притока тепла и в закон сохранения энергии, поэтому необходимо изучить механизм передачи тепла, а следовательно, и ввести понятие температуры. Подробное и глубокое изучение понятия температуры связано с привлечением молекулярно-кинетической теории. В связи с этим следует, однако, отметить, что весьма совершенное понятие о температуре и методах ее измерения было уже давно введено в науку независимо от углубленного понимания температуры в рамках статистической физики.

В § 5 мы изложим замечательную термодинамическую макроскопическую теорию, в которой на основе второго закона термодинамики дается строгое определение абсолютной температуры для термодинамически равновесных состояний тел.

Из молекулярно-кинетической теории известно, что температуру T можно рассматривать как величину, пропорциональную средней энергии хаотического теплового движения молекул, приходящуюся на одну степень свободы молекулы. Если различные сорта элементарных частиц имеют в среднем различные энергии или если частицы одного сорта имеют различные средние энергии, приходящиеся на различные степени свободы, то при достаточно медленно протекающих процессах взаимодействие микрочастиц приводит к выравниванию средних энергий. Для резко выраженных неравновесных процессов, когда внутри макроскопически малой частицы не успевает происходить статистическое выравнивание энергии между раз-

личными степенями свободы одних и тех же частиц или между различными сортами частиц, понятие температуры макроскопической частицы в целом теряет свой основной смысл.

В неравновесных случаях среде иногда можно приписывать несколько температур, например температуру колебательных, вращательных, поступательных степеней свободы молекул или температуры ионов и электронов в плазме, если ионы и электроны в отдельности находятся в равновесных состояниях, и т. д.

При наличии термодинамического равновесия в малых объемах тела температура для малых частиц определена однозначно. Однако даже в этом случае понятие температуры может терять смысл для тел конечных размеров, если отсутствует тепловое равновесие между различными частями тела.

Например, что понимать под температурой земного шара? В различные моменты времени можно говорить о температуре тропиков, умеренного пояса, полюсов, температуре в центре Земли. Но температуру земного шара в целом определить затруднительно и не всегда целесообразно.

Обычно рассматривают температуру достаточно малых частей тела и изучают тепловые потоки в теле. Опыт показывает, что во многих практических вопросах часто можно предполагать, что термодинамическое равновесие в малых объемах системы имеет место. В приложениях неравновесность и необратимость часто имеют место только за счет отсутствия равновесия в больших объемах тел при неравномерном распределении по частицам температуры и других термодинамических характеристик (таких, как концентрации химических компонент смеси и т. п.).

§ 4. Двухпараметрические среды. Совершенный газ. Цикл Карно

Двухпараметрической средой называется среда, все термодинамические функции которой зависят только от двух термодинамических параметров состояния. Если эти два параметра — давление p и плотность ρ, то удельная внутренняя энергия такой среды должна выражаться через них, $U = U\ (p, \rho)$.

Уравнение притока тепла для идеального газа

Если среда представляет собой идеальную сжимаемую жидкость (газ), то работа внутренних поверхностных сил, отнесенная к единице массы, имеет вид

$$\frac{1}{dm} dA^{(i)}_{\text{пов}} = p\, d\frac{1}{\rho}, \tag{1.12}$$

и уравнение притока тепла в предположении, что $dq^{**} = 0$, записывается следующим образом:

$$dU + p\, d\frac{1}{\rho} = dq^{(e)}. \tag{4.1}$$

Уравнение состояния совершенного газа

В совершенном газе давление, плотность и температура связаны уравнением Клапейрона:

$$p = \rho RT; \tag{4.2}$$

R — некоторое постоянное число, называемое газовой постоянной, различное для разных газов. Уравнение типа (4.2), связывающее давление, температуру, плотность и, возможно, другие физические характеристики среды, называется уравнением состояния.

Для воздуха

$$R = 287{,}042 \frac{м^2}{сек^2\, град}.$$

Можно ввести универсальную (постоянную для всех газов) газовую постоянную R_0 и постоянную Больцмана k согласно равенствам

$$R = \frac{R_0}{M} = \frac{k}{m}.$$

Здесь M — средняя масса одной грамм-молекулы газа, определяемая по формуле

$$\frac{n}{M} = \frac{n_1}{M_1} + \frac{n_2}{M_2} + \ldots + \frac{n_n}{M_n},$$

где n — полное число молекул в данном объеме смеси, n_i — число молекул, а M_i — соответствующие массы грамм-молекул отдельных сортов газов; m — средняя масса молекулы в граммах.

$$R_0 = 8{,}3144 \cdot 10^7 \frac{эрг}{моль\, град}, \qquad k = 1{,}38 \cdot 10^{-16} \frac{эрг}{град}.$$

Внутренняя энергия совершенного газа

Совершенный газ можно определить как газ, в котором молекулы взаимодействуют только при столкновениях. Поэтому можно считать, что внутренняя энергия одноатомного совершенного газа представляет собой суммарную кинетическую энергию хаотического движения атомов.

Для внутренней энергии U единицы массы можно написать

$$U = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} + \text{const}$$

(M — суммарная масса атомов, m_i и v_i — массы и скорости отдельных атомов относительно их общего центра масс, а N — число атомов в рассматриваемом малом объеме). Если считать,

что все атомы газа одинаковы, то $M = Nm$ и

$$U = \frac{v_{\text{ср}}^2}{2} + \text{const},$$

где $v_{\text{ср}}^2$ — среднее значение квадрата скорости атомов в хаотическом движении. Для совершенного газа, согласно определению температуры как характеристики средней энергии, приходящейся на одну степень свободы в хаотическом тепловом движении атомов, удельную внутреннюю энергию U можно представить в виде

$$U = c_V T + \text{const}. \tag{4.3}$$

Здесь через c_V обозначен размерный коэффициент пропорциональности между $\frac{1}{2} v_{\text{ср}}^2$ и T.

Задание внутренней энергии U в виде (4.3) вместе с уравнением Клапейрона фиксирует определенную модель сплошной среды, называемую совершенным газом. Сравнения с экспериментальными данными показывают, что движения реальных газов при обычных условиях достаточно хорошо описываются такой моделью.

Теплоемкости при постоянных объеме и давлении. Формула Майера

На основании уравнения притока тепла (4.1) для совершенного идеального газа в случае процесса, протекающего при постоянном удельном объеме $\left(d\frac{1}{\rho} = 0\right)$, можно легко получить, что

$$(dq^{(e)})_{V = \text{const}} = dU = c_V dT,$$

или

$$\left(\frac{dq^{(e)}}{dT}\right)_{V = \text{const}} = c_V.$$

Следовательно, c_V представляет собой количество тепла, которое необходимо подвести к единице массы среды для того, чтобы при постоянном объеме поднять ее температуру на 1° С; поэтому c_V называется теплоемкостью при постоянном объеме [1]).

В случае процесса при постоянном давлении из уравнения притока тепла для идеального совершенного газа получим

$$(dq^{(e)})_{p=\text{const}} = dU + p\,d\frac{1}{\rho} = c_V dT + d\frac{p}{\rho} = (c_V + R)\,dT. \tag{4.4}$$

[1]) Если при столкновениях число частиц меняется, то формула (4.3) заменяется формулой $U = \int c_V(T)\,dT$.

Количество тепла, которое необходимо подвести к единице массы среды, чтобы при постоянном давлении поднять температуру на 1° С, называется теплоемкостью при постоянном давлении и обозначается через c_p:

$$c_p = \left(\frac{dq^{(e)}}{dT}\right)_{p=\text{const}}.$$

Поэтому из (4.4) вытекает следующая формула, связывающая для совершенного газа теплоемкости при постоянных давлении и объеме и газовую постоянную R:

$$c_p - c_V = R, \tag{4.5}$$

которая носит название формулы Майера.

Уравнение притока тепла в общем случае содержит внешний приток тепла $dq^{(e)}$. В некоторых случаях уравнение притока тепла можно использовать для определения потребного или осуществленного притока тепла, если движение и последовательность состояний сплошной среды заданы или известны. В задачах об определении движений и состояний среды необходимо иметь данные о законах, определяющих внешний приток тепла.

Физические механизмы подвода тепла к среде

Приток или отдача тепловой энергии могут быть обусловлены различными физическими явлениями. В приложениях наиболее важны следующие физические механизмы подвода тепла.

1. Теплопроводность — явление выравнивания средней тепловой энергии между частями среды, находящимися в непосредственном контакте, которое происходит за счет механических взаимодействий и столкновений при тепловом движении молекул, атомов, электронов и других частиц, из которых состоит среда. Теплоотдача, обусловленная теплопроводностью, существенным образом связана с макроскопическим неравномерным распределением температуры по объему тела.

2. Тепловое излучение и поглощение излучения — явление, обусловленное изменениями возможных состояний элементарных частиц (молекул, атомов, электронов и т. п.), из которых составлена среда.

3. Тепловыделение, обусловленное электрическими диссипативными процессами, и, в частности, джоулево тепло, выделяемое внутри тела при наличии электрического тока.

4. Иногда можно с помощью дополнительного условия относить к внешнему притоку тепла $dq^{(e)}$ некоторые части приращения внутренней энергии dU и работы внутренних сил $dA^{(i)}$ путем

переноса этих членов в правую часть уравнения притока тепла.

Например, изменение внутренней энергии за счет химических превращений или фазовых переходов, связанных с тепловыделением или теплопоглощением, можно заменить внешними притоками тепла и учитывать только изменение внутренней энергии за счет изменения температуры, механических параметров и, возможно, других изменяющихся свойств среды.

Решение конкретных задач с использованием уравнения притока тепла, в котором учитываются законы для притока тепла, как правило, математически весьма трудно. В приложениях часто применяются дополнительные допущения и, в частности, распространено использование следующих идеальных процессов.

Адиабатические процессы

I. Процессы, в которых отсутствует приток внешнего тепла и теплообмен между соседними частицами, т. е. $dQ^{(e)}=0$. Такие идеальные процессы называются адиабатическими. Идея об адиабатических процессах связана с рассмотрением теплоизолированных тел или быстро протекающих (но иногда обратимых) процессов, когда теплообмен не успевает проявиться существенным образом.

Изотермические процессы

II. Другим примером может служить идеальный процесс, в котором теплообмен, обусловленный теплопроводностью или излучением, представляет собой настолько интенсивный процесс, а изменение состояний протекает настолько медленно, что температуру всех частей системы можно считать постоянной. Такой процесс называется изотермическим.

Уравнение изотермического процесса имеет вид

$$\frac{dT}{dt}=0.$$

Это уравнение вместе с уравнением состояния среды заменяет уравнение притока тепла, что, вообще говоря, сильно упрощает теоретическое решение задачи об отыскании движения среды.

Из уравнения притока тепла можно при этом вычислить количество тепла $dQ^{(e)}$, которое надо подводить к каждой частице среды для осуществления изотермического процесса.

Заметим, что условие $dT/dt=0$ означает лишь постоянство температуры со временем в каждой индивидуальной частице среды, температура разных индивидуальных частиц может быть при этом разной. Однако часто, говоря об изотермических процессах, предполагают, что температура постоянна в пространстве и во времени, т. е. $T=\text{const}$.

Наконец, иногда изотермическими называют также процессы, в которых температура частиц может меняться во времени, но одинакова для всех частиц. В этом случае вместо равенства $dT/dt = 0$ предполагается выполнение условия

$$\operatorname{grad} T = 0 \text{ или } T = f(t).$$

Очевидно, что ясное понимание постановки задачи исключает возможность какой-либо путаницы, связанной с существованием различных определений изотермических процессов.

III. Для двухпараметрической сплошной среды в качестве соотношения, фиксирующего процесс, можно взять вместо уравнения притока тепла прямо некоторую связь между плотностью и давлением. Если связь одинакова для всех частиц, то такой процесс является баротропным.

Политропные процессы

В частности, процесс называется политропным, если выполняется равенство

$$p = C\rho^n,$$

где n — постоянное число — показатель политропы, а C — некоторая постоянная.

С помощью уравнения притока тепла для заданной связи $p = f(\rho)$ легко определить величину внешнего притока тепла, обеспечивающую наличие этой связи.

Если газ совершенный и процесс политропный, то из уравнения притока тепла при $n > 1$ найдем

$$dq^{(e)} = dU + C\rho^n d\frac{1}{\rho} = c_V dT - \frac{\alpha' RT}{n-1}.$$

Отсюда на основании равенства Майера

$$R = c_p - c_V$$

при постоянном R получим простую формулу для притока тепла:

$$dq^{(e)} = c_V \frac{n - \frac{c_p}{c_V}}{n-1} dT = c^* dT.$$

Если $n > c_p/c_V > 1$, то при повышении температуры $dq^{(e)} > 0$ — получается подвод тепла. Если $1 < n < c_p/c_V$, то $dq^{(e)} < 0$ при $dT > 0$ и, следовательно, повышение температуры сопровождается отводом тепла. Если $n = c_p/c_V$, то $dq^{(e)} = 0$, т. е. такой политропный процесс является адиабатическим. Указанные свойства характеризуют физический смысл показателя политропы n.

Изотермы совершенного газа

Рассмотрим пространство состояний двухпараметрической среды, задаваемой параметрами состояния p и $V = 1/\rho$, например совершенного газа. Все термодинамические функции такой среды и, в частности, температура, которую сейчас мы будем обозначать буквой θ, должны быть функциями p и $1/\rho$:

$$\theta = \theta\left(p, \frac{1}{\rho}\right).$$

Рассмотрим равновесные изотермические ($\theta = \text{const}$) процессы, протекающие в такой среде. Проведем в пространстве состояний $(p, 1/\rho)$ кривые $\theta = \text{const}$ (изотермы, рис. 30).

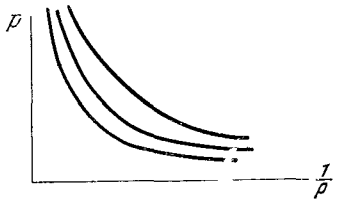


Рис. 30. Изотермы совершенного газа.

В случае совершенного газа изотермы в плоскости $(p, 1/\rho)$ будут, очевидно, гиперболами

$$\frac{p}{\rho} = \text{const}. \qquad (4.6)$$

Из уравнения притока тепла

$$dU + p\,d\frac{1}{\rho} = dq^{(e)}$$

всегда можно подсчитать приток тепла $dq^{(e)}$, который необходимо подвести к системе для того, чтобы процесс был изотермическим. Для идеального совершенного газа этот приток тепла равен

$$(dq^{(e)})_{\text{изот}} = p\,d\frac{1}{\rho} = R\theta\rho\,d\frac{1}{\rho}.$$

Для совершенного газа $dq^{(e)} > 0$ при изотермическом расширении и $dq^{(e)} < 0$ при изотермическом сжатии. Для произвольного газа вид изотерм в плоскости $(p, 1/\rho)$ зависит от вида уравнения состояния.

Заметим, что на одной и той же изотерме $\theta = \text{const}$ могут находиться точки, соответствующие, например, точкам кипения и затвердевания воды, так как температуры кипения и затвердевания воды зависят от давления.

Адиабата Пуассона

В случае адиабатических процессов ($dq^{(e)} = 0$) уравнение притока тепла, как легко видеть, имеет следующий вид:

$$dU + p\,d\frac{1}{\rho} = 0. \qquad (4.7)$$

Отсюда, если внутренняя энергия $U(p, 1/\rho)$ известна, можно найти зависимость p от ρ в случае непрерывных адиабатических процессов.

Для совершенного газа равенство (4.7) принимает вид

$$\frac{c_V}{R} d\frac{p}{\rho} + p\, d\frac{1}{\rho} = 0$$

или, если ввести отношение $\gamma = c_p/c_V$,

$$\frac{1}{\gamma - 1}\left(\frac{dp}{\rho} + p\, d\frac{1}{\rho}\right) + p\, d\frac{1}{\rho} = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{\rho} dp + \gamma p\, d\frac{1}{\rho} = 0;$$

после интегрирования получим

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}. \tag{4.8}$$

Эта кривая в плоскости $(p, 1/\rho)$ носит название адиабаты Пуассона, а $\gamma = c_p/c_V$ называется показателем адиабаты. Через каждую точку p_0, $1/\rho_0$ плоскости состояний $(p, 1/\rho)$ можно, очевидно, провести изотерму (4.6) и адиабату (4.8).

Взаимное расположение изотерм и адиабат для совершенного газа

Выясним теперь, как расположены друг относительно друга в каждой точке плоскости $(p, 1/\rho)$ изотермы и адиабаты Пуассона для совершенного газа. Для точек вдоль изотермы, проходящей через точку p_0, $1/\rho_0$,

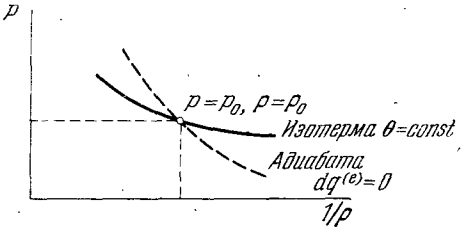


Рис. 31. Взаимное расположение адиабат Пуассона и изотерм для совершенного газа.

будем иметь

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}, \text{ т. е. } \frac{p_{\text{изот}}}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0},$$

а вдоль адиабаты, проходящей через ту же точку,

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}, \text{ т. е. } \frac{p_{\text{ад}}}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma.$$

Показатель адиабаты $\gamma = c_p/c_V > 1$, поэтому

$$p_{\text{изот}} > p_{\text{ад}} \text{ при } \rho/\rho_0 < 1 \text{ и } p_{\text{изот}} < p_{\text{ад}} \text{ при } \rho/\rho_0 > 1,$$

т. е. изотерма в плоскости $(p, 1/\rho)$ правее точки p_0, $1/\rho_0$ идет выше адиабаты, а левее точки p_0, $1/\rho_0$ — ниже адиабаты (рис. 31).

Заметим, что это свойство изотерм и адиабат установлено для совершенного газа. Оно сохраняется и для многих других сред, но не выполняется, например, для воды в интервале температур от 0° С до +4° С.

Совершаемая системой работа

Подчеркнем еще раз, что работу внутренних сил $\int p\, d\frac{1}{\rho}$ можно всегда вычислить, если задана зависимость $p\ (\rho)$, т. е. кривая в плоскости $(p, 1/\rho)$. Это значит, что работу внутренних сил $\int p\, d\frac{1}{\rho}$ можно вычислить для любого процесса $\mathscr{L}_1$ между точками A и B в плоскости состояния. Но работа внутренних сил в случае бесконечно медленного процесса равна взятой с обратным знаком работе внешних сил над системой или взятой с тем же знаком работе, которую сама система совершает над внешними телами. Таким образом, интеграл

$$\int\limits_{AB(\mathscr{L}_1)} p\, d\frac{1}{\rho} = \frac{1}{m} A, \tag{4.9}$$

вычисленный по пути $\mathscr{L}_1$ в плоскости $(p, 1/\rho)$, если $A > 0$, представляет собой суммарную работу, которую термодинамическая система совершает над внешними телами за время равновесного процесса $\mathscr{L}_1$, или, если $A < 0$, суммарную работу внешних сил, которую надо совершить над системой для осуществления процесса $\mathscr{L}_1$.

Полный приток тепла, подводимый к системе извне

Аналогично для любого процесса $\mathscr{L}_1$ $(p = p\ (1/\rho))$, если задана внутренняя энергия среды $(U = U\ (p, 1/\rho))$, можно вычислить полный приток тепла

$$Q^{(e)} = \int\limits_{AB(\mathscr{L}_1)} dQ^{(e)}. \tag{4.10}$$

который необходимо подвести к системе из внешней среды (если $Q^{(e)} > 0$) или отвести от системы во внешнюю среду (если $Q^{(e)} < 0$) для осуществления процесса $\mathscr{L}_1$.

По первому закону термодинамики

$$Q^{(e)} = \int\limits_{AB(\mathscr{L}_1)} \left(dU + p\, d\frac{1}{\rho}\right) dm = \int\limits_{A}^{B} dU_m + A = U_{mB} - U_{mA} + A. \tag{4.11}$$

Цикл Карно

Рассмотрим следующий важный равновесный обратимый замкнутый процесс, который носит название обратимого цикла Карно. Рабочим телом, т. е. средой, которая совершает этот цикл, пусть будет совершенный газ или любая другая двухпараметрическая среда, определяемая параметрами [1]) p и $1/\rho$. Из произвольной точки

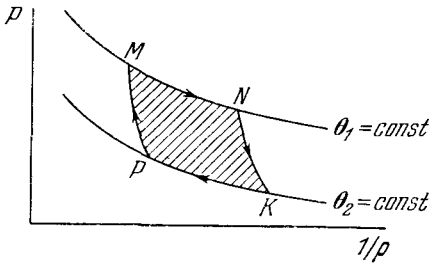


Рис. 32. Цикл Карно.

M $(p_0, 1/\rho_0)$ пространства состояний газ по изотерме $\theta_1 = \text{const}$ бесконечно медленно расширяется до состояния N, затем газ расширяется адиабатически до состояния K с температурой $\theta_2 < \theta_1$ и от K сжимается изотермически до состояния P, из которого можно вновь вернуться по адиабате в первоначальное состояние M.

Пример машины, работающей по обратимому циклу Карно

Систему, совершающую цикл Карно, назовем машиной. Эту машину можно мыслить осуществленной, например, следующим образом. Возьмем объем газа с температурой θ_1 и заключим его в цилиндр, один конец которого закрыт неподвижной стенкой, а второй — подвижным уравновешенным в начальный момент поршнем. Сначала надо заставить газ в цилиндре расширяться от M до N при $\theta_1 = \text{const}$. Для этого представим себе, что боковые стенки цилиндра и поршень теплоизолированы, а дно хорошо проводит тепло и стоит на нагревателе — теле большой теплоемкости, имеющем постоянную температуру θ_1. Будем проводить расширение газа, снимая постепенно с поршня бесконечно малые грузы так, чтобы поршень бесконечно медленно поднимался, а температура θ газа успевала сравняться с температурой θ_1 нагревателя и во все время подъема поршня равнялась бы θ_1. Давление p при этом уменьшается, а объем газа растет. Дойдя таким путем до состояния N, снимем цилиндр с нагревателя, закроем дно до-

[1]) Вместо $1/\rho$ можно использовать равноправную величину $V = m/\rho$, так как все рассуждения проводятся для субстанционального объема V, масса m которого постоянна.

полнительной, не проводящей тепло крышкой и опять, снимая непрерывно бесконечно малые грузы с поршня, будем расширять газ адиабатически до состояния K, затем вновь поставим цилиндр на тело с постоянной температурой θ_2 и начнем бесконечно медленно нагружать поршень, сжимая газ до состояния P. При этом, очевидно, температура газа стремится повыситься, но мы ее уменьшаем с помощью тела температуры θ_2, которое в этом случае работает уже не как нагреватель, а как холодильник. Дойдя до состояния P, устроим адиабатическое сжатие газа и, продолжая бесконечно медленно нагружать поршень до величины его первоначальной нагрузки, вернемся к состоянию M. Организованный таким путем цикл Карно можно провести как в одну ($MNKPM$), так и в другую ($MPKNM$) сторону. Он является идеализированным бесконечно медленно протекающим обратимым циклом.

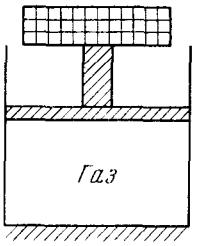


Рис. 33. Машина, работающая по циклу Карно.

В общем случае можно рассматривать как обратимые, так и необратимые циклы. В случае обратимого цикла Карно его можно проводить как в одну, так и в другую стороны.

Система, проходящая цикл Карно, как тепловая или холодильная машина

Проинтегрируем уравнение притока тепла (4.1) (при $dq^{**} = 0$) по всему циклу Карно. Так как внутренняя энергия является однозначной функцией состояния, то, $\oint dU = 0$ и

$$\oint p\, d\frac{1}{\rho} = \oint dq^{(e)}$$

или

$$A = Q^{(e)}, \tag{4.12}$$

где A — полная работа, «совершаемая» системой в результате цикла Карно, а $Q^{(e)}$ — полный «приток» тепла извне к системе.

Так как плотность механической работы A/m двухпараметрической среды, работающей по любому замкнутому циклу, равна $\oint p\, d\frac{1}{\rho}$, то очевидно, что численно она равняется площади, ограниченной кривыми, изображающими процессы цикла в плоскости состояний $(p, 1/\rho)$, и, следовательно, вообще говоря, отлична от нуля. В случае рассматриваемого цикла Карно плотность работы A/m равна площади $MNKPM$ и $A > 0$, если цикл

проходится в направлении $MNKPM$, и $A < 0$, если цикл проходится в обратном направлении. Если $A > 0$, то система в цикле производит механическую работу и, согласно (4.12), для получения этой работы к системе надо подвести тепло $Q^{(e)}$. Получаем тепловую машину, которая работает по циклу Карно, берет тепло извне и производит механическую работу. Если же $A < 0$, то внешние силы совершают работу над системой и, согласно (4.12), мы получаем от системы тепло. Вдоль участков адиабат NK и PM имеем $dq^{(e)} = 0$. Система обменивается теплом с внешней средой только тогда, когда процесс идет по участкам изотерм MN и KP.

Выше было установлено, что для осуществления изотермического расширения или сжатия газа надо соответственно подводить или отбирать тепло от системы. Поэтому на участке изотермы MN, где газ расширяется, необходимо подводить тепло, которое обозначим через $Q_1 > 0$, а на участке сжатия KP необходимо отводить количество тепла $Q_2 > 0$, что равносильно подводу тепла $-Q_2 < 0$. Так как участки NK и PM — адиабаты, то для суммарного подведенного тепла $Q^{(e)}$ за полный цикл Карно, проходимый по часовой стрелке, получим

$$Q^{(e)} = Q_1 - Q_2.$$

Согласно (4.12) можно написать

$$A = Q^{(e)} = Q_1 - Q_2. \tag{4.13}$$

Система, совершающая цикл Карно, в этом случае является тепловой машиной, которая берет тепло Q_1 от горячего тела, отдает часть этого тепла Q_2 более холодному телу и за счет количества тепла $Q_1 - Q_2$ производит механическую работу. Если цикл Карно проходится в противоположном направлении, то на участке PK подводится количество тепла $Q_2 > 0$, а на участке NM подводится отрицательное количество тепла $-Q_1 < 0$. Общее количество подведенного тепла в обратном цикле $Q^{(e)} = A_1 < 0$ (отрицательно) и определено равенством

$$A_1 = Q^{(e)} = Q_2 - Q_1 < 0.$$

В этом случае машина, работающая по циклу Карно, работает как холодильная машина, т. е. эта машина берет тепло Q_2 от менее нагретого резервуара и за счет механической работы, полученной извне, передает тепло

$$Q_1 = Q_2 - A_1$$

более нагретому резервуару.

§ 5. Второе начало термодинамики и понятие энтропии

Рассмотрим теперь второй закон термодинамики, который, так же как и первый закон, представляет собой универсальное утверждение, подтверждаемое всеми известными опытными данными и всеми теоретическими представлениями о механизмах физических явлений. Второй закон термодинамики утверждает, что невозможно устройство, которое переводило бы тепло от тела с меньшей температурой к телу с большей температурой без каких-либо изменений в других телах.

Второй закон термодинамики можно еще сформулировать так: нельзя построить так называемый вечный двигатель второго рода, т. е. машину, которая, работая в согласии с первым законом термодинамики по некоторому циклу, периодически совершала бы работу только за счет охлаждения некоторого одного и того же источника тепла с фиксированной температурой (отбор тепла из резервуара с постоянной температурой).

Ниже мы покажем, что эти две формулировки второго закона термодинамики эквивалентны.

Начнем с того, что с помощью рассмотрения цикла Карно получим важные следствия и количественную формулировку второго закона термодинамики.

К. п. д. цикла Карно

Введем понятие коэффициента полезного действия (к.п.д.) η тепловой машины, работающей по циклу Карно. По определению к.п.д. η цикла Карно называется отношение полученной в результате реализации цикла механической работы $A > 0$ к подведенному к системе за время цикла теплу $Q_1 > 0$. На основании (4.13) для к. п. д. цикла Карно верна формула

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1. \tag{5.1}$$

Полученное свойство $\eta < 1$ для цикла Карно есть следствие первого закона термодинамики.

Теорема Карно

Замечательным следствием второго закона термодинамики является следующая теорема Карно о свойствах к.п.д. η цикла Карно.

Для всякого обратимого цикла Карно величина η зависит только от температур θ_1 и θ_2, заданных на изотермах MN и KP (рис. 32), и не зависит ни от свойств рабочего тела, участвующего в цикле Карно (за которое в подробно разобранном выше примере мог быть принят совершенный газ), ни от способа организации цикла, определяемого, например, размерами рабочего тела и степенью расширения вдоль изотерм.

Докажем, что η зависит только от θ_1 и θ_2 и является абсолютной характеристикой обратимого цикла Карно, т. е. универсальной функцией η (θ_1, θ_2). Одновременно с этим покажем, что если температуры θ_1 и θ_2 фиксированы, то к. п. д. η' машины, работающей по необратимому циклу Карно (т. е. любой тепловой циклически работающей по схеме рис. 52 машины, черпающей тепло только из резервуаров с постоянными температурами θ_1 и θ_2), не может быть больше к. п. д. η машины, работающей по соответствующему обратимому циклу Карно, т. е.

$$\eta' \leqslant \eta. \tag{5.2}$$

Таким образом, к.п.д. цикла Карно максимален при обратимом процессе и никакими путями не может быть сделан равным единице, так как для получения механической работы A необходимо не только взять из окружающей среды тепло Q_1 для организации изотермического расширения, но и обязательно отдать в окружающую среду часть Q_2 взятого тепла для организации изотермического сжатия.

Докажем сначала утверждение (5.2). Для этого предположим, что существуют два цикла Карно: один необратимый, к.п.д. которого η', и другой обратимый, к.п.д. которого η, причем нагреватели и холодильники в этих циклах соответственно имеют одинаковые температуры θ_1 и θ_2, причем $\theta_1 > \theta_2$. Допустим, что $\eta' > \eta$, и убедимся, что это допущение приводит к противоречию со вторым законом термодинамики. Действительно, пусть тепловая машина с η' работает в прямом направлении и производит механическую работу A'. Заставим вторую (обратимую) тепловую машину работать в противоположном направлении, т. е. используем ее как холодильную машину. Тогда для машины с к.п.д. η' имеем $Q_1' > 0$, $Q_2' > 0$ и $A' = Q_1' - Q_2' > 0$, а для машины с к.п.д. η имеем $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$ и $A = Q_2 - Q_1 < 0$ $(-A > 0$ — работа, совершаемая над холодильной машиной).

Выберем обратимый цикл Карно так, чтобы имело место равенство [1]) $-A = A'$, т. е. $Q_1' - Q_2' = Q_1 - Q_2$, и соединим эти две машины вместе. Получим машину, для которой

$$A_0 = A' + A = Q_1' + Q_2 - Q_1 - Q_2' = 0.$$

Единственный эффект, производимый этой составной машиной, будет заключаться в перераспределении теплоты между телами, которые служат нагревателем и холодильником.

От одного из них берется и передается другому количество тепла $(Q_1' - Q_1) = (Q_2' - Q_2)$. Мы выбрали обратимый и

[1]) Такой выбор обратимой машины с тем же к. п. д. η всегда возможен путем простого подбора размеров рабочего тела, так как величины работы и тепла в рассматриваемом случае пропорциональны массе тела.

необратимый циклы так, что $|A| = A'$, поэтому $\eta Q_1 = \eta' Q_1'$. Отсюда следует, что из предположения $\eta' > \eta$ вытекает неравенство

$$Q_1' < Q_1$$

или

$$(Q_1 - Q_1') = (Q_2 - Q_2') > 0. \tag{5.3}$$

Положительная величина $(Q_2 - Q_2')$ равна общему количеству тепла, забираемому из резервуара с температурой θ_2, а равная ей положительная величина $(Q_1 - Q_1')$ — количеству тепла, передаваемому в резервуар с более высокой температурой $\theta_1 > \theta_2$. Таким образом, составная машина без затраты внешней энергии будет переводить тепло от холодного резервуара к горячему, что невозможно согласно второму закону термодинамики.

Таким образом, сделанное нами предположение, что $\eta' > \eta$, привело к противоречию со вторым законом термодинамики и должно быть отвергнуто. Допустимы только возможности

$$\eta' < \eta \text{ или } \eta' = \eta. \tag{5.4}$$

Если машина с к.п.д. η' также обратимая, то, поменяв местами η' и η в предыдущих рассуждениях, получим

$$\eta < \eta' \text{ или } \eta' = \eta. \tag{5.5}$$

Соотношения (5.4) и (5.5) совместны только при условии

$$\eta' = \eta.$$

Этим доказывается равенство к.п.д. любых двух обратимых циклов Карно при одинаковых θ_1 и θ_2. Если машина с к.п.д. η' необратима, то нельзя заставить работать эту машину с теми же результатами в обратном направлении и поэтому нельзя доказать равенство (5.5).

Следовательно, если цикл с к.п.д. η' необратим, то вообще имеет место неравенство

$$\eta' \leqslant \eta.$$

Коэффициент η характеризует степень использования тепловой энергии Q_1, сообщаемой нагретым телом работающей машине; только часть этой энергии, определяемая величиной η, превращается машиной в механическую работу. Наиболее выгодна обратимая машина, так как для необратимой, вообще говоря, всегда $\eta' < \eta$. В этом смысле говорят, что необратимость ведет к дополнительной потере части затрачиваемой энергии.

При доказательстве равенства к.п.д. всех обратимых циклов Карно мы не пользовались ни свойствами рабочего тела, ни частными свойствами цикла, следовательно, к.п.д. обратимого цикла Карно не зависит от свойств рабочего вещества и от степени расширения, а зависит только от θ_1 и θ_2 и является универсальной функцией $\eta = \eta(\theta_1, \theta_2)$.

Теперь найдем эту универсальную функцию $\eta(\theta_1, \theta_2)$. По определению к.п.д. цикла Карно имеем

$$\eta(\theta_1, \theta_2) = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Введем вместо $\eta(\theta_1, \theta_2)$ функцию

$$f(\theta_1, \theta_2) = 1 - \eta(\theta_1, \theta_2),$$

т. е.

$$f(\theta_1, \theta_2) = \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Получим для $f(\theta_1, \theta_2)$ функциональное уравнение. Для этого рассмотрим три тела большой теплоемкости с температурами θ_1, θ_2, θ_3 и три обратимых цикла Карно, в которых эти тела служат нагревателями или холодильниками. Очевидно,

$$f(\theta_1, \theta_2) = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q_2}{Q_3}\frac{Q_3}{Q_1} = f(\theta_3, \theta_2) \cdot f(\theta_1, \theta_3), \qquad (5.6)$$

где, например, $f(\theta_3, \theta_2) = 1 - \eta(\theta_3, \theta_2)$ для цикла Карно, в котором тело с температурой θ_3 служит нагревателем, а тело с температурой θ_2 — холодильником, и т. д. Заметим, что порядок указания аргументов функции существенен, на первом месте всегда стоит температура нагревателя, а на втором — температура холодильника рассматриваемого цикла Карно.

В случае $\theta_1 = \theta_2$ уравнение (5.6) сводится к условию

$$1 = f(\theta_3, \theta_1) \cdot f(\theta_1, \theta_3),$$

т. е. при перестановке аргументов функция f превращается в $1/f$. Используя это свойство функции f, из уравнения (5.6) получим

$$\frac{Q_2}{Q_1} = f(\theta_1, \theta_2) = \frac{f(\theta_3, \theta_2)}{f(\theta_3, \theta_1)}. \qquad (5.7)$$

Из уравнения (5.7) следует, что отношение Q_2/Q_1 не зависит от θ_3, а зависит только от значений температур θ_1 и θ_2 Решение функционального уравнения (5.7) имеет вид

$$f(\theta_1, \theta_2) = \frac{\omega(\theta_2)}{\omega(\theta_1)}.$$

Следовательно, так как θ_3 можно считать постоянной для всевозможных θ_2 и θ_1, будем иметь

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\omega(\theta_2)}{\omega(\theta_1)}.$$

Назовем значение функции $\omega(\theta)$ абсолютной температурой [1]) T и тогда будем иметь

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}, \tag{5.8}$$

т. е. отношение тепла Q_2, отданного термодинамической системой при обратимом цикле Карно холодильнику, к теплу Q_1, полученному системой от нагревателя, равняется отношению абсолютных температур холодильника и нагревателя. Этим самым устанавливается связь между понятием температуры, как характеристики изотерм, и энергиями, полученными и отдаваемыми в соответствующем цикле Карно.

Количественная формулировка второго закона термодинамики применительно к обратимому циклу Карно

Соотношение (5.8) для обратимого процесса напишем в виде

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

Дальше, в соответствии с общими определениями, условимся считать количество тепла $Q_1 = Q_1^{(e)}$, полученное системой, положительным, а количество тепла $-Q_2 = Q_2^{(e)}$, отданное системой, отрицательным; в этом случае предыдущее равенство примет вид

$$\frac{Q_1^{(e)}}{T_1} + \frac{Q_2^{(e)}}{T_2} = 0. \tag{5.9}$$

Это универсальное утверждение вытекает из второго закона термодинамики и может служить количественной формулировкой второго закона термодинамики для любого обратимого цикла Карно, в котором рабочим телом может быть произвольная двухпараметрическая среда.

Количественная формулировка второго закона термодинамики применительно к произвольному обратимому циклу

Рассмотрим некоторый обратимый цикл $\mathscr{L}$, изображающийся в пространстве состояний p, $1/\rho$ ломаной кривой, совпадающей с внешней границей суммы обратимых циклов Карно (рис. 34). Так как равенство (5.9) будет верно для каждого отдельно взятого

[1]) Легко проверить непосредственным вычислением, что если в качестве рабочего тела в цикле Карно используется совершенный газ с уравнением состояния $p = R\rho T$ (T — температура по Кельвину), то $Q_2/Q_1 = T_2/T_1$. Следовательно, вводимая здесь абсолютная температура пропорциональна температуре по Кельвину.

цикла Карно, то, сложив эти равенства для всех циклов Карно, получим

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0;$$

члены Q_i/T_i, соответствующие внутренним по отношению к $\mathscr{L}$ путям, при суммировании, очевидно, выпадут, так как каждый из этих путей, например AB, будет проходиться дважды в разных направлениях, причем один раз тело с температурой T_i будет служить холодильником, а второй раз — нагревателем. Поэтому окончательно получим

$$\sum \frac{Q_i}{T_i} = 0, \qquad (5.10)$$

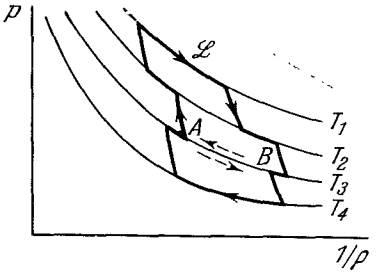


Рис. 34. Процесс $\mathscr{L}$, совпадающий с внешней границей суммы циклов Карно.

где суммирование проводится только по потокам тепла Q_i, поступающим вдоль ломаной кривой, ограничивающей суммарный цикл $\mathscr{L}$.

Пусть теперь $\mathscr{L}$ — произвольный обратимый цикл, совершаемый двухпараметрической термодинамической системой. Для осуществления такого цикла нам понадобится большое число тепловых резервуаров с бесконечно мало отличающимися температурами. Система последовательно приводится в соприкосновение с теми резервуарами, температура которых совпадает с температурой системы на данном элементе цикла, и в то же время подвергается бесконечно медленному сжатию или расширению. Пусть на бесконечно малом участке AA' замкнутой кривой $\mathscr{L}$ (рис. 35) система получает элементарное количество тепла $\Delta Q^{(e)}$. Проведем через точку A изотерму AC, а через точку A' адиабату $A'C$ и обозначим через $\Delta Q_{\text{изот}}$ то тепло, которое система получила бы, если бы прошла бесконечно малый изотермический процесс AC. Соотношение между $\int_{AA'} dQ^{(e)} = \Delta Q^{(e)}$ и $\Delta Q_{\text{изот}}$ можно получить из рассмотрения малого

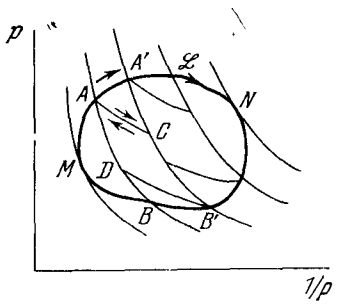


Рис. 35. Произвольный обратимый цикл.

цикла $AA'CA$. Применим к нему закон сохранения энергии $\Delta Q^{(e)} - \Delta Q_{\text{изот}} = \Delta A$ (отрезок изотермы AC в цикле $AA'CA$ проходится в направлении CA, поэтому в законе сохранения энергии для цикла $AA'CA$ стоит $(-\Delta Q_{\text{изот}})$). Количества тепла $\Delta Q^{(e)}$ и $\Delta Q_{\text{изот}}$ для бесконечно малых элементов цикла — бесконечно малые первого порядка, а работа ΔA, совершаемая в малом цикле, представляется площадью $AA'CA$ и является поэтому бесконечно малой второго порядка, т. е. бесконечно малой по сравнению с $\Delta Q^{(e)}$ и $\Delta Q_{\text{изот}}$. Продолжим адиабату $A'C$ до пересечения ее с $\mathscr{L}$ во второй точке B' и проведем адиабату через точку A. Тогда с той же степенью приближения тепло $\Delta Q^{(e)}$, полученное системой в части BB' процесса $\mathscr{L}$, равно тому теплу, которое отвечает отрезку изотермы $B'D$. Мы видим, что два элемента теплоты $\Delta Q^{(e)}$ на участках процесса AA' и BB' с точностью до малых второго порядка равняются количествам тепла $\Delta Q_{\text{изот}}$, которые система получила бы от нагревателя и холодильника, если бы она была рабочим телом машины Карно, совершающей обратимый цикл Карно $ACB'DA$.

Если мы разделим всю площадь, лежащую внутри кривой $\mathscr{L}$, на полоски с помощью системы адиабат (рис. 35) и проведем соответствующие изотермы, то получим процесс $\mathscr{L}'$, который в пространстве состояний будет изображаться ломаной линией, состоящей из отрезков адиабат и изотерм. К этому процессу можно применить равенство (5.10):

$$\sum_i \frac{\Delta Q_{i\ \text{изот}}}{T_i} = 0, \tag{5.11}$$

где суммируются потоки тепла $\Delta Q_{i\text{изот}}$, поступающие вдоль границы $\mathscr{L}'$.

Если число проведенных адиабат стремится к бесконечности, а отрезки цикла $\mathscr{L}$, через концы которых проводятся адиабаты,— к нулю, то $\mathscr{L}' \to \mathscr{L}$, а

$$\Delta Q_{\text{изот}} \to \Delta Q^{(e)},$$

и так как разница $\Delta Q^{(e)} - \Delta Q_{\text{изот}}$ есть малая второго порядка (площадь бесконечно малого криволинейного треугольника), то из (5.11) в пределе получим соотношение

$$\oint_{\mathscr{L}} \frac{dQ^{(e)}}{T} = 0, \tag{5.12}$$

которое точно выполняется для любого обратимого цикла, совершаемого двухпараметрической средой.

Из равенства

$$\int_C \frac{dQ^{(e)}}{T} = 0$$

по любому обратимому циклу C следует, что $\int_{AB(\mathscr{L})} \frac{dQ^{(e)}}{T}$ для любого обратимого процесса $\mathscr{L}$ между состояниями A и B не зависит от пути интегрирования $\mathscr{L}$.

Введение энтропии с помощью обратимых процессов для двухпараметрических сред

Фиксируя точку начального состояния системы A для любого состояния B двухпараметрической среды, в которое можно перейти из состояния A обратимыми путями, можно ввести функцию параметров состояния — координат точки B:

$$S(B) = S\left(p, \frac{1}{\rho}\right) = \int_A^B \frac{dQ^{(e)}}{T} + S(A), \tag{5.13}$$

называемую энтропией. Согласно (5.13) энтропия определяется с точностью до аддитивной постоянной $S(A)$. Из (5.13) получим, что для приращения энтропии при любом изменении координат точки B верна формула

$$dS = \frac{dQ^{(e)}}{T}.$$

Таким образом, хотя элементарный приток тепла, выражающийся через параметры состояния и их дифференциалы, не является, вообще, полным дифференциалом, для него имеется интегрирующий множитель $1/T\ (p,\ 1/\rho)$ — величина, обратная абсолютной температуре.

Воспользовавшись уравнением притока тепла, получим для дифференциала энтропии выражение

$$dS = \frac{dQ^{(e)}}{T} = \frac{dU_m + dA^{(i)}}{T} \tag{5.14'}$$

или, в расчете на единицу массы,

$$ds = \frac{dq^{(e)}}{T} = \frac{dU + p\,d\frac{1}{\rho}}{T}, \tag{5.14}$$

которое можно использовать для вычисления энтропии двухпараметрической среды, если внутренняя энергия U среды известна как функция параметров состояния.

Энтропия для совершенного газа

Например, для совершенного газа с постоянными теплоемкостями ($p = \rho RT$, $U = c_V T$) будем иметь

$$ds = \frac{c_V dT}{T} + \frac{R\, d\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{\rho}} = d \ln \left[T^{c_V} \left(\frac{1}{\rho} \right)^R \right],$$

или

$$s = c_V \ln \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} + \text{const} = c_p \ln \frac{T}{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} + \text{const}_1 =$$

$$= c_V \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + \text{const}_2 = c_V \ln \frac{p}{\rho^\gamma} - c_V \ln \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} + s_0, \quad (5.15)$$

где p_0, ρ_0, s_0 — соответствующие постоянные.

Условия, налагаемые фактом существования энтропии на вид уравнения состояния

Равенство (5.14) накладывает ограничения на функции $U(p, \rho)$ и $T(p, \rho)$, т. е. основные термодинамические функции состояния среды. Так как ds должно быть полным дифференциалом, то условие интегрируемости (5.14) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial p} \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{p}{\rho^2 T} \right)$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} \frac{\partial U}{\partial p} = \frac{\partial T}{\partial p} \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{p}{\rho^2} \right) + \frac{T}{\rho^2}. \quad (5.16)$$

При заданной функции $U(p, \rho)$ функции $T(p, \rho)$ должны быть решениями (5.16), следовательно, такие функции не произвольны, хотя существует много различных решений уравнения в частных производных (5.16).

Теперь в качестве примера рассмотрим, как формулируется второй закон для необратимого цикла Карно.

Количественная формулировка второго закона термодинамики применительно к необратимому циклу Карно

Пусть два резервуара с температурами T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$) служат нагревателем и холодильником в двух циклах Карно, один из которых обратим (к.п.д. η), а второй необратим (к.п.д. η').

Тогда, так как $\eta' \leqslant \eta = 1 - T_2/T_1$, то

$$1 - \frac{Q_2'}{Q_1'} \leqslant 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad \text{или} \quad \frac{Q_2'}{Q_1'} \geqslant \frac{T_2}{T_1},$$

откуда $\dfrac{Q_1'}{T_1} - \dfrac{Q_2'}{T_2} \leqslant 0.$

Считая тепло Q_1', притекающее к системе, положительным, а тепло Q_2', отдаваемое системой, отрицательным, получим

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{Q_i'}{T_i} \leqslant 0. \tag{5.17}$$

Это и есть количественная формулировка второго закона термодинамики для необратимого цикла Карно.

Пример, иллюстрирующий характер изменения энтропии в необратимых процессах

Рассмотрим частный пример, который показывает, как можно ввести энтропию для системы в целом и как энтропия меняется в случае необратимых процессов.

Допустим, что мы имеем два бесконечно малых объема I и II несжимаемой жидкости с одинаковыми давлениями и разными температурами. Пусть температура объема I равна T_1, а температура объема II T_2 ($T_2 > T_1$).

Если эти объемы привести в соприкосновение, между ними будет происходить обмен теплом, причем в каждый момент времени каждому из объемов I и II можно приписать определенное значение температуры (так как объемы I и II малы).

Процесс передачи тепла от II к I необратим, так как согласно второму закону термодинамики тепло без затраты работы внешних сил может передаваться только от частицы с температурой T_2 к частице с температурой T_1, если $T_2 > T_1$.

Обозначим через dQ положительное количество тепла, которое переходит от частицы II к частице I за время dt, и рассмотрим для простоты случай, когда система, состоящая из совокупности частиц I и II, не обменивается теплом с внешней средой. Если необратимость связана только с процессом теплопередачи от одной частицы к другой, при котором состояния и процессы в каждой отдельной частице можно считать обратимыми, то для отдельных частиц можно написать

$$dS_{\mathrm{I}} = \frac{dQ}{T_1},$$
$$dS_{\mathrm{II}} = \frac{-dQ}{T_2}.$$

Изменение энтропии всей системы I + II можно подсчитать, предполагая, что полная энтропия S является аддитивной функцией, т. е.

$$S = S_{\mathrm{I}} + S_{\mathrm{II}},$$

следовательно,

$$dS = dS_{\mathrm{I}} + dS_{\mathrm{II}} = dQ\,\frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} > 0.$$

Таким образом, хотя в рассмотренном примере вообще нет притока внешнего тепла к системе I + II, энтропия этой системы возрастает за счет необратимого внутреннего процесса.

Количественная формулировка второго закона термодинамики применительно к многопараметрической среде

Выше, исходя из цикла Карно, энтропия как функция состояния была введена только для двухпараметрических сред. Посмотрим теперь, как можно ввести энтропию для сред, состояние которых определяется n переменными определяющими параметрами $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n$, и докажем, что для произвольного необратимого цикла C, для которого во всех промежуточных состояниях можно определить температуру T системы, верно неравенство

$$\int_C \frac{dQ^{(e)}}{T} \leqslant 0.$$

Для этого разобьем произвольный (может быть, необратимый) цикл C, совершаемый произвольной системой, на бесконечно малые элементы dl_i, на каждом из которых температуру системы можно считать постоянной (T_i). Обозначим через dQ_i тепло, которое получает система в процессе dl_i, и через dA_i — работу, которую производит система в этом элементарном процессе. Во время каждого элементарного процесса dl_i многопараметрическая среда может быть использована как тепловой резервуар для элементарного обратимого цикла Карно, осуществляемого вспомогательной двухпараметрической средой; можно выбрать эти циклы Карно так, чтобы в каждом из них вспомогательная двухпараметрическая система отдавала рассматриваемой многопараметрической системе количество тепла, равное dQ_i. Поэтому можно представить себе, что все тепло, которое получает многопараметрическая среда извне в процессе C, она получает с помощью контакта с вспомогательной двухпараметрической средой. В качестве второго теплового резервуара для всех вспомогательных циклов Карно возьмем некоторое тело с постоянной температурой T_0.

Для каждого элементарного цикла Карно будем иметь

$$-\frac{dQ_i^{(e)}}{T_i} + \frac{dQ_0}{T_0} = 0, \tag{5.18}$$

где $(-dQ_i^{(e)})$ и dQ_0 — количества тепла, получаемые двухпараметрической средой на изотермах T_i и T_0 соответственно. Интегрируя (5.18) по всему циклу C, получим

$$Q_0 = \oint_C dQ_0 = T_0 \oint_C \frac{dQ^{(e)}}{T}.$$

Рассмотрим теперь термодинамическую систему, состоящую из совокупности двухпараметрической и многопараметрической сред. Тепло к этой системе поступает только от резервуара T_0. Суммарный приток тепла извне (в цикле C) равен Q_0. По закону сохранения энергии Q_0 равняется работе A, которую эта система совершает над внешними телами:

$$Q_0 = T_0 \oint \frac{dQ^{(e)}}{T} = A.$$

Эквивалентность формулировок второго закона термодинамики

Работа A не может быть положительной, так как в этом случае мы имели бы циклически работающую машину, которая только за счет притока тепла от одного резервуара с фиксированной температурой T_0 совершала бы механическую работу A над внешними телами. Невозможность осуществления такой машины является одной из формулировок второго закона термодинамики. Она эквивалентна утверждению о том, что тепло без затраты энергии извне не может передаваться от менее нагретого к более нагретому телу.

В самом деле, полученную работу, если $A > 0$, можно было бы использовать в холодильной машине, работающей по циклу Карно, для передачи тепла из некоторого резервуара с температурой $T^* < T_0$ в резервуар с температурой T_0.

Согласно уравнению

$$A = Q_1 - Q_2 = Q_0 > 0$$

эта машина забирала бы количество тепла Q_2 из резервуара с температурой T^* и передавала бы количество тепла $Q_1 > Q_0$ в резервуар с температурой T_0. В результате в термодинамической системе, состоящей из этой холодильной машины и рассмотренной выше машины, производящей работу A, так как $Q_1 - Q_0 > 0$ и $Q_2 > 0$, тепло без затраты какой-либо энергии извне передавалось бы от тела с меньшей температурой T^* к телу с более высокой температурой T_0, что невозможно.

Для полноты рассуждения об эквивалентности двух формулировок второго закона термодинамики заметим, что если, наоборот, допустить возможность передачи тепла без затраты внешней работы от менее нагретого тела к более нагретому, то из этого допущения будет следовать возможность создания вечного двигателя второго рода.

Действительно, допустим, что тепло без затраты работы извне переходит от тела с температурой T_2 к телу с температурой T_1 ($T_1 > T_2$). Возьмем некоторое количество тепла Q_1, перешедшее от тела с температурой T_2 к телу с температурой T_1, и используем его в тепловой машине, работающей, например, по циклу Карно, которая берет это тепло Q_1 от тела с температурой

T_1, передает часть его Q_2 ($Q_2 < Q_1$) обратно телу с температурой T_2 и производит некоторую механическую работу $A > 0$.

Если рассмотреть оба указанных процесса (самопроизвольный и в тепловой машине) как один, то ясно, что в результате этого процесса будет периодически создаваться механическая работа только за счет отбора тепла $Q_1 - Q_2$ от одного резервуара с температурой T_2, что противоречит второй формулировке второго закона термодинамики.

Количественная формулировка второго закона термодинамики применительно к необратимым процессам в любой среде

Таким образом, выше мы показали, что допущение

$$\oint_C \frac{dQ^{(e)}}{T} > 0$$

противоречит второму закону термодинамики и, следовательно, должно иметь место соотношение

$$\oint_C \frac{dQ^{(e)}}{T} \leqslant 0$$

для любого цикла C, совершаемого любой многопараметрической (в том числе и двухпараметрической) средой.

Количественная формулировка второго закона термодинамики применительно к обратимым процессам в любой среде

Если основной цикл C обратимый, то, повторив наши рассуждения в случае цикла C, проходимого в противоположном направлении, придем к заключению, что допущение $A < 0$ также противоречит второму закону термодинамики. Для обратимого цикла C, совершаемого любой средой, остается единственная возможность

$$\oint_C \frac{dQ^{(e)}}{T} = 0.$$

Введение энтропии для многопараметрических сред с помощью обратимых процессов

Отсюда следует, что в случае обратимых процессов интеграл $\int_A^B \frac{dQ^{(e)}}{T}$ не зависит от пути интегрирования и при фиксированном начальном состоянии (A) является только функцией конечного состояния среды (B). Следовательно с помощью обратимых процессов для многопараметрических сред, так же как и с помощью обратимых процессов для двухпараметрических сред, можно ввести однозначную функцию состояния

$$S(B) = \int_A^B \frac{dQ^{(e)}}{T} + \text{const},$$

называемую энтропией.

Если же процесс $\mathscr{L}$, переводящий среду из состояния A в состояние B, необратим, то энтропию в состоянии B можно вычислить по соответствующему произвольному [1]) обратимому процессу $\mathscr{L}_1$ между A и B, если такой обратимый процесс существует. При этом получим

$$S(B) - S(A) \geqslant \int\limits_{AB(\mathscr{L})} \frac{dQ^{(e)}}{T}.$$

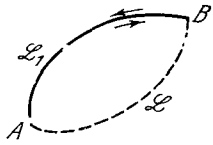


Рис. 36. Введение энтропии с помощью обратимых процессов.

Действительно, рассмотрим два состояния A и B некоторой двухпараметрической среды. Пусть между этими двумя состояниями возможно осуществить два процесса, один из которых ($\mathscr{L}_1$) обратимый, а второй ($\mathscr{L}$) необратимый.

С помощью обратимого процесса $\mathscr{L}_1$ можно вычислить энтропию

$$S_B - S_A = \int\limits_{AB(\mathscr{L}_1)} \frac{dQ^{(e)}}{T}.$$

Если же мы рассмотрим цикл $C = A\mathscr{L}B\mathscr{L}_1A$, то он, очевидно, будет необратимым и

$$\oint\limits_C \frac{dQ^{(e)}}{T} \leqslant 0,$$

поэтому

$$S_B - S_A \geqslant \int\limits_{AB(\mathscr{L})} \frac{dQ^{(e)}}{T}.$$

Следует обратить внимание на то, что последний интеграл берется по необратимому пути $\mathscr{L}$.

Некомпенсированное тепло

Для необратимого процесса, связывающего два бесконечно близких состояния A и B, будем иметь

$$dS \geqslant \frac{dQ^{(e)}}{T}.$$

Таким образом, в случае необратимых процессов

$$T\,dS \geqslant dQ^{(e)}$$

или

$$T\,dS = dQ^{(e)} + dQ',$$

[1]) Очевидно, что значение разности $S(B) - S(A)$ одинаково для всякого из различных обратимых путей между состояниями A и B.

где величина dQ', называемая некомпенсированным теплом, всегда больше или равна нулю. В случае обратимых процессов

$$dQ' = 0.$$

Однако стоит подчеркнуть, что при $dQ' = 0$ процессы могут быть вообще необратимыми.

О работе тепловой машины при $dQ^{**} \neq 0$

Получим теперь основное энергетическое уравнение для тепловой машины, работающей при $dQ^{**} \neq 0$. Примером такой машины является устройство, в котором используется так называемый магнитотермический эффект. Известно, что адиабатическое намагничивание и размагничивание парамагнитных веществ аналогично адиабатическому сжатию и расширению двухпараметрических систем, подобных совершенному газу. При адиабатическом намагничивании необходимо затратить внешнюю энергию dQ^{**}, внутренняя энергия среды при этом увеличивается и температура ее растет. При адиабатическом размагничивании система отдает энергию dQ^{**}, внутренняя энергия ее уменьшается и температура падает.

Магнитотермический эффект был использован для получения очень низких температур (таким путем получены температуры 0,0044° K).

При $dQ^{**} \neq 0$ уравнение притока тепла имеет вид

$$dU_m = -dA^{(i)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}.$$

Для замкнутого цикла C получим

$$\oint_C (dA^{(i)} - dQ^{**}) = \oint_C dQ^{(e)} = Q^{(e)}, \tag{5.19}$$

где через $Q^{(e)}$ обозначен полный приток тепла к рабочему телу машины.

Из теоремы живых сил $dE = dA^{(i)} + dA^{(e)}$ для замкнутого цикла $\left(\oint dE = 0\right)$ будем иметь

$$\oint_C dA^{(i)} = -\oint_C dA^{(e)}.$$

Поэтому равенство (5.19) можно переписать следующим образом:

$$-\oint_C (dA^{(e)} + dQ^{**}) = Q^{(e)}.$$

Это соотношение и есть энергетическое уравнение, описывающее работу тепловой машины в том случае, когда машина, со-

вершающая замкнутый цикл и получающая из внешней среды тепло $Q^{(e)}$, может расходовать его не только на производство механической работы над внешними телами, но и на передачу им энергии не механической (работа макроскопических сил) и не тепловой природы.

Мы видим, что выводы, касающиеся работы тепловых машин, применимы и в случае $dQ^{**} \neq 0$, если под dA понимать сумму $dA^{(e)} + dQ^{**}$, т. е. считать, что

$$A = \oint_C (dA^{(e)} + dQ^{**}).$$

О процессах, являющихся замкнутыми по энергетическим параметрам и незамкнутыми по параметрам энтропии

Отметим, наконец, что могут существовать процессы в результате которых энергия системы не меняется, а энтропия системы изменяется. Это связано с тем, что внутренняя энергия и энтропия могут зависеть от разных термодинамических параметров и процесс может быть замкнутым по энергетическим параметрам и незамкнутым по параметрам энтропии.

Например, в совершенном газе

$$U = c_V T, \quad s = c_p \ln \frac{T}{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} + \text{const}.$$

и любой процесс, протекающий между двумя состояниями с одинаковой температурой и разными давлениями, является такого рода процессом.

Так, если газ, находящийся в баллоне под большим давлением p_0, выпускать в атмосферу при постоянной температуре, то внутренняя энергия его не изменится, а s увеличится (за счет уменьшения p) (рис. 37). При этом процессе газ отдает энергию в виде механической работы, а получает по величине в точности такую же тепловую энергию.

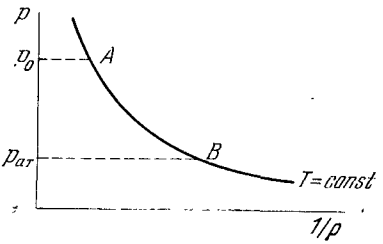


Рис. 37. AB — процесс, в котором $U = \text{const}$, а s меняется.

Заметим, что одно и то же количество энергии может иметь разную ценность с точки зрения возможности ее практического использования, причем эта ценность определяется как раз величиной энтропии (чем больше энтропия, тем меньше ценность располагаемой энергии). Действительно, например, при переводе газа из состояния A в состояние B по изотерме на

каждом элементе процесса газ отдает механическую работу, а получает равное количество тепла.

Но тепловая энергия является наименее ценным видом энергии. Согласно второму закону термодинамики она не может быть полностью превращена в другой вид энергии. Наоборот, другие виды энергии (например, механическая работа) могут быть полностью превращены друг в друга, а также и в тепло.

О введении энтропии статистическим путем

Энтропию s можно ввести статистическим путем. Величина энтропии связывается с вероятностью соответствующего состояния. В статистической физике для энтропии устанавливается следующая формула, принадлежащая Больцману:

$$s = k \ln P, \tag{5.20}$$

где k — постоянная Больцмана а P — мера вероятности рассматриваемого состояния, определяемая как число возможных микроскопических состояний, отвечающих данному макроскопическому состоянию (для многих различных микроскопических состояний макроскопические характеристики неразличимы).

Аддитивность энтропии

Из формулы (5.20) следует аддитивность энтропии, если вероятность состояния системы в целом равна произведению вероятностей состояний отдельных частей.

Так, очевидно, получается, когда можно принять, что вероятности состояний отдельных частей независимы.

О возрастании энтропии при стремлении системы к равновесию

Выражение (5.20) можно рассматривать как определение энтропии, пригодное как для равновесных, так и для неравновесных состояний. Так как практически осуществимые состояния соответствуют наиболее вероятным, то из (5.20) следует, что при стремлении изолированной системы к равновесию энтропия возрастает.

Адиабатические обратимые и необратимые процессы

Если система теплоизолирована, но может подвергаться любым силовым воздействиям, то процессы, в которых она участвует, называются адиабатическими.

В этом случае внешний приток тепла к системе равен нулю ($dQ^{(e)} = 0$). В случае обратимых адиабатических процессов

$$Tds = 0,$$

поэтому

$$s = \text{const}.$$

Обратимые адиабатические процессы являются изэнтропическими.

Наоборот, если обратимый процесс изэнтропический, т. е. $S = \text{const}$, то $dQ^{(e)} = 0$, и процесс является адиабатическим.

Если же процесс адиабатический и необратимый, то $dS \geqslant 0$, и энтропия, если она изменяется, может только расти, так как $dQ' \geqslant 0$.

В необратимых неадиабатических процессах энтропия может и убывать и возрастать, так как знак

$$TdS = dQ^{(e)} + dQ'$$

при этом может быть любым. Из второго закона термодинамики следует только, что dQ' неотрицательно.

Можно сказать, что второй закон термодинамики определяет направление реально осуществляющихся процессов. Адиабатические необратимые процессы могут происходить только в направлении роста энтропии, а неадиабатические — только так, чтобы dQ' было неотрицательным.

Принцип неубывания энтропии для изолированных систем и условие равновесия

Так как во всех процессах в изолированной системе энтропия может только возрастать, то очевидно, что состояния, в которых энтропия изолированной системы имеет максимум, являются состояниями равновесия.

При построении конкретных моделей сплошной среды, в которых могут происходить необратимые процессы, необходимо с помощью специальных опытов, гипотез или результатов статистической физики добывать данные о dQ'.

§ 6. Термодинамические потенциалы двухпараметрических сред

Рассмотрим еще важный вопрос из термодинамики двухпараметрических сред с вообще обратимыми процессами (dq^{**} будем считать равным нулю).

Выше указывалось, что для двухпараметрических сред три функции состояния U, s и T не могут быть прозвольными. Например, если внутренняя энергия U задана как функция p и ρ, то $T(p, \rho)$ должна удовлетворять условию (5.16), которое при заданной $U(p, \rho)$ следует рассматривать как линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для определения $T(p, \rho)$.

Как известно, это дифференциальное уравнение имеет много решений, т. е. $T(p, \rho)$ при заданной $U(p, \rho)$, а следовательно, и термодинамические свойства среды определяются неоднозначно. Для того чтобы устранить эту неоднозначность, необходимо взять одно из частных решений уравнения (5.16), т. е. выбрать конкретный вид уравнения состояния $T = T(p, \rho)$.

После этого энтропия (с точностью до аддитивной постоянной) определится из (5.14).

За определяющие термодинамические переменные двухпараметрической среды можно, а часто и удобно, брать различные пары переменных, например ρ и s, p и s, ρ и T и т. д. Встает вопрос: нельзя ли задать внутреннюю энергию U функцией таких переменных, чтобы в результате этого задания другие термодинамические функции определились бы полностью и однозначно? Оказывается, можно.

Внутренняя энергия и энтропия как термодинамические потенциалы

Пусть U задана как функция ρ и s. Тогда по правилам дифференцирования и из уравнения притока тепла с учетом второго закона термодинамики для обратимых процессов (5.14) будем иметь

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_\rho ds + \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_s d\rho = T\,ds - p\,d\frac{1}{\rho}. \tag{6.1}$$

Отсюда ввиду произвола ds и $d\rho$ получим

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_\rho, \qquad p = \rho^2\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_s, \tag{6.2}$$

т. е. T и p как функции ρ, s определились однозначно. Внутренняя энергия U в этом случае называется термодинамическим потенциалом. Из равенства (6.1) видно также, что если задать энтропию s как функцию от U и ρ, то

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial U}\right)_\rho, \qquad \frac{p}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial 1/\rho}\right)_U,$$

т. е. в этом случае для переменных U и ρ энтропия является термодинамическим потенциалом.

Свободная энергия

Если определяющими термодинамическими переменными являются ρ и T, то равенство (6.1) удобнее писать в виде

$$d(U - Ts) = -s\,dT + \frac{p}{\rho^2}\,d\rho$$

или

$$dF = -s\,dT + \frac{p}{\rho^2}\,d\rho, \tag{6.3}$$

где через F обозначена функция состояния

$$F \equiv U - Ts, \tag{6.4}$$

называемая свободной энергией. Если F как функция ρ и T известна, то из (6.3) однозначно определяются p и s. Действительно, из (6.3) следует:

$$s = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_\rho, \qquad p = \rho^2\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_T. \tag{6.5}$$

В случае использования переменных ρ и T термодинамическим потенциалом является свободная энергия $F(\rho, T)$.

Теплосодержание или энтальпия

Аналогично, если определяющими параметрами служат давление p и энтропия s, то соотношение (6.1) удобно записать в следующем виде:

$$d\left(U + \frac{p}{\rho}\right) = T\,ds + \frac{dp}{\rho}$$

или

$$di = T\,ds + \frac{dp}{\rho}. \tag{6.6}$$

При этом функция состояния

$$i(p, s) \equiv U + p/\rho, \tag{6.7}$$

называемая теплосодержанием или энтальпией, будет термодинамическим потенциалом, так как

$$T = \left(\frac{\partial i}{\partial s}\right)_p, \qquad \frac{1}{\rho} = \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_s. \tag{6.8}$$

Термодинамический потенциал Гиббса

Наконец, если определяющими параметрами являются давление p и температура T, то соотношение (6.1) целесообразно представить в следующем виде:

$$d\left(U - Ts + \frac{p}{\rho}\right) = -s\,dT + \frac{dp}{\rho}$$

или

$$d\Psi = -s\,dT + \frac{dp}{\rho}.$$

Через функцию состояния

$$\Psi(p, T) \equiv U - Ts + p/\rho, \tag{6.9}$$

называемую просто термодинамическим потенциалом или термодинамическим потенциалом Гиббса, однозначно определяются ρ и s:

$$s = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right)_p, \qquad \frac{1}{\rho} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial p}\right)_T. \tag{6.10}$$

Если внутренняя энергия и энтропия определяются с точностью до аддитивной постоянной, то свободная энергия F и термодинамический потенциал Ψ определяются с точностью до линейной функции от температуры.

Очевидно, что в перечисленных выше случаях введение указанных переменных позволяет свести задачу об определении всех функций состояния к определению только одного соответствующего потенциала. Для переменных p и ρ или T и s нет соответствующих потенциалов.

Среда определяется заданием термодинамических потенциалов как функций соответствующих переменных

Итак, термодинамические и механические свойства идеальной двухпараметрической среды полностью определяются заданием одной из функций: $U(\rho, s)$, $i(p, s)$, $F(\rho, T)$ или $\Psi(p, T)$. Задания U, i, F, Ψ соответственно как функций от других переменных недостаточно для полного определения среды, в этих случаях требуется задавать дополнительные соотношения, например задавать уравнение состояния как некоторое решение определенного уравнения с частными производными.

Об определении термодинамических потенциалов из опыта

Для определения соответствующих потенциалов применительно к реальным жидкостям и газам нужно пользоваться данными статистической физики, полученными с помощью некоторых простых допущений в соответствующих физических моделях, или данными опытов (калориметрических и механических).

В частности, важное значение имеет измерение величины теплоемкости единицы массы вещества. Теплоемкость, как известно, определяется как количество теплоты, сообщаемой единице массы при повышении ее температуры на один градус Цельсия (при использовании для измерения температуры шкалы Цельсия).

Для двухпараметрической среды теплоемкость зависит существенно от изменения обоих переменных параметров. Теплоемкость определяется однозначно только при полном задании процесса, сопровождающегося повышением температуры.

Важную роль играют теплоемкости сжимаемой среды при постоянном давлении c_p и при постоянном объеме c_V. Для теплоемкостей c_p и c_V верны формулы

$$c_p = \left(\frac{dq}{dT}\right)_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p - \frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = \\ = \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\rho - \frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \qquad (6.11)$$

и

$$c_V = \left(\frac{dq}{dT}\right)_\rho = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\rho = \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho + \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho. \qquad (6.12)$$

Для разности $c_p - c_V$ из формул (6.11) и (6.12) следуют равенства

$$c_p - c_V = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_T - \frac{p}{\rho^2}\right]\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = -\left[\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T - \frac{1}{\rho}\right]\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho. \qquad (6.13)$$

Из (6.13) и уравнения притока тепла следует еще равенство

$$c_p - c_V = -\frac{T}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p, \qquad (6.14)$$

которое на основании равенства

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho = -\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p,$$

следующего из формулы

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho dT + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T d\rho,$$

приводится к виду

$$c_p - c_V = \frac{T}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p^2. \tag{6.15}$$

Равенства (6.13) — (6.15) верны для произвольных двухпараметрических сред. Пользуясь данными, полученными в опытах по измерению коэффициентов теплоемкости c_p и c_V, и измеренными величинами коэффициентов теплового изменения плотности при постоянном давлении $(\partial\rho/\partial T)_p = k_\rho$ и коэффициентов повышения давления при постоянном объеме $(\partial p/\partial T)_\rho = k_p$, можно определить производные от внутренней энергии и от теплосодержания согласно формулам

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_T &= \frac{c_p - c_V}{k_\rho} + \frac{p}{\rho^2} = -\frac{1}{\rho^2}\left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho - p\right],\\ \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\rho &= c_V\end{aligned}\right\} \tag{6.16}$$

и

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p &= c_p,\\ \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T &= -\frac{c_p - c_V}{k_p} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho^2}\left[T\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p + \rho\right].\end{aligned}\right\} \tag{6.17}$$

При этом, очевидно, как следствие первого и второго законов термодинамики должны удовлетворяться следующие условия интегрируемости:

$$-\frac{T}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_\rho = \left(\frac{\partial c_V}{\partial \rho}\right)_T \tag{6.18}$$

и

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial T^2}\right)_p, \tag{6.19}$$

которые можно использовать для сокращения числа опытов или для проверки результатов опытов.

На этом мы в основном закончим изложение общих сведений из термодинамики. В этой главе мы установили, что для всякой термодинамической системы можно всегда ввести две функции состояния: внутреннюю энергию U и энтропию

s, а для равновесных процессов еще одну функцию состояния — абсолютную температуру T; получили новое универсальное уравнение — уравнение притока тепла

$$dU = \frac{p^{ij}}{\rho} \nabla_j v_i dt + dq^{(e)} + dq^{**} \tag{6.20}$$

и рассмотрели второй закон термодинамики

$$T\,dS = dQ^{(e)} + dQ', \quad dQ' \geqslant 0,$$

или (для единицы массы)

$$T\,ds = dq^{(e)} + dq', \quad dq' = \frac{dQ'}{dm} \geqslant 0,$$

который вообще необходим для построения конкретных моделей сплошных сред.

Применим теперь эти результаты к построению конкретных моделей сплошных сред.

§ 7. Примеры идеальных и вязких сред и их термодинамические свойства. Теплопроводность

Полученная *система универсальных уравнений движения сплошной среды* имеет вид

$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ — уравнение неразрывности,

$\rho a^i = \nabla_j p^{ij} + \rho F^i$ — уравнения импульсов,

$p^{ij} = p^{ji}$ — уравнения моментов в классическом случае,

$dU = \frac{p^{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij} + dq^{(e)} + dq^{**}$ — уравнение притока тепла,

$T\,ds = dq^{(e)} + dq', dq' \geqslant 0$, — второй закон термодинамики.

Для того чтобы с помощью этой системы уравнений рассматривать частные задачи о движении сплошной среды, необходимо дополнить ее соотношениями, задающими свойства конкретной модели среды.

Рассмотрим теперь с учетом термодинамических свойств некоторые важные модели сплошных сред.

а) Модель идеальной несжимаемой жидкости

Из условия несжимаемости вытекает, что для каждой частицы

$$\rho = \rho_0 = \text{const}.$$

В случае неоднородной жидкости плотность ρ можно рассмат-

ривать как заданную функцию от лагранжевых координат ξ^1, ξ^2, ξ^3; для однородной жидкости плотность одинакова для всех частиц.

В соответствии с определением, данным раньше, жидкость называется идеальной, если $p^{ij} = -pg^{ij}$.

Как известно, в случае идеальной несжимаемой однородной жидкости система четырех скалярных уравнений, состоящая из уравнения неразрывности

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$$

и трех уравнений Эйлера

$$a_i = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i},$$

образует замкнутую систему для определения давления $p\ (x^i, t)$ и вектора скорости $v\ (x^i, t)$. Если идеальная несжимаемая жидкость неоднородна, то к этим уравнениям следует добавить пятое уравнение

$$\frac{d\rho}{dt} = 0,$$

которое служит для определения с точки зрения Эйлера функции $\rho\ (x^1, x^2, x^3, t)$.

Работа внутренних сил в случае идеальной несжимаемой жидкости

Так как работа внутренних сил давления в идеальной несжимаемой жидкости всегда равна нулю,

$$dA^{(i)} = -\frac{p^{ij}}{\rho} e_{ij} dt = \frac{p}{\rho} g^{ij} e_{ij} dt = \frac{p}{\rho} e^{i}_{\cdot i}\, dt = \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dt = 0,$$

то уравнение притока тепла

$$dU = dq^{(e)}$$

можно рассматривать как уравнение для определения плотности внутренней энергии U или как уравнение распространения тепла в потоке жидкости.

Энтропия и внутренняя энергия идеальной несжимаемой жидкости

В определение модели идеальной несжимаемой жидкости входит также допущение, что механические процессы в ней обратимы, поэтому

$$dq^{(e)} = T\, dS, \quad dq' = 0. \tag{7.1}$$

Уравнение притока тепла с учетом (7.1) дает

$$dU = Tds.$$

Отсюда следует, что $U = \text{const}$, если $s = \text{const}$; поэтому U есть функция только от s, $U = U(s)$. Но так как

$$\frac{dU}{ds} = T,$$

то очевидно, что $T = T(s)$ или $U = U(T)$ и $s = s(T)$.

Для удельной теплоемкости c несжимаемой жидкости можно написать

$$c = \frac{dq^{(e)}}{dT} = \frac{dU}{dT} = c(T).$$

Энтропия и внутренняя энергия идеальной несжимаемой жидкости определяются через теплоемкость $c(T)$, заданную как функция температуры, по формулам

$$U = \int c(T)\,dT, \qquad s = \int \frac{c(T)\,dT}{T}. \tag{7.2}$$

Если $c = \text{const}$, то

$$U = cT + \text{const}, \qquad s = c \ln T + \text{const}.$$

Уравнение притока тепла

$$\frac{dq^{(e)}}{dt} = c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = c(T)\left[\frac{\partial T}{\partial t} + v^i \frac{\partial T}{\partial x^i}\right] \tag{7.3}$$

может служить для определения распределения температуры.

Таким образом, с точки зрения механики сплошной среды идеальная несжимаемая жидкость задается только значением плотности и теплоемкостью $c(T)$.

Кроме того, для решения конкретных задач необходимо задать внешние массовые силы $\boldsymbol{F}$, приток тепла $dq^{(e)}$ и дополнительные краевые, начальные или другие условия, необходимые для однозначного выделения решения системы уравнений в частных производных.

Независимость механической задачи от тепловой и связь тепловой задачи с механической в случае движения идеальной несжимаемой жидкости

В заключение заметим, что решение механической задачи об определении движения идеальной несжимаемой жидкости под действием заданных сил не зависит от решения задачи распределения температуры в объеме жидкости и не требует знания внутренней энергии.

Наоборот, уравнение (7.3) для отыскания распределения температуры T в случае заданного притока тепла становится определенным только после того, как распределение скорости $v(x^i, t)$ найдено из решения механической задачи.

Следовательно, при наличии движения среды решение тепловой задачи зависит от решения механической задачи.

б) Модель идеального газа, т. е. идеальной сжимаемой жидкости

Модель идеального газа Определим идеальный газ, во-первых, как такую среду, в которой тензор напряжений шаровой:

$$p^{ij} = -pg^{ij};$$

во-вторых, как двухпараметрическую среду, в которой внутренняя энергия зависит только от двух параметров, например ρ и s:

$$U = U(\rho, s),$$

и, в-третьих, как среду, в которой в случае непрерывных движений все механические процессы обратимы [1]) и, следовательно,

$$dq' = 0.$$

Эти три предположения при условии, что $U(\rho, s)$ задано, полностью фиксируют модель идеального газа или идеальной сжимаемой жидкости как в термодинамическом, так и в механическом смысле.

Действительно, если массовые силы $\boldsymbol{F}$ и внешний приток тепла $dq^{(e)}$ заданы, то два уравнения (6.2), называемые уравнениями состояния, второй закон термодинамики

$$T\,ds = dq^{(e)}$$

или уравнение притока тепла

$$dU = -p\,d\frac{1}{\rho} + dq^{(e)},$$

уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$$

и три уравнения Эйлера

$$a_i = F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^i}$$

представляют собой замкнутую систему для определения семи неизвестных скалярных функций: ρ, v_i, p, s и T.

[1]) Иногда в идеальном газе рассматривают необратимые физико-химические процессы, например химические реакции. При этом dq', связанное с необратимостью таких процессов, может отличаться от нуля.

Уравнения состояния (6.2) справедливы при любых процессах. Вместо функции $U(\rho, s)$ можно задавать любой из потенциалов $F(\rho, T)$, $i(p, s)$, $\Psi(p, T)$.

Полная система уравнений движения идеального газа в случае адиабатических процессов

Если в каждом элементе тела процесс обратимый и адиабатический, то $dq' = 0$ и $dq^{(e)} = 0$; поэтому

$$s = f(\xi^1, \xi^2, \xi^3),$$

т. е. для каждой индивидуальной частицы энтропия сохраняется. Значение энтропии в частицах, подобно плотности в неоднородной несжимаемой жидкости, должно быть задано или определено из дополнительных условий, вытекающих из постановки конкретных задач.

Если при адиабатическом процессе энтропия s у всех частиц одинакова, $s = \text{const}$, то из уравнений состояния (6.2) следует, что давление p и температура T зависят только от ρ, т. е. процесс является баротропным, и система *механических* уравнений оказывается замкнутой, когда функция $U(\rho, s)$ известна.

Полная система уравнений движения идеального газа в случае изотермических процессов

Если независимыми термодинамическими переменными будут ρ и T, то для определения модели сплошной среды выгодно задавать свободную энергию $F(\rho, T) = U - Ts$. Уравнения состояния в этом случае будут иметь вид (6.5). Они также справедливы для любых процессов, но их вид особенно удобен при изучении изотермических процессов.

Действительно, в этом случае при заданной функции $T(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ или при $T = \text{const}$ из (6.5) сразу получается, что для каждой частицы p есть известная функция ρ, причем p является функцией только от ρ (и не зависит от ξ^i), когда $\operatorname{grad} T = 0$. Система *механических* уравнений в этом случае замкнута, если известна функция $F(\rho, T)$.

При этом энтропия определяется из первого уравнения (6.5), а уравнение притока тепла, которое можно написать в виде

$$dq^{(e)} = -Td\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_\rho, \tag{7.4}$$

позволяет вычислить внешний приток тепла, необходимый для поддержания изотермического процесса.

Совершенный газ

Примером модели идеальной сжимаемой жидкости может служить модель идеального совершенного газа, которую задают обычно двумя функциями:

$$U = c_V T + \text{const}, \quad p = \rho RT \quad (c_V = \text{const}, \quad R = \text{const}).$$

Очевидно, эту же модель можно полностью определить заданием только одной функции $U(\rho, s)$:

$$U = c_V T_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} e^{\frac{s-s_0}{c_V}} + \text{const} \tag{7.4'}$$

(c_V, $\gamma = c_p/c_V$, s_0, T_0, ρ_0 — константы).

в) Модель вязкой жидкости

Определение модели вязкой жидкости

Вязкой жидкостью (см. гл. IV) называется среда, в которой компоненты тензора напряжений и компоненты тензора скоростей деформаций связаны соотношениями вида

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \tau^{ij} \quad (e_{\alpha\beta}), \tag{7.5}$$

где τ^{ij} — вязкие напряжения, а $2e_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha$.

Если зависимость τ^{ij} от $e_{\alpha\beta}$ линейная и жидкость изотропная, то

$$\tau_{ij} = \lambda g_{ij} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu e_{ij}. \tag{7.6}$$

Таким образом, для изотропной линейной вязкой жидкости

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \lambda g^{ij} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} e_{\alpha\beta}. \tag{7.7}$$

Вместо коэффициента λ можно ввести второй коэффициент вязкости ζ:

$$\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \tag{7.8}$$

Коэффициенты ζ, λ и μ для различных сред различны и могут быть функциями температуры, либо постоянными для данной среды физическими коэффициентами. В некоторых приложениях требуется рассматривать также среды, для которых величины λ и μ являются некоторыми функциями скалярных инвариантов тензора e_{ij}, температуры T и других переменных термодинамических характеристик. В дальнейшем для простоты будем рассматривать практически очень важный пример вязкой среды, для которой коэффициенты ζ, μ — заданные постоянные.

Для определения модели вязкой жидкости следует еще задать внутреннюю энергию как функцию, например, ρ и s:

$$U = U(\rho, s),$$

а также дать сведения о величине dq', так как движение вязкой

жидкости является, вообще говоря, необратимым процессом ($dq' \neq 0$).

Уравнения движения линейной вязкой жидкости с постоянными коэффициентами вязкости — уравнения Навье — Стокса имеют, как известно, вид

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \left(\frac{\zeta}{\rho} - \frac{\nu}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \nu\,\Delta\boldsymbol{v}, \quad (7.9)$$

где $\nu = \mu/\rho$ — кинематический коэффициент вязкости.

Уравнение притока тепла с учетом второго закона термодинамики можно написать в следующем виде:

$$dU = -\frac{dA^{(i)}}{dm} + T\,ds - dq'. \quad (7.10)$$

Работа внутренних сил в вязкой жидкости

Подсчитаем элементарную работу внутренних напряжений, отнесенную к единице массы вязкой жидкости. Подставим p^{ij} из (7.5) в общее выражение для работы внутренних поверхностных сил, получим

$$\frac{dA^{(i)}}{dm} = -\frac{p^{ij}}{\rho}e_{ij}\,dt = \frac{p}{\rho}g^{ij}e_{ij}\,dt - \frac{\tau^{ij}}{\rho}e_{ij}\,dt =$$

$$= \frac{p}{\rho}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dt - \frac{\tau^{ij}e_{ij}}{\rho}\,dt. \quad (7.11)$$

Вследствие уравнения неразрывности:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt},$$

будем иметь

$$\frac{1}{dm}dA^{(i)} = p\,d\frac{1}{\rho} - \frac{\tau^{ij}e_{ij}}{\rho}\,dt. \quad (7.12)$$

Давление и температура в вязкой жидкости

Из (7.10) и (7.12) получим

$$dU = -p\,d\frac{1}{\rho} + \frac{\tau^{ij}e_{ij}}{\rho}\,dt + T\,ds - dq'. \quad (7.13)$$

Примем по определению, что для вязкой сжимаемой жидкости (вязкого газа), так же как для идеальной сжимаемой жидкости (идеального газа), давление p и температура T для любых процессов определяются из соотношения [1])

$$dU = -p\,d\frac{1}{\rho} + T\,ds, \quad (7.14)$$

[1]) Это существенное допущение, называемое формулой Гиббса, позволяет немедленно установить формулу для некомпенсированного тепла dq'.

т. е. имеют место формулы

$$p=-\left(\frac{\partial U}{\partial\, 1/\rho}\right)_s \qquad T=\left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_\rho. \tag{6.2}$$

Некоторым основанием к введению подобной модели может служить то, что параметры p и T в покоящейся вязкой жидкости, т. е. при $e_{ij}=0$, должны совпадать с соответствующими параметрами в покоящейся идеальной жидкости. То же получится, когда жидкость движется как твердое тело. Вязкие напряжения появляются только при движении с деформациями.

Выражение для некомпенсированного тепла в вязкой жидкости

В введенной модели вязкой жидкости давление, температура, энтропия и внутренняя энергия связаны соотношениями, не зависящими от свойства вязкости. Из сравнения уравнений (7.13) и (7.14) получаем выражение для некомпенсированного тепла, которое верно в общем случае нелинейной вязкой жидкости:

$$dq'=\frac{\tau^{ij}e_{ij}}{\rho}\,dt. \tag{7.15}$$

Диссипация механической энергии в вязкой жидкости

Покажем, что наличие dq' обусловливает диссипацию механической энергии при движении вязкой жидкости. В самом деле, теорема живых сил для вязкой жидкости может быть записана в виде

$$d\,\frac{v^2}{2}=\frac{dA^{(e)}}{dm}+p\,d\,\frac{1}{\rho}-\frac{\tau^{ij}e_{ij}}{\rho}\,dt.$$

Величина $-(1/\rho)\tau^{ij}e_{ij}dt=-dq'$, представляющая собой отнесенную к единице массы работу сил вязких напряжений, всегда отрицательна (или равна нулю, если $e_{ij}=0$), так как $dq'\geqslant 0$. Поэтому за счет работы вязких напряжений кинетическая энергия жидкости может только уменьшаться.

Положительность коэффициентов вязкости

Если вязкая жидкость линейна и изотропна, то, подставив закон Навье—Стокса (7.6) в выражение для некомпенсированного тепла (7.15), получим, что

$$dq'=\frac{1}{\rho}\tau^{ij}e_{ij}\,dt=\frac{dt}{\rho}\left[\left(\zeta-\frac{2}{3}\mu\right)(e^{i\cdot}_{\cdot i})^2+2\mu e^{ij}e_{ij}\right]=$$

$$=\frac{dt}{\rho}\left[\zeta I_1^2+2\mu\left(I_2-\frac{I_1^2}{3}\right)\right], \tag{7.16}$$

где I_1 и I_2 — первый и второй инварианты тензора скоростей

деформаций, определяемые следующими формулами:

$$I_1 = g^{ij}e_{ij}, \quad I_2 = e^{ij}e_{ij}.$$

Легко проверить, что в главных осях тензора скоростей деформаций выражение

$$I_2 - \frac{I_1^2}{3}$$

может быть представлено в виде суммы квадратов, а именно:

$$I_2 - \frac{I_1^2}{3} = \left(e_1 - \frac{I_1}{3}\right)^2 + \left(e_2 - \frac{I_1}{3}\right)^2 + \left(e_3 - \frac{I_1}{3}\right)^2 \geqslant 0.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что для произвольных движений в произвольной системе координат $I_2 - \frac{I_1^2}{3} \geqslant 0$. Так как формула (7.16) применима для произвольных движений и по условию ζ и μ не зависят от e_{ij}, то из второго закона термодинамики ($dq' \geqslant 0$) следует, что $\zeta > 0$ и $\mu > 0$.

В самом деле, если жидкость двигается так, что объем каждой частицы не меняется, то

$$I_1 = 0 \text{ и } dq' = 2\mu I_2 \frac{dt}{\rho} \geqslant 0.$$

Но $I_2 \geqslant 0$ всегда, и поэтому $\mu > 0$. Для всестороннего сжатия или расширения частицы, т. е. когда $e_{ij} = eg_{ij}$,

$$I_2 - \frac{I_1^2}{3} = 0, \quad dq' = \zeta I_1^2 \frac{dt}{\rho} > 0,$$

и, следовательно, $\zeta > 0$.

Рассмотрим теперь еще вопрос о способах передачи тепла к объему сплошной среды.

Вектор потока тепла

Тепло к среде может поступать с помощью различных механизмов: за счет теплопроводности, излучения, электрического тока, химических реакций и т. д.

Рассмотрим процесс теплопроводности, т. е. процесс передачи тепла за счет неравномерности распределения температуры в теле. В этом случае тепло к любому выделенному в среде объему $\Delta\tau$ поступает только через поверхность Σ этого объема. Таким образом. имеем

$$dQ^{(e)} = \int_{\Sigma} Q \, d\sigma,$$

где Q — некоторая функция точек поверхности Σ, ограничивающей объем $\Delta\tau$. Из уравнения притока тепла следует, что при стягивании Σ в точку величина $dQ^{(e)}$ имеет порядок $\Delta\tau\, dt$, т. е. $dQ^{(e)} = dq^{(e)}\rho\,\Delta\tau$, где $dq^{(e)}$ — малая порядка dt.

Отсюда следует [1]), что поверхностный интеграл $\int\limits_{\Sigma} Q\, d\sigma$ должен сводиться к объемному, т. е. для величины Q на Σ должна иметь место следующая формула:

$$Q = -(q^1 n_1 + q^2 n_2 + q^3 n_3)dt,$$

где n_i — ковариантные компоненты единичного вектора внешней нормали к Σ. Так как Q — скаляр, то конечные величины q^i (x^1, x^2, x^3, t) можно рассматривать как контравариантные компоненты вектора $\boldsymbol{q}$, определенного во всех точках среды. Вектор $\boldsymbol{q}$ называется вектором потока тепла. Этот вектор характеризует направление передачи тепла и по величине равен количеству тепла, протекающему в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к этому направлению. Количество тепла, протекающее через произвольно ориентированную площадку $d\sigma$ за время dt, будет, очевидно, равно $q_n d\sigma\, dt$ ($\boldsymbol{n}$ — нормаль к $d\sigma$), а общий приток тепла $dQ^{(e)}$ к объему V может быть представлен в следующем виде (рис. 38):

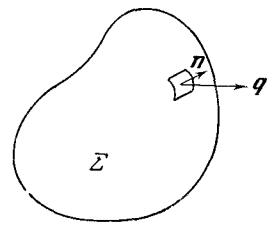


Рис. 38. Вектор потока тепла ($\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Σ).

$$dQ^{(e)} = -\int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma\, dt,$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности Σ. По теореме Гаусса — Остроградского

$$dQ^{(e)} = -\int\limits_{V} \operatorname{div}\boldsymbol{q}\, d\tau\, dt.$$

Количество тепла, поступающее к бесконечно малому объему $d\tau$ за время dt, будет равно

$$dQ^{(e)} = -\operatorname{div}\boldsymbol{q}\, d\tau\, dt,$$

а к единице массы среды —

$$dq^{(e)} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\boldsymbol{q}\, dt. \qquad (7.16')$$

[1]) Этот вывод получается тем же путем, как и формула (2.4) гл. III для $\boldsymbol{p}_n$.

Закон теплопроводности Фурье

Законы, определяющие вектор q, могут быть различными.

Основным, наиболее распространенным, хорошо оправдывающимся во многих случаях на практике законом, определяющим q, является закон теплопроводности Фурье, который имеет вид

$$q = -\varkappa \operatorname{grad} T.$$

Вектор потока тепла и градиент температуры имеют, естественно, противоположные направления, поэтому $\varkappa > 0$. Коэффициент $\varkappa$ носит название коэффициента теплопроводности. Можно рассматривать частные важные примеры, когда коэффициент $\varkappa$ постоянен или является функцией температуры T.

Выражение для притока тепла за счет теплопроводности, подчиняющейся закону Фурье

Рассмотрим практически очень важный простой случай, когда $\varkappa = \text{const}$. Тогда для притока тепла $dq^{(e)}$ на единицу массы среды получим

$$\frac{dq^{(e)}}{dt} = \frac{\varkappa}{\rho} \operatorname{div} \operatorname{grad} T = \frac{\varkappa}{\rho} \nabla_i g^{ij} \nabla_j T = \frac{\varkappa}{\rho} \nabla_i \nabla^i T,$$

или

$$\frac{dq^{(e)}}{dt} = \frac{\varkappa}{\rho} \nabla^2 T = \frac{\varkappa}{\rho} \Delta T,$$

где ΔT — оператор Лапласа от температуры.

В декартовой системе координат

$$\frac{dq^{(e)}}{dt} = \frac{\varkappa}{\rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$

Уравнение притока тепла для вязкого теплопроводного газа

Таким образом, уравнение притока тепла для вязкой жидкости в том случае, когда приток тепла к ней обусловлен теплопроводностью по закону Фурье, будет иметь вид

$$\frac{dU}{dt} = -p \frac{d\,1/\rho}{dt} + \frac{1}{\rho} \tau^{ij} e_{ij} + \frac{\varkappa}{\rho} \Delta T \qquad (7.17)$$

или, на основании (7.14),

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} \tau^{ij} e_{ij} + \frac{\varkappa}{\rho} \Delta T.$$

Для жидкости, удовлетворяющей закону Навье — Стокса, это уравнение согласно (7.16) может быть записано еще следующим образом:

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{\zeta}{\rho} (\operatorname{div} \boldsymbol{v})^2 + \frac{2\mu}{\rho} \left[e^{ij} e_{ij} - \frac{1}{3} (\operatorname{div} \boldsymbol{v})^2 \right] + \frac{\varkappa}{\rho} \Delta T. \qquad (7.18)$$

Это уравнение может служить для определения распределения температуры в жидкости.

Внутренняя энергия U или энтропия s при этом должны быть известны как функции от температуры и плотности. Например, если

$$U = \int c_V\, dT + \text{const},$$

то в декартовой системе координат имеем

$$\frac{dU}{dt} = c_V \frac{dT}{dt} = c_V\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z}\right).$$

Уравнение притока тепла (7.17) в случае покоящейся среды совпадает с обычным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\varkappa}{\rho c_V}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right).$$

Полная система уравнений движения вязкой жидкости

Если внешние силы заданы, то уравнения Навье — Стокса, уравнение неразрывности, уравнение притока тепла (7.18) и уравнения состояния представляют собой полную систему уравнений для описания движений сжимаемой вязкой (линейной изотропной) теплопроводной жидкости.

Примером модели вязкой сжимаемой среды может служить модель вязкого теплопроводного совершенного газа, в котором

$$U = c_V T + \text{const}, \quad p = \rho R T.$$

Мы подробно рассмотрели некоторые важные модели жидкостей и газов. В последующем будут так же подробно изучены некоторые наиболее важные модели твердых деформируемых тел и, в частности, упругих тел.

§ 8. Первый и второй законы термодинамики для конечных объемов сплошной среды. Производство энтропии в некоторых необратимых процессах

Первый и второй законы термодинамики для конечных объемов сплошной среды

Напишем теперь выражения первого и второго законов термодинамики в интегральной форме для конечных масс среды. Для простоты ограничимся допущением об аддиативности внутренней энергии и энтропии по массам частиц конечного объема тела. На основании теории, развитой выше, эти уравнения можно написать в следующей форме:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(\frac{v^2}{2} + U\right) d\tau =$$

$$= \int_V \rho(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v})\, d\tau + \int_\Sigma (\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{v})\, d\sigma - \int_\Sigma q_n^*\, d\sigma + \int_V \frac{dq^*_{\text{масс}}}{dt}\rho\, d\tau \quad (8.1)$$

и

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V s\rho\, d\tau = \int_V \frac{1}{T}\left(\frac{dq^{(e)}}{dt} + \frac{dq'}{dt}\right)\rho\, d\tau. \qquad (8.2)$$

В этих равенствах V — конечный подвижный индивидуальный объем; в притоках внешней энергии выделен приток энергии через поверхность Σ, ограничивающую объем V, определяемый вектором $\boldsymbol{q}^*$.

В обозначении этого вектора ($\boldsymbol{q}^*$) звездочка означает, что это полный удельный поток энергии, не связанной с работой механических сил (как тепловой, так и не тепловой). Добавочный член в (8.1), содержащий $dq^*_{\text{масс}}/dt$, определяет внешний массовый приток энергии, в частности, это может быть джоулево тепло, работа внешних массовых пар и т. д. Остальные обозначения ясны из предыдущего текста.

Теплопроводность как необратимый процесс

Рассмотрим процесс теплопроводности в неподвижном теле. Как в приведенном выше частном примере (см. § 5 этой главы), примем, что в этом случае $dq' = 0$; тогда

$$T\, ds = dq^{(e)} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\boldsymbol{q}\, dt. \qquad (8.3)$$

Это соотношение выполняется, например, в покоящейся вязкой жидкости.

В этом случае уравнение (8.2), преобразованное с помощью формулы Гаусса — Остроградского, дает

$$\frac{dS}{dt} = -\int_V \frac{1}{T}\operatorname{div}\boldsymbol{q}\, d\tau = -\int_\Sigma \frac{q_n}{T}\, d\sigma + \int_V \left(\boldsymbol{q}\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{T}\right) d\tau. \qquad (8.4)$$

Это равенство при условии (8.3) верно при любом теплообмене данной части среды с внешними телами.

Согласно (8.4) энтропия может возрастать или убывать за счет интеграла $-\int_\Sigma \frac{q_n}{T}\, d\sigma$ при $q_n \neq 0$. Если тело теплоизолировано, то это значит, что на его поверхности $q_n = 0$, но внутри тела из-за неравномерности распределения температур вектор $\boldsymbol{q}$ может быть отличен от нуля.

Таким образом, для теплоизолированного тела получим

$$\frac{dS}{dt} = -\int_V \frac{\boldsymbol{q}\cdot\operatorname{grad} T}{T^2}\, d\tau. \qquad (8.5)$$

Величина $\frac{dS}{dt}$ в этом случае всегда больше нуля, так как

энтропия за счет теплопроводности растет, поэтому по второму закону термодинамики скалярное произведение векторов $\boldsymbol{q}$ и grad T всегда отрицательно.

Согласно закону Фурье $\boldsymbol{q} = -\varkappa \operatorname{grad} T$, $\varkappa > 0$. При наличии закона Фурье равенство (8.5) принимает вид

$$\frac{dS}{dt} = \int_V \frac{\varkappa}{T^2} |\operatorname{grad} T|^2 \, d\tau. \tag{8.6}$$

Таким образом, несмотря на отсутствие притока тепла извне к телу в целом, при условии $Tds = dq^{(e)}$, $dq' = 0$ получается, что энтропия тела в целом растет. Проведенное рассуждение представляет собой обобщение примера, приведенного в § 5 этой главы.

Из проведенного рассуждения ясно, что условие $dq' = 0$ не является достаточным условием обратимости процессов.

Критерий необратимости

Для получения достаточного критерия обратимости процессов можно поступать следующим путем. Положим

$$dS = d_e S + d_i S, \tag{8.7}$$

где dS — дифференциал энтропии, а $d_e S$ и $d_i S$ — бесконечно малые слагаемые, причем $d_e S$ определяет приращение энтропии за счет притока энтропии извне, происходящего за счет энергообмена с внешними телами. Величина $d_i S$ по определению существенно положительна при наличии необратимости и дает рост энтропии за счет внутренних необратимых процессов. Для обратимых процессов $d_e S$ может иметь любой знак, а $d_i S = 0$.

В предыдущем примере для тела в целом имеем

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d_e S}{dt} + \frac{d_i S}{dt} = -\int_\Sigma \frac{q_n}{T} d\sigma - \int_V \frac{\boldsymbol{q} \cdot \operatorname{grad} T}{T^2} d\tau.$$

На основании данных выше определений необходимо положить

$$\frac{d_e S}{dt} = -\int_\Sigma \frac{q_n}{T} d\sigma = -\int_V \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{q}}{T} d\tau,$$

$$\frac{d_i S}{dt} = -\int_V \frac{\boldsymbol{q} \cdot \operatorname{grad} T}{T^2} d\tau.$$

Отсюда для плотности энтропии получим

$$d_e s = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{q}}{T} dt, \quad d_i s = -\frac{\boldsymbol{q} \cdot \operatorname{grad} T}{\rho T^2} dt. \tag{8.8}$$

Из формулы (8.8) следует, что в общем случае

$$T\,d_i s \neq dq'.$$

В некоторых случаях, например при отсутствии градиентов температуры, равенство $Td_i s = dq'$ имеет место.

Формулы для производства энтропии $d_i s$

Обычно величины $d_e s$ и $d_i s$ определяются формулами следующего вида:

$$\frac{d_e s}{dt} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\boldsymbol{S}, \qquad \rho\frac{d_i s}{dt} = \sigma = \sum_\alpha X_\alpha \chi^\alpha \geqslant 0, \tag{8.9}$$

где $\boldsymbol{S}$ — вектор потока энтропии, σ определяет величину необратимого роста энтропии за счет внутренних процессов, χ^α называются обобщенными потоками, а X_α — обобщенными термодинамическими «силами».

В случае теплопроводности имеем

$$\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{q}}{T}, \qquad \chi^\alpha = q^\alpha, \qquad X_\alpha = -\frac{1}{\rho T^2}\frac{\partial T}{\partial x^\alpha}.$$

В существующих теориях необратимых процессов основной задачей является установление формул типа (8.9). Во многих случаях предполагается, что существуют связи между потоками χ^α и «силами» X_α. Для определения этих связей выставляются различные принципы.

В случае движения вязкой теплопроводной жидкости формула (8.9) для $\frac{d_i s}{dt}$ имеет вид

$$\frac{d_i s}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{\tau^{ij} e_{ij}}{T} - \frac{\boldsymbol{q}}{\rho}\cdot\frac{\operatorname{grad} T}{T^2} = \frac{dq'}{T} - \frac{\boldsymbol{q}\cdot\operatorname{grad} T}{\rho T^2}.$$

В данном случае функциональные связи τ^{ij} и $\boldsymbol{q}$ от e_{ij} и $\operatorname{grad} T$ соответственно определяют свойства вязкости и теплопроводности среды.

Законы Навье — Стокса и Фурье дают частный пример связей обобщенных потоков и термодинамических «сил».

Диссипативная функция

При наличии связи[1]) между χ^α и X_β величину σ можно рассматривать как функцию χ^α или как функцию X_β, т. е.

$$\sum_\alpha X_\alpha \chi^\alpha = \sigma(X_\beta) = \sigma(\chi^\alpha). \tag{8.10}$$

Функцию σ называют диссипативной функцией. В ряде теорий необратимых процессов дополнительные принципы сводятся к обоснованию следующих формул (не вытекающих

[1]) Существование конечных связей между χ^α и X_β для всевозможных моделей сплошных сред не обязательно.

непосредственно из (8.10)):

$$X_\alpha = \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial \chi^\alpha} \quad \text{и} \quad \chi^\alpha = m \frac{\partial \sigma}{\partial X_\alpha}, \tag{8.11}$$

где λ и m — некоторые скалярные функции, для которых на основании (8.10) верны формулы:

$$\lambda = \frac{\sigma}{\chi^\alpha \dfrac{\partial \sigma}{\partial \chi^\alpha}} \quad \text{и} \quad m = \frac{\sigma}{X_\alpha \dfrac{\partial \sigma}{\partial X_\alpha}}. \tag{8.12}$$

Из (8.11) и равенства

$$d\sigma = \chi^\alpha dX\alpha + X_\alpha d\chi^\alpha \text{ при } d\sigma \neq 0$$

следует, что $\lambda + m = 1$.

Если диссипативная функция — однородная функция своих аргументов, то на основании теоремы Эйлера об однородных функциях λ и m получаются постоянными. Если диссипативная фукция — квадратичная форма своих аргументов, то

$$\lambda = m = \frac{1}{2}.$$

В этом случае соотношения (8.11) определят собой линейные связи между «силами» и потоками. Из существования диссипативной функции следует, что матрица из постоянных коэффициентов в этих линейных связях симметрична.

О теории Онзагера

Теория, основанная на предположении, что диссипативная функция является квадратичной формой своих аргументов и что соотношения (8.11) справедливы, составляет содержание теории Онзагера. Законы Фурье и Навье — Стокса — частный пример теории Онзагера.

В этом случае для диссипативной функции на основании законов Фурье и Навье — Стокса получается формула:

$$\sigma = \varkappa \frac{|\operatorname{grad} T|^2}{T^2} + \left(\zeta (e_i^i)^2 + 2\mu \left[e^{ij} e_{ij} - \frac{1}{3}(e_i^i)^2\right]\right) \frac{1}{T}. \tag{8.13}$$

Из сказанного выше ясно, что положительность функции σ обеспечивается условиями: $\varkappa > 0$, $\zeta > 0$, $\mu > 0$.

Во втором томе книги мы покажем, что в теории идеальной пластичности можно рассматривать соотношение (8.9), в котором функция σ является однородной функцией первой степени от χ^α; в этом случае $\lambda = 1$, а формула для χ^α через X_α в (8.11) заменяется другой формулой аналогичной природы,

ГЛАВА VI

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 1. Основные понятия электродинамики. Электромагнитное поле. Уравнения Максвелла в пустоте

В последнее время все большее и большее значение приобретают вопросы изучения движения сплошной среды с учетом электромагнитных эффектов. В связи с этим в механике сплошной среды стало необходимым излагать основные сведения из электродинамики.

Дальше примем, что простейшие опытные факты и законы электродинамики известны из элементарного и общего курсов физики. Сформулируем основные законы электродинамики в виде уравнений Максвелла аксиоматически, как результат теоретической обработки и обобщения опыта и наблюдений.

Формулировка уравнений Максвелла основана на использовании ряда абстрактных математических понятий об электромагнитных характеристиках, вводимых для описания электромагнитных свойств тел и поля. Введение и анализ этих понятий и уравнений связаны с громадной работой и большими историческими переживаниями в интенсивном развитии научных исследований электрических явлений в течение более ста лет.

Плодотворность теоретических методов, опирающихся на уравнения Максвелла, подтверждается всей практикой описания электромагнитных эффектов и всеми известными макроскопическими экспериментальными данными.

При изложении электродинамики не будем придерживаться исторического аспекта, а дадим концентрированное описание ее основ, имея в виду приложения электродинамики к задачам механики сплошной среды. Отметим только, что теория электромагнитного поля, как теория реального объекта, возникла у Фарадея и была опробирована убедительно экспериментально лишь в конце прошлого столетия, когда Герцу удалось получить электромагнитные волны и этим доказать реальность существования электромагнитного поля.

Укажем сначала, почему электромагнитные явления могут иметь значение для механики сплошной среды. В физике из-

вестны четыре основных типа взаимодействий между материальными объектами: гравитационные, электромагнитные, ядерные и слабые взаимодействия в теории элементарных частиц.

Изучаемые нами внутренние силовые взаимодействия связаны, в основном, с электромагнитными эффектами; ими обусловлены макроскопические напряжения в твердых, жидких и газообразных телах. В частности, при столкновениях молекул и атомов роль электромагнитных сил — основная.

Кроме того, при некоторых условиях тела могут обладать электрическими зарядами и в них могут течь токи. Возникающие при этом силы взаимодействия необходимо учитывать в общем балансе сил, действующих на объем сплошной среды. Такого рода эффекты проявляются особенно сильно при изучении движения плазмы. Плазма представляет собой газ, в котором имеется большое число свободных электронов и ионов. Поэтому плазма заметно взаимодействует с электромагнитным полем.

Напомним теперь некоторые основные определения и понятия электродинамики.

Закон Кулона для покоящихся зарядов

Опыт показывает, что две покоящиеся частицы среды, обладающие зарядами e_1 и e_2, взаимодействуют между собой с силой, аналогичной силе притяжения между двумя массами:

$$F = \pm k \frac{e_1 e_2}{r^2} \operatorname{grad} r, \tag{1.1}$$

где r — расстояние между заряженными частицами. Это соотношение носит название закона Кулона.

В противоположность силе тяготения, которая всегда является силой притяжения, сила F является силой притяжения, если заряды e_1 и e_2 разноименные, и силой отталкивания, если они одноименные.

Влияние силы гравитационного притяжения заметно, когда взаимодействующие массы m_1 и m_2 очень велики. Электрические силы взаимодействия во много раз больше сил тяготения. Сила гравитационного притяжения между двумя электронами меньше силы их электрического отталкивания в 10^{39} раз. Это очень большое число, которое трудно ощутить с помощью обычных представлений.

Плотность заряда

В механике сплошной среды естественно ввести непрерывное распределение зарядов e, подобно тому как вводится непрерывное распределение масс. Плотность заряда определяется следующим

образом:

$$\rho_e = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta V},$$

где Δe — суммарный заряд в объеме ΔV.

Для электрически нейтральных тел $\Delta e = 0$ и $\rho_e = 0$. Плотность заряда ρ_e в зависимости от накопления ионов или электронов в определенном месте может быть как положительной, так и отрицательной. В действительности ρ_e для всех тел близко к нулю, это связано с тем, что одноименные заряды всегда отталкиваются; поэтому большие скопления положительно или отрицательно заряженных частиц долго существовать не могут.

Электрический ток

Электрический ток представляет собой движение заряженных частиц. Так, если в теле имеются свободные электроны, движущиеся направленным образом относительно ионов, то это значит, что в теле текут электрические токи. При этом, несмотря на наличие макроскопических потоков ионов и электронов, макроскопическая суммарная скорость частиц тела может равняться нулю. Электрический ток по своей природе подобен интенсивной упорядоченной диффузии. Токи можно рассматривать как в покоящихся, так и в движущихся средах. Плотность тока характеризуется вектором плотности тока j, величина которого равна величине суммарного заряда, переносимого через единичную площадку, перпендикулярную к вектору j, за единицу времени.

Поляризация атомов

В обычных условиях атом вещества электрически нейтрален, его суммарный заряд равен нулю, но если имеется совокупность близко расположенных друг к другу атомов, то заряды в каждом из них смещаются друг относительно друга — нейтральный атом становится подобным диполю или мультиполю. Это явление называется поляризацией. Большое количество поляризованных молекул или атомов при их упорядоченном расположении под действием внешнего электрического поля приводит к макроскопическому эффекту электрической поляризации макроскопических частей среды. Очевидно, что хаотическое тепловое движение, вообще говоря, препятствует появлению макроскопической поляризации.

Магнитные взаимодействия

Кроме указанных выше взаимодействий покоящихся заряженных частиц, существуют еще магнитные взаимодействия. Так, например, известно, что намагниченное железо притягивает к себе железные опилки, намагниченная стрелка компаса располагается по меридиану Земли. Следовательно, на Земле всегда существуют силы, которые поворачивают стрелку компаса в определенном направлении.

В связи с наличием магнитных взаимодействий делались попытки ввести в рассмотрение магнитные заряды и написать для них закон, аналогичный закону Кулона для электрических зарядов. Выяснилось, однако, что никаких магнитных зарядов в природе не существует, а магнитные взаимодействия сводятся к взаимодействиям электрических токов (т. е. движущихся зарядов). В частности, магнитные свойства различных веществ объясняются наличием микроскопических токов, текущих внутри атомов за счет движения электронов вокруг ядра и за счет собственного «вращения» электронов и ядер (спинов). В обычных условиях в большинстве тел атомы ориентированы хаотически и действие внутриатомных токов не проявляется. Если же возникает упорядоченная ориентация элементарных частиц, из которых составлено тело, то соответствующий макроскопический эффект проявляется в магнитных свойствах тел, связанных с явлением намагничивания.

Векторы электрической и магнитной напряженности

Допустим, что в пространстве имеется совокупность зарядов, покоящихся относительно некоторой инерциальной системы координат K. В физике принят общий принцип, с помощью которого можно изучать электрические силы, действующие со стороны системы зарядов на пробный элементарный заряд e, помещенный в данную точку x^1, x^2, x^3 пространства. Как известно, сила, действующая на неподвижный пробный заряд, зависит только от его положения и величины. Она равна

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E}, \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{E}$ — некоторый вектор, называемый вектором электрической напряженности, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(x^1, x^2, x^3)$. Поле вектора $\boldsymbol{E}$ получается как сумма полей отдельных зарядов.

Первоначально считали, что это поле представляет собой математическую абстракцию, удобную для вычисления сил, действующих на пробный заряд. Последующие исследования показали, что поле электрической напряженности $\boldsymbol{E}$ можно рассматривать как объект, существующий в пространстве вне зависимости от существования пробного заряда, и можно говорить об электрическом поле как о материальном объекте, отличном от материального тела.

Возможны две точки зрения на соотношение между зарядами и полем. Можно считать, что поле порождается зарядами или что заряды являются особыми точками (физически малыми объектами) существующего электрического поля.

Аналогично вектору электрической напряженности, путем суммирования действия элементарных токов вводится вектор магнитной напряженности $\boldsymbol{H}$ как характеристика магнитного поля, с помощью которой можно оценивать силы

магнитного взаимодействия. Для характеристики пробного элементарного магнита или тока вводится малый магнитный дипольный момент $\boldsymbol{d}$ так, что момент пары сил, действующий со стороны поля на элементарную магнитную стрелку с моментом $\boldsymbol{d}$, вычисляется по формуле

$$\mathfrak{M} = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{H}. \tag{1.3}$$

Если магнитное поле однородно, $\boldsymbol{H} = \text{const}$, то общая сила воздействия поля на элементарный диполь равна нулю. Отличен от нуля только момент $\mathfrak{M}$.

Если поле $\boldsymbol{H}$ неоднородно, то, кроме момента $\mathfrak{M}$, появляется сила F', которая определяется формулой

$$\mathsf{F}' = (\boldsymbol{d} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{H} = (d^i \nabla_i)\, \boldsymbol{H} = d \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial s},$$

где $\partial/\partial s$ означает дифференцирование по направлению момента диполя в точке расположения элементарного тока.

В статических условиях напряженности электрического и магнитного полей в данной точке пространства могут быть определены по измерениям силы (1.2) и момента (1.3), действующих на помещенные в эту точку неподвижные пробные электрические заряды и различным образом ориентированные элементарные магниты (элементарные электрические токи).

Эти простые опыты с пробными элементами можно усложнить, обобщить и распространить на случай подвижных пробных зарядов и токов и полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, переменных по времени.

Таким образом, электромагнитное поле в пустоте в каждой точке пространства и в каждый момент времени характеризуется двумя векторами — напряженностью электрического поля $\boldsymbol{E}$ и напряженностью магнитного поля $\boldsymbol{H}$. Векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, плотность зарядов ρ_e и вектор плотности электрического тока $\boldsymbol{j}$ являются основными понятиями электродинамики.

Уравнения Максвелла в электростатике

Нетрудно убедиться, что закон Кулона, определяющий поле $\boldsymbol{E}$ системы неподвижных в инерциальной системе координат точечных или распределенных зарядов, можно написать в дифференциальной форме;

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho_e, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0. \tag{1.4}$$

Общее решение системы уравнений (1.4) в бесконечном пространстве с условием исчезновения вектора $\boldsymbol{E}$ в бесконечности приводит к закону Кулона.

Переход от простого опытного закона Кулона к уравнениям (1.4), представляющим собой уравнения Максвелла для

системы неподвижных зарядов, является простой переформулировкой основного закона электродинамики в терминах дифференциальных уравнений. Этот переход во многом аналогичен переходу от закона всемирного тяготения Ньютона к дифференциальным уравнениям в теории ньютоновского потенциала. Ввиду важности такого перехода поясним сказанное более подробно.

Дифференциальные уравнения гравитационного поля в ньютонианской механике

Если имеются две материальные точки с массами m и m_k, то они притягиваются друг к другу по закону Ньютона и на точку m со стороны точки m_k действует сила, которая равна

$$\boldsymbol{F}_k = -f\frac{mm_k}{r_k^2}\boldsymbol{r}_k^0,$$

где r_k — расстояние между точками m и m_k, f — гравитационная постоянная, а $\boldsymbol{r}_k^0$ — единичный вектор направления от m_k к m.

Как известно, эта сила потенциальна, т. е. $F = \operatorname{grad} U_k$, и потенциал $U_k = f\frac{mm_k}{r_k}$.

Если в пространстве имеется n материальных точек с массами m_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) и мы рассматриваем их влияние на одну материальную точку массы $m = 1$, которая может быть помещена в разные точки пространства (пробная масса), то со стороны всех точек m_k на пробную массу $m = 1$ будет действовать сила $\boldsymbol{F} = \Sigma \boldsymbol{F}_k$ и ее потенциал

$$U = \sum_k U_k = f\sum_k \frac{m_k}{r_k}, \qquad \boldsymbol{F}_k = \operatorname{grad} U_k. \tag{1.5}$$

Распределение масс m_k создает в пространстве гравитационное поле с потенциалом U, которое можно обнаружить с помощью пробной массы, помещенной в рассматриваемую точку пространства.

Напишем дифференциальное уравнение, которому должен удовлетворять потенциал сил тяготения U.

Функция $1/r_k$, где

$$r_k = \sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + (z-z_k)^2}$$

расстояние между точкой x, y, z, в которой помещена пробная масса, и точкой x_k, y_k, z_k, в которой находится k-масса, создающая гравитационное поле, является гармонической функцией. Во всех точках x, y, z, для которых $r_k \neq 0$, функция

$1/r_k$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \frac{1}{r_k} = \frac{\partial^2 (1/r_k)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (1/r_k)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (1/r_k)}{\partial z^2} = 0.$$

Следовательно, потенциал U_k гравитационного поля одной материальной точки удовлетворяет уравнению

$$\Delta U_k = 0$$

или

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}_k = 0, \quad \boldsymbol{F}_k = \operatorname{grad} U_k, \text{ т. е. } \operatorname{rot} \boldsymbol{F}_k = 0. \tag{1.6}$$

Уравнение Лапласа является линейным уравнением. Потенциал гравитационного поля $U(x, y, z)$, создаваемого непрерывным распределением масс по некоторому объему V, на основании (1.5) можно написать в виде

$$U(x, y, z) = f \int_V \frac{\rho \, d\tau}{r} \qquad (\rho \, d\tau = dm). \tag{1.7}$$

Очевидно, что эта функция $U(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta U = 0$$

в точках, где нет масс.

Уравнение Лапласа для U равносильно уравнениям

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0, \ \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0, \ \boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U. \tag{1.8}$$

Можно показать при весьма общих практически приемлемых допущениях относительно распределения плотности ρ, что потенциал U гравитационного поля (1.7) для точек x, y, z, расположенных внутри V, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta U = -4\pi\rho. \tag{1.9}$$

Это уравнение (1.9) равносильно уравнениям

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 4\pi\rho, \ \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0, \ \boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U. \tag{1.10}$$

Таким образом, задача определения потенциала гравитационного поля и силы, действующей со стороны поля на пробную единичную массу, может быть поставлена как задача об определении функции $U(x, y, z)$, исчезающей в бесконечности и удовлетворяющей уравнению Лапласа всюду вне V и уравнению Пуассона всюду внутри V, или как задача определения сил $\boldsymbol{F}$, удовлетворяющих уравнениям (1.8) и (1.10).

Такого рода постановка задачи в теории ньютоновского потенциала полностью аналогична постановке задачи электростатики на основе уравнений Максвелла (1.4). Можно показать,

что решение в бесконечном пространстве задачи об отыскании функции U, исчезающей в бесконечности, приводит к формуле (1.7), выражающей собой закон гравитационного тяготения[1]).

При наличии нестационарных электрических и магнитных полей на основе опытных законов индукции аналогичным путем можно получить обобщение уравнений (1.4).

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в пустоте

Эти уравнения в инерциальной системе координат в пустом пространстве, не занятом материальными телами (в этой области $\rho_e = 0$, так как только материальные тела могут нести заряды), имеют вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \tag{1.11}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0. \tag{1.12}$$

Уравнения Максвелла (1.11) и (1.12) удобно взять в качестве исходной, базисной математической абстрактной формулировки опытных наблюдений вместо законов Кулона и других законов электродинамики, связанных исторически и практически более тесно с непосредственными опытами. В уравнениях (1.11) и (1.12) c — постоянная с размерностью скорости, дальше выясняется, что постоянную c нужно рассматривать как скорость распространения электромагнитных возмущений, т. е. как скорость света.

Уравнения (1.11) и (1.12) составляют основу физики. Это главные уравнения в оптике и радиотехнике. Они описывают распространение световых и вообще электромагнитных волн в пустоте и многие другие явления.

О единицах измерения электромагнитных величин

Многие электромагнитные характеристики являются размерными величинами. Написание конкретных формул и уравнений налагает определенные связи между единицами измерения для величин, входящих в эти формулы и уравнения. В частности, использование уравнений Максвелла в форме (1.11), (1.12) подразумевает, что $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ измеряются в одних и тех же единицах.

При независимом выборе единиц измерения для силы, массы и ускорения основное уравнение Ньютона $\boldsymbol{F} = k m \boldsymbol{a}$ необходимо писать с размерной постоянной k; при $k = 1$ эти единицы измерения зависимы.

Размерную постоянную c в уравнениях (1.11) и (1.12) или постоянную f в законе гравитации можно положить равной

[1]) Это предложение подробно разобрано во втором томе этой книги (см. § 25 гл. VIII).

единице, это вполне возможно и принимается некоторыми авторами. Однако если в (1.11) и (1.12) $c = 1$, то это означает, что либо скорость света принимается в качестве единицы для измерения скоростей, либо единицы измерения для $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ становятся зависимыми от единиц измерения длины и времени. Аналогично при $f = 1$ в законе гравитации и одновременно $k = 1$ в законе Ньютона, $\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{m}\boldsymbol{a}$, единицы измерения для массы получаются зависимыми от единиц измерения расстояний и времени и т. п. Такого рода дополнительные условия во многих областях опыта, где встречаются рассматриваемые величины, не связаны с существом физических величин и процессов. Поэтому такие условия вообще неудобны, хотя и допустимы логически. Например, скорость поездов, конечно, можно измерять в долях скорости света, но это неудобно, несмотря на то что свет применяется в светофорах на железных дорогах.

В астрономии и в географии расстояния между небесными телами или городами с точностью до сантиметра вообще не имеют смысла, поэтому использование сантиметра как эталона для единицы астрономических или географических расстояний вполне возможно, но с практической точки зрения довольно бессмысленно. Здесь следует вспомнить, что для получения числа, характеризующего данную длину в опытах, по существу подразумевается последовательное приложение к измеряемой длине масштабной длины (единицы длины).

Естественно, что физические масштабы для различных величин должны быть сравнимы по своему смыслу с измеряемыми величинами.

Вообще достигаемая польза от полной стандартизации и унификации единиц измерения во многих случаях не окупается, так как возникают различные неудобства и, в частности, потеря чувства осязания изучаемых объектов и ломка установившейся жизненной практики и традиций. На практике встречаются затруднения даже при наличии бесспорной с научной точки зрения необходимости применения только одних единиц измерения, например сантиметров или дюймов.

Фиксирование физических постоянных для выбора единиц измерения вообще неудобно. Скорость света имеет фундаментальное значение в физике. Однако, во многих проблемах эта величина совершенно несущественна или может быть принята равной бесконечности. Внесение в такие проблемы ограничений, связанных с величиной скорости света, является ненужным осложнением и противоестественно.

Форма уравнений Максвелла (1.11) и (1.12) — «добропорядочная форма», принятая во многих учебниках, монографиях и научных работах ряда самых знаменитых авторов прошлого и нашего времени.

Здесь мы не будем отвлекаться и рассматривать различные системы единиц измерения для электромагнитных величин; этих систем много. Вопрос о единицах измерения в электродинамике подробно изучается в элементарном и общем курсах физики. При численном решении конкретных задач знание единиц измерения абсолютно необходимо. После фиксирования уравнений (1.11) и (1.12) и других законов дальнейшее развитие общей теории в механике сплошных сред не связано с конкретным выбором систем единиц измерения.

Замкнутость и непротиворечивость системы уравнений Максвелла в пустоте

Система уравнений (1.11) и (1.12) содержит восемь уравнений для определения только шести неизвестных характеристик электромагнитного поля: E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3. Однако эта система непротиворечива. Это связано с тем, что соотношения

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$$

можно рассматривать как следствия первых уравнений в (1.11) и (1.12) если начальные данные заданы соответствующим образом.

Действительно, если $\boldsymbol{A}(x, y, z, t)$ — произвольное дифференцируемое по координатам векторное поле, то $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0$. Поэтому из первого уравнения (1.11) вытекает, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0,$$

т. е. $\operatorname{div} \boldsymbol{H}$ не зависит от времени t. Если $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$ в некоторый начальный момент времени, то $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$ во все другие моменты. Условие соленоидальности магнитного поля удовлетворится всегда, если начальные данные удовлетворяют этому условию. Таким образом, уравнение $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$ можно рассматривать как ограничение на задание начальных данных.

Аналогично из первого уравнения (1.12) вытекает, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0,$$

т. е. если $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$ в некоторый определенный момент времени, то она равна нулю и во все другие моменты времени.

Условие $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$ можно рассматривать как условие невозможности появления в пустоте зарядов, если их не было в какой-либо «начальный» момент времени, а $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$ — как условие отсутствия магнитных зарядов.

Хотя уравнения $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$ и $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$ не являются полностью следствиями первых уравнений, они не находятся с ними в противоречии. Эти условия являются существенными ограничениями на дополнительные данные, при которых решения уравнений Максвелла имеют физический смысл.

О применимости уравнений Максвелла (1.11) и (1.12) в материальных телах

Уравнения Максвелла в виде (1.11) (1.12) годятся не только для описания электромагнитого поля в пустоте, но и для описания электромагнитного поля в телах, если тела электрически и магнитно нейтральны, т. е. когда в них нет макроскопических зарядов, а под действием внешнего электромагнитного поля в них не возникают электрические токи, макроскопическая поляризация и намагничивание.

Каждая из составляющих тело молекул всегда создает вокруг себя электромагнитное поле. Взаимодействие этих полей определяет силы внутренних напряжений. Однако заряды составляющих тело частиц могут быть распределены так, что в среднем собственное электромагнитное поле в каждой точке тела, как и макроскопический заряд в теле, равны нулю,

$$\boldsymbol{E}_{\text{ср}} = 0, \quad \boldsymbol{H}_{\text{ср}} = 0,$$

а иногда $\boldsymbol{E}_{\text{ср}}$ и $\boldsymbol{H}_{\text{ср}}$ остаются равными нулю и в присутствии внешнего электромагнитного поля.

Таким образом, хотя микроскопические поля в атомах и молекулах всегда существуют, из-за хаотичности движения атомов и других причин макроскопически они могут не проявляться.

Вместе с этим отметим как очень важный опытный факт, что уравнения Максвелла (1.11) и (1.12) применимы для описания микроскопических полей вплоть до атомных масштабов.

О значении уравнений Максвелла

Переход от элементарных опытных фактов и законов, описываемых в физике при первом знакомстве с теорией электричества, к эквивалентным им уравнениям Максвелла представляет собой простую переформулировку.

В буднях научной жизни укоренилось мнение, что переформулировки уже установленных предложений и представлений могут быть только тривиальны по своему существу. Однако пример перехода к концентрированной формулировке законов электродинамики в виде уравнений Максвелла опровергает это мнение. Это — гениальное достижение, послужившее основой развития всей современной физики. Последовавший за формулировкой уравнений Максвелла анализ природы электромагнитного поля и свойств системы уравнений Максвелла стал источником теории относительности и соответствующего фундаментального пересмотра старых понятий об инерциальных системах отсчета, о пространстве и времени.

§ 2. Уравнения Максвелла в пространстве Минковского

Формулировка уравнений Максвелла в четырехмерном пространстве

Для более полного разъяснения физической сущности уравнений Максвелла перепишем эти уравнения в новых обозначениях.

Сначала просто в качестве обозначения введем антисимметричную матрицу $F_{ij} = -F_{ji}$ согласно следующему матричному равенству:

$$\| F_{ij} \| = \begin{Vmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & 0 & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & H^3 & -H^2 & cE_1 \\ -H^3 & 0 & H^1 & cE_2 \\ H^2 & -H^1 & 0 & cE_3 \\ -cE_1 & -cE_2 & -cE_3 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{2.1}$$

и рассмотрим четырехмерное многообразие — пространство с координатами x^1, x^2, x^3, $x^4 = t$, причем x^1, x^2, x^3 будем рассматривать как обычные ортогональные декартовы координаты в трехмерном геометрическом объеме.

Легко проверить, что четыре уравнения (1.11) в проекциях на декартовы оси координат можно написать в этом случае в следующем виде:

$$\frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, 3, 4). \tag{2.2}$$

Если наряду с матрицей F_{ij} ввести в этой же системе координат матрицу F^{ij} согласно равенству

$$\| F^{ij} \| = \begin{Vmatrix} 0 & H^3 & -H^2 & -\frac{1}{c}E_1 \\ -H^3 & 0 & H^1 & -\frac{1}{c}E_2 \\ H^2 & -H^1 & 0 & -\frac{1}{c}E_3 \\ \frac{1}{c}E_1 & \frac{1}{c}E_2 & \frac{1}{c}E_3 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{2.3}$$

то четыре уравнения (1.12) можно написать в следующем виде:

$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{2.4}$$

Истолкование величины c как скорости света

Нетрудно показать, что общее решение уравнений (2.2) можно представить в виде

$$F_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}, \tag{2.5}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — четыре произвольные функции от x^1, x^2, x^3, x^4.

Свойство антисимметрии для F_{ij} при этом, очевидно, удовлетворяется.

Заметим, что значения F_{ij} не изменятся, если к A_1, A_2, A_3, A_4 добавить соответственно компоненты четырехмерного вектора — градиента $\partial\Psi/\partial x^1$, $\partial\Psi/\partial x^2$, $\partial\Psi/\partial x^3$, $\partial\Psi/\partial x^4$. Пользуясь этим произволом, дальше нормируем выбор функций A_i добавочным условием

$$\frac{\partial A_1}{\partial x^1}+\frac{\partial A_2}{\partial x^2}+\frac{\partial A_3}{\partial x^3}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial A_4}{\partial x^4}=0. \tag{2.6}$$

Для любой заданной системы четырех функций A_i можно определить функцию Ψ так, чтобы равенство (2.6) удовлетворялось. Равенство (2.6) можно рассматривать как условие, исключающее произвол в выборе функции Ψ.

После замены в (2.4) F^{ij} через

$$F_{ij}=\frac{\partial A_i}{\partial x^j}-\frac{\partial A_j}{\partial x^i}$$

на основании (2.6) получим для четырех функций A_i следующие четыре одинаковых уравнения:

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial(x^1)^2}+\frac{\partial^2 A_i}{\partial(x^2)^2}+\frac{\partial^2 A_i}{\partial(x^3)^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{2.7}$$

Таким образом, решение уравнений Максвелла можно свести к задаче отыскания четырех функций A_i, удовлетворяющих соотношению (2.6), каждая из которых удовлетворяет уравнению (2.7). Уравнение (2.7) называется волновым уравнением.

Более полно общие свойства решений волнового уравнения мы рассмотрим в гл. VIII (см. т. II). Однако здесь мы укажем сразу же на типичное свойство решений этого уравнения. Пусть $f(\xi)$ — произвольная, дважды дифференцируемая по своему аргументу функция. Легко видеть, что функция

$$A=f(x^1-ct), \tag{2.8}$$

удовлетворяет волновому уравнению. Согласно этому решению данное значение $A=f(\xi)$, соответствующее некоторому фиксированному значению $\xi=x^1-ct$, распространяется вдоль оси x^1 со скоростью c. Отсюда выясняется смысл величины c как скорости света.

Пространство Минковского Введем четырехмерное метрическое псевдоевклидово [1]) пространство Минковского,

[1]) Псевдоевклидовость означает, что метрика (2.9) не является положительно дефинитной, но g_{ij} можно принять постоянными во всем пространстве.

отвечающее координатам x^1, x^2, x^3, $x^4 = t$, в которых метрика по определению задается формулой

$$ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} + c^2\,dt^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j. \qquad (2.9)$$

Для этой метрики для матрин $\|g_{ij}\|$ и $\|g^{ij}\|$ имеем

$$\|g_{ij}\| = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \end{Vmatrix}, \quad \|g^{ij}\| = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{Vmatrix}.$$

Из определений (2.1) и (2.3) видно, что F^{ij} и F_{ij} связаны соотношением

$$F^{ij} = F_{pq}g^{pi}g^{qj}.$$

Преобразование уравнений Максвелла к произвольной криволинейной системе координат

Если наряду с координатами x^1, x^2, x^3, $x^4 = t$ ввести произвольную криволинейную систему координат y^1, y^2, y^3, y^4, связанную с x^1, x^2, x^3, $x^4 = t$ преобразованием

$$y^i = f^i(x^1, x^2, x^3, x^4) \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \qquad (2.10)$$

то преобразованная формула для ds^2 будет иметь вид

$$ds^2 = g'_{ij}\,dy^i\,dy^j, \quad \text{где} \quad g'_{ij} = g_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial x^q}{\partial y^j}.$$

Преобразованные уравнения Максвелла (2.2) и (2.4) и формулу (2.5) легко написать, если рассмотреть величины F_{ij} и A_i как компоненты тензора и вектора в пространстве Минковского, т. е. F'_{ij} и A'_i в новой системе определить равенствами

$$F'_{ij} = F_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial x^q}{\partial y^j} \quad \text{и} \quad A'_i = A_p\frac{\partial x^p}{\partial y^i}. \qquad (2.11)$$

Четырехмерный тензор $F = F_{ij}\,\mathfrak{e}^i\mathfrak{e}^j$ называется тензором электромагнитного поля, а четырехмерный вектор $A = A_i\mathfrak{e}^i$ называется векторным потенциалом. На основании формул тензорного анализа получим

$$\nabla'_k F'_{ij} + \nabla'_i F'_{kj} + \nabla'_j F'_{ik} = 0, \qquad (2.12)$$

$$\nabla'_j F'^{ij} = 0, \qquad (2.13)$$

$$F'_{ij} = \nabla'_j A'_i - \nabla'_i A'_j = \frac{\partial A'_i}{\partial y^j} - \frac{\partial A'_j}{\partial y^i}. \qquad (2.14)$$

Волновые уравнения (2.7) при соблюдении условия

$$\nabla'^{\alpha} A'_{\alpha} = 0 \tag{2.15}$$

преобразуются к виду

$$\nabla'^{q} \nabla'_{q} A'_{i} = 0. \tag{2.16}$$

Эти уравнения следуют из тензорного вида уравнений (2.2), (2.4), (2.5) и (2.7) в пространстве Минковского, для которого очевидно, что производные по координатам и по времени в системе x^1, x^2, x^3, t совпадают с ковариантными производными, так как в этой системе все символы Кристоффеля равны нулю.

Заметим, что ввиду антисимметрии F_{ij} в произвольной системе координат в уравнении (2.12) члены с символами Кристоффеля сократятся, и поэтому уравнение (2.12) в произвольной криволинейной системе координат можно написать также в виде

$$\frac{\partial F'_{ij}}{\partial y^k} + \frac{\partial F'_{ki}}{\partial y^j} + \frac{\partial F'_{jk}}{\partial y^i} = 0. \tag{2.17}$$

Уравнение (2.13) в раскрытой форме имеет вид

$$\nabla'_j F'^{ij} = \frac{\partial F'^{ij}}{\partial y^j} + F'^{pj} \Gamma^i_{pj} + F'^{ip} \Gamma^j_{jp} = 0.$$

Из антисимметрии F^{pj} и симметрии по нижним индексам Γ^i_{pj} следует, что $F'^{pj} \Gamma^i_{pj} = 0$; кроме этого, на основании формулы (3.6) гл. IV имеем

$$\Gamma^j_{pj} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial y^p}, \quad \text{где} \quad g = |g_{ij}|.$$

Поэтому верна еще следующая форма второй пары уравнений Максвелла (1.12):

$$\nabla'_j F'^{ij} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}\, F'^{ij}}{\partial y^j} = 0. \tag{2.18}$$

Таким образом, уравнения Максвелла можно написать в тензорной форме с помощью тензора F_{ij} в специально введенном по определению четырехмерном пространстве Минковского.

С помощью полученных тензорных уравнений можно рассмотреть в различных системах отсчета вопрос о виде уравнений Максвелла и о компонентах магнитной и электрической напряженности H^1, H^2, H^3 и E_1, E_2, E_3, исходя из равенств (2.1) и (2.3) и формул преобразования (2.11).

Метрическое пространство Минковского введено как вспомогательный математический образ. Это сделано пока только в связи с тем, что при преобразованиях координат в пространстве Минковского можно рассматривать тензор F_{ij} и уравнения Максвелла в этом пространстве можно рассматривать как тензорные уравнения.

Трактовка введенного таким образом пространства Минковского как физического пространства и в связи с этим трактовка тензора электромагнитного поля тоже как физического объекта возникают только после принятия дополнительных физических постулатов, сущность и смысл которых будут изложены в следующем параграфе.

Преобразование только пространственных координат

Здесь же отметим еще следующие выводы, вытекающие из сделанных математических определений.

Возьмем частные преобразования вида

$$\left.\begin{aligned} y^\alpha &= f^\alpha(x^1, x^2, x^3), \qquad \alpha = 1, 2, 3, \\ t' &= y^4 = x^4 = t, \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

в которых преобразуются только пространственные координаты и сохраняется неизменной координата, соответствующая времени.

Легко проверить на основании формул (2.11) и матричной формулы [1]) (2.1), что соответствующие формулы преобразования для величин E_i и H^i представляют собой формулы преобразования соответственно для ковариантных и контравариантных компонент трехмерных пространственных полярного и аксиального векторов. При преобразовании (2.10) общего вида можно также в разных системах координат рассматривать величины E_i и H^i, однако соответствующие преобразования не будут преобразованиями компонент каких-либо векторов.

Преобразования Лоренца

Рассмотрим преобразования $y^i = f^i(x^k)$ самого общего вида, которые сохраняют вид квадратичной формы (2.9) для метрического пространства Минковского, т. е. такие, для которых имеет место равенство

$$\begin{aligned} ds^2 = &- dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} + c^2dt^2 = \\ &= -dy^{1^2} - dy^{2^2} - dy^{3^2} + c^2dt^2. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Так же как при любых преобразованиях координат, при таких преобразованиях, называемых преобразованиями Лоренца, тензорные уравнения (2.12) и (2.13) и соответственно

[1]) В криволинейной пространственной системе координат в матрице (2.1) вместо H^i необходимо подразумевать $H^{|i} \sqrt{\mathrm{Det}\|g_{\alpha\beta}\|}$ $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ (см. § 3 гл. IV, формула (3.26)).

(2.17) и (2.18) в раскрытом виде отличаются только обозначениями координат и компонент F_{ij}.

Инварпантность векторных уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца

Преобразования Лоренца сохраняют вид также и векторных уравнений Максвелла (1.11) и (1.12). Однако из формул преобразования (2.11) получится, что векторы электрической и магнитной напряженности $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ в системе x^i и векторы $\boldsymbol{E}', \boldsymbol{H}'$ в системе y^i — это разные векторы. В следующем параграфе мы укажем формулы перехода от $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ к $\boldsymbol{E}', \boldsymbol{H}'$ при преобразованиях Лоренца.

Таким образом, уравнения Максвелла при соответствующих условиях относительно преобразования векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ инвариантны относительно преобразований Лоренца. Из уравнений (2.17) и (2.18) можно усмотреть, что, кроме преобразований Лоренца, можно указать более общие классы преобразований, чем преобразования Лоренца, для которых также имеет место инвариатность уравнений Максвелла. Однако, как будет показано ниже, особенно важное физическое значение имеют преобразования Лоренца.

Преобразования вида

Преобразования Галилея

$$\left.\begin{aligned} y^\alpha &= x^\alpha + a_0^\alpha - v^\alpha t, \quad \alpha = 1, 2, 3, \\ y^4 &= t' = t + t_0 = x^4 + t_0, \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

где t_0, a_0^α и v^α — постоянные, называются преобразованиями Галилея. В ньютонианской механике преобразования (2.21) соответствуют поступательному равномерному прямолинейному движению системы отсчета y^α относительно системы отсчета x^α, причем v^α — компоненты скорости этого движения в системе x^α.

Очевидно, что преобразования Галилея не являются преобразованиями Лоренца, так как для преобразований Галилея не выполняется равенство (2.20). Преобразования Галилея и формулы (2.21) можно усложнить дополнительным поворотом системы y^α на фиксированный конечный угол около некоторой произвольно фиксированной оси и зеркальными отражениями относительно координатных плоскостей. Заметим, попутно, что любое вращение можно заменить совокупностью зеркальных отражений относительно некоторых плоскостей.

Тензорные и векторные характеристики в пространстве Минковского; тензор энергии-импульса

В четырехмерном пространстве Минковского в связи с уравнениями Максвелла были введены тензор электромагнитного поля $F = F_{ij}\partial^i\partial^j$ и векторный потенциал $A = A_i\partial^i$. При дальнейшем развитии теории вводится много других векторов и тензоров. Например, четырехмерный вектор электрического

тока $\boldsymbol{J} = J^i \boldsymbol{э}_i$ (см. § 4), четырехмерный вектор силы $\boldsymbol{F}$ (см. § 5), вектор четырехмерной скорости $\boldsymbol{u} = u^i \boldsymbol{э}_i = d\boldsymbol{r}/ds$, где $d\boldsymbol{r} = dx^i \boldsymbol{э}_i$ — четырехмерное перемещение индивидуальной точки, $ds = |d\boldsymbol{r}|$, тензор энергии — импульса электромагнитного поля

$$S = S_i^{\ k}\, \boldsymbol{э}^i \boldsymbol{э}_k, \tag{2.22}$$

где

$$S_i^{\ k} = -\frac{1}{4\pi}\left[F_{mi}F^{mk} - \frac{1}{4}\delta_i^k F_{mn}F^{mn}\right],$$

и многие другие векторы и тензоры.

Из уравнений (2.12) и (2.13) вытекают следующие важные следствия:

$$\nabla_k S_i^{\ k} = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4, \tag{2.23}$$

которые можно трактовать как уравнения импульсов и энергии для электромагнитного поля в пустоте.

§ 3. Преобразования Лоренца и инерциальные системы отсчета

Принцип относительности в физике

Основная физическая посылка — универсальный принцип относительности Галилея состоит в утверждении, что все физические законы о взаимодействиях в материальных средах и полях формулируются одинаково и все физические процессы и явления протекают одинаково для наблюдателей в любой инерциальной системе отсчета. Постулируется существование совокупности инерциальных систем координат, которые могут двигаться друг относительно друга. Однако совокупность инерциальных систем отсчета может быть определена в различных теориях различными способами.

Инерциальные системы в ньютонианской механике

В ньютонианской физике предполагается, что физическое пространство трехмерно (евклидово трехмерное пространство), что время абсолютно, и может быть определено универсально как одно и то же время во всевозможных движущихся друг относительно друга поступательно с постоянной скоростью системах координат, образующих все множество инерциальных систем отсчета. Множество инерциальных систем определяется условием, что в этих системах изолированная материальная точка покоится или движется с постоянной скоростью.

Принцип относительности Галилея — Ньютона состоит в утверждении, что все физические уравнения и законы должны быть инвариантными относительно системы преобразований

Галилея (2.21), определяющих собой в декартовых системах координат переход от декартовой инерциальной системы координат x^1, x^2, x^3, t к другой декартовой инерциальной системе координат y^1, y^2, y^3, $t + t_0$.

В ньютонианской физике из (2.21) и кинематического определения скорости вытекает следующий закон сложения скоростей:

$$\boldsymbol{v}_x = \boldsymbol{v}_y + \boldsymbol{v}, \tag{3.1}$$

где $\boldsymbol{v}_y$ — скорость объекта, точки, относительно системы y, $\boldsymbol{v}_x$ — скорость этого же объекта относительно системы x, а $\boldsymbol{v}$ — поступательная скорость инерциальной системы y по отношению к системе x.

Как известно, скорость света в пустоте можно определить как скорость фронта электромагнитных возмущений или, более просто, как скорость движения в пустоте электромагнитной частицы — фотона. Согласно (3.1) в ньютонианской физике должно получаться, что скорость света различна для различных наблюдателей, производящих измерения в своих инерциальных системах координат. Кроме того, из абсолютности времени следует, что в ньютонианской физике возможно распространение сигналов с бесконечной скоростью.

Постулат о постоянстве скорости света

Но эти выводы находятся в коренном противоречии с опытом. Опыт указывает, что свет распространяется в пустоте с одной и той же скоростью относительно любых движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью наблюдателей и изотропно относительно любого наблюдателя, т. е. с одинаковой скоростью во всех направлениях. Знаменитый опыт Майкельсона и множество других опытов показывают, что скорость света не зависит от выбора инерциальной системы координат.

Более глубокое исследование физических процессов показывает также, что невозможно движение материальных объектов и распространение энергии со скоростью, большей скорости света, которую можно рассматривать как предельно возможную скорость всякого относительного движения материальных объектов.

Поэтому в основу современной физики положен постулат — закон о постоянстве скорости света во всех инерциальных системах координат. При сохранении основного физического принципа относительности Галилея постулат о постоянстве скорости света служит основой для изменения понятия об инерциальных системах и для отыскания вместо преобразований Галилея (2.21) новых преобразований, определяющих переход от одной инерциальной системы к другой.

В этом случае преобразования Галилея (2.21) становятся неприемлемыми; приходится усложнить эти преобразования и отказаться от существования абсолютного времени.

Об инерциальных системах координат в специальной теории относительности

Обратимся теперь к условиям, налагаемым постоянством скорости света на преобразования координат при переходе от одной инерциальной системы к другой.

Совокупность инерциальных систем может быть получена с помощью системы преобразований из одной-единственной системы, которая выделяется по условию, основанному на опытных данных.

Для отыскания соответствующих формул преобразования воспользуемся, кроме основного условия о постоянстве скорости света во всех инерциальных системах, еще естественными условиями о равноправности любых двух инерциальных систем, об обратимой симметричности — изотропности и однородности. Понятие об однородности, связанное с геометрической и кинематической равноправностью всех точек пространства, дальше будет разъяснено в более конкретной математической формулировке.

Преобразование координат при переходе от одной инерциальной системы к другой

В качестве исходной инерциальной системы K, выбор которой связан с опытными данными, возьмем систему координат x^1, x^2, x^3, $x^4 = t$, в которой пространственные координаты x^1, x^2, x^3 рассматриваются как декартовы координаты евклидова трехмерного пространства, а переменная t — как время.

Пусть y^1, y^2, y^3, $y^4 = t'$ — другая инерциальная система координат K', в которой y^1, y^2, y^3 тоже декартовы координаты, а t' — свое время.

Мы рассматриваем задачу об установлении свойств и об изучении условий для определения формул преобразования

$$y^i = f^i(x^1, x^2, x^3, x^4), \qquad i = 1, 2, 3, 4, \tag{3.2}$$

которые должны заменить собой формулы преобразования Галилея — Ньютона (2.21).

Пусть dx^1, dx^2, dx^3 — компоненты перемещения некоторой подвижной точки M за время $dx^4 = dt$ в системе K и соответственно для этой же точки dy^1, dy^2, dy^3 — перемещения и $dy^4 = dt'$ — промежуток времени в системе K'.

Для соответствующих трехмерных скоростей v и v' точки M в системах K и K' имеем

$$v^2 = \frac{dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}}{dt^2} \quad \text{и} \quad v'^2 = \frac{dy^{1^2} + dy^{2^2} + dy^{3^2}}{dt'^2}.$$

В этих формулах переменные y^α и x^β ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) соответствуют друг другу согласно формулам (3.2).

Введем величины

$$ds_x^2 = (c^2 - v^2)\,dt^2 = -dx^{12} - dx^{22} - dx^{32} + c^2\,dt^2,$$

$$ds_y^2 = (c^2 - v'^2)\,dt'^2 = -dy^{12} - dy^{22} - dy^{32} + c^2\,dt'^2.$$

Рассмотрим движение фотона, который, как известно, движется в пустоте со скоростью света как в системе K, так и в системе K'.

Если одновременно $v = v' = c$, то

$$ds_y^2 = ds_x^2 = 0.$$

Если принять $ds_x^2 = 0$, то равенство

$$ds_y^2 = \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^p}\,dx^p\right)^2 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial x^p}\,dx^p\right)^2 + \left(\frac{\partial f^3}{\partial x^p}\,dx^p\right)^2 - c^2\left(\frac{\partial f^4}{\partial x^p}\,dx^p\right)^2 = 0$$

должно выполняться как следствие специального вида преобразования (3.2), поэтому в общем случае при $v \neq c$ должно выполняться равенство

$$ds_y^2 = \varkappa(x^1, x^2, x^3, x^4)\,ds_x^2,$$

где $\varkappa$ может быть произвольной функцией своих аргументов.

Из симметрии переходов $K \to K'$ и $K' \to K$ следует, что

$$ds_x^2 = \varkappa(y^1, y^2, y^3, y^4)\,ds_y^2 = \varkappa(y^i)\,\varkappa(x^i)\,ds_x^2,$$

отсюда

$$\varkappa(y^i)\,\varkappa(x^i) = 1. \tag{3.3}$$

Из свойств однородности пространства вытекает условие независимости $\varkappa$ от точек пространства, т. е. от координат. Из постоянства $\varkappa$ и равенства (3.3) вытекает, что $\varkappa = 1$.

Следовательно, при преобразованиях перехода от одной инерциальной системы K к другой инерциальной системе K' величина

$$ds^2 = -dx^{12} - dx^{22} - dx^{32} + c^2\,dt^2 \tag{3.4}$$

должна быть инвариантной.

Формулу (3.4) можно рассматривать как определение метрики четырехмерного пространства.

Таким образом, физическое пространство можно рассматривать как пространство Минковского, а преобразования перехода от одной инерциальной системы координат к другой — как преобразования Лоренца.

Теперь выясняется, что пространство Минковского и преобразования Лоренца, введенные раньше как вспомогательные математические образы при изучении преобразований уравнений Максвелла, получают фундаментальный физический смысл.

Очевидно, что очень важное значение в развитой теории имеет инвариантность векторных уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца. Принятые выше допущения и полученные выводы составляют основу современной физики.

Принятие такой системы постулатов в глобальных системах для конечных тел — это специальная теория относительности. Использование этих постулатов только в локальных, малых элементах материальных сред или поля положено в основу построения общей теории относительности.

Свойства преобразований Лоренца

Изучим более подробно свойства преобразований Лоренца.

Прежде всего покажем, что функции $f^i(x^k)$ в формулах (3.2), определяющих преобразования Лоренца, линейны.

Докажем более общее предложение. Пусть задано преобразование

$$y^i = f^i(x^1, x^2, x^3, x^4), \qquad \frac{\partial f^i}{\partial x^k} = f^i_k \text{ и } |f^i_k| \neq 0,$$

и пусть

$$ds^2 = g'_{ij}\,dy^i\,dy^j = g_{pq}\,dx^p\,dx^q,$$
$$g'_{ij} f^i_{\ p} f^j_{\ q} = g_{pq}, \tag{3.5}$$

причем $g'_{ij} = \text{const}$, $g_{pq} = \text{const}$ и $|g'_{ij}| \neq 0$. Покажем, что в этом случае функции $f^i(x^1, x^2, x^3, x^4)$ — линейные функции своих аргументов.

Дифференцируя равенство (3.5) по x^s, получим

$$g'_{ij} f^i_{\ ps} f^j_{\ q} + g'_{ij} f^i_{\ p} f^j_{\ qs} = 0; \tag{3.6}$$

здесь p, s, q — произвольные индексы, принимающие значения 1, 2, 3, 4. Очевидно, что в силу свойств симметрии $g'_{ij} = g'_{ji}$ и $f^k_{sp} = f^k_{ps}$. После перестановки в (3.6) индексов $p \to q \to s \to p$ можно написать

$$g'_{ij} f^i_{\ qp} f^j_{\ s} + g'_{ij} f^j_{\ q} f^i_{\ ps} = 0. \tag{3.7}$$

Вычитая из равенства (3.6) равенство (3.7), получим

$$g'_{ij} f^i_{\ p} f^j_{\ qs} - g'_{ij} f^l_{\ qp} f^j_{\ s} = 0. \tag{3.8}$$

Теперь переставим в (3.8) индексы $p \to s \to q \to p$ и вычтем результат из (3.7), получим

$$g'_{ij} f^j_q f^i_{ps} = 0 \text{ или } A_{iq} f^i_{ps} = 0, \tag{3.9}$$

где p, q, s — любые индексы из 1, 2, 3, 4. Детерминант $|A_{iq}|$ отличен от нуля, так как верно матричное равенство

$$\| A_{iq} \| = \| g'_{ij} \| \| f^j_q \| \text{ и } | g'_{ij} | \neq 0, \quad | f^j_q | \neq 0.$$

Так как $|A_{iq}| \neq 0$, то из системы однородных уравнений (3.9) следует

$$f^i_{ps} = \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^p \partial x^s} = 0. \tag{3.10}$$

Уравнения (3.10) верны при i, p и s произвольных; отсюда следует, что общее решение системы уравнений (3.10) имеет вид

$$y^i = f^i(x^k) = f^i_0 + c^i{}_k x^k, \tag{3.11}$$

где f^i_0 и $c^i{}_k$ — постоянные числа.

Очевидно, что доказанное предложение верно для любых n-мерных пространств.

Преобразование (3.11) соответствует однородной деформации четырехмерного псевдоевклидова пространства, это преобразование более общее, чем преобразования Лоренца.

Для выделения среди преобразований (3.11) преобразований Лоренца необходимо заменить (3.5) более сильными условиями, вытекающими из (2.20):

$$\left.\begin{aligned} &g'_{11} = g_{11} = -1, \quad g'_{22} = g_{22} = -1, \\ &g'_{33} = g_{33} = -1, \quad g'_{44} = g_{44} = c^2 \\ &\text{и} \\ &g'_{ij} = g_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j. \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

Условия (3.12) накладывают следующие десять алгебраических связей на 16 коэффициентов $c^i{}_k$:

$$g_i c^i{}_p c^j{}_q = g_{pq} \text{ или } c_{ip} c^{iq} = \delta^q_p. \tag{3.13}$$

Таким образом, общее преобразование Лоренца зависит от четырех постоянных f^i_0, определяющих простую трансляцию, и от шести независимых параметров, через которые согласно (3.13) можно выразить шестнадцать величин $c^i{}_k$.

Преобразования Галилея и Лоренца содержат одинаковое число независимых параметров, равное десяти

Преобразования Галилея образуют группу, зависящую от десяти параметров; четыре из них определяют трансляцию, три — вращение и зеркальное отражение трехмерного пространства и три — компоненты скорости поступательного движения системы координат.

Преобразования Лоренца также образуют группу, зависящую от десяти параметров: от четырех параметров, определяющих трансляцию, и от шести параметров, определяющих зеркальное отражение и вращение четырехмерного пространства Минковского, задаваемого независимыми параметрами, через которые выражаются коэффициенты c^i_k.

Преобразования, удовлетворяющие условиям (3.13) при произвольной метрике и в пространствах любой размерности, называются ортогональными преобразованиями. Ортогональные преобразования образуют группу. Ортогональные преобразования с детерминантом преобразования $\Delta = |c^i_k| > 0$ образуют подгруппу, называемую собственной группой вращения.

Бесконечно малые преобразования Лоренца

Для тождественного преобразования в группе ортогональных преобразований имеем

$$c^i_k = \delta^i_k.$$

Вместо c^i_k введем величины Ω^i_k, определенные формулами

$$c^i_k = \delta^i_k + \Omega^i_k.$$

Для тождественного преобразования $\Omega^i_k = 0$. Если Ω^i_k бесконечно малы, то коэффициенты c^i_k определяют преобразование, принадлежащее собственной группе вращений, так как $\Delta \approx 1$. Величины c^i_k и Ω^i_k можно рассматривать как компоненты тензоров в базисе системы K или в базисе системы K' или как векторы по индексу i в K и векторы по индексу k в K'.

Условия ортогональности для бесконечно малых вращений после отбрасывания малых второго порядка имеют вид

$$g_{iq}\Omega^i_p + g_{pj}\Omega^j_q = 0 \qquad (3.14)$$

или

$$\Omega_{qp} = -\Omega_{pq}.$$

Антисимметричную матрицу Ω_{pq} можно рассматривать как компоненты соответствующего четырехмерного антисимметричного тензора в пространстве Минковского. Шесть независимых компонент этого тензора можно рассматривать как

независимые параметры, определяющие бесконечно малое вращение в четырехмерном пространстве Минковского. Четырехмерному антисимметричному тензору Ω_{pq} в инерциальных декартовых системах можно поставить в соответствие два трехмерных вектора Ω и U согласно равенству

$$\|\Omega_{pq}\| = \begin{Vmatrix} 0 & -\Omega^3 & \Omega^2 & -U_1 \\ \Omega^3 & 0 & -\Omega^1 & -U_2 \\ -\Omega^2 & \Omega^1 & 0 & -U_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \Omega^i{}_q = g^{ip}\Omega_{pq}. \tag{3.15}$$

Легко видеть, что аксиальный вектор Ω (Ω^1, Ω^2, Ω^3) характеризует бесконечно малый трехмерный пространственный поворот, а полярный вектор U (U_1, U_2, U_3) — бесконечно малую поступательную скорость движения инерциальной системы K' относительно системы K.

Преобразование Лоренца при поступательном движении системы K' относительно системы K

Рассмотрим важное конечное частное преобразование Лоренца (3.11), имеющее вид

$$\begin{aligned} y^1 &= c^1{}_1 x^1 + c^1{}_4 t, \\ y^2 &= x^2, \\ y^3 &= x^3, \\ t' &= c^4{}_1 x^1 + c^4{}_4 t. \end{aligned}$$

Это преобразование соответствует поступательному движению вдоль оси x^1 системы K' относительно системы K с постоянной скоростью $U = -c^1{}_4/c^1{}_1$. В этом случае условия (3.13) легко разрешаются, после чего при условии $\Delta > 0$, связанном с отсутствием добавочного зеркального отражения, получим

$$\left.\begin{aligned} y^1 &= \frac{x^1 - Ut}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}, \qquad t' = \frac{t - \frac{U}{c^2}x^1}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}} \\ \text{и обратные формулы} \\ x^1 &= \frac{y^1 + Ut'}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}, \qquad t = \frac{t' + \frac{U}{c^2}y^1}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Преобразования Лоренца (3.16) переходят в преобразования Галилея, когда U/c мало, после пренебрежения величинами порядка $(U/c)^2$.

Относительность понятия времени

Согласно общим формулам (3.11) и, в частности, формулам (3.16) при переходе от K к K' время t' в «подвижной системе» отличается от времени в первоначальной, «неподвижной» системе. Кроме того, геометрические координаты и время становятся до некоторой степени равноправными. Однако о полном стирании различия между геометрическими расстояниями и промежутком времени не может быть речи. Это различие проявляется, в частности, в том, что в определение метрики для ds^2 элементы $dx^{\alpha 2}$ и dt^2 входят с различными знаками. Из теории квадратичных форм известно, что при любых вещественных преобразованиях переменных, сохраняющих канонический вид квадратичной формы для ds^2, указанные знаки являются инвариантами.

Различие интервалов времени

Рассмотрим связь, вытекающую из (3.16), между соответствующими интервалами времени dt' и dt в точке M, неподвижной в системе K' ($y^1 = \text{const}$) и, следовательно, движущейся со скоростью U в системе K. Имеем

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}, \text{ т. е. } dt > dt'. \tag{3.17}$$

Аналогично пусть точка N связана неподвижно с системой K ($x^1 = \text{const}$); тогда получим

$$\widetilde{dt}' = \frac{\widetilde{dt}}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}, \text{ т. е. } \widetilde{dt}' > \widetilde{dt}. \tag{3.18}$$

Таким образом, с точки зрения наблюдателя в K собственное время у наблюдателя K' течет медленнее. С другой стороны, для наблюдателя в K' собственное время в K тоже течет медленнее. В этом сказывается полное равноправие инерциальных систем K и K'.

Подобного рода соотношения также будут иметь место для длин соответствующих отрезков, расположенных вдоль направления скорости U. Длины отрезков, перпендикулярных к направлению скорости U, одинаковы в K и K'.

Собственная система отсчета

В приложениях особое значение имеет собственная система отсчета; это инерциальная система отсчета K^*, которая выбрана в данной точке M среды так, чтобы скорость точки M относительно системы K^* в данный момент времени равнялась нулю; скорости соседних точек и точки M в другие моменты времени в этой системе могут отличаться от нуля.

С использованием собственной системы отсчета и собственного времени мы имеем дело в наших ощущениях. Собственное время — это инвариантная характеристика старения и всевозможных внутренних процессов и внутренних взаимодействий.

При движениях элементарных частиц, атомов и молекул законы для всех внутренних взаимодействий и все характерные времена одинаковы только в собственных системах отсчета, например: периоды излучаемых световых или радиоволн, время полураспада радиоактивных ядер, времена существования неустойчивых «элементарных» частиц и т. п.

Собственное время

При изучении движения континуума можно рассматривать в каждой точке и в каждый момент времени свою собственную систему координат и в этой системе пользоваться значениями компонент различных тензоров, векторов и своим собственным интервалом времени $d\tau$, определяемым равенством

$$d\tau = \frac{1}{c}\,ds = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (v^2 < c^2,\ ds > 0), \quad (3.19)$$

где dt — соответствующий интервал времени в фиксированной системе отсчета наблюдателя.

Собственные и сопутствующая системы координат

Очевидно, что собственные системы координат вообще не совпадают с сопутствующей системой координат, в которой скорости всех частиц всегда равны нулю; собственная система инерциальна, а сопутствующая система, конечно, вообще не является инерциальной.

Парадокс часов

При рассмотрении различных движений одной и той же точки или при рассмотрении различных движений разных точек можно вычислять конечные промежутки собственного времени с помощью интегралов вида

$$\Delta\tau = \tau - \tau_0 = \frac{1}{c}\int ds = \int\limits_{t_0}^{t}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt. \qquad (3.20)$$

Собственный интервал времени $\Delta\tau$ является инвариантом, и поэтому выражение (3.20) дает одинаковый результат в вычислениях при использовании любой системы координат наблюдателя как инерциальной, так и не инерциальной.

В заданной инерциальной системе координат наблюдателя интеграл (3.20) зависит от кривой $x^i = x^i(t)$ в пространстве Минковского. В частности, в случае прямолинейного движения интервал $\Delta\tau$ является функционалом пути интегрирования в

плоскости x^1, t (рис. 39). Значения $\Delta\tau$, вычисленные по различным путям C_1 и C_2, идущим из точки O в точку O^*, различны.

Для покоящегося тела на Земле, принимаемой за инерциальную систему координат, путь интегрирования совпадает с осью времени t; для космонавта, улетающего на ракете вдоль

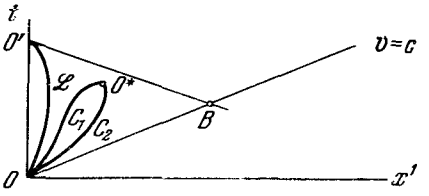


Рис. 39. Интервал собственного времени зависит от закона движения.

оси x и затем возвращающегося обратно на Землю, закон движения изображается кривой вида $\mathscr{Q}$.

Подынтегральное количество в последнем интеграле (3.20) при $v \neq 0$ меньше, чем при $v = 0$; поэтому при возвращении космонавта в точку O' промежутки собственного времени для земного наблюдателя $\Delta\tau_{\text{зем}} = OO'$ и для космонавта

$$\Delta\tau_{\text{косм}} = \int_{t(O)}^{t(O')} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt$$

будут различными, причем

$$\Delta\tau_{\text{косм}} < \Delta\tau_{\text{зем}}. \tag{3.21}$$

Для космонавта и земного жителя — близнецов после возвращения космонавта на Землю космонавт окажется более молодым, чем его земной брат.

Пусть отрезки OB и BO' соответствуют закону движения фотона $x^1 = ct$ и $x^1 = -ct + x_B$, движущегося со скоростью света. Очевидно, что для фотона всегда $\Delta\tau = 0$, т. е. собственное время фотона не течет.

Преобразование E и H при переходе от K к K'

Теперь легко выяснить, как изменяются векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ при переходе от одной инерциальной системы координат K к другой «подвижной» инерциальной системе координат K' и, в частности, при переходе к собственной системе координат $K' = K^*$.

На основании формул (2.11), (3.16) и (2.1) нетрудно установить следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}'_{\parallel} &= \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right)_{\parallel}, \\ \boldsymbol{E}'_{\perp} &= \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right)_{\perp} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H}'_{\parallel} &= \left(\boldsymbol{H} - \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E}\right)_{\parallel}, \\ \boldsymbol{H}'_{\perp} &= \left(\boldsymbol{H} - \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E}\right)_{\perp} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

Здесь индексом $\parallel$ обозначены составляющие векторов, параллельные скорости $\boldsymbol{v}$ подвижной системы K', а индексом $\perp$ — составляющие, перпендикулярные к $\boldsymbol{v}$. Легко видеть, что члены $(\boldsymbol{v}/c) \times \boldsymbol{H}$ и $(\boldsymbol{v}/c) \times \boldsymbol{E}$ не дают вклада в выражения для $\boldsymbol{E}'_{\parallel}$ и $\boldsymbol{H}'_{\parallel}$, так что $\boldsymbol{E}'_{\parallel} = \boldsymbol{E}_{\parallel}$ и $\boldsymbol{H}'_{\parallel} = \boldsymbol{H}_{\parallel}$. Однако в формулах (3.22) и (3.23) эти члены сохранены для симметрии формул, что очень удобно для записи приближенных формул при малых v^2/c^2.

Формулы (3.22) и (3.23) показывают, что основные обычно используемые характеристики электромагнитного поля — векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ зависят существенно от выбора инерциальной системы координат, и поэтому их физический смысл носит весьма ограниченный характер.

В ньютонианской механике при использовании ускоренно движущихся систем координат приходится вводить силы инерции. Таким образом, поле внешних сил в нерелятивистской механике зависит от выбора подвижной системы координат. Существенно, однако, что поле сил одинаково в инерциальных системах и изменяется только при переходе к системе координат, движущейся относительно первоначальной системы с ускорением. Электромагнитное поле изменяется даже при переходе от одной инерциальной системы координат к другой.

Отметим, кроме того, что если в некоторой системе координат K было только электрическое поле, то при переходе к системе, движущейся относительно K, обязательно появляется также и магнитное поле, и наоборот.

Например, рассмотрим электрон в его собственной системе координат K^*. В этой системе координат магнитное поле отсутствует, $\boldsymbol{H}^* = 0$, а электрическое поле $\boldsymbol{E}^*$ будет кулоновским полем. В системе координат, движущейся равномерно и прямолинейно со скоростью $\boldsymbol{v}$ относительно системы координат, в которой электрон покоится, векторы $\boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{H}'$ определя-

ются как решения уравнений Максвелла с помощью формул (3.22) и (3.23), в которых надо положить $\boldsymbol{H} = 0$, а вектор $\boldsymbol{E}$ выразить через r по формуле

$$\boldsymbol{E} = -\frac{e}{r^2}\operatorname{grad} r.$$

Более полное исследование полученного поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ можно провести на основании формул (3.22) и (3.23).

Об инвариантных характеристиках электромагнитного поля

Каждый в отдельности из векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ зависит от выбора инерциальной системы координат. Тензор электромагнитного поля $F = F_{ij}\,\vartheta^i\vartheta^j$, определенный через $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ матрицей (2.1), является инвариантной физической характеристикой электромагнитного поля, подобной температуре, вектору силы, тензору деформаций и т. п.

Тензор F имеет шесть независимых компонент и только два независимых инварианта:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}F_{ij}F^{ij} &= H^2 - E^2, \\ \frac{1}{4}\left[F^{ik}F^{lm}F_{il}F_{km} - \frac{1}{2}(F^{ik}F_{ik})^2\right] &= (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H})^2. \end{aligned}\right\} \quad (3.24)$$

Преобразованием Лоренца можно полностью уничтожить магнитное или электрическое поле только при наличии равенства $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H} = 0$, т. е. когда векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ взаимно перпендикулярны.

Если $H^2 = E^2$ в какой-либо одной системе координат, то это равенство выполняется в любой другой инерциальной системе координат. Если $H^2 - E^2 = 0$ и $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H} = 0$, то векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ равны между собой и взаимно перпендикулярны во всех системах координат.

О векторах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в практически обычно употребляемых в технике системах отсчета

На практике обычно приходится встречаться с различными инерциальными системами координат, для которых относительная скорость мала по сравнению со скоростью света. Поэтому зачастую разница между векторами $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, соответственно, мала. Из формул (3.22) и (3.23) видно, что векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ можно рассматривать как инвариантные физические характеристики, если пренебрегать величинами порядка v/c.

Приближенные формулы преобразования $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ (с учетом малых порядка v/c)

В дальнейшем будет рассматриваться нерелятивистская механика сплошной среды с учетом электромагнитных эффектов. Поэтому будут использоваться только такие системы координат, для которых относительная скорость v мала по сравнению со скоростью света c ($v^2/c^2 \ll 1$). При этом,

если пренебрегать малыми второго порядка по v/c, но учитывать малые первого порядка, то переход от системы координат K к системе координат K', движущейся с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$ относительно K, будет определяться преобразованиями Галилея

$$y^\alpha = x^\alpha - v^\alpha t,$$
$$t' = t,$$

а формулы преобразования $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ упрощаются и имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}' &= \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}), \\ \boldsymbol{H}' &= \boldsymbol{H} - \frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}) \end{aligned}\right\} \qquad (3.25)$$

(величины со штрихом относятся к системе K', без штриха — к системе K).

В частных задачах, например когда вектор $\boldsymbol{E}$ мал, в формулы (3.25) можно вводить дополнительные упрощения.

§ 4. Взаимодействие электромагнитного поля с проводниками

Проводники — это тела, в которых под влиянием электрического поля возникает электрический ток. В этом параграфе мы не будем учитывать явлений, связанных с поляризацией и намагничиванием.

Примером проводников могут служить металлические тела: медь, железо и т. п.; важным примером проводящей среды является плазма — ионизованный газ.

Трехмерный и четырехмерный векторы плотности тока. Ток проводимости

Электрический ток, возникающий в проводниках, представляет собой движение заряженных частиц (электронов и ионов). Если микроскопические скорости электронов и ионов в некотором малом объеме среды обозначить через $\boldsymbol{v}_k$, а заряды через e_k, то плотность тока $\boldsymbol{j}$ можно ввести как $\sum_i e_i\boldsymbol{v}_i$, осредненную по малому объему ΔV:

$$\boldsymbol{j} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\sum_i e_i\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{j}^* + \rho_e\boldsymbol{v}. \qquad (4.1)$$

Здесь $\boldsymbol{v}$ — макроскопическая скорость среды. Вектор $\boldsymbol{j}^*$ представляет собой обычный «технический ток». Такой ток возникает как в неподвижных, так и в движущихся проводниках под действием электромагнитного поля и называется током

проводимости. Вектор $\rho_e \boldsymbol{v}$ представляет собой ток, связанный с переносом макроскопического заряда.

Так как

$$\sum_i e_i \boldsymbol{v}_i = \sum_i e_i (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}) + \Delta e \boldsymbol{v}, \quad (\Delta e = \Sigma e_i),$$

то вектор тока проводимости $\boldsymbol{j}^*$ можно выразить через векторы потока диффузии $\boldsymbol{I}_i$, введенные в гл. III, по формуле

$$\boldsymbol{j}^* = \sum_i \frac{e_i}{m_i} \boldsymbol{I}_i;$$

отношения e_i/m_i зависят только от сорта ионов, переносящих заряды.

Наряду с трехмерным вектором $\boldsymbol{j}$, определенным в геометрическом пространстве, вводится еще четырехмерный вектор плотности тока в пространстве Минковского, который в собственной декартовой системе координат определен формулами

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{J} &= J^i \boldsymbol{e}_i, \\ J^1 = j^1, \quad J^2 = j^2, \quad J^3 &= j^3, \quad J^4 = \rho_e. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Компоненты вектора $\boldsymbol{J}$ в любой другой системе координат определяются через компоненты в собственной системе по общим формулам преобразования четырехмерного вектора в пространстве Минковского.

Уравнения Максвелла в проводниках

Уравнения Максвелла при наличии токов и зарядов и при отсутствии поляризации и намагничивания в телах имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{E} &= 4\pi\rho_e. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

В частности, в случае стационарного электромагнитного поля

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \tag{4.5}$$

поэтому $\boldsymbol{E}$ — потенциальный вектор, а

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}, \tag{4.6}$$

т. е. электрический ток приводит всегда к появлению вихревого поля магнитной напряженности $\boldsymbol{H}$.

Ток смещения

Величина $\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ также вызывает появление магнитного поля и называется током смещения. На практике во многих случаях ток смещения $\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ очень мал. Введение тока смещения в уравнения Максвелла произведено Максвеллом в согласии с опытом и в дополнение к существовавшим до этого опытным законам электродинамики Кулона, Ампера и Фарадея.

Закон сохранения полного заряда

Если от обеих частей второго уравнения (4.3) взять дивергенцию и воспользоваться еще уравнениями (4.4), то получится важное следствие уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0, \tag{4.6'}$$

которое можно рассматривать как уравнение неразрывности для зарядов или условие сохранения заряда.

Действительно, проинтегрировав уравнение (4.6') по некоторому неподвижному геометрическому объему, занятому сплошной средой, которая является проводником, мы получим

$$\int\limits_V \frac{\partial \rho_e}{\partial t}\, d\tau = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho_e\, d\tau = -\int\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{j}\, d\tau = -\int\limits_\Sigma j_n\, d\sigma, \tag{4.7}$$

где Σ — поверхность, ограничивающая V, а $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к Σ. Вектор тока $\boldsymbol{j}$ переносит заряды через поверхность Σ, величина $-\int\limits_\Sigma j_n\, d\sigma$ представляет собой суммарный заряд, втекающий в объем V через поверхность Σ за единицу времени. Это количество равно изменению заряда в объеме V в единицу времени, т. е. величине

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho_e\, d\tau = \frac{\partial e}{\partial t},$$

где e — полный заряд внутри V. Если $j_n = 0$ на поверхности Σ, то $\partial e/\partial t = 0$ и заряд внутри V сохраняется.

Условие сохранения полного заряда является точным следствием уравнений Максвелла (4.3) и (4.4). Отметим, что закон сохранения заряда, в противоположность закону сохранения массы, является в настоящее время всегда выполняющимся фундаментальным законом физики.

Система уравнений Максвелла в проводниках — незамкнутая система

Система уравнений Максвелла (4.3) и (4.4) является незамкнутой. Число уравнений в ней равно семи, так как уравнение $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$ является непосредственным следствием первого уравнения (4.3) при соответствующих на-

чальных данных. Число же входящих в них неизвестных равно десяти: $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{j}$, ρ_e.

О связи задач электродинамики и механики сплошной среды

Кроме того, так как в подвижных проводниках $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}^*+\rho_e\boldsymbol{v}$, распределение плотности зарядов зависит от движения среды, поэтому задачи электродинамики оказываются связанными с задачами механики сплошной среды.

Закон Ома для неподвижных проводников

Замыкающим систему уравнений (4.3), (4.4) для неподвижной проводящей среды векторным соотношением может служить закон Ома. Закон Ома устанавливает связь между плотностью тока проводимости $\boldsymbol{j}^*$ и характеристиками электромагнитного поля. Эта связь зависит от свойств проводника. Во многих важных случаях для неподвижных проводников опытный закон Ома имеет вид

$$\boldsymbol{j}^* = \sigma \boldsymbol{E}. \tag{4.8}$$

Проводимость

Коэффициент σ называется коэффициентом проводимости. Для изотропных проводников проводимость σ — скаляр, причем

$$\sigma = \frac{1}{R},$$

где R — сопротивление проводника. Для анизотропных проводников, например для кристаллов, проводимость σ представляет собой тензор второго ранга, в уравнении (4.8) тензор σ свертывается с вектором $\boldsymbol{E}$.

Проводимость σ различна для различных проводников, а для данного проводника может зависеть от его температуры T и других термодинамических параметров. С ростом температуры проводимость газа растет. Например, воздух при обычных условиях почти не ионизован и является плохим проводником, но с ростом температуры или при интенсивном облучении степень ионизации воздуха растет, число свободных электронов в воздухе увеличивается, и воздух становится хорошим проводником; для твердых тел с ростом температуры σ может уменьшаться. Проводимость во многих случаях рассматривается как физическая константа материала, аналогичная коэффициентам вязкости μ и ζ или коэффициенту теплопроводности $\varkappa$.

Закон Ома в собственной системе координат

Для подвижных проводников постулируется, что закон Ома в виде (4.8) выполняется в каждой точке среды в собственной системе координат (см. определение в § 3).

В собственной системе координат закон Ома имеет вид

$$\tilde{\boldsymbol{j}}^* = \sigma \tilde{\boldsymbol{E}}, \tag{4.9}$$

где знак $\sim$ указывает на то, что соответствующие величины

рассматриваются в собственной системе координат. После перехода от собственной системы к основной инерциальной системе отсчета, относительно которой рассматривается движение среды, согласно формулам (3.25) преобразования вектора напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ получим закон Ома для подвижных проводников в виде

$$\boldsymbol{j}^* = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right). \tag{4.10}$$

Опыт и более подробный теоретический анализ показывают, что законом Ома в форме (4.10) можно пользоваться не всегда. Например, в случае сильного магнитного поля закон Ома следует брать в виде соотношения

$$\boldsymbol{j}^* = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right) + k(\boldsymbol{j}^* \times \boldsymbol{H}),$$

где k — некоторая постоянная или функция термодинамических параметров среды. Добавочный член $\kappa(\boldsymbol{j}^* \times \boldsymbol{H})$ носит название тока Холла.

Среды с бесконечной проводимостью

Существуют среды, проводимость которых очень велика (например, медь или сильно ионизованная плазма). В связи с этим на практике часто рассматривают среды с бесконечной проводимостью, для которых проводимость σ бесконечна, а сопротивление R равно нулю. Введение таких сред в некотором смысле аналогично введению идеальной жидкости вместо вязкой.

Из закона Ома в форме (4.8) и (4.10), так как плотность тока $\boldsymbol{j}^*$ должна быть по условию конечной, вытекает, что внутри покоящейся среды с бесконечной проводимостью должно выполняться условие

$$\boldsymbol{E} = 0, \tag{4.11}$$

а в среде с бесконечной проводимостью, движущейся со скоростью $\boldsymbol{v}$, должно быть

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}. \tag{4.12}$$

Таким образом, поле вектора электрической напряженности $\boldsymbol{E}$ в среде с бесконечной проводимостью определяется через поле магнитной напряженности $\boldsymbol{H}$ и поле макроскопической скорости среды $\boldsymbol{v}$. В этом случае два уравнения Максвелла (4.3) могут служить для определения поля $\boldsymbol{H}$ и плотности тока $\boldsymbol{j}$.

Сила Лоренца

Пондеромоторными силами называются силы, действующие на среду со стороны электромагнитного поля.

Если среда покоится, то на бесконечно малый элемент среды $d\tau$, имеющий заряд de, согласно закону Кулона действует

пондеромоторная сила

$$\boldsymbol{F}\,d\tau = \frac{de}{d\tau}\boldsymbol{E}\,d\tau = \rho_e \boldsymbol{E}\,d\tau.$$

Если кроме заряда de в элементе $d\tau$ есть еще токи $\boldsymbol{j}$, то на единицу объема среды будет действовать пондеромоторная сила

$$\boldsymbol{F} = \rho_e \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}), \tag{4.13}$$

называемая силой Лоренца.

Если имеется движущаяся среда, то можно принять, что в собственной системе координат для пондеромоторной силы верна аналогичная формула:

$$\widetilde{\boldsymbol{F}} = \rho_e \widetilde{\boldsymbol{E}} + \frac{1}{c}(\widetilde{\boldsymbol{j}}\times\widetilde{\boldsymbol{H}}), \tag{4.14}$$

где все векторы определены в собственной системе координат.

Если воспользоваться приближенными формулами перехода от собственной системы координат K', движущейся со скоростью $\boldsymbol{v}$ относительно инерциальной системы координат K (см. (3.25)), то после отбрасывания малых порядка $\frac{v^2}{c^2}$ в инерциальной системе K получим

$$\boldsymbol{F} = \rho_e\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}\right) + \frac{1}{c}(\boldsymbol{j}^*\times\boldsymbol{H}); \tag{4.15}$$

здесь принято, что $\widetilde{\boldsymbol{j}^*} = \boldsymbol{j}^*$. Отсюда, сравнивая (4.15) с (4.13), получим

$$\widetilde{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F},$$

т. е. сила Лоренца в нерелятивистском приближении в системе отсчета K представляется формулой (4.13), так же как и в случае неподвижной среды. Равенство (4.13), определяющее пондеромоторную силу, действующую на единицу объема проводящей среды, установлено на основании опытных фактов и рассматривается как один из основных постулатов электродинамики или как одна из основ для определения электромагнитных характеристик поля и тока.

Уравнения импульсов с учетом пондеромоторных сил

Пондеромоторные силы, действующие со стороны электромагнитного поля на частицы проводящей среды, являются объемными силами, и их, так же как и, например, силу тяжести, нужно вводить в уравнения импульсов для материальной среды

$$\rho a = \nabla_i p^i + \boldsymbol{F}_{\text{Лоренца}} + \rho \boldsymbol{F}_{\text{тяжести}}. \tag{4.16}$$

Задача определения движения проводящей сплошной среды является в общем случае комплексной задачей, для ее решения необходимо решать уравнения механики сплошной среды совместно с уравнениями электродинамики. Подчеркнем, что выражение для пондеромоторной силы (4.13) учитывает только наличие в среде зарядов и токов и должно быть усложнено, когда среда поляризуется и намагничивается.

Энергетические взаимодействия в поле и поля с проводящей средой

Рассмотрим теперь энергетическое взаимодействие между электромагнитным полем и проводящей средой. Известно, например, что неподвижный проводник, по которому идет электрический ток, нагревается, это нагревание связано с обменом энергией между электрическим полем и проводником.

Получим теперь из уравнений Максвелла уравнение, определяющее изменение энергии электромагнитного поля,— уравнение Умова — Пойнтинга. Вычитая из первого уравнения Максвелла (4.3), умноженного скалярно на $\boldsymbol{H}$, второе уравнение Максвелла (4.3), умноженное скалярно на $\boldsymbol{E}$, получим

$$\boldsymbol{H}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=$$
$$=-\frac{1}{c}\left(\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)-\frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}). \quad (4.17)$$

В декартовой системе координат левую часть этого соотношения можно записать в виде разностей двух определителей:

$$\begin{vmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix}.$$

После перестановки строк в этих определителях можно написать

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ E_1 & E_2 & E_3 \\ \boxed{H_1} & \boxed{H_2} & \boxed{H_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \boxed{E_1} & \boxed{E_2} & \boxed{E_3} \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix},$$

где знаком $\boxed{}$ отмечены величины, которые при раскрытии определителей не следует дифференцировать.

Отсюда видно, что левая часть соотношения (4.17) может быть представлена в виде одного определителя:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ E_1 & E_2 & E_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix}.$$

Вектор Умова—Пойнтинга Если ввести в рассмотрение вектор

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}), \qquad (4.18)$$

называемый вектором Умова — Пойнтинга, то соотношение (4.17) можно записать в следующем виде:

Уравнение Умова — Пойнтинга

$$\operatorname{div} \boldsymbol{S} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{8\pi}(H^2 + E^2) + \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} = 0. \qquad (4.19)$$

Это уравнение носит название уравнения Умова — Пойнтинга. Проинтегрировав (4.19) по неподвижному конечному объему V, получим

$$\int_\Sigma S_n \, d\sigma + \frac{d}{dt}\frac{1}{8\pi}\int_V (H^2 + E^2)\, d\tau + \int_V (\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E})\, d\tau = 0, \qquad (4.20)$$

где Σ — поверхность, ограничивающая объем V, а $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к Σ.

Энергия электромагнитного поля Каждый из членов интегрального соотношения (4.20) имеет физический смысл. Трехмерный скаляр

$$\frac{1}{8\pi}(H^2 + E^2)$$

вводится по определению как объемная плотность $\mathscr{E}$ энергии электромагнитного поля; $\int_V (\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E})\, d\tau\, dt$ можно рассматривать как элементарную работу электрического поля $\boldsymbol{E}$ над перемещающимися при микроскопическом внутреннем движении за счет тока $\boldsymbol{j}^*$ и при макроскопическом движении за счет $\rho_e \boldsymbol{v}$ заряженными частицами.

Джоулево тепло В случае неподвижного проводника

$$\int_V (\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E})\, d\tau\, dt = \int_V (\boldsymbol{j}^* \cdot \boldsymbol{E})\, d\tau\, dt = dQ_{\text{дж}} \qquad (4.21)$$

представляет собой джоулево тепло. Для неподвижного проводника уравнение (4.20) можно написать в виде

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -\int_\Sigma S_n \, d\sigma - \frac{dQ_{\text{дж}}}{dt}. \qquad (4.22)$$

Полная энергия $\mathscr{E}$ электромагнитного поля в объеме V неподвижного проводника изменяется за счет потока вектора Умова — Пойнтинга через поверхность Σ, ограничивающую объем V, и за счет перехода к среде джоулева тепла.

Приток тепловой энергии от поля к покоящейся среде

Приток тепловой энергии $dq^{(e)}_{эл}$ от поля к единице массы покоящейся проводящей среды равен

$$dq^{(e)}_{эл} = \frac{dQ^{(e)}}{dm} = \frac{1}{\rho}(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E})\,dt. \quad (4.23)$$

Изменение энергии электромагнитного поля в пустоте

Подчеркнем, что энергия электромагнитного поля в объеме V меняется не только за счет взаимодействия поля со средой.

Уравнение Умова — Пойнтинга справедливо и при наличии уравнений Максвелла (1.11), (1.12) в пустоте. В этом случае соотношение (4.22) записывается в виде

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -\int\limits_{\Sigma} S_n\,d\sigma,$$

т. е. полная энергия электромагнитного поля в объеме V в этом случае меняется только за счет потока вектора Умова — Пойнтинга. Однако это изменение отлично от нуля только в случае нестационарного электромагнитного поля. В случае стационарного электромагнитного поля ($\partial\boldsymbol{H}/\partial t = \partial\boldsymbol{E}/\partial t = 0$) поток вектора Умова — Пойнтинга сквозь замкнутую поверхность в пустоте в силу уравнений Максвелла всегда равен нулю. В проводниках поток вектора Умова — Пойнтинга сквозь замкнутую поверхность Σ отличается от нуля и в случае стационарного электромагнитного поля. Через незамкнутую часть поверхности Σ поток вектора Умова — Пойнтинга, вообще, отличен от нуля, если векторное произведение $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \neq 0$. Вектор Умова — Пойнтинга характеризует обмен энергией между различными участками электромагнитного поля, т. е. поток энергии через разделяющие эти части поля поверхность Σ.

При наличии макроскопического движения среды все предыдущие толкования можно применять для бесконечно малых элементов среды, когда уравнение Умова — Пойнтинга написано в соответствующей инерциальной собственной системе координат.

В инерциальных системах координат, движущихся относительно инерциальной собственной системы координат, величина

$$\int\limits_{\Delta V}(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E})\,d\tau\,dt \neq \int\limits_{\Delta V}(\tilde{\boldsymbol{j}}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}})\,d\tau\,dt, \quad (4.23')$$

т. е. не равна джоулеву теплу. Разница равна работе пондеромоторной силы (4.13).

Уравнение притока тепла для проводящей среды

Уравнение притока тепла для подвижной частицы проводящей среды в собственной системе координат записывается в общем случае следующим образом:

$$dU = \frac{p^{\alpha\beta}\, d\varepsilon_{\alpha\beta}}{\rho} + dq^{(e)}_{\text{неэл}} + \frac{1}{\rho}(\tilde{\boldsymbol{j}}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}})\, dt + dq^{**}, \qquad (4.24)$$

где знак $\sim$ указывает на то, что соответствующие величины взяты в собственной системе координат. Приток энергии $\frac{1}{\rho}(\tilde{\boldsymbol{j}}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}})\, dt = dq^{(e)}_{\text{эл}}$ представляет собой джоулево тепло, т. е. приток к частице среды тепловой энергии, черпаемой в электромагнитном поле. В рассматриваемом случае вклад электромагнитного поля в dq^{**} принимается равным нулю. В следующем параграфе мы увидим, что dq^{**} необходимо, вообще говоря, учитывать, если существенны эффекты поляризации и намагничивания.

В рамках введенных в этом параграфе соотношений для пондеромоторных сил и энергообмена между полем и средой построена магнитная гидродинамика, основные положения которой мы рассмотрим несколько позднее, а сейчас перейдем к рассмотрению вопроса о пондеромоторных силах и притоках энергии от электромагнитного поля к среде в том случае, когда эффекты поляризации и намагничивания среды существенны.

§ 5. Взаимодействие электромагнитного поля с телами с учетом поляризации и намагниченности

В некоторых телах под влиянием внешнего электромагнитного поля возникают поляризация и намагниченность. Под влиянием внешнего поля внутри тел создается макроскопическое электромагнитное поле, деформирующее и изменяющее внешнее поле.

Уравнения Максвелла с учетом поляризации и намагниченности. Векторы электрической и магнитной индукции, намагниченности и поляризации

В таких телах уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \qquad (5.1)$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho_e, \qquad (5.2)$$

где $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$ — векторы электрической и магнитной индукции соответственно.

Вместо вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ можно рассматривать вектор намагниченности $\boldsymbol{M}$, который связан с $\boldsymbol{B}$ следующей формулой:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi \boldsymbol{M}. \tag{5.3}$$

Вектор $\boldsymbol{M}$ характеризует с макроскопической точки зрения упорядоченное распределение в теле магнитных диполей. Аналогично вместо вектора электрической индукции $\boldsymbol{D}$ можно рассматривать вектор поляризации $\boldsymbol{P}$, который связан с $\boldsymbol{D}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}. \tag{5.4}$$

Вектор поляризации $\boldsymbol{P}$ тела характеризует распределение электрических диполей в теле.

Второе уравнение (5.1), как и раньше, является следствием первого уравнения (5.1), когда в начальный момент времени $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$.

Уравнения Максвелла в интегральной форме

Систему уравнений (5.1), (5.2) можно записать в интегральной форме следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\oint\limits_{\mathscr{L}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{1}{c}\int\limits_{\Sigma_1}\frac{\partial B_n}{\partial t}\,d\sigma, && \int\limits_{\Sigma} B_n\,d\sigma = 0,\\ &\oint\limits_{\mathscr{L}} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s} = \frac{4\pi}{c}\int\limits_{\Sigma_1} j_n\,d\sigma + \frac{1}{c}\int\limits_{\Sigma_1}\frac{\partial D_n}{\partial t}\,d\sigma, && \int\limits_{\Sigma} D_n\,d\sigma = 4\pi\int\limits_{V}\rho_e\,d\tau, \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

и их следствие — условие сохранения полного заряда — следующим образом:

$$-\frac{d}{dt}\int\limits_{V}\rho_e\,d\tau = \int\limits_{\Sigma} j_n\,d\sigma,$$

где $\mathscr{L}$ — замкнутый, покоящийся в выбранной инерциальной системе координат контур, Σ_1 — поверхность, натянутая на этот контур, индексом n отмечены нормальные к поверхностям Σ_1 и Σ составляющие векторов, направление нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности Σ_1 выбрано так, чтобы направление обхода при интегрировании по контуру $\mathscr{L}$ и направление $\boldsymbol{n}$ образовывали правовинтовую систему, Σ — замкнутая, покоящаяся в выбранной системе координат поверхность, ограничивающая объем V.

Уравнения Максвелла с учетом электрических токов, поляризации и намагничивания в тензорной форме

Так же как уравнения для электромагнитного поля в пустоте, уравнения Максвелла в материальных средах можно написать в тензорной форме в пространстве Минковского. Для этого необходимо ввести в рассмотрение вектор четырехмерного тока $\boldsymbol{J} = J_i \boldsymbol{e}_i$ согласно (4.2), а вместо ковариантных и контравариантных компонент

F_{ij} и F^{ij}, тензора электромагнитного поля, введенного в § 2 согласно матрицам (2.1) и (2.3), надо ввести два антисимметричных тензора F и H, компоненты которых в «декартовой» системе координат ($ds^2 = -dx^{12} - dx^{22} - dx^{32} + c^2dt^2$) определены матрицами

$$\|F_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & B^3 & -B^2 & cE_1 \\ -B^3 & 0 & B^1 & cE_2 \\ B^2 & -B^1 & 0 & cE_3 \\ -cE_1 & -cE_2 & -cE_3 & 0 \end{Vmatrix} \tag{5.6}$$

и

$$\|H^{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -\frac{1}{c}D_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -\frac{1}{c}D_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -\frac{1}{c}D_3 \\ \frac{1}{c}D_1 & \frac{1}{c}D_2 & \frac{1}{c}D_3 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{5.7}$$

Очевидно, что при отсутствии намагниченности и поляризации, т. е. когда $\boldsymbol{P} = 0$ и $\boldsymbol{M} = 0$, матрица компонент F_{ij} в (2.1) совпадает с матрицей компонент F_{ij} в (5.6), а матрица компонент H^{ij} в (5.7) совпадает с матрицей компонент F^{ij} в (2.3).

Вместо тензора H можно ввести в рассмотрение тензор поляризации $\mathcal{P}$ с компонентами $\mathcal{P}_{ij}$, определенными равенством

$$\mathcal{P}_{ij} = \frac{1}{4\pi}(F_{ij} - H_{ij}).$$

Легко проверить непосредственно, что уравнения (5.1) и (5.2) в тензорной форме в четырехмерном пространстве Минковского в любой криволинейной системе координат имеют вид

$$\nabla_i F_{jk} + \nabla_j F_{ki} + \nabla_k F_{ij} = 0 \tag{5.8}$$

и

$$\nabla_k H^{ik} = \frac{4\pi}{c} J^i. \tag{5.9}$$

Инвариантность относительно преобразований Лоренца

Из тензорной формы этих уравнений непосредственно видно, что они инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Преобразования основных векторов электромагнитного поля при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой

При переходе от одной, «неподвижной» инерциальной системы координат K к другой, «подвижной» инерциальной системе K' векторы $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{P}$ преобразуются по формулам (3.22), а векторы $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{M}$ преобразуются по формулам (3.23). Компоненты четырехмерного вектора плотности электрического тока J^i преобразуются по обычным формулам преобразования компонент вектора. В частности, если система K' движется относительно K поступательно вдоль оси x^1 со скоростью v, то на основании формул (3.16) получим

$$\left.\begin{aligned} J^{1'} &= j^{1'} = \frac{j^1 - v\rho_e}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad J^{2'} = j^2, \\ J^{3'} &= j^3, \qquad\qquad J^{4'} = \rho_e' = \frac{\rho_e - \frac{v}{c^2} j^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

Компоненты и величина трехмерного вектора плотности тока, а также плотность заряда зависят от выбора инерциальной системы координат.

Векторный потенциал

Так же как для электромагнитного поля в пустоте, для электромагнитного поля в среде можно ввести векторный потенциал $\boldsymbol{A} = A_i \boldsymbol{\vartheta}^i$, положив

$$F_{ij} = \nabla_j A_i - \nabla_i A_j.$$

После этого получим, что уравнения (5.8) удовлетворятся тождественно. Уравнения (5.9) при $\mathcal{P}_{ij} = 0$, $J^i \neq 0$ и $\nabla^\alpha A_\alpha = 0$ приводятся к неоднородному волновому уравнению, которое в декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial x^{1^2}} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial x^{2^2}} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial x^{3^2}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}.$$

Тензор Минковского

В качестве тензора энергии — импульса электромагнитного поля при $\mathcal{P}_{ij} \neq 0$ можно взять тензор Минковского, который вводится по определению следующим образом:

$$S_i^{\ k} = -\frac{1}{4\pi}\left[F_{mi}H^{mk} - \frac{1}{4}\delta_i^{\ k} F_{mn}H^{mn}\right]. \tag{5.10'}$$

Эта формула является непосредственным обобщением формулы (2.22) для тензора энергии — импульса электромагнитного поля в пустоте. Легко проверить, что тензор Минковского вообще несимметричный:

$$S^{ij} \neq S^{ji}.$$

Четырехмерный вектор пондеромоторной силы

В этом случае уравнения импульсов и энергии принимают вид

$$\nabla_k S^{ik} = -F^i, \qquad (5.10'')$$

где F^i — четырехмерный вектор пондеромоторной силы.

Приведенные ниже общие формулы для пондеромоторной трехмерной силы и энергообмена между полем и средой при наличии поляризации и намагничивания получены с помощью формулы (5.10″). В выражениях для F^1, F^2, F^3 содержатся составляющие силы Лоренца. При отсутствии поляризации и намагниченности среды, но при наличии токов трехмерная часть четырехмерной пондеромоторной силы $\boldsymbol{F}$ дает просто силу Лоренца, а четвертая компонента — величину, равную $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}$, которая в собственной системе координат равна выделенному джоулеву теплу, отнесенному к единице времени и единице объема материальной среды.

После введения тензора энергии — импульса электромагнитного поля $S = S^{ij}\,\boldsymbol{э}_i\boldsymbol{э}_j$ формулы (5.10″) определяют четырехмерный вектор $\boldsymbol{F} = F^i\boldsymbol{э}_i$ — объемную плотность внешней по отношению к телу силы. Объемная плотность четырехмерной силы, действующей со стороны поля на тело,— пондеромоторной силы определяется распределением характеристик поля и вводится этим путем для общего случая, когда материальная среда (тело) движется как угодно [1]).

Для установления зависимости компонент F^i от привычных трехмерных векторных характеристик поля необходимо воспользоваться инерциальной системой координат, в которой написаны уравнения Максвелла (5.1) и (5.2). Для достижения этой цели можно в качестве инерциальной системы координат выбирать различные системы координат. В частности, можно взять фиксированную систему отсчета наблюдателя, в которой определяется движение среды, или использовать совокупность собственных инерциальных систем координат в каждой точке материальной среды и в каждый момент времени.

Компоненты трехмерных векторных характеристик поля, определенных указанным выше способом в собственных системах координат, можно вычислять в сопутствующей системе координат, которая вообще неинерциальна. Если, в частности, сопутствующая система координат инерциальна, то в каждой точке сопутствующая система и собственная система координат

[1]) Формулы (5.10″) и (5.29) представляют собой обобщение опытных фундаментальных законов электродинамики Кулона, Лоренца, Джоуля и т. п. на общий случай движения намагниченных и поляризованных материальных тел. Из дальнейшего следует, что это обобщение связано с условиями выбора тензора энергии—импульса и собственного момента поля, которые могут быть различными.

совпадают; поэтому в этом случае взаимодействие между полем и материальной средой можно рассматривать как взаимодействие между полем и неподвижным телом в сопутствующей системе координат.

В каждой системе координат три компоненты F^α ($\alpha = 1, 2, 3$) и четвертая компонента F^4 при пространственных преобразованиях координат вида

$$y^\alpha = y^\alpha(x^\beta), \quad y^4 = x^4; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

образуют соответственно компоненты трехмерного вектора и трехмерный скаляр.

Как было указано выше, эти вектор и скаляр зависят от выбора исходной системы координат x^i. В рамках специальной теории относительности даже для инерциальных систем, движущихся поступательно друг относительно друга с постоянной скоростью, этот трехмерный вектор и этот трехмерный скаляр неинвариантны [1]).

Тем не менее в подвижных друг относительно друга инерциальных системах отсчета эти характеристики различаются между собой мало, когда относительные скорости движения малы по сравнению со скоростью света. В приложениях в рамках нерелятивистской механики этими различиями можно пренебрегать.

В общем случае в качестве естественных и удобных характеристик внутренних физических процессов в материальной среде можно пользоваться трехмерными векторами плотности пондеромоторной силы и трехмерными скалярами $F_4 = c^2F^4$ в собственной системе координат.

О добавочных соотношениях электродинамики, замыкающих уравнения Максвелла (5.1), (5.2)

Система уравнений Максвелла (5.1), (5.2) не является замкнутой. В нее входит семь независимых уравнений и шестнадцать неизвестных $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{j}$, ρ_e. Эти уравнения недостаточны для определения перечисленных характеристик электромагнитного поля.

Для того чтобы замкнуть систему, необходимы по крайней мере еще три векторных соотношения, связывающих векторы $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{j}^* = \boldsymbol{j} - \rho_e\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$.

Такими соотношениями могут служить закон Ома и законы поляризации и намагничивания тела. Эти добавочные соотношения не носят универсального характера, они по своему существу различны для различных тел и процессов. Во многих

---

[1]) Это общее свойство любых трехмерных векторов в специальной теории относительности. Например, так же обстоит дело с вектором плотности тока (см. (3.16) и (5.10)).

случаях используются закон Ома и законы намагничивания и поляризации тела в следующем виде:

$$j^* = \sigma\left(E + \frac{v}{c} \times H\right), \tag{5.11}$$

$$\widetilde{B} = \mu\widetilde{H}, \tag{5.12}$$

$$\widetilde{D} = \varepsilon\widetilde{E}, \tag{5.13}$$

где через σ обозначен, как и раньше, коэффициент проводимости, через μ — коэффициент магнитной проницаемости и через ε — диэлектрическая постоянная. Во многих случаях на практике σ, μ и ε можно считать постоянными. В пустоте $\sigma = 0$, $\mu = \varepsilon = 1$. Величины σ, μ и ε, подобно коэффициентам вязкости и теплопроводности, можно рассматривать как физические характеристики среды, они могут зависеть от температуры (при низких температурах намагничивание и поляризация тел проявляются сильнее) и быть тензорными характеристиками, как, например, в случае анизотропных тел.

Законы намагничивания и поляризации в тензорной форме

Трехмерные векторные соотношения (5.12) и (5.13), написанные в собственной системе координат, равносильны одному четырехмерному тензорному соотношению, которое в силу своего физического смысла инвариантно относительно выбора системы координат. В компонентах его можно написать в виде

$$F_{ij} = C_{ijkl}H^{kl}, \qquad C_{ijkl} = -C_{jikl} = -C_{ijlk}, \tag{5.14}$$

где компоненты тензора C_{ijkl} зависят от компонент метрического тензора g_{ij}, компонент вектора четырехмерной скорости точек среды $u^i = dx^i/ds$ и вообще от других физических параметров, характеризующих физическое состояние частиц среды, например от температуры, компонент тензора деформаций и т. п.

В изотропном случае, когда коэффициенты μ и ε в (5.12) и (5.13) — скаляры, можно проверить, что для компонент тензора C_{ijkl} верны следующие формулы:

$$C_{ijkl} = \frac{1}{2}\left\{\mu(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\varepsilon}(g_{ik}u_ju_l - g_{jk}u_iu_l + g_{jl}u_iu_k - g_{il}u_ju_k)\right\},$$

где $\gamma_{ij} = g_{ij} - u_iu_j$, а u_i — ковариантные компоненты вектора четырехмерной скорости. Указанную проверку удобно произвести для неподвижного тела в декартовой инерциальной

системе координат, связанной с телом. В этой системе

$$u^\alpha = u_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad u^4 = \frac{1}{c}, \quad u_4 = c.$$

Заметим, что закон намагничивания (5.12) не выполняется для очень сильных магнитных полей, когда вектор намагниченности $\boldsymbol{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \boldsymbol{H}$ достигает максимальной величины при полном насыщении, тогда как величину вектора $\boldsymbol{H}$ можно увеличивать за счет внешних токов. Существуют также материалы, в которых дипольные заряды (вызванные поляризацией тела) сохраняются неизменными в отсутствии внешнего электрического поля $\boldsymbol{E}$. Для таких материалов несправедлив закон поляризации (5.13). Приведенными выше законами поляризации и намагничивания тел (5.12), (5.13) можно пользоваться при решении большого класса задач в случае не слишком сильных электромагнитных полей.

Пондеромоторные силы Приведем теперь выражение для пондеромоторных сил, т. е. сил, действующих со стороны электромагнитного поля на тела, в которых происходит поляризация и намагничивание. Это выражение для пондеромоторных сил связано с уравнениями Максвелла (5.1), (5.2) и имеет место при любых законах Ома, законах поляризации и намагничивания.

Трехмерная пондеромоторная сила, отнесенная к единице объема, при учете поляризации и намагничивания отличается от силы Лоренца и в любой криволинейной инерциальной системе координат согласно формулам (5.10″) имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{F} = \rho_e \boldsymbol{E} + \frac{1}{c} (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}) + \\ + \frac{1}{8\pi} (D_\alpha \nabla E^\alpha - E^\alpha \nabla D_\alpha + B_\alpha \nabla H^\alpha - H^\alpha \nabla B_\alpha), \quad (5.15)$$

где $\nabla = \boldsymbol{\vartheta}^k \nabla_k$ — трехмерный вектор-градиент; в декартовой ортогональной системе координат

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{k}.$$

Легко видеть, что в последнем члене формулы (5.15) для пондеромоторной силы векторы электрической и магнитной индукции $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$ можно заменить на векторы поляризации $\boldsymbol{P}$ и намагниченности $\boldsymbol{M}$. Сила $\boldsymbol{F}$ согласно (5.15) отличается от силы Лоренца

$$\boldsymbol{F}_{\text{Лоренца}} = \rho_e \boldsymbol{E} + \frac{1}{c} (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H}).$$

Нетрудно усмотреть, что последний член в скобках в (5.15) обращается в нуль, когда имеют место законы (5.12) и (5.13), если μ и ε — скаляры и одинаковы для разных частиц среды (не зависят от координат). Этот член, вообще говоря, отличен от нуля в анизотропных средах, когда μ и ε являются тензорами, и в изотропных средах, когда законы (5.12) и (5.13) не выполняются или когда μ и ε являются функциями от параметров, зависящих от координат (например, температуры).

Приток энергии от поля к телу

Кроме силового взаимодействия, между полем и материальной средой происходит также обмен энергией.

Из уравнения (5.10″) в декартовой инерциальной системе координат при $i = 4$ получим

$$F^4 c^2 = F_4 = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} + E_\beta \frac{\partial P^\beta}{\partial t} + H_\beta \frac{\partial M^\beta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E_\beta P^\beta + H_\beta M^\beta}{2}\right). \quad (5.16)$$

В самом деле, на основании (5.6), (5.7) и (5.10′) имеем

$$S_{4\cdot}^{\cdot 4} = -\frac{1}{4\pi}\left(F_{m4}H^{m4} - \frac{1}{4}F_{mn}H^{mn}\right) = \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}}{8\pi} \quad (5.17)$$

и, кроме того,

$$\boldsymbol{S} = S_{4\cdot}^{\cdot\alpha}\boldsymbol{e}_\alpha = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}).$$

По определению

$$F_4 = -\left(\frac{\partial S_{4\cdot}^{\cdot 4}}{\partial t} + \frac{\partial S_{4\cdot}^{\cdot 1}}{\partial x^1} + \frac{\partial S_{4\cdot}^{\cdot 2}}{\partial x^2} + \frac{\partial S_{4\cdot}^{\cdot 3}}{\partial x^3}\right) = -\frac{\partial S_4^4}{\partial t} - \operatorname{div}\boldsymbol{S}. \quad (5.18)$$

В рассматриваемом случае при наличии намагниченности и поляризации на основании уравнений Максвелла (5.1) и (5.2) уравнение Умова — Пойнтинга принимает несколько видоизмененный вид:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{S} + \frac{1}{4\pi}\left(\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) + \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} = 0. \quad (5.19)$$

Подставляя $S_{4\cdot}^{\cdot 4}$ из (5.17) и $\operatorname{div}\boldsymbol{S}$ из (5.19) в (5.18), после простых выкладок придем к (5.16). Непосредственно очевидно (см. (5.3)), что в формулу (5.16) без какого-либо влияния на величину F_4 можно вместо компонент H_β вектора $\boldsymbol{H}$ вставить компоненты B_β вектора $\boldsymbol{B}$.

Приток энергии от поля к элементу объема $d\tau$ материальной среды за время dt за счет электрического тока, поляризации и намагниченности представится формулой вида

$$F_4 d\tau\, dt. \quad (5.20)$$

Эта величина войдет в правую часть уравнения притока тепла для тела как внешний макроскопический приток энергии, который можно обозначить через $dQ^*_{\text{эл}} = dQ^{(e)}_{\text{эл}} + dQ^{**}_{\text{эл}}$ (ср. гл. V, § 2 (2.20)). В этом уравнении слева стоит приращение внутренней энергии dU для рассматриваемой бесконечно малой частицы.

Так как построение модели материальной среды связано с определением внутренней энергии, входящей в уравнение и определяемой на основании этого уравнения, то для неподвижного тела полный дифференциал, входящий в (5.20):

$$d\left[\frac{E_\beta P^\beta + H_\beta M^\beta}{2} d\tau\right], \tag{5.21}$$

можно перевести в левую часть уравнения притока тепла и включить по определению величину $^1/_2 (E_\beta P^\beta + H_\beta M^\beta)\, d\tau$ во внутреннюю энергию U рассматриваемого элемента тела [1]). Такое условие аналогично переходу в уравнении энергии или уравнении притока тепла от внутренней энергии к свободной энергии или к термодинамическому потенциалу Гиббса и т. п. (см. гл. V, § 6).

С учетом такого определения внутренней энергии материальной среды напишем теперь формулу для притока энергии от поля к телу, отнесенного к единице массы среды:

$$dq^* = \frac{dQ^*_{\text{эл}}}{dm}, \quad dm = \rho\, d\tau.$$

На основании формул (5.16) и (5.20) в данной точке материальной среды получим

$$dq^* = \frac{1}{\rho}(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}dt + \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{P} + \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{M}). \tag{5.22}$$

Очевидно, что формула (5.22) для dq^* тесно связана с уравнением Умова — Пойнтинга (5.19), согласно которому формулу (5.22) можно переписать еще в следующем виде:

$$dq^* = -\frac{1}{\rho}\left[d\frac{(H^2 + E^2)}{8\pi} + \operatorname{div}\boldsymbol{S}dt\right]. \tag{5.23}$$

Энергетические формулы (5.22) и (5.23) получены из уравнений для поля, их можно применять в любой инерциальной системе отсчета наблюдателя, в которой написаны уравнения Максвелла. Для тел, подвижных относительно системы наблюдателя, особое значение имеют собственные системы координат.

[1]) В соответствии со сказанным выше в формуле (5.21) и в последующих компоненты H_β можно заменить через B_β.

В собственной системе координат

$$\frac{1}{\rho}(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}) = dq^{(e)}, \tag{5.24}$$

где $dq^{(e)}$ — джоулево тепло, а

$$\frac{1}{\rho}(\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{P} + \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{M}) = dq^{**}, \tag{5.25}$$

если процесс поляризации и намагничивания обратим.

Подчеркнем, что такое разбиение dq^* на dq^e и dq^{**} справедливо в случае неподвижных сред. Если же среда движется относительно системы отсчета, то формулы (5.24) и (5.25) справедливы в каждой точке только в собственной системе отсчета [1]).

При наличии законов намагничивания и поляризации (5.12) и (5.13) процессы поляризации и намагничивания обратимы, а электромагнитное поле затрачивает на поляризацию и намагничивание тела отличную от нуля макроскопическую энергию

$$\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{P} + \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{M} \neq 0.$$

Величины $dq^{(e)}$, dq^{**} и компоненты векторов $\widetilde{\boldsymbol{E}}$, $\widetilde{\boldsymbol{H}}$, $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ и их приращения в собственной системе координат можно выразить через соответствующие компоненты и их приращения в сопутствующей системе координат с учетом движения сопутствующей системы координат относительно заданной инерциальной системы отсчета [2]).

Уравнение моментов в четырехмерной форме

Опыты с намагниченной стрелкой в магнитном поле показывают, что взаимодействие тел и поля не сводится только к пондеромоторным силам. Опыт показывает, что это взаимодействие проявляется также за счет действия распределенных по объему пар, задаваемых своими моментами. Введем и проанализируем дифференциальное уравнение моментов для поля. Для поля можно рассматривать трехмерное обычное уравнение моментов, в котором фигурируют только обычные моменты трехмерных сил. Однако в рамках специальной теории относительности, т. е. в рамках теории электромагнитного поля, описываемого уравнениями Максвелла, сила представляет собой четырехмерный вектор. В связи с этим требуется рассматривать

[1]) См. (4.23′).

[2]) Соответствующая теория развита в работе Л. И. Седова «О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций», ПММ, т. 29, вып. 1, 1965, стр. 4—17.

уравнение моментов в четырехмерной форме, это связано с обобщением понятия о моментах сил и о моменте импульса как для материальной среды, так и для поля.

Из четырехмерного уравнения энергии — импульса для поля (5.10″), написанного в декартовой инерциальной системе координат, как следствие вытекают следующие равенства:

$$x^j \nabla_k S^{ik} - x^i \nabla_k S^{jk} = -(x^j F^i - x^i F^j), \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad (5.26)$$

где x^i — координаты точек в объеме, занятом телом. Антисимметричный тензор с шестью независимыми компонентами $x^j F^i - x^i F^j$ можно рассматривать как обобщение на четырехмерный случай обычного понятия трехмерного антисимметричного тензора, соответствующего одному аксиальному вектору — моменту трехмерной пондеромоторной силы относительно начала координат.

Необходимо подчеркнуть, что в специальной теории относительности момент — двухвалентный антисимметричный тензор с шестью независимыми компонентами — в общем случае может быть сведен в декартовой системе координат к двум трехмерным векторам (одному аксиальному и другому полярному).

Легко видеть, что соотношения (5.26) можно переписать в виде

$$\nabla_k (S^{ik} x^j - S^{jk} x^i) + S^{ij} - S^{ji} = -(x^j F^i - x^i F^j). \quad (5.27)$$

Компоненты трехвалентного тензора $S^{ik} x^j - S^{jk} x^i$ можно рассматривать как компоненты обобщенного тензора плотности момента импульса поля. Соотношения (5.27) (аналогично теореме живых сил) представляют собой простое следствие уравнений импульсов и выполняются тождественно в силу уравнений импульсов.

В уравнения (5.27) входят обобщенные тензорные величины плотности моментов импульса поля и антисимметричные тензоры моментов пондеромоторных сил, порожденные взаимодействием с материальной средой.

Уравнение энергии в термодинамике представляет собой в общем случае уравнение, независимое от теоремы живых сил. Аналогично этому можно ввести новые характеристики поля: тензоры объемных плотностей собственного внутреннего момента с компонентами $Q^{ijk} = -Q^{jik}$ и пондеромоторного момента с компонентами $\mathcal{H}^{ij} = h^{ij} - (x^i F^j - x^j F^i)$, которые могут определяться с помощью уравнения моментов для поля и уравнения моментов для среды, независимых от уравнений (5.27).

Такие независимые уравнения моментов для электромагнитного поля можно взять в виде

$$\nabla_k (S^{ik} x^j - S^{jk} x^i + Q^{ijk}) = -\mathcal{H}^{ij} = -h^{ij} + (x^i F^j - x^j F^i). \quad (5.28)$$

Компоненты тензора внешнего по отношению к телу пондеромоторного момента $\mathcal{H}^{ij}$ включают в себя, помимо компонент момента пондеромоторной силы еще компоненты добавочного объемного пондеромоторного момента — двухвалентного антисимметричного тензора h^{ij}.

При написании уравнений (5.28) принимается, что внешние распределенные объемные моменты, действующие на электромагнитное поле, обусловлены только материальным телом.

Уравнения моментов, аналогичные уравнениям (5.28), можно написать отдельно также и для материальной среды. В уравнениях для материальной среды в правой части будут присутствовать со знаком плюс компоненты $\mathcal{H}^{ij}$ тензора пондеромоторного момента за счет действия поля на среду. Помимо этого, в правой части уравнений моментов для среды могут присутствовать еще моменты, обусловленные внутренними взаимодействиями между частицами самой среды и другими посторонними объектами (другие тела и не электромагнитные поля).

Из (5.28) и (5.27) следуют равенства

$$h^{ij} = S^{ij} - S^{ji} - \nabla_k Q^{ijk}. \tag{5.29}$$

Эти соотношения можно рассматривать как уравнения для собственных моментов (четырехмерный аналог уравнения (3.6) гл. III). Уравнения (5.29) и соответствующие уравнения для материальной среды вместе с опытными данными, положенными в основу построения модели среды, могут служить источником для определения компонент h^{ij}, S^{ij} и Q^{ijk}.

Если модель материальной среды фиксирована, а из опытов определены компоненты пондеромоторного момента h^{ij} (например, момент, действующий на элементарную магнитную стрелку со стороны поля), то соотношение (5.29) можно рассматривать как связь между компонентами S^{ij} и Q^{ijk}. Если по дополнительному условию, входящему в определение электромагнитного поля, эти величины не зависят от каких-либо новых существенных характеристик поля, то соотношения (5.29) и соответственно (5.28) должны удовлетворяться тождественно подобно (5.27).

В соответствии с опытными данными соотношения (5.29) можно превратить в тождество с помощью различных условий.

В частности, в качестве простейших и естественных условий можно взять следующие:

1) тензор энергии — импульса электромагнитного поля — тензор Минковского, компоненты которого определены формулами (5.10′);

2) компоненты тензора внутреннего момента Q^{ijk} для точек внутри данного объема поля равны нулю, или, в более общей форме, верно равенство

$$\nabla_k Q^{ijk} = 0, \tag{5.30}$$

которое удовлетворяется тождественно или в силу уравнений импульсов. Эти два основных условия, которые можно включить в определение модели электромагнитного поля, приводят к согласованию с опытом (см. (5.33)).

Тензор пондеромоторного момента электромагнитного поля

На основании (5.10′) и (5.30) из (5.29) и условий 1), 2) получим

$$h^{ij} = \frac{1}{4\pi}\left[F^i_m H^{mj} - F^j_m H^{mi}\right]. \tag{5.31}$$

Проведем теперь выкладки в формуле (5.31). В декартовой инерциальной системе координат матрица $\|H^{ij}\|$ определена формулой (5.7), а матрица $\|F_{ij}\|$ — формулой (5.6). Так как $F^l_m = g^{lk}F_{mk}$ и $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$, а $g^{44} = 1/c^2$, $g^{ij} = 0$ при $i \neq j$, то для матрицы $\|F^l_m\|$ верна формула

$$\|F^l_m\| = \begin{Vmatrix} 0 & -B^3 & B^2 & \frac{E_1}{c} \\ B^3 & 0 & -B^1 & \frac{E_2}{c} \\ -B^2 & B^1 & 0 & \frac{E_3}{c} \\ cE_1 & cE_2 & cE_3 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{5.32}$$

С помощью матриц (5.7) и (5.32) на основании формул (5.31) легко написать матрицу $\|h^{ij}\|$.

Трехмерные пространственные векторы для пондеромоторного момента

Для четырехмерного антисимметричного тензора пондеромоторного момента с компонентами h^{ij} в декартовой системе координат можно ввести два трехмерных вектора $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}^1$, $\mathcal{M}^2$, $\mathcal{M}^3$) и $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$), входящих в матрицу $\|h^{ij}\|$ (см. (3.26) гл. IV), которую можно написать в форме

$$\|h^{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & \mathcal{M}^3 & -\mathcal{M}^2 & -\frac{\mathcal{L}_1}{c} \\ -\mathcal{M}^3 & 0 & \mathcal{M}^1 & -\frac{\mathcal{L}_2}{c} \\ \mathcal{M}^2 & -\mathcal{M}^1 & 0 & -\frac{\mathcal{L}_3}{c} \\ \frac{\mathcal{L}_1}{c} & \frac{\mathcal{L}_2}{c} & \frac{\mathcal{L}_3}{c} & 0 \end{Vmatrix}.$$

С помощью (5.7) и (5.32) после несложных выкладок найдем следующие простые формулы:

$$\mathscr{M} = \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{H}) + \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{H} + \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{E} \qquad (5.33)$$

и

$$\mathscr{L} = \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} - \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}^*; \qquad (5.34)$$

здесь $\boldsymbol{S}$ — вектор Пойнтинга, а вектор $\boldsymbol{S}^* = \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B})$ имеет аналогичную природу. В матрице тензора Минковского компоненты вектора $\frac{1}{c}\boldsymbol{S}$ образуют четвертую строку, а компоненты вектора $\frac{1}{c}\boldsymbol{S}^*$ — четвертый столбец.

Трехмерный вектор $\mathscr{M}$ представляет собой не что иное, как обычный пондеромоторный момент. Формула (5.33) для $\mathscr{M}$ хорошо соответствует опытным измерениям в рамках употребляемых на практике моделей материальных сред. Формула (5.33) является естественным обобщением формулы (1.3) на случай наличия поляризации. Очевидно, что $\mathscr{M} = 0$, когда имеют место уравнения состояния (5.12) и (5.13), в которых ε и μ — скаляры. В общем случае при наличии связей (5.12) и (5.13) для анизотропных сред $\mathscr{M} \neq 0$.

Для материальной среды уравнение моментов в специальной теории относительности представляется в компонентах шестью уравнениями: тремя «обычными» уравнениями моментов в проекциях в трехмерной формулировке, соответствующими вектору $\mathscr{M}$, и тремя уравнениями в проекциях, соответствующими вектору $\mathscr{L}$. Последние три уравнения моментов для среды в силу определения модели намагничиваемой и поляризуемой материальной среды могут удовлетворяться тождественно либо представлять собой существенные соотношения для определения некоторых характеристик среды.

Формулы (5.33) и (5.34) установлены в инерциальной системе координат (трехмерная пространственная часть системы координат может быть произвольной криволинейной). Их апробирование на опыте относится к неподвижным телам.

О различных определениях тензора энергии — импульса и тензора момента электромагнитного поля

При рассмотрении системы электромагнитное поле — материальная среда в целом как единого объекта с различными механическими и электромагнитными характеристиками можно вводить тензор энергии — импульса и тензор моментов для всей системы в целом как суммы соответствующих тензоров для поля и среды.

Для компонент этих тензоров можно написать

$$S^{ij} + T^{ij} \quad \text{и} \quad Q^{ijk}_{\text{поля}} + Q^{ijk}_{\text{среды}},$$

где T^{ij} и $Q^{ijk}_{\text{среды}}$ — компоненты соответствующих тензоров, относящихся к среде. Очевидно, что уравнения импульсов и моментов для системы в целом не будут содержать пондеромоторных сил и пондеромоторных моментов.

Разделение общего суммарного тензора энергии — импульса и тензора моментов, имеющих общую электромагнитную природу, на соответствующие тензоры отдельно для поля и отдельно для среды, вообще говоря, можно производить согласно условиям по-разному. При определенной сумме фиксирование этих величин для среды определяет однозначно их значение для поля, и наоборот. Пользуясь этим, целесообразно при оперировании с различными материальными средами определять импульс, энергию и момент электромагнитного поля всегда одним и тем же способом.

Тем не менее эти определения динамических свойств поля, вводимые для всех случаев согласно фундаментальному условию, можно определять по-разному. Выше дано описание динамических свойств электромагнитного поля с помощью только одного несимметричного тензора энергии — импульса Минковского с компонентами S^{ij}, определенными формулами (5.10′), в соответствии с этим выше установлены формулы для пондеромоторных сил и моментов.

Однако вместо тензора Минковского многие авторы вводят в качестве тензора энергии — импульса электромагнитного поля симметричный тензор Абрагама с компонентами $\widetilde{S}^{ij}$, для которых в собственной системе координат пространственная часть получается простым симметрированием компонент тензора Минковского $\widetilde{S}^{\alpha\beta} = {}^1/_2\,(S^{\alpha\beta} + S^{\beta\alpha})$, векторы временных частей совпадают с вектором Пойнтинга и, кроме того, $\widetilde{S}^{44} = S^{44}$; имеются и другие последовательно развитые предложения.

При использовании тензора Абрагама или других тензоров формулы для трехмерных пондеромоторных сил за счет векторов $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{M}$ получаются другими, кроме того, уравнение моментов может привести к приемлемой с практической точки зрения формуле (5.33) только при наделении поля дополнительными свойствами, связанными с наличием распределенных внутренних моментов, характеризуемых тензором с компонентами Q^{ijk} при $\nabla_k Q^{ijk} \neq 0$. Это существенное обстоятельство требуется отметить явно.

Таким образом, если не пользоваться определением тензора энергии — импульса по Минковскому, то на трехмерных поверхностях сечения четырехмерных объемов или на двумерных

поверхностях, разделяющих пространственные объемы в электромагнитном поле, нужно вводить не только поверхностные силы взаимодействия, но нужно еще вводить взаимодействие посредством распределенных поверхностных моментов (пар сил). При использовании тензора энергии — импульса по Минковскому распределенные моменты по сечениям внутри электромагнитного поля вводить не требуется.

В связи с указанными общими, по существу равноправными возможностями выставления различных условий при определении динамических свойств электромагнитного поля, а также в связи с анализом уравнения моментов для электромагнитного поля и формулы для пондеромоторного момента можно в качестве универсального и естественного условия выбрать тензор Минковского как тензор энергии — импульса электромагнитного поля. Если принять это условие, то им нужно руководствоваться не только для описания динамических свойств электромагнитного поля, но и при построении моделей материальных сред.

Мотивы для введения симметричного тензора энергии — импульса

Стремление ввести для электромагнитного поля симметричный тензор энергии — импульса стимулируется следующими соображениями. Тензор энергии — импульса, фигурирующий в общей теории относительности или получаемый путем осреднения микроскопического тензора энергии — импульса поля в пустоте, является автоматически симметричным, однако это относится либо к полю и среде в целом (напомним, что микроскопические взаимодействия внутри среды имеют электромагнитную природу), либо к электромагнитному полю в пустоте или при отсутствии намагниченной и поляризованной материальной среды. Во всех этих случаях либо тензор Минковского симметричен, так как $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} = 0$, либо симметричен только суммарный тензор энергии — импульса для среды и поля; именно только для этого тензора получается автоматически симметрия в общей теории относительности и при осреднении.

С другой стороны, очевидно, что значения компонент четырехмерной пондеромоторной силы (трехмерная сила и приток энергии) сохраняются неизменными, если вместо любого тензора энергии — импульса с компонентами S^{ij} взять другой тензор с компонентами S^{*ij}:

$$S^{*ij} = S^{ij} + \Omega^{ij},$$

когда для компонент добавочного тензора Ω^{ij} тождественно выполняются равенства

$$\nabla_j \Omega^{ij} = 0. \tag{5.35}$$

Добавление тензора с компонентами Ω^{ij} при условии (5.35) не влияет на формулу для пондеромоторной силы. Во многих случаях компоненты Ω^{ij} при условии (5.35) можно выбрать так, чтобы тензор S^{*ij} был симметричным. Такой операцией тензор энергии — импульса S^{ij} можно симметризировать даже при сохранении физического четырехмерного вектора пондеромоторной силы. Однако в результате такой симметризации для получения приемлемой формулы для объемного пондеромоторного момента действующего на материальное тело, для поля все же требуется ввести внутренние моменты $\nabla_k Q^{ijk} \neq 0$.

Наконец, во всех классических моделях тензор энергии — импульса для материальной среды получается симметричным, поэтому стремление к сохранению этого свойства в общем случае кажется естественным, однако несимметрия тензора энергии— импульса для материальной среды может проявиться только в усложненных моделях, для которых теоретические и экспериментальные исследования еще не проведены достаточно подробно и широко.

§ 6. Магнитная гидродинамика

Примером модели сплошной среды, в которой учитываются электромагнитные эффекты, может служить модель проводящей жидкости в магнитной гидродинамике. В магнитной гидродинамике принимается, что сплошная среда является жидкостью или газом, в которых отсутствует поляризация и намагниченность, но может течь электрический ток, т. е. $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P} = 0$, $\boldsymbol{j}^* \neq 0$. Полагая $dq^{**} = 0$, будем считать, что в рассматриваемых моделях индивидуальная частица сплошной среды может обмениваться с соседними частицами и другими внешними объектами только механической и тепловой энергией.

Для простоты дальше рассмотрим модель идеальной среды: $p^{ij} = -pg^{ij}$. В более общем случае в магнитной гидродинамике свойства вязкости среды учитываются.

Приводимая ниже система уравнений магнитной гидродинамики представляет собой приближенную в рамках ньютоновской механики систему, которая состоит из следующих уравнений:

скалярного уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0; \tag{6.1}$$

векторного уравнения импульсов

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right] =$$

$$= -\operatorname{grad} p + \rho_e\left[\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})\right] + \frac{1}{c}(\boldsymbol{j}^*\times\boldsymbol{H}) + \rho\boldsymbol{F}_{\text{доб}}, \tag{6.2}$$

где через $\boldsymbol{F}_{\text{доб}}$ обозначена плотность обычных массовых сил, не связанных с взаимодействием жидкости с электромагнитным полем, например сил тяжести;

скалярного уравнения притока тепла

$$dU + p\,d\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho}(\tilde{\boldsymbol{j}}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}})\,dt + dq^{(e)}_{\text{доб}}, \tag{6.3}$$

где через $dq^{(e)}_{\text{доб}}$ обозначен приток тепла к единице массы жидкости извне за счет теплопроводности или излучения и т. п.;

скалярного соотношения, выражающего второй закон термодинамики:

$$T\,ds = \frac{1}{\rho}(\tilde{\boldsymbol{j}}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}})\,dt + dq^{(e)}_{\text{доб}}; \tag{6.4}$$

в этом уравнении принято, что $dq' = 0$.

Если определить среду заданием внутренней энергии U как функции ρ и s, то из соотношения

$$dU = T\,ds - p\,d\frac{1}{\rho}$$

получаются еще два скалярных уравнения состояния:

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_{\rho}, \quad -p = \left(\frac{\partial U}{\partial \frac{1}{\rho}}\right)_{s}. \tag{6.5}$$

К динамическим и термодинамическим уравнениям (6.1) — (6.5) нужно еще добавить электродинамические уравнения, а именно уравнения Максвелла

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, & \operatorname{div}\boldsymbol{H} &= 0,\\ \operatorname{rot}\boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, & \operatorname{div}\boldsymbol{E} &= 4\pi\rho_e \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

и закон Ома, который в обычном варианте магнитной гидродинамики имеет вид

$$\boldsymbol{j} = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right) + \rho_e\boldsymbol{v}. \tag{6.7}$$

Система уравнений (6.1) — (6.7) получается замкнутой, если заданы $dq^{(e)}_{\text{доб}}$ и $\boldsymbol{F}_{\text{доб}}$.

Уравнения магнитной гидродинамики для среды с бесконечной проводимостью

Рассмотрим важный частный случай, когда можно принять, что проводящая среда, например ионизованный газ, имеет бесконечную проводимость σ. В этом случае уравнения магнитной гидродинамики сильно упрощаются.

Для бесконечно проводящей среды из закона Ома следует, что напряженность электрического поля в собственной системе координат $\tilde{\boldsymbol{E}}$ равна нулю, так как плотность тока $\boldsymbol{j}$ должна быть конечной. Поле $\boldsymbol{E}$ в произвольной инерциальной системе координат определяется через $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{H}$ по формуле

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}. \tag{6.8}$$

Для плотности тока $\boldsymbol{j}$ согласно уравнению Максвелла можно написать

$$\boldsymbol{j}\frac{4\pi}{c} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}). \tag{6.9}$$

В магнитной гидродинамике, как правило, пренебрегают током смещения и вместо (6.9) пишут

$$\boldsymbol{j} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot} \boldsymbol{H}. \tag{6.9'}$$

Плотность зарядов ρ_e определяется с использованием (6.8) через $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{H}$ по формуле

$$\rho_e = -\frac{1}{4\pi c}\operatorname{div}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}). \tag{6.10}$$

Из этой формулы видно, что ρ_e в обычных условиях мало. В магнитной гидродинамике обычно в уравнениях движения пренебрегают членом $\rho_e \boldsymbol{E}$ по сравнению с $\frac{1}{c}(\boldsymbol{j}^* \times \boldsymbol{H})$.

Для определения поля магнитной напряженности $\boldsymbol{H}$ в среде с бесконечной проводимостью из уравнений Максвелла сразу вытекают следующие уравнения:

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \tag{6.11}$$

к которым в этом случае, по существу, сводится вся система электродинамических уравнений.

Джоулево тепло $(1/\rho)\tilde{\boldsymbol{j}} \cdot \tilde{\boldsymbol{E}} dt$ равно нулю для среды с бесконечной проводимостью, так как $\tilde{\boldsymbol{E}} = 0$.

Если процесс адиабатический, то $dq^{(e)}_{\text{доб}} = 0$, и поэтому $s = \text{const}$ в частице. Если среда представляет собой совершенный газ, то давление p и плотность ρ связаны обычной формулой:

$$p = C\rho^{\gamma}. \tag{6.12}$$

Система динамических (6.1), (6.2), термодинамического (6.12) и электродинамических (6.11) уравнений с учетом соотношений (6.9) и (6.10) замкнута.

§ 7. Законы вмороженности магнитных и вихревых линий

Выясним теперь общие свойства поля вектора $A(x, y, z, t)$, удовлетворяющего соотношениям вида

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \operatorname{rot}(v \times A), \qquad \operatorname{div} A = 0. \tag{7.1}$$

Выше (см. (6.11)) было показано, что этим условиям удовлетворяет поле магнитной напряженности H в случае среды с бесконечной проводимостью. Этим же условиям удовлетворяет поле вектора вихря скорости $\omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot} v$ в случае баротропных процессов в идеальной жидкости в поле потенциальных массовых сил. В самом деле, рассмотрим уравнение импульса для идеальной непроводящей жидкости в форме Лемба — Громеки:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{v^2}{2} + 2\omega \times v = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + F. \tag{7.2}$$

Предположим, что внешние массовые силы F потенциальны и что процесс баротропный, т. е. $F = \operatorname{grad} U$ и $p = f(\rho)$. В этом случае можно ввести функцию давления

$$\mathcal{P} = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)}, \tag{7.3}$$

градиент которой, как легко проверить, равен

$$\operatorname{grad}\mathcal{P} = \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p.$$

Уравнение импульсов (7.2) в этих предположениях представится в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{v^2}{2} + 2\omega \times v = -\operatorname{grad}\mathcal{P} + \operatorname{grad} U.$$

Взяв теперь от обеих частей этого уравнения операцию ротора, получим

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \operatorname{rot}(v \times \omega), \tag{7.4}$$

причем

$$\operatorname{div}\omega = 0.$$

Эти уравнения действительно совпадают с уравнениями (7.1) и с уравнениями (6.11). Заметим, что уравнение (7.4) является кинематическим по своей природе, но оно получилось как следствие из динамического уравнения импульсов.

Таким образом, установив общие свойства векторного поля A, удовлетворяющего условиям (7.1), мы установим,

в частности, весьма важные свойства поля магнитной напряженности $\boldsymbol{H}$ в случае среды с бесконечной проводимостью и поля вектора вихря $\boldsymbol{\omega}$ при баротропных процессах в идеальной жидкости в поле потенциальных массовых сил.

Вывод формулы для производной по времени от потока соленоидального вектора через жидкую поверхность

Выведем сначала формулу для производной по времени от потока соленоидального вектора $\boldsymbol{A}(x, y, z, t)$ через некоторую незамкнутую жидкую поверхность Σ, ограниченную контуром C, т. е. через поверхность, движущуюся вместе с частицами сплошной среды.

Как известно, потоком вектора через поверхность Σ называется интеграл

$$\int_{\Sigma} (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n})\, d\sigma = \int_{\Sigma} A_n\, d\sigma,$$

в котором через $\boldsymbol{n}$ обозначен единичный вектор нормали к элементу $d\sigma$ поверхности Σ.

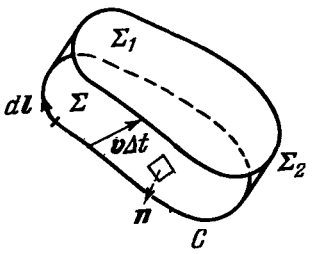


Рис. 40. К выводу формулы для производной по времени от потока соленоидного вектора через жидкую поверхность.

Как и раньше, положительные направления нормали $\boldsymbol{n}$ и обхода контура C свяжем так, чтобы с конца $\boldsymbol{n}$ обход контура C был виден совершающимся против часовой стрелки.

Если в момент времени t эта поверхность занимала положение Σ, а в момент $t + \Delta t$ — положение Σ_1 (рис. 40), то по определению производной будем иметь

$$\frac{d}{dt}\int_{\Sigma} A_n\, d\sigma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{\Sigma_1} A_n(x, y, z, t + \Delta t)\, d\sigma - \int_{\Sigma} A_n(x, y, z, t)\, d\sigma}{\Delta t}. \quad (7.5)$$

Докажем, что в силу уравнений (7.1) эта производная равна нулю и, следовательно, для такого вектора

$$\int_{\Sigma} A_n\, d\sigma = \text{const}.$$

Действительно, обозначим через Σ_2 поверхность, образованную траекториями точек контура C при его перемещении за время Δt, и рассмотрим замкнутую поверхность, образованную поверхностями Σ, Σ_1 и Σ_2.

По теореме Гаусса — Остроградского с использованием второго условия (7.1) будем иметь

$$\int_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} \boldsymbol{A}_n(x, y, z, t)\, d\sigma = \int_{V} \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, d\tau = 0, \quad (7.6)$$

где V — объем, ограниченный замкнутой поверхностью $\Sigma + \Sigma_1 + \Sigma_2$, а нормаль $\boldsymbol{n}$ — внешняя по отношению к V. Прибавляя и вычитая $\int A_n(x,y,z,t+\Delta t)\,d\sigma$ к (7.6) и заменяя направление нормали $\boldsymbol{n}$ к элементам поверхности Σ_1 на противоположное, легко получим

$$\int_{\Sigma_1} A_n(x, y, z, t+\Delta t)\,d\sigma - \int_{\Sigma} A_n(x, y, z, t)\,d\sigma =$$
$$= \int_{\Sigma_1} A_n(x, y, z, t+\Delta t)\,d\sigma - \int_{\Sigma_1} A_n(x, y, z, t)\,d\sigma +$$
$$+ \int_{\Sigma_2} A_n(x, y, z, t)\,d\sigma.$$

Отсюда для производной (7.5) получим следующее выражение:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Sigma} A_n(x, y, z, t)\,d\sigma =$$
$$= \int_{\Sigma} \frac{\partial A_n}{\partial t}\,d\sigma + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{\Sigma_2} A_n(x, y, z, t)\,d\sigma. \qquad (7.7)$$

Векторный элемент площади $\boldsymbol{n}\,d\sigma$ боковой поверхности Σ_2, очевидно, равен

$$\boldsymbol{n}\,d\sigma = \boldsymbol{v}\,\Delta t \times d\boldsymbol{l},$$

где $d\boldsymbol{l}$—элемент контура C, ограничивающего поверхность Σ (см. рис. 40). Поэтому в интеграле $\int_{\Sigma_2} A_n\,d\sigma$ можно перейти к интегрированию по контуру C:

$$\int_{\Sigma_2} (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})\,d\sigma = -\int_{C} \boldsymbol{A}\cdot(d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{v})\,\Delta t = -\int_{C} d\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{A})\,\Delta t,$$

или, воспользовавшись теоремой Стокса, перейти к интегрированию по первоначальной поверхности Σ, натянутой на контур C:

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{\Sigma_2} A_n\,d\sigma = -\int_{C}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_{\Sigma}[\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{A})]_n\,d\sigma.$$

Выражение (7.7) для искомой производной приводится теперь к виду

$$\frac{d}{dt}\int_{\Sigma} A_n\,d\sigma = \int_{\Sigma}\left[\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{A})\right]_n d\sigma. \qquad (7.8)$$

Это общая формула векторного анализа для производной от потока соленоидального вектора $\boldsymbol{A}$ через жидкую поверхность Σ.

Ясно, что для справедливости формулы (7.8) требуется определенность значения вектора скорости $\boldsymbol{v}$ только в точках поверхности Σ и ограничивающего ее контура C.

Если векторное поле $\boldsymbol{A}$ удовлетворяет условиям (7.1), то справа в (7.8) получается нуль, т. е.

$$\frac{d}{dt}\int_{\Sigma} A_n\, d\sigma = 0.$$

Таким образом, мы доказали сформулированное выше утверждение о том, что

$$\int_{\Sigma} A_n\, d\sigma = \text{const}, \tag{7.9}$$

где Σ — поверхность, движущаяся вместе с частицами сплошной среды, в области, где поле вектора $\boldsymbol{A}(x, y, z, t)$ удовлетворяет условиям (7.1). Из доказанного свойства (7.9) рассматриваемого векторного поля $\boldsymbol{A}$ вытекает ряд очень важных следствий.

Первое следствие

Векторные поверхности такого векторного поля переходят всегда во время движения также в векторные поверхности. В самом деле, рассмотрим в некоторый момент времени t некоторую векторную поверхность Π такого векторного поля $\boldsymbol{A}$, т. е. такую поверхность, в каждой точке которой вектор $\boldsymbol{A}$ лежит в касательной к ней плоскости. В силу непрерывности движения поверхность Π в момент времени $t + \Delta t$ перейдет в некоторую другую поверхность Π', нетрудно усмотреть, что эта поверхность Π' опять будет векторной поверхностью. Так как поверхность Π по условию — векторная поверхность, то поток вектора $\boldsymbol{A}$ через любую поверхность Σ, принадлежащую Π, равен нулю. По свойству (7.9) останется равным нулю и поток вектора $\boldsymbol{A}$ через поверхность Σ', в которую перейдет за время Δt поверхность Σ и которая в силу непрерывности движения будет принадлежать Π', т. е. вектор $\boldsymbol{A}$ в момент времени $t + \Delta t$ будет лежать в плоскости, касательной к Π': поверхность Σ, а следовательно, и поверхность Σ' при этом можно взять сколь угодно малой и где угодно лежащей на поверхности Π, и тогда непременно во всякой точке Π' $A_n = 0$, а это значит, что поверхность Π' вновь будет векторной поверхностью.

В частности, боковая поверхность векторной трубки переходит во время движения в боковую поверхность векторной трубки. Векторные трубки переходят в векторные трубки.

Второе следствие

Векторные линии векторного поля A, удовлетворяющего условиям (7.1), всегда во время движения переходят также в векторные линии. Действительно, через векторную линию l в момент времени t можно провести две векторных поверхности Π_1 и Π_2, и l будет линией пересечения этих поверхностей. По непрерывности движения в момент времени $t + \Delta t$ линия l перейдет в линию пересечения l' поверхностей Π_1' и Π_2', в каждую из которых перейдут соответственно поверхности Π_1 и Π_2 и каждая из которых (Π_1' и Π_2') в силу первого следствия из (7.9) останется векторной поверхностью. Следовательно, l' снова будет векторной линией.

Третье следствие

Интенсивность любой векторной трубки рассматриваемого поля вектора A во все время движения остается постоянной.

В самом деле, интенсивность векторной трубки, как известно (см. гл. II, § 8), определяется потоком вектора A через поперечное сечение трубки (в соленоидальном векторном поле он постоянен вдоль трубки). Поэтому только что сформулированное утверждение является непосредственным следствием свойства (7.9) рассматриваемого векторного поля A. Для поля вектора A, удовлетворяющего условиям (7.1), будем иметь

$$\int_{\Sigma} A_n \, d\sigma = \int_{\Sigma'} A_n \, d\sigma,$$

где Σ и Σ' — произвольное поперечное сечение векторной трубки в моменты времени t и t'.

Таким образом, в векторном поле A, удовлетворяющем условиям (7.1), векторные поверхности, трубки и линии сохраняются во время движения в том смысле, что они перемещаются в пространстве вместе с частицами сплошной среды. Векторные поверхности, линии и трубки вморожены в среду.

Как сказано выше, условиям (7.1) удовлетворяют векторные поля магнитной напряженности H в случае среды с бесконечной проводимостью и вектора вихря скорости $\omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot} v$ в случае баротропных процессов в идеальной жидкости и потенциальных внешних массовых сил. Поэтому поля магнитной напряженности H и вектора вихря ω в этих случаях в указанном выше смысле вморожены в среду.

Так, например, если в некоторой области $\mathcal{D}$, занятой сплошной средой с бесконечной проводимостью, в начальный момент времени t_0 не было магнитного поля $\boldsymbol{H}$, то его не будет и в области $\mathcal{D}'$, в которую перейдет область $\mathcal{D}$ в произвольный момент времени t. Магнитное поле движется вместе с частицами сплошной среды. Если на Солнце происходит извержение плазмы, представляющей собой облако раскаленного газа бесконечной проводимости, то магнитное поле движется вместе с плазмой и вытягивается из Солнца в межпланетное пространство.

Ввиду важности свойств поля вектора вихря $\boldsymbol{\omega}$ в случае баротропных движений идеальной жидкости в поле потенциальных сил для приложений остановимся на них подробнее.

Теорема Томсона

Свойство (7.9) для векторного поля $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ запишется, если Σ — жидкая поверхность, следующим образом:

$$\int_{\Sigma} \omega_n \, d\sigma = \text{const}, \tag{7.9'}$$

т. е. поток вектора вихря скорости $\boldsymbol{\omega}$ через любую поверхность Σ, движущуюся вместе с частицами сплошной среды, постоянен.

С помощью теоремы Стокса свойство (7.9') можно записать в виде

$$\int_{C} (\boldsymbol{v}, \, d\boldsymbol{l}) = \text{const} \tag{7.10}$$

(где C — произвольный замкнутый контур, состоящий все время из одних и тех же частиц жидкости) или в виде

$$\Gamma = \text{const}, \tag{7.11}$$

т. е. если внешние массовые силы потенциальны и движение идеальной жидкости баротропно, то циркуляция скорости Γ по любому замкнутому «жидкому» контуру во все время движения не изменяется. Это утверждение носит название теоремы Томсона.

Возможность появления замкнутых контуров с $\Gamma \neq 0$ в потенциальном потоке с поверхностями разрыва скорости

Следует помнить, что постоянство циркуляции, как вытекает из доказательства теоремы Томсона, имеет место только по контурам, получающимся друг из друга непрерывной деформацией.

Если жидкость находилась в покое в некоторый момент времени, то циркуляция в этот момент времени была равна нулю

по всем контурам. Однако при дальнейшем движении при наличии разрывов скорости в потоке вообще могут появиться замкнутые контуры вида $\mathscr{L}$, по которым циркуляция будет отличаться от нуля (рис. 41).

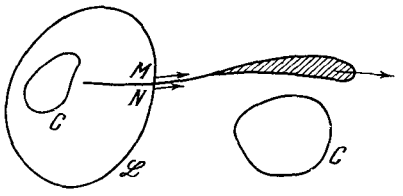


Рис. 41. Циркуляция по контурам C равна нулю, по контуру $\mathscr{L}$ может отличаться от нуля.

В самом деле, если контур $\mathscr{L}$ пересекает линию разрыва скоростей, то циркуляция по контуру $\mathscr{L}$ вообще отлична от нуля, так как скорости точек M и N на поверхности разрыва различны; поэтому контур $\mathscr{L}$, замкнутый в рассматриваемый момент времени, становится разомкнутым в следующий момент времени и был вообще незамкнут в предыдущие моменты времени и, в частности, в начальный момент, когда жидкость покоилась. К незамкнутым жидким контурам теорема Томсона неприменима, и циркуляция по таким контурам не сохраняется.

Непосредственным следствием теоремы Томсона является теорема Лагранжа.

Теорема Лагранжа Если при соблюдении условий теоремы Томсона в некоторой части жидкости в некоторый данный момент времени t_0 нет вихрей, то их в этой части жидкости не было при $t < t_0$ и не будет при $t > t_0$. Подчеркнем, что в формулировке теоремы Лагранжа речь идет не об определенной части пространства, а об определенной массе жидкости, движущейся непрерывно.

Докажем теорему Лагранжа. По условию в области $\mathscr{D}$ при $t = t_0$ нет вихрей, и, следовательно, в каждой точке этой области $\boldsymbol{\omega} = 0$. Поэтому по теореме Стокса $\left(\Gamma = 2\int\limits_{\Sigma}\omega_n\, d\sigma\right)$ циркуляция по любому замкнутому контуру, принадлежащему $\mathscr{D}$, равна нулю:

$$\oint\limits_{C}(\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}) = 0.$$

По теореме Томсона циркуляция Γ по любому замкнутому жидкому контуру будет равна нулю и во все другие моменты времени. Тогда вновь из теоремы Стокса вытекает, что для любой поверхности Σ, целиком лежащей в области $\mathscr{D}$ жидкости,

$$\int\limits_{\Sigma}\omega_n\, d\sigma = 0.$$

А это может быть только тогда, когда в любой точке $\mathcal{D}$ и для любого направления n $\omega_n = 0$, т. е. в любой частице жидкости в любой момент времени $\omega = 0$.

Отсутствие вихрей, как известно, равносильно существованию потенциала скоростей. Поэтому теорему Лагранжа можно сформулировать также следующим образом.

Если в некоторый момент времени t_0 движение жидкости или газа было потенциальным, то при соблюдении условий теоремы Томсона оно было и будет потенциальным и во все другие моменты времени.

Таким образом, в этом случае существует потенциал скоростей $\varphi(x, y, z, t)$ и

$$v = \operatorname{grad} \varphi(x, y, z, t).$$

Из теоремы Томсона видно большое физическое значение потенциальных движений идеальной жидкости. Наличие потенциальности сильно облегчает решение задач об определении поля скоростей.

Можно сказать, что вихри в жидкости могут возникать и исчезать, вообще говоря, только в том случае, когда нарушается хотя бы одно из предположений теоремы Томсона, т. е. либо жидкость вязкая, либо движение не баротропно, либо внешние массовые силы не потенциальны, либо нарушается непрерывность поля скоростей.

Доказанные свойства сохраняемости векторных поверхностей и линий, а также напряженностей векторных трубок для поля вектора вихря скорости баротропных движений идеальной жидкости или газа называются динамическими теоремами Гельмгольца, которые формулируются следующим образом.

Динамические теоремы Гельмгольца о вихрях

Первая динамическая теорема Гельмгольца: в предположениях теоремы Томсона частицы жидкости, образующие в некоторый момент времени вихревую поверхность, трубку или линию, во все время движения образуют соответственно вихревую поверхность, трубку или линию.

Вторая теорема Гельмгольца: в предположениях теоремы Томсона интенсивность вихревой трубки во все время движения остается постоянной, т. е.

$$\Gamma = \oint_C (v \cdot dl) = \text{const},$$

где C — замкнутый контур, охватывающий данную вихревую трубку.

Мы используем эти теоремы о векторе вихря скорости в гл. VIII, посвященной задачам гидродинамики.

ГЛАВА VII

О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

§ 1. Общие основы постановки конкретных задач

Модели и системы отсчета

При теоретическом исследовании конкретных задач в механике сплошной среды необходимо обязательно явно или неявно [1]) пользоваться выбором систем отсчета наблюдателя, в которых описываются движение и состояние изучаемой среды. В ньютонианской механике в качестве систем отсчета наблюдателя можно выбирать любые «неподвижные» или движущиеся системы. Однако требуется всегда указывать инерциальную систему отсчета, так как только на этой основе можно пользоваться данными о силах инерции.

В нужных случаях требуется также иметь в виду существование системы координат Лагранжа, которая фактически позволяет индивидуализировать точки континуума сплошной среды и, по существу, всегда кладется в основу определения характеристик движения и состояния частиц среды.

В предыдущих главах были установлены и описаны универсальные уравнения механики, термодинамики и электродинамики. Эти уравнения являются фундаментальными соотношениями, в рамках которых строится теория любых конкретных моделей сплошных сред. Они принимаются для всех моделей и в рамках определенной модели для всевозможных отдельных случаев движений и физических процессов. Как было выяснено выше, универсальные уравнения для непрерывных гладких распределений могут быть написаны в виде дифференциальных уравнений с частными производными.

Наряду с дифференциальными уравнениями была указана также формулировка тех же физических положений в интегральном виде: интегральная форма уравнения неразрывности ((1.2), гл. III), уравнения импульсов ((2.2), гл. III), 1-го закона термодинамики — уравнения энергии ((8.1), гл. V), второго закона термодинамики ((8.2), гл. V) и общих уравнений Максвелла ((5.5), гл. VI).

---

[1]) Для отчетливости и ясности в постановке задач лучше все допущения и условия формулировать в явном виде.

Для гладких непрерывных распределений применяемых характеристик дифференциальные и интегральные формулировки эквивалентны. Однако приходится рассматривать также разрывные распределения характеристик явлений в пространстве и во времени. При наличии разрывов проявляется более общая природа интегральных формулировок, сохраняющих смысл и в этом случае. Дифференциальные формулировки сохраняют свое значение в области непрерывных явлений, но нуждаются в дополнительных условиях на разрывах. При интегральной формулировке такие дополнительные условия в них уже содержатся. В следующих параграфах мы выведем соответствующие условия на разрывах из универсальных интегральных соотношений.

Как было уже указано выше, для получения систем уравнений, позволяющих обратиться к подробному изучению движения данной сплошной среды, требуется всегда вводить дополнительные гипотезы — предположения, фиксирующие частные свойства и физическую природу рассматриваемой модели. Необходимо выбрать модель. Проблема выбора моделей может служить предметом специальных и обширных исследований; во многих случаях это основная проблема физики, связанная с идеализацией, схематизацией и с введением различного рода понятий и характеристик. Выбор и построение новых моделей необходимы для описания открываемых новых эффектов и явлений, сущность которых уже известна или только начинает проявляться в развивающихся областях науки и техники.

В предыдущих главах мы уже познакомились с рядом важных классических моделей сплошных сред: моделью идеальной жидкости и газа, моделью упругого тела, моделью вязкой жидкости, моделью проводящей жидкости в магнитной гидродинамике и др. Этот список далеко не исчерпывает совокупность известных моделей; существует ряд других моделей, с некоторыми из них мы познакомимся дальше. В настоящее время в связи с применением новых материалов, расширением диапазонов использования уже употребляемых материалов, необходимостью учета электромагнитных свойств и эффектов в механике, применением условий большого вакуума или, наоборот, очень больших давлений, сверхнизких температур или, наоборот, очень больших температур, в связи с рассмотрением сложных явлений в живых организмах и т. д. и т. п. проблема построения новых моделей актуальна. Теория построения новых моделей в физике и механике в настоящее время развивается интенсивно.

Предположения о внешних воздействиях, например о внешних массовых силах $\boldsymbol{F}^{(e)}$, элементарных притоках энергии $dJ^{(e)}$

и dq^{**}, можно вводить дополнительно в рамках каждой фиксированной модели. В рамках заданной модели можно также ставить задачу об определении этих величин по движению, заданному гипотетически, или по результатам наблюдений в опытах.

Необходимость дополнительных условий, выделяющих отдельные движения

После выбора модели для выделения определенного явления или класса явлений — движений требуется выставлять еще дополнительные условия. Это очевидно! В самом деле, в рамках теоретической модели несжимаемой идеальной жидкости можно рассматривать великое разнообразие движений воды, нефти, многих других жидкостей и даже воздуха и других газов, когда сжимаемостью можно пренебречь, например: разнообразнейшие течения и волновые движения воды в океанах и морях; движение воды в струях, вытекающих из сосудов; движение воды через водосливы в плотинах; движение воды, вызванное движением кораблей и подводных лодок в море; движение воздуха, вызванное движением дирижаблей при малых дозвуковых скоростях, и т. д. и великое множество других проблем. Во всех перечисленных случаях можно пользоваться одной и той же замкнутой системой дифференциальных уравнений. Следовательно, системы дифференциальных уравнений, выполняющихся в каждой точке объема, занятого жидкостью, и образующих замкнутую систему, совершенно недостаточно для решения математической задачи об определении полей скорости и давления в объеме жидкости. Как известно, общие решения дифференциальных уравнений движения содержат произвольные функции и постоянные, которые нужно определять из специальных условий.

Рассмотрим теперь различные типичные дополнительные условия, выделяющие отдельные движения.

Область, занятая сплошным телом, и интервал времени движения

Решения математических задач представляются в виде функций, определенных в точках объема, занятого средой, и интервала времени, в течение которого движение рассматривается. Интервал времени может быть конечным, может начинаться в некоторый характерный «начальный» момент времени $t = t_0$ или быть «привязанным» к нему; рассмотрение движения и состояния сплошной среды может производиться для любых $t > t_0$ или $t < t_0$ или вообще для всех $t \leqslant t_0$. По смыслу задачи возможны требования отыскания различных характерных моментов времени.

Область объема $\mathcal{D}$, занятая движущейся средой, в одних случаях может быть задана, в других неизвестна заранее. Например, область $\mathcal{D}$ можно считать известной, когда жидкость движется в данном сосуде и полностью заполняет этот сосуд или когда жидкость занимает все пространство при движении около

различных фиксированных и заданных заранее преград внутри жидкости. Во многих случаях область $\mathcal{D}$ неизвестна заранее; ее определение должно быть осуществлено, например, в процессе решения задачи о выливании воды из сосуда, при изучении деформации упругого тела под действием заданной системы внешних нагрузок и т. п.

В некоторых случаях граница области $\mathcal{D}$ может состоять из известных частей, например поверхности морского дна, стенок сосудов или вообще подвижных поверхностей тел внутри жидкости, и частей, неизвестных заранее, которые нужно найти в процессе решения задачи, например поверхности волнующегося моря или границы истекающей из сосуда струи и т. п.

Область, занятая сплошной средой, $\mathcal{D}$ может быть конечной, например внутренностью сосуда или трубы для жидкости или объемом стержня, балки, детали машины и т. п. для деформируемого «твердого» тела. При схематизации постановки задач часто приходится иметь дело с областью $\mathcal{D}$, содержащей бесконечно удаленную точку, когда жидкое или «твердое» деформируемое тело или электромагнитное поле занимает все пространство или внешность некоторой системы заданных тел или когда имеются струи или полосы — ленты, уходящие в бесконечность.

Условия в бесконечности

При решении задач для области $\mathcal{D}$, включающей бесконечность, на основе предположений физического характера необходимо задавать дополнительные условия в бесконечности.

В качестве таких условий во многих случаях предполагается, что исследуемое явление носит характер местного возмущения и что при удалении в бесконечность состояние и движение среды заданы. Например, при изучении абсолютного движения неограниченного объема жидкости, возникающего при движении в нем твердого тела конечных размеров, можно принимать, что при удалении в бесконечность скорость жидкости стремится к нулю, давление — к заданному значению, электромагнитное поле имеет заранее заданные свойства; аналогично можно предполагать, что деформируемое тело в бесконечности находится в естественном состоянии, которое определяется дополнительными физическими условиями, и т. д. и т. п.

В задаче об обтекании неподвижных тел потоком газа или жидкости необходимо принимать, что при удалении в бесконечность вверх по потоку, а в некоторых случаях в любом направлении набегающий поток имеет заданные свойства: заданную скорость, заданное давление и температуру и т. п.

Однако условия в бесконечности могут носить и более сложный характер, например когда при удалении в бесконечность по разным направлениям имеет место некоторый регулярный

1155

и, может быть, периодический процесс, имеются, вообще говоря, различные в разных направлениях волны заданного типа и т. п.

Нередко проблема формулирования дополнительных условий в бесконечности бывает связана с тонкими эффектами, обусловленными отсутствием или наличием притока энергии из бесконечности или какими-либо излучениями.

Особые точки внутри среды

Условия в бесконечности можно рассматривать как дополнительные условия в особой бесконечно удаленной точке. Для учета различных воздействий на среду или поле можно вводить особые точки и в конечной части области $\mathcal{D}$. Например, можно вводить точечные источники или стоки массы жидкости, диполи и мультиполи по массовому расходу, заряды, диполи и мультиполи в электромагнитном поле, особые точки различного, но определенного типа для учета эффекта действия концентрированных внешних сил и источников энергии и т. п. Такие особенности могут моделировать действие и присутствие других тел на далеких расстояниях от интересующей нас по смыслу задачи области поля или движения среды.

Таким образом, можно вводить в области $\mathcal{D}$ особые точки, в которых асимптотическое поведение некоторых функций задано; присутствие этих особых точек может обусловливаться также наличием некоторых внешних воздействий, которые не учитываются в уравнениях движения.

Начальные условия

В теории дифференциальных уравнений — обыкновенных и в частных производных — большое значение имеет задача Коши, которая, например, для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{1.1}$$

формулируется следующим образом. Найти такое решение $x(t)$ уравнения (1.1), для которого при $t = t_0$ выполняются условия

$$(x)_{t=t_0} = x_0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0} = x_0', \tag{1.2}$$

где t_0, x_0 и x_0' — заданные числа. Из теории дифференциальных уравнений известно, что задача Коши во многих важных случаях имеет единственное решение. Дополнительные условия (1.2) называются начальными данными или данными Коши.

Аналогичным образом можно ввести задачу Коши для дифференциальных уравнений с частными производными и в качестве дополнительных данных для *нестационарных* движений,

в зависимости от вида уравнений, задавать искомые функции и некоторые производные от них по времени при $t = t_0$. Например, при решении динамической задачи для упругого тела с помощью уравнений Ламе ((2.26), гл. IV) нужно задать начальные перемещения и начальные скорости всех точек тела.

При решении задачи об определении неустановившегося движения идеальной однородной несжимаемой жидкости (система уравнений (1.10), гл. IV) достаточно задать распределение скоростей во всей области $\mathcal{D}$ в начальный момент времени.

Если область $\mathcal{D}$ представляет собой безграничное пространство, то в ряде случаев начальных условий достаточно для выделения определенного решения. Число и вид начальных данных зависят от порядка системы уравнений. Однако вопрос о формулировке данных Коши и вопросы о существовании и единственности решения нужно решать в каждом конкретном случае особо.

Краевые условия

Если область $\mathcal{D}$ конечна или бесконечна, но имеет границу S, то, кроме начальных условий, для получения определенных решений необходимо еще выставлять и пользоваться специальными условиями на границе S. Эти условия называются краевыми или граничными условиями. Краевые условия могут быть весьма разнообразного вида. Они выставляются на основании дополнительных физических соображений. Вот некоторые типичные и важные примеры краевых условий.

Условия прилипания на границах для перемещений и для скоростей

Предположим, что положение и движение всей граничной поверхности S или какой-либо ее части S_1 известны. При подходе к граничной поверхности S_1 со стороны среды по определению мы имеем контакт между средой и ее границей S_1, поэтому перемещения индивидуальных точек среды на S_1 и самой поверхности S_1 должны быть связаны условием сохранения контакта. При отсутствии проскальзывания точек среды по касательной к поверхности S_1 векторы перемещений точек среды $\boldsymbol{w}_{\text{среды}}$ и точек поверхности S_1 — $\boldsymbol{w}_{\text{границы}}$ будут одинаковыми.

Например, так может обстоять дело при закреплении упругого тела на опорах заданного типа, при внедрении внешних предметов в «твердую» деформируемую среду или при обтекании вязкой жидкостью твердого тела заданной формы и во многих других случаях.

Очевидно, что при этом на поверхности S_1 имеют место следующие условия:

$$\boldsymbol{w}_{\text{среды}} = \boldsymbol{w}_{\text{границы}}, \qquad \boldsymbol{v}_{\text{среды}} = \boldsymbol{v}_{\text{границы}}. \tag{1.2'}$$

Если движение границы S_1 задано, то при отсутствии проскаль-

зывания вдоль S_1 на этой границе будут иметь место условия (1.2)′, в которых вектор перемещения $w_{\text{границы}}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ и вектор скорости $v_{\text{границы}} = \left(\frac{dw_{\text{гр.}}}{dt}\right)_{\xi^i=\text{const}}$ — известные функции лагранжевых координат ξ^1, ξ^2, ξ^3. Такого рода условия часто встречаются в механике «твердых» деформируемых тел. Условие (1.2′) принимается также в теории движения вязкой жидкости и носит название условия прилипания.

В теории упругости главное значение имеет условие для перемещений, так как перемещениями определяются тензор деформаций и напряжения.

В теории движения жидких и газообразных тел перемещения частиц не входят непосредственно в уравнения движения, в них входят компоненты скорости, поэтому в гидродинамике основную роль играет граничное условие (1.2′) для скоростей.

Очевидно, что при непрерывных движениях условие для скоростей (1.2′) выполняется автоматически, если удовлетворяется условие для перемещений.

Если граница S_1 сместилась из некоторого начального положения в данное, то $w_{\text{границы}}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \neq 0$; если первоначально смещенная граница S_1 остается неподвижной, то после смещения S_1 скорость $v_{\text{границы}}$ будет равна нулю.

Каждое из векторных условий (1.2′) для перемещений или для скоростей равносильно трем скалярным равенствам.

Число начальных и граничных условий зависит от порядка уравнения, и поэтому граничные условия и их число различны для разных моделей.

Условие обтекания для идеальной жидкости

Например, динамические уравнения движения Эйлера для идеальной жидкости содержат только производные первого порядка от компонент скорости.

Уравнения Навье — Стокса для вязкой жидкости содержат вторые частные производные по координатам от компонент скорости. В обоих случаях естественно и удобно рассматривать граничное условие (1.2′) для скоростей.

Однако три условия прилипания (1.2′) для идеальной жидкости чересчур сильны. При условии полного прилипания к стенкам не существует решения уравнений Эйлера, поэтому для идеальной жидкости и газа необходимо допускать возможность проскальзывания частиц жидкости на границе с внешними твердыми или деформируемыми телами.

Для идеальной жидкости условие (1.2′) на S_1 ослабляется и заменяется только одним скалярным условием обтекания

$$v_{n\,\text{жидк}} = v_{n\,\text{границы}} \quad \text{на} \quad S_1, \tag{1.3}$$

где $v_{n\text{жидк}}$ и $v_{n\text{ границы}}$ — нормальные к S_1 составляющие скоростей частиц жидкости и граничной поверхности. Условие (1.3) выражает собой сохранение контакта между жидкостью и заданной поверхностью S_1; по этому условию жидкость не может протекать внутрь тел, соприкасающихся с ней по поверхности S_1, и не может отрываться от поверхности S_1.

На поверхности S_1, ограничивающей некоторые тела, соприкасающиеся с идеальной жидкостью, как правило, имеет место неравенство

$$v_{\tau\text{ жидк}} \neq v_{\tau\text{ тела}}, \tag{1.4}$$

где индексом τ отмечены касательные составляющие скоростей к поверхности S_1. В силу неравенства (1.4) имеет место проскальзывание идеальной жидкости вдоль поверхности S_1, движущейся заданным способом.

Если движение идеальной жидкости потенциально $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi$, то условие (1.3) можно написать в следующем виде:

$$v_{n\text{ жидк}} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = v_{n\text{ гр}} \quad \text{на} \quad S_1.$$

Следовательно, по условию обтекания на границе S_1 задаются значения нормальной производной от потенциала φ. Если граница S_1 неподвижна, то условие (1.3) принимает вид

$$v_{n\text{ жидк}} = 0 \quad \text{на} \quad S_1$$

или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad S_1.$$

На заданных границах, кроме условия (1.2′) или (1.3), для различных моделей можно ставить ряд других условий. Например, на S_1 можно задавать температуру или приток тепла.

При наличии в замкнутой системе уравнений, в которые входят электромагнитные характеристики, на S_1 задаются условия, например, для векторов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{j}$.

При формулировании граничных условий следует опираться на общие условия на поверхностях разрыва, которые мы рассмотрим в следующих параграфах.

Однако уже здесь мы остановимся подробно на весьма распространенных граничных условиях, которые можно сформулировать с помощью условий на поверхностях разрыва.

Условия на свободной границе

Во многих задачах граница S или некоторая ее часть S_2 области непрерывного движения сплошной среды заранее неизвестна и должна быть определена в результате решения задачи. На неизвестной границе S_2 обычно задаются внешние

нагрузки. В теории упругости и других теориях на площадках поверхности S_2 могут быть известны плотности поверхностных сил

$$p_n = p_{nn} + p_{n\tau} = f(M, t), \tag{1.5}$$

где M — точка поверхности S_2. Условие (1.5) дает три соотношения на S_2. Такого рода граничные условия типичны в практике инженерных расчетов различных деталей машин. При изучении вопросов о распространении упругих или сейсмических волн можно рассматривать поверхности, называемые свободными, на площадках которых поверхностные напряжения могут сводиться просто к атмосферному давлению, действующему по n к этим площадкам. В этом случае получим условия

$$p_{nn} = -p_0, \qquad p_{n\tau} = 0, \tag{1.6}$$

где p_0 — величина атмосферного давления.

Граничные условия вида (1.5) или (1.6) встречаются также и в задачах о движении вязкой жидкости, когда ее свободная поверхность является поверхностью контакта с другой вязкой или идеальной жидкостью соответственно, в которой все характеристики движения можно считать известными.

Условия на свободной поверхности в идеальной жидкости

В задачах о движении идеальных жидкостей или газов также часто рассматриваются свободные поверхности. Условие идеальности по определению всегда означает, что $p_{n\tau} = 0$; поэтому на свободной границе в идеальной среде условия (1.6) сводятся только к одному равенству:

$$p = p_0, \tag{1.7}$$

где p_0 — заданная величина давления во внешней среде, которая, например, на неизвестной заранее возмущенной поверхности воды может приниматься равной атмосферному давлению. На практике встречаются случаи, когда заданное давление на свободной поверхности отличается от атмосферного, например, на свободных границах жидкости, частично заполняющей закрытые баки, давление p_0 может быть любым.

При определении движения и формы границ S_2 через искомые компоненты поля скоростей или перемещений требуется также пользоваться равенствами вида (1.2′). При этом надо иметь в виду, что для свободных поверхностей S_2 равенства (1.2′) связывают только нормальные по отношению к S_2 компоненты скорости, так как скорость свободной границы обычно определяется как скорость перемещения этой границы по нормали к ней.

В общем случае требуется решать задачи со смешанными граничными условиями, когда объем движущейся среды частично

ограничен внешними неподвижными заданными стенками или стенками с данными условиями закрепления, а частично — свободными поверхностями. Кроме того, могут быть части границы с иными видами условий, когда граница задается только частично, или заданные границы с более сложными краевыми условиями, представляющими собой некоторые линейные или нелинейные, конечные или дифференциальные соотношения между искомыми функциями. С некоторыми из усложненных условий мы познакомимся в следующих параграфах и во втором томе книги.

Здесь мы ограничиваемся только указанием на необходимость формулировки и разъяснением смысла некоторых видов краевых условий. Формулировка конкретных задач и их решения будут рассмотрены дальше в гидродинамике, теории упругости и теории пластичности (см. т. II).

§ 2. Типичные упрощения в постановках некоторых задач, связанные с уменьшением числа независимых переменных

Математическая задача об определении решений уравнений, описывающих движение и другие физические процессы с точки зрения Эйлера, сводится к отысканию неизвестных функций от четырех переменных x^1, x^2, x^3, t, например скорости, давления, температуры, плотности, электрической и магнитной напряженностей и т. д.

Эта математическая задача во многих случаях очень трудна, и для ее решения требуется вводить дополнительную схематизацию, связанную с постановкой конкретных физических задач, и вносить допустимые упрощения в их математическую постановку.

Наличие большого числа (в данном случае четырех) независимых переменных сильно осложняет задачу.

В ряде задач важные упрощающие предположения, обеспечивающие успех решения, связаны с уменьшением числа независимых переменных или с допущениями о вполне определенной зависимости искомых функций от некоторых из переменных, взятых в соответствующей специально выбранной системе координат частного вида.

Установившиеся движения

Очевидно, что не всегда, но в некоторых практически приемлемых случаях в соответствующей системе координат рассматриваемые движения и многие процессы можно считать установившимися. Это позволяет при использовании точки зрения Эйлера сократить число независимых переменных на единицу, так как исключается время t. Для установившихся движений начальные условия по времени t не нужны, так как во всех уравнениях для

установившегося движения выпадают частные производные по времени. Это обстоятельство, как правило, упрощает решение математических задач.

Плоскопараллельные движения

Движение сплошной среды называется плоскопараллельным, если можно выбрать декартову систему x, y, z так, чтобы скорости всех частиц среды оказались параллельными плоскости (x, y), причем все характеристики движения и состояния представляли бы собой функции только двух координат x, y и, может быть, времени t.

В этом случае движение и состояние частиц среды не зависят от координаты z, движение среды происходит параллельно плоскости (x, y), и движения во всех плоскостях, параллельных плоскости (x, y), одинаковы.

Предположение о плоскопараллельности приемлемо только в частных задачах, например в задаче аэродинамики о движении перпендикулярно к своей образующей бесконечного цилиндрического крыла в газе или жидкости, в некоторых задачах о волнах на поверхности тяжелой жидкости, в ряде задач теории упругости, например в задаче о равновесии длинной цилиндрической балки, поперечное сечение которой находится под действием произвольно расположенных в его плоскости внешних статически равных нулю нагрузок, когда нагрузки не зависят от продольной координаты, а перемещения в продольном направлении запрещены условиями закрепления, и т. д.

Математическая теория эффективного решения задач о плоскопараллельных движениях сильно развита и положена в основу многих приближенных методов для решения пространственных задач, когда предположение о плоскопараллельной схеме для искомых полей в целом недействительно.

Плоскопараллельные потенциальные движения несжимаемой жидкости

Большой успех теории плоскопараллельных движений несжимаемой жидкости связан с тем, что для потенциальных движений потенциал скорости $\varphi(x, y, t)$ является гармонической функцией:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{2.1}$$

Для гармонической функции $\varphi(x, y, t)$ можно определить сопряженную гармоническую функцию $\psi(x, y, t)$ согласно уравнениям Коши — Римана:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \tag{2.2}$$

т. е.

$$d\psi(x, y, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x}dy. \qquad (2.3)$$

Условие интегрируемости (2.3) обеспечивается уравнением (2.1). Функция $\psi(x, y, t)$ называется *функцией тока*. Согласно (2.3) и уравнениям линий тока, $\psi = \text{const}$ вдоль любой линии тока.

Как известно, на основании уравнений Коши — Римана (2.2) можно ввести аналитическую функцию w комплексной переменной $z = x + iy$, где $i = \sqrt{-1}$:

$$w(z) = \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t). \qquad (2.4)$$

Функция $w(z, t)$ называется *характеристической функцией*.

Задачу об отыскании потенциала скоростей $\varphi(x, y)$ можно свести к задаче определения характеристической функции комплексной переменной z.

Для решения этой задачи привлекается мощный аппарат и методы теории функций комплексной переменной. Это позволяет решать много трудных задач и далеко развить гидродинамику потенциальных плоскопараллельных движений несжимаемых жидкостей.

Для установившихся плоскопараллельных движений остается только одна независимая величина — комплексная переменная $z = x + iy$. Это добавочное очень сильное допущение всей теории.

В несколько усложненном виде аналогичные методы решения плоских задач, основанные на приложениях теории функций комплексной переменной, развиты в теории упругости (см. т. II, гл. XI).

Осесимметрические движения

Важным классом задач являются задачи с наличием осевой симметрии. В осесимметрических задачах предполагается, что можно выбрать цилиндрическую систему координат, в которой существенными аргументами искомых функций будут только координаты r, z и t, а угловая координата φ несущественна. Все уравнения и формулы, дающие решение, будут инвариантны относительно поворотов на любой угол вокруг оси z.

В частности, многие проблемы прочности и движения тел вращения, например задачи о трубах, баках, специальных оболочках и т. д. или задачи о поступательном движении внутри жидкостей и газов тел вращения вдоль оси симметрии или их вращении относительно оси симметрии и много других задач, рассматриваются в рамках теории движения сплошных сред с осевой симметрией.

Плоскопараллельные и осесимметричные движения — примеры, когда существенное значение имеют только две геометрические координаты.

Одномерные неустановившиеся движения

Движения и процессы, в которых существенна только одна геометрическая координата, η, называются одномерными движениями. К этому названию добавляется еще слово «неустановившиеся», когда время t существенно. Можно показать [1]), что в жидкости одномерные неустановившиеся движения, в которых перемещения направлены ортогонально к координатным поверхностям $\eta = \text{const}$, возможны только в следующих трех случаях.

Движение с плоскими волнами

1. Движение с плоскими волнами, т. е. движение, при котором можно выбрать декартову систему координат так, что существенными независимыми переменными аргументами будут только координата x (дальше можно применять обозначение $x = r$) и время t. В этом случае на плоскости $x = \text{const}$ (плоскость фазы волны) все характеристики движения одинаковы, т. е. все производные от искомых характеристик движения и процессов по y и z равны нулю.

Движение с цилиндрическими волнами

2. Движение с цилиндрическими волнами, когда можно выбрать цилиндрическую систему координат так, что существенными независимыми переменными аргументами будут только расстояние до оси симметрии r и время t. В этом случае на цилиндрических поверхностях $r = \text{const}$ (поверхности фазы волны) все характеристики движения постоянны, т. е. все производные от искомых величин по z и полярному углу φ равны нулю.

Движение со сферическими волнами

3. Движение со сферическими волнами, когда можно выбрать сферическую систему координат так, что существенными независимыми переменными аргументами будут только расстояние до центра симметрии r и время t. В этом случае на сферах $r = \text{const}$ (поверхности фазы волны) все характеристики движения одинаковы, т. е. все производные от искомых величин по долготе θ и широте φ равны нулю.

Многие важные теоретические и практические задачи рассмотрены в рамках одномерных движений, например задачи теории распространения световых и звуковых волн, теории взрывных волн, теории детонации.

---

[1]) См. Lipschitz, Z. f. reine und angew. Math., т. 100, 1887, стр. 89. См. также Г. А. Любимов, О возможных видах одномерных неустановившихся движений вязкого газа, сб. № 19 «Теор. гидромех.», вып. 7, стр. 132, Оборонгиз, 1956.

Таким образом, указанные выше упрощения сводятся к исключению одной, двух или даже трех (в установившихся одномерных движениях существенна одна переменная r, а в нуль-мерном случае для неустановившихся движений — только одна переменная t) независимых переменных.

Автомодельные движения

Важное значение имеют решения, в которых уменьшение числа аргументов искомых функций достигается за счет существенности только некоторых комбинаций из независимых переменных. Примером таких решений являются автомодельные движения, когда вместо четырех переменных x, y, z, t можно ввести только три существенных независимых аргумента:

$$\frac{x}{t^\alpha}, \quad \frac{y}{t^\alpha}, \quad \frac{z}{t^\alpha},$$

где α — некоторая постоянная.

Для одномерных неустановившихся движений вместо двух переменных r и t для автомодельных движений можно ввести только одну переменную $\lambda = r/t^\alpha$. Очевидно, что в этом случае уравнения с частными производными по r и t перейдут в обыкновенные уравнения с одной независимой переменной λ.

Как мы увидим дальше, наличие автомодельности для искомого решения можно установить непосредственно, исходя из постановки задачи, с помощью соображений теории размерностей. Для этого не требуется даже выписывать уравнения движения и граничные условия; достаточно знать только параметры и характеристики, входящие в эти уравнения и условия. Имея в виду эти соображения, в некоторых случаях можно заранее схематизировать явление и поставить задачу таким образом, чтобы описанные упрощения можно было применить и, в частности, чтобы искомое решение было автомодельным. Автомодельность — весьма ценное свойство решения, так как с точки зрения теории сведение уравнений с частными производными к обыкновенным уравнениям — это уже большое достижение, позволяющее получить численное решение задачи более простыми методами.

§ 3. Линеаризация уравнений и задач механики сплошной среды

Нелинейность проблем механики сплошной среды

Основные уравнения механики сплошной среды, — вообще, нелинейные уравнения. Нелинейность задач механики сплошной среды связана с тем, что искомые функции входят в уравнения и граничные условия в общем случае нелинейно. Например, в уравнения Эйлера (в выражение для ускорения)

входят произведения $u_i (\partial u_k/\partial x^i)$, а в случае движения сжимаемых сред при сильных изменениях плотности и давления в эти уравнения входят еще нелинейные члены $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^k}$.

Уравнения Максвелла линейны для поля в пустоте; нелинейность возникает за счет взаимодействия электромагнитного поля со средой при учете усложненного закона Ома и усложненных законов для электрической поляризации и намагничивания.

С нелинейностью исходных уравнений связано наличие ряда особых физических эффектов, которые в общем случае имеют большое практическое значение. Свойство нелинейности вносит большие трудности в математические методы исследования и разрешения рассматриваемых задач.

Малые возмущения состояния равновесия или основного движения

В некоторых задачах механики сплошной среды исследуемые движения и процессы имеют характер малых возмущений некоторых состояний равновесия или основного движения.

Например, в упругих телах (деталях различных машин и сооружений) деформации часто малы и компоненты тензора деформации, являющиеся в декартовой системе координат отвлеченными числами, имеют порядок долей процента; поэтому большое распространение получила линейная теория бесконечно малых деформаций, в которой произведениями малых величин пренебрегают.

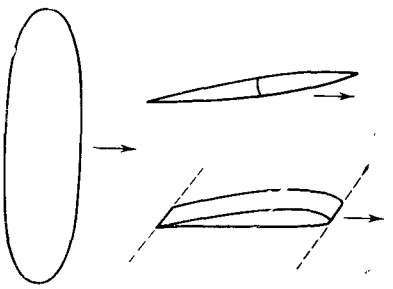


Рис. 42. Движение тонких крыльев и тел вращения.

В теории волн в тяжелой жидкости часто рассматривают такие движения воды, при которых свободная поверхность воды мало отличается от горизонтальной плоскости — спокойного уровня воды; в этом случае величины абсолютной скорости и соответствующих перемещений частиц воды малы.

В аэродинамике часто изучается движение различных тонких тел (крыльев, снарядов и т. п.) в воздухе в направлении их основного размера (рис. 42).

Когда угол наклона скорости полета к элементам поверхности тел мал, это движение вызывает в основной массе воздуха малые скорости возмущения, пропорциональные произведению скорости полета на малые углы наклона поверхности тела к направлению вектора скорости полета.

Примеров, подобных перечисленным выше, можно указать еще очень много. Указанные заключения о малости возмущений искомых функций для перемещений, скоростей, величин плотности, давления, температуры, характеристик электромагнитного поля и т. п., вообще говоря, не строгие, а в отдельных малых областях потока они всегда просто неверны. Однако во многих случаях эти предположения хорошо оправдываются в главной, практически важной области.

Конечно, имеются и такие важные случаи, когда допущения о малости искомых функций совершенно неприемлемы и требуется учитывать существенные нелинейные эффекты.

Линеаризация задач механики сплошной среды

В тех случаях, когда допущение о малости искомых функций является приемлемым, в постановке задач можно произвести линеаризацию, которая сводится к следующим существенным упрощениям:

Линеаризация уравнений

1. Для искомых функций, принимаемых в качестве учитываемых малых первого порядка, все уравнения, дополнительные соотношения типа уравнений состояния, соотношения, выражающие начальные и граничные условия, и т. п. записываются в виде линейных уравнений после пренебрежения малыми порядка выше, чем первый.

Линеаризация граничных условий

2. По предположению деформация границ принимается малой, поэтому граничные условия на деформированной поверхности S, ограничивающей область $\mathcal{D}$, сносятся по нормали к границе S_0 области $\mathcal{D}_0$, соответствующей основному невозмущенному состоянию, на S_0.

Таким образом, искомые функции определяются как решения линейной системы уравнений в известной области $\mathcal{D}_0$ с линейными граничными условиями на известной поверхности S_0. По найденным функциям для возмущенного движения в результате решения краевой задачи в первом приближении можно определить малые деформации границы S.

Например, для упругого тела перемещения его точек определяются как функции координат путем решения линейных уравнений в области недеформированного состояния с линеаризованными граничными условиями на недеформированной границе; по найденным перемещениям можно вычислить малые деформации, а также в первом приближении определить вид деформированной границы. Например, рассматривая, в частности, задачу о малых деформациях упругого бруса с заделанным нижним основанием под действием распределенных сил, граничные условия можно писать на недеформированной поверхности S_0 бруса (рис. 43).

В теории волн малой амплитуды на поверхности тяжелой жидкости граничное условие на свободной поверхности S (условие о постоянстве давления) сносится на горизонтальную плоскость S_0, совпадающую с уровнем покоящейся жидкости (рис. 44).

После отыскания линеаризованного поля скоростей по определенным скоростям на горизонтальном уровне S_0 можно

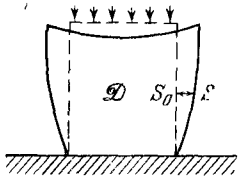


Рис. 43. Упругий брус под действием распределенных сил. Нижнее основание бруса жестко заделано.

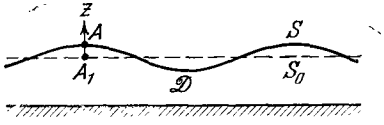


Рис. 44. К линеаризации постановки задач в теории волн малой амплитуды.

вычислить перемещения точек свободной поверхности и таким путем найти с точностью до малых первого порядка форму свободной взволнованной поверхности.

В линеаризованной аэродинамике сложная область $\mathcal{D}$, занятая возмущенным движением газа, с границами, совпадающими с поверхностью тонкого крыла, заменяется внешностью плоской пластинки, к которой по предположению близка поверхность тонкого крыла. Граничные условия обтекания на поверхности обтекаемого крыла с удержанием только малых первого порядка переносятся соответственно на разные стороны плоской пластинки. После этого рассматривается движение жидкости или газа в бесконечном пространстве, а граничная плоская пластинка представляется как поверхность разрыва давления и скорости; разрыв давлений уравновешивается при этом внешними распределенными силами, действующими на жидкость или газ со стороны крыла. В приближенной постановке эти силы действуют на жидкость или газ со стороны пластинки. При рассмотрении движения бесконечной жидкости с разрывом скоростей на поверхности разрыва, соответствующей крылу, необходимо вводить внешние распределенные силы.

Замену внутренности крыла жидкостью путем введения разрывов и внешних поверхностных сил, распределенных по поверхности крыла, можно производить и в точной нелинейной постановке задачи.

Линеаризованные постановки составляют основу теории упругости в рамках теории малых деформаций. Эта теория положена в основу великого множества методов расчета в технических задачах.

В аэродинамике, наряду с линеаризованными теориями, получили широкое развитие нелинейные теории, так как во многих случаях возмущения в потоке нельзя считать малыми.

Теория волн на поверхности тяжелой жидкости и многие проблемы электродинамики и других областей физики развиты в рамках линеаризованных постановок задач. В рамках математически трудной теории волн конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости, когда граничные условия нелинейны и должны удовлетворяться на искомой свободной поверхности, рассмотрено небольшое число задач.

Суперпозиция решений Линейные дифференциальные уравнения обладают замечательным свойством суперпозиции решений. Сумма нескольких частных решений тоже является решением. Для нелинейных уравнений очевидно, что сумма частных решений не является решением. С помощью образования конечных сумм, рядов или интегралов частных решений можно строить решения линейных уравнений механики сплошной среды, содержащие произвольные функции и совокупности постоянных, с помощью выбора которых можно удовлетворять начальным, граничным и другим условиям поставленной задачи. В дальнейшем мы проиллюстрируем это положение на примерах.

Стоячие волны Среди частных решений систем линейных уравнений, содержащих частные производные по времени t от искомых функций, с коэффициентами, не зависящими от t, большое значение имеют решения следующего вида:

$$F = \mathrm{Reel}\,[g(x, y, z, \omega)\, e^{i\omega t}], \tag{3.1}$$

где $i = \sqrt{-1}$, $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ — постоянное, вообще, комплексное число, F — искомые функции. Формула (3.1) определяет зависимость величины функций F от времени, комплексные функции $g(x, y, z, \omega)$ характеризуют распределение амплитуд и фаз по точкам пространства.

Эти функции зависят от «частоты» ω. Поверхности $\arg(g) = \mathrm{const}$ называются фазовыми поверхностями; поверхности, на которых $|g| = 0$, называются узлами, поверхности максимума модуля $|g|$ называются пучностями. Колебания (3.1) можно назвать стоячими. При стоячих колебаниях обычно подразумевается, что в области $\mathcal{D}$ имеются узлы.

В приложениях обычно рассматривают стоячие колебания с фазой, одинаковой во всех точках пространства.

В некоторых случаях, например при жестких закреплениях в точках границы S, граничные условия сводятся к требованию совпадения границ с узлами; в других случаях условия на свободных границах могут сводиться к требованию совпадения участков границ с пучностями. Граничные условия накладывают, вообще говоря, ограничения на допустимые значения частот ω. Если $\omega = \omega_1$ действительно, то зависимость (3.1) искомых величин от времени представляет собой гармонические колебания с различными амплитудами и с, вообще говоря, сдвинутыми фазами в различных точках и для различных величин. При наличии равенства (3.1) проблема сводится к определению функций $g(x, y, z, \omega)$ и частот ω. При $\omega_2 < 0$ происходит нарастание амплитуд, при $\omega_2 > 0$ — затухание.

Для линейных уравнений можно строить более общие решения с помощью метода Фурье, состоящего в суперпозиции стоячих колебаний вида (3.1) с различными ω, которые в одних задачах могут принимать некоторые дискретные значения, а в других образовывать непрерывное множество.

Прогрессивные волны

Другим важным частным видом решений линейных уравнений являются решения типа незатухающей прогрессивной волны следующего вида:

$$F(x, y, z, k, \omega, t) = \operatorname{Reel} g(y, z, k, \omega)\, e^{i(kx-\omega t)}, \qquad (3.2)$$

где k и ω — постоянные действительные числа, g — некоторая комплексная функция. В общем случае имеется некоторое множество допустимых значений ω и k, причем величина k может определяться в зависимости от ω. Решение (3.2) соответствует периодическим распределениям по синусоидам с различными фазами искомых функций — по координате x и времени t.

Фиксированные значения функций F распространяются вдоль оси x со скоростью $a = \omega/k$. Величина a называется скоростью распространения прогрессивной волны, в данном случае синусоидальной волны.

Если для различных ω или k величина a различна, т. е. $a(k) \neq \text{const}$, то имеет место дисперсия волн. Волны различной длины распространяются с различной скоростью.

Для плоской синусоидальной прогрессивной волны, распространяющейся в направлении вектора $\boldsymbol{\varkappa} = \varkappa_1 \boldsymbol{i} + \varkappa_2 \boldsymbol{j} + \varkappa_3 \boldsymbol{k}$, верна формула вида

$$F = \operatorname{Reel} A e^{i(\boldsymbol{\varkappa} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)}, \qquad (3.3)$$

где A — постоянная, а $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор. Скорость распространения волны в этом случае определена формулой $a = \omega/|\boldsymbol{\varkappa}|$,

В общем случае прогрессивной волне не синусоидальной формы с плоскими поверхностями равных фаз соответствуют решения вида

$$F = f(\varkappa \cdot r - \omega t). \tag{3.4}$$

Если $\varkappa$ и ω — постоянные, то плоская волна распространяется вдоль направления вектора $\varkappa$ как твердое тело; если $\varkappa$ и ω — функции состояния частиц, то разные состояния распространяются с различной скоростью, и поэтому форма волны на графике зависимости функции f от координат будет деформироваться.

О линеаризации с помощью специальных переменных

В некоторых частных случаях можно без каких-либо приближений преобразовать нелинейные уравнения к линейным путем перехода к новым специально выбранным независимым переменным.

Линеаризация такого типа встречается в теории установившихся баротропных плоскопараллельных потенциальных движений газа [1]).

§ 4. Условия на поверхностях сильных разрывов

О поверхностях разрыва в механике сплошной среды

До сих пор при введении основных понятий и при установлении систем уравнений, связанных с моделями сплошных сред, предполагалось, что в области $\mathcal{D}$, занятой средой, в точках которой должны выполняться соответствующие уравнения, задаваемые и искомые функции непрерывны и имеют нужное число непрерывных производных.

Такое предположение является очень сильным ограничением, неприемлемым в ряде важных приложений на практике. Действительно, например, при рассмотрении задач о вибрации системы, состоящей из идеальной жидкости и погруженных в нее упругих тел, необходимо рассматривать взаимодействующие сплошные среды с резко различающимися свойствами и характеристиками движения. На поверхностях раздела этих сред такие характеристики состояний и движений, как плотность, скорость, перемещения и т. п., могут быть вообще разрывными функциями координат.

В этом примере при изучении непрерывных движений жидкости и упругих тел поверхности раздела между ними мож-

[1]) Р и м а н, Распространение волн конечной амплитуды, Сочинения, Гостехиздат, 1948. P. M o l e n b r o c k, Archiv Mathem. und Physik, Grunde Hoppe, серия 2, т. 9, 1890. С. А. Ч а п л ы г и н, О газовых струях, Собр. соч., т. II, Гостехиздат, 1948.

но рассматривать как поверхности разрыва, на которых необходимо выставлять для искомых функций специальные условия, играющие роль краевых условий на вообще подвижных и неизвестных заранее границах. С одним подобным простым условием мы познакомились в § 1 этой главы. В общем случае такого рода условия на поверхностях разрывов могут иметь более сложную природу, например, на поверхности взаимодействия с водой тающего или, наоборот, намерзающего льда, погруженного в воду, или на поверхности взаимодействия воздуха с продуктами горения порохового заряда, движущегося и горящего в атмосфере.

Кроме поверхностей разрыва, по разным сторонам которых для описания движения сред используются разные модели, приходится также рассматривать такие подвижные поверхности разрывов плотности, скорости, давления, энтропии и т. п., с различных сторон которых сплошная среда должна рассматриваться в рамках одной модели (например, модели идеального совершенного газа).

В ряде задач газовой динамики для идеального совершенного газа и во многих других случаях требование непрерывности по координатам искомых решений в области $\mathcal{D}$, занятой средой, приводит к отсутствию существования решений. Снятие требования непрерывности и допущение кусочной гладкости искомых решений обеспечивает при соответствующей постановке задачи существование и единственность решения. Получающиеся разрывные решения могут хорошо соответствовать реальным эффектам, наблюдаемым на практике.

Оказывается, что на поверхностях разрыва, сохраняющихся в качестве изолированных поверхностей, отделяющих области непрерывности процессов, между характеристиками движения и состояния на различных сторонах поверхностей разрыва должны выполняться некоторые универсальные соотношения. Здесь мы укажем общие методы для получения таких соотношений и установим эти соотношения фактически.

Дальнейшие выводы условий на поверхности скачков основаны на допущениях, что поверхности разрыва существуют; вопрос о действительном наличии поверхностей разрыва в искомом конкретном решении — специальный вопрос, связанный со свойствами принятой модели и с математическими особенностями рассматриваемой частной задачи.

Разрывные решения можно рассматривать в приближенных методах решения для упрощения задач и для получения эффективных решений и в том случае, когда непрерывные решения также существуют.

О разрывном движении как пределе непрерывных движений для разных усложненных моделей

Хотя на практике часто рассматриваются движения сплошных сред с поверхностями разрыва и признается плодотворность таких подходов и решений, существует распространенная точка зрения, что при описании реальных явлений в рамках механики сплошной среды можно и, вообще говоря, нужно рассматривать только непрерывные движения. В случаях, когда непрерывное решение не существует или перестает существовать начиная с некоторого времени, для получения непрерывных решений необходимо обращаться к другой, более сложной модели, необходимо вводить в уравнения движения дополнительные члены и соотношения для учета в тонких слоях внутри или на границе области $\mathcal{D}$ диссипативных эффектов, возникающих за счет резких градиентов в распределении скоростей, температур, плотностей, давлений и т. п.

Например, можно указать случаи, когда нет непрерывного решения поставленной задачи для уравнений Эйлера в рамках модели идеального совершенного газа, но есть непрерывное решение с резкими изменениями параметров движения и состояния в тонких слоях для уравнений движения Навье — Стокса в рамках модели вязкого газа.

Структура разрывов

Исследование непрерывных решений, отвечающих разрывам в упрощенной модели, для усложненной модели составляет проблему установления структуры скачка. Существование решения, его единственность и фактическое разрешение задачи о структуре разрывов связаны со способами введения усложненных моделей. В случаях большого числа искомых функций или нелинейных уравнений процессов задача о структуре — вообще трудная математическая задача.

Примирение теории непрерывных переходов с теорией, в которой получаются и изучаются разрывные решения, обосновывается допущением о возможности получения разрывных решений в рамках данной простой модели как предела непрерывных решений той же задачи для последовательности усложненных моделей при непрерывном переходе коэффициентов в уравнениях движения усложненной модели к коэффициентам уравнений упрощенной модели. Например, при устремлении коэффициентов вязкости к нулю уравнения Навье — Стокса для вязкого газа переходят в уравнения Эйлера для идеального газа.

Проблема существования и единственности предельного перехода для соответствующих решений — сложная математическая проблема, так как фактическое отыскание такой последовательности решений, как правило, эффективно неосуществимо.

Усложненные модели описываются более сложными уравнениями, имеющими более высокий порядок, причем в рассматриваемом предельном переходе в дифференциальных уравнениях с частными производными в пределе обращаются в нуль коэффициенты при старших производных. Так, например, обстоит дело при переходе от уравнений вязкой жидкости к уравнениям идеальной жидкости.

При переходе от данной модели с разрывными решениями к усложненным моделям с непрерывными решениями усложненные модели можно вводить по-разному, брать различные законы диссипации, различным образом нелинейную вязкость и т. д. Возникает вопрос о независимости предельного перехода от введения вспомогательных усложненных моделей.

Разрывные решения как пределы непрерывных в рамках фиксированной модели

В рамках фиксированной модели эти вопросы решаются несколько проще для таких специальных систем уравнений, которые допускают последовательность непрерывных решений, стремящихся к данному предельному разрывному движению. Такое положение встречается для некоторых систем линейных уравнений с частными производными. Однако такое положение дел имеет место не всегда даже в случае систем линейных уравнений. Это связано с тем, что разрывные движения вообще необратимы и характеризуются конечными потерями механической энергии даже тогда, когда непрерывные движения вообще обратимы.

Например, в случае нелинейных уравнений газовой динамики для адиабатических процессов вообще не существует последовательности непрерывных решений, стремящихся в пределе к рассматриваемому адиабатическому необратимому разрывному решению.

Разрывные решения как пределы непрерывных с подходящими внешними воздействиями

Получение предельных разрывных движений и соответствующих условий на разрывах возможно еще следующим путем. Можно рассматривать последовательности непрерывных движений для данной системы уравнений, в которых в тонких слоях с непрерывным, но резким изменением характеристик движения, вводятся подходящие внешние массовые силы, внешние притоки тепла и других видов энергии. Затем проводятся предельные переходы, в которых суммарные характеристики внешних воздействий либо стремятся к нулю, либо имеют заданное значение в зависимости от свойств разрыва по смыслу изучаемой задачи (несущая поверхность в аэродинамике, поверхность тепловыделения при горении в тонком слое или при какой-либо другой химической реакции и т. п.).

Таким образом, опираясь на уравнения процессов для данной модели, или на системы усложненных уравнений для «близких» моделей, или с помощью искусственных внешних воздействий, всякий раз с помощью некоторых дополнительно явно формулируемых или неявных допущений, можно вообще вводить движения с разрывами как пределы непрерывных движений и получать условия на разрывах.

О целесообразности изучения разрывных решений

Для иллюстрации смысла вопросов о соотношениях между непрерывными и разрывными решениями рассмотрим следующую экзотическую задачу о движении в руках жестикулирующего гостя механической системы, состоящей из бокала, налитого в него вина и кусочков льда, плавающих в вине. Стенки бокала и границы раздела между льдом и вином, очевидно, целесообразно рассматривать как поверхности разрыва плотности вещества. В этом случае, даже при очень детальном механическом исследовании в рамках теории сплошных сред, вряд ли нужно вводить тонкие слои с непрерывным изменением плотности, хотя нельзя совсем исключать подобные трактовки.

Как в этом примере, так и во многих других «практически более важных» случаях (задачу о бокале с вином можно заменить более актуальной задачей о движении топлива и газов, заполняющих баки ракеты, летящей в космическом пространстве) о непрерывных решениях можно говорить только с сугубо теоретической точки зрения, как об источнике получения различных критериев и дополнительных соотношений на разрывах или как об основах для оценки реальности и пригодности фактически определяемых разрывных решений. Если бы мы оставались только в рамках усложненных теорий с тонкими слоями, резких, но непрерывных изменений параметров движения и состояния, то не могло бы быть и речи о получении фактических решений множества задач, уже решенных с использованием внутри и на границах сплошной среды поверхностей разрывов.

Роль интегральных законов для определения модели

Нужда в такого рода предельных переходах отпадает, когда основные физические уравнения формулируются в интегральном виде, в котором непрерывность искомых функций, по существу, не подразумевается. Интегральная формулировка физических законов полностью эквивалентна дифференциальной для непрерывных процессов. Для разрывных процессов интегральная формулировка обладает большей общностью.

Однако при использовании для вывода условий на разрывах интегральных формулировок законов движения и состояния среды также невозможно обойтись без дополнительных гипотез, в частности, необходимо расширять рамки обратимых

или необратимых моделей, необходимо вводить и дополнительный эффект роста энтропии в частицах, проходящих через поверхности сильных разрывов.

О дополнительных условиях на разрывах

К сказанному выше необходимо добавить соображения о свойствах устойчивости сильных разрывов. Дело в том, что на некоторых сильных разрывах могут выполняться все установленные ниже условия и в том числе условия, связанные с ростом энтропии. Тем не менее существуют разрывы, которые не могут реализоваться из-за их неустойчивости, обусловленной видом скачка и свойствами системы дифференциальных уравнений, описывающих непрерывное движение по обеим сторонам от скачка.

Нужно иметь также в виду, что при использовании физически допустимых разрывов (устойчивых и удовлетворяющих универсальным условиям механики и термодинамики) для обеспечения единственности и соответствия действительности искомых решений в некоторых задачах требуется устанавливать на скачках дополнительные соотношения физической природы.

В настоящее время условия устойчивости скачков и дополнительные физические соотношения, упомянутые выше, рассматриваются в магнитной гидродинамике [1]) и в общей математической теории усложненных моделей сплошных сред [2]). В теории скачков для модели совершенного газа эти вопросы не возникают.

О решении задач в классе кусочно-гладких функций

При отыскании решений уравнений в интегральной форме в классе кусочно-гладких функций разрывные решения с учетом определяемого дополнительного роста энтропии на разрывах и других дополнительных условий получаются, вообще говоря, автоматически из постановки задачи.

Построение кусочно-гладких решений для систем дифференциальных уравнений путем обобщения этих уравнений с помощью соответствующих интегральных соотношений приводит к теории обобщенных решений, развитой для линейных уравнений в общей теории дифференциальных уравнений математической физики.

[1]) А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов, О магнитогидродинамических ударных волнах, понизирующих газ, ДАН СССР, т. 129, № 1, 1958. А. Г. Куликовский, А. А. Бармин, Об ударных волнах, ионизирующих газ, находящийся в электромагнитном поле, ДАН СССР, т. 178, № 1, 1968.

[2]) А. Г. Куликовской, О поверхностях разрыва, разделяющих идеальные среды с различными свойствами. Волны рекомбинации в магнитной гидродинамике, ПММ, № 6, 1968.

Теория кусочно-гладких решений может быть построена и естественно развита при формулировке задач физики и механики с помощью вариационных принципов.

Слабые и сильные разрывы

Существуют поверхности слабого и сильного разрыва. Поверхности, на которых искомые функции непрерывны, но разрывны только некоторые их производные по координатам и по времени, называются слабыми разрывами; поверхности, при переходе через которые терпят разрыв сами искомые функции, называются поверхностями сильного разрыва.

Ниже мы рассмотрим условия на поверхностях сильного разрыва. Такие поверхности можно вводить как заданные поверхности с заданными законами их движения в виде внешних связей, или как носители заданных или искомых силовых и других внешних воздействий, или как искомые поверхности без внешних воздействий, форма и движение которых заранее неизвестны и, вообще говоря, должны быть найдены в процессе решения задачи.

Скорость точек поверхности разрыва

Рассмотрим подвижную поверхность S, уравнение которой представлено в виде

$$f(x, y, z, t) = 0. \qquad (4.1)$$

Вследствие движения поверхность S в различные моменты времени t и $t + \Delta t$ занимает различные положения S и S' (рис. 45).

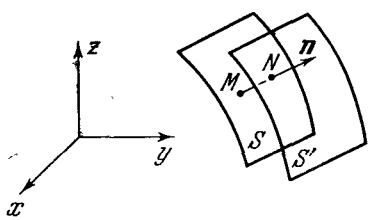


Рис. 45. К определению скорости точек подвижной поверхности.

Возьмем на S в момент t некоторую точку M и предположим, что в точке M существует определенная нормаль к S [1]). Единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}$ в точке M к поверхности S направим в сторону вектора $\overline{MN}$, где точка N является точкой пересечения перемещенной поверхности S' с нормалью к S в точке M.

Знак функции $f(x, y, z, t)$ определим из условия

$$f(M, t) = 0, \; f(N, t) > 0, \quad \text{и поэтому} \quad \boldsymbol{n} = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}. \qquad (4.2)$$

Скоростью перемещения в пространстве поверхности S в точке M называется вектор $\mathcal{D}$, нормальный к S и определяемый

[1]) Определенная нормаль в точках поверхности S существует, когда вектор grad f определен однозначно в каждой точке S; дальше мы исключаем случаи поверхности S с изломами и другими особенностями.

как следующий предел:

$$\mathscr{D} = \boldsymbol{n} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{MN}{\Delta t}. \tag{4.3}$$

Если уравнение (4.1) поверхности S задано, то вектор $\mathscr{D}$ легко вычислить. В самом деле, обозначая через $n_x = \frac{1}{|\operatorname{grad} f|} \frac{\partial f}{\partial x}$, $n_y = \frac{1}{|\operatorname{grad} f|} \frac{\partial f}{\partial y}$, $n_z = \frac{1}{|\operatorname{grad} f|} \frac{\partial f}{\partial z}$ компоненты единичного вектора $\boldsymbol{n}$, можно написать

$$f(x + MNn_x, y + MNn_y, z + MNn_z, t + \Delta t) = 0.$$

Отсюда с точностью до малых высшего порядка получим

$$MN\left(\frac{\partial f}{\partial x} n_x + \frac{\partial f}{\partial y} n_y + \frac{\partial f}{\partial z} n_z\right) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t = 0$$

или

$$MN |\operatorname{grad} f| + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t = 0.$$

Пользуясь этим, по определению (4.3) найдем

$$\mathscr{D} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{|\operatorname{grad} f|} \boldsymbol{n}. \tag{4.4}$$

Очевидно, что $\mathscr{D} = 0$ в каждой точке M на поверхности S, если функция f в уравнении (4.1) не зависит от времени.

При преобразованиях системы координат с переходом к различно движущимся системам вектор скорости $\mathscr{D}$ зависит от выбора системы координат.

Выбор системы координат

Для каждой точки M поверхности S можно указать свою «собственную» систему координат — систему отсчета K^*, в которой скорость $\mathscr{D}$ точки M в данный момент времени обращается в нуль. Здесь слово «собственная» взято в кавычки, так как ранее мы определили собственную систему координат как инерциальную систему, в которой скорость рассматриваемой точки *среды* равна нулю. В этом смысле при подходе к поверхности разрыва скоростей S с различных сторон получатся различные собственные системы, так как скорости точек среды с различных сторон S разные.

Обратимся теперь к установлению условий на поверхности сильного разрыва. Пусть при переходе через гладкую (с определенными нормалями) поверхность S различные характеристики состояний и движения среды терпят разрыв. Возьмем на S некоторую (любую) точку M. Так как все механические, термодинамические, электродинамические и вообще физические

уравнения сохраняют свой вид в любой инерциальной системе координат, то для вывода искомых условий в точке M выберем в качестве системы отсчета «собственную» систему K^*, в которой скорость $\mathscr{D}$ для данной точки поверхности в данный момент времени равна нулю, $\mathscr{D} = 0$.

Выделение объема V, стягиваемого к поверхности разрыва

В связи с некоторой частью изолированной поверхности разрыва S введем в рассмотрение замкнутую поверхность Σ как границу объема, полученного следующим способом. Проведем в каждой точке выделенной части поверхности S нормаль и отложим по нормали в обе стороны от S отрезки длиной $h/2$, где h — весьма малая постоянная длина. Совокупность таких отрезков, проведенных из всех точек рассматриваемого участка поверхности S, образует в данный момент времени соответствующий объем V, ограниченный поверхностью Σ (рис. 46).

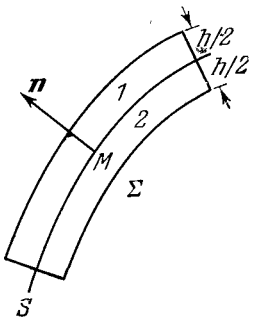


Рис. 46. Схема поверхности разрыва S и замкнутой поверхности Σ.

Теперь в выбранной системе K^* рассмотрим два объема: во-первых, определенный выше объем V, как неподвижный объем, и, во-вторых, объем V^*, как объем подвижный — субстанциональный, связанный с точками материальной среды, причем в рассматриваемый момент времени t оба эти объема совпадают. В следующий момент времени $t + dt$ объем V^* сдвигается относительно своего положения V в момент t. Поверхность разрыва S тоже перемещается внутри объема V, однако рассматриваемая точка M за бесконечно малое время [1]) dt сохраняет свое положение, так как скорость точки M в системе K^* в момент t равна нулю. По определению объем V неподвижен в системе K^*, объем V^*, вообще, подвижен, этот объем неподвижен только в том случае, когда точки среды на поверхности Σ в системе K^* неподвижны или имеют равные нулю нормальные составляющие скорости на Σ.

Из формулы (8.15) гл. II следует, что для любой интегрируемой кусочно-гладкой функции $A(x, y, z, t)$ в системе K^* имеет

[1]) В специальной теории относительности элемент времени dt следует взять в системе K^*, в ньютонианской механике элемент dt не зависит от выбора инерциальной системы координат. В дальнейшем все рассуждения и, в частности, используемое правило сложения скоростей проводятся в рамках ньютонианской механики.

место следующее равенство:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V^*} A\,d\tau = \frac{d}{dt}\int\limits_{V} A\,d\tau + \int\limits_{\Sigma} A v_n\,d\sigma, \tag{4.5}$$

где v_n — проекция скорости точек среды относительно K^* на внешнюю нормаль к Σ.

Предел производной от интеграла по жидкому объему при стягивании его к точке поверхности разрыва

Если поверхность разрыва S внутри V неподвижна, то для производной от интеграла по неподвижному в системе K^* объему V можно написать

$$I = \frac{d}{dt}\int\limits_{V} A\,d\tau = h\frac{d}{dt}\int\limits_{S} A^*\,d\sigma,$$

где A^* — среднее значение функции A на соответствующем отрезке длиной h, перпендикулярном к поверхности S.

Очевидно, что если поверхность S неподвижна, а величина A не зависит явно от времени, то $I = 0$. При неустановившемся движении, когда функция A конечна и непрерывна вместе со своими производными по координатам и по времени с обеих сторон от неподвижной поверхности S (на S могут быть разрывы), величина I является непрерывной функцией от t, исчезающей при стремлении к нулю величины h.

Выбор системы K^* определен условием $\mathscr{D} = 0$ в точке M. В соседних точках поверхности S скорость $\mathscr{D} \neq 0$, и поэтому поверхность S — вообще подвижная поверхность внутри V. Для бесконечно малого элемента поверхности S вблизи точки M скорости $\mathscr{D}$ соседних точек бесконечно малы, поэтому при стягивании объема V к точке M получим

$$\lim_{\substack{\Delta\sigma\to 0\\ h\to 0}} \frac{1}{\Delta\sigma}\frac{d}{dt}\int\limits_{V} A\,d\tau = 0, \tag{4.6}$$

где $\Delta\sigma$ — элемент поверхности S, стягивающийся к точке M.

Будем обозначать характеристики движения и состояния на одной стороне поверхности S индексом 1, на другой — индексом 2. Выберем по условию нумерацию сторон S так, чтобы направление нормали соответствовало переходу со стороны 2 на сторону 1.

Переходя к пределу при $h \to 0$, $\Delta\sigma \to 0$, из (4.5) получим кинематическое равенство

$$\lim_{\substack{\Delta\sigma\to 0\\ h\to 0}} \frac{1}{\Delta\sigma}\frac{d}{dt}\int\limits_{V^*} A\,d\tau = A_1 v_{n1} - A_2 v_{n2}, \tag{4.7}$$

где v_{n1} и v_{n2} — проекции скоростей точек среды с двух

сторон поверхности S на одно и то же положительное направление нормали к S.

С помощью равенства (4.7) в системе отсчета K^* можно выписать все универсальные динамические и термодинамические условия на сильных разрывах для материальных сред. Условия на скачках для электромагнитного поля рассмотрим после этого.

Универсальные уравнения механики и термодинамики

Для удобства выпишем здесь сначала полученные раньше основные уравнения в интегральной форме.

1. Уравнение неразрывности (см. уравнение (1.1) гл. III):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V^*}\rho\, d\tau = 0. \tag{4.8}$$

2. Уравнение импульсов (см. уравнение (2.2) гл. III):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V^*}\rho \boldsymbol{v}\, d\tau = \int\limits_{V}\boldsymbol{F}\rho\, d\tau + \int\limits_{\Sigma}\boldsymbol{p}_n\, d\sigma. \tag{4.9}$$

3. Уравнение моментов (см. уравнение (3.4) гл. III):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V^*}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\rho\, d\tau + \frac{d}{dt}\int\limits_{V^*}\rho\boldsymbol{k}\, d\tau = \\ = \int\limits_{V}\boldsymbol{h}\rho\, d\tau + \int\limits_{\Sigma}\boldsymbol{Q}_n\, d\sigma + \int\limits_{V}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F})\rho\, d\tau + \int\limits_{\Sigma}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_n)\, d\sigma. \tag{4.10}$$

4. Уравнение энергии (см. уравнение (8.1) гл. V):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V^*}\rho\left(\frac{v^2}{2}+U\right)d\tau = \int\limits_{V}\rho\,(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v})\, d\tau + \\ + \int\limits_{\Sigma}(\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{v})\, d\sigma - \int\limits_{\Sigma}q_n^*\, d\sigma + \int\limits_{V}\frac{dq^*_{\text{масс}}}{dt}\rho\, d\tau. \tag{4.11}$$

Здесь q_n^* — полный внешний приток добавочной удельной энергии, как тепловой, так и не тепловой (в том числе работа поверхностных моментов и т. п.), через граничную поверхность Σ, а $dq_{\text{масс}}/dt$ — полный удельный добавочный приток энергии за счет массовых источников энергии за единицу времени. Добавочный приток энергии означает дополнительный приток энергии по сравнению с притоком механической энергии, учтенным в (4.11) первыми двумя членами, равными работе макроскопических массовых и поверхностных сил, входящих в уравнение импульсов.

Здесь и ниже мы рассматриваем только обычно употребляемые модели, для которых внутренняя энергия U и энтропия S — аддитивные функции массы.

5. Уравнение для энтропии, вытекающее из второго закона термодинамики, можно написать в виде

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_{V^*} s\rho\, d\tau = \int\limits_{V} \frac{\rho}{T}\left(\frac{dq^{(e)}}{dt} + \frac{dq'}{dt}\right) d\tau, \quad \frac{dq'}{dt} \geqslant 0. \quad (4.12)$$

Для моделей с обратимыми процессами в области непрерывных движений имеем $dq' = 0$. Однако, как было уже отмечено выше, при рассмотрении сильных скачков с резким изменением характеристик движения предположение об обратимости этого явления приводит к противоречию со вторым законом термодинамики, выраженным уравнением (4.12). В общем случае нельзя заранее считать, что $dq' = 0$ при переходе частиц среды через поверхность разрыва.

При заданных $dq^{(e)}$ и, в частности, при адиабатических процессах уравнение (4.12) может служить соотношением для вычисления правой части (4.12), записанной в виде суммы объемных интегралов, имеющих конечное значение при стягивании объема V к нулю.

Применим теперь уравнения (4.8) — (4.12) к определенному выше объему V^*, содержащему поверхность разрыва S, и воспользуемся в точке M поверхности S формулой (4.7), разделив предварительно правые и левые части равенств (4.8) — (4.12) на элемент площади $\Delta\sigma$ поверхности S.

Поверхностные плотности внешних воздействий на поверхности разрыва

Ниже выпишем условия на поверхности разрыва при следующих предположениях.

1. Все подынтегральные функции в поверхностных интегралах по Σ при стягивании Σ к S имеют конечные значения, но, вообще, различные на разных сторонах S.

2. При $h \to 0$ имеют место следующие предельные равенства:

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{V} \rho \boldsymbol{F}\, d\tau = \int\limits_{S} \boldsymbol{R}\, d\sigma,$$

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{V} \rho \boldsymbol{h}\, d\tau = \int\limits_{S} \mathfrak{M}\, d\sigma,$$

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{V}\left(\rho \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} + \rho\frac{dq^{*}_{\text{масс}}}{dt}\right) d\tau = \int\limits_{S} W\, d\sigma,$$

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{V} \frac{\rho}{T}\left(\frac{dq^{(e)}}{dt} + \frac{dq'}{dt}\right) d\tau = \int\limits_{S} \Omega\, d\sigma,$$

где $\boldsymbol{R}$, $\mathfrak{M}$ и W — поверхностные плотности распределения на S соответствующих внешних для среды сил, моментов, притока энергии, а величина Ω дает плотность распределения на S изменения энтропии за счет внешних притоков тепла и необратимого роста энтропии.

Очевидно, что если $\rho\boldsymbol{F}$, $\rho\boldsymbol{h}$ и $\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}+\rho\frac{dq^{*}_{\text{масс}}}{dt}$ конечны в объеме V, то

$$\boldsymbol{R}=0,\quad \mathfrak{M}=0,\quad W=0. \tag{4.13}$$

В частности, так будет обстоять дело, когда внешние массовые силы являются силами тяжести или силами инерции при рассмотрении относительных движений и вообще для любого непрерывного поля массовых сил, в том числе и для действующих на среду пондеромоторных сил, моментов и притоков энергии, обусловленных электромагнитным полем (см. формулы (5.14), (5.15) и (5.16) гл. IV), когда электромагнитное поле непрерывно на поверхности S.

На важном случае, когда поверхность S является поверхностью разрыва не только механических характеристик, но и характеристик электромагнитного поля, величины $\boldsymbol{R}$ и W вообще отличны от нуля. В следующем параграфе мы дадим формулы для $\boldsymbol{R}$ и W через значения компонент векторов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ на различных сторонах поверхности S.

В разрывах, моделирующих несущие поверхности крыльев, или в случае разрывов — активных дисков, моделирующих водяные или воздушные винты, создающие тягу, величины $\boldsymbol{R}$, W и, может быть, $\mathfrak{M}$ отличны от нуля.

На разрывах, возникающих внутри газовых потоков, в аэродинамике, в теории взрыва и во многих других областях всегда имеют место равенства $\boldsymbol{R}=\mathfrak{M}=W=0$ (но $\Omega\neq 0$). В связи с этим равенство нулю внешних воздействий на скачках является типичным условием, используемым в этих приложениях механики сплошной среды.

Условия на поверхностях разрыва в «собственной» системе отсчета

Из закона сохранения масс на основании равенства (4.7) получим

$$\rho_1 v_{n1}=\rho_2 v_{n2}, \tag{4.14}$$

из уравнения импульсов

$$\boldsymbol{R}+\boldsymbol{p}_{n1}-\rho_1\boldsymbol{v}_1 v_{n1}=\boldsymbol{p}_{n2}-\rho_2\boldsymbol{v}_2 v_{n2}, \tag{4.15}$$

из уравнения моментов

$$\mathfrak{M}+\boldsymbol{Q}_{n1}-\rho_1\boldsymbol{k}_1 v_{n1}=\boldsymbol{Q}_{n2}-\rho_2\boldsymbol{k}_2 v_{n2}, \tag{4.16}$$

из уравнения энергии

$$W + \boldsymbol{p}_{n1}\cdot\boldsymbol{v}_1 - \rho_1\left(\frac{v_1^2}{2} + U_1\right)v_{n1} - q^*_{n1} =$$

$$= \boldsymbol{p}_{n2}\cdot\boldsymbol{v}_2 - \rho_2\left(\frac{v_2^2}{2} + U_2\right)v_{n2} - q^*_{n2} \qquad (4.17)$$

и, наконец, из уравнения для энтропии получим

$$\rho_1 v_{n1} s_1 - \rho_2 v_{n2} s_2 = \Omega. \qquad (4.18)$$

При наличии адиабатичности ($dq^{(e)} = 0$) величина Ω (когда $\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2} \neq 0$), вообще говоря, отлична от нуля. Так как ввиду необратимости $dq' \geqslant 0$, то

$$\Omega = \rho_1 v_{n1}(s_1 - s_2) \geqslant 0. \qquad (4.19)$$

При адиабатических процессах равенство (4.18) можно рассматривать как определение величины Ω, которая для реально осуществимых процессов должна быть неотрицательной.

Установленные соотношения (4.15), (4.16) и (4.17) при заданных или найденных из решения задач значениях скачков всех входящих в них величин могут служить для вычисления внешних воздействий $\boldsymbol{R}$, $\mathfrak{M}$ и W.

О распадении произвольного разрыва

Если равенства (4.13) выполнены, то полученные условия показывают, что скачки различных характеристик движения и состояния не могут быть произвольными. Начальные данные можно задать произвольно, так что соотношения (4.14) — (4.18) могут не выполняться. Это означает, что в следующие моменты времени данный разрыв не может существовать, произойдет распадение начального разрыва, вообще, на несколько разрывов, среди которых могут быть сильные и слабые разрывы. Аналогичное положение возникает при столкновении двух или нескольких разрывов.

Здесь мы не будем рассматривать важную для приложений задачу о распадении произвольного разрыва.

Вид условий (4.14) — (4.19) удобен для приложений, когда разрывы неподвижны, в частности для установившихся движений среды.

Условия на поверхностях разрыва в произвольной системе отсчета

При неустановившихся движениях в разных системах координат поверхности разрыва могут иметь различные по величине и по направлению скорости $\mathscr{D}$. Поэтому требуется дать вид этих соотношений в любой системе отсчета, не связанной с движением каких-либо точек поверхности разрыва.

Для получения таких общих условий в различных точках поверхности S в одной и той же системе координат достаточно во всех уравнениях заменить вектор скорости $\boldsymbol{v}^*$ движения относительно системы K^* через вектор скорости $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{\mathscr{D}}$ ($\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\mathscr{D}}$) относительно фиксированной системы координат K.

Соответствующие условия после использования уравнения сохранения массы и уравнения импульсов можно написать в форме

$$\rho_1(\mathscr{D} - v_{n1}) = \rho_2(\mathscr{D} - v_{n2}), \tag{4.20}$$

$$\boldsymbol{R} + \boldsymbol{p}_{n1} + \rho_1 \boldsymbol{v}_1(\mathscr{D} - v_{n1}) = \boldsymbol{p}_{n2} + \rho_2 \boldsymbol{v}_2(\mathscr{D} - v_{n2}), \tag{4.21}$$

$$W + \boldsymbol{p}_{n1}\cdot\boldsymbol{v}_1 - q^*_{n1} + \rho_1(\mathscr{D} - v_{n1})\left(\frac{v_1^2}{2} + U_1\right) =$$

$$= p_{n2}\cdot\boldsymbol{v}_2 - q^*_{n2} + \rho_2(\mathscr{D} - v_{n2})\left(\frac{v_2^2}{2} + U_2\right), \tag{4.22}$$

$$\rho_1(v_{n1} - \mathscr{D})(s_1 - s_2) = \Omega. \tag{4.23}$$

Величина $W(v)$ в (4.22) равна $W(v^*) + \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{D}$.

Выписанные соотношения на скачках верны в любой системе координат (инерциальной или неинерциальной) и во всех точках поверхности разрыва.

Условия для моментов не выписаны, потому что в дальнейшем рассматриваются только такие модели, для которых $\mathfrak{M} = \boldsymbol{Q}_n = \boldsymbol{k} = 0$ во всех точках области движения.

Скорость поверхности разрыва относительно среды

Легко видеть, что скорости $\mathscr{D} - v_{n1}$ и $\mathscr{D} - v_{n2}$ можно рассматривать как скорости поверхности разрыва относительно частиц среды на различных сторонах разрыва.

Тангенциальный разрыв

Если $\mathscr{D} - v_{n1} = 0$ и $\mathscr{D} - v_{n2} = 0$, то частицы среды не переходят с одной стороны разрыва на другую, а $v_{n1} = v_{n2}$. В этом случае, вообще говоря, возможен разрыв касательной составляющей скорости на различных сторонах разрыва и произвольный разрыв плотностей ($\rho_1 \neq \rho_2$). Такой разрыв называется тангенциальным или касательным разрывом. При касательном разрыве условия (4.21), (4.22) и (4.23) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{R} = \boldsymbol{p}_{n2} - \boldsymbol{p}_{n1}, \\ &W = q^*_{n1} - q^*_{n2} - \boldsymbol{p}_{n1}\cdot\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{p}_{n2}\cdot\boldsymbol{v}_2, \\ &\Omega = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

Следовательно, при $\boldsymbol{R} = 0$ напряжения на площадке поверхности касательного разрыва непрерывны, а работа сил нап-

ряжений на разности касательных (по отношению к разрыву) скоростей при $W = 0$ равна разности потоков энергии q_n^* через разрыв.

Для идеальной жидкости условия (4.24) при $\boldsymbol{R} = 0$ и $W = 0$ сводятся к условиям непрерывности давления и нормальной компоненты вектора потока энергии на поверхности касательного разрыва.

Скачки уплотнения и разрежения

Если $v_{n2} \neq v_{n1}$, то частицы среды переходят с одной стороны поверхности S на другую, изменяя свои характеристики состояния и движения скачком (ударом).

Нетрудно убедиться, что разность $v_{n2} - v_{n1} \neq 0$ не зависит от выбора системы отсчета и от способа нумерации разных сторон S. В самом деле, перемена нумерации меняет направление нормали, т. е. переставляет нормальные составляющие скорости и меняет их знаки.

Установим нумерацию сторон поверхности S таким образом, чтобы среда переходила через S со стороны 1 на сторону 2. Если мы воспользуемся системой отсчета, в которой $v_1 = 0$, то очевидно, что в этом случае в такой системе координат $\mathscr{D}_n > 0$. При этом способе рассмотрения получим, что поверхность S распространяется в покоящейся среде, отмеченной индексом 1.

Очевидно, что если $v_{n2} - v_{n1} > 0$, то при нашем рассмотрении $v_{n2} > 0$ и среда за скачком S набегает на покоящуюся среду перед скачком. Если на скачке выполняется закон сохранения массы (4.20), то для таких скачков $\rho_2 > \rho_1$, т. е. плотность среды за скачком возрастает. Скачки, для которых $v_{n2} - v_{n1} > 0$, называются скачками уплотнения.

Если $v_{n2} - v_{n1} < 0$, то нормальная по отношению к S составляющая скорости среды за скачком направлена в сторону, обратную скорости распространения скачка в неподвижной среде; поэтому в среде за скачком возникает разрежение, т. е. $\rho_2 < \rho_1$. Такие скачки называются скачками разрежения.

Установленные в этом параграфе условия на скачках могут служить источником получения граничных условий для решения дифференциальных уравнений в области непрерывных движений среды.

В ряде случаев можно задать свойства, движение и состояние частиц среды с одной стороны поверхности разрыва, тогда соответствующие характеристики с другой стороны должны удовлетворять найденным соотношениям.

В частности, таким путем можно получить граничные условия на свободных границах жидкости, на границах твердых тел и т. п.

§ 5. Сильные разрывы в электромагнитном поле

Рассмотрим электромагнитное поле, взаимодействующее с материальной средой, и предположим, что в поле имеется поверхность разрыва S. Установим соотношения, которым должны удовлетворять значения электромагнитных характеристик с разных сторон поверхности S. Для получения этих соотношений будем исходить из уравнений Максвелла, записанных в интегральной форме и распространенных на случай электромагнитных полей с наличием поверхности разрыва.

Для удобства выпишем эти уравнения (см. гл. VI, (5.5)). В любой инерциальной системе имеем

$$\int_\Sigma B_n\, d\sigma = 0, \qquad \int_\Sigma D_n\, d\sigma = 4\pi \int_V \rho_e\, d\tau, \tag{5.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \int_{\mathscr{L}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} &= -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_{\Sigma_1} B_n\, d\sigma, \\ \int_{\mathscr{L}} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{r} &= \frac{4\pi}{c}\int_{\Sigma_1} j_n\, d\sigma + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_{\Sigma_1} D_n\, d\sigma \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

и, как следствие этих уравнений, закон сохранения зарядов

$$-\frac{d}{dt}\int_V \rho_e\, d\tau = \int_\Sigma j_n\, d\sigma. \tag{5.3}$$

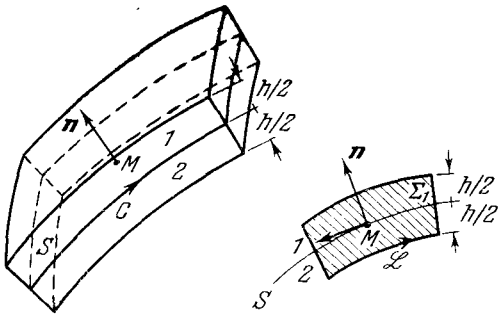
Здесь Σ — замкнутая поверхность, ограничивающая неподвижный объем V, Σ_1 — неподвижная незамкнутая поверхность, ограниченная контуром $\mathscr{L}$.

Пусть M — некоторая точка на поверхности разрыва S и K^* — инерциальная система координат, в которой скорость $\mathscr{D}$ точки M поверхности S равна нулю. Система K^* — «собственная» система координат для точки M; соседние точки на поверхности S могут иметь в системе K^* скорости, отличные от нуля. Примем, что уравнения (5.1) и (5.2) написаны в системе K^*. В уравнениях (5.1) и (5.3) используем объем V, ограниченный поверхностью Σ и определенный так же, как и в § 4. В уравнениях (5.2) в качестве поверхности Σ_1 и контура $\mathscr{L}$ возьмем сечение объема V и поверхности Σ плоскостью, проходящей через векторы нормали $\boldsymbol{n}$ и касательной $\boldsymbol{\tau}$ к S в точке M. Направление вектора $\boldsymbol{\tau}$, касательного в поверхности S, может быть произвольным. По условию направления $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\tau}$ и вектора нормали $\boldsymbol{n}^*$ к Σ_1 образуют правую систему, т. е. $\boldsymbol{n}^* = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\tau}$.

Условия на поверхностях разрыва

Рассмотрим поверхность разрыва S, по обеим сторонам которой векторы $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$ конечны и непрерывны, но при переходе через S могут претерпевать разрыв. Относительно распре-

деления зарядов ρ_e и токов $\boldsymbol{j}$ допустим, что на поверхности S могут быть поверхностные заряды γ и поверхностные токи $\boldsymbol{i}$



Объем V *Поверхность Σ_1*
Поверхность Σ *Контур $\mathcal{L}$*
Контур C

Рис. 47. Схемы областей интегрирования для получения условий на поверхности разрыва.

(векторы, лежащие в касательной плоскости к поверхности S), определяемые в точке M с помощью предельных переходов:

$$\lim_{V\to M}\frac{1}{\Delta\sigma}\int\limits_{V\approx h\Delta\sigma}\rho_e\,d\tau=\gamma(M), \tag{5.4}$$

$$\lim_{\substack{\Delta\sigma\to M\\ h\to 0}}\frac{h}{\Delta\sigma}\int\limits_{\Sigma_1\approx\Delta\sigma}\boldsymbol{j}_\tau\,d\sigma=\boldsymbol{i}(M), \tag{5.5}$$

где $\Delta\sigma\to 0$ — элемент поверхности S или Σ_1, стягивающийся в точку M, $\boldsymbol{j}_\tau$ — векторная составляющая объемной плотности тока, параллельная касательной плоскости к S в точке M.

Из уравнений (5.1) и (5.3) с учетом (5.4) таким же путем, как в § 4, получим

$$B_{n1}-B_{n2}=0,\qquad D_{n1}-D_{n2}=4\pi\gamma \tag{5.6}$$

и

$$\operatorname{div}\boldsymbol{i}+j_{n1}-j_{n2}=-\frac{\partial\gamma}{\partial t}, \tag{5.7}$$

где

$$\operatorname{div}\boldsymbol{i}=\lim_{C\to M}\frac{1}{\Delta\sigma}\int\limits_C i_n\,dl=\nabla_1 i^1+\nabla_2 i^2,$$

C — замкнутый контур, стягивающийся к точке M на поверхности разрыва S; i_n — нормальная составляющая на контуре C вектора $\boldsymbol{i}$; $\Delta\sigma$ — площадь элемента поверхности S, ограниченного контуром C; div $\boldsymbol{i}$ — двумерная дивергенция вектора $\boldsymbol{i}$, определенная на поверхности S; i^1 и i^2 — компоненты вектора $\boldsymbol{i}$, а ∇_k — ковариантные производные в системе координат на поверхности S.

Аналогичным путем из уравнений (5.2) после перехода к пределу при $h \to 0$ и затем при стягивании дуги контура $\mathcal{L}$ к точке M получаем

$$\boldsymbol{E}_{\tau 1} - \boldsymbol{E}_{\tau 2} = 0, \tag{5.8}$$

$$H_{\tau 1} - H_{\tau 2} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\tau}).$$

Очевидно, что последнее равенство в векторном виде можно написать так:

$$\boldsymbol{H}_{\tau 1} - \boldsymbol{H}_{\tau 2} = \frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{n}), \tag{5.9}$$

где $\boldsymbol{H}_{\tau 1}$ и $\boldsymbol{H}_{\tau 2}$ векторные составляющие вектора $\boldsymbol{H}$, параллельные касательной плоскости к S в точке M.

Система условий (5.6) — (5.9) образует полную систему соотношений на поверхности разрыва для электромагнитных характеристик с учетом поляризации, намагничивания и токов. Эти соотношения написаны в «собственной» для точки M инерциальной системе K^*, в которой скорость точки M поверхности разрыва $\mathcal{D} = 0$.

На основании общих формул, выполняющихся при преобразованиях Лоренца от системы K^*, движущейся со скоростью $\mathcal{D}$ относительно фиксированной «неподвижной» инерциальной системы отсчета K, к системе K (см. формулы (3.22), (3.23) гл. VI), можно переписать условия (5.6), (5.8) и (5.9) в системе K:

$$B_{n1} - B_{n2} = 0, \qquad D_{n1} - D_{n2} = 4\pi\gamma^*, \tag{5.10}$$

$$\boldsymbol{E}_{\tau 1} - \boldsymbol{E}_{\tau 2} = \frac{1}{c}[(\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2)\times\mathcal{D}]_\tau, \tag{5.11}$$

$$\boldsymbol{H}_{\tau 1} - \boldsymbol{H}_{\tau 2} + \frac{1}{c}[(\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2)\times\mathcal{D}]_\tau = \frac{4\pi}{c}\sqrt{1 - \frac{\mathcal{D}^2}{c^2}}\,(\boldsymbol{i}^*\times\boldsymbol{n}). \tag{5.12}$$

Здесь $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — нормальные и касательные направления к поверхности разрыва S. Скорость $\mathcal{D}$ вычислена в системе K и направлена по нормали к S. Величина γ^* и вектор $\boldsymbol{i}^*$ определены в собственной системе координат. Формула (5.7), при пренебрежении членами порядка $\mathcal{D}^2/c^2$ при $\gamma = \gamma^*$ и $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}^*$ сохраняет свой вид.

Поверхностные плотности пондеромоторных сил и притоков энергии от поля к среде на поверхности разрыва

Рассмотрим теперь формулы для компонент вектора поверхностной плотности пондеромоторной силы $\boldsymbol{R}$ и поверхностной плотности притока энергии W к среде на поверхности S разрыва электромагнитных величин. В декартовой системе координат для компонент объемной силы [1]) по определению имеем

$$-\rho F^{\alpha} = \nabla_k S^{\alpha k} = \frac{\partial S^{\alpha 1}}{\partial x^1} + \frac{\partial S^{\alpha 2}}{\partial x^2} + \frac{\partial S^{\alpha 3}}{\partial x^3} + \frac{\partial S^{\alpha 4}}{\partial t}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

и (5.13)

$$-F_4 = \nabla_k S_4{}^k = \frac{\partial S_4{}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial S_4{}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial S_4{}^3}{\partial x^3} + \frac{\partial S_4{}^4}{\partial t}, \tag{5.14}$$

где S^{ik} — компоненты тензора энергии — импульса. Умножим обе части равенств (5.13) и (5.14) на элемент объема $d\tau = dx^1 dx^2 dx^3$ и проинтегрируем по неподвижному объему V в системе K^* для данной точки M на S (см. рис. 47). После применения формулы Гаусса — Остроградского получим

$$\int_V \rho F^{\alpha}\, d\tau = -\int_{\Sigma} S^{\alpha\beta} n_\beta\, d\sigma - \frac{d}{dt}\int_V S^{\alpha 4}\, d\tau, \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{5.15}$$

$$\int_V F_4\, d\tau = -\int_{\Sigma} S_4{}^{\beta} n_\beta\, d\sigma - \frac{d}{dt}\int_V S_4{}^4\, d\tau, \tag{5.16}$$

где n_β — компоненты единичного вектора $\boldsymbol{n}$ нормали к Σ в трехмерной декартовой системе координат.

Воспользуемся для компонент S^{ik} тензора энергии — импульса формулой Минковского ((5.10′) гл. VI):

$$S^{ik} = -\frac{1}{4\pi}\left[F_m^{\cdot i} H^{mk} - \frac{1}{4} g^{ik} F_{mn} H^{mn}\right]. \tag{5.17}$$

---

[1]) В используемой системе координат с метрикой

$$ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} + c^2 dt^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j, \quad dx^4 = dt$$

контравариантные компоненты четырехмерной силы F^{α} равны в пространственной декартовой системе координат компонентам обычной трехмерной силы:

$$F^{\alpha} = F^{\alpha}_{\text{трехм}} = F_{\alpha\,\text{трехм}}, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Для ковариантных четырехмерных компонент имеем

$$F_{\alpha} = -F^{\alpha} = -F^{\alpha}_{\text{трехм}}, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Здесь F^{α} — массовые силы. В формуле (5.10″) гл. VI даны компоненты объемной силы.

Матрицу для S^{ik} можно написать в виде

$$\|S^{ik}\| = \begin{Vmatrix} S^{11} & S^{12} & S^{13} & S^{14} \\ S^{21} & S^{22} & S^{23} & S^{24} \\ S^{31} & S^{32} & S^{33} & S^{34} \\ S^{41} & S^{42} & S^{43} & S^{44} \end{Vmatrix}.$$

Если воспользоваться матричными определениями (5.6) и (5.7) гл. VI для $\|F_{ij}\|$ и $\|H^{ij}\|$ и учесть, что

$$\|F^{i}_{m\cdot}\| = \|F_{mj}g^{ji}\| = \begin{Vmatrix} 0 & -B^3 & B^2 & \frac{1}{c}E_1 \\ B^3 & 0 & -B^1 & \frac{1}{c}E_2 \\ -B^2 & B^1 & 0 & \frac{1}{c}E_3 \\ cE_1 & cE_2 & cE_3 & 0 \end{Vmatrix},$$

то получим в декартовых координатах следующие выражения для компонент тензора S^{ik} через компоненты векторов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$:

$$S^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi}\left[E^\alpha D^\beta + H^\alpha B^\beta + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})\right], \quad (5.18)$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ и учтено, что в трехмерной декартовой системе $E_\alpha = E^\alpha$ и $D_\beta = D^\beta$;

$$S^{\alpha 4}\boldsymbol{e}_\alpha = \frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}), \qquad S^{\alpha}_{\cdot 4}\boldsymbol{e}_\alpha = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}), \quad (5.19)$$

$$S^{4\alpha}\boldsymbol{e}_\alpha = \frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}), \qquad S^{\alpha}_{4\cdot}\boldsymbol{e}_\alpha = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}), \quad (5.20)$$

$$S^{4}_{4\cdot} = \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}); \quad (5.21)$$

здесь $\boldsymbol{e}_\alpha$ — векторы базиса в трехмерной системе координат.

Подчеркнем еще раз, что в формулах (5.18), (5.19) и (5.20) компоненты тензора S^{ij} определены в четырехмерной системе координат, для которой

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} + c^2\,dt^2.$$

Это замечание нужно иметь в виду при сравнении написанных здесь формул с формулами в некоторых других книгах, в которых используются другие определения для g_{ij}.

Таким образом, подынтегральные величины в (5.15) и (5.16) выражаются через $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$, которые по предположению на S и в объеме V конечны.

Совершая в равенствах (5.15) и (5.16) указанные в § 4 предельные переходы к точке M на поверхности разрыва S, получим

$$R^\alpha = (S^{\alpha\beta})_2 n_\beta - (S^{\alpha\beta})_1 n_\beta \tag{5.22}$$

и

$$W = (S_4{}^\beta)_2 n_\beta - (S_4{}^\beta)_1 n_\beta. \tag{5.23}$$

Формулы (5.22) и (5.23) на основании формул (5.18) и (5.20) приводят к следующим выражениям для R^α и W через $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$, и $\boldsymbol{D}$ в системе K^* для точки M:

$$R^\alpha = -\frac{1}{4\pi}\left[E^\alpha D_n + H^\alpha B_n + \frac{n^\alpha}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})\right]_2 + \\ + \frac{1}{4\pi}\left[E^\alpha D_n + H^\alpha B_n + \frac{n^\alpha}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})\right]_1, \tag{5.24}$$

$$W = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_1)\cdot\boldsymbol{n}. \tag{5.25}$$

Эти выражения можно подставлять в соотношения на скачках (4.14) — (4.17) для материальной среды. Так как формулы (5.15) гл. VI показывают, что плотности объемных пондеромоторных моментов конечны даже при наличии скачков $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$, то очевидно, что в условиях на разрывах для моментов поверхностные плотности пондеромоторных моментов будут равны нулю.

§ 6. Поверхности разрыва внутри идеальных сжимаемых сред

Рассмотрим теперь более детально условия (и вытекающие из них следствия) на поверхностях сильных разрывов в идеальных сжимаемых средах, введенных в § 1 гл. IV. В этих случаях по определению внутренние напряжения могут быть только давлениями: $\boldsymbol{p}_n = -p\boldsymbol{n}$. Кроме того, в этом параграфе мы рассмотрим такие поверхности разрыва, на которых не происходит никаких поверхностных внешних воздействий на данную среду, т. е. примем $\boldsymbol{R} = 0$, $W = 0$; будем также считать, что $q_n^* = 0$ на поверхности разрыва, в частности, не будем учитывать на скачке свойства теплопроводности среды.

Условия на неподвижном разрыве

При рассмотрении движения среды относительно «собственной» системы координат K^* для данного элемента поверхности разрыва S можно написать условие (4.14):

$$\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2}. \tag{6.1}$$

Дальше примем, что нормальная составляющая к S скорости $v_{n1} \neq 0$, поэтому происходит переход частиц с одной стороны поверхности разрыва на другую. Тогда из (4.15) для идеальной среды получаем

$$v_{\tau 1} = v_{\tau 2}, \tag{6.2}$$

где $v_{\tau i}$ — векторные составляющие v, параллельные касательной плоскости к S в точке M.

С учетом (6.1) и (6.2) из уравнения импульсов (4.15) в проекции на нормаль к S получим

$$\rho_1 v_{n1}^2 + p_1 = \rho_2 v_{n2}^2 + p_2. \tag{6.3}$$

Уравнение энергии с учетом (6.1) и (6.2) приводится к виду

$$U_1 + \frac{v_{n1}^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} = U_2 + \frac{v_{n2}^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2}. \tag{6.4}$$

И, наконец, равенство (4.18) для скачка энтропии с учетом (6.1) дает

$$\rho_1 v_{n1} (s_1 - s_2) = \Omega. \tag{6.5}$$

Напоминаем, что в соотношениях (6.1) — (6.5) скорости взяты относительно системы K^*, в которой точка M поверхности разрыва имеет скорость, равную нулю.

При установившемся движении с неподвижными скачками можно принять, что K^* совпадает с основной, «неподвижной» системой отсчета.

Распространение разрыва по частицам среды

Из (6.1) видно, что v_{n1} и v_{n2} имеют одинаковый знак. Если ввести систему отсчета K, в которой скорость перед скачком равна нулю, а $\mathcal{D} > 0$, то можно воспользоваться в системе K соотношениями на скачке (6.1) — (6.5), в которых надо положить

$$v_{n1} = -\mathcal{D}, \quad v_{n2} = v_n - \mathcal{D}$$

и

$$v_{\tau 1} = v_{\tau 2} = 0,$$

где $v_n = v_{n2} - v_{n1}$ — нормальная составляющая к S скорости среды относительно системы K на стороне, отвечающей индексу 2. В этом случае величину $\mathcal{D}$ можно рассматривать как скорость распространения поверхности разрыва по частицам среды со стороны 1. Дальше будем пользоваться так определенной величиной $\mathcal{D}$, а для упрощения формул вместо плотности ρ введем удельный объем $V = 1/\rho$.

Легко видеть, что соотношения (6.1) и (6.3) равносильны следующим равенствам:

$$-v_{n2} = V_2\sqrt{\frac{p_2-p_1}{V_1-V_2}}, \qquad -v_{n1} = \mathcal{D} = V_1\sqrt{\frac{p_2-p_1}{V_1-V_2}}, \tag{6.6}$$

$$v_{n2} - v_{n1} = v_n = \mathcal{D}\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = \pm\sqrt{(p_2-p_1)(V_1-V_2)}. \tag{6.7}$$

Так как $\mathcal{D} > 0$, то знак плюс в (6.7) соответствует $\rho_1 < \rho_2$, а знак минус $\rho_1 > \rho_2$. Соотношение (6.4), если из него исключить скорости, приводится к виду

$$U_2 - U_1 = \frac{1}{2}(p_2+p_1)(V_1-V_2). \tag{6.8}$$

Из (6.6) видно, что если $V_1 > V_2$, т. е. $\rho_2 > \rho_1$, то обязательно $p_2 > p_1$, и, наоборот, если $\rho_2 < \rho_1$, то $p_2 < p_1$.

Скачки уплотнения и разрежения

Разрывы, для которых имеют место неравенства

$$v_n > 0, \quad \rho_2 > \rho_1, \quad p_2 > p_1, \tag{6.9}$$

называются скачками уплотнения.

Скачки разрежения определены неравенствами

$$v_n < 0, \quad \rho_2 < \rho_1, \quad p_2 < p_1. \tag{6.10}$$

Одно из трех неравенств в (6.9) или (6.10) влечет за собой выполнение двух других.

Свойства (6.9) и (6.10) имеют весьма общий характер и являются следствиями только закона сохранения массы и уравнения количеств движения, когда на поверхности скачка нет действующих на среду внешних поверхностных сил и внешних притоков масс.

О скачке внутренней энергии

Соотношение (6.8) не содержит скоростей, выполняется в любой системе отсчета и удобно для изучения изменения плотности и давления частиц, проходящих через скачок.

Если скачок плотности задан, то в некоторых важных случаях из (6.8) можно определить скачок давления; после этого соответствующие скорости определяются из равенств (6.6) и (6.7).

В общем случае внутренняя энергия для однородной идеальной материальной среды является функцией удельного объема V (плотности ρ), давления p и некоторых других параметров, задающих физические и химические свойства среды; физическими параметрами в общем случае могут быть также векторы поляризации и намагничивания; эти параметры могут изменяться скачком при переходе через поверхность разрыва.

С таким положением мы встречаемся, например, при исследовании явлений распространения фронта горения, фронта детонации, различных фронтов электромагнитных волн и т. п.

Например, для совершенного газа имеем

$$U = c_V T + U_0 = \frac{c_p}{c_p - c_V}\frac{p}{\rho} + U_0,$$

где c_p и c_V — удельные теплоемкости, а U_0 — постоянная для данного газа величина. При переходе через скачок состав газа может меняться, и поэтому c_p, c_V и U_0 могут претерпевать скачок. Если газ представляет собой смесь совершенных газов, то

$$U = \sum_i \frac{\rho_i}{\rho}\left(U_{0i} + \int_{T_0}^{T} c_{Vi}(T)\,dT\right),$$

где ρ_i / ρ — массовая доля i-й компоненты газа в смеси. При переходе через поверхность разрыва отношения ρ_i/ρ могут изменяться скачком, для определения этих скачков необходимо привлекать дополнительные физико-химические законы и допущения. При повышении температуры смеси можно рассматривать сгорание (полное или неполное), учитывать явления диссоциации или ионизации и т. п.

Если физико-химические свойства среды при переходе частиц через скачок не меняются, а изменяются только плотность ρ и давление p, то соотношение (6.8) при фиксированных p_1 и ρ_1 определяет связь между значениями давления p_2 и плотности ρ_2 за скачком.

Адиабата Гюгонио

Если обозначать графически состояния p, $V = 1/\rho$ точками на плоскости (p, V), то для заданных p_1, V_1 равенство (6.8) определит кривую в этой плоскости. Эта кривая называется адиабатой Гюгонио (рис. 48).

Точка p_1, V_1, отвечающая состоянию перед скачком, будет принадлежать адиабате Гюгонио, если

$$U_2(p_1, V_1) - U_1(p_1, V_1) = 0, \tag{6.11}$$

т. е. если функция $U_2(p, V)$ совпадает с функцией $U_1(p, V)$. Равенство (6.11) может выполняться, если все другие параметры, кроме p и V, и постоянные, от которых может зависеть внутренняя энергия, остаются неизменными при переходе через скачок. При наличии необратимых химических реакций или других каких-либо процессов равенство (6.11) может не выполняться, и в этих случаях точка p_1, V_1 может не принадлежать адиабате Гюгонио [1]).

[1]) Более полно теория адиабаты Гюгонио изложена, например, в цитированной книге Л. И. Седова «Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики».

Рассмотрим случай разрывов, когда равенство (6.11) имеет место. Очевидно, что при заданных p_1, V_1 для определения точки p_2, V_2 на адиабате Гюгонио достаточно задать только одну из величин:

$$p_2, \quad \text{или} \quad \rho_2 = \frac{1}{V_2}, \quad \text{или}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} = \frac{\mathcal{D}^2}{V_1^2}. \quad (6.12)$$

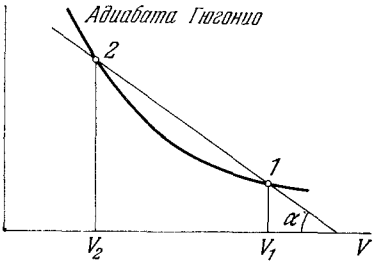


Рис. 48. Адиабата Гюгонио.

Угол α определяет угловой коэффициент прямой — секущей адиабаты Гюгонио, соответствующей состояниям перед скачком *1* и за скачком *2*. Очевидно, что угол α характеризует скорость $\mathcal{D}$ распространения скачка по частицам среды в состоянии *1*.

Изменение энтропии вдоль адиабаты Гюгонио

Вычислим теперь изменение энтропии s вдоль адиабаты Гюгонио. Для этого между некоторым фиксированным состоянием p_1, V_1 и произвольным состоянием p, V, принадлежащими адиабате Гюгонио, рассмотрим некоторый обратимый процесс с притоком тепла, для которого верно равенство

$$T\,ds = dU + p\,dV. \quad (6.13)$$

Подставим в (6.13) dU из (6.8) и при фиксированных p_1, V_1 после простых преобразований получим

$$T\,ds = \frac{1}{2}(V_1 - V)\,d(p - p_1) - \frac{1}{2}(p - p_1)\,d(V_1 - V).$$

С помощью (6.12) будем иметь

$$T\,ds = \frac{1}{2}(V_1 - V)^2\,d\frac{p - p_1}{V_1 - V} = \frac{1}{2}(V_1 - V)^2\,d\operatorname{tg}\alpha =$$

$$= -\frac{1}{2}(p - p_1)^2\,d\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \quad (6.14)$$

Изменение энтропии вдоль адиабата Гюгонио при малом скачке давления

Вдоль адиабаты Гюгонио на основании равенства

$$d\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -d\frac{V - V_1}{p - p_1} = -d\left[\left(\frac{dV}{dp}\right)_{p=p_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dp^2}\right)_{p=p_1}(p - p_1) + \ldots\right] = -\frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dp^2}\right)_{p=p_1} dp +$$

$$+ O(p - p_1)\,dp,$$

где $O(p-p_1)$ — малая величина, исчезающая вместе с $p-p_1$, из (6.14) получим

$$T\,ds=\frac{1}{4}(p-p_1)^2\frac{d^2V}{dp^2}\,dp+(p-p_1)^2\,O(p-p_1)\,dp. \quad (6.14')$$

Отсюда следует, что при малых $p-p_1$ верно равенство

$$T^*\Delta s=\frac{1}{12}(p-p_1)^3\left(\frac{d^2V}{dp^2}\right)_{p=p_1}+ \\ +\text{малая порядка выше, чем } (p-p_1)^3, \quad (6.15)$$

где T^* — некоторое среднее значение температуры в интервале интегрирования.

Из формулы (6.15) видно, что при малых скачках давления $p-p_1$ изменение энтропии при переходе через скачок будет малой величиной порядка $(p-p_1)^3$.

Адиабата Пуассона

В непрерывных адиабатических движениях при изменении состояний частицы энтропия сохраняется, т. е.

$$s_2(p,\ V)-s_1(p_1,\ V_1)=\Delta s=0. \quad (6.16)$$

Уравнение (6.16) при заданных p_1, V_1 определяет связь между p и V. Соответствующая кривая в плоскости $(p,\ V)$, проходящая через точку p_1, V_1, называется, как известно, адиабатой Пуассона.

Адиабаты Пуассона и Гюгонио в точке p_1, V_1 имеют касание второго порядка

На основании (6.15) и (6.16) при малой разности $p-p_1$ уравнения адиабат Пуассона и Гюгонио можно представить в виде

$$V-V_1=f(p-p_1,\ s=\text{const}) \quad (6.17)$$

для адиабаты Пуассона и

$$V-V_1=f(p-p_1,\ s=\text{const})+k(p-p_1)^3+\ldots \quad (6.18)$$

для адиабаты Гюгонио соответственно; коэффициент k зависит только от V_1 и p_1. Следовательно, вблизи точки p_1, V_1 эти адиабаты — близкие кривые (рис. 49).

Из (6.17) и (6.18) видно, что в точке p_1, V_1 обе адиабаты имеют одинаковые касательные и одинаковые кривизны, т. е.

$$\left(\frac{dV}{dp}\right)_{\text{Г}}=\left(\frac{dV}{dp}\right)_{\text{П}}=\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s$$

и

$$\left(\frac{d^2V}{dp^2}\right)_{\text{Г}}=\left(\frac{d^2V}{dp^2}\right)_{\text{П}}=\left(\frac{\partial^2V}{\partial p^2}\right)_s. \quad (6.19)$$

Очевидно, что полные производные от удельного объема V вдоль адиабаты Пуассона представляют собой просто частные производные от удельного объема $V(p, s)$, выраженного

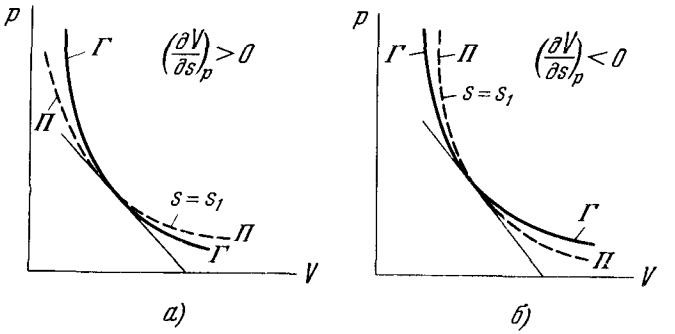


Рис. 49. Взаимное расположение адиабат Пуассона ($П$) и Гюгонио ($Г$) при $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0$.

с помощью уравнений состояния в функции двух независимых переменных p и s.

Слабые скачки распространяются по частицам со скоростью звука

Из (6.6) и (6.19) легко получим, что для слабых скачков при $p_2 \to p_1$ и $V_2 \to V_1$ верны равенства

$$\mathscr{D}^2 = -V^2 \frac{dp}{dV} = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_Г = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_П = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s. \qquad (6.20)$$

Величина

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \qquad (6.21)$$

называется скоростью звука, и видно, что бесконечно малые возмущения — слабые скачки распространяются по частицам со скоростью звука, т. е.

$$\mathscr{D} = a.$$

Взаимное расположение адиабат Гюгонио и Пуассона вблизи точки p_1, V_1

Для обычных сред выполняются неравенства

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p > 0. \qquad (6.22)$$

Например, для совершенного газа (см. (7.4') и (4.3) гл. V)

имеем

$$\left.\begin{aligned} U = c_V T_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} e^{\frac{s-s_0}{c_V}} + \text{const} = c_V T + \text{const} = \\ = \frac{1}{\gamma-1} pV + \text{const} \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{p}{p_0} = e^{\frac{s-s_0}{c_V}} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma},$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{V}{V_0} = e^{\frac{s-s_0}{c_p}} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/\gamma}; \end{aligned}\right\} \qquad (6.23)$$

отсюда

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s = \frac{(1+\gamma)\, p_0}{\gamma^2 \rho_0} \frac{e^{\frac{s-s_0}{c_p}}}{p^{2+1/\gamma}} > 0$$

и

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{V}{c_p} > 0. \end{aligned}\right\}$$

Из неравенства $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0$, следует, что адиабата Пуассона направлена вогнутостью вверх. Если $(\partial V/\partial s)_p > 0$, то $s > s$ выше, а $s < s_1$ ниже адиабаты Пуассона; если $(\partial V/\partial s)_p < 0$, то наоборот, $s < s_1$ выше и $s > s_1$ ниже адиабаты Пуассона (см. рис. 49, *а* и *б*). Так как на адиабате Гюгонио выполняется равенство (6.15), то очевидно, что вблизи точки p_1, V_1 адиабата Гюгонио, касаясь адиабаты Пуассона, при возрастании V переходит сверху вниз, как указано на рис. 49, *а*, когда $(\partial V/\partial s)_p > 0$. Если $(\partial V/\partial s)_p < 0$, то расположение адиабат получается обратным.

Уравнения адиабат Пуассона и Гюгонио для совершенного газа

Согласно (6.23) уравнения адиабаты Пуассона и адиабаты Гюгонио (6.8) для совершенного газа соответственно имеют вид

$$pV^{\gamma} = p_1 V_1^{\gamma} \qquad (6.24)$$

и

$$\frac{1}{\gamma-1}(pV - p_1 V_1) = \frac{1}{2}(p + p_1)(V_1 - V). \qquad (6.25)$$

Адиабата Пуассона имеет асимптоты $V = 0$ и $p = 0$. Адиабата

Гюгонио представляет собой гиперболу с асимптотами.

$$V = V_1 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad \text{и} \quad p = -p_1 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}.$$

Общий вид этих кривых указан на рис. 50. Ясно, что адиабата

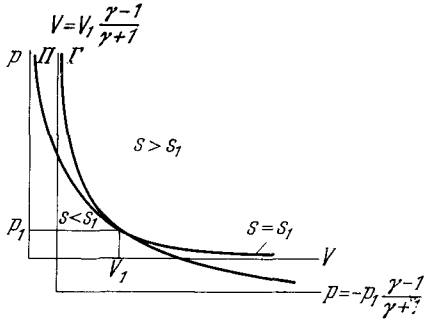


Рис. 50. Адиабаты Пуассона и Гюгонио для совершенного газа.

Гюгонио для совершенного газа на всем протяжении обращена вогнутостью вверх.

Для совершенного газа энтропия возрастает монотонно вместе с давлением вдоль адиабаты Гюгонио

Для совершенного газа из (6.25) и (6.13) вдоль адиабаты Гюгонио следует формула $T\,ds = \frac{\gamma+1}{4V_1}(V_1 - V)^2\,dp$, отсюда

$$\frac{\partial s}{\partial p} > 0. \tag{6.26}$$

Для совершенного газа при движении вверх вдоль адиабаты Гюгонио, т. е. при увеличении p, энтропия s возрастает монотонно.

Можно показать, что и в общем случае для любых сред, для которых выполняется неравенство $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$, на адиабате Гюгонио для $p > p_1$ имеем $s > s_1$, а для $p < p_1$ $s < s_1$. В частности, для малых скачков $p - p_1$ эт онепосредственно видно из (6.14′) и (6.19).

Скачки уплотнения реальны; скачки разрежения неосуществимы

Из второго закона термодинамики следует, что физически допустимы только такие скачки, для которых $\Omega > 0$, т. е. энтропия частицы после прохождения через скачок s_2 больше, чем ее первоначальная энтропия s_1 перед скачком. Из предыдущего анализа следует, что при $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$ и $U_2(p, \rho) = U_1(p, \rho)$ такое положение имеет место только для скачков уплотнения, когда

$$p_2 > p_1, \quad \rho_2 > \rho_1 \quad \text{и} \quad v_n = v_{n2} - v_{n1} > 0.$$

Таким образом, приходим к фундаментальному выводу в теории сильных разрывов: при наличии неравенства $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$ в действительности могут осуществляться только скачки уплотнения.

Скачки разрежения не могут реализоваться в действительности.

Этот вывод связан существенно с принятыми допущениями: во-первых, с неравенством $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$ и, во-вторых, с условием $U_2(p, \rho) = U_1(p, \rho)$.

Когда скачки разрежения осуществимы

Если после перехода частиц газа через скачок химические или физические свойства газовой смеси изменяются так, что второе из этих условий не удовлетворяется, то появляется возможность реализации в действительных движениях скачков разрежения. В этом случае (6.8) определяет геометрическое место точек p_2, V_2 — кривую, также называемую адиабатой Гюгонио; эта кривая, как указывалось выше, не проходит через точку p_1, V_1.

Примерами таких осуществляющихся в действительности скачков разрежения могут служить фронты горения.

Скорость распространения скачка уплотнения по частицам среды перед скачком — сверхзвуковая

Отметим еще очень важное свойство относительных нормальных составляющих скоростей на разных сторонах скачка. Обозначим через β_1 острый угол, который составляет касательная к адиабате Пуассона с осью V (рис. 51). Из свойства вогнутости адиабаты Гюгонио для произвольных сред (при условии $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$) в окрестности точки $p_1 V_1$, а для совершенного газа на всем ее протяжении следует, что для скачков уплотнения при малых $p - p_1$ в любых рассматриваемых средах и для любых скачков уплотнения в совершенном газе имеет место неравенство

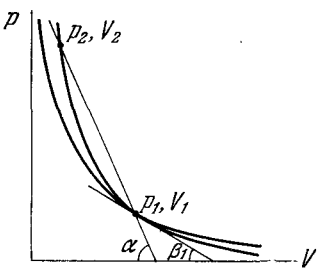


Рис. 51. β_1 — острый угол касательной к адиабате Пуассона с осью V, α — острый угол секущей адиабаты Гюгонио с осью V.

$$\operatorname{tg}\beta_1 < \operatorname{tg}\alpha.$$

Так как

$$a_1^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{p_1} = -V_1^2\left(\frac{dp}{dV}\right)_{p_1} = V_1^2 \operatorname{tg}\beta_1$$

и

$$\mathscr{D}^2 = V_1^2 \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} = V_1^2 \operatorname{tg}\alpha,$$

то отсюда следует, что для скачков уплотнения $(p_2 > p_1)$ имеем

$$\mathscr{D}^2 = v_{n1}^2 > a_1^2. \qquad (6.27)$$

Можно также показать [1]), что для любых сред, в которых $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$, скорость распространения скачка уплотнения с конечным перепадом давления $p_2 - p_1$ по частицам газа перед скачком больше скорости звука.

Неподвижные скачки могут существовать только в сверхзвуковых потоках

Для неподвижного скачка нормальная составляющая v_{n1} скорости частиц, подходящих и проходящих через неподвижный скачок, больше скорости звука. Таким образом, неподвижные скачки могут возникать только в сверхвузковых потоках. Подвижные скачки могут, очевидно, существовать в потоках с любыми скоростями и, в частности, распространяться по покоящейся среде.

Разные адиабаты Гюгонио, соответствующие точкам p_1, V_1 и p_2, V_2

Выше мы рассматривали адиабату Гюгонио Γ_1, соответствующую точке p_1, V_1:

$$U(p,V) - U(p_1, V_1) = \frac{1}{2}(p+p_1)(V_1 - V); \qquad (6.29')$$

рассмотрим теперь адиабату Гюгонио Γ_2, соответствующую точке p_2, V_2. Уравнение этой адиабаты имеет вид

$$U(p, V) - U(p_2, V_2) = \frac{1}{2}(p + p_2)(V_2 - V). \qquad (6.28)$$

Легко усмотреть, что адиабаты (6.28′) и (6.28)—различные кривые, но при условии (6.11) обе эти кривые проходят через точки p_1, V_1 и p_2, V_2.

Если для адиабаты (6.28′) переход из p_1, V_1 в p_2, V_2 соответствует скачку уплотнения, то для адиабаты (6,28) переход из p_2, V_2 в p_1, V_1 соответствует скачку разрежения (рис. 52).

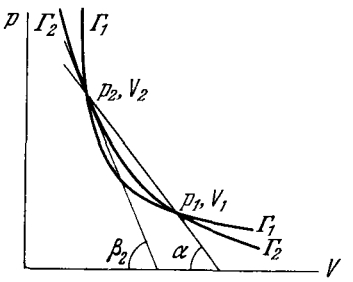


Рис. 52. Адиабата Γ_1 соответствует уравнению (6.28′), а адиабата Γ_2 — уравнению (6.28).

Дальше для простоты рассмотрим случай совершенного газа. Общая секущая Γ_1 и Γ_2 — прямая, проходящая через точки p_1, V_1 и p_2, V_2, из-за свойства вогнутости адиабат совершенного газа в промежутке p_1, p_2 расположена выше обеих адиабат; поэтому острый угол β_2 наклона к оси V касательной к адиабате Γ_2 в точке p_2, V_2 больше, чем угол α наклона к оси V секущей Γ_1 и Γ_2 (см. рис. 52):

$$\operatorname{tg}\beta_2 > \operatorname{tg}\alpha. \qquad (6.29'')$$

[1]) См. сноску на стр. 376.

Скорость частиц среды, прошедших через скачок уплотнения, относительно скачка — дозвуковая

Отсюда непосредственно вытекает важное неравенство для скачков уплотнения ($\rho_1 < \rho_2$), а именно согласно (6.6) и (6.29′) будем иметь

$$v_{n2}^2 = V_2^2 \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} = V_2^2 \operatorname{tg}\alpha < V_2^2 \operatorname{tg}\beta_2,$$

но, так как

$$V_2^2 \operatorname{tg}\beta_2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{p_2} = a_2^2,$$

получим

$$v_{n2}^2 = (\mathcal{D} - v_n)^2 < a_2^2 \quad \left(\frac{v_{n2}^2}{a_2^2} < 1\right), \tag{6.29}$$

Следовательно, нормальная составляющая скорости среды относительно скачка, равная скорости распространения скачка по частицам ($\mathcal{D} - v_n$), за скачком уплотнения меньше скорости звука.

При более подробном исследовании можно показать, что найденные выше свойства скачков уплотнения, установленные при $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$ для любых сред при малых $p_2 - p_1$, а для совершенного газа при любых $p_2 - p_1$ (для совершенного газа использовано свойство вогнутости адиабаты Гюгонио на всем ее протяжении), верны в общем случае для любых $p_2 - p_1$ и любых сред, для которых выполняется неравенство $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$.

Рассмотрим некоторые задачи об адиабатическом движении совершенного газа со скачками уплотнения.

Задача о поршне с плоскими волнами

Начнем с задачи о поршне. Пусть в цилиндрической трубе, закрытой с левой стороны поршнем (рис. 53), находится совершенный газ. В начальный момент времени при $t = 0$ поршень и невесомый газ находятся в состоянии покоя. Обозначим



Рис. 53. Задача о движении газа, вытесняемого поршнем.

через ρ_1 и p_1 постоянные значения плотности и давления покоящегося газа. Рассмотрим задачу о возмущенном адиабатическом движении газа, вытесняемого поршнем при $t > 0$.

Очевидно, что возмущенное движение газа существенно зависит от закона движения поршня, который можно задавать с помощью функции $v_п(t)$, где $v_п$—скорость поршня. В силу граничного условия на поршне скорость частиц газа, находящихся

в контакте с поршнем, должна равняться $v_{\text{п}}(t)$. В общем случае при непрерывных ускоренных движениях поршня задача о движении газа трудна и может быть решена только с помощью численных расчетов на машинах. Однако задача легко решается в частном случае, когда первоначально покоившийся поршень мгновенно начинает двигаться со скоростью $v_{\text{п}}$ в сторону газа и затем продолжает свое движение с $v_{\text{п}} = \text{const}$.

Очевидно, что всем условиям задачи легко удовлетворить, если принять, что в начальный момент времени от поршня отделяется ударная волна, которая движется по покоящемуся газу с постоянной сверхзвуковой относительно начального состояния газа скоростью $\mathcal{D}$. Между ударной волной и поршнем возникает поступательное движение с известной постоянной скоростью $v_{\text{п}}$, с постоянными давлением p_2 и плотностью ρ_2.

Скорость $\mathcal{D}$, плотность ρ_2 и давление p_2 легко вычислить через $v_{\text{п}} = v_{n2}$, p_1 и ρ_1 из трех условий на скачках (6.6) и (6.25). Удельная энтропия за скачком во всех частицах получается одинаковой и постоянной, причем скачок энтропии равняется

$$s_2 - s_1 = c_V \ln \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma} > 0.$$

Если скорость поршня постоянна, но направлена в сторону, противоположную газу, то аналогичная конструкция для построения решения приведет к скачку разрежения, который недопустим. В действительности в этом случае скачок не возникает, задача имеет непрерывное решение.

Если скорость поршня переменна и направлена в сторону газа, то скорость $\mathcal{D}$ получается переменной. Малые изменения скорости поршня передаются вперед со скоростью $v + a$ (v — скорость газа в области за ударной волной), и так как скорость $v + a$ за фронтом ударной волны больше скорости фронта $\mathcal{D}$, то обязательно через некоторое время эти возмущения догонят ударную волну и изменят скорость газа за фронтом ударной волны. Из-за этого ударная волна замедляется или ускоряется, а это в свою очередь влияет на величину скачка давления и энтропии. Таким образом, ясно, что за фронтом волны получается движение частиц газа с переменными характеристиками по координате (расстояние до поршня) и по времени. Энтропия в частицах благодаря адиабатичности получается постоянной, но из-за переменной скорости ударной волны $\mathcal{D}$ энтропия у разных частиц будет различной. Поэтому в области непрерывного движения газа между поршнем и ударной волной не будет баротропии, что видно, например, из формулы

$$\frac{p}{p_1} = e^{\frac{s-s_0}{c_V}}\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma}.$$

При определенной плотности ρ давление у разных частиц может быть различным из-за разной энтропии.

Сферический поршень

Задачу о поршне в цилиндрической трубе можно усложнить и рассмотреть задачу о расширении сферы Σ с неподвижным центром O в бесконечной, первоначально покоившейся массе газа с начальной плотностью ρ_1 и давлением p_1 (рис. 54). Скорость расширения сферы Σ равна dr_1/dt. В общем случае в газе возникает сферическая ударная волна S, расширяющаяся со скоростью $\mathcal{D} = dr_2/dt$, где r_2 — радиус ударной волны S. Если Σ расширяется из точки (от центра симметрии, так что при $t = 0$ $r_1 = 0$), а скорость $dr_1/dt = \text{const}$, то можно показать, что в этом случае скорость ударной волны $\mathcal{D}$ тоже получается постоянной.

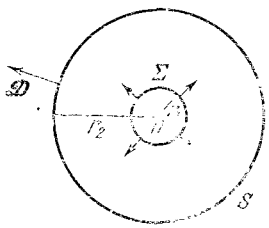


Рис. 54. При расширении сферы Σ в газе возникает сферическая ударная волна S.

Для решения этой задачи целесообразно написать все уравнения в сферической системе координат и воспользоваться упрощениями, связанными с наличием сферической симметрии (характеристики движения будут зависеть от двух независимых переменных — радиуса r и времени t).

Задачу о сферическом поршне можно рассматривать как модельную задачу о взрыве в воздушной атмосфере, если принять, что внутри Σ имеются продукты химической реакции — сильно сжатый газ, который вытесняет воздух, действуя, как поршень. В этом случае в воздухе образуется воздушная ударная волна, которая называется взрывной волной. Для определения движения воздуха между взрывной волной S и поверхностью Σ, за которой находятся продукты взрыва, необходимо решать задачу газовой динамики. Для решения этой задачи выше подготовлены все уравнения и дополнительные начальные и граничные условия.

Задача о точечном взрыве

В задаче о сферическом поршне предполагается, что закон расширения сферы Σ задан, а в задаче о взрыве скорость dr_1/dt расширения сферы Σ, отделяющей расширяющиеся продукты взрыва от воздуха, заранее неизвестна.

Задачу о взрыве в атмосфере можно схематизировать так, чтобы учесть главный эффект, заключающийся в том, что в малом объеме выделяется значительная энергия, которая затем передается воздуху, и в результате этого в атмосфере возникает быстро расширяющаяся сферическая область движущегося воздуха с резкими возмущениями полей давления и плотности. Задачу о точечном взрыве можно сформулировать следую-

щим образом. В начальный момент времени в покоящейся массе невесомого совершенного газа с постоянными давлением p_1 и плотностью ρ_1 в некоторой точке (центре симметрии возникающего движения) мгновенно выделяется заданная энергия E; требуется определить возмущенное движение в простейшем варианте, когда движение частиц газа по предположению адиабатическое.

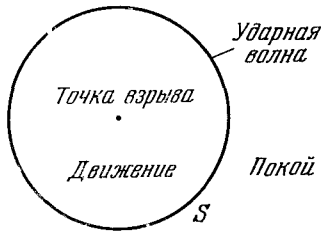


Рис. 55. Схема к задаче о точечном взрыве.

В этом случае, так же как и в задаче о сферическом поршне, образуется расширяющаяся от точки взрыва сферическая ударная волна, отделяющая покоящийся газ от движущегося газа в области внутри ударной волны (рис. 55). Все характеристики движения и состояния можно считать функциями только r и t. Для определения распределения по радиусу всех характеристик состояния и скорости движения частиц газа необходимо решить задачу об интегрировании следующих нелинейных уравнений с частными производными, записанных в сферической системе координат (см. § 3 гл. IV):

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + \frac{2\rho v}{r} = 0,$$

уравнение импульсов

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \qquad (6.30)$$

условие адиабатичности

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) + v\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0.$$

При интегрировании системы (6.30) необходимо удовлетворить указанным выше начальным условиям, изученным выше краевым условиям на скачке (взрывной волне) и условию о том, что в каждый момент времени полная энергия газа внутри сферической ударной волны равняется сумме энергии взрыва E и первоначальной энергии покоящегося газа внутри сферы S.

В § 8 мы проанализируем более подробно общие свойства решения этой задачи [1]).

[1]) Подробное полное решение этой задачи в конечном виде дано в книге Л. И. Седова «Методы подобия и размерности в механике», 6-ое изд., изд-во «Наука», Москва, 1967.

О волнах детонации и горения

Если при переходе через разрыв происходит изменение (выделение или поглощение) энергии и энтропии за счет каких-либо физико-химических процессов (горения, конденсации, испарения, химических реакций и т. п.), то основное уравнение (6.8) изменяет свою форму. Вместо равенства (6.11) при этом получается равенство вида

$$U_2(p_1, V_1) - U_1(p_1, V_1) = q^*, \tag{6.31}$$

где q^* — химическая или другая энергия, освобождаемая при переходе частиц через поверхность разрыва, $q^* > 0$ при горении или конденсации и $q^* < 0$ при испарении. В этом случае уравнение соответствующей адиабаты Гюгонио можно написать в следующей форме [1]):

$$U_2(p_2, V_2) - U_2(p_1, V_1) = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_1 - V_2) + q^*. \tag{6.32}$$

Скачки разрежения при $q^* > 0$ характерны для фронта горения. Скачки уплотнения при $q^* > 0$ соответствуют волнам детонации.

Задачи о поршне с детонационной волной

Предыдущие задачи о поршне с плоскими и сферическими волнами можно усложнить, если принять, что образующийся скачок уплотнения представляет собой детонационную волну. В этом случае первоначально покоящийся газ является взрывчатой смесью, а за фронтом волны получается другой газ (продукты прореагировавшей смеси). В задаче о детонации смеси перед движущимся плоским поршнем (между поршнем и детонационной волной) тоже получается поступательное движение газа, если поршень движется с достаточно большой постоянной скоростью в сторону газа. Если после возникновения детонационной волны скорость поршня мала, или поршень останавливается, или начинает двигаться в сторону, противоположную газу, то будет решение с наличием детонационной волны, распространяющейся по газу, причем между поршнем и ударной детонационной волной возникает непрерывное движение газа с переменными параметрами.

Соотношения на неподвижных ударных волнах для совершенного газа

Во многих приложениях и, в частности, в основных задачах аэродинамики об исследовании движения тел с постоянными сверхзвуковыми скоростями используется модель совершенного газа и в системе координат, связанной

[1]) С подробным анализом соответствующих адиабат Гюгонио можно познакомиться в книгах: Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1954 и Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Гостехиздат, 1950.

с летящим телом, рассматривается установившееся движение газа с неподвижными скачками уплотнения — ударными волнами. В этих приложениях вместо теории, основанной на анализе адиабаты Гюгонио, используется теория, основанная на рассматриваемых ниже соотношениях.

Для совершенного газа имеем

$$U = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} + \text{const}, \qquad a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{\gamma p}{\rho}.$$

На основании (6.1), (6.2), (6.3) и (6.4) легко выразить величины $v_{\tau 2}$, v_{n2}, ρ_2 и p_2 после скачка через $v_{\tau 1}$, v_{n1}, ρ_1, p_1 до скачка. Имеем:

$$v_{\tau 2} = v_{\tau 1}, \qquad v_{n2} = v_{n1}\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{1}{\gamma + 1}\frac{a_1^2}{v_{n1}^2}\right), \tag{6.33}$$

$$\left.\begin{aligned} \rho_2 &= \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\,\frac{\rho_1}{1 + \dfrac{2}{\gamma - 1}\dfrac{a_1^2}{v_{n1}^2}}, \\ p_2 &= \frac{2}{\gamma + 1}\,\rho_1 v_{n2}^2\left[1 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma}\,\frac{a_1^2}{v_{n1}^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{6.34}$$

Векторы v_1 и v_2 определяют плоскость π, совпадающую с плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности скачка и через направление составляющей $v_{\tau 1}$. Возьмем в плоскости π декартовы оси и обозначим через β угол наклона элемента ударной волны в плоскости π к оси x, а через θ — угол наклона скорости к оси x. Очевидны равенства

$$\left.\begin{aligned} v_\tau &= |v|\cos(\beta - \theta) = u\cos\beta + v\sin\beta, \\ v_n &= |v|\sin(\beta - \theta) = u\sin\beta - v\cos\beta. \end{aligned}\right\} \tag{6.35}$$

Выберем систему координат так, чтобы для рассматриваемой точки на ударной волне направление оси x совпало с направлением скорости v_1 ($|v_1| = u_1$, $v_1 = 0$). Заменим в (6.33) v_τ и v_n через u, v и β; исключив β с помощью (6.35), получим

$$v_2^2 = (u_1 - u_2)^2\,\frac{\dfrac{2}{\gamma + 1}\left(u_1 - \dfrac{a_1^2}{u_1}\right) - (u_1 - u_2)}{u_1 - u_2 + \dfrac{2}{\gamma + 1}\dfrac{a_1^2}{u_1^2}}. \tag{6.36}$$

Ударная поляра — гипоциссоида

В плоскости годографа скорости v_2 (u_2, v_2), в которой по осям координат откладываются соответственно u_2 и v_2 (эта плоскость соответствует плоскости π), уравнение (6.36) определяет кривую, называемую ударной полярой. Эта кривая является **гипоциссоидой (рис. 56)**.

Каждому значению угла наклона скорости за фронтом скачка θ_2 на ударной поляре соответствуют три значения величины скорости: точки A, B, C. Из условия непрерывности касательной к скачку составляющей скорости следует, что направление скачка, определяемое углом β, получается как направление перпендикуляра из начала координат O к прямой, проходящей через точку O_1 и точку на гипоциссоиде, соответствующую скорости за скачком; на чертеже в качестве такой точки взята точка B. Очевидно, что для скачка, отвечающего точке C, верно неравенство

$$v_n = v_{n2} - v_{n1} < 0.$$

Поэтому согласно (6.10) это значение скорости соответствует скачку разрежения. Скачки, соответствующие точкам ветвей гипоциссоиды, уходящих в бесконечность, физически неосуществимы; эти ветви кривой следует отбросить.

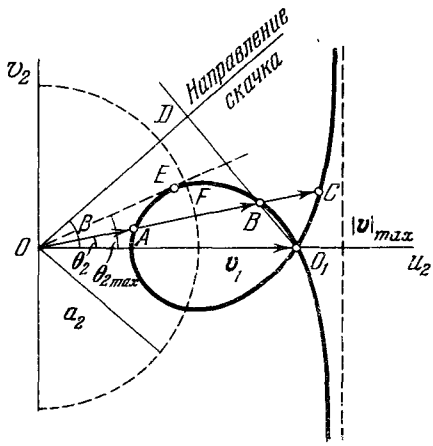


Рис. 56. Ударная поляра — гипоциссоида. OD — направление ударной волны, OB — вектор скорости после скачка, вектор OO_1 равен скорости газа до скачка.

Направление скачков бесконечно малой интенсивности получается в пределе, когда точка B стремится к точке O_1, а прямая $O_1 B$ переходит в касательную гипоциссоиды в точке O_1.

Прямые и косые скачки уплотнения

Скачки, у которых скорость v_1 перпендикулярна к скачку, называются прямыми; в противном случае скачки уплотнения называются косыми.

О повороте скорости в косых скачках уплотнения

Если скачок не прямой, то при переходе частицы через скачок вектор скорости частицы поворачивается и его направление приближается к направлению касательной к скачку.

Поворот скорости достигает максимума, $\theta_2 = \theta_{2max}$, в точке касания E гипоциссоиды с прямой, проведенной из точки O (см. рис. 56). Точке E соответствует дозвуковая скорость, близкая к скорости звука. На рис. 56 указана пунктиром окружность, соответствующая скорости, равной скорости звука [1]),

[1]) Можно показать, что для заданных параметров перед скачком критическая скорость (скорость, равная местной скорости звука) получается не зависящей от угла наклона скачка.

$|v_2| = v_{кр} = a_2$. Эта окружность пересекает гипоциссоиду в точке F. Величина скорости $|v_2|$ после скачка получается сверх звуковой, когда точка B расположена правее точки F, и дозвуковой для точки A, а также для точки B в небольшом интервале EF. Из формул (6.33) следует:

$$\operatorname{tg}(\beta - \theta_2) = \operatorname{tg}\beta \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{1}{(\gamma + 1)\,M_1^2 (1 - \cos^2 \beta)} \right), \quad (6.37)$$

где через M обозначена отвлеченная величина $v/a = M$, а $M_1 = v_1/a_1$ ($v_1 = |v_1|$).

Величина M называется числом Маха, для сверхзвуковых движений $M > 1$, для дозвуковых движений $M < 1$. Из формулы (6.37) следует, что величина угла поворота скорости

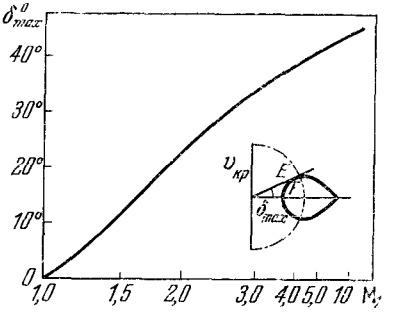


Рис. 57. Зависимость от числа Маха максимально возможного угла поворота скорости при переходе через скачок. График построен для $\gamma = 1{,}4$.

$\delta = (\theta_2 - \theta_1)$ (на рис. 56 это просто θ_2) зависит от числа M_1 и угла β. Максимально возможный угол поворота δ_{max} зависит только от числа Маха M_1 в набегающем на скачок потоке.

На рис. 57 приведен график зависимости δ_{max} от числа Маха M_1.

Сверхзвуковое обтекание угла и клина

Условия на косых скачках уплотнения позволяют непосредственно сконструировать решения задач об обтекании поступательным сверхзвуковым потоком угла и клина (рис. 58)

Непосредственно очевидно, что схемы течений, изображенные на рис. 58, удовлетворяют всем условиям задач об обтекании угла и клина.

Однако из предыдущих результатов следует, что решение этих задач получается только в том случае, если углы δ, δ_1 и

δ_2 для заданного числа Маха набегающего потока меньше или равны углу δ_{max} (M_1).

Если это условие удовлетворено, то указанные схемы обтекания допустимы.

Однако для любой из таких задач при $\delta < \delta_{max}$ существуют два решения с разными направлениями ударной волны, при переходе через каждую из которых осуществляется поворот скорости, необходимый для обеспечения условия обтекания, но достигаются разные значения скорости за волной. На рис. 56 эти два решения соответствуют, например, точкам B и A.

На практике для тонких тел осуществляется движение, соответствующее пологой ударной волне с большей скоростью за скачком, отвечающей точке B. Такое теоретическое решение

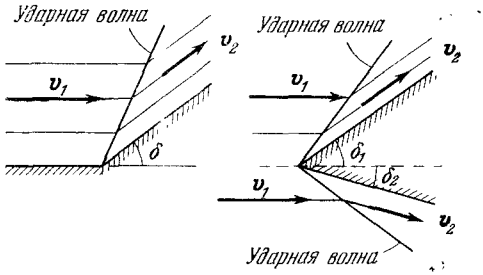


Рис. 58. Обтекание угла и клина, наклоненного несимметрично к скорости набегающего потока.

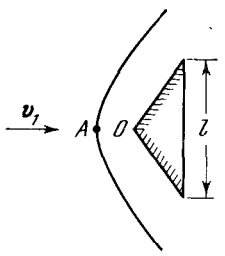


Рис. 59. Обтекание клина с большим углом раствора. Ударная волна образуется на некотором расстоянии впереди конечного клина.

для угла и клина хорошо согласуется с данными опытов по сверхзвуковому обтеканию тонких заостренных тел.

Обтекание с отошедшей ударной волной

Если угол $\delta > \delta_{max}$, то обтекание по схеме, указанной на рис. 58, невозможно. В этом случае впереди тела образуется искривленная ударная волна (рис. 59). Расстояние AO от угловой точки тела до передней точки ударной волны пропорционально линейным размерам тела и зависит от угла раствора клина и числа M_1.

При $l \to \infty$ ударная волна уходит вперед в бесконечность, перед клином получается дозвуковое движение газа.

Потери механической энергии в скачках

В заключение этого параграфа отметим, что наличие скачков в адиабатических потоках связано с появлением необратимых потерь располагаемой механической энергии, обусловленных ростом энтропии.

Для внутренней энергии совершенного газа можно написать

$$U = c_V T + \text{const} = c_V T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} e^{\frac{s-s_0}{c_p}} + \text{const}.$$

Рассмотрим внутреннюю энергию для некоторых характерных состояний покоя перед и за скачком (состояний, которые получаются, если газ адиабатически затормозить до $v = 0$) [1]). Давления и температуры в этих состояниях перед и за скачком (давления и температуры торможения) обозначим соответственно через p_1^*, p_2^*, T_1^* и T_2^*.

Если переход частиц через скачок не сопровождается химическими реакциями или фазовыми переходами (т. е. в равенстве (6.31) $q^* = 0$), то из (6.4) для совершенного газа следует, что $T_1^* = T_2^*$. Поэтому

$$e^{\frac{s_1-s_0}{c_p}} p_1^{*\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = e^{\frac{s_2-s_0}{c_p}} p_2^{*\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}, \quad \text{или} \quad \left(\frac{p_1^*}{p_2^*}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = e^{\frac{s_2-s_1}{c_p}}.$$

Если есть необратимые потери, то $s_2 - s_1 > 0$. Отсюда следует, что $p_2^* < p_1^*$. Следовательно, газ, прошедший через скачок, имеет меньшее давление в состоянии покоя, и поэтому его работоспособность (техническая полезность) падает.

Из рассмотрения адиабаты Гюгонио видно, что рост энтропии, а следовательно, и потери увеличиваются с увеличением интенсивности скачка уплотнения, характеризуемой перепадом давления $p_2 - p_1$.

Для заданного числа Маха M_1 в набегающем потоке интенсивность прямого скачка получается максимальной. Потери в косом скачке всегда меньше, чем в прямом [2]).

§ 7. Размерности физических величин и П-теорема

Физические соотношения инвариантны относительно выбора систем координат

При фактическом написании уравнений и в конкретных числовых расчетах необходимо вводить и использовать различные системы координат. Эти системы координат в общем случае могут быть произвольными, однако во многих случаях системы координат выбираются из соображений простоты и удобства вы-

[1]) См. гл. VIII, § 5, т. II.

[2]) С более полной теорией потерь в системах скачков уплотнения можно ознакомиться в цитированной книге Л. И. Седова «Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики».

чисел или анализа численных расчетов. Возможный произвол в выборе систем координат, привносимый принятыми способами описания изучаемых явлений, не связан с существом самих явлений, и поэтому различные уравнения, выражающие собой некоторые физические свойства и факты, должны обладать свойством инвариантности относительно выбора систем координат.

Тензорная природа физических уравнений

Этим объясняется, что все введенные выше уравнения и дополнительные соотношения имеют вид скалярных, векторных или вообще тензорных уравнений. Именно в этом состоит причина того, что множество характеристик движения и состояния имеет инвариантную тензорную природу. В этом причина необходимости развития и использования тензорного исчисления и формулирования всех физических соотношений в инвариантной тензорной форме.

Размерные величины

С другой стороны, определение и задание различных величин — характеристик среды, поля и процессов, например плотности, энергии, скорости, заряда и т. д. — с помощью чисел связано с использованием определенных единиц измерения, выбор которых также зависит от исследователя.

Величины, численное значение которых в рассматриваемых вопросах зависит от выбора единиц измерения, называются размерными величинами. Например, энергию можно измерять в килограммометрах, в джоулях, в калориях, в тоннах угля или килограммах урана, в рублях и еще во многих других единицах измерения. Соответствующие числа, определяющие величину энергии, существенно зависят от выбора единицы измерения.

Действия с большим числом разнообразных характеристик, связанных между собой различными определениями и различными уравнениями, показывают, что единицы измерения для разных характеристик, вообще говоря, связаны между собой. Например, единица измерения для скорости $v = ds/dt$ связана с единицами измерения для длины ds и времени dt.

Первичные (основные) единицы измерения

Наряду с зависимыми единицами измерения нужно рассматривать первичные, независимые единицы измерения, вводимые опытным путем, вообще говоря, с помощью специальных теоретически произвольных условий. Так, например, известными способами вводятся различные первичные, или основные, единицы измерения для длины, времени и массы.

Величины, для которых единицы измерения вводятся из опыта с помощью эталонов, по условию называются первичными или основными. При этом сами единицы измерения также называются первичными или основными.

Вторичные, производные единицы измерения

Единицы измерения для других величин, которые получаются из определения этих величин через первичные, называются производными или вторичными единицами измерения.

Различные системы единиц измерения

В качестве величин, для которых выбираются первичные единицы измерения, можно брать различные величины. В различных областях применения выгодно и удобно выбирать в качестве первичных единиц измерения свои местные первичные единицы измерения, причем разные в различных случаях. Возникли различные системы единиц измерения, возникла задача о переходе (пересчетах) от одной системы единиц измерения к другой.

Распространены следующие системы единиц измерения: CGS, в которой в качестве первичных единиц измерения приняты сантиметр, грамм, секунда; MKS, в которой в качестве основных единиц измерения приняты метр, килограмм-сила и секунда [1]); система СИ, в которой основными единицами измерения являются метр, килограмм-масса, секунда, ампер, градус Кельвина, свеча, а также другие системы единиц измерения.

В механике (и, вообще говоря, на практике) часто пользуются только тремя первичными единицами измерения, (например, так обстоит дело при использовании систем единиц измерения CGS и MKS); единицы измерения для всех остальных величин, в том числе и для характеристик электромагнитного поля, рассматриваются как производные единицы измерения.

После установления основных единиц измерения единицы измерения для других размерных величин, с производными единицами измерения, получаются автоматически из определения этих величин.

Формула размерности

Выражение производной единицы измерения через основные единицы измерения называется размерностью. Размерность записывается в виде формулы. В системе CGS формулы размерности содержат три аргумента: символы единицы длины L, единицы времени T и единицы массы M. Например, символ единицы измерения для силы записывается в форме

$$K = \frac{ML}{T^2} = MLT^{-2}.$$

---

[1]) Здесь мы принимаем, что фактические условия, определяющие первичные единицы измерения, известны из общих курсов физики — известно, что такое секунда и т. д.

В системе CGS формулы размерности для всех физических величин представляют собой степенные одночлены вида [1])

$$N = L^l T^t M^m, \tag{7.1}$$

где показатели степеней l, t, m — некоторые целые или дробные вещественные числа.

В системе MKS формулы размерности имеют вид

$$N = L^{l_1} T^{t_1} K^{k_1}, \tag{7.2}$$

где l_1, t_1 и k_1 — соответствующие показатели размерностей.

Переход от формул (7.1) к соответствующим формулам (7.2) можно получить после замены символа M в формулах (7.1) через символ K по формуле $M = KT^2L^{-1}$.

Формулы размерности позволяют определить численные масштабные множители для пересчета соответствующих характеристик при изменении величин первичных единиц измерения.

Если вместо заданных единиц измерения длины L, времени T и массы M перейти к новым единицам измерения, меньшим для длины в α раз, для времени в β раз и для массы в γ раз, то новая единица измерения для величины N с размерностью (7.1) будет меньше первоначальной в

$$\alpha^l \beta^t \gamma^m \tag{7.3}$$

раз. Это позволяет легко устанавливать переходные масштабные множители для вторичных единиц измерения при изменении величин первичных единиц измерения.

Число первичных единиц измерения

Число первичных единиц измерения может быть и бывает больше трех. Например, во многих вопросах газовой динамики и термодинамики, кроме метра, килограмма и секунды в качестве первичных единиц измерения, определенных опытным путем, обычно используются единицы измерения для температуры: градус Цельсия или градус Фаренгейта и т. п., а для количества тепловой энергии — одна малая или большая калория. Таким образом, можно рассматривать и пользоваться системами единиц измерения с пятью первичными единицами измерения. Рассматриваются и применяются системы с первичными единицами измерения для электромагнитных величин и т. д. В этих случаях формулы размерностей будут представлять собой степенные одночлены вида (7.1) с большим числом аргументов.

[1]) С более подробной теорией размерностей, а также с обоснованием формулы размерности (7.1) можно ознакомиться в цитированной книге Л.И. Седова «Методы подобия и размерности в механике», 6-е изд., изд-во «Наука», Москва, 1967.

О возможности увеличивать число первичных единиц измерения

Можно ввести системы единиц измерения, вообще говоря, с любым числом первичных единиц. В частности, для длины, времени и скорости можно выбирать независимые единицы измерения из опыта, но в этом случае формулу для скорости надо писать в виде

$$v = k\frac{ds}{dt}, \tag{7.4}$$

где k — размерная постоянная, зависящая от выбора единиц измерения для v, ds и dt. Если принять, что k является абсолютной численной постоянной (т. е. одинаковой во всех употребляемых системах единиц измерения), равной или не равной единице, то получится, что в любой системе единиц измерения единицы измерения для v, ds и dt зависимы.

На практике такое условие обычно всегда и принимается. Если рассмотреть соотношение:

$$\text{тепловая энергия} = I \cdot \text{механическая энергия},$$

то можно выбрать отдельные независимые единицы измерения для тепловой энергии, например калорию, и для механической энергии, например килограммометр. В этом случае в формулах и уравнениях появляется размерная постоянная I-механический эквивалент тепла с размерностью

$$[I] = \frac{\text{калория}}{\text{килограммометр}}; \tag{7.5}$$

«физическая» постоянная I аналогична постоянной k в формуле (7.4).

О возможности уменьшать число первичных единиц измерения

Постоянную I можно рассматривать как размерную постоянную при независимых единицах измерения для тепловой и механической энергий или как масштабную, безразмерную постоянную, если единицы измерения тепловой и механической энергий различаются только как единицы измерения для одной и той же величины, например как футы и метры.

Аналогичным образом можно рассматривать фундаментальное уравнение физики

$$E = mc^2, \tag{7.6}$$

где E — энергия, m — масса и c — скорость света в пустоте. Если в уравнении (7.6) принять, что c — универсальная постоянная, которую можно приравнять единице в классе допустимых систем единиц измерения аналогично постоянной k в формуле (7.4), то в этом случае возможные различные единицы

измерения для энергии и массы получаются зависимыми (так же как единицы измерения для v, ds и dt в (7.4) при $k=1$).

Такого рода соображения могут послужить основой для сокращения числа первичных единиц измерения. Если зафиксировать размерную универсальную постоянную в законе всемирного тяготения

$$F = f\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{7.7}$$

то получится добавочная связь между первичными единицами измерения для массы, времени и расстояния.

Таким путем можно получать системы единиц измерения с различным числом первичных единиц измерения. В частности, можно ввести систему с универсальными единицами измерения, в которой единицы измерения всех величин навсегда фиксированы и поэтому все величины можно рассматривать как безразмерные.

Относительность понятия размерных и безразмерных величин

Понятия размерных и безразмерных (отвлеченных) величин относительны. Это надо понимать следующим образом. При рассмотрении данного явления или некоторой совокупности явлений вводятся различные переменные или постоянные характеристики процессов и объектов. Для получения численных значений явно или неявно используется в действительности или допускается потенциально некоторый запас — совокупность систем единиц измерения.

Величины, численное значение которых зависит от выбора конкретной системы единиц измерения из допускаемой совокупности систем единиц измерения, называются размерными. Величины, численное значение которых одно и то же во всех системах единиц измерения этой совокупности систем, называются безразмерными или отвлеченными.

Например, геометрическому объекту — углу можно поставить в соответствие различные числа: число радиан, градусов, долей прямого угла и т. п.; поэтому при включении во множество допускаемых систем единиц измерения систем с различными единицами измерения для угла величину угла надо рассматривать как размерную величину. Если, однако, мы ограничимся рассмотрением только таких систем единиц измерения, в которых углы измеряются только в радианах, то угол можно рассматривать как отвлеченную, безразмерную величину. Такое условие по отношению к измерению углов часто принимается на практике.

Таким же путем любую другую величину (например, время или длину) можно посчитать безразмерной величиной при соответствующем выделении запаса систем единиц измерения, в

которых единица измерения для этой величины одна и та же во всех используемых в данном вопросе системах единиц измерения. В приложениях условие о безразмерности угла удобно, условие о безразмерности длины неудобно. Это связано с тем, что для геометрически подобных систем соответственные углы одинаковы, а соответственные длины различны.

Появление размерных физических постоянных как аргументов исследуемых функций

Из дальнейшего вытекает, что в некоторых случаях, вообще говоря, выгодно увеличивать число первичных единиц измерения.

Однако эта выгодность обычно аннулируется тем, что при увеличении числа первичных единиц измерения появляются существенные для рассматриваемых задач дополнительные физические постоянные типа механического эквивалента тепла J, или скорости света, или гравитационной постоянной f. Подобные постоянные будут входить в уравнения процессов и другие условия задач, и их необходимо причислять к определяющим параметрам и включать в аргументы рассматриваемых функциональных связей. Ниже мы покажем, что поэтому в общем случае не получается дополнительных упрощений от увеличения числа первичных единиц измерения. Однако существенная польза от этого получается тогда, когда из дополнительных физических соображений становится известным, что такого рода физические постоянные (типа J или f) несущественны в данных функциональных соотношениях.

В этом и заключается причина того, что стандартная система единиц измерения с фиксированными постоянными значениями величин J, c и f невыгодна и не применяется на практике во многих технических и физических задачах.

О возможной пользе применения разных систем единиц измерения

В некоторых вопросах в науке ясно проявляется тенденция к стандартизации и к административному введению универсальной системы единиц измерения. В ряде случаев, очевидно, это очень удобно и полезно, однако привязывание универсальной системы единиц измерения к определенным физическим постоянным или условиям во многих случаях является искусственным. Наоборот, самая возможность использования произвольных единиц измерения и независимость изучаемых законов от выбора системы единиц измерения может служить источником полезных выводов. Поэтому, наряду с внедрением единых единиц измерения, требуется развивать теорию произвольных и разнообразных классов единиц измерения как основу плодотворных методов эксперимента и теории.

В этих вопросах имеется полная аналогия между выбором систем единиц измерения и выбором систем координат и систем отсчета вообще. Можно, конечно, фиксировать вполне опре-

деленную одну и ту же универсальную систему отсчета и исследовать все явления только в этой системе. Однако самая возможность применения различных систем отсчета и возможность в конкретных задачах применять специальные характерные системы отсчета является основой плодотворного метода исследований в физике. Больше того, основное положение физики об инвариантности физических законов относительно выбора систем координат и систем отсчета (например, инерциальных систем отсчета) является в известном смысле иным представлением таких универсальных законов физики, как закон сохранения количества движения, закон сохранения энергии и закон сохранения момента количества движения.

Универсальная инвариантность физических законов относительно групп преобразования Галилея или Лоренца в некоторых задачах (однако существенно подчеркнуть, что не во всех задачах) дополняется свойством инвариантности исследуемых функциональных зависимостей относительно группы преобразования подобия, определенной возможностью сохранения всех уравнений и добавочных условий при преобразовании подобия, совпадающем с переходом от одной системы единиц измерения к другой.

П-теорема

Рассмотрим теперь структуру функциональных зависимостей между вообще размерными величинами, выражающих собой физические закономерности, инвариантные относительно выбора систем единиц измерения.

Пусть мы имеем некоторую размерную или безразмерную величину a, которая является функцией независимых между собой, вообще, размерных величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$a = f(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n). \tag{7.8}$$

Некоторые из величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в рассматриваемом процессе могут быть постоянными, другие переменными. Относительно переменных величин предположим, что либо их значения отличны от нуля или бесконечности, либо функция (7.8) непрерывна при обращении соответствующих аргументов в нуль или бесконечность.

Примем, что в аргументах функциональной связи (7.8) отмечены *все* размерные и безразмерные постоянные или переменные величины, от которых зависят рассматриваемые значения величины a.

Найдем теперь структуру функции f в (7.8) в предположении, что эта функция выражает собой некоторый физический закон, не зависящий от выбора систем единиц измерения.

Пусть среди размерных величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$ первые k величин ($k \leqslant n$) имеют независимые размерности (число основных единиц измерения должно быть больше или равно k).

Независимость размерностей означает, что формула, выражающая размерность одной из величин, не может быть представлена как комбинация в виде степенного одночлена формул размерности для других величин. Например, размерности длины L, скорости L/T и энергии ML^2/T^2 независимы; размерности длины L, скорости L/T и ускорения L/T^2 зависимы.

Среди механических величин обычно имеется не более трех с независимыми размерностями. Предположим, что k равняется наибольшему числу параметров с независимыми размерностями, поэтому размерности величин $a, a_{k+1}, \ldots, a_n$ можно выразить через размерности параметров $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Примем k величин $a_1, a_2, \ldots, a_k$ с независимыми размерностями за основные величины и введем для их размерностей обозначения

$$[a_1] = A_1, \quad [a_2] = A_2, \ldots, [a_k] = A_k.$$

Размерности остальных величин будут иметь вид

$$\begin{aligned}
[a] &= A_1^{m_1} A_2^{m_2} \ldots A_k^{m_k}, \\
[a_{k+1}] &= A_1^{p_1} A_2^{p_2} \ldots A_k^{p_k}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[a_n] &= A_1^{q_1} A_2^{q_2} \ldots A_k^{q_k}.
\end{aligned}$$

Изменим теперь единицы измерения величин $a_1, a_2, \ldots, a_k$ соответственно в $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ раз; численные значения этих величин и величин $a, a_{k+1}, \ldots, a_n$ в новой системе единиц будут соответственно равны

$$\begin{aligned}
a_1' &= \alpha_1 a_1, \qquad a' = \alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2} \ldots \alpha_k^{m_k} a, \\
a_2' &= \alpha_2 a_2, \qquad a_{k+1}' = \alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2} \ldots \alpha_k^{p_k} a_{k+1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_k' &= \alpha_k a_k, \qquad a_n' = \alpha_1^{q_1}\alpha_2^{q_2} \ldots \alpha_k^{q_k} a_n.
\end{aligned}$$

В новой системе единиц измерения соотношение (7.8) примет вид

$$\begin{aligned}
a' &= \alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2} \ldots \alpha_k^{m_k} a = \alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2} \ldots \alpha_k^{m_k} f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \\
&= f(\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2, \ldots, \alpha_k a_k, \alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2} \ldots \alpha_k^{p_k} a_{k+1}, \ldots, \alpha_1^{q_1}\alpha_2^{q_2} \ldots \alpha_k^{q_k} a_n).
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Это равенство показывает, что функция f обладает свойством, однородности относительно единиц измерения величин $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Воспользуемся выбором $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ для сокращения числа независимых переменных у функции f. Положим

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{a_2}, \ldots, \alpha_k = \frac{1}{a_k}.$$

При таком выборе масштабов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ значения первых k аргументов в правой части соотношения (7.9) будут равны 1 независимо от численного значения величин $a_1, a_2, \ldots, a_k$ [1]). Таким образом, используя то обстоятельство, что соотношение (7.8), согласно предположению, не зависит от выбора системы единиц измерения, мы будем выбирать систему единиц измерения так, чтобы k аргументов функции f имели фиксированные постоянные значения, равные единице.

В этой относительной системе единиц измерения численные значения параметров $a, a_{k+1}, \ldots, a_n$ определяются формулами

$$\Pi = \frac{a}{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_k^{m_k}},$$

$$\Pi_1 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_k^{p_k}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1^{q_1} a_2^{q_2} \ldots a_k^{q_k}},$$

где $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — численные значения рассматриваемых величин в первоначальной системе единиц измерения.

Нетрудно видеть, что значения $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}$ не зависят от выбора первоначальной системы единиц измерения, так как они имеют нулевую размерность относительно единиц измерения $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Очевидно также, что значения $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}$ вообще не зависят от выбора систем тех единиц измерения, через которые выражаются k единиц измерения для размерно-независимых величин $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Следовательно, величины $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}$ можно рассматривать как безразмерные. Поэтому в любой системе единиц измерения соотношение (7.8) можно представить в виде

$$\Pi = f(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k}, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}), \tag{7.10}$$

где Π и все аргументы функции f безразмерные.

[1]) Для простоты мы принимаем, что параметры $a_1, a_2, \ldots, a_k$ конечны и отличны от нуля. Очевидно, что последующие выводы распространяются на случаи, когда $a_1, a_2, \ldots, a_k$ могут обращаться в нуль или в бесконечность, если функция f при этих значениях аргументов непрерывна.

Таким образом, связь, не зависящая от выбора системы единиц измерения, между $n+1$ размерными величинами $a, a_1, \ldots, a_n$, из которых k имеют независимые размерности, может быть представлена в виде соотношения между $n+1-k$ величинами $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}$, представляющими собой безразмерные комбинации из $n+1$ размерных величин. Этот общий вывод теории размерности известен под названием П-теоремы.

Если некоторая безразмерная величина является функцией ряда размерных величин, то эта функция может зависеть только от безразмерных комбинаций, составленных из всех определяющих ее размерных величин.

Очевидно, что в соотношении (7.10) систему безразмерных параметров $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-k}$ можно, изменяя вид функции f, заменять другой системой безразмерных параметров, являющихся функциями $n-k$ безразмерных параметров $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-k}$.

Нетрудно видеть, что из n параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$, среди которых имеется не более k параметров с независимыми размерностями, нельзя составить больше $n-k$ независимых безразмерных комбинаций. Это непосредственно вытекает из вывода соотношения (7.10), если за величину a мы примем любую выбранную безразмерную комбинацию, определяемую величинами $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Всякое физическое соотношение между размерными величинами можно сформулировать как соотношение между безразмерными величинами. В этом, собственно, и заключается источник полезных приложений метода теории размерности к исследованию физических задач.

Чем меньше число параметров, определяющих изучаемую величину, тем больше ограничена форма функциональной зависимости и тем проще вести исследование. В частности, если число используемых основных единиц измерения равно числу определяющих параметров, которые в этом случае имеют независимые размерности, то с помощью теории размерности эта зависимость полностью определяется с точностью до постоянного множителя.

В самом деле, если $n = k$, то из параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$ нельзя образовать безразмерной комбинации, и поэтому функциональная зависимость (7.10) может быть представлена в виде

$$a = C a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n},$$

где C — безразмерная постоянная, а показатели $m_1, m_2, \ldots, m_n$ легко определяются с помощью формулы размерности для a. Безразмерную постоянную C при этом можно определить либо экспериментально, либо теоретически, решая соответствующую математическую задачу.

Очевидно, что теория размерности должна приносить тем большую пользу, чем больше мы можем выбирать основных единиц измерения.

Выше мы видели, что число основных единиц измерения можно выбирать произвольно; однако увеличение числа основных единиц измерения связано с введением дополнительных физических постоянных, которые также должны фигурировать среди определяющих параметров. Увеличивая число основных единиц измерения, мы увеличиваем число определяющих параметров; в общем случае разность $n + 1 - k$, равная числу безразмерных параметров, в которых формулируется физическое соотношение, остается постоянной.

Увеличение числа основных единиц измерения может приносить пользу только в том случае, когда из дополнительных физических соображений ясно, что физические постоянные, возникающие при введении новых основных единиц измерения, несущественны. Например, если мы рассматриваем явление, в котором имеют место механические и тепловые процессы, то для измерения количества тепла и механической энергии мы можем ввести две различные единицы измерения — калорию и джоуль, но при этом необходимо ввести в рассмотрение размерную постоянную I — механический эквивалент тепла. Допустим теперь, что мы рассматриваем явление теплопередачи в движущейся несжимаемой идеальной жидкости. В этом случае не происходит превращения тепловой энергии в механическую и обратно, и поэтому тепловые и механические процессы будут протекать независимо от значения механического эквивалента тепла. Если бы мы располагали возможностью изменять величину механического эквивалента тепла, то это никак не сказалось бы на значениях характерных величин. Следовательно, в рассматриваемом случае постоянная I не войдет в физические соотношения, и увеличение числа основных единиц измерения позволит получить с помощью теории размерности дополнительные важные сведения.

§ 8. Параметры, определяющие класс явлений, и типичные примеры приложения методов теории размерности

Выяснение системы определяющих параметров на основании математической постановки задачи

Приложения теории размерности основаны на применениях в изучаемых проблемах П-теоремы. В связи с этим возникает задача о перечислении аргументов — определяющих параметров в функциях вида (7.8).

В термодинамике, в гл. VI, мы познакомились с понятием системы определяющих параметров, характеризующих состоя-

ние и движение малой частицы среды. Теперь необходимо ввести систему определяющих параметров, вытекающую из постановки выделяемого класса задач и характеризующую полностью для данной среды каждую отдельно взятую глобальную задачу.

Основным и первоначальным этапом в постановке задач является выбор модели или системы моделей сплошных сред и схематизация свойств искомых решений. Сюда входит учет условий симметрии и выбор подходящих систем координат. При этом фиксируется система уравнений, система и класс искомых функций и независимые переменные.

Независимые переменные (например, x, y, z, t) и физические постоянные типа коэффициентов теплопроводности, вязкости, модулей упругости и т. п. необходимо включать в перечень системы определяющих параметров, Кроме того, для данного класса задач необходимо включать в число определяющих параметров задаваемые размерные и безразмерные характеристики области $\mathcal{D}$, занятой движущейся средой. Затем необходимо охарактеризовать и включить в число определяющих параметров величины, определяющие задаваемые функции при формулировании граничных и начальных условий.

Если рассматриваемая задача сформулирована как математическая задача, то всегда легко выписать полную таблицу аргументов в функциях вида (7.8) для искомых физических закономерностей. Таков общий путь получения системы определяющих параметров, когда задача поставлена математически.

Определяющие параметры — это все данные, которые надо задавать для вычисления искомых функций различными путями, в том числе и при расчетах на машинах.

При получении нужных ответов с помощью экспериментов также необходимо явно указывать и перечислять все определяющие параметры. Только при этом условии опыт может быть повторен и можно произвести сравнение различных экспериментов.

Для выделения таблицы определяющих параметров математическая постановка задачи необязательна

Указанная выше методика составления таблицы определяющих параметров на основании математической постановки задачи вообще необязательна.

Можно выписать систему определяющих параметров и в тех случаях, когда детальные свойства модели и система уравнений, вообще говоря, неизвестны. Достаточно опереться на предварительные данные или гипотезы о виде функций и о постоянных, которые входят или могут входить в определение модели, в начальные, граничные и другие условия, выделяющие конкретные задачи.

Конечная система определяющих параметров

Рассматривая совокупность различных механических систем, совершающих некоторые движения, всегда можно ограничить класс допустимых систем и движений так, чтобы конкретная система и ее определенное интересующее нас движение определялись бы конечным числом размерных и безразмерных параметров. Эти ограничения можно наложить путем фиксирования ряда отвлеченных функций или констант, задаваемых условиями задач.

Система определяющих параметров должна быть полной

Теория размерности, основанная на применении П-теоремы, позволяет получать выводы, вытекающие из возможности применять для описания физических закономерностей произвольные специальные единицы измерения. В связи с этим при перечислении параметров, определяющих класс явлений, необходимо указывать все размерные параметры, связанные с существом явления, независимо от того, постоянны они или переменны. Важно, что параметры могут принимать различные численные значения в разных системах единиц измерения.

Например, ускорение силы тяжести g необходимо всегда включать в систему определяющих параметров, когда тяжесть существенна, несмотря на одинаковость величины g для многих реальных движений. После того как величина g введена в качестве определяющего параметра, без всяких усложнений можно учесть искусственное расширение класса движений путем изменения величины ускорения силы тяжести g. Такой прием иногда позволяет ощутить и получить ценные качественные выводы о влиянии тех или других параметров, которые, согласно П-теореме, могут входить только в комбинациях с ускорением силы тяжести g.

Система определяющих параметров должна обладать свойством полноты. Среди определяющих параметров, некоторые из которых могут быть физическими размерными постоянными, должны быть обязательно величины с размерностями, через которые могут выразиться размерности всех интересующих нас искомых величин.

Если система определяющих параметров с точки зрения их размерности неполна и ее расширение исключается по существу постановки задачи, то это означает, что определяемая величина равна либо нулю, либо бесконечности. С таким случаем мы встречаемся часто при задании начальных условий типа источника с помощью δ-функции Дирака.

Недостаточность теории размерности для решения задач

В общем случае методы изучения функциональных зависимостей с помощью П-теоремы, по существу, ограничены и недостаточны, так как с помощью них невозможно установить

связей между безразмерными величинами. Все выводы теории размерности сохраняют свою силу при любых изменениях в уравнениях движения, если только при этом не вводится каких-либо новых задаваемых размерных величин. Например, в уравнениях движения можно умножить различные члены на некоторые положительные или отрицательные безразмерные числа или функции, зависящие от принятой системы определяющих параметров.

Подобные видоизменения, не влияющие на выводы теории размерности, могут существенно влиять на характер физических закономерностей.

Основная польза теории размерности для теоретических и экспериментальных исследований связана с возможностью записи и изучения физических закономерностей в безразмерном виде, инвариантном относительно выбора систем единиц измерения.

Задача о сферическом поршне в газе

Рассмотрим задачу о сферическом поршне, который в момент $t = 0$ начинает расширяться внутри покоящегося газа с начальной плотностью ρ_1 и давлением p_1 от некоторого начального радиуса r_0 по заданному закону $v_n(t) = dr_1/dt$.

Для определения возмущенного сферически симметричного адиабатического движения идеального совершенного газа необходимо интегрировать систему трех уравнений (6.30) с тремя неизвестными функциями ρ, p и v. Очевидно, что в качестве задаваемых независимых переменных аргументов искомых функций можно принять следующие величины:

$$\gamma,\ \rho_1,\ p_1,\ r_0,\ r,\ t,$$

и закон расширения поршня

$$v_n(t), \tag{8.1}$$

где $\gamma = c_p/c_V$ — безразмерный постоянный коэффициент — показатель адиабаты. Коэффициент γ входит в уравнение адиабатичности и в условия на ударной волне. Для получения таблицы с конечным числом определяющих параметров можно выделить определенные виды законов расширения поршня $v_n(t)$, зависящие от конечного числа параметров. Например, если поршень расширяется равномерно ускоренно или, в более общем случае, если $v_n(t)$ является полиномом, то в качестве определяющих параметров следует взять коэффициенты соответствующего полинома.

Рассмотрим простейший важный случай, когда поршень в момент $t = 0$ начинает внезапно расширяться с постоянной

скоростью

$$v_n = \text{const} = v_0.$$

В этом случае систему определяющих параметров можно написать в виде

$$\rho_1,\ p_1,\ r_0,\ \gamma,\ v_0,\ r,\ t$$

или

$$\rho_1,\ p_1,\ r_0,\ \gamma,\ \frac{v_0}{a_1},\ \frac{r_0}{r},\ \frac{r}{a_1 t},\quad \text{где } a_1 = \sqrt{\frac{\gamma p_1}{\rho_1}} \tag{8.2}$$

(a_1 — скорость звука, отвечающая невозмущенному состоянию).

На основании П-теоремы для искомого решения можно написать формулы вида

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \rho_1 f_1\left(\gamma,\ \frac{v_0}{a_1},\ \frac{r_0}{r},\ \frac{r}{a_1 t}\right),\\ p &= p_1 f_2\left(\gamma,\ \frac{v_0}{a_1},\ \frac{r_0}{r},\ \frac{r}{a_1 t}\right),\\ v &= v_0 f_3\left(\gamma,\ \frac{v_0}{a_1},\ \frac{r_0}{r},\ \frac{r}{a_1 t}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

В формулах (8.3) безразмерные функции f_1, f_2, f_3 выражены через четыре безразмерных параметра, два из них, $\frac{r_0}{r}$ и $\frac{r}{a_1 t}$, переменные.

Уравнения (6.30) теперь можно переписать в безразмерном виде для функций f_1, f_2, f_3. Эти уравнения останутся уравнениями с частными производными по двум независимым переменным:

$$\xi = \frac{r_0}{r} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{r}{a_1 t}.$$

На основании формул (8.3) рассматриваемую задачу можно существенно упростить, если ввести добавочную схематизацию, приняв, что в начальный момент времени расширение поршня начинается из точки, т. е. $r_0 = 0$.

В этом случае в таблице (8.2) выпадает характерный линейный размер ($r_0 = 0$), поэтому в (8.3) выпадает один из переменных аргументов ($\xi = \frac{r_0}{r} = 0$). Следовательно, в этом случае П-теорема приводит к выводу, что искомое решение имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \rho_1 f_1\left(\gamma,\ \frac{v_0}{a_1},\ \eta\right),\\ p &= p_1 f_2\left(\gamma,\ \frac{v_0}{a_1},\ \eta\right),\\ v &= v_0 f_3\left(\gamma,\ \frac{v_0}{a_1},\ \eta\right), \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

т. е. от переменных r и t искомые функции могут зависеть только через комбинацию

$$\eta = \frac{r}{a_1 t}.$$

Таким образом, рассматривая постановку задачи, на основании теории размерности мы установили, что решение рассматриваемой задачи о расширении сферического поршня из точки автомодельно.

После подстановки (8.4) в уравнения (6.30) получим обыкновенные дифференциальные уравнения для функций f_1, f_2 и f_3. Первоначальная система нелинейных уравнений с частными производными сильно упростилась, так как теперь требуется находить решение обыкновенных, хотя тоже нелинейных уравнений.

Очевидно, что все предыдущие выводы сохранят свою силу и для других задач об одномерных неустановившихся движениях газа, в которых система определяющих параметров представляется таблицей (8.2) или расширенной таблицей с добавлением, например, размерного постоянного параметра q^*, соответствующего удельной энергии, выделяемой на фронте волны детонации или волны горения. Так как q^* имеет размерность квадрата скорости, то в задаче о поршне, расширяющемся из точки, т. е. при $r_0 = 0$, с детонационной волной или с волной горения в области возмущенного движения формулы для автомодельного решения задачи имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \rho_1 f_1\left(\gamma, \frac{v_0}{a_1}, \frac{q^*}{a_1^2}, \frac{r}{a_1 t}\right), \\ p &= p_1 f_2\left(\gamma, \frac{v_0}{a_1}, \frac{q^*}{a_1^2}, \frac{r}{a_1 t}\right), \\ v &= v_1 f_3\left(\gamma, \frac{v_0}{a_1}, \frac{q^*}{a_1^2}, \frac{r}{a_1 t}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (8.5)$$

В этом случае число постоянных параметров увеличивается, однако движение автомодельно, так как, по существу, имеется только один переменный параметр.

При более детальном изучении автомодельной задачи о поршне выясняется, что перед поршнем возникает сферическая ударная волна, распространяющаяся по невозмущенному газу. Если рассмотреть характеристики движения на ударной волне, то радиус r_2 сферической ударной волны для автомодельной задачи будет величиной, определяемой параметрами

$$\gamma,\ v_0,\ a_1,\ q^*,\ t.$$

Так как из этих величин нельзя образовать безразмерной комбинации, содержащей переменную величину — время t, то для r_2 получается формула

$$r_2 = a_1 t f\left(\gamma, \frac{v_0}{a_1}, \frac{q^*}{a_1^2}\right). \tag{8.6}$$

Отсюда следует, что фронт скачка в рассматриваемых задачах как при отсутствии, так и при наличии выделения энергии на скачке расширяется равномерно с постоянной скоростью. Это очень важный вывод, который получен без фактического полного решения задачи.

Предыдущие соображения можно расширять и рассматривать всевозможные постановки задач, приводящие к автомодельным решениям. Обратим внимание, что автомодельность решения обеспечивалась отсутствием характерного линейного размера r_0 и отсутствием постоянных, из которых можно было бы образовать постоянную с размерностью времени.

Если вместо задачи о расширении поршня с постоянной скоростью рассмотреть задачу о равномерно ускоренном расширении поршня, то автомодельность решения пропадает и соответствующая газодинамическая задача будет принадлежать к задачам более высокого класса трудности.

Задача о точечном взрыве

Применим теперь соображения теории размерности к задаче о точечном взрыве, поставленной в § 6. Легко видеть, что система определяющих параметров в этой задаче представится таблицей

$$\gamma, \ \rho_1, \ p_1, \ E, \ r, \ t. \tag{8.7}$$

Легко проверить непосредственно, что соответствующие три безразмерных независимых параметра ($n = 6$, $k = 3$) можно взять в виде

$$\gamma, \quad \lambda = \frac{\rho_1^{1/5} r}{E^{1/5} t^{2/5}}, \quad \tau = \frac{p_1^{5/6} t}{E^{1/3} \rho_1^{1/2}}. \tag{8.8}$$

Для распределения давления за фронтом взрывной ударной волны имеет место формула следующего вида:

$$p = \frac{E}{r^3} f(\gamma, \lambda, \tau). \tag{8.9}$$

В этой формуле имеются два переменных параметра λ и τ, и поэтому задача о точечном взрыве и ее решение не являются автомодельными. Вид функции f в формуле (8.9) можно искать, в частности, путем численных расчетов, с помощью уравнений (6.30) и дополнительных начальных и краевых условий. Можно ставить также задачу и об экспериментальном определении этой функции. В обоих случаях вывод о структуре функциональной связи (8.9) имеет большое практическое и теоретическое значение.

Конечно, полученные при этом результаты будут соответствовать действительности только в тех случаях, когда выполняются предположения, положенные в основу схематизации и постановки задачи (пренебрежение излучением, однородность и начальная неподвижность атмосферы и т. п.). Отметим, что, к счастью, во многих важных случаях (однако не всегда) данная постановка задачи практически отвечает действительности и, следовательно, полезна.

Для установления вида функции (8.9) (при фиксированном γ) достаточно одного-единственного расчета при некоторых конкретных данных. Например, если мы проведем расчет для случая искрового электрического разряда в воздухе, то это позволит определить размерные величины для взрыва атомной бомбы. Достаточно произвести один-единственный экспериментальный взрыв с заданной энергией на определенной высоте, т. е. при известных ρ_1 и p_1. Данные произведенных при этом измерений позволят рассчитать и предсказать данные для всех других экспериментов с другими энергиями E и с другими известными данными об однородной газовой атмосфере.

Каждый такой расчет или опыт позволит получить данные о функции $f(\gamma, \lambda, \tau)$, которых, очевидно, достаточно для описания точечного взрыва в любых других условиях.

Постановка задачи о сильном взрыве

Для концентрированных зарядов, если изучать действие взрыва на расстояниях, больших по сравнению с размерами заряда, но все же достаточно близких к центру взрыва, где давление от взрыва еще очень велико, в постановку задачи и в формулу (8.9) можно внести дальнейшие существенные упрощения.

Опыт и теория показывают, что при взрыве на границе области возмущенного движения газа возникает сферическая ударная волна, быстро расширяющаяся по покоящемуся газу. Давление в покоящемся газе p_1 включено в систему определяющих параметров (8.7). Влияние давления p_1 на возмущенное движение газа может проявиться только через краевые условия на ударной волне. Эти условия согласно (6.33) и (6.34) в виде, разрешенном относительно характеристик движения газа за фронтом волны, можно переписать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} v_2 &= \mathcal{D}\left(\frac{2}{\gamma+1} - \frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{p_1}{\rho_1\mathcal{D}^2}\right), \\ \rho_2 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{\rho_1}{1+\dfrac{2\gamma p_1}{(\gamma-1)\rho_1\mathcal{D}^2}}, \\ p_2 &= \frac{2}{\gamma+1}\rho_1\mathcal{D}^2\left[1 - \frac{(\gamma-1)p_1}{2\rho_1\mathcal{D}^2}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (8.10)$$

Согласно условиям задачи здесь принято

$$\boldsymbol{v}_{\tau 1} = \boldsymbol{v}_{\tau 2} = 0, \quad v_{n2} = -v_2, \quad v_{n1} = -\mathcal{D}$$

и

$$a_1 = \sqrt{\frac{\gamma p_1}{\rho_1}}.$$

В формулах (8.10) в начальной стадии для сильной ударной волны безразмерная величина $\gamma p_1/\rho_1\mathcal{D}^2$ очень мала по сравнению с величиной $\gamma p_2/\rho_1\mathcal{D}^2$, так как давление за фронтом волны p_2 значительно больше, чем начальное давление p_1.

Неравенство $p_2 \gg p_1$ характеризует резкий скачок давления на фронте волны — сильную взрывную волну. Пренебрегая малой величиной порядка $a_1^2/\mathcal{D}^2$, условия (8.10) для сильной ударной волны можно упростить и заменить следующими приближенными условиями:

$$\left.\begin{aligned} v_2 &= \frac{2}{\gamma+1}\mathcal{D}, \\ \rho_2 &\quad \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1, \\ p_2 &= \frac{2}{\gamma+1}\rho_1\mathcal{D}^2. \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

Условия (8.11) представляют собой условия на сильной ударной волне. Эти условия совпадают с точными, когда давление перед скачком равно нулю ($p_1 = 0$); это соответствует пренебрежению внутри области, ограниченной взрывной волной, начальной энергией по сравнению с энергией, выделившейся мгновенно при взрыве в центре симметрии.

Если при анализе решения и при фактическом решении задачи о точечном сильном взрыве пользоваться вместо условий (8.10) условиями (8.11), то давление p_1 (а следовательно, и τ) исключается из перечня определяющих параметров (8.7). Отсюда следует, что рассматриваемое движение газа при сильном точечном взрыве автомодельно.

Распределение характеристик возмущенного движения газа за фронтом взрывной волны при сильном взрыве можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} v &= v_2\mathcal{V}(\gamma, \lambda), \\ p &= p_2\mathcal{P}(\gamma, \lambda), \\ \rho &= \rho_2\mathcal{R}(\gamma, \lambda), \end{aligned}\right\} \tag{8.12}$$

где v_2, p_2 и ρ_2 определены формулами (8.11).

Очевидно, что радиус r_2 и скорость фронта взрывной волны $\mathcal{D} = dr_2/dt$ определяются величинами

$$\rho_1,\ \gamma,\ E,\ t,$$

из которых постоянная γ безразмерна, а параметры ρ_1, E и t имеют независимые размерности, и из них нельзя образовать безразмерной комбинации. На основании П-теоремы для r_2 и $\mathcal{D}$ верны формулы

$$\left.\begin{aligned} & r_2 = k\left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/5} t^{2/5} \\ \text{и} \qquad & \mathcal{D} = \frac{2}{5}\, k \left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/5} t^{-3/5} = \frac{2}{5}\, k^{5/2} \sqrt{\frac{E}{\rho_1}}\, \frac{1}{\sqrt{r_2^3}}, \end{aligned}\right\} \tag{8.13}$$

где k — некоторая отвлеченная постоянная, зависящая только от γ. Показатели у размерных величин определены из условия получения для r_2 величины с размерностью длины.

Формулы (8.13), полученные с помощью теории размерности из постановки задачи без фактического решения всей задачи, определяют собой закон движения ударной волны. При $t = 0$ получается, что $r_2 = 0$, а скорость ударной волны $\mathcal{D}$ бесконечна. С возрастанием времени r_2 растет, а скорость $\mathcal{D}$ падает. Очевидно, что предположения о сильной ударной волне применимы только в интервале времени, для которого $\mathcal{D} \gg a_1$. Из общей теории следует, что скорость распространения фронта ударной волны $\mathcal{D}$ по частицам всегда больше скорости звука перед фронтом волны.

Из формулы (8.8) для λ и из (8.13) следует, что в качестве λ можно взять величину

$$\lambda = \frac{r}{r_2}, \tag{8.14}$$

изменяющуюся в области возмущенного движения в интервале (0, 1).

Проблема определения возмущенного движения сводится к определению функций $\mathcal{V}(\gamma, \lambda)$, $\mathcal{P}(\gamma, \lambda)$, $\mathcal{R}(\gamma, \lambda)$ и постоянной $k(\gamma)$. Условия на ударной волне приобретают простой вид:

$$\mathcal{V}(\gamma, 1) = \mathcal{P}(\gamma, 1) = \mathcal{R}(\gamma, 1) = 1. \tag{8.15}$$

В центре симметрии условие об отсутствии источника массы сводится к условию об обращении скорости частиц газа в нуль, т. е.

$$\mathcal{V}(\gamma, 0) = 0. \tag{8.16}$$

Условие о постоянстве полной энергии в возмущенном движении газа имеет вид

$$E = \int_0^{r_2} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \right) \rho 4\pi r^2 \, dr.$$

На основании (8.12) и (8.14) это условие сводится к следующему:

$$1 = \frac{32\pi k^5}{25(\gamma^2 - 1)} \int_0^1 (\mathcal{V}^2 \mathcal{R} + \mathcal{P}) \lambda^2 \, d\lambda. \tag{8.17}$$

Это условие можно использовать для вычисления постоянной k.

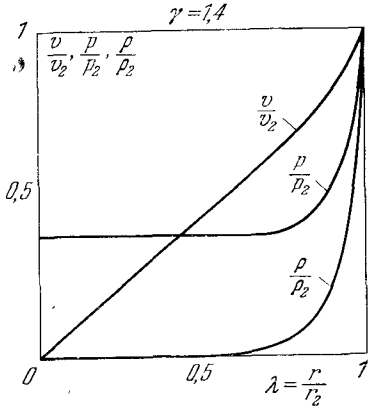


Рис. 60. Распределение давления, скорости и плотности за фронтом ударной волны при сильном точечном взрыве.

Очевидно, что функции $\mathcal{V}$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{R}$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям. Эти уравнения необходимо решить в интервале $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, причем условия (8.15) и (8.16) представляют собой краевые условия на двух концах интервала.

Здесь мы не будем решать эту задачу [1]). Заметим только, что для фактического получения решения этой задачи можно, не опираясь на фактически написанные обыкновенные дифференциальные уравнения, с помощью соображений теории размерности написать два конечных интеграла системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений и таким путем получить в конечном простом виде точное решение задачи о сильном точечном взрыве. На рис. 60 даны графики результата решения задачи о точечном сильном взрыве.

Движение твердого тела в бесконечной массе вязкой несжимаемой жидкости

Одними из самых главных, центральных задач механики сплошной среды являются задачи о движении тел внутри жидкостей и газов, задачи о вызванном телом возмущенном движении жидкостей или газов и о силах их взаимодействия с телами.

[1]) Полное исследование и решение этой задачи дано в цитируемой книге Л. И. Седова «Методы подобия и размерности в механике».

На границах тел, находящихся в контакте с внешней подвижной сплошной средой, возникает система сил взаимодействия. Большое практическое значение имеют свойства этих сил взаимодействия, их зависимость от законов движения тел, от геометрической формы и других особенностей движущейся системы тел. В технических задачах, связанных с расчетом движения всевозможных объектов и аппаратов в воде и воздухе, равновесия всевозможных технических сооружений, например домов и башен, плотин и трубопроводов и т. д., большое значение имеют данные о силах взаимодействия этих объектов и сооружений с окружающей средой. Из общей постановки задачи и теории размерности можно вывести некоторые общие следствия, имеющие важное значение для методов расчета различных объектов и для проведения экспериментов.

Изучим основную схематизированную задачу о поступательном движении с постоянной скоростью абсолютно твердого тела внутри невесомой несжимаемой жидкости, находящейся в контакте с телом и заполняющей все внешнее по отношению к поверхности тела Σ пространство. При этом примем, что форма поверхности Σ произвольна, но фиксирована и все геометрические размеры Σ определяются полностью заданием только одного какого-либо характерного размера d. Для практики это важный типичный случай движения твердого тела, вместе с тем требуется также рассматривать задачи о движении систем деформируемых «твердых» и других тел, движения не поступательные, ускоренные и т. д

В рамках теории поступательного движения внутри среды конечных тел, ограниченных поверхностью Σ, представляющей собой границу среды, можно рассматривать две фундаментальные эквивалентные постановки задачи.

Абсолютное движение

Первая постановка относится к задаче об «абсолютном» движении, когда принимается, что жидкость или газ перед телом в бесконечности покоятся, находятся в невозмущенном состоянии, а тела движутся с постоянной поступательной скоростью v.

Обращение движения. Задача обтекания

Вторая постановка отвечает задаче об обтекании неподвижных тел поступательным потоком жидкости или газа, имеющим в бесконечности перед телом постоянную скорость — v.

Согласно принципу Галилея — Ньютона прибавление ко всей системе (внешняя среда и тело) поступательной скорости $-v$ равносильно переходу от одной инерциальной системы к другой. Следовательно, в этих двух постановках все силовые взаимодействия одинаковы, относительное поле скоростей в задаче об обтекании получается прибавлением во всех точках к вектору абсолютной скорости вектора $-v$.

Такая эквивалентность положена в основу многих экспериментальных методов исследования этой задачи. Вместо опытов с полетом или плаванием тел ставятся опыты с неподвижными телами в аэродинамических трубах, в гидродинамических лотках и других устройствах. Очевидно, что требование полной эквивалентности задач о полете и об обтекании на практике связано с пренебрежением влиянием других тел, в частности стенок аэродинамических труб и каналов и т. п. В случаях, когда это влияние не мало, оно должно специальным образом учитываться.

В общей постановке задачи условия в бесконечности формулируются для состояний и скоростей п е р е д телом. Это связано с тем, что при рассмотрении установившихся движений как предела бесконечно долго продолжавшихся неустановившихся движений путь, пройденный телом, в пределе получается бесконечно большим. Поэтому за телом в бесконечности движение жидкости или газа получается вообще возмущенным. С таким положением приходится встречаться в теории крыла конечного размаха, в теории движения корабля и во многих других случаях.

Система параметров, определяющих поле скоростей и напряжений при движении тела в вязкой жидкости

Начнем с изучения движения тела в вязкой несжимаемой однородной жидкости. Из общих уравнений гл. IV следует, то механические свойства вязкой несжимаемой жидкости вполне определяются двумя постоянными: плотностью ρ и коэффициентом вязкости μ. Две химически разные вязкие несжимаемые жидкости с одинаковыми $\rho = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$ неразличимы с точки зрения механики. Задача об установившемся обтекании неподвижных тел несжимаемой вязкой жидкостью представляет собой задачу об интегрировании уравнений Навье — Стокса с условиями прилипания жидкости на поверхности тел и с условием, что скорость — v и давление p_∞ в бесконечности в набегающем потоке заданы. Для нелинейных уравнений Навье — Стокса эта математическая задача очень трудна, нет даже частных точных решений этой задачи для какого-либо тела самой простой формы.

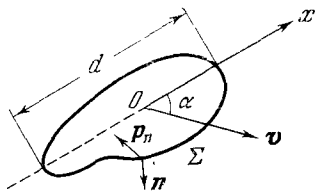


Рис. 61. Схема к задаче о движении тела в жидкости.

Тем не менее имеется множество разнообразных теоретических выводов и опытных данных, позволяющих оценивать характер силовых взаимодействий и свойств течения жидкости, получать некоторое представление о влиянии формы тела

на величину силовых взаимодействий между жидкостью и телом.

В системе координат, связанной с телом, установившееся поле скоростей относительного или абсолютного движения вязкой несжимаемой жидкости, а также распределение давлений и внутренних вязких напряжений определяются как функции следующей системы параметров:

$$\rho, \mu, d, v, \alpha, \beta, p_\infty, x, y, z, \tag{8.18}$$

где α, β — углы, определяющие ориентацию вектора поступательной постоянной скорости тела относительно системы координат, связанной с телом.

Подъемная сила и сопротивление

На каждый элемент поверхности тела Σ со стороны жидкости на тело действует поверхностная сила $\boldsymbol{p}_n d\sigma$ (по условию задачи массовые силы учитывать не будем).

С точки зрения результирующего эффекта действия этих элементарных сил на тело, рассматриваемого как твердое, важное значение имеют только суммарная сила $\boldsymbol{P}$ (главный вектор) и суммарный момент $\mathfrak{M}$, определенные интегралами

$$\boldsymbol{P} = \int_\Sigma \boldsymbol{p}_n \, d\sigma, \qquad \mathfrak{M} = \int_\Sigma (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_n) \, d\sigma. \tag{8.19}$$

Главный вектор сил $\boldsymbol{P}$ можно представить в виде суммы:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{A}.$$

Вектор силы $\boldsymbol{W}$, параллельный вектору скорости $\boldsymbol{v}$, если он направлен против $\boldsymbol{v}$, называется силой сопротивления, а сила $\boldsymbol{A}$, перпендикулярная к вектору скорости $\boldsymbol{v}$, называется подъемной силой. Силы $\boldsymbol{W}$ и $\boldsymbol{A}$ и момент $\mathfrak{M}$ можно определять на основании теоретических расчетов с помощью непосредственного или косвенного вычисления интегралов (8.19), или с помощью опытов с измерениями сил на весах, например в аэродинамических трубах или в специальных водяных трубах, или из опытов других видов.

В опытах и в теории силы $\boldsymbol{W}$ и $\boldsymbol{A}$ можно рассматривать как величины, определяемые параметрами

$$\rho, \mu, d, v, \alpha, \beta, p_\infty. \tag{8.20}$$

Изменение давления p_∞ не влияет на суммарные силы

Легко усмотреть, что при определении суммарных сил величина давления в бесконечности p_∞ несущественна. В самом деле, в уравнения Навье — Стокса для несжимаемой жидкости давление входит только посредством своих

производных по координатам, поэтому при добавлении к давлению постоянной при неизменном поле скоростей одно решение переходит в другое решение. Отсюда видно, что давление в потоке является аддитивной функцией давления в бесконечности p_∞. Отметим, что этот вывод верен только для несжимаемой жидкости. С другой стороны, из теоремы Гаусса — Остроградского следует, что для всякой замкнутой поверхности Σ, ограничивающей объем V, верны равенства

$$-\int_\Sigma p_\infty \boldsymbol{n}\, d\sigma =$$

$$= -p_\infty \int_\Sigma [\boldsymbol{i}\cos(\boldsymbol{n}, x) + \boldsymbol{j}\cos(\boldsymbol{n}, y) + \boldsymbol{k}\cos(\boldsymbol{n}, z)]\, d\sigma =$$

$$= -p_\infty \int_V \left(\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial z}\right) d\tau = 0,$$

$$-\int_\Sigma \boldsymbol{r}\times(p_\infty \boldsymbol{n})\, d\sigma =$$

$$= -p_\infty \int_\Sigma [\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{i}\cos(\boldsymbol{n}, x) + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}\cos(\boldsymbol{n}, y) + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{k}\cos(n, z)]\, d\sigma =$$

$$= -p_\infty \int_V \left[\frac{\partial(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{i})}{\partial x} + \frac{\partial(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j})}{\partial y} + \frac{\partial(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{k})}{\partial z}\right] d\tau = 0.$$

Отсюда следует, что предположение о несжимаемости позволяет в перечне определяющих параметров (8.20) исключить величину p_∞. Из оставшихся шести параметров ($n = 6$, $k = 3$) можно образовать только три безразмерных параметра:

$$\alpha,\ \beta,\ \mathsf{R} = \rho v d/\mu. \tag{8.21}$$

Углы α и β характеризуют направление скорости v тела относительно Σ. Если тело — шар, то углы α и β несущественны, в других случаях ориентация вектора скорости по отношению к телу существенна и поэтому углы α, β — существенные параметры. Безразмерное число R называется числом Рейнольдса. Число Рейнольдса играет фундаментальную роль во всех явлениях, связанных с вязкостью жидкостей и газов.

Легко проверить, что комбинации $\rho d^2 v^2$ и $\mu d v = \rho d^2 v^2/\mathsf{R}$ имеют размерности силы. Теперь на основании П-теоремы можно написать

$$\left.\begin{aligned} W &= c_W(\alpha, \beta, \mathsf{R})\, \rho d^2 v^2, \\ A &= c_A(\alpha, \beta, \mathsf{R})\, \rho d^2 v^2, \\ \mathfrak{M} &= c_{\mathfrak{M}}(\alpha, \beta, \mathsf{R})\, \rho d^3 v^2. \end{aligned}\right\} \tag{8.22}$$

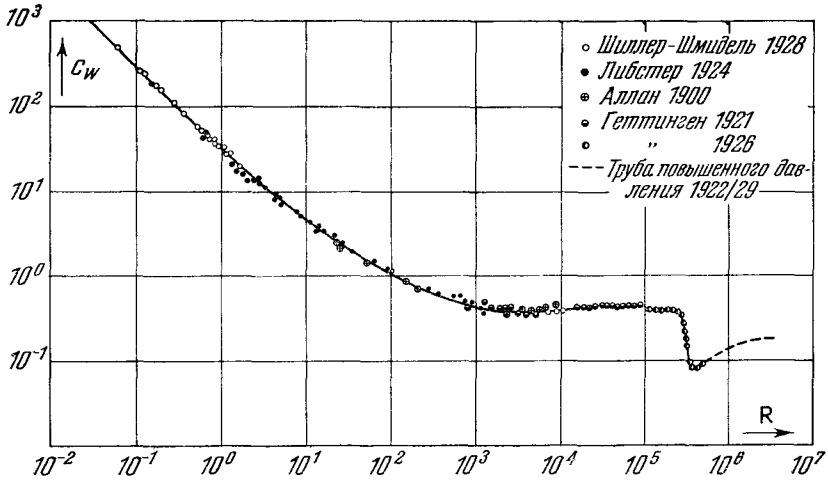


Рис. 62. Коэффициент сопротивления шара $c_W = \dfrac{W}{\frac{\pi d^2}{4}\frac{\rho v^2}{2}}$ как функция числа Рейнольдса $\mathrm{R} = \dfrac{\rho v d}{\mu}$ (d — диаметр шара).

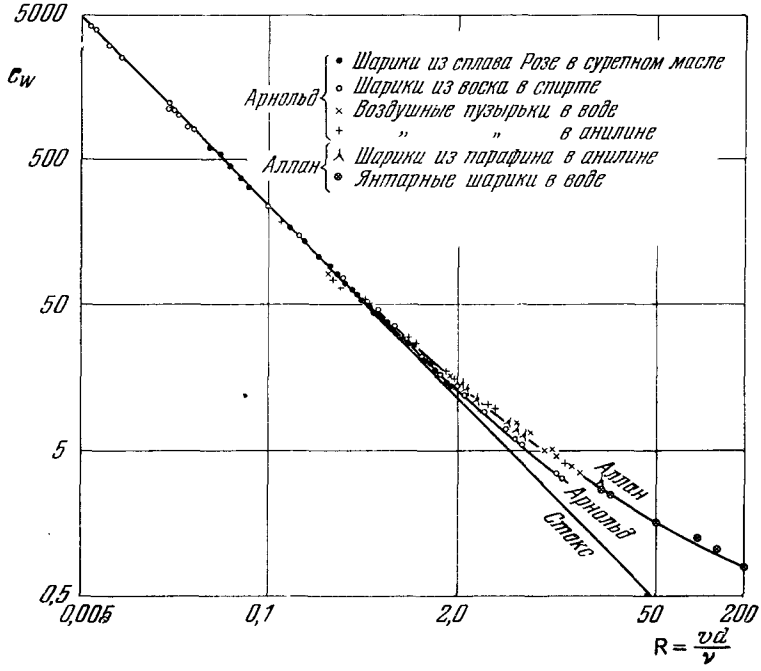


Рис. 63. Коэффициент сопротивления шара при малых значениях числа Рейнольдса. Масштаб по оси абсцисс логарифмический ($\nu = \mu/\rho$).

Отвлеченные коэффициенты [1]) c_W, c_A, $c_{\mathfrak{M}}$ зависят только от α, β и числа Рейнольдса R. Определение этих коэффициентов для тел различной формы как функций указанных аргументов представляет собой одну из главных задач теоретической и экспериментальной аэродинамики и гидродинамики.

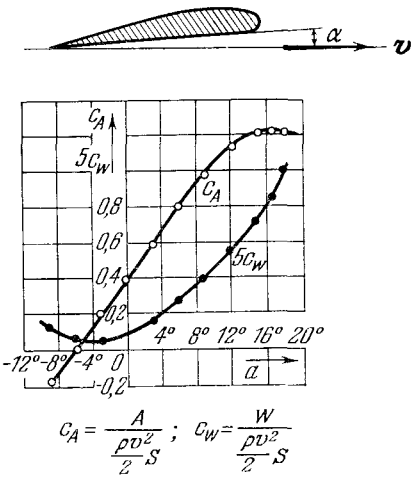


Рис. 64. Типичные кривые зависимости коэффициентов подъемной силы c_A и сопротивления c_W для крыла от угла атаки α (S — площадь крыла в плане).

В настоящее время имеется очень много данных об этих коэффициентах для большого числа разнообразных тел, с которыми встречаются на практике в технике.

Влияние вязкости жидкости на движение и, в частности, на сопротивление и на подъемную силу сказывается только через посредство числа Рейнольдса. Из формулы для числа Рейнольдса (8.21) следует, что влияние вязкости, проявляющееся через коэффициент вязкости μ, тесно связано с плотностью ρ, скоростью v и линейным масштабом d. Для различных отвлеченных функций эффект увеличения вязкости равносилен уменьшению либо линейных размеров, либо скорости, либо плотности жидкости. Очевидно, что увеличение масштаба тела или скорости движения при фиксированной вязкости равносильно уменьшению вязкости при фиксированных размерах и скорости.

На рис. 62 представлены экспериментальные данные о влиянии числа Рейнольдса на коэффициент сопротивления c_W для шара в различных диапазонах значения числа Рейнольдса. Экспериментальные данные, полученные в различных жидкостях и в воздухе, хорошо ложатся на единую кривую. При малых значениях числа Рейнольдса уравнение этой кривой имеет вид $c_W = c/\mathrm{R}$, на рис. 63 — прямая, так как по оси абсцисс принят логарифмический масштаб. На рис. 64 приведены для примера типичные кривые, дающие зависимости коэффициентов c_W и c_A для крыла в функции от угла атаки — угла наклона скорости движения крыла к профилю крыла.

[1]) Здесь для простоты мы отмечаем только коэффициент для модуля силы A и момента $\mathfrak{M}$, на практике необходимо рассматривать аналогичные коэффициенты для компонент этих векторов.

С помощью (8.22) и безразмерных коэффициентов c_A и c_W, определенных в одних опытах, например, при движении данного тела в воде, можно в других случаях, в которых опыт не производился, рассчитать сопротивление и подъемную силу для другого тела с той же геометрической формой, но с другими размерами, движущегося в других жидкостях или даже в воздухе, если сжимаемостью воздуха можно пренебречь. Очевидно, что при такого рода расчетах необходимо располагать и пользоваться данными для коэффициентов c_W и c_A при одних и тех же значениях углов α, β и одинаковых значениях числа Рейнольдса $\mathsf{R} = \rho v d/\mu$. В предварительных опытах необходимо получать данные для коэффициентов c_W и c_A в нужных диапазонах безразмерных аргументов α, β и R, которые определяются условиями приложений в практических задачах.

Движения в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса

Рассмотрим случаи медленных движений в вязкой жидкости, соответствующие малым значениям числа Рейнольдса. Уменьшение числа Рейнольдса соответствует увеличению коэффициента вязкости μ и увеличению сил внутренних напряжений, обусловленных вязкостью. Если пренебречь силами инерции по сравнению с силами вязкости, то это равносильно допущению о несущественности плотности ρ как определяющего параметра. Пренебрежение плотностью в уравнениях Навье — Стокса соответствует вычеркиванию члена с ускорением. Соответствующие математические задачи и их решения составляют приближенную теорию Стокса.

В этом случае сопротивление W при поступательном движении тела данной формы с постоянной скоростью v определяется параметрами

$$\mu, d, v, \alpha, \beta. \tag{8.23}$$

Так как из величин μ, d и v нельзя образовать безразмерных комбинаций, то отсюда следует, что

$$W = c(\alpha, \beta)\,\mu d v = \frac{c}{\mathsf{R}}\rho d^2 v^2, \qquad c_W = \frac{c(\alpha, \beta)}{\mathsf{R}}. \tag{8.24}$$

Следовательно, при малых значениях числа Рейнольдса сила сопротивления (аналогично этому и подъемная сила) пропорциональна первой степени скорости движения тела, линейному размеру d и коэффициенту вязкости μ. Безразмерный коэффициент c зависит только от направления скорости тела относительно его поверхности. Для шара c — постоянная, которую можно найти из одного-единственного опыта. Теоретический расчет для шара дает $c = 3\pi$, если d — диаметр шара. Для тел произвольной формы из первой формулы (8.24) следует формула $c_W = c(\alpha, \beta)/\mathsf{R}$, определяющая зависимость коэффициента c_W

от числа Рейнольдса при малых значениях числа Рейнольдса. Опыты хорошо подтверждают эту формулу и позволяют указать наибольшие значения числа Рейнольдса, зависящие от формы тела, при которых формула (8.24) практически вполне применима.

Закон сопротивления (8.24) применим, например, для описания процесса оседания мелких частиц в жидкости. Однако при движении подводных лодок в воде, летательных аппаратов в воздухе и даже автомобилей за счет больших размеров и большой скорости соответствующие числа Рейнольдса получаются большими, и поэтому формула (8.24) становится недействительной.

Движение в вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса

В идеальной жидкости $\mu = 0$, поэтому идеальная жидкость соответствует бесконечно большим значениям числа Рейнольдса. Большие значения числа Рейнольдса можно рассматривать при $\mu \neq 0$, но при $vd \to \infty$, т. е. для тел больших размеров и, вообще говоря, для больших скоростей движения. В идеальной жидкости сопротивление и подъемная сила определяются параметрами

$$\rho, d, v, \alpha, \beta \quad \text{и} \quad \mathrm{R} = \infty. \tag{8.25}$$

Следовательно, в идеальной жидкости при установившемся обтекании должны выполняться формулы

$$W = c_W(\alpha, \beta)\rho d^2 v^2, \qquad A = c_A(\alpha, \beta)\rho d^2 v^2. \tag{8.26}$$

Формулы (8.26) показывают, что в идеальной жидкости или, приближенно, в вязкой жидкости при $\mathrm{R} \to \infty$ сопротивление и подъемная сила пропорциональны квадрату скорости движения v^2, характерной площади d^2 и плотности жидкости. Во многих важных случаях эти закономерности, полученные из постановки задачи только с помощью П-теоремы, хорошо соответствуют опыту и всегда точно отвечают теоретическим расчетам в рамках гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости.

Сопротивление кораблей

При движении корабля по поверхности воды часть границы жидкости является свободной поверхностью. Возмущенное движение воды в этом случае зависит от свойства ее весомости, благодаря которому поверхность воды покрывается системой волн. Подъемная сила и сопротивление при движении кораблей зависят от свойства весомости воды. Поэтому при поступательном движении корабля с постоянной горизонтальной скоростью с фиксированной ориентацией относительно свободной поверхности жидкости, заполняющей все нижнее полупространство, система

определяющих параметров представится таблицей

$$\rho,\ \mu,\ g,\ d,\ v. \tag{8.27}$$

Из этих параметров ($n = 5$, $k = 3$) можно составить две независимые безразмерные комбинации:

$$\frac{\rho v d}{\mu} = \mathsf{R}, \qquad \frac{v}{\sqrt{gd}} = \mathsf{F}. \tag{8.28}$$

Безразмерный параметр F называется числом Фруда.

Число Фруда является существенным безразмерным параметром во всех задачах, в которых в качестве определяющих величин присутствуют v, d и g. Влияние силы тяжести учитывается и проявляется для безразмерных определяющих величин через число Фруда.

Формулу для сопротивления корпуса корабля можно написать в виде

$$W = c_W(\mathsf{R}, \mathsf{F})\,\rho S v^2, \tag{8.29}$$

где S — характерная площадь, обычно принимаемая равной смоченной площади внешней поверхности корпуса при равновесии корабля на поверхности воды. Определение зависимости c_W от R, F и геометрических форм корпуса — основная проблема в гидродинамике судов.

Безразмерные параметры R и F как характерные аргументы встречаются не только в рассмотренных выше вопросах; эти параметры используются и играют важную роль во многих других проблемах, в которых среди определяющих параметров находятся величины ρ, μ, g, v и d, т. е., вообще говоря, всегда, когда свойства вязкости и весомости среды существенны. В частности, число Рейнольдса имеет фундаментальное значение в проблемах движения вязкой жидкости по трубам.

Задача о движении тела в идеальном газе

Данную выше постановку основной задачи об установившемся движении тела в бесконечной массе жидкости видоизменим следующим образом: будем считать, что внешняя среда представляет собой идеальный совершенный газ. Свойства сжимаемости учитываем и принимаем, что процессы в каждой частице адиабатические, обратимые в области непрерывных движений и необратимые при переходе частиц газа через скачки уплотнения, присутствие которых в потоке допускается.

В задаче об обтекании неподвижного тела в бесконечности имеем заданные давление p_∞, плотность ρ_∞ и скорость потока v_∞. В этом случае распределение характеристик состояния и движения газа определяется системой параметров

$$\gamma,\ p_\infty,\ \rho_\infty,\ v_\infty,\ \alpha,\ \beta,\ d,\ x,\ y,\ z. \tag{8.30}$$

Координаты точек пространства x, y, z берем в системе, связанной с телом. Имеем $n = 10$ и $k = 3$. Очевидно, что все безразмерные искомые величины определяются семью безразмерными параметрами:

$$\gamma, \frac{v_\infty}{a_\infty} = M_\infty, \alpha, \beta, \frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d}, \tag{8.31}$$

причем

$$a_\infty = \sqrt{\frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty}},$$

где, как и раньше, α, β — углы, задающие ориентацию набегающего потока относительно тела; a_∞ — скорость звука в бесконечности в набегающем потоке, M_∞ — число Маха. Число Маха M_∞ в рассмотренной задаче играет роль, аналогичную числу Рейнольдса или числу Фруда в задачах, рассмотренных раньше.

Среди параметров (8.30), в частности, может отсутствовать линейный размер d, например, при изучении задачи об обтекании бесконечных клина и конуса, когда начало системы координат взято в острие конуса или клина. В этом случае возникает свойство автомодельности; вместо трех безразмерных аргументов x/d, y/d, z/d получается только два безразмерных аргумента y/x, z/x.

В рассматриваемой задаче для сопротивления и подъемной силы верны формулы следующего вида:

$$W = c_W(\alpha, \beta, \gamma, M_\infty)\,\rho\, d^2 v_\infty^2, \qquad A = c_A(\alpha, \beta, \gamma, M_\infty)\,\rho\, d^2 v_\infty^2. \tag{8.32}$$

Очевидно, что в идеальном сжимаемом газе квадратичная зависимость сил W и A от скорости v из-за влияния числа Маха нарушается. Формулы (8.32) верны как для дозвуковых ($M_\infty < 1$), так и для сверхзвуковых ($M_\infty > 1$) скоростей набегающего потока. При обтекании со сверхзвуковыми скоростями в потоке могут быть скачки уплотнения. Функции $c_W(\alpha, \beta, \gamma, M_\infty)$ и $c_A(\alpha, \beta, \gamma, M_\infty)$ можно определять путем расчета на основании решения гидродинамической задачи или с помощью опытов в аэродинамических трубах, на специальных газодинамических установках или в свободном полете.

Задача Буссинеска

Рассмотрим классическую задачу Буссинеска из теории упругости. Пусть имеется однородная упругая среда, подчиняющаяся закону Гука и заполняющая полупространство. На плоскости, представляющей собой свободную поверхность упругого полупространства, по условию отсутствуют внешние поверхностные силы.

Начальное, недеформированное состояние полупространства соответствует состоянию, в котором отсутствуют всякие внешние нагрузки и внутренние напряжения. Деформирован-

ное состояние вызывается тем, что в некоторой точке свободной поверхности упругого полупространства приложена концентрированная сила $\mathcal{P}$. Для простоты примем, что сила $\mathcal{P}$ перпендикулярна к граничной плоскости в недеформированном состоянии. Задача состоит в определении напряженного и деформированного состояния в упругом полупространстве при равновесии в предположении, что при удалении в бесконечность от точки O перемещения стремятся к нулю. Очевидно, что решение этой задачи обладает осевой симметрией, причем ось симметрии проходит через вектор силы.

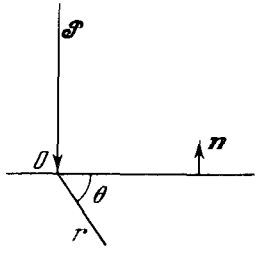


Рис. 65. Схема к задаче Буссинеска.

Рассмотрим эту задачу в рамках линейной теории упругости с линеаризованным граничным условием на свободной поверхности, перенесенным на начальную граничную невозмущенную плоскость. Это граничное условие имеет вид

$$p_n = 0$$

во всех точках свободной поверхности, за исключением точки O, в которой p_{nn} обращается в бесконечность, но так, что

$$p_{nn} = \mathcal{P}\delta(r), \tag{8.33}$$

где $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака.

Из уравнений движения, добавочных условий (8.33) и условий в бесконечности очевидно, что вектор перемещения и компоненты тензора внутренних напряжений определяются следующими параметрами:

$$\sigma, E, \mathcal{P}, r, \theta, \tag{8.34}$$

где r и θ — полярные координаты с центром в точке O в плоскостях, проходящих через вектор силы $\mathcal{P}$; σ — коэффициент Пуассона и E — модуль Юнга. Уравнения равновесия представляют собой уравнения в частных производных с двумя независимыми переменными r и θ. Из пяти параметров (8.34) можно образовать только три независимые безразмерные комбинации:

$$\sigma, \theta, \frac{\mathcal{P}}{Er^2}, \tag{8.35}$$

так как модуль Юнга имеет размерность давления. Отсюда следует, что все искомые безразмерные величины зависят от трех параметров (8.35).

Важное значение имеет линеаризация задачи. Так как величина силы $\mathcal{P}$ входит в граничное условие линейно, то очевидно,

что поле перемещений и внутренних напряжений зависит от силы $\mathcal{P}$ линейно, т. е. все искомые компоненты вектора перемещения и компоненты тензора внутренних напряжений просто пропорциональны параметру $\mathcal{P}/Er^2$. Поэтому, зная размерности искомых величин, мы полностью определим их зависимость от радиуса-вектора r. Например, для вектора перемещения $\boldsymbol{w}$ $(\mathcal{P}, E, \sigma, r, \theta)$, размерность которого есть размерность длины, можно написать

$$\boldsymbol{w} = \frac{\mathcal{P}}{Er^2}\, r\boldsymbol{f}(\sigma, \theta), \tag{8.36}$$

где $\boldsymbol{f}(\sigma, \theta)$ — некоторый вектор, зависящий только от одной переменной координаты.

Подстановка формулы (8.36) в уравнения равновесия приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям для искомых безразмерных функций. Эти соображения сильно упрощают задачу. Нужное решение легко получается с помощью интегрирования соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений.

§ 9. Подобие и моделирование явлений

Моделирование и физическое подобие

Теория размерности и подобия имеет большое значение при моделировании различных явлений. Моделирование есть замена изучения интересующего нас явления в натуре изучением аналогичного явления на модели меньшего или большего масштаба, обычно в специальных лабораторных условиях. Основной смысл моделирования заключается в том, чтобы по результатам опытов с моделями можно было давать необходимые ответы о характере эффектов и о различных величинах, связанных с явлением, в натурных условиях.

В большинстве случаев моделирование основано на рассмотрении физически подобных явлений. Изучение интересующего нас натурного явления мы заменяем изучением физически подобного явления, которое удобнее и выгоднее осуществить. Механическое или вообще физическое подобие можно рассматривать как обобщение геометрического подобия. Две геометрические фигуры подобны, если отношения всех соответственных длин одинаковы. Если известен коэффициент подобия — масштаб, то простым умножением размеров одной геометрической фигуры на величину масштаба получаются размеры другой, ей подобной геометрической фигуры.

Два явления физически подобны, если по заданным характеристикам одного можно получить характеристики другого

простым пересчетом, который аналогичен переходу от одной системы единиц измерения к другой. Для осуществления пересчета необходимо знать «переходные масштабы».

Численные характеристики для двух различных, но подобных, явлений можно рассматривать как численные характеристики одного и того же явления, выраженные в двух различных системах единиц измерения. Для всякой совокупности подобных явлений все соответствующие безразмерные характеристики (безразмерные комбинации из размерных величин) имеют одинаковое численное значение. Нетрудно видеть, что обратное заключение также справедливо, т. е. если все соответствующие безразмерные характеристики для двух движений одинаковы, то движения подобны. Совокупность механически подобных движений определяет собой режим движения.

Подобие двух явлений иногда можно понимать в более широком смысле, принимая, что указанное выше определение относится только к некоторой специальной системе характеристик, полностью определяющей явление и позволяющей находить любые другие характеристики, которые, однако, нельзя получить простым умножением на соответствующие масштабы при переходе от одного к другому «подобному» явлению. Например, в этом смысле два любых эллипса можно считать подобными при использовании декартовых координат, направленных по главным осям эллипсов. Указанным пересчетом можно получить декартовы координаты точек любого эллипса через координаты точек какого-либо одного эллипса (аффинное подобие).

Для сохранения подобия при моделировании необходимо соблюдать некоторые условия. Однако на практике сплошь и рядом эти условия, обеспечивающие подобие явления в целом, не выполняются, и тогда встает вопрос о величине погрешностей (масштабном эффекте), которые возникают при переносе на натуру результатов, полученных на модели.

Критерии подобия

После установления системы параметров, определяющих выделенный класс явлений, нетрудно установить условия подобия двух явлений.

В самом деле, пусть явление определяется n параметрами, некоторые из них могут быть безразмерными. Допустим, далее, что размерности определяющих переменных и физических постоянных выражены через размерности k из этих параметров с независимыми размерностями ($k \leqslant n$). Очевидно, что тогда из n величин можно составить $n - k$ независимых безразмерных комбинаций. Все безразмерные характеристики явления можно рассматривать как функции от этих $n - k$ независимых безразмерных комбинаций, составленных из определяющих параметров. Следовательно, среди всех безразмерных величин, составленных из характеристик явления, всегда можно указать

некоторую базу, т. е. систему безразмерных величин, которые определяют собой все остальные.

Определенный соответствующей постановкой задачи класс явлений содержит явления, вообще не подобные между собой. Выделение из него подкласса подобных явлений осуществляется с помощью следующего условия.

Для подобия двух явлений необходимо и достаточно, чтобы численные значения безразмерных комбинаций, образующих базу, в этих двух явлениях были одинаковы. Условия о постоянстве базы отвлеченных параметров, составленных из заданных величин, определяющих явление, называются критериями подобия.

Если условия подобия выполнены, то для фактического расчета всех характеристик в натуре по данным о размерных характеристиках на модели необходимо знать переходные масштабы для всех соответствующих величин. Если явление определяется n параметрами, из которых k имеют независимые размерности, то для величин с независимыми размерностями переходные масштабы могут быть произвольными и их нужно задать с учетом условий задачи, а при экспериментах и с учетом условий опытов. Переходные масштабы для всех остальных размерных величин легко получаются из формул, выражающих размерности каждой размерной величины через размерности k величин с независимыми размерностями, для которых масштабы подсказаны условиями опыта и постановки задачи.

Подобие при обтекании тел вязкой несжимаемой жидкостью

В задаче об установившемся обтекании тела несжимаемой вязкой жидкостью все безразмерные величины определяются тремя параметрами: углами α, β и числом Рейнольдса R. Условия физического подобия — критерии подобия представляются соотношениями

$$\alpha = \text{const},$$

$$\beta = \text{const},$$

$$\mathrm{R} = \frac{\rho v d}{\mu} = \text{const}.$$

Здесь подразумевается, что постоянные значения α, β и R означают одинаковость этих величин в различных подобных (соответственных) явлениях.

При моделировании явления результаты опытов с моделью можно переносить на натуру только при одинаковых α, β и R Первые два условия всегда легко осуществить на практике. Труднее удовлетворить третьему условию ($\mathrm{R} = \text{const}$), особенно в тех случаях, когда обтекаемое тело имеет большие разме-

ры, как, например, крыло самолета. Если модель меньше натуры, то для сохранения величины числа Рейнольдса необходимо либо увеличивать скорость обтекающего потока, что практически обычно неосуществимо, либо существенно изменять плотность и вязкость жидкости. На практике эти обстоятельства приводят к большим затруднениям при изучении аэродинамического сопротивления. Необходимость постоянства числа Рейнольдса привела к постройке гигантских аэродинамических труб, в которых можно производить продувки самолетов в натуральную величину, а также труб закрытого типа, в которых циркулирует с большой скоростью сжатый, т. е. более плотный, воздух.

Специальные теоретические и экспериментальные исследования показывают, что в ряде случаев для тел хорошо обтекаемой формы число Рейнольдса заметно влияет только на безразмерный коэффициент лобового сопротивления и иногда очень слабо влияет на безразмерный коэффициент подъемной силы и на некоторые другие величины, играющие весьма важную роль в различных практических вопросах. Следовательно, различие в значении числа Рейнольдса на модели и натуре в некоторых вопросах не является существенным.

Подобие при обтекании тел газом с учетом сжимаемости

Мы указали условия подобия для движения тел без учета свойства сжимаемости воздуха, которое несущественно при скоростях, малых по сравнению со скоростью звука.

В аэродинамике полетов с большими дозвуковыми и сверхзвуковыми скоростями влияние сжимаемости проявляется в первую очередь за счет числа Маха. В разобранной выше постановке задачи о движении в безграничной массе газа крыла или вообще тела любой формы при адиабатических процессах система отвлеченных определяющих параметров представляется таблицей (8.31). Параметрами, определяющими глобальные характеристики потока газа или характеристики движения и состояния в характерных точках, являются величины

$$\alpha, \beta, \gamma, M_\infty = \frac{v_\infty}{a_\infty}.$$

При моделировании необходимо обеспечить одинаковые значения этих параметров в натуре и в модельном эксперименте. Очевидно, что постоянство γ и числа Маха M_∞ — наиболее существенные критерии подобия. Значения γ связаны с выбором свойств газов. Для одного и того же газа условие $\gamma = \text{const}$ выполняется автоматически. Постоянство M_∞ должно обеспечиваться основными условиями постановки опытов.

О трудностях моделирования

Изменяя при моделировании основные параметры, мы встречаемся с проявлением в модельных опытах различных эффектов, которые в принятой постановке задачи для интересующего нас натурного явления несущественны. Например, при установившихся обтеканиях крыльев потоком воздуха с малыми скоростями число Маха мало, и поэтому свойство сжимаемости воздуха несущественно. Основным критерием подобия в этом случае является число Рейнольдса. При моделировании обтекания в воздушных аэродинамических трубах стремление сохранить число Рейнольдса $R = \rho v d/\mu$ при уменьшении размера d приводит, вообще говоря, к необходимости на малой модели повышать скорость v. Увеличение скорости набегающего потока приводит к увеличению числа Маха M_∞. Число Маха на малой модели будет бо́льшим, чем на натуре, и, хотя на натуре влияние сжимаемости может быть несущественным, на модели эффект влияния сжимаемости может резко проявиться, и подобие может нарушиться. Такого рода обстоятельства вносят существенные затруднения в постановку аэродинамических опытов и выдвигают ряд требований, которые следует учитывать при конструировании аэродинамических труб.

Другими примерами существенных эффектов, которые могут проявляться в модельных опытах и отсутствовать в подлежащих изучению натурных явлениях, могут служить эффекты кавитации, возникающие при движении тел в воде, и эффекты конденсации газов в испытательных установках. Возникновение этих эффектов связано с понижением размерных значений давления и температуры в некоторых областях движущейся среды. (Кавитация — это испарение воды в области низких давлений, а конденсация воздуха в аэродинамических трубах может происходить за счет очень резкого падения температуры при адиабатическом расширении частиц газа в некоторых частях газового потока.) Для устранения кавитации в воде требуется (см. гл. VIII) повышать «несущественное» внешнее давление в бесконечности p_∞. Для устранения конденсации газа требуется увеличивать в набегающем потоке температуру T_∞, несущественную с точки зрения критериев подобия в первоначальной постановке задачи. В связи с этим в аэродинамических трубах с большими сверхзвуковыми скоростями осуществляется, вообще говоря, значительный подогрев рабочего газа.

Моделирование плавания кораблей

При моделировании плавания кораблей для изучения их сопротивления и выяснения многих других гидродинамических вопросов (брызгообразование, качка на ходу, заливаемость

при движении по взволнованному морю и т. д.) проводятся буксировочные гидродинамические испытания малых моделей кораблей в специальных каналах.

Из данной выше постановки задачи и (8.28) следует, что для подобия в натуре и на модели необходимо выдерживать постоянными значения числа Рейнольдса R и числа Фруда F. Однако легко видеть, что для воды при $g = \text{const}$ одновременно удовлетворить равенствам

$$\mathsf{R} = \frac{\rho v d}{\mu} = \text{const} \quad \text{и} \quad \mathsf{F} = \frac{v}{\sqrt{gd}} = \text{const}$$

при условии уменьшения размера d невозможно. Из требования постоянства числа Рейнольдса следует, что скорость модели должна быть больше, чем скорость натурного изделия, а из требования постоянства числа Фруда следует, что скорость модели должна быть меньше скорости натурного изделия.

Моделирование по Фруду

Таким образом, строго говоря, полное механическое подобие при моделировании плавания кораблей при условии сохранения g и $\nu = \mu/\rho$ вообще неосуществимо. Однако детальное проникновение в сущность гидродинамических явлений показывает, что во многих вопросах влияние числа Рейнольдса можно учесть с помощью дополнительных расчетов или простых опытов. В гидродинамике обычных судов основное значение имеет число Фруда, и поэтому моделирование проводится с соблюдением постоянства числа Фруда — по Фруду.

Моделирование равновесия упругих конструкций

Рассмотрим теперь еще задачу о моделировании равновесия упругих конструкций. Пусть мы имеем какое-нибудь сооружение из однородного материала, например ферму моста. Упругие свойства изотропного материала определяются двумя постоянными: модулем Юнга E, $\kappa\Gamma/м^2$, и безразмерным коэффициентом Пуассона σ. Рассмотрим геометрически подобные конструкции и составим таблицу определяющих параметров.

Для определения всех размеров модели достаточно задать некоторый характерный размер d. Если в рассматриваемом состоянии равновесия вес конструкции существенен, то удельный вес материала $\gamma = \rho g$, $\kappa\Gamma/м^3$, должен фигурировать в качестве определяющего параметра. Кроме силы веса частей сооружения, на него обычно действуют еще внешние нагрузки, распределенные некоторым определенным образом по элементам конструкции. Пусть величина этих нагрузок определяется силой $\mathcal{P}$, $\kappa\Gamma$. Итак, система определяющих параметров будет следующей:

$$\sigma, E, d, \rho g, \mathcal{P},$$

В этом случае мы имеем $n = 5$, $k = 2$, следовательно, базой для механически подобных состояний упругого равновесия будут три безразмерных параметра:

$$\sigma, \frac{E}{\rho g d}, \frac{\mathcal{P}}{E d^2}.$$

Критерии подобия заключаются в постоянстве этих параметров на модели и в натуре. При выполнении этих условий все деформации будут подобными. Если модель в n раз меньше натуры, то на модели все перемещения будут в n раз меньше, чем в натуре.

Если модель и сооружение в натуре выполнены из одного и того же материала, то значения ρ, σ и E одинаковы на модели и в натуре, и поэтому для механического подобия необходимо удовлетворить условию

$$gd = \text{const}.$$

В обычных условиях $g = \text{const}$; следовательно, для соблюдения механического подобия должно быть $d = \text{const}$, т. е. модель должна совпадать с натурой. Иначе говоря, при постоянном g моделирование невозможно.

Моделирование с использованием центробежных машин

Изменение g можно осуществить искусственным путем, если заставить модель вращаться с постоянной угловой скоростью, поместив ее на так называемую центробежную машину. При достаточно малых размерах модели и большом радиусе вращения центробежные силы инерции элементов модели можно считать параллельными. Осуществляя вращение около вертикальной оси, мы получим, что в состоянии относительного равновесия модели (по отношению к центробежной машине) на модель будут действовать постоянные массовые силы, аналогичные силе тяжести, но только с другим ускорением. Выбором угловой скорости вращения можно получать любые большие значения ускорения.

В настоящее время имеются построенные центробежные машины, которые применяются для исследования на моделях различных процессов[1]), происходящих в грунтах.

Рассмотрим напряжение τ, $\kappa Г/м^2$, возникающее при деформации упругой конструкции под действием веса и заданного распределения нагрузок. Под τ мы можем понимать максимальное значение какой-нибудь компоненты напряжения или вооб-

[1]) Условие $\frac{E}{\rho g d} = \text{const}$ должно выполняться при моделировании процессов, в которых наряду с другими существенными параметрами встречаются параметры ρ, g, d и E. Поэтому во всех таких случаях возможно моделирование с помощью центробежной машины.

ще некоторую компоненту напряжения для определенного элемента конструкции.

Комбинация τ/E является безразмерной, поэтому можно написать

$$\frac{\tau}{E} = f\left(\sigma, \frac{E}{\rho g d}, \frac{\mathscr{P}}{E d^2}\right).$$

Если модель и сооружение в натуре сделаны из одинакового материала, то $E = \text{const}$; поэтому для механически подобных состояний напряжения в соответствующих точках будут одинаковыми.

Если мы примем, что напряженные состояния механически подобны и что разрушение определяется значениями максимальных напряжений, то очевидно, что на модели и в натуре разрушения наступят в соответственных точках.

Если величины внешних нагрузок велики, а собственный вес конструкции мал, так что им можно пренебречь, то параметр $\gamma = \rho g$ (следовательно, и параметр $E/\rho g d$) несущественен. В этом случае предыдущее соотношение приобретает вид

$$\frac{\tau}{E} = f\left(\sigma, \frac{\mathscr{P}}{E d^2}\right),$$

а условия подобия представятся только двумя равенствами:

$$\sigma = \text{const} \quad \text{и} \quad \frac{\mathscr{P}}{E d^2} = \text{const}.$$

Отсюда следует также, что при моделировании с сохранением свойств материалов внешние нагрузки необходимо изменять пропорционально квадрату линейных размеров.

Конструкции малых масштабов — более прочные

Обозначим через l изменение длины при деформации некоторого элемента упругой системы. Для конструкций определенного выше класса имеет место соотношение вида

$$\frac{l}{d} = \varphi\left(\sigma, \frac{\rho g d}{E}, \frac{\mathscr{P}}{E d^2}\right).$$

В ряде случаев из физических соображений сразу видно, что величина l/d уменьшается при уменьшении удельного веса элементов конструкции, т. е. при уменьшении параметра $\rho g d/E$.

Возьмем теперь две геометрически подобные конструкции разных размеров, изготовленные из одного и того же материала (E и σ одинаковые). Допустим, что величины внешних нагрузок изменяются пропорционально квадратам размеров, т. е.

$$\frac{\mathscr{P}}{E d^2} = \text{const},$$

Очевидно, в этом случае параметр $\rho gd/E$ уменьшается с уменьшением размеров конструкции, следовательно, механическое подобие будет нарушено. На конструкции меньших размеров относительные деформации будут меньше, поэтому конструкция малых размеров будет иметь большую прочность. Однако этот вывод справедлив только в том случае, когда удельный вес материала $\gamma = \rho g$ играет существенную роль. Если собственный вес (γ) несуществен, а $\mathcal{P}/Ed^2 = \text{const}$, то относительные деформации имеют одинаковые значения для тел различных масштабов.

Рассмотрим еще случай, когда γ несущественно и известно, что для данной конструкции отношение l/d уменьшается при уменьшении внешней нагрузки $\mathcal{P}$. Если внешние нагрузки будут пропорциональны кубу линейных размеров, то очевидно, что для конструкции малых размеров отношение l/d будет меньше, чем для конструкции больших размеров. Следовательно, в этом случае уменьшение размеров увеличивает прочность.

В некоторых случаях моделирование можно производить, используя опыты с заведомо неподобными явлениями, когда некоторые безразмерные параметры Π_1, Π_2, ... имеют различные значения на модели и на натуре, но вместе с тем из дополнительных соображений заранее известен вид зависимости искомых безразмерных величин от этих определяющих безразмерных параметров Π_1, Π_2... В таких случаях при моделировании нужно выдерживать постоянство только тех безразмерных параметров, зависимость от которых неизвестна.

Иногда указанный путь моделирования может применяться, когда вид зависимости искомых величин от параметров Π_1, Π_2, ... выдвигается в качестве рабочей гипотезы, которая может быть подтверждена или опровергнута уже после проведения модельных исследований. Как было указано выше, примером такого моделирования в ряде случаев служит моделирование при различных значениях числа Рейнольдса, когда его влияние на искомые характеристики несущественно, однако этот же прием можно применять и в тех случаях, когда число Рейнольдса существенно, но зависимость от числа Рейнольдса заранее известна.

Исследование с помощью моделей часто является единственно возможным способом экспериментального изучения и решения важнейших практических задач. Так обстоит дело при изучении натурных явлений, протекающих в течение десятков, сотен или даже тысяч лет; в условиях модельных опытов подобное явление может продолжаться несколько часов или дней. С таким положением мы встречаемся при моделировании явлений просачивания нефти. Могут быть и обратные случаи, когда вместо исследования чрезвычайно быстро протекающего

в природе явления можно изучать подобное ему явление, происходящее на модели гораздо медленнее.

Моделирование — ответственная научная задача, имеющая общее принципиальное и познавательное значение, но его нужно рассматривать только как исходную базу для главной задачи, которая состоит в фактическом определении законов природы, в отыскании общих свойств и характеристик различных классов явлений, в разработке экспериментальных и теоретических методов исследования и разрешения различных проблем, наконец, в получении систематических материалов, приемов, правил и рекомендаций для решения конкретных практических задач.

ДОБАВЛЕНИЕ I

НЕЛИНЕЙНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ФУНКЦИИ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ТЕНЗОРНЫХ АРГУМЕНТОВ[1)]

В. В. Лохин, Л. И. Седов

Многие основные геометрические и физические понятия представляют собой скалярные или тензорные величины. Математическая формулировка разнообразных закономерностей геометрической или физической природы осуществляется с помощью скалярных или тензорных соотношений.

Тензорная запись уравнений позволяет формулировать инвариантные закономерности, независимые от выбора системы координат. Тензорные характеристики и тензорные уравнения обладают дополнительными инвариантными свойствами и частными особенностями, когда изучаемые геометрические или физические явления, объекты, законы и свойства допускают симметрию.

Ниже развиваются методы для автоматического учета свойств симметрии как в линейных, так и в нелинейных задачах при помощи выделения соответствующих определяющих параметров, что связано с главными посылками в постановках исследуемых задач. Соответствующие выводы о действии симметрии получаются с помощью методов, аналогичных развитым в близкой по своему существу теории подобия и размерности [1].

Предлагаемая работа посвящена разрешению двух основных задач.

а) Показано, что свойства текстур и кристаллов можно задавать при помощи тензоров, и фактически установлены простые системы тензоров как совокупности параметрических геометрических величин, определяющих и задающих свойства симметрии для всех 7 типов текстур и для всех 32 классов кристаллов.

б) Установлен общий вид формул для тензоров произвольного ранга, когда эти тензоры можно рассматривать как функции системы аргументов, состоящей из ряда скаляров и нескольких независимых тензоров различных рангов.

Обе задачи тесно связаны с рассмотрением системы преобразований координат, образующих некоторую группу симметрии.

Свойства симметрии играют фундаментальную роль в физике. Специализация вида функций и вида тензоров различных рангов, инвариантных относительно соответствующих групп симметрии, исследована во многих работах. Соответствующие выводы исполь-

[1)] Статья, опубликованная в журнале «Прикладная математика и механика», 1963, т. 27, вып. 3.

зованы и послужили источником открытия новых эффектов в множестве различных приложений.

Сводка основных данных для различных конкретных примеров содержится в книге Дж. Ная [2], там же имеются подробные литературные ссылки на предшествующие работы.

В алгебре развита общая теория получения и свойств полиномиальных относительно компонент тензоров и векторов скалярных инвариантов относительно конечных групп преобразований. Для всякой ортогональной конечной группы G показано [3], что всегда существует целый рациональный базис полиномиальных инвариантов, представляющий собой конечное число скалярных инвариантных многочленов, составленных из компонент данных тензоров и векторов, такой, что через него можно выразить любой инвариантный многочлен, составленный из этих же компонент.

Целый рациональный базис образует систему инвариантов относительно конечного числа преобразований группы G, но очевидно, что его элементы — полиномы из компонент данных тензоров — вообще не инвариантны относительно любых преобразований координат, хотя и содержат в своем числе такие инварианты. Число элементов целого рационального базиса, зависящее только от группы и от заданного набора тензоров и векторов, вообще больше числа независимых переменных компонент данной системы тензоров и векторов и, следовательно, элементы целого рационального базиса, вообще говоря, функционально зависимы.

Фактическое построение целого рационального базиса для текстур и для кристаллических групп производилось в работах Дёринга [4], Смита и Ривлина [5], Пипкина и Ривлина [6] и Ю. И. Сиротина [7, 8]. Ниже показано, что для построения тензорных функций необходимо и достаточно пользоваться полной системой функционально независимых совместных инвариантов [9, 10], образованных из компонент тензоров, задающих группы симметрии, и других тензорных аргументов.

Построение примеров скаляров и тензоров с заданной симметрией дано в статьях Смита, Ривлина и Пипкина [5,11,12], в книге С. Багавантама и Т. Венкатарайуду [13], в работах Яна [14], А. В. Шубникова [15,16,17] и Ю. И. Сиротина [7,8,18,19]. В работе В. А. Кощика [20] рассматривались различные тензоры физической природы, симметрию кристалла он определяет как «группу пересечения симметрий существующих у кристалла свойств, наблюдаемых в данный момент» (стр. 935).

Тензоры, являющиеся функциями тензорных аргументов, рассматривались в случае тензоров второго ранга. В этом случае функциональные связи между тензорами сводятся к функциональным соотношениям между квадратными матрицами. В этой области основные результаты сводятся к формуле Гамильтона — Кэли и к ее обобщению на случай нескольких матричных аргументов [21–24, 25–28]

(тензоров второго ранга). Однако в этих обобщениях рассматривались в основном только полиномиальные функции матриц и компонент тензоров.

1°. Основные понятия. Как известно, тензоры можно рассматривать как инвариантные объекты, независимые от выбора системы координат, которые определяются скалярными компонентами в соответствующем базисе. Тензорный базис можно вводить различными способами, в частности, всегда можно взять в качестве базиса полиадные произведения из векторов базиса координатной системы в некотором многообразии-пространстве.

Для простоты в дальнейшем будем рассматривать только тензоры в трехмерном пространстве. Пусть x^1, x^2, x^3 — координаты точек пространства и $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ — векторы ковариантного базиса [1]). Обозначим через $\boldsymbol{H}$ тензор ранга r и через $H^{\alpha_1\ldots\alpha_r}$ его компоненты в координатном базисе $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$. В дальнейшем будем пользоваться представлением тензора $\boldsymbol{H}$ в виде суммы

$$\boldsymbol{H} = H^{\alpha_1\ldots\alpha_r}\mathfrak{e}_{\alpha_1}\ldots\mathfrak{e}_{\alpha_r}, \tag{1.1}$$

где суммирование подразумевается по всем индексам $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, пробегающим значения 1, 2, 3. В общем случае формула (1.1) содержит 3^r линейно независимых слагаемых, каждое из которых можно рассматривать как специальный тензор.

Заметим, что для одной и той же системы координат можно вводить различные континуальные многообразия и соответственно различные векторы базисов. При одинаковых координатах x^i и одинаковых компонентах $H^{\alpha_1\ldots\alpha_r}$ можно рассматривать различные тензоры, соответствующие разным базисам. В частности, такого рода различные многообразия можно рассматривать как различные положения данной среды при использовании вмороженной лагранжевой системы координат, движущейся и деформирующейся с течением времени [26]. Возможны также случаи, когда для заданной лагранжевой системы координат соответствующие различные многообразия имеют разную метрику. Таким образом, можно рассматривать одновременно разные тензоры с данными одинаковыми компонентами, но в различных базисах и в различных пространствах, некоторые из которых могут быть евклидовыми, а другие неевклидовыми (Kondo, Kröner, Bilby и др.).

Дальнейшая теория будет развита для тензоров в метрических пространствах. Обозначим через ds расстояние между точками с координатами x^i и $x^i + dx^i$. Пусть величина ds^2 определена формулой $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$. Матрица $\|g_{ij}\|$ образует ковариантные компоненты фундаментального метрического тензора $\boldsymbol{g}$, обратная матрица $\|g^{ij}\|$ — контравариантные компоненты. Контравариантные век-

[1]) Система координат произвольная.

торы базиса $\mathfrak{e}^i$ определяются формулами $\mathfrak{e}^i = g^{i\alpha}\mathfrak{e}_\alpha$. Для фундаментального метрического тензора $\boldsymbol{g}$ верны формулы

$$\boldsymbol{g} = g_{\alpha\beta}\mathfrak{e}^\alpha\mathfrak{e}^\beta = g^{\alpha\beta}\mathfrak{e}_\alpha\mathfrak{e}_\beta = \delta^\alpha_\beta\mathfrak{e}_\alpha\mathfrak{e}^\beta \qquad (\delta^i_j \text{ — символ Кронекера}). \quad (1.2)$$

Жонглирование индексами компонент различных тензоров осуществляется при помощи g_{ij} и g^{ij}. Формулу (1.1) можно представить в виде

$$\boldsymbol{H} = \sum_{s=1}^{p} k_s \boldsymbol{H}_s, \quad (1.3)$$

где k_s — скаляры, а $\boldsymbol{H}_s$ — некоторые тензоры ранга r. Дальше будем всегда предполагать, что тензоры $\boldsymbol{H}_s$ линейно независимы. Очевидно, что $p \leqslant 3^r$.

Пусть компоненты тензора $\boldsymbol{H}$ независимо от выбора системы координат являются одними и теми же функциями компонент m тензоров

$$\boldsymbol{T}_\varkappa = T_\varkappa^{\alpha_1\ldots\alpha_{\rho_\varkappa}}\mathfrak{e}_{\alpha_1}\ldots\mathfrak{e}_{\alpha_{\rho_\varkappa}} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, m). \quad (1.4)$$

Целые числа $\rho_1, \ldots, \rho_m$ определяют ранги тензоров $\boldsymbol{T}_\varkappa$. В общем случае числа $\rho_1, \ldots, \rho_m$ различны между собой и не равны r. По определению назовем тензор $\boldsymbol{H}$ функцией тензоров $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_m$. Тензоры $T_\varkappa$, среди которых могут быть как переменные, так и постоянные, являются тензорными аргументами тензорной функции $\boldsymbol{H}$.

Если из тензоров $\boldsymbol{T}_\varkappa$ можно составить 3^r линейно независимых тензоров $\boldsymbol{H}_s$ ранга r, то в этом случае для тензора $\boldsymbol{H}$ будет верна формула (1.3), в которой скаляры k_s зависят только от совместных инвариантов системы тензоров $\boldsymbol{T}_\varkappa$ и, возможно, от других заданных дополнительно скалярных аргументов.

Ниже рассмотрены только такие тензорные функции, когда среди тензорных аргументов $\boldsymbol{T}_\varkappa$ содержится тензор $\boldsymbol{g}$.

Тензоры $\boldsymbol{H}_s$ можно строить из тензоров $\boldsymbol{T}_\varkappa$ при помощи двух тензорных операций: умножения и свертывания. Операция свертывания по любым двум индексам всегда возможна в силу наличия среди тензорных аргументов тензора $\boldsymbol{g}$. Неопределенное умножение нескольких тензоров приводит к тензору, ранг которого равен сумме рангов сомножителей. Свертывание по $2l$ индексам понижает ранг тензора на $2l$ единиц. Умножение и очевидная свертка данного тензора $\boldsymbol{T}$ с компонентами T^{ikjl} на тензор $\boldsymbol{S}$ с компонентами $\delta^j_n\delta^i_m$ приводит к тензору $\boldsymbol{T}^*$ того же ранга с компонентами

$$T^{*ikjl\ldots} = T^{jkil\ldots}.$$

Тензор $\boldsymbol{T}^*$ называется изомером тензора $\boldsymbol{T}$. Таким образом, операцию перестановки индексов можно свести к умножению на фунда-

ментальный тензор и к сверткам. По определению тензор, полученный как результат перестановок нескольких индексов, тоже называется изомером тензора $\boldsymbol{T}$.

Ниже даются способы построения общих формул вида (1.3) для тензорных функций. Для этого потребуется строить линейно независимый тензорный базис $\boldsymbol{H}_s$ $(s = 1, \ldots, p)$ через тензорные аргументы (1.4). Построение базиса $\boldsymbol{H}_s$ будет осуществляться при помощи операций умножения и сверток из определяющих тензоров.

2°. Группы симметрии тензоров. Контравариантные компоненты $A^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ тензора $\boldsymbol{A}$ допускают группу симметрии G, заданную системой [1]) матриц преобразования координат

$$\| a^i{}_j \| \qquad \left(a^i{}_j = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\ ,\ y^i = y^i(x^j) \right),$$

если для каждой из всех матриц группы G выполняются равенства

$$A^{i_1 \ldots i_r} = A^{\alpha_1 \ldots \alpha_r} a^{i_1}{}_{\alpha_1} \ldots a^{i_r}{}_{\alpha_r}. \tag{2.1}$$

Группы преобразований, которые допускает фундаментальный тензор $\boldsymbol{g}$, называются ортогональными. Иначе говоря, матрицы преобразований для ортогональных групп удовлетворяют эквивалентным системам уравнений

$$g^{ij} = g^{\alpha\beta} a^i_{\cdot\alpha} a^j_{\cdot\beta}, \qquad g_{ij} = g_{\alpha\beta} a^\alpha_{\cdot i} a^\beta_{\cdot j}. \tag{2.2}$$

Легко проверить, что если группа G ортогональна, то из условия (2.1) об инвариантности контравариантных компонент тензора $\boldsymbol{A}$ следует инвариантность [2]) компонент тензора $\boldsymbol{A}$ с любым строением индексов относительно преобразований координат, образующих группу G. Поэтому для ортогональных преобразований можно говорить просто о симметрии тензора и об инвариантности всех его компонент относительно группы G.

Совокупность всех ортогональных преобразований, относительно которых тензор $\boldsymbol{A}$ инвариантен, образует группу симметрии тензора $\boldsymbol{A}$. Группа симметрии некоторого тензора $\boldsymbol{A}$ может состоять только из тождественного преобразования. Для произвольного тензора второго ранга (несимметричного, $A^{ij} \neq A^{ji}$) группа симметрии состоит из двух элементов: тождественного преобразования и преобразования инверсии. Для произвольного симметричного тензора второго ранга группа симметрии совпадает с группой совмещений трехосного эллипсоида. Если тензорный эллипсоид является эллипсоидом

[1]) Для простоты нумерация элементов матриц группы G опускается, так что в записях $a^i_{\cdot j}$ будет вместо $\alpha^{i}_{(\nu)j}$, где $\nu = 1, \ldots, h$, а h равно числу элементов группы G.

[2]) Если группа G не ортогональна, то из равенства (2.1) не следует ин антность компонент тензора $\boldsymbol{A}$ с другим строением индексов,

вращения, то группа симметрии будет бесконечной. Шаровой тензор второго ранга имеет группу симметрии, совпадающую с полной ортогональной группой вращений, так же как и фундаментальный тензор $\boldsymbol{g}$.

Рассмотрим несколько тензоров $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_m$ и обозначим через $G_1, \ldots, G_m$ соответственно их группы симметрий. Группа G, образованная пересечением групп $G_1, \ldots, G_m$, называется группой симметрии совокупности тензоров $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_m$. Нетрудно видеть, что тензор $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_m)$ будет допускать группу симметрии G; это следует из того, что компоненты тензора $\boldsymbol{H}$ являются функциями компонент тензоров $\boldsymbol{T}_i$, которые инвариантны относительно преобразований группы G; поэтому компоненты тензора $\boldsymbol{H}$ также будут инвариантны относительно группы G. В связи с этим очевидно, что группа симметрии тензора, полученного как результат операции умножения и свертывания нескольких тензоров, будет совпадать с пересечением групп симметрий составляющих тензоров или может обладать более высокой симметрией и содержит это пересечение как подгруппу.

Если тензор $\boldsymbol{H}$ допускает группу симметрии G, то число линейно независимых слагаемых p в формуле (1.3) вообще меньше, чем 3^r. Для заданной группы G и для тензора заданного ранга r число p можно вычислить при помощи теории характеров [13, 14, 30], соответствующие таблицы для текстур и кристаллических групп симметрии даны в работах [13, 14, 18].

Если тензор $\boldsymbol{H}$ нечетного ранга допускает только тривиальную группу G, состоящую из тождественного преобразования, то число линейно независимых слагаемых $p = 3^r$; в этом случае тензор $\boldsymbol{H}$ имеет самый общий вид.

Если тензор $\boldsymbol{H}$ четного ранга, то его группа симметрии G всегда состоит по крайней мере из двух элементов: тождественного преобразования и инверсии. Для группы симметрии, состоящей только из инверсии и тождественного преобразования, при нечетном r имеем $\boldsymbol{H} = 0$ и, следовательно, $p = 0$; при четном r имеем $p = 3^r$, в этом случае тензор четного ранга имеет самый общий вид.

В формуле (1.3) скалярные коэффициенты k_s в общем случае являются функциями совместных инвариантов тензоров $\boldsymbol{T}_1, \ldots \boldsymbol{T}_m$ и любого числа данных скаляров (например, температуры, концентрации и т. д.). Некоторые из совместных инвариантов могут быть постоянными параметрами, другие — переменными.

Обозначим через $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ полную систему совместных инвариантов [9,10] системы тензоров $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_m$. Из полноты системы инвариантов следует, что для всякого инварианта J, образованного из компонент системы тензоров $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_m$, имеет место функциональная связь

$$J = f(\Omega_1, \ldots, \Omega_N).$$

По определению инварианты Ω_i сохраняют свое значение и свой вид как функций компонент для любых преобразований координат, и инварианты можно получить с помощью операций тензорного

умножения и сверток, в этом случае инварианты представляют собой однородные полиномы [9,10] по компонентам тензоров $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_m$.

Предположим, что среди тензоров $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_m$ тензоры $\boldsymbol{T}_\nu, \ldots, \boldsymbol{T}_m$ $(1 < \nu \leqslant m)$ являются постоянными параметрическими тензорами.

Пусть совокупность тензоров $\boldsymbol{T}_\nu, \ldots, \boldsymbol{T}_m$ допускает конечную группу симметрии G^*.

Зафиксируем значения компонент тензоров $\boldsymbol{T}_\nu, \ldots, \boldsymbol{T}_m$, заданных в системе координат x^i. После этого инварианты Ω_i сводятся к ω_i, являющимися функциями только от компонент тензоров $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_{\nu-1}$, причем в системе координат x^i будут верны равенства $\omega_i = \Omega_i$.

В других системах координат эти равенства вообще не будут выполняться. Однако эти равенства будут выполняться для всех преобразований координат, определенных группой G^*, так как при этих преобразованиях компоненты всех тензоров $\boldsymbol{T}_\nu, \ldots, \boldsymbol{T}_m$ инвариантны. Величины ω_i вообще не будут инвариантны относительно любых преобразований координат. Ясно, что некоторые ω_i, зависящие только от компонент тензоров $\boldsymbol{T}_\nu, \ldots, \boldsymbol{T}_m$ или только от компонент тензоров $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_{\nu-1}$, не зависят от преобразования координат. Очевидно, что все величины ω_i как функции компонент тонзоров $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_{\nu-1}$ можно рассматривать как инварианты относительно группы G^*. Таким образом, инвариантные коэффициенты k_s в формуле (1.3) будут функциями Ω_i. При применении только преобразований координат из группы G^* величины k_s можно рассматривать как функции только инвариантов ω_i.

Инварианты ω_i аналогичны инвариантам целого рационального базиса. Величины ω_i совпадают с целым рациональным базисом при подходящем выборе полной системы инвариантов Ω_i. В общем случае особое значение имеют переменные функционально независимые инварианты. Функционально независимые инварианты можно выбирать различными способами.

Фактическое построение тензоров $\boldsymbol{H}_s$ через заданные определяющие тензоры $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_m$ всегда возможно и соответствующие общие приемы будут выявлены на примерах.

Линейную независимость тензоров $\boldsymbol{H}_s$ можно устанавливать непосредственно на основании геометрических соображений или проверкой при помощи вычисления соответствующих детерминантов или при помощи других общих методов. В частности, тензоры $\boldsymbol{H}_{s_1}$ и $\boldsymbol{H}_{s_2}$ линейно независимы, если они ортогональны или группы симметрии тензоров $\boldsymbol{H}_{s_1}$ и $\boldsymbol{H}_{s_2}$ не совпадают, так как в противном случае эти два тензора были бы пропорциональны, что противоречит условиям их симметрии. Однако тензоры, обладающие одной и той же группой симметрии, могут быть линейно независимыми.

Пусть тензору $\boldsymbol{H}_s$ соответствует группа симметрии G_s.

В ряде случаев удобно и выгодно [10] тензоры $\boldsymbol{H}_s$ выбирать таким образом, чтобы $G_1 \supseteq G_2 \supseteq G_3 \supseteq \ldots \supseteq G_p$.

Очевидно, что в качестве первых q линейно независимых тензоров $\boldsymbol{H}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_q$ всегда можно взять $q \leqslant p$ тензоров $\boldsymbol{H}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_q$, зависящих только от фундаментального тензора $\boldsymbol{g}$ или от $\boldsymbol{g}$ и тензора третьего ранга $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{E} = |g^{ij}|^{1/2}(\boldsymbol{\vartheta}_1\boldsymbol{\vartheta}_2\boldsymbol{\vartheta}_3 - \boldsymbol{\vartheta}_1\boldsymbol{\vartheta}_3\boldsymbol{\vartheta}_2 + \boldsymbol{\vartheta}_2\boldsymbol{\vartheta}_3\boldsymbol{\vartheta}_1 - \boldsymbol{\vartheta}_2\boldsymbol{\vartheta}_1\boldsymbol{\vartheta}_3 + \boldsymbol{\vartheta}_3\boldsymbol{\vartheta}_1\boldsymbol{\vartheta}_2 - \boldsymbol{\vartheta}_3\boldsymbol{\vartheta}_2\boldsymbol{\vartheta}_1). \quad (2.3)$$

Эти тензоры соответствуют изотропии относительно полной или собственной ортогональной группы. Изотропные тензоры $\boldsymbol{H}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_q$ ранга r хорошо известны из литературы [3, 9, 10, 30].

Для изотропных тензоров ранга r в трехмерном пространстве максимальное число q будет равно [30]

$r =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$q =$	0	1	1	3	6	15	36	91	232	603

Все изотропные тензоры ранга r представляют собой изомеры тензора $\boldsymbol{H}_1$, причем

$$H_1^{\alpha_1 \ldots \alpha_r} = g^{\alpha_1\alpha_2} \ldots g^{\alpha_r\alpha_{r-1}} \qquad (r = 2k),$$

$$H_1^{\alpha_1 \ldots \alpha_r} = E^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} g^{\alpha_4\alpha_5} \ldots g^{\alpha_{r-1}\alpha_r} \qquad (r = 2k+1).$$

Число q равно числу различных линейно независимых изомеров тензора $\boldsymbol{H}_1$ с учетом симметрии компонент тензора g^{ij}. Если число r нечетное, то для полной ортогональной группы $q = 0$. Все тензоры нечетного ранга, инвариантные относительно полной ортогональной группы, обращаются в нуль. Тензоры нечетного ранга, инвариантные относительно собственной ортогональной группы вращения с $\Delta = |a^i_{\cdot j}| = 1$, могут отличаться от нуля только для $r \geqslant 3$.

При $r = 3$ имеем $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{E}$ и, следовательно, $q = 1$.

Наличие симметрии тензорной функции относительно некоторой группы перестановок индексов уменьшает, вообще говоря, числа p и q. Формулы для тензорных функций с наличием соответствующей симметрии по индексам всегда легко получить из полных формул при помощи операций симметрирования или альтернирования по соответствующим индексам и с сохранением только линейно независимых слагаемых.

3°. Тензоры, задающие геометрическую симметрию текстур и кристаллов [29]. Среда называется изотропной, если все ее свойства в каждой точке инвариантны относительно группы ортогональных преобразований. Можно различать следующие два типа изотропных сред:

1) изотропные среды относительно полной ортогональной группы преобразований координат с $\Delta = \pm 1$,

2) изотропные среды относительно группы вращений с $\Delta = +1$ (гиротропные среды).

Легко видеть, что в первом случае свойства симметрии характеризуются вполне фундаментальным тензором $\boldsymbol{g}$. Условие инвариантности компонент тензора $\boldsymbol{g}$ можно рассматривать как условие, определяющее бесконечное множество всех вещественных матриц — элементов полной ортогональной группы.

Группа вращений с $\Delta = +1$, определяющая гиротропные среды, является подгруппой полной ортогональной группы. Такую подгруппу можно выделить дополнительным к уравнениям (2.2) требованием об инвариантности компонент тензора $\boldsymbol{E}$, определенного формулой (2.3). Следовательно, бесконечное множество элементов группы вращений определяется вполне условием инвариантности тензоров $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{E}$. Эти два тензора можно рассматривать как тензоры, определяющие группу вращений с $\Delta = +1$.

Дальше для обозначения групп симметрии мы воспользуемся краткими символами, предложенными А. В. Шубниковым [15, 16]. Согласно А. В. Шубникову полная ортогональная группа обозначается символом $\infty/\infty \cdot m$ (образующие элементы группы: пересекающиеся оси бесконечного порядка и зеркальная плоскость симметрии m). Группа вращения соответствует символу ∞/∞.

В 2° приведены данные об общем виде тензорных функций для тензоров любого ранга при наличии изотропии, т. е. когда аргументами являются только $\boldsymbol{g}$ или $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{E}$.

Простейшим примером анизотропной среды являются текстуры. Текстурой называется такая среда, для которой все ее свойства в каждой точке инвариантны относительно бесконечной ортогональной группы, содержащей повороты на любой угол относительно некоторой оси. Очевидно, что группы симметрии текстур являются подгруппами полной ортогональной группы. Простой анализ показывает, что, включая два типа изотропных сред, возможны только семь различных типов текстур. Соответствующие геометрические иллюстрации для различных типов текстур и соответствующие тензоры и векторы, задающие группы симметрии текстур, даны в прилагаемой таблице (стр. 446). Справедливость этих результатов легко проверить непосредственно.

Анизотропная среда с непрерывным или дискретным строением называется кристаллом, если можно ввести систему трояко-периодических решеток Браве (с одинаковыми в фиксированной системе координат периодами у разных решеток), имеющую те же геометрические свойства симметрии, что и рассматриваемая среда — кристалл. Совокупность решеток Браве с данными периодами может допускать точечные конечные группы симметрии. Вид этих групп зависит от строения рассматриваемого множества решеток и от вида элементарного параллелепипеда периодов.

Как известно [2, 16], имеется только 32 различных класса симметрии кристаллов, описываемых конечными точечными группами. В таблице (стр. 446) приведены характеризующие данные для всех

32 классов кристаллов; соответствующие геометрические фигуры иллюстрируют каждую из групп симметрии. Единичные векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ образуют ортогональный кристаллофизический базис, на чертежах указана ориентация этого базиса относительно фигур симметрии кристалла. В левом углу каждой ячейки дано обозначение соответствующей группы по А. В. Шубникову, кроме того, в каждой ячейке приведены символы установленной нами совокупности простых тензоров, характеризующих и задающих данную группу. Определение соответствующих тензоров дано формулами, приведенными в этой же таблице [1]).

Рассмотрим тензоры, определяющие симметрии групп кубической сингонии. Докажем, что тензор $\boldsymbol{O}_h$ инвариантен относительно группы из 48 преобразований, дающей изоморфное представление группы $\bar{6}/4$, и что нет никаких других преобразований, относительно которых тензор $\boldsymbol{O}_h$ инвариантен. Для доказательства найдем все вещественные преобразования, относительно которых тензор $\boldsymbol{O}_h$ инвариантен. Условия инвариантности контравариантных компонент тензора $\boldsymbol{O}_h$ равносильны следующей системе нелинейных алгебраических уравнений для девяти элементов матрицы преобразования $\|a^i{}_j\|$:

$$a^{\alpha}{}_1 a^{\beta}{}_1 a^{\gamma}{}_1 a^{\delta}{}_1 + a^{\alpha}{}_2 a^{\beta}{}_2 a^{\gamma}{}_2 a^{\delta}{}_2 + a^{\alpha}{}_3 a^{\beta}{}_3 a^{\gamma}{}_3 a^{\delta}{}_3 = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}. \tag{3.1}$$

Правую часть нужно положить равной единице, если $\alpha = \beta = \gamma = \delta$, и нулю в остальных случаях. Полагая здесь $\alpha = \beta$ и $\gamma = \delta$, при $\alpha \neq \gamma$ получим уравнения

$$(a^{\alpha}{}_1)^2 (a^{\gamma}{}_1)^2 + (a^{\alpha}{}_2)^2 (a^{\gamma}{}_2)^2 + (a^{\alpha}{}_3)^2 (a^{\gamma}{}_3)^2 = 0 \qquad (\alpha \neq \gamma). \tag{3.2}$$

Отсюда следует, что

$$a^{\alpha}{}_i a^{\gamma}{}_i = 0. \tag{3.3}$$

Так как определитель $|a^{\alpha}{}_i| \neq 0$, то из равенств (3.3) следует, что в каждой строке и в каждом столбце матрицы $\|a^{\alpha}{}_i\|$ имеется только по одному элементу, отличному от нуля.

Так как $(a^{\alpha}{}_1)^4 + (a^{\alpha}{}_2)^4 + (a^{\alpha}{}_3)^4 = 1$ при $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ согласно (3.1), то для каждого вещественного элемента матрицы $\|a^{\alpha}{}_i\|$, отличного от нуля, верно равенство

$$a^p{}_q = \pm 1. \tag{3.4}$$

На основании перечисления всех возможных случаев из (3.3) и (3.4) следует, что матрицы, состоящие из элементов $(a^p{}_q)^2$, равных 1

[1]) В этой таблице и в дальнейшем степени векторов понимаются как диадные или полиадные произведения.

x^1, x^2, x^3 — кристаллофизические декартовы координаты

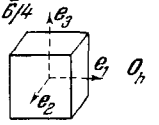
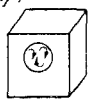
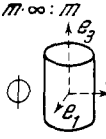
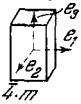
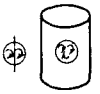
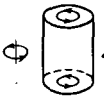
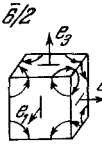
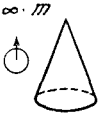
ξ^1, ξ^2, ξ^3 — произвольные координаты

$$a^{i}_{\cdot j} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}, \quad \Delta = |a^{i}_{\cdot j}|, \quad e_i = \frac{\partial r}{\partial x^i}$$

$$\vartheta_i = \frac{\partial r}{\partial \xi^i}$$

$$e_j = a^{\alpha}_{\cdot j}\vartheta_\alpha, \quad e_3^2 = a^{\alpha}{}_3 a^{\beta}{}_3 \vartheta_\alpha \vartheta_\beta$$

$$g = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = g^{\alpha\beta}\vartheta_\alpha\vartheta_\beta$$

Гекатуры	Кубическая сингония	Тетрагональная сингония	Гексагональная сингония
$\infty/\infty \cdot m$  g	$\bar{6}/4$  O_h		
∞/∞  g, E	$3/4$  O_h, E		
$m \cdot \infty : m$  g, e_3^2	$3/\bar{4}$  T_d, g	$m \cdot 4 : m$  O_h, e_3^2 $\bar{4} \cdot m$  T_d, g, e_3^2	$m \cdot 6 : m$  D_{6h}, e_3^2 $m \cdot 3 : m$  D_{3h}, e_3^2
$\infty : 2$  g, E, e_3^2	$3/2$  T_d, g, E (T_h, E)	$4 : 2$  O_h, E, e_3^2	$6 : 2$  D_{6h}, E, e_3^2
$\infty : m$  g, e_3^2, Ω	$\bar{6}/2$  T_h	$4 : m$  O_h, e_3^2, Ω $\bar{4}$  T_d, g, e_3^2, Ω	$6 : m$  D_{6h}, e_3^2, Ω $\bar{3} : m$  D_{3h}, e_3^2, Ω
$\infty \cdot m$  g, e_3		$4 \cdot m$  O_h, e_3	$6 \cdot m$  D_{6h}, e_3
∞  g, E, e_3		4  O_h, E, e_3	6  D_{6h}, E, e_3

$$E = e_1e_2e_3 - e_2e_1e_3 + e_2e_3e_1 - e_3e_2e_1 + e_3e_1e_2 - e_1e_3e_2 =$$
$$= \Delta\,(\partial_1\partial_2\partial_3 - \partial_2\partial_1\partial_3 + \partial_2\partial_3\partial_1 - \partial_3\partial_2\partial_1 + \partial_3\partial_1\partial_2 - \partial_1\partial_3\partial_2),$$

$$\Omega = e_1e_2 - e_2e_1 = (a^{\alpha}{}_1a^{\beta}{}_2 - a^{\alpha}{}_2a^{\beta}{}_1)\,\partial_\alpha\partial_\beta = a^{\alpha}{}_1a^{\beta}{}_2\,(\partial_\alpha\partial_\beta - \partial_\beta\partial_\alpha),$$

$$O_h = e_1^4 + e_2^4 + e_3^4 = (a^{\alpha}{}_1a^{\beta}{}_1a^{\gamma}{}_1a^{\delta}{}_1 + a^{\alpha}{}_2a^{\beta}{}_2a^{\gamma}{}_2a^{\delta}{}_2 + a^{\alpha}{}_3a^{\beta}{}_3a^{\gamma}{}_3a^{\delta}{}_3)\,\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma\partial_\delta,$$

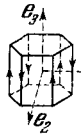
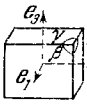
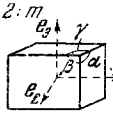
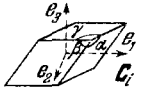
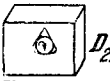
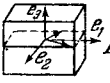
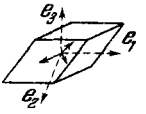
$$T_h = e_1^2e_2^2 + e_2^2e_3^2 + e_3^2e_1^2,\quad T_d = e_1e_2e_3 + e_2e_1e_3 + e_2e_3e_1 + e_3e_2e_1 + e_3e_1e_2 + e_1e_3e_2,$$

$$D_{3h} = e_1^3 - e_1e_2^2 - e_2e_1e_2 - e_2^2e_1,\quad D_{3d} = e_3\,(e_1^3 - e_1e_2^2 - e_2e_1e_2 - e_2^2e_1),$$

$$D_{6h} = (e_1^3 - e_1e_2^2 - e_2e_1e_2 - e_2^2e_1)^2,$$

$$D_{2h} = \lambda^{11}e_1^2 + \lambda^{22}e_2^2 + \lambda^{33}e_3^2 = \lambda^{ij}a^{\alpha}{}_i a^{\beta}{}_j\,\partial_\alpha\partial_\beta = d^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$$
$$(\lambda^{11} \neq \lambda^{22} \neq \lambda^{33} \neq \lambda^{11} \neq 0,\quad d^{\alpha\beta} = d^{\beta\alpha}),$$

$$C_i = D_{2h} + \omega^{ij}e_ie_j = C^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta;\quad \omega^{ij} = -\omega^{ji} \neq 0.$$

Тригональная сингония	Ромбическая сингония	Моноклинная сингония	Триклинная сингония
$\bar{6}\cdot m$  D_{3d}, e_3^2	$m\cdot 2:m$  D_{2h}, g $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$		
$3:2$  D_{3h}, E, e_3^2	$2:2$  D_{2h}, E, g		
$\bar{6}$  D_{3d}, e_3^2, Ω		$2:m$  D_{2h}, Ω, g $\alpha=\beta=90^\circ\ \gamma\neq 90^\circ$	$\bar{2}$  C_i $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$ $\alpha,\beta,\gamma\neq 90^\circ$
$3\cdot m$  D_{3h}, e_3	$2\cdot m$  D_{2h}, e_3, g		
3  D_{3h}, E, e_3		2  D_{2h}, E, e_3, g m  D_{2h}, e_1, e_2	1  e_1, e_2, e_3

либо 0 могут иметь следующий вид:

$$\left\{\begin{array}{lll} \begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix}, & \begin{Vmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{Vmatrix}, & \begin{Vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{Vmatrix}, \\ \begin{Vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{Vmatrix}, & \begin{Vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{Vmatrix}, & \begin{Vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{Vmatrix}. \end{array}\right\} \tag{3.5}$$

Получилась система, состоящая только из шести матриц. Если согласно (3.4) учесть возможности в различии знаков для $a^p{}_q$, то каждая из шести матриц (3.5) порождает 8 матриц для $\|a^p{}_q\|$, например, первой из матриц (3.5) соответствуют матрицы

$$\left\{\begin{array}{lll} \begin{Vmatrix}+1&0&0\\0&+1&0\\0&0&+1\end{Vmatrix}, & \begin{Vmatrix}+1&0&0\\0&+1&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}, & \\ \begin{Vmatrix}+1&0&0\\0&-1&0\\0&0&+1\end{Vmatrix}, & \begin{Vmatrix}+1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}, & \\ \begin{Vmatrix}-1&0&0\\0&+1&0\\0&0&+1\end{Vmatrix}, & \begin{Vmatrix}-1&0&0\\0&+1&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}, & \\ \begin{Vmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&+1\end{Vmatrix}, & \begin{Vmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}. & \end{array}\right\} \tag{3.6}$$

Как известно, по определению группы симметрии куба $\bar{6}/4$ полная система матриц типа (3.6) для каждой из матриц системы (3.5) образует полную группу матриц преобразований симметрии куба для группы $\bar{6}/4$, состоящей из $6 \times 8 = 48$ матриц, которые ортогональны. Таким образом, всякая матрица, соответствующая решению системы уравнений (3.1) может быть только одной из матриц системы (3.6), состоящей из 48 матриц. С другой стороны, легко убедиться в том, что верно и обратное предложение: каждая матрица из найденной системы 48 матриц дает решение системы уравнений (3.1).

Найдем теперь матрицы групп преобразований, сохраняющие инвариантным тензор $\boldsymbol{T}_d$. Условия инвариантности контравариантных компонент тензора $\boldsymbol{T}_d$ равносильны следующей системе нелинейных алгебраических уравнений для девяти элементов матрицы

преобразования a^i_j

$$a^\alpha{}_1 a^\beta{}_2 a^\gamma{}_3 + a^\alpha{}_2 a^\beta{}_1 a^\gamma{}_3 + a^\alpha{}_3 a^\beta{}_2 a^\gamma{}_1 + a^\alpha{}_1 a^\beta{}_3 a^\gamma{}_2 + \\ + a^\alpha{}_2 a^\beta{}_3 a^\gamma{}_1 + a^\alpha{}_3 a^\beta{}_1 a^\gamma{}_2 = \begin{cases} 1 \\ 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

В правой части (3.7) нужно поставить единицу, если α, β, γ различны, и поставить нуль, если одинакова хотя бы одна пара индексов из α, β, γ. Возьмем из (3.7) уравнения, для которых $\gamma = \beta$. Эти уравнения имеют вид

$$a^\alpha{}_1 a^\beta{}_2 a^\beta{}_3 + a^\alpha{}_2 a^\beta{}_1 a^\beta{}_3 + a^\alpha{}_3 a^\beta{}_1 a^\beta{}_2 = 0 \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, 3 \\ \beta = 1, 2, 3 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Так как $|a^i_j| \neq 0$, то из системы уравнений (3.8) следует, что

$$a^\beta{}_i a^\beta{}_j = 0. \quad (3.9)$$

Здесь β — любой фиксированный индекс.

Отсюда и из условия $|a^i{}_j| \neq 0$ следует, что в каждой строке и в каждом столбце матрицы $\|a^i{}_j\|$ имеется только один элемент, отличный от нуля. Таких матриц с разным строением индексов у элементов, отличных от нуля, имеется только шесть:

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & c_2 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 0 & a_3 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{matrix} \right\|, \\ \left\| \begin{matrix} 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 \\ c_4 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & a_5 \\ 0 & b_5 & 0 \\ c_5 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & a_6 \\ b_6 & 0 & 0 \\ 0 & c_6 & 0 \end{matrix} \right\|. \quad (3.10)$$

Уравнения (3.7) с различными индексами α, β, γ дают

$$a_i b_i c_i = 1 \qquad (i = 1, \ldots, 6) \quad (3.11)$$

Легко видеть, что для ортогональных преобразований, когда выполнены условия

$$\sum_{\alpha=1}^{3} a^i{}_\alpha a^j{}_\alpha = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j, \end{cases} \quad (3.12)$$

верны равенства

$$a_i = \pm 1, \quad b_i = \pm 1, \quad c_i = \pm 1. \quad (3.13)$$

В общем случае для получения представления группы симметрии 3/4 требование об инвариантности тензора T_d необходимо дополнить

условием инвариантности тензора g, так как только в этом случае условия (3.12), входящие в определение кристаллических групп симметрии, будут выполнены [1]).

Система матриц (3.10) вместе с условиями (3.13) определяет 48 матриц группы симметрии $\bar{6}/4$, однако добавочные равенства (3.11) выделяют подгруппу из 24 матриц, у которых либо $a_i = b_i = c_i = 1$, либо сразу два элемента из трех чисел a_i, b_i, c_i равны -1. Например, из первой матрицы (3.10) получим только четыре матрицы:

$$\left.\begin{array}{l} \left\|\begin{array}{ccc} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{array}\right\|, \quad \left\|\begin{array}{ccc} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right\|, \\ \left\|\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{array}\right\|, \quad \left\|\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right\|. \end{array}\right\} \tag{3.14}$$

Легко проверить, что найденная система 24 матриц, представляющая группу $3/\bar{4}$, является решением полной системы уравнений (3.7). Причем эта система матриц при $|a^i_j| \neq 0$ образует систему всех действительных решений уравнений (3.7) при условии, что искомые матрицы ортогональны. Рассмотрим теперь условия инвариантности тензора T_h.

Система уравнений для a^i_j, элементов матрицы преобразования, равносильная условиям инвариантности контравариантных компонент тензора T_h имеет вид

$$a^\alpha_2 a^\beta_2 a^\gamma_3 a^\delta_3 + a^\alpha_3 a^\beta_3 a^\gamma_1 a^\delta_1 + a^\alpha_1 a^\beta_1 a^\gamma_2 a^\delta_2 = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \tag{3.15}$$

причем справа нужно поставить 1 при $\alpha = \beta = 2$, $\gamma = \delta = 3$; $\alpha = \beta = 3$, $\gamma = \delta = 1$; $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = \delta = 2$ и положить правую часть равной нулю во всех остальных случаях. Из (3.15) имеем

при $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = \delta = 1,3$

$$a^1_2 a^1_3 = 0, \quad a^1_2 a^3_3 = 0, \quad a^1_3 a^1_1 = 0, \quad a^1_3 a^3_1 = 0, \quad a^1_1 a^1_2 = 0, \quad a^1_1 a^3_2 = 0, \tag{3.16}$$

при $\alpha = \beta = 2$, $\gamma = \delta = 1,2$

$$a^2_2 a^1_3 = 0, \quad a^2_2 a^2_3 = 0, \quad a^2_3 a^1_1 = 0, \quad a^2_3 a^2_1 = 0, \quad a^2_1 a^1_2 = 0, \quad a^2_1 a^2_2 = 0, \tag{3.17}$$

при $\alpha = \beta = 3$, $\gamma = \delta = 2, 3$

$$a^3_2 a^2_3 = 0, \quad a^3_2 a^3_3 = 0, \quad a^3_3 a^2_1 = 0, \quad a^3_3 a^3_1 = 0, \quad a^3_1 a^2_2 = 0, \quad a^3_1 a^3_2 = 0. \tag{3.18}$$

[1]) Легко проверить, что при $|e_i| = 1$ верно равенство $2g = T_d : T_d$, где свертка производится по двум одинаково расположенным индексам; однако из этого равенства не следует инвариантность g относительно преобразований (3.10) с учетом (3.11).

Из 18 уравнений (3.16) — (3.18) и из условия $|a^i_j| \neq 0$ следует, что в каждой строке и в каждом столбце матрицы $\| a^i_j \|$ только один элемент может отличаться от нуля; так, если

$$a^1_1 \neq 0, \text{ то } a^1_2 = a^1_3 = a^3_2 = a^2_3 = a^2_1 = a^3_1 = 0.$$

Таким образом, получаем матрицы

$$\text{при } a^1_1 \neq 0 \qquad \text{при } a^1_2 \neq 0 \qquad \text{при } a^1_3 \neq 0$$

$$\begin{Vmatrix} a^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2_2 & 0 \\ 0 & 0 & a^3_3 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & a^1_2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2_3 \\ a^3_1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & a^1_3 \\ a^2_1 & 0 & 0 \\ 0 & a^3_2 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{3.19}$$

Три уравнения (3.15), когда правая часть равна единице при $a^1_1 \neq 0$, дают

$$(a^2_2)^2 (a^3_3)^2 = 1, \quad (a^3_3)^2 (a^1_1)^2 = 1, \quad (a^1_1)^2 (a^2_2)^2 = 1. \tag{3.20}$$

Вещественные решения этих уравнений и уравнений, которые получаются аналогично, при $a^1_2 \neq 0$ и $a^1_3 \neq 0$ даются равенствами

$$\begin{aligned} &a^1_1 = \pm 1, \ a^2_2 = \pm 1, \ a^3_3 = \pm 1, \\ &a^1_2 = \pm 1, \ a^2_3 = \pm 1, \ a^3_1 = \pm 1, \\ &a^1_3 = \pm 1, \ a^2_1 = \pm 1, \ a^3_2 = \pm 1. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Из найденных значений для a^1_1 следует, что каждая из матриц (3.19) расщепляется на 8 матриц, всего получим подгруппу матриц для 6/4, состоящую из $3 \times 8 = 24$ ортогональных матриц. Ясно, что полученные решения удовлетворяют полной системе уравнений (3.15) и всякое вещественное решение содержится в найденном.

Добавление в качестве определяющей величины тензора $\boldsymbol{E}$, инвариантного только по отношению к группе собственных вращений, при $\Delta = +1$ приводит к исключению матриц с $\Delta = -1$. Совокупность двух тензоров $\boldsymbol{O}_h$ и $\boldsymbol{E}$ выделяет из найденной для $\boldsymbol{O}_h$ группы 48 матриц подгруппу, состоящую из 24 матриц с $\Delta = +1$.

Совокупность тензоров $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{T}_d$ и $\boldsymbol{E}$ также выделяет из 24 матриц, найденных для группы $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{T}_d$, подгруппу, состоящую из 12 матриц с $\Delta = +1$. Фактическое выделение соответствующих матриц показывает, что группы преобразований, соответствующие системам из 12 матриц для тензоров $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{T}_d$, $\boldsymbol{E}$ и тензоров $\boldsymbol{T}_h$, $\boldsymbol{E}$, совпадают между собой.

Эквивалентность отмеченных в таблице тензоров и соответствующих групп симметрии для тетрагональной сингонии вытекает из следующих соображений. Группы симметрии тетрагональной сингонии можно получить как пересечение соответствующих групп симметрии кристаллов кубической сингонии и групп симметрии текстур.

Поэтому выделение соответствующих подгрупп из групп кубической сингонии и из групп текстур можно осуществить путем образования совокупности тензоров из тензоров, задающих соответствующие группы кубической симметрии, и тензоров, задающих группы текстур. Легко усмотреть непосредственно, что условие инвариантности отмеченных совокупностей тензоров для каждого из 7 классов тетрагональной сингонии определяет группы матриц преобразований соответствующих группам симметрии именно этих кристаллических классов.

Для обоснования выбора тензоров, задающих симметрию гексагональной и тригональной сингоний, необходимо рассмотреть условия инвариантности компонент следующих пар тензоров: $\boldsymbol{D}_{6h}$ и $\boldsymbol{e}_3^2$, $\boldsymbol{D}_{3h}$ и $\boldsymbol{e}_3^2$, $\boldsymbol{D}_{3d}$ и $\boldsymbol{e}_3^2$. Условие инвариантности диады $\boldsymbol{e}_3^2$ выделяет в качестве допустимых матриц преобразования координат только матрицы следующего вида:

$$\begin{Vmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{Vmatrix}. \tag{3.22}$$

Из инвариантности D_{6h}, или D_{3h}, или D_{3d} следует, что $a^1{}_3 = a^2{}_3 = 0$.

Если вместо $\boldsymbol{e}_3^2$ потребовать инвариантность вектора $\boldsymbol{e}_3$, то это приведет к матрицам преобразования вида

$$\begin{Vmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & 0 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix}. \tag{3.23}$$

Так как $\boldsymbol{D}_{6h}$, $\boldsymbol{D}_{3h}$ и $\boldsymbol{D}_{3d}$ выражаются только через векторы базиса $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, то инвариантность этих тензоров связана со строением матриц второго ранга:

$$D = \begin{Vmatrix} a^1 & a^1{}_2 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 \end{Vmatrix}. \tag{3.24}$$

Для выяснения структуры матриц D удобно ввести комплексный базис по формулам

$$\boldsymbol{j}_1 = \boldsymbol{e}_1 + i\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{j}_2 = \boldsymbol{e}_1 - i\boldsymbol{e}_2 .$$

В этом базисе тензоры $\boldsymbol{D}_{3h}$, $\boldsymbol{D}_{6h}$ и $\boldsymbol{D}_{3d}$ приобретают вид

$$2\boldsymbol{D}_{3h} = \boldsymbol{j}_1{}^3 + \boldsymbol{j}_2{}^3, \qquad 4\boldsymbol{D}_{6h} = (\boldsymbol{j}_1{}^3 + \boldsymbol{j}_2{}^3)^2, \qquad 2\boldsymbol{D}_{3d} = \boldsymbol{e}_3(\boldsymbol{j}_1{}^3 + \boldsymbol{j}_2{}^3).$$

Условия инвариантности этих тензоров в вещественном базисе можно переписать в условия инвариантности в комплексном базисе. Если формулы преобразования комплексного базиса имеют вид

$$\boldsymbol{j}_i = b^{\alpha}{}_i \boldsymbol{j}'_{\alpha},$$

то связь между матрицами $\| a^i_j \|$ и $\| b^i_j \|$ определена равенством

$$\begin{Vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b^1_1 & b^1_2 \\ b^2_1 & b^2_2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{Vmatrix}. \tag{3.25}$$

Условие инвариантности тензора $\boldsymbol{D}_{3d}$ приводит к следующей системе уравнений для b^i_j:

$$b^\alpha_1 b^\beta_1 b^\gamma_1 + b^\alpha_2 b^\beta_2 b^\gamma_2 = \begin{cases} 1 \text{ при } \alpha = 3 = \gamma, \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

которая в раскрытом виде равносильна уравнениям

$$\left.\begin{aligned} (b^1_1)^3 + (b^1_2)^3 = 1, \quad & b^1_1 (b^2_1)^2 + b^1_2 (b^2_2)^2 = 0, \\ (b^2_1)^3 + (b^2_2)^3 = 1, \quad & b^2_1 (b^1_1)^2 + b^2_2 (b^1_2)^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

Легко найти все решения уравнений (3.26), удовлетворяющие условию $|b^i_j| \neq 0$. Так как a^i_j вещественны, то из формулы (3.25) следует, что $b^1_1 = \bar{b}^2_2$ и $b^1_2 = \bar{b}^2_1$. Учитывая это, получим шесть матриц для $\| b^i_j \|$:

$$\left.\begin{aligned} &\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{Vmatrix}, \\ &\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & 0 \end{Vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad \left(\varepsilon = \exp \frac{2\pi i}{3}\right). \tag{3.27}$$

Ортогональность соответствующих матриц (3.22) получается автоматически. С помощью формул (3.27), (3.25) и (3.22) легко выписать двенадцать матриц, соответствующих инвариантности тензоров $\boldsymbol{D}_{3h}$, $\boldsymbol{e}_3{}^2$, характеризующих класс $m \cdot 3 : m$ гексагональной сингонии. Инвариантность комбинации $\boldsymbol{D}_{3h}$, $\boldsymbol{e}_3$ определяет шесть матриц, получающихся из (3.23), (3.25) и (3.27) и соответствующих классу $3 \cdot m$ тригональной сингонии.

Условия инвариантности $\boldsymbol{D}_{3d}$ и $\boldsymbol{e}_3{}^2$ несколько видоизменяют уравнения (3.26). Разрешение соответствующих уравнений приводит к системе двенадцати матриц. Первые шесть из них, соответствующие инвариантности $\boldsymbol{e}_3$, совпадают с матрицами класса $3 \cdot m$ ($\boldsymbol{D}_{3h}$, $\boldsymbol{e}_3$), а другие шесть получаются из первых изменением знака всех компонент матриц. Условия инвариантности $\boldsymbol{D}_{6h}$ и $\boldsymbol{e}_3{}^2$ приводят к матрицам типа (3.22), и в соответствующих уравнениях типа (3.26) необходимо справа вместо $+1$ написать ± 1. Вследствие этого соответствующее решение содержит двенадцать матриц класса $m \cdot 3 : m$

и еще следующие двенадцать матриц:

$$\begin{Vmatrix}\tau^3 & 0 & 0\\ 0 & \tau^3 & 0\\ 0 & 0 & \pm 1\end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix}\tau & 0 & 0\\ 0 & \tau^5 & 0\\ 0 & 0 & \pm 1\end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix}\tau^5 & 0 & 0\\ 0 & \tau & 0\\ 0 & 0 & \pm 1\end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix}0 & \tau^3 & 0\\ \tau^3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \pm 1\end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix}0 & \tau & 0\\ \tau^5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \pm 1\end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix}0 & \tau^5 & 0\\ \tau & 0 & 0\\ 0 & 0 & \pm 1\end{Vmatrix}\qquad \left(\tau = \exp\frac{\pi i}{3}\right).$$

Соответствующие действительные матрицы легко выписать с помощью формулы (3.25).

Тензорные параметры для всех остальных классов гексагональной и тригональной сингоний, являющихся подгруппами групп симметрии, изученных выше, легко получить, рассматривая пересечения соответствующих групп, для которых тензорные характеристики уже установлены.

Что касается ромбической, моноклинной и триклинной сингоний, то указанные в таблице тензорные характеристики симметрии очевидны непосредственно. Ясно, что соответствующие совокупности тензоров, задающие группы симметрии, не определяются однозначно.

В каждом из случаев таблицы вместо указанных тензоров можно взять другую систему тензоров, связанную взаимно однозначно с системой тензоров, указанной в таблице. В частности, число и порядки тензоров, определяющих симметрию, можно брать различными.

Например, вместо тензоров, указанных в таблице, можно воспользоваться следующим соответствием групп и тензоров [1]):

$m\cdot 2 : m$	$e_1^2,\ e_2^2,\ e_3^2,$	2	$e_1^2,\quad e_2^2,\quad e_3,\ \boldsymbol{E},$
$2:2,$	$e_1^2,\ e_2^2,\ e_3^2,\ \boldsymbol{E},$	m	$e_1,\quad e_2,\quad e_3^2,$
$2\cdot m$	$e_1^2,\ e_2^2,\ e_3,$	$\bar{2}$	$e_1e_2,\quad e_1e_3,\quad e_2e_3.$
$2 : m$	$e_1^2,\ e_2^2,\ e_3^2,\ \Omega,$		

Легко выразить каждый тензор из этих систем через тензоры указанные в таблице. Обратные связи очевидны непосредственно.

Выше рассмотрен вопрос об определении тензоров, задающих группы симметрии кристаллов и текстур. Обратная задача об определении ортогональных групп симметрии, соответствующих данному тензору, была разрешена выше в отдельных важных частных случаях.

4°. Тензорные функции от тензоров, характеризующих геометрические свойства текстур и кристаллов. Ниже даются общие формулы вида (1.3), верные в произвольных координатах для компонент векторов A^i, компонент тензоров второго ранга A^{ij}, третьего ранга A^{ijk} и

[1]) Произведения векторов и их степени понимаются как диадные.

четвертого ранга A^{ijkl} для текстур [1]) и кристаллов в зависимости от тензорных аргументов, данных в таблице, определяющих соответствующие группы симметрии.

Так как совместные инварианты тензоров, определяющих группы симметрии, являются абсолютными постоянными, то инвариантные коэффициенты k_s $(s = 1, \ldots, p)$ представляют собой числовые постоянные или функции каких-либо скаляров, которые, помимо выделенных тензоров, также могут присутствовать в перечне определяющих величин.

В формулах выписаны в каждом случае только p линейно независимых слагаемых. Выбор этих слагаемых можно изменять, однако в каждом другом случае соответствующий набор слагаемых можно представить в виде линейных комбинаций из выписанных в формулах. Вопрос о выборе линейно независимых тензоров может оказаться существенным при использовании различных дополнительных гипотез о характере функциональных связей (линейная зависимость от некоторых компонент и т. п.). Из этих формул легко получить известные данные [2], когда выполнены следующие условия симметрии:

$$A^{ij} = A^{ji}, \quad A^{ijk} = A^{ikj},$$
$$A^{ijkl} = A^{ijlk}, \quad A^{ijkl} = A^{jikl}, \quad A^{ijkl} = A^{klij}.$$

Эти условия выполняются при дополнительных ограничениях, которые нужно наложить на инвариантные коэффициенты. Соответствующие формулы получатся из выписанных при помощи операции симметрирования.

Для текстур

Класс $\infty/\infty \cdot m\,(\boldsymbol{g})$

$$A^i = 0, \quad A^{ij} = kg^{ij}, \quad A^{ijk} = 0, \quad A^{ijkl} = k_1 g^{ij} g^{kl} + k_2 g^{ik} g^{jl} + k_3 g^{il} g^{jk}.$$

Класс $\infty/\infty\,(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{E})$

$$A^i = 0, \quad A^{ij} = kg^{ij}, \quad A^{ijk} = kE^{ijk}, \quad A^{ijkl} = A^{ijkl}(\infty/\infty \cdot m).$$

Класс $m \cdot \infty : m\,(g, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_3^2)$

$$A^i = 0, \quad A^{ij} = k_1 g^{ij} + k_2 B^{ij}, \quad A^{ijk} = 0, \quad A^{ijkl} = A^{ijkl}(\infty/\infty \cdot m) + k_4 g^{ij} B^{kl} +$$
$$+ k_5 g^{ik} B^{jl} + k_6 g^{jl} B^{ik} + k_7 g^{kl} B^{ij} + k_8 g^{jl} B^{ik} + k_9 g^{jk} B^{il} + k_{10} B^{ij} B^{kl}.$$

Класс $\infty : 2\,(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_3^2, \boldsymbol{E})$

$$A^i = 0, \quad A^{ij} = k_1 g^{ij} + k_2 B^{ij},$$
$$A^{ijk} = k_1 E^{ijk} + k_2 B^i{}_a E^{ajk} + k_3 E^{ija} B^k{}_a, \quad A^{ijkl} = A^{ijkl}(m \cdot \infty : m).$$

[1]) Аналогичные формулы, содержащие неточности, были опубликованы в [28]. Здесь даны исправленные формулы.

Класс $\infty : m\,(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_3^2,\ \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1)$

$$A^i = 0, \quad A^{ij} = k_1 g^{ij} + k_2 B^{ij} + k_3 \Omega^{ij}, \quad A^{ijk} = 0,$$
$$A^{ijkl} = A^{ijkl}(m \cdot \infty : m) + k_{11} g^{ij}\Omega^{kl} + k_{12} g^{ik}\Omega^{jl} + k_{13} g^{il}\Omega^{jk} + k_{14} g^{kl}\Omega^{il} + k_{15} g^{jl}\Omega^{ik} + k_{16} g^{jk}\Omega^{il} + k_{17} B^{ij}\Omega^{kl} + k_{18} B^{ik}\Omega^{jl} + k_{19}\Omega^{ij} B^{kl}.$$

Класс $\infty \cdot m\,(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_3)$

$$A^i = k b^i, \quad A^{ij} = k_1 g^{ij} + k_2 b^i b^j,$$
$$A^{ijk} = k_1 g^{ij} b^k + k_2 g^{ik} b^j + k_3 g^{jk} b^i + k_4 b^i b^j b^k,$$
$$A^{ijkl} = A^{ijkl}(\infty/\infty \cdot m) + k_4 g^{ij} b^k b^l + k_5 g^{ik} b^j b^l + k_6 g^{il} b^j b^k + k_7 g^{kl} b^i b^j + k_8 g^{jl} b^i b^k + k_9 g^{jk} b^i b^l + k_{10} b^i b^j b^k b^l.$$

Класс $\infty\,(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{E})$

$$A^i = k b^i, \quad A^{ij} = k_1 g^{ij} + k_2 b^i b^j + k_3 E^{ij\alpha} b_\alpha,$$
$$A^{ijk} = k_1 g^{ij} b^k + k_2 g^{ik} b^j + k_3 g^{jk} b^i + k_4 b^i b^j b^k + k_5 \Omega^{ij} b^k + k_6 \Omega^{ik} b^j + k_7 \Omega^{jk} b^i,$$
$$A^{ijkl} = A^{ijkl}(\infty \cdot m) + k_{11} g^{ij}\Omega^{kl} + k_{12} g^{ik}\Omega^{jl} + k_{13} g^{il}\Omega^{jk} + k_{14} g^{kl}\Omega^{ji} + k_{15} g^{jl}\Omega^{ik} + k_{16} g^{jk}\Omega^{il} + k_{17} b^i b^j \Omega^{kl} + k_{18} b^i b^k \Omega^{jl} + k_{19}\Omega^{ij} b^k b^l \ (\Omega^{ij} = E^{ija} b_a).$$

Для кубической сингонии

Класс $\bar{6}/4\,(\boldsymbol{O}_h)$

$$A^i = 0, \ A^{ij} = k g^{ij}, \ A^{ijk} = 0, \ A^{ijkl} = A^{ijkl}(\infty/\infty \cdot m) + k_4 O_h{}^{ijkl}.$$

Класс $3/4\,(\boldsymbol{O}_h, \boldsymbol{E})$

$$A^i = 0, \quad A^{ij} = k g^{ij}, \quad A^{ijk} = k E^{ijk}, \quad A^{ijkl} = A^{ijkl}\ (\bar{6}/4),$$

Класс $3/\bar{4}\,(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{T}_d)$

$$A^i = 0, \quad A^{ij} = k g^{ij}, \quad A^{ijk} = k T_d{}^{ijk}, \quad A^{ijkl} = A^{ijkl}\ (\bar{6}/4).$$

Класс $3/2\,(g, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{T}_d)$ или $(\boldsymbol{T}_h, \boldsymbol{E})$

$$A^i = 0, \quad A^{ij} = k g^{ij}, \quad A^{ijk} = k_1 E^{ijk} + k_2 T_a{}^{ijk},$$
$$A^{ijkl} = A^{ijkl}(\bar{6}/4) + k_5 T_h{}^{ijkl} + k_6 T_h{}^{iljk} + k_7 T_h{}^{ikjl}.$$

Класс $\bar{6}/2\,(\boldsymbol{T}_h)$

$$A^i = 0, \quad A^{ij} = k g^{ij}, \quad A^{ijk} = 0, \quad A^{ijkl} = A^{ijkl}\ (3/2).$$

Тетрагональная сингония

Класс $m \cdot 4 : m\,(\boldsymbol{O}_h, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_3^2)$

$$A^i = 0, \qquad A^{ij} = A^{ij}(m \cdot \infty : m) = k_1 g^{ij} + k_2 B^{ij},$$
$$A^{ijk} = 0, \qquad A^{ijkl} = A^{ijkl}(m \cdot \infty : m) + k_{11} O_h{}^{ijkl}.$$

Класс $\bar{4} \cdot m\,(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{T}_d, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_3^2)$

$$A^i = 0, \quad A^{ij} = k_1 g^{ij} + k_2 B^{ij},$$
$$A^{ijk} \quad k_1 T_d{}^{ijk} + k_2 T_d{}^{ija} B^k_{\cdot a} + k_3 T_d{}^{ika} B^j_{\cdot a}, \quad A^{ijkl} = A^{ijkl}(m \cdot 4 : m).$$

Класс $4:2\ (\boldsymbol{O}_h, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2, \boldsymbol{E})$,

$A^i=0,\ A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},\quad A^{ijk}=A^{ijk}(\infty:2),\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot 4:m).$

Класс $4:m\ (\boldsymbol{O}_h, \Omega=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2)$,

$$A^i=0,\quad A^{ij}=A^{ij}(\infty:m),\quad A^{ijk}=0,$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(\infty:m)+k_{20}O_h^{\ ijkl}+k_{21}O_h^{\ jkla}\Omega^i_{\cdot\alpha}.$$

Класс $\bar{4}\ (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{T}_d, \Omega=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2)$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=A^{ij}(\infty:m),$$
$$A^{ijk}=A^{ijk}(\bar{4}\cdot m)+k_4T_d^{\ ij\alpha}\Omega^k_{\cdot\alpha}+k_5\Omega^i_{\cdot\alpha}T_d^{\ \alpha jk}+k_6\Omega^i_{\cdot\alpha}T_d^{\ \alpha j\beta}B^k_{\cdot\beta},$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(4:m).$$

Класс $4\cdot m\ (\boldsymbol{O}_h, \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3)$

$A^i=kb^i,\ A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2b^ib^j,\ A^{ijk}=A^{ijk}(\infty\cdot m),\ A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot 4:m).$

Класс $4\ (\boldsymbol{O}_h, \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{E})$

$$A^i=kb^i,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2b^ib^j+k_3\Omega^{ij}\quad(\Omega^{ij}=E^{ij\alpha}b_\alpha),$$
$$A^{ijk}=A^{ijk}(\infty),\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(\infty)+k_{20}O_h^{\ ijkl}+k_{21}O_h^{\ jkl\gamma}\Omega^i_{\cdot\alpha}.$$

Гексагональная сингония

Класс $m\cdot 6:m\ (\boldsymbol{D}_{6h}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2)$

$A^i=0,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},\quad A^{ijk}=0,\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot\infty:m).$

Класс $m\cdot 3:m\ (\boldsymbol{D}_{3h}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2)$

$A^i=0,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},\quad A^{ijk}=kD_{3h}^{\ ijk},\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot\infty:m).$

Класс $6:2\ (\boldsymbol{D}_{6h}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2, \boldsymbol{E})$

$A^i=0,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},\quad A^{ijk}=A^{ijk}(\infty:2),\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot\infty:m)$

Класс $6:m\ (\boldsymbol{D}_{6h}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2, \Omega=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1)$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=A^{ij}(\infty:m),\quad A^{ijk}=0,\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(\infty:m).$$

Класс $3:m\ (\boldsymbol{D}_{3h}, B=\boldsymbol{e}_3^2, \Omega=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1)$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=A^{ij}(\infty:m),\quad A^{ijk}=k_1D_{3h}^{\ ijk}+k_2D_{3h}^{\ ij\alpha}\Omega^k_{\cdot\alpha},$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(\infty:m).$$

Класс $6\cdot m\ (\boldsymbol{D}_{6h}, \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3)$

$A^i=kb^i,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2b^ib^j,\ A^{ijk}=A^{ijk}(\infty\cdot m),\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(\infty\cdot m).$

Класс $6\ (\boldsymbol{D}_{6h}, \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{E})$

$A^i=kb^i,\quad A^{ij}=A^{ij}(\infty),\quad A^{ijk}=A^{ijk}(\infty),\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(\infty).$

Тригональная сингония

Класс $\bar{6}\cdot m\ (\boldsymbol{D}_{3d}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2)$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},\quad A^{ijk}=0,$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot\infty:m)+k_{11}D_{3d}^{\ ijkl}+k_{12}D_{3d}^{\ jikl}+k_{13}D_{3d}^{\ kijl}+k_{14}D_{3d}^{\ lijk}.$$

Класс $3:2(\boldsymbol{D}_{3h}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3{}^2, \boldsymbol{E})$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},\quad A^{ijk}=A^{ijk}(\infty:2)+k_4D_{3h}{}^{ijk},$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot\infty:m)+k_{11}D_{3h}{}^{ij\alpha}E_{\alpha}{}^{\cdot kl}+k_{12}E^{\alpha ij}D_{3h}{}_{\cdot\alpha}^{kl\cdot}+$$
$$+k_{13}E^{\alpha ik}D_{3h}{}_{\cdot\alpha}^{jl\cdot}+k_{14}E^{kj}D_{3h}{}_{\cdot\alpha}^{il\cdot}$$

Класс $\bar{6}(\boldsymbol{D}_{3d}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2, \Omega=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1)$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=A^{ij}(\infty:m),\quad A^{ijk}=0,$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(\infty:m)+k_{20}D_{3d}{}^{ijkl}+k_{21}D_{3d}{}^{jikl}+k_{22}D_{3d}{}^{kijl}+k_{23}D_{3d}{}^{lijk}+$$
$$+k_{24}D_{3d}{}^{ijk\alpha}\Omega_{\cdot\alpha}^{l}+k_{25}D_{3d}{}^{jik\alpha}\Omega_{\cdot\alpha}^{l}+k_{26}D_{3d}{}^{kij\alpha}\Omega_{\cdot\alpha}^{l}+k_{27}D_{3d}{}^{lij\alpha}\Omega_{\cdot\alpha}^{k}.$$

Класс $3\cdot m(\boldsymbol{D}_{3h}, \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3)$

$$A^i=kb^i,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2b^ib^j,\quad A^{ijk}=A^{ijk}(\infty\cdot m)+k_5D_{3h}{}^{ijk},$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(\infty\cdot m)+k_{11}D_{3h}{}^{ijk}b^l+k_{12}D_{3h}{}^{ijl}b^k+k_{13}D_{3h}{}^{ikl}b^j+k_{14}D_{3h}{}^{klj}b^i.$$

Класс 3 $(\boldsymbol{D}_{3h}, \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{E})$

$$A^i=kb^i,\quad A^{ij}=A^{ij}(\infty),$$
$$A^{ijk}=A^{ijk}(\infty)+k_8D_{3h}{}^{ijk}+k_9D_{3h}{}^{ij\alpha}\Omega_{\cdot\alpha}^{k},\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(\bar{6}).$$

Ромбическая сингония

Класс $m\cdot 2:m(\boldsymbol{D}_{2h}, \boldsymbol{g})$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2D_{2h}{}^{ij}+k_3D_{2h}{}^{i\alpha}D_{2h\alpha}{}^{\cdot j}\quad\text{(формула Гамильтона — Кэли)},$$
$$A^{ijk}=0,\quad A^{ijkl}=k_1g^{ij}g^{kl}+k_2g^{ik}g^{jl}+k_3g^{il}g^{jk}+k_4g^{ij}D_{2h}{}^{kl}+$$
$$+k_5g^{ik}D_{2h}{}^{jl}+k_6g^{il}D_{2h}{}^{jk}+k_7D_{2h}{}^{ij}g^{kl}+k_8D_{2h}{}^{ik}g^{jl}+k_9D_{2h}{}^{il}g^{jk}+$$
$$+k_{10}g^{ij}M^{kl}+k_{11}g^{ik}M^{jl}+k_{12}g^{jl}M^{jk}+k_{13}M^{ij}g^{kl}+k_{14}M^{ik}g^{jl}+$$
$$+k_{15}M^{il}g^{jk}+k_{16}D_{2h}{}^{ij}D_{2h}{}^{kl}+k_{17}D_{2h}{}^{il}M^{jk}+k_{18}D_{2h}{}^{ij}M^{kl}+k_{19}D_{2h}{}^{ik}M^{jl}+$$
$$+k_{20}M^{ij}D_{2h}{}^{kl}+k_{21}M^{ij}M^{kl}\qquad(M^{ij}=D_{2h}{}^{i\alpha}D_{2h\alpha}{}^{\cdot j}).$$

Класс $2:2(\boldsymbol{D}_{2h}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{g})$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=A^{ij}(m\cdot 2:m),$$
$$A^{ijk}=k_1E^{ijk}+k_2E^{ij\alpha}D_{2h\alpha}{}^{\cdot k}+k_3E^{ik\alpha}D_{2h\alpha}{}^{\cdot j}+k_4E^{ij\alpha}M_{\cdot\alpha}^{k\cdot}+k_5E^{ik\alpha}M_{\cdot\alpha}^{j\cdot}+$$
$$+k_6D_{2h}{}^{i\alpha}E_{\alpha\cdot\beta}^{\cdot j}M^{\beta k},\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot 2:m).$$

Класс $2\cdot m$ $(\boldsymbol{D}_{2h}, \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{g})$

$$A^i=kb^i,\quad A^{ij}=A^{ij}(m\cdot 2:m)=k_1g^{ij}+k_2b^ib^j+k_3D_{2h}{}^{ij},$$
$$A^{ijk}=k_1g^{ij}b^k+k_2g^{ik}b^j+k_3g^{kj}b^i+k_4b^ib^jb^k+k_5D_{2h}{}^{ij}b^k+$$
$$+k_6D_{2h}{}^{ik}b^j+k_7D_{2h}{}^{kj}b^i,\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot 2:m).$$

Моноклинная сингония

Класс $2 : m\,(\boldsymbol{D}_{2h}, \Omega = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{g})$

$$A^i = 0, \quad A^{ij} = A^{ij}(m\cdot 2 : m) + k_4\Omega^{ij} + k_5\Omega^{i\alpha}D_{2h\cdot\alpha}^{j\cdot}, \quad A^{ijk} = 0,$$

$$A^{ijkl} = A^{ijkl}(m\cdot 2 : m) + k_{22}g^{ij}\Omega^{kl} + k_{23}g^{ik}\Omega^{jl} + k_{24}g^{il}\Omega^{jk} + k_{25}g^{kl}\Omega^{ij} +$$
$$+ k_{26}g^{jl}\Omega^{ik} + k_{27}g^{jk}\Omega^{il} + k_{28}g^{ij}\Omega^{k\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot l} + k_{29}g^{ik}\Omega^{j\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot l} + k_{30}g^{il}\Omega^{j\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot k} +$$
$$+ k_{31}g^{kl}\Omega^{i\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot j} + k_{32}g^{jl}\Omega^{i\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot k} + k_{33}g^{jk}\Omega^{i\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot l} + k_{34}D_{2h}^{\cdot\cdot ij}\Omega^{kl} +$$
$$+ k_{35}D_{2h}^{\cdot\cdot ik}\Omega^{jl} + k_{36}D_{2h}^{\cdot\cdot kl}\Omega^{ij} + k_{37}D_{2h}^{\cdot\cdot ij}\Omega^{k\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot l} + k_{38}D_{2h}^{\cdot\cdot il}\Omega^{j\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot k} +$$
$$+ k_{39}D_{2h}^{\cdot\cdot kl}\Omega^{i\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot j} + k_{40}M^{kl}\Omega^{ij} + k_{41}M^{ij}\Omega^{k\gamma}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot l}.$$

Класс 2 $(\boldsymbol{D}_{2h}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{g})$

$$A^i = kb^i, \quad A^{ij} = A^{ij}(2 : m),$$

$$A^{ijk} = k_1g^{ij}b^k + k_2g^{ik}b^j + k_3g^{jk}b^i + k_4b^ib^jb^k + k_5D_{2h}^{\cdot\cdot ij}b^k + k_6D_{2h}^{\cdot\cdot ik}b^j +$$
$$+ k_7D_{2h}^{\cdot\cdot kj}b^i + k_8\Omega^{ij}b^k + k_9\Omega^{ik}b^j + k_{10}\Omega^{kj}b^i + k_{11}\Omega^{i\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot j}b^k +$$
$$+ k_{12}\Omega^{i\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot k}b^j + k_{13}\Omega^{k\gamma}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot i}b^j,$$

$$A^{ijkl} = A^{ijkl}(2 : m).$$

Класс $m\,(\boldsymbol{D}_{2h}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}_2)$

$$A^i = k_1b^i + k_2c^i, \quad A^{ij} = k_1g^{ij} + k_2b^ib^j + k_3c^ic^j + k_4b^ic^j + k_5c^ib^j,$$

$$A^{ijk} = k_1g^{ij}b^k + k_2g^{ik}b^j + k_3g^{jk}b^i + k_4b^ib^jb^k + k_5g^{ij}c^k + k_6g^{ik}c^j +$$
$$+ k_7g^{jk}c^i + k_8c^ib^jb^k + k_9b^ic^jb^k + k_{10}b^ib^jc^k + k_{11}b^ic^jc^k + k_{12}c^ib^jc^k +$$
$$+ k_{13}c^ic^jb^k + k_{14}c^ic^jc^k,$$

$$A^{ijkl} = A^{ijkl} = (2 : m) = k_1g^{ij}g^{kl} + k_2g^{ik}g^{jl} + k_3g^{il}g^{jk} + k_4g^{ij}b^kb^l +$$
$$+ k_5g^{ik}b^jb^l + k_6g^{il}b^jb^k + k_7b^ib^jg^{kl} + k_8b^ib^kg^{jl} + k_9b^ib^lg^{jk} + k_{10}g^{ij}b^kc^l +$$
$$+ k_{11}g^{ik}b^jc^l + k_{12}g^{il}b^jc^k + k_{13}g^{kl}b^ic^j + k_{14}g^{jl}b^ic^k + k_{15}g^{ik}b^ic^l + k_{16}g^{ij}c^kb^l +$$
$$+ k_{17}g^{ik}c^jb^l + k_{18}g^{il}c^jb^k + k_{19}g^{kl}c^ib^j + k_{20}g^{jl}c^ib^k + k_{21}g^{jk}c^ib^l +$$
$$+ k_{22}c^ib^jb^kb^l + k_{23}b^ic^jb^kb^l + k_{24}b^ib^jc^kb^l + k_{25}b^ib^jb^kc^l + k_{26}g^{ij}c^kc^l +$$
$$+ k_{27}g^{ik}c^jc^l + k_{28}g^{jl}c^ic^k + k_{29}c^kc^lc^ic^j + k_{30}b^ib^jb^kb^l + k_{31}g^{jk}c^ic^l +$$
$$+ k_{32}b^ib^jc^kc^l + k_{33}b^ib^kc^jc^l - k_{34}b^ib^lc^jc^k + k_{35}c^ic^jb^kb^l + k_{36}c^kb^jb^l +$$
$$+ k_{37}c^ic^lb^jb^k + k_{38}b^ic^jc^kc^l + k_{39}c^ib^jc^kc^l + k_{40}c^jc^lb^kc^l + k_{41}c^ic^kc^kb^l.$$

Если вместо $\boldsymbol{D}_{2h}$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ в качестве определяющих тензоров взять $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3^2$, то последнюю формулу для тензоров четвертого ранга можно заменить формулой

$$A_4 = k^{ijkl}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l + k^{\alpha\beta33}\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 + k^{\alpha33\beta}\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_\beta +$$
$$+ k^{33\alpha\beta}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta + k^{3\alpha3\beta}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_\beta + k^{3\alpha\beta3}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta\boldsymbol{e}_3 +$$
$$+ k^{\alpha3\beta3} + \boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_\beta\boldsymbol{e}_3 + k^{3333}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3, \quad (*)$$

где суммирование производится по индексам i, j, k, l, α, β, принимающим только два значения: 1 и 2. Простой подсчет показывает,

что в этой формуле имеется 41 слагаемое, причем их линейная независимость очевидна непосредственно.

Нетрудно видеть, что для тензоров четного ранга и, в частности, для тензоров четвертого ранга для классов моноклинной сингонии $2:m$, 2 и m соответствующие определяющие параметры могут быть заменены одной и той же системой тензоров e_1, e_2, и e_3^2, поэтому можно пользоваться одинаковыми формулами. Таким образом, для всех классов моноклинной сингонии для тензоров четвертого ранга применима формула (*).

Легко также усмотреть, что тензоры четвертого ранга для ромбической сингонии с 21 линейно независимым членом получатся из формулы (*), в которой надо взять члены с $i=j$, $k=l$; $i=k$, $j=l$ и $i=l$, $j=k$ и $\alpha=\beta$.

Таким образом, ясно, что при построении общих формул для тензорных функций первоначальный базис аргументов иногда выгодно видоизменять применительно к рассматриваемым отдельным случаям.

Триклинная сингония

Класс $\bar{2}$ (C_i)

$A^i=0$, A^{ij} — общий случай с 9 компонентами,

$A^{ijk}=0$, A^{ijkl} — общий случай с 81 компонентой.

Класс 1 (e_1, e_2, e_3)

Все тензоры имеют общий вид с отсутствием симметрии.

5°. Тензорные функции для текстур и кристаллов при наличии дополнительных тензорных аргументов. Допустим теперь, что, кроме тензоров, задающих геометрические свойства текстур и кристаллов, среди определяющих величин — независимых аргументов имеются еще другие тензоры. Очевидно, что в этом случае группы симметрии совокупности определяющих параметров являются соответствующими группами или подгруппами текстур или кристаллов. Подгруппы, отличные от кристаллографических групп, могут возникнуть только при рассмотрении текстур. При добавлении других тензоров к тензорам, определяющим кристаллическую симметрию, будут получаться опять группы кристаллической симметрии либо группа симметрии сведется к тождественному преобразованию.

Все подгруппы данной группы кристаллической симметрии содержатся среди 32 кристаллических групп, поэтому при добавлении других тензоров к тензорам, задающим симметрию кристаллов, группы симметрии совокупности аргументов будут принадлежать также к одной из 32 кристаллических групп.

Сокращение числа линейно независимых компонент у определяемого тензора в общем случае может возникнуть только при наличии соответствующей симметрии. Очевидно, что упрощения в случаях

кристаллов возникают, когда совокупность определяющих параметров допускает нетривиальную группу симметрии. После выяснения типа кристаллической группы симметрии для совокупности тензорных аргументов можно воспользоваться одной из формул в 4° для выяснения строения компонент определяемой тензорной функции.

Таким образом, можно воспользоваться формулами из 4° для установления строения тензорных функций в общем случае для кристаллов. Для фактического выяснения природы соответствующих формул необходимо изучить свойства симметрии совокупности заданных аргументов, что для кристаллов равносильно представлению определяющих тензоров через совокупность тензоров, характеризующих кристаллические классы, отмеченные в таблице.

Приведенные выше соображения позволяют легко проанализировать большое число разных частных случаев, когда дополнительные тензоры специальны или имеют специальный вид в кристаллофизических осях.

При наличии дополнительных тензоров скаляры k_s в общем случае являются функциями совместных инвариантов дополнительных тензоров и тензоров, задающих симметрию текстур или кристаллов. Переменные совместные инварианты возникают за счет дополнительных тензоров. Число функционально независимых инвариантов в общем случае равно числу функционально независимых компонент переменных тензоров. В некоторых частных случаях число функционально независимых компонент может быть меньшим.

Скалярные аргументы ω_i в фиксированной системе координат, в функции которых могут быть определены коэффициенты k_s, в общем случае можно выбрать так, чтобы они сохраняли свое значение для различных переменных тензоров, эквивалентных с точки зрения симметрии текстур или кристаллов соответственно. Такие аргументы, установленные в фиксированной системе координат, могут отличаться от инвариантов Ω_i при любых преобразованиях координат и совпадать с ними ($\omega_i=\Omega_i$) в данной фиксированной системе координат.

6°. О тензоре кривизны риманова пространства и обобщение теоремы Шура. Теория, развитая выше, связана непосредственно со всеми закономерностями, рассматриваемыми в математике и физике, которые формулируются в виде векторных и тензорных уравнений и которые в той или иной степени связаны со свойствами геометрической симметрии.

Существующие приложения многообразны: укажем, например, закон Гука для текстур и кристаллов, пьезоэлектрические и оптические эффекты и т. п. В качестве одного из примеров рассмотрим тензор кривизны Кристоффеля — Римана R_{ijkl}. Как известно, этот тензор антисимметричен при перестановке индексов i и j для индексов k и l и симметричен относительно перестановки пары индексов ij и kl.

В случае трехмерного пространства среди компонент R_{ijkl} имеется только шесть компонент, которые могут принимать независимые произвольные значения. Эти шесть компонент определяют шесть компонент симметричного тензора второго ранга K^{mn}, который можно ввести по формуле

$$K^{mn} = E^{ijm}E^{kln}R_{ijkl}. \tag{6.1}$$

Отсюда

$$R_{ijkl} = \frac{1}{4}E_{ijm}E_{kln}K^{mn}. \tag{6.2}$$

Как известно [31], компоненты тензора кривизны удовлетворяют тождеству Бианки

$$\nabla_r R_{ijmn} + \nabla_m R_{ijnr} + \nabla_n R_{ijrm} = 0,$$

где индексы m, n, r различны между собой, а $\nabla_\varkappa$ — символ ковариантной производной по координате $x^\varkappa$. Легко усмотреть, что тождество Бианки эквивалентно следующему тождеству для компонент тензора K^{mn}:

$$\nabla_\alpha K^{m\alpha} = 0. \tag{6.3}$$

Если в точках риманова пространства тензор кривизны допускает симметрию какого-либо типа, то на основании развитой выше теории легко написать общие формулы, определяющие компоненты тензоров R_{ijkl} и K^{mn} через компоненты тензоров, задающих соответствующие группы симметрии. Например, для симметрии типа текстур верны следующие формулы: для симметрии $\infty/\infty \cdot m$ и ∞/∞

$$K^{mn} = kg^{mn}; \tag{6.4}$$

для симметрии $\infty \cdot m$, $m \cdot \infty$: m, $\infty : 2$, $\infty : m$, ∞

$$K^{mn} = kg^{mn} + k_1 b^m b^n, \tag{6.5}$$

где b^m — компоненты единичного вектора, направленного вдоль оси симметрии. Аналогичные формулы можно написать в любом случае, когда компоненты тензора K^{mn} допускают какую-либо конечную группу симметрии. Например, при наличии симметрии, отвечающей любому из пяти классов кубической сингонии, верна формула

$$K^{mn} = kg^{mn}. \tag{6.6}$$

Следовательно, в этом случае тензор K^{mn} является шаровым, так же как и в случае полной изотропии.

Из (6.2) и (6.4)—(6.6) следует соответствующие формулы для компонент тензора

$$R_{ijkl}.$$

Из формулы (6.4) и из тождества Бианки (6.2) следует

$$g^{m\alpha}\nabla_\alpha k = 0. \tag{6.7}$$

Равенство (6.7) выражает собой известную теорему Шура. По теореме Шура из изотропии тензора кривизны в каждой точке следует постоянство кривизны во всем пространстве, так как из (6.7) получается

$$k = \text{const}.$$

В данном выше доказательстве теоремы Шура содержится обобщение этой теоремы, заключающееся в том, что для выполнимости теоремы Шура нет необходимости требовать полной изотропии кривизны в каждой точке пространства. Достаточно выполнения в каждой точке условий симметрии группы 3/2, т. е. инвариантности компонент тензоров K^{mn} или R_{ijkl} относительно 12 преобразований группы симметрии 3/2.

Если кривизна определена в каждой точке постоянными коллинеарными векторами b^i, то тождество Бианки дает

$$\nabla^\lambda k + b^\lambda b^\mu \nabla_\mu k_1 = 0. \tag{6.8}$$

Уравнения (6.8) представляют собой систему уравнений, наложенных на кривизну, для соответствующих римановых пространств

Авторы выражают свою благодарность Ю. И. Сиротину, беседы с которым помогли им уяснить положение дел в кристаллофизике — области науки, новой для них.

ЛИТЕРАТУРА К ДОБАВЛЕНИЮ I

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, изд. 4-е, Гостехиздат, 1957.
2. Най Дж. Физические свойства кристаллов, ИЛ, 1960.
3. Вейль Г. Классические группы, ИЛ, 1947.
4. Döring W. Die Richtungsabhängigkeit der Kristallenergie, Annalen der Physik, 1958, 7. Folge, Bd. 1, Heft 1—3, S. 104—111.
5. Smith G. F., Rivlin R. S. The anisotropic tensors, Quarterly of Applied Mathematics, 1957, vol. 15, №3, pp. 308—314.
6. Pipkin A. C., Rivlin R. S. The formulation of constitutive equations in continuum physics. Part I, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1959, vol. 4, №2, pp. 129—144.
7. Сиротин Ю. И. Анизотропные тензоры, Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 2, стр 321—324.
8. Сиротин Ю. И. Целые рациальные базисы тензорных инвариантов кристаллографических групп, Докл. АН СССР, 1963, т. 51.
9. Гуревич Г. Б. Основы теории и алгебраических инвариантов, Гостехиздат, М.— Л., 1948.
10. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры, Гостехиздат, М., 1956.
11. Smith F. G., Rivlin R. S. The strain-energy function for anisotropic elastic materials, Trans. Amer. Math. Soc., 1958, vol. 88, № 1, pp. 175—193.

12. Smith F. G. Further results on the stain-energy function for anisotropic elastic materials, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1962, vol. 10, № 2, pp. 108—118.
13. Багавантам С., Венкатарайуду Т. Теория групп и ее применение к физическим проблемам, ИЛ, 1959.
14. Jahn H. A. Note on the Bhagavantam Suryanarayana method of enumerating the physical constants of crystals, Acta Crystallographica, 1949, vol. 2. Part 1, pp. 30—33.
15. Шубников А. В., Флинт Е. Е., Бокий Г. Г. Основы кристаллографии, Изд. АН СССР, 1940.
16. Шубников А. В. Симметрия и антисимметрия конечных фигур, Изд. АН СССР, 1951.
17. Шубников А. В., О симметрии векторов и тензоров, Изв. АН СССР, сер. физ., 1949, т. XIII, № 3, стр. 347—375.
18. Сиротин Ю. И., Групповые тензорные пространства, Кристаллография, 1960, т. 5, вып. 2, стр. 171—179.
19. Сиротин Ю. И. Построение тензоров заданной симметрии, Кристаллография, 1961, т. VI, вып. 3, стр. 331—340.
20. Копцик В. А. Полиморфные фазовые переходы и симметрия кристаллов, Кристаллография, 1960, т. 5, вып. 6, стр. 932—943.
21. Spencer A. J., Rivlin R. S. The theory of matrix polynomials and its application to the mechanics of isotropic continua, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1959, vol. 2, № 4, pp. 309—336.
22. Spencer A. J. M., Rivlin R. S. Finite integrity bases for five or fewer symmetric 3 × 3 matrices, Arch. Rat'l Mech. Anal., 1959, vol. 2, № 5, pp. 435—446.
23. Spencer A. J. M. Rivlin R. S. Further results in the theory of matrix polynomials, Arch. Rat'l Mech. Anal., 1960, vol. 4, № 3, pp. 214—230.
24. Spencer A. J. M., Rivlin R. S. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors. Part I, Arch. Rat'l Mech. Anal., 1962, vol. 9, № 1, pp. 45—63.
25. Spencer A. J. M. The invariants of six symmetrix 3 × 3 matrices, Arch. Rat'l Mech. Anal., 1961, vol. 7, № 1, pp. 64—77.
26. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды, Физматгиз, 1962.
27. Лохин В. В. Система определяющих параметров, характеризующих геометрические свойства анизотропной среды, Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 2, стр. 295—297.
28. Лохин В. В. Общие формы связи между тензорными полями в анизотропной сплошной среде, свойства которой описываются векторами, тензорами второго ранга и антисимметричными тензорами третьего ранга, Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 6, стр. 1282—1285.
29. Седов Л. И., Лохин В. В. Описание с помощью тензоров точечных групп симметрии, Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 4, стр. 796—797.
30. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике, Гостехиздат, М., 1957.
31. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ, Гостехиздат, М., 1953.

ДОБАВЛЕНИЕ II

МОДЕЛИ СПЛОШНЫХ СРЕД С ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ [1])

Л. И. Седов

Хорошо известно, что в современной физике и механике требуется построение, введение и использование новых моделей тел с усложненными свойствами. Настало время фактического развития макроскопической теории, в которой требуется изучать не только движение газов, но также и движение твердых деформируемых тел в тесном взаимодействии с физико-химическими процессами, происходящими внутри данной частицы и в ее взаимодействии с соседними частицами тела и с внешними объектами. В последние годы в мировой литературе появляется очень много теоретических работ, в которых вводятся новые виды обобщенных сил и уравнений состояния. Подавляющее число этих работ основано на формальных математических конструкциях.

Построение новых теорий связано существенно с введением в качестве определяющих и искомых характеристик новых понятий и соответствующих математически задаваемых величин для описания свойств пространства и времени, положения и состояния субстанциональных частиц тела и полей, с выделением элементарных определяющих величин в общих законах движения и физико-химических процессах.

Для более конкретного освещения этого вопроса рассмотрим общую постановку проблем об установлении моделей для описания широких классов движений и процессов в механике сплошной среды.

Укажем сначала на примеры основных характерных величин. При физическом изучении движения материальных континуумов необходимо пользоваться понятиями времени и метрического пространства трехмерного или четырехмерного и всегда двумя системами координат (рис. 66) [2]): системой координат наблюдателя x^1, x^2, x^3, x^4

---

[1]) Текст доклада, сделанного на открытии III Всесоюзного съезда по механике 25 января 1968 г. и напечатанного в журнале «Прикладная математика и механика», 1968, т. 32, вып. 5.

[2]) Некоторые думают, что механику подвижных непрерывных материальных сред без существенного ограничения общности можно строить при помощи только одной и притом декартовой системы координат. Эта точка зрения, отраженная в некоторых книгах и искренне внедряемая в сознание учащихся, неверна и мешает пониманию сущности механики и постановок ее задач.

Путаница питается, с одной стороны, тем, что в механике деформируемых твердых тел обычно рассматриваются только линеаризованные задачи, когда в расчетах можно считать, что система отсчета наблюдателя и сопутствующая

и соответствующей лагранжевой системой ξ^1, ξ^2, ξ^3, $\xi^4 = t$. В физике Ньютона можно всегда считать, что имеет место равенство $x^4 = \xi^4 = t$, и рассматривать абсолютное время как скалярную переменную. Координаты ξ^1, ξ^2, ξ^3 фиксируют индивидуальные частицы. В общем случае обе системы координат по своему существу — криволинейные системы координат.

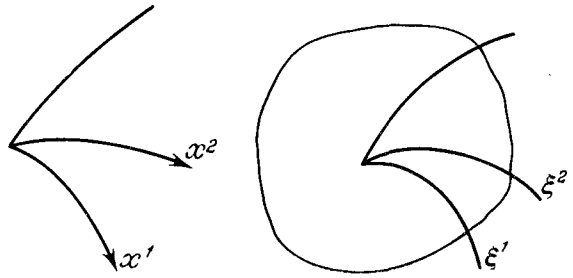


Рис. 66.

В метрическом римановом пространстве для элемента длины имеем

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = \hat{g}_{ij}d\xi^i d\xi^j. \qquad (1)$$

Компоненты тензора g_{ij} определяют метрику и являются основными характеристиками пространства-времени. В механике Ньютона тензор g_{ij} евклидов, в специальной теории относительности псевдоевклидов; их компоненты доопределяются наблюдателем только выбором, по собственному усмотрению, системы координат x^1, x^2, x^3, x^4.

В общей теории относительности тензор g_{ij} определяется из уравнений, выражающих собой физические принципы. Инвариантные дифференциальные величины, задающие свойства метрического тензора g_{ij} риманова четырехмерного пространства, можно взять в качестве первой и очень важной иллюстрации, примера не классических искомых физических величин нового типа.

Основной искомой связью в системе наблюдателя, определяющей движение среды, является закон движения, представляемый четырьмя функциями

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \qquad (2)$$

система совпадают. С другой стороны, тем, что метрика сопутствующей лагранжевой системы координат в теории жидкостей и газов проявляется только через плотность.

Вместе с этим часто забывают, что все субстанциональные характеристики, такие как скорость, ускорение, тензор скоростей деформаций и т. п., вводятся при помощи системы наблюдателя при существенном использовании понятия о сопутствующей системе координат.

Наряду с функциями $x^i(\xi^k)$ удобно вводить и рассматривать в качестве определяющих аргументов для различных физических функций производные

$$x_j{}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j},\ \nabla_{k_1} x_j{}^i,\ \ldots,\ \nabla_{k_2}\nabla_{k_2}\ldots\nabla_{k_p} x_j{}^i,\ \ldots \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots). \quad (3)$$

Здесь через символ ∇_k обозначена ковариантная производная по x^k, причем первые производные $x_j{}^i$ рассматриваются при фиксированных значениях индекса j как компоненты вектора по индексу i; эти векторы определяют собой компоненты вектора скорости, соответствующие повороты, а при сравнении данного положения тела с некоторым мысленно вводимым «начальным положением» компоненты тензора, связанного с деформацией:

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = {}^1/_2(\hat{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}) = {}^1/_2(g_{pq}x_i{}^p x_j{}^q - \overset{\circ}{g}_{ij}).$$

Здесь через $\overset{\circ}{g}_{ij}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ обозначены компоненты метрического тензора, отвечающего «начальному положению», которое вводится с помощью некоторого соглашения из физических соображений. В простейших частных случаях начальное положение вводится как «неизменяемое твердое тело», совпадающее в трехмерной пространственной части с данным деформируемым телом в некоторый «начальный» момент времени (см. [1]).

Вместе с законом движения (2) необходимо вводить переменные параметры μ^A и их градиенты (ковариантные производные) различных порядков

$$\mu^A = \mu^A(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4),\ \nabla_{k_1}\nabla_{k_2}\ldots\nabla_{k_q}\mu^A,\ \ldots \qquad (4)$$
$$(A = 1, 2, \ldots, N; q = 1, 2, 3, \ldots);$$

в качестве таких дополнительных параметров μ^A можно взять:

энтропию; концентрации различных компонент в смеси;

компоненты тензоров остаточных деформаций и плотности [1]) дислокаций $\varepsilon_{ij}^{(p)}$, S_{ij};

компоненты вектора электромагнитного потенциала A_i для тензора электромагнитного поля

$$F_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i},$$

определенного в соответствующей инерциальной системе координат

[1]) В настоящее время происходит усовершенствование и обобщение теории пластичности добавлением новых параметров и таким путем получается теория дислокаций (см., например, [2]).

матрицей (см., например, [3])

$$F_{ij}=\begin{Vmatrix} 0 & B^3 & -B^2 & cE_1 \\ -B^3 & 0 & B^1 & cE_2 \\ B^2 & -B^1 & 0 & cE_3 \\ -cE_1 & -cE_2 & -cE_3 & 0 \end{Vmatrix},$$

где c — скорость света, E_1, E_2, E_3 — компоненты вектора электрической напряженности, а B^1, B^2, B^3 — компоненты вектора магнитной индукции;

компоненты тензора намагниченности и поляризации $\mathcal{P}_{ij} = {}^1/_2(F_{ij} - H_{ij})$, причем H^{ij} определены матрицей

$$H^{ij}=\begin{Vmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -D_1/c \\ -H_3 & 0 & H_1 & -D_2/c \\ H_2 & -H_1 & 0 & -D_3/c \\ D_1/c & D_2/c & D_3/c & 0 \end{Vmatrix},$$

где H_1, H_2, H_3 — компоненты вектора магнитной напряженности, а D_1, D_2, D_3 — компоненты вектора электрической индукции;

компоненты внутренних механических моментов количеств движения m_{ik} и т. п.

Переменные параметры μ^A могут иметь скалярную, тензорую или спинорную природу [4,5,6]. Наличие переменных параметров μ^A, которые согласно (4) необходимо определять при решении задач, означает, что изучаемая модель сплошной среды обладает внутренними степенями свободы.

Характерной и важной особенностью всех макроскопических моделей деформируемых сред и полей будет функциональная зависимость искомых величин для тел конечных размеров от определяющих параметров. Например, для деформируемого тела конечных размеров полная внутренняя энергия U всегда будет функционалом от функций $x^i(\xi^k)$ и $\mu^A(\xi^k)$.

Во многих случаях на практике можно принять обобщенное свойство аддитивности внутренней энергии и для полной энергии U пользоваться формулой вида

$$U=\int_m u(g_{ij}, x_j^i, \ldots, \nabla_{k_1}\nabla_{k_2}\ldots\nabla_{k_r}x_j^i, \mu^A, \ldots, \nabla_{k_1}\ldots\nabla_{k_s}\mu^A, S, K_B)\,dm + U_0, \quad (5)$$

где m — масса покоя, dm — элемент массы покоя среды, u — локальная внутренняя энергия, рассчитанная на единицу массы и представляющая собой физически определенную функцию только от указанных аргументов, причем S — энтропия, а K_B ($B = 1, 2, \ldots$) —

известные функции координат ξ^i (обобщение заданных физических постоянных). По основному физическому допущению в данной точке величина локальной удельной энергии u не зависит от градиентов высшего порядка [1]), не указанных в числе аргументов u (r и s — фиксированные числа).

В классической теории упругости (в трехмерном евклидовом пространстве) имеем простейший случай, когда

$$u = u(\overset{\circ}{g}_{ij}, \varepsilon_{ij}, S, K_B).$$

В более сложных новых моделях [2]) сплошных сред в аргументах удельной внутренней энергии u появляются дополнительные физико-химические характеристики μ^A и градиенты различных порядков от величин x^i_j и μ^A.

Наличие таких градиентов в выражении для внутренней энергии приводит к необходимости пересмотреть имеющиеся концепции об уравнениях движения и процессов, о краевых и начальных значениях, о механизмах взаимодействий, об условиях на скачках и многих других вопросах.

Специально выделенная и отмеченная в формуле (5) постоянная U_0 в классической теории упругости совершенно несущественна и обычно полагается равной нулю. В более общем случае постоянную U_0 необходимо учитывать, и ее нельзя рассматривать как аддитивную величину для отдельных частей тела при фактическом разделении тела на различные части. Это связано с тем, что всякое разделение тела на части, измельчение тела и т. п. связано с затратами внешней энергии. В первом приближении неаддитивность полной внутренней энергии U можно учитывать через постоянную U_0. Учет изменения U_0 при изменении поверхности тела при образовании трещин, при образовании и развитии дислокаций и при разрушении тела имеет первостепенное значение.

Для упругих тел при наличии изолированных особенностей изменение постоянной U_0 для равновесных процессов можно найти через глобальное изменение упругой энергии. Если внутри тела под действием внутренних процессов или под действием известных внешних воздействий возникают или устраняются некоторые дефекты, то это связано с затратами энергии, источником которой могут быть полная упругая энергия тела и известные внешние притоки энергии. В некоторых случаях изменения U_0 аналогичны скрытой теплоте плавления или вообще энергии фазовых превращений.

---

[1]) Еще Коши при создании теории упругости предвидел и подразумевал возможность введения в аргументы задаваемых функций высших производных. Из статистических теорий при предельном переходе от дисконтинуума к континууму получается, что в аргументах удельной внутренней энергии u могут присутствовать, вообще говоря, производные любого порядка из (3).

[2]) В частности, можно вспомнить модель жидкости с пузырьками [7].

Необходимо подчеркнуть [1]), что дальнейшее разрешение на физической основе проблемы прочности материалов будет тесно связано с изучением изменения U_0. Отсутствие законченных теорий и заметных успехов в разрешении основных задач о критериях прочности материалов можно объяснять игнорированием величины U_0. С другой стороны, успехи в теории трещин в хрупких телах в первую очередь связаны с учетом изменения величины U_0.

При решении некоторых задач в рамках теории упругости расчетные напряжения в отдельных малых областях могут возрастать неограниченно, и это не связано с заметным общим или даже местным разрушением. В связи с этим иногда неприемлемы критерии разрушения, основанные на появлении в упругом поле расчетных напряжений, превосходящих некоторые предельные значения.

Разрушения конструкций различных сооружений или испытываемых образцов в общем случае представляют собой глобальные явления того же характера, как явление неустойчивости движения и явление невозможности равновесия или непрерывного движения.

В общем случае критерии разрушения не имеют локальной природы. Тем не менее очень часто глобальная неустойчивость определяется вполне локальными условиями, однако нельзя не учитывать, что во многих случаях соответствующие локальные условия могут быть только необходимыми, но недостаточными для нарушения устойчивости равновесия и для разрушения данной конструкции.

Проблема конструирования моделей сплошных сред состоит в установлении характеристических величин и системы функциональных или дифференциальных уравнений и различного рода добавочных условий, которые позволяют в конкретных случаях формулировать математические задачи об определении законов движения x^i (ξ^k) и физико-химических процессов, определяемых функциями μ^A (ξ^k).

Задача о построении моделей сплошных сред применительно к известным классам реальных объектов и реальных явлений представляет собой одну из основных задач физического исследования. Разрешение этой задачи связано с опорой на исходные, универсальные и частные базисные допущения, на данные опытов и на согласование наблюдений и эмпирических измерений с теоретическими выводами и расчетами в пределах точности, нужной практически или задаваемой по смыслу поставленных проблем.

Предлагаемая работа посвящена описанию, анализу и развитию общего метода, позволяющего на основании минимального числа допущений физического характера устанавливать для моделей сред с внутренними степенями свободы усложненные замкнутые системы уравнений и усложненные добавочные краевые и другие условия,

[1]) См., в частности, т. II настоящей книги.

конкретизирующие отдельные модели и частные постановки задач. Исследуемое и положенное в основу базисное вариационное уравнение представляет собой простое и естественное обобщение вариационного принципа Лагранжа и во многих важнейших случаях полностью совпадает с хорошо известными примерами приложения и формулировки этого принципа [8,4,6,9,1,10].

Как хорошо и давно уже известно, все основные уравнения в теории относительности, в электродинамике, в аналитической механике, в термодинамике равновесных процессов, в теории упругости, в гидродинамике и во многих других случаях получаются при помощи вариационного уравнения Лагранжа.

Во многих современных физических теориях этот вариационный принцип представляет собой рабочий и, по существу, единственный исходный рациональный аппарат исследования.

Проведенный анализ показывает, что вариационное уравнение Лагранжа для материальных континуумов и для физических полей может быть положено в основу для любых физических моделей не только для обратимых явлений, но и в случаях необратимых явлений.

При помощи вариационного уравнения оказалось возможным объединить и синтезировать на общей основе различные феноменологические и статистические методы теории необратимых процессов в термодинамике и механике. В частности, появилась возможность истолковать и оценить в рамках уже развитой термодинамики необратимых процессов ассоциированный закон для остаточных пластических деформаций в механической теории пластичности.

Известным новым моментом в развиваемой теории будет применение уравнения в вариациях

1) для описания действительно осуществимых в сплошных средах необратимых явлений;

2) для установления уравнения состояния;

3) для установления кинетических уравнений;

4) для получения начальных и краевых условий и

5) для получения условий на сильных разрывах — скачках внутри среды.

При развитии современной теории усложненных макроскопических моделей сред и полей важно иметь ясное представление о том, что даже в рамках ньютонианской механики описание явлений с существенным проявлением внутренних степеней свободы невозможно только на базе главного уравнения механики Ньютона

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}. \tag{6}$$

Уравнение (6) достаточно в качестве базы для развития аналитической механики системы материальных точек, в теории абсолютно твердого тела, адиабатической теории упругости, теории движения идеальной несжимаемой жидкости и в некоторых других случаях

но уже недостаточно для учета макроскопических тепловых и электромагнитных эффектов.

В частности, уравнение (6) не может служить базисом для получения макроскопических законов, регулирующих рост пластических деформаций, для учета эффектов, связанных с изменением непрерывно распределенных дислокаций, для учета различных процессов и эффектов, связанных с макроскопическими теориями электрической поляризации и намагничивания сред, и во многих других случаях.

В частности, известное уравнение моментов количеств движения для малых частиц или для конечных тел не является следствием уравнения (6), а является независимым фундаментальным уравнением, связанным с симметрией законов природы относительно группы вращений, тогда как уравнение (6) связано с симметрией законов природы относительно группы трансляций.

Для многих классических моделей сплошных сред дифференциальное уравнение моментов количеств движения сводится к условию о симметрии тензора внутренних напряжений или удовлетворяется автоматически, когда тензор внутренних напряжений вводится как определяемая характеристика из общих допущений, фиксирующих свойства среды.

Отметим, что развитие статистических теорий для вывода макроскопических закономерностей, базирующееся на уравнении (6) на микроскопическом уровне, всегда связано с некоторыми существенными добавочными универсальными и частными допущениями, не вытекающими непосредственно из уравнения (6).

Обратимся теперь к разъяснению смысла основного вариационного уравнения, которое можно взять как исходное, базисное уравнение для макроскопических сред с внутренними степенями свободы.

Для простоты и большей общности рассмотрим дальнейшую теорию в рамках специальной теории относительности в предположении, что пространство — время псевдоевклидово.

Опыт и ближайшее рассмотрение показывают, что развитие теории с использованием четырехмерного геометрически определенного физического пространства — времени и четырехмерных векторов и тензоров очень удобно, естественно и в важных случаях с физической точки зрения совершенно необходимо.

В фиксированной системе координат наблюдателя наряду с действительными движениями и процессами, описываемыми точно или приближенно при помощи кусочно-гладких функций

$$x^i(\xi^k), \quad \mu^A(\xi^k), \quad S(\xi^k), \tag{7}$$

введем мысленно некоторый достаточно широкий класс кусочно-гладких допустимых функций, содержащий по условию систему

функций (7),

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{x}^i(\xi^k) &= x^i(\xi^k) + \delta x^i, \\ \widetilde{\mu}^A(\xi^k) &= \mu^A(\xi^k) + \delta\mu^A, \\ \widetilde{S}(\xi^k) &= S(\xi^k) + \delta S, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

и по смыслу величин $K_B(\xi^k)$ полагаем, что

$$\delta K_B(\xi^k) = 0.$$

Функции $\widetilde{x}^i$, $\widetilde{\mu}^A$, $\widetilde{S}$ рассматриваются в точках некоторой области системы событий четырехмерного объема V_0 пространства — времени, ограниченного трехмерной поверхностью Σ_0. Дальнейшее построение связано с предположением, что в классе допустимых функций вариации δx^i, $\delta\mu^A$ и δS в объеме V_0 непрерывны вместе со всеми производными, входящими в вариационные уравнения, и обладают достаточным произволом, а вариации δx_j^i, $\delta\nabla_k x_j^i$, ..., $\delta\nabla_k\mu^A$,... выражаются через функции $x^i(\xi^k)$ и $\mu^A(\xi^k)$ для действительных явлений, через вариации δx^i и $\delta\mu^A$ и через их производные по координатам x^i.

Существенной новой особенностью дальнейшей теории будут следующие обстоятельства:

1) вариации δx^i определены как компоненты четырехмерного контравариантного вектора, а вариации $\delta\mu^A$ — как компоненты тензоров той же природы, что и μ^A;

2) на границах Σ_3 произвольных объемов $V_4 \subset V_0$ вариации δx^i и $\delta\mu^A$ и их производные могут быть отличны от нуля и в известной степени произвольны.

Основное базисное уравнение напишем в виде

$$\delta \int_{V_4} \Lambda\, d\tau + \delta W^* + \delta' V = 0, \tag{9}$$

где Λ — плотность функции Лагранжа.

Для материальной среды Λ можно задавать формулой [1])

$$\Lambda = -\rho u(g_{ij}, x_j^i, \nabla_k x_j^i, \ldots, \mu^A, \nabla_k\mu^A, \ldots, S, K_B), \tag{10}$$

где ρ — скалярная плотность (отношение массы покоя к трехмерному объему в сопутствующей системе координат), u — внутренняя

[1]) К варьируемому интегралу по V_4 можно прибавить члены, учитывающие наличие величины U_0 в формуле (5), которая может вообще меняться за счет развития границы Σ_0 и поверхностей разрыва внутри V_4. В излагаемом ниже основном варианте теории такой добавочный член не вводится.

В аргументах формулы для Λ среди параметров μ^A выделена энтропия S, причем среди аргументов Λ не значатся градиенты энтропии S. Дальнейшую теорию можно распространить непосредственно на случай, когда энтропия не выделяется специально, а отождествляется с одним из параметров μ^A, входящим в Λ вместе со своими градиентами любого порядка.

энергия, рассчитанная на единицу массы покоя в сопутствующей системе координат. В специальной теории относительности величину u можно рассматривать как четырехмерный скаляр. Первый закон термодинамики гласит, что функцию $u\rho\, d\tau$ можно ввести для любой физической бесконечно малой частицы.

Установление аргументов и вида функции u — это основная физическая задача, возникающая при конкретизации модели сплошной среды. Фиксирование внутренней энергии как функции своих аргументов всегда связано с некоторыми допущениями, часть из которых иногда может показаться очень естественной и само собой разумеющейся.

На практике часто значения переменных параметров можно рассматривать как характеристики малых возмущений, в связи с этим во многих случаях функцию u можно рассматривать просто как положительно дефинитную квадратичную форму определяющих малых переменных параметров. В этих случаях проблема определения функции u сводится к проблеме определения постоянных коэффициентов соответствующей квадратичной формы. При определении этих коэффициентов полезны условия симметрии [11,12] и можно опереться на опытные данные, а в некоторых случаях значение этих коэффициентов можно связать с молекулярными постоянными на основе статистических теорий (развиваемых с помощью своих универсальных и специфических для данной модели допущений). Такие коэффициенты подобны модулю Юнга и коэффициенту Пуассона, которые на практике всегда можно легко найти из опытов. Их можно вычислить статистическим путем (на основе некоторых далеко идущих допущений). Однако в ряде случаев расчетные значения из статистики, вообще говоря, не соответствуют опыту для твердых тел. Для газов соответствие между расчетами и опытом лучше, но и в этом случае требуется опытная проверка результатов расчетов. Все же статистические теории позволяют наметить некоторые соотношения между подобными коэффициентами, не очевидные в феноменологических теориях, например, связи между коэффициентами теплопроводности, вязкости и диффузии.

В ньютонианской механике в инерциальной системе координат обычно вместо формулы (10) можно пользоваться формулой

$$\Lambda = \rho\,(^1/_2 v^2 - u),$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость точек сплошной среды, а u — трехмерный скаляр, равный внутренней энергии.

В уже развитых теориях функцию Λ можно считать известной как для уже определенных моделей материальных сред, так и для электромагнитного поля. В общей теории относительности часть величины Λ, связанная с тяготением, известна и служит основой для определения метрического тензора g_{ij}, представляющего гравитационное поле. Различные обобщения общей теории относи-

тельности, вообще говоря, всегда связаны с изменением или иным заданием плотности лагранжиана Λ.

Важно отметить, что с физической точки зрения можно говорить о том, что физическая система задана или известна, только в том случае, когда внутренняя энергия или соответственно лагранжиан Λ заданы или определены [1, 10,13–15].

Таким образом, с общей физической точки зрения требование о задании лагранжиана Λ в функции макроскопических переменных в уравнении (9) будет естественным. Выполнение этого требования связано с использованием громадного опыта, накопленного в различных физических теориях и в разнообразных экспериментах. Допущения, выставляемые при фиксировании функции Λ, всегда необходимы и могут быть оправданы различными интуитивными и другими, вообще говоря, наиболее простыми предположениями.

Самые непосредственные контакты макроскопических теорий с универсальными физическими принципами, с опытом и со статистическими теориями могут и должны осуществляться при обсуждении проблемы фиксирования функции Λ.

Обратимся теперь к разъяснению выражения для задаваемого функционала δW^*, характеризующего внешние объемные в V_4 и поверхностные на Σ_3 взаимодействия данной части среды в V_4 с внешними полями и телами и некоторые необратимые действия соседних частей среды, примыкающих к выделенному объему V_4 вдоль поверхности Σ_3.

При адиабатических обратимых процессах и при отсутствии внешних притоков энергии внутри V_4 и на поверхности Σ_3 часто можно принять просто, что

$$\delta W^* = 0.$$

В консервативных системах небесной механики всегда можно считать, что $\delta W^* = 0$.

В общем случае феноменологических теорий при наличии внешних к рассматриваемой среде объемных и поверхностных притоков энергии и необратимых процессов, когда в аргументы Λ входят производные по ξ^k или x^i различных порядков от $x^i(\xi^k)$ и $\mu^A(\xi^k)$, общий вид выражения для δW^* напишем в виде

$$\delta W^* = \int_{V_4} (\rho\theta\delta S - Q_i\delta x^i - M_A\delta\mu^A)\,d\tau - \\ - \int_{\Sigma_3+S_\pm} \left(\sum_{p=0} Q_i^{kj_1\ldots j_p} \nabla_{j_1}\ldots\nabla_{j_p}\delta x^i + \sum_{q=0} M_A^{kj_1\ldots j_q}\nabla_{j_1}\ldots\nabla_{j_q}\delta\mu^A \right) n_k\,d\sigma. \tag{11}$$

Здесь через $S_\pm$ обозначены две стороны трехмерной поверхности S внутри V_4, на которой характеристики движения могут терпеть сильные разрывы, n_k — компоненты единичного вектора внешней

нормали на Σ_3 и S_+ или S_-. Компоненты

$$Q\,(Q_i,\ Q_i^{kj_1\ldots j_p}),\qquad M\,(M_A,\ M_A^{kj_1\ldots j_q})$$

— некоторые задаваемые внешние обобщенные «силы». Величина θ играет роль абсолютной температуры, и ее можно рассматривать в разных случаях как определяемую или как задаваемую величину. В формуле (11) вариация энтропии δS введена как величина, независимая от вариаций δx^i и $\delta\mu^A$.

Задание функционала δW^* связано с проблемой разделения взаимодействий на внутренние и внешние. Например, если электромагнитное поле или гравитационное поле рассматриваются как внешние объекты, то соответствующие потоки энергии для электромагнитных пондеромоторных сил и для гравитационных сил присутствуют в выражении для δW^*; если же эти поля включаются в модель среды, то соответствующие полные дифференциалы можно выделять из δW^* и их нужно включать в выражение для Λ. При перенесении полных дифференциалов из δW^* в $\delta\int\Lambda d\tau$ меняется смысл Λ, формула (10) может быть заменена другой аналогичной формулой, в которой вместо внутренней энергии взята свободная энергия, или энтальпия, или другие термодинамические функции состояния. Для необратимых процессов перенесение члена δW^* целиком в Λ невозможно, так как вариация δW^*, вообще говоря, неголономна.

Определение компонент обобщенных массовых и поверхностных сил Q и M представляет собой проблему, тесно связанную с теорией диссипативных механизмов, при решении этой задачи неизбежны различные допущения и контакты с уже развитой термодинамикой необратимых явлений. Определение Q и M аналогично основной физической задаче в механике Ньютона об установлении законов для сил, определенных уравнением Ньютона, а в данном случае вариационным уравнением (9). Особенное физическое значение может иметь учет свойств величин в подынтегральном выражении для δW^* на поверхности разрыва $S_\pm$. Определение δW^* связано с выбором определяющих параметров x^i и μ^A, с определением их вариаций и, в частности, со свойством непрерывности вариации на скачках.

Важно отметить, что при определении или при задании величин Λ и δW^* выявляются общие основы для самых разнообразных моделей. Это позволяет использовать и синтезировать опыт в различных областях и установить непосредственные связи между различными теориями. Кроме того, возникают дополнительные средства для использования статистических соображений.

Учет диссипативных процессов можно и удобно производить при помощи уравнения для продукции энтропии в законах для действительных движений и процессов. Уравнение, определяющее изменение энтропии частиц, получено ниже из уравнений Эйлера в общей вариационной задаче (9). Положительность роста энтропии за счет

внутренних необратимых процессов должна обеспечиваться законами, задающими Λ и обобщенные силы Q и M для действительных явлений.

По основному смыслу уравнения (9) принимается, что величина δW представляется поверхностным интегралом по $\Sigma_3 + S_\pm$. При вариациях δx^i, $\delta\mu^A$ и их производных, отличных от нуля на $\Sigma + S_\pm$, вариация δW определяется из уравнения (9) через $\delta\int\Lambda d\tau$ и δW^*.

Если, кроме уравнения (9), величина δW на $\Sigma_0 + S_\pm$ (при произвольных δx^i, $\delta\mu^A$ и соответственно их производных) задается еще внешними условиями, то, как будет показано ниже, это приведет к начальным условиям, краевым условиям и условиям на скачке.

Уравнение (9) при вариациях δx^i и $\delta\mu^A$, равных нулю вместе со своими производными нужного порядка на $\Sigma_3 + S_\pm$, но произвольных (линейно независимых) внутри V_4, приводит к уравнениям Эйлера [1])

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q{}^p}\nabla_i x_q{}^p + \nabla_s\left(\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q{}^i}x_q{}^s\right) + \frac{\partial\Lambda}{\partial K_B}\nabla_i K_B + Q_i + M_A\nabla_i\mu^A = \rho\theta\nabla_i S, \quad (12)$$

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta S} = \frac{\partial\Lambda}{\partial S} = -\rho\theta, \qquad \frac{\delta\Lambda}{\delta\mu^A} = M_A. \quad (13)$$

Здесь через $\delta\Lambda/\delta x_q{}^p$, $\delta\Lambda/\delta\mu^A$ и $\delta\Lambda/\delta S$ обозначены вариационные производные, например:

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q{}^p} = \frac{\partial\Lambda}{\partial x_q{}^p} - \nabla_k\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_k x_q{}^p} + \nabla_k\nabla_s\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_s\nabla_k x_q{}^p} - \cdots \quad (14)$$

Умножая уравнения (12) на $x_4{}^i$, после суммирования по индексу i получим

$$\rho\theta\frac{dS}{d\xi^4} = Q_i\frac{\partial x^i}{\partial\xi^4} + M_A\frac{d\mu^A}{d\xi^4} + \frac{\partial\Lambda}{\partial K_B}\frac{dK_B}{d\xi^4} + \nabla_s F^s, \quad (15)$$

где

$$F^s = x_4{}^i x_p{}^s\frac{\delta\Lambda}{\delta x_p{}^i}, \qquad \frac{d}{d\xi^4} = \frac{\partial x^i}{\partial\xi^4}\nabla_i,$$

так как

$$x_4{}^s\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q{}^p}\nabla_s x_q{}^p + x_4{}^p\nabla_s\left(\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q{}^p}x_q{}^s\right) = \nabla_s\left(x_4{}^i x_q{}^s\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q{}^i}\right)$$

---

[1]) Эти уравнения получены приравниванием нулю в объемном интеграле коэффициентов при δx^i, $\partial\mu^A$ и δS с учетом равенств

$$\delta\Lambda = \partial\Lambda + \delta x^i\nabla_i\Lambda, \quad \delta\mu^A = \partial\mu^A + \delta x^i\nabla_i\mu^A, \quad \delta d\tau = \nabla_i\delta x^i d\tau.$$

в силу равенства

$$0 = \frac{\partial \Lambda}{\partial x_q{}^p}\left(x_4{}^s \nabla_s x_q{}^p - x_q{}^s \nabla_s x_4{}^p\right) = \frac{\partial \Lambda}{\partial x_q{}^p}\left(\frac{\partial^2 x^p}{\partial \xi^q \partial \xi^4} - \frac{\partial^2 x^p}{\partial \xi^4 \partial \xi^q}\right).$$

Уравнение (15) представляет собой уравнение для продукции энтропии в частице, так как по принятому условию координата ξ^4 играет роль времени. Для получения производных по собственному времени $d\tau = (g_{44})^{1/2} d\xi^4$ достаточно умножить обе части соотношения (15) на $(g_{44})^{-1/2}$.

Уравнения Эйлера содержат в себе уравнения импульсов и энергии, и в зависимости от смысла параметров μ^A уравнения Эйлера могут содержать в себе уравнения Максвелла, уравнения химической кинетики, различные другие виды уравнений для искомых параметров μ^A — характеристик внутренних степеней свободы. Можно показать [2], что все существующие макроскопические модели сплошных сред, в том числе и модели пластических сред, можно получить из базисного уравнения (9).

Уравнения Эйлера представляют собой, вообще говоря, уравнения с частными производными, порядок которых связан с порядком производных, входящих в аргументы функции Лагранжа Λ, в общем случае этот порядок может быть довольно высоким.

Если $\Lambda d\tau$ и δW^* — четырехмерные скаляры, определенные формулами (10) и (11), то после варьирования первого интеграла и соответствующего интегрирования по частям из основного уравнения (9) следует формула

$$\delta W = \int\limits_{\Sigma_3 + S_\pm} \Big[\sum_{p=0} \left(P_i^{kj_1 \ldots j_p} + Q_i^{kj_1 \ldots j_p}\right) \nabla_{j_1} \ldots \nabla_{j_p} \delta x^i + \\ + \sum_{q=0} \left(N_A^{kj_1 \ldots j_q} + M_A^{kj_1 \ldots j_q}\right) \nabla_{j_1} \ldots \nabla_{j_q} \delta \mu^A \Big] n_k d\sigma + \int\limits_{\Sigma_3 + S_\pm} \nabla_s \Omega^{sk} n_k d\sigma. \quad (16)$$

Здесь $P_i^{kj_1 \ldots j_p}$ и $N_A^{kj_1 \ldots j_q}$ — некоторые величины (компоненты тензоров), выражающиеся через Λ и через производные от x^i и μ^A; эти величины получаются при преобразованиях вариации

$$\delta \int\limits_{V_4} \Lambda \, d\tau$$

путем интегрирования по частям. Техника этих преобразований вообще не дает однозначного определения компонент $P_i^{kj_1 \ldots j_p}$ и $N_A^{kj_1 \ldots j_q}$, это связано с возможностью приписать слева в (16) последний интеграл, который тождественно равен нулю, когда Ω^{sk} будет произвольным антисимметричным тензором с непрерывными компонентами, имеющими непрерывные производные первого и второго порядков в точках объема, ограниченного поверхностью $\Sigma_3 + S_\pm$.

Это утверждение очевидно на основании теоремы Гаусса — Остроградского, так как из равенства $\Omega^{sk} = -\Omega^{sk}$ следует, что $\nabla_s \nabla_k \Omega^{sk} = 0$.

В качестве компонент Ω^{sk} можно взять любые линейные формы того же вида, что и в первых членах подынтегральных выражений в формуле (16). Очевидно, что формулы, дающие выражение компонент тензоров

$$P_i^{kj_1 \ldots j_p} + Q_i^{kj_1 \ldots j_p}, \qquad N_A^{kj_1 \ldots j_q} + M_A^{kj_1 \ldots j_q}$$

через параметры, характеризующие движение и состояние частиц, не определены однозначно ввиду произвола в выборе Ω^{sk}.

В связи с этим возникает проблема о неоднозначности понятия тензора энергии — импульса и проблема о произволе для заданных уравнений Эйлера уравнений состояния вообще и, в частности, фундаментального понятия о внутренних напряжениях.

Зависимость указанных компонент тензоров в формуле (16) от определяющих параметров можно рассматривать и истолковывать как уравнения состояния физической среды. Это — уравнения, обобщающие закон Гука.

Таким образом, для фиксированной системы уравнений Эйлера появляется произвол в определении уравнений состояния. Более детальный анализ показывает, что дополнительные краевые и начальные условия на сильных разрывах, выражающие собой физические взаимодействия на границе тела или внутри тела на скачках, не могут служить основой для исключения указанной неоднозначности в уравнениях состояния.

При фиксированной системе уравнений Эйлера можно изменять плотность лагранжиана Λ добавлением дивергентного члена; нетрудно видеть, что это также повлечет за собой изменение уравнений состояния. Однако полное фиксирование лагранжиана можно включать в физическое определение модели сплошной среды. Фиксирование системы уравнений Эйлера не дает полной и нужной информации о конкретной модели среды.

Естественно, что напряжения определяются однозначно, когда уравнения состояния установлены. Но весь смысл обсуждаемой неоднозначности связан с тем, что все законы движения и законы процессов изменения параметров μ^A в конкретных задачах сохраняются при некоторых различных видах уравнений состояния.

Необходимо отметить и подчеркнуть, что вскрытая выше неоднозначность не связана со спецификой метода установления уравнений состояния с помощью вариационного уравнения (9). Такое же положение дел возникает при использовании общего термодинамического уравнения притока тепла в дифференциальной форме [14].

Смысл этой неоднозначности можно понять и разъяснить при помощи следующих общих физических соображений.

Хорошо известно, что при движении абсолютно твердых тел решение задачи о внутренних напряжениях в твердом теле не имеет определенного ответа. В твердом теле всегда можно представить себе приложенной любую систему внутренних сил, эквивалентную нулю, наличие или отсутствие которой нельзя обнаружить. Присутствие такой системы сил не имеет никакого значения.

Легко убедиться, что и для любых деформируемых тел, аналогично тому как и для абсолютно твердых тел, можно указать много различных систем напряжений, которые не влияют на законы движения, и поэтому наличие или отсутствие таких напряжений нельзя обнаружить. Для различных систем внутренних напряжений уравнения движения и добавочные условия одинаковы, но уравнения состояния различны.

Очевидно, что вопрос о такой многозначности не возникает, когда заранее приняты уравнения состояния. Однако в проблемах конструирования новых моделей, когда устанавливается система уравнений состояния, вопрос о возможности разного выбора уравнений состояния возникает по существу решаемой задачи. Этот вопрос может приобретать существенное значение, когда плотность лагранжиана зависит от последовательности градиентов определяющих характеристик.

Для того чтобы продемонстрировать на примере справедливость указанного предложения, рассмотрим уравнения теории упругости, для которых уравнения состояния представлены формулами

$$p^{ij} = \rho \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}. \tag{17}$$

Вместо уравнений состояния (17) возьмем другие уравнения состояния в виде

$$p^{*ij} = p^{ij} + \tilde{p}^{ij}, \quad \tilde{p}^{ij} = \nabla_s \nabla_k N^{iksj} \qquad (N^{iksj} = -N^{ikjs}), \tag{18}$$

причем величины N^{iksj} антисимметричны, как указано, по s, j, т. е. представляют собой компоненты тензора, зависящего для всех задач одинаково, но произвольно заданным образом от любых параметров состояния и любых их производных [1]).

Легко убедиться, что все законы движения и деформаций будут определяться независимо от $\tilde{p}^{ij}$, так как добавочные напряжения $\tilde{p}^{ij}$ удовлетворяют тождественно уравнениям равновесия

$$\nabla_j \tilde{p}^{ij} = 0$$

[1]) В теории упругости в задачах о равновесии при отсутствии внешних массовых сил решения для напряжений также можно представить в виде $p^{ij} = \tilde{p}^{ij}$, но при наличии закона Гука или другого конкретного уравнения состояния величины N^{iksj} будут функциями координат и не будут универсальными функциями (одинаковыми для всех задач) от характеристик деформаций. В частности, согласно (1.8) компоненты $\tilde{p}^{ij}$ симметричные, когда $N^{iksj} = \omega^{ik}\omega^{sj}$, где ω^{pq} — любой антисимметричный тензор.

и, кроме того, для любого объема V, ограниченного замкнутой поверхностью Σ, имеем

$$\int_V \nabla_i \widetilde{p}^{ij} \delta x_i \, d\tau = \int_\Sigma (\widetilde{p}^{ij} \delta x_i + \nabla_k N^{iksj} \nabla_s \delta x_i) \, n_j \, d\sigma =$$

$$= \int_\Sigma \nabla_s (\nabla_k N^{iksj} \delta x_i) \, n_j \, d\sigma = 0.$$

В этом случае очевидно, что наряду с напряжениями $\widetilde{p}^{ij}$ вводятся поверхностные напряжения третьего порядка $\nabla_k N^{iksj}$. Входящие в граничные условия нормальные составляющие градиента ∇_s подынтегральной функции в поверхностном интеграле обращаются в нуль в каждой точке поверхности Σ тождественно. Интеграл по любому элементу $\Delta\sigma$ поверхности Σ по формуле Гаусса — Остроградского сводится к интегралу по контуру Γ, ограничивающему этот элемент. Взаимодействия по элементу $\Delta\sigma$ сводятся к взаимодействиям по контуру Γ, которые можно рассматривать как внутренние. Если $\delta x_i = 0$ на Γ, то интеграл по $\Delta\sigma$ равен нулю. Отсюда следует, что добавочные напряжения $\widetilde{p}^{ij}$ и $\nabla_k N^{iksj}$ в совокупности не дают вклада в потоки энергии взаимодействий (при произвольных возможных перемещениях δx_i) между соседними частицами, отделенными одна от другой элементами любой поверхности Σ, и, следовательно, и внешними телами на границе тела Σ_0. Применение аналогичного преобразования к компонентам p^{ij}, определенным формулой (17), в которой u представляет собой удельную внутреннюю энергию, приводит к уравнению энергии с наличием обмена механической работой между частицами, отделенными одна от другой элементами $\Delta\sigma$ поверхности Σ, при $\delta x_i \neq 0$. В этом случае обмен энергией между соседними частицами осуществляется только за счет обычных напряжений второго порядка p^{ij}. В связи с этим подчеркнем, что в более сложных моделях нельзя внутренние поверхностные взаимодействия свести только к обычным напряжениям второго порядка, поэтому приведенные выше соображения представляют интерес.

Вариационное уравнение (9) позволяет глубже уяснить существо понятий об уравнениях состояния, о граничных и начальных условиях на сильных разрывах, которые не следуют из дифференциальных уравнений без дополнительных допущений. Оказывается, что все только что перечисленные условия и уравнения тесно связаны между собой и должны рассматриваться в едином комплексе.

Последующие выводы связаны с таким преобразованием формулы (16) для δW, чтобы подынтегральное выражение содержало только вариации δx^i и $\delta\mu^A$ и независимые на $\Sigma + S_\pm$ ковариантные производные по нормали $\nabla_n^{(\alpha)} \delta x^i$ и $\nabla_n^{(\beta)} \delta\mu^A$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots$) Дело в том, что вариации δx^i и $\nabla_j \delta x^i$, а также не все высшие градиенты $\nabla_{j_1}, \ldots, \nabla_{j_p} \delta x^i$ на $\Sigma + S_\pm$ можно рассматривать как независимые.

В простейших частных случаях соответствующие преобразования формулы (16) для получения граничных условий были произведены Миндлиным [1]) [17]. Соответствующие частные преобразования для получения условий на скачках были сделаны М. В. Лурье [18].

Предположим, что поверхность $\Sigma_3 + S_\pm$ гладкая, для этого достаточно гладкости поверхности S (так как объем V_4 и выбираемая поверхность Σ_3 произвольны). Указанные преобразования приводят к формуле

$$\delta W = \int\limits_{\Sigma+S_\pm} (\mathcal{P}_{i0}\delta x^i + \mathcal{P}_{i1}\nabla_n\delta x^i + \ldots + \mathcal{P}_{i(r-1)}\nabla_n^{(r-1)}\delta x^i + \\ + \mathcal{M}_{A0}\delta\mu^A + \mathcal{M}_{A1}\nabla_n\delta\mu^A + \ldots + \mathcal{M}_{A(s-1)}\nabla_n^{(s-1)}\delta\mu^A)\, d\sigma. \quad (19)$$

В формуле (19) компоненты векторов $\mathcal{P}_{i0}$, $\mathcal{P}_{i1}$, ..., $\mathcal{P}_{i(r-1)}$ и компоненты тензоров $\mathcal{M}_{A0}$, ... $\mathcal{M}_{A(s-1)}$ определены однозначно и выражаются через $P_i^{kj_1\ldots j_\nu} + Q_i^{kj_1\ldots j_\nu}$ и $N_A^{kj_1\ldots j_\nu} + M_A^{kj_1\ldots j_\nu}$, которые не определяются однозначно.

Существенной особенностью векторов $\mathcal{P}_{j\alpha}$ и тензоров $\mathcal{M}_{A\beta}$, определенных в точках элементов $d\sigma$ на граничной поверхности $\Sigma_3 + S_\pm$, будет их зависимость не только от ориентации этих элементов, как это имеет место для обычных напряжений, но и от кривизны этих элементов и от других более тонких дифференциальных геометрических свойств рассматриваемых элементов [2]).

Истинными характеристиками сплошной среды будут именно векторы $\mathcal{P}_\alpha$ и тензоры $\mathcal{M}_\beta$, они зависят от геометрических особенностей площадок, по которым происходит взаимодействие, и от определяющих параметров через функцию Лагранжа Λ и через $Q_i^{kj_1\ldots j_\nu}$ и $M_A^{kj_1\ldots j_\nu}$ входящих в выражение для δW^*. Очевидно, что в формуле (11

---

[1]) Общее преобразование в четырехмерном пространстве — времени при любом конечном порядке градиентов вариаций было произведено В. Желноровичем.

[2]) Переход от формулы (16) к формуле (19) легко получить при отсутствии ребер или конических точек на $\Sigma + S_\pm$; при наличии таких особенностей формула (19) также верна, но в этом случае значение интеграла (19) необходимо рассматривать как предел вдоль гладкой поверхности $\Sigma + S_\pm$, стремящейся к поверхности с ребрами. Из-за наличия особенностей и разрывов у подынтегральной функции в (19), зависящей от вектора $\boldsymbol{n}$ и его касательных производных, при переходе к пределу (к трехмерной поверхности $\Sigma + S_\pm$ с двумерными ребрами) возникают добавочные интегралы, взятые по двумерной поверхности ребер. Эти интегралы можно выписать, применяя интеграл (16), не имеющий особенностей на ребрах, сразу к поверхности с ребрами, затем надо произвести преобразование к формуле (19); при этом преобразовании второй интеграл от дивергентного члена, обращающийся в нуль для гладкой поверхности $\Sigma + S_\pm$, для поверхности с ребрами даст легко вычисляемые интегралы по ребрам, вообще отличные от нуля.

для δW^* существенны только комбинации, составленные из $Q_i^{kj_1\ldots j_\nu}$ и $M_A^{kj_1\ldots j_\nu}$, входящие в определение $\mathcal{P}_{i\alpha}$ и $\mathcal{M}_{A\beta}$.

Если на части границы Σ_0 величина δW задана, то на основании формулы (19), произвола δx^i, $\delta\mu^A$ и их нормальных градиентов на Σ_0, получим следующие условия в точках A на рассматриваемой части Σ

$$\mathcal{P}_{i\alpha} = f_{i\alpha}(A), \qquad \mathcal{M}_{A\beta} = g_{A\beta}(A) \tag{20}$$
$$(i = 1, 2, 3, 4; \quad A = 1, 2, \ldots, N; \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots, r-1; \quad \beta = 0, 1, 2, \ldots, s-1),$$

где $f_{i\alpha}(A)$ и $g_{A\beta}(A)$, вообще говоря, заданные функции в точках A.

На пространственной трехмерной части границы Σ_0, соответствующей $t_0 = \text{const}$, равенства (20) представляют собой начальные условия в трехмерном объеме, занятом телом.

Условия (20) на трехмерной части Σ, образованной двумерной границей тела Σ_2 и одновременно изменяющимся временем t, можно рассматривать как краевые условия на границах переменного трехмерного объема, занятого данным телом. Равенства (20) на текущей границе $t = \text{const} > t_0$ можно рассматривать, вообще говоря, просто как соотношения, определяющие правые части на основании законов движения, которые выделяются начальными и краевыми условиями.

Напишем теперь условия на трехмерной поверхности сильного разрыва S, расположенной внутри четырехмерного объема V_4 сплошной среды. Примем, что на основании предварительных исследований и соответствующих гипотез все внешние воздействия на среду, распределенные по S, включены в δW^* (например, изменение «аддитивной» постоянной u_0 и, в частности, тепловыделение при химических реакциях на фронте горения или детонации или поглощение энергии на различного рода разрывах сплошности вдоль S иногда можно рассматривать как внешние воздействия; эти же эффекты можно трактовать как внутренние процессы, усложняя и изменяя плотность лагранжиана Λ и, в частности, выделяя вариации соответствующего добавочного поверхностного интеграла по поверхности разрыва S).

Полагая, что вариации δx^i и $\delta\mu^A$ и все их производные, входящие в δW, равны нулю на Σ, на поверхности скачка S, получим

$$0 = \delta W = \int_S [(\mathcal{P}_{i0}\delta x^i)_+ + (\mathcal{P}_{i0}\delta x^i)_- + \ldots + (\mathcal{P}_{i(r-1)}\nabla_n^{(r-1)}\delta x^i)_+ + (\mathcal{P}_{i(r-1)}\nabla_n^{(r-1)}\delta x^i)_- + (\mathcal{M}_{A0}\delta\mu^A)_+ + (\mathcal{M}_{A0}\delta\mu^A)_- + \ldots + (\mathcal{M}_{A(s-1)}\nabla_n^{(s-1)}\delta\mu^A)_+ + (\mathcal{M}_{A(s-1)}\nabla_n^{(s-1)}\delta\mu^A)_-]\, d\sigma. \tag{21}$$

В формуле (21) у всех величин, зависящих от направления нормали на S, дальше будем применять одно и то же направление нормали.

На основании определений $\mathscr{P}_{i\alpha}$ и $\mathscr{M}_{A\beta}$ и оператора ∇_n^k имеем

$$\mathscr{P}_{i\alpha}(n) = \mp \mathscr{P}_{i\alpha}(-n), \qquad \mathscr{M}_{\beta A}(n) = \mp \mathscr{M}_{A\beta}(-n), \qquad \nabla_n^{k-1} = \mp \nabla_{(-n)}^{k-1}, \tag{22}$$

причем знак минус соответствует четным α, β и k, а знак плюс — нечетным.

Как было указано, основное условие о классе допустимых функций состоит в предположении, что искомое решение и сравниваемые функции в объеме V_4 кусочно-непрерывны вместе со всеми своими частными производными, присутствующими в основном вариационном уравнении (9). Основной смысл введения поверхности сильного разрыва S внутри объема V_4 состоит в том, что при мысленном пересечении поверхности S искомые решения и соответственно варьированные допустимые функции терпят разрывы [1]). Эти разрывы могут иметь различный характер, который, в частности, может быть связан с порядком и видом производных или самих функций, терпящих разрыв на S. Например, можно рассматривать сильные разрывы типа трещин, в которых сами искомые функции вместе с любыми частными производными разрывны, или разрывы типа дислокаций, в которых малые перемещения, нормальные к поверхности S, непрерывны, но перемещения в касательной плоскости к S при переходе с одной стороны S_+ на другую S_- разрывны, или разрывы типа ударных волн в классической газовой динамике, когда все координаты x^i (перемещения) на S непрерывны, но могут терпеть разрыв производные $\partial x^i/\partial \xi^j$.

При наличии в числе аргументов функции Λ производных высшего порядка

$$\frac{\partial^k x^i}{\partial \xi^{j_1} \dots \partial \xi^{j_k}}$$

возникает большее число различных видов возможных сильных разрывов.

В газовой динамике и в простейших теориях механики твердых тел при постановке и решении конкретных задач возможны различные случаи, когда тип поверхностного разрыва задается или когда тип разрыва определяется в процессе решения.

В соответствии с этим при применении вариационных уравнений также необходимо вводить или находить классы функций, среди которых должно существовать искомое решение [2]). В частности, если принять, что класс допустимых функций определяется следующими

---

[1]) В общем случае величины разрывов искомых функций также являются искомыми. Однако можно рассматривать задачи, в которых некоторые разрывы искомых величин фиксированы в дополнительных условиях задачи.

[2]) Такого рода допущения аналогичны весьма общим допущениям о непрерывности и дифференцируемости различных функций в механике сплошной среды.

условиями в точках поверхности S:

$$\left.\begin{aligned}&(\nabla_n^\alpha \delta x^i)_+ = (\nabla_n^\alpha \delta x^i)_- \qquad (i = 1, 2, 3, 4; \quad \alpha = 0, 1, \ldots, r_1 - 1;\ r_1 \leqslant r),\\ &\text{причем } (\nabla_n^\alpha \delta x^i)_+,\ (\nabla_n^\alpha \delta x^i)_- \text{ произвольны и независимы при } \alpha = r_1,\\ &r_1 + 1, \ldots, r - 1,\\ &(\nabla_n^\beta \delta\mu^A)_+ = (\nabla_n^\beta \delta\mu^A)_- \ (A = 1, 2, \ldots, N; \quad \beta = 0, 1, \ldots, s_1 - 1;\ s_1 \leqslant s),\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

а $(\nabla_n^\beta \delta\mu^A)_+$, $(\nabla_n^\beta \delta\mu^A)_-$ произвольны и независимы при $\beta = s_1, \ldots, s - 1$, то это определит при переходе через поверхность S класс допустимых функций x^j (ξ^1, ξ^2, ξ^3, ξ^4), непрерывных вместе со своими $r_1 - 1$ ковариантными частными производными, и функций μ^A (x^1, x^2, x^3, x^4), непрерывных вместе со своими $s_1 - 1$ ковариантными частными производными, причем нормальные к S производные от этих функций более высокого порядка могут иметь произвольный разрыв. В добавление к условиям (23) здесь предполагается, что все величины, входящие в уравнение (9), на каждой стороне поверхности S непрерывны при движении вдоль поверхности S. Из произвольности и независимости величин $\nabla_n^\alpha \delta x^j$ и $\nabla_n^\beta \delta\mu^A$ на основании (22) и (23) из (21) получим следующие условия на поверхности скачка:

$$\left.\begin{aligned}&(\mathcal{P}_{i\alpha})_+ = (\mathcal{P}_{i\alpha})_-, \qquad (\mathcal{M}_{A\beta})_+ = (\mathcal{M}_{A\beta})_-\\ &\text{при } \alpha = 0, 1, \ldots, r_1 - 1,\ \beta = 0, 1, \ldots, s_1 - 1,\\ &(\mathcal{P}_{i\alpha})_+ = (\mathcal{P}_{i\alpha})_- = 0, \qquad (\mathcal{M}_{A\beta})_+ = (\mathcal{M}_{A\beta})_- = 0\\ &\text{при } \alpha = r_1, r_1 + 1, \ldots, r - 1, \qquad \beta = s_1, s_1 + 1, \ldots, s - 1.\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Условия (24) можно рассматривать как условия о непрерывности (сохраняемости при пересечении скачка S мировыми линиями частиц) величин $\mathcal{P}_{i\alpha}$ и $\mathcal{M}_{A\beta}$ на скачке S. Это свойство величин $\mathcal{P}_{i\alpha}$ и $\mathcal{M}_{A\beta}$ представляет собой их важную физическую характеристику.

При более подробном изучении задач с разрывными решениями и, в частности, задач, связанных с изменяющимися границами поверхности скачка S (например, при распространении по частицам внутри среды изолированных дислокаций, при росте трещин и в других случаях), можно обобщить основное вариационное уравнение (9) и ввести еще добавочное варьирование поверхности S или ее краев по лагранжевым координатам ξ^i.

В связи с этим для получения дополнительных соотношений, отвечающих такого рода усложненным разрывным явлениям в действительных телах, необходимо, вообще говоря, усложнять варьируемые функционалы в основном вариационном уравнении (9) за счет введения добавочных членов в δW^* или $\delta \int \Lambda\, d\tau$, содержащих соответствующие вариации лагранжевых координат. Это обусловливается

необходимостью учитывать особые энергетические эффекты, связанные с образованием или возможным распространением по частицам среды разрывов различной природы. Эти вопросы будут рассмотрены подробно в другой работе.

ЛИТЕРАТУРА К ДОБАВЛЕНИЮ II

1. Седов Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред, УМН, 1965, т. 20, вып. 5.
2. Бердичевский В. Л., Седов Л. И. Динамическая теория непрерывно распределенных дислокаций. Связь с теорией пластичности, ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
3. Седов Л. И. О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций, ПММ, 1965, т. 20, вып. 1, стр. 4—17.
4. Голубятников А. Н. Сплошная среда со спинорными и векторными характеристиками, Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 2.
5. Желнорович В. А. Спинор как инвариантный объект, ПММ, 1966, № 6.
6. Желнорович В. А. Модели сред с внутренними механическими и электромагнитными моментами. Сб. статей, посвященный юбилею Л. И. Седова. М., «Наука», 1968.
7. Когарко Б. С. Об одной модели кавитирующей жидкости, Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 6, стр. 1331—1333.
8. Бердичевский В. Л. Построение моделей сплошных сред при помощи вариационного принципа, ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
9. Седов Л. И. О тензоре энергии — импульса и о макроскопических внутренних взаимодействиях в гравитационном поле и в материальных средах, Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 3.
10. Sedov L. I. Variational methods of constructing models of continuous media. Symposia, Vienna, June 22—28, 1966. Irreversible aspects of continuum mechanics, Springer-Verlag, 1968.
11. Голубятников А. Н. Нелинейные спинорные функции, Докл. АН СССР, 1965, т. 165, № 2.
12. Лохин В. В., Седов Л. И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов, ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, стр. 393—417, добавление I к настоящей книге.
13. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды, М., Физматгиз, 1962.
14. Sedov L. I. Some problems of designing new models of continuum media. Proc. 11th Internat. congr. of appl. mech., Munich, 1964, Springer-Verlag, 1966, pp. 9—19.
15. Настоящая книга.
16. Седов Л. И., Эглит М. Э. Построение неголономных моделей сплошных сред с учетом конечности деформаций и некоторых физико-химических эффектов, Докл. АН СССР, 1962, т. 142, № 1, стр. 54—57.
17. Mindlin R. D. Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity, Internat. J. Solids Structures, 1965, vol. 1, No 4, pp. 417—438.
18. Лурье М. В. Применение вариационного принципа для исследования разрывов в сплошной среде, ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.

Предметный указатель

Автомодельность 346
Аддитивность внутренней энергии 208
— энтропии 244
Адиабата Гюгонио 376, 378, 380, 382, 383
— Пуассона 223, 378—380

Валентность (ранг) тензора 54
Вектор 30, 52
— аксиальный 104, 183, 185, 186
— вихря скорости 103, 106, 109
— градиент скалярной функции 37
— магнитной индукции 306
— — напряженности 270
— перемещения 77, 85
— плотности тока четырехмерный 308
— полярный 185
— пондеромоторной силы четырехмерный 309
— потока диффузии 129
— — тепла 259
— соленоидальный 114
— Умова — Пойнтинга 303
— электрической индукции 306
— — напряженности 269
Векторы базиса, зависимость от времени 64
— — ковариантные 29, 31, 49, 50, 60
— — контравариантные 56, 60
— — не единичные и единичные 29
Величины безразмерные 398
— ковариантные 51
— контравариантные 51
— размерные 394, 398
Взаимодействие элементарных частиц 17, 267
— гравитационное 266
— магнитное 268
— электромагнитное 266
— энергетическое в поле; поля с проводящей средой 302—305
Взаимооднозначность функций, определяющих закон движения 24
Взрыв точечный 386, 410
Вихрь изолированный 118
Возмущения малые 347
Волна взрывная 386
— детонации 388
— горения 388
— ударная (см. разрыв сильный)
— — воздушная 386
Волны прогрессивные 351
— стоячие 350
Время абсолютное 21
—, относительность понятия времени 291
— собственное 292

Газ идеальный 160, 253
— совершенный 217, 218, 254

Гидродинамика магнитная 12, 322—329, 357
Гипотеза сплошности 19
Гиротропия 168, 169
Горение 12, 388

Движение абсолютно твердого тела 64
— автомодельное 346
— безвихревое 112
— вихревое 112
— волновое 11, 349
— газа изотермическое 164
— континуума (сплошной среды) 23 и далее
— многокомпонентных реагирующих смесей 129
— одномерное неустановившееся 345
— осесимметричное 349
— плоскопараллельное 343
— — несжимаемой жидкости потенциальное 343
— потенциальное 44—47, 112, 113, 331, 332
— при очень больших числах Рейнольдса 422
— — — малых числах Рейнольдса 421
— разрывное 354—393
— с плоскими волнами 345
— с цилиндрическими волнами 345
— смеси многокомпонентной 126
— со сферическими волнами 345, 386, 410
— стационарное (установившееся) 39, 40, 342
— тела в вязкой несжимаемой жидкости 414
— — в идеальном газе 423
Детонация 388
Деформация бесконечно малая 66
— конечная 66
— чистая 95
Дивергенция вектора 107—109
— —, ее выражение в криволинейной системе 179
Дисперсия волн 351
Диссипация механической энергии в вязкой жидкости 257
Дифференцирование ковариантное 79—83
— —, независимость от порядка в евклидовом пространстве 89, 173
— компонент вектора ковариантное 79, 82
— — тензора ковариантное 80—81
Длина вектора 58

Единицы измерения (первичные и вторичные) 395

Жидкость вязкая 165, 255
— идеальная 160, 251
— несжимаемая 130, 250—253
— сжимаемая 253
Жонглирование индексами 58

Задача Буссинеска 424
— Коши 43, 337
— краевая 342
— о поршне с детонационной волной 388
— о поршне с плоскими волнами 384
— о сильном точечном взрыве 411
— о сферическом поршне 386, 407
— о точечном взрыве 386, 410
— обтекания 415
Закон вмороженности вихревых и магнитных линий 325
— вязкости Ньютона 166
— Гука 166
— — для гиротропной среды 169
— — для изотропной среды 170
— движения континуума 23
— — точки 22
— Кулона 267, 270
— Навье — Стокса 166, 265
— — — для изотропной среды 170
— — — для гиротропной среды 169
— намагничивания 310
— — и поляризации в тензорной форме 312
— Ньютона второй 136
— Ома 299, 310
— поляризации 310
— сохранения количества движения 400
— — массы 124, 125
— — момента количества движения 400
— — полного заряда 298
— — энергии 205, 400
— теплопроводности Фурье 260, 265

Изотерма совершенного газа 222
— — —, взаимное расположение с адиабатой Пуассона 223
Изотропия 167—169
Инвариант вектора 62
Инварианты скалярные тензора 61, 62, 74
— — — деформаций 75
— — — напряжений 159
Инвариантность $d\boldsymbol{r}$ относительно преобразований координат 51
Индивидуализация точек континуума 23
Источник 46

Кавитация 13, 430
Колебания стоячие 350
Количество движения индивидуального объема сплошной среды 138
— — системы 137
— — точки 136, 155
Компоненты вектора 30, 52
— — градиента скалярной функции 37, 38, 80
— — — — — в ортогональной криволинейной системе 181
— — — — — в цилиндрической и сферической системах 181
— — скорости 30
— — физические 179
— — ускорения 39
— — — в криволинейной ортогональной системе 180
— — — произвольной системе 146
Компоненты вектора ускорения в цилиндрической и сферической системах, физические 181
— векторного произведения в криволинейной системе 186
— тензора главные 63
— — —, способ определения 73
— — деформаций ковариантные 66
— — — —, выражения через компоненты вектора перемещения 85, 86
— — —, вычисление по закону движения 76
— — — ковариантные, геометрический смысл 68—70
— — ковариантные 56—58, 68
— — контравариантные 54—57
— — метрического (фундаментального) 58, 60
— — напряжений 145
— — — главные 158
— — — физические 147
— — скоростей деформаций главные 103
— — — —, кинематическое истолкование 142
— — смешанные 58, 60
— — физические 179
— тензоров деформаций главные 71
— — —, их связь 72
Конденсация газов в испытательной установке 430
Континуум непрерывный материальный (сплошная среда) 19
Координаты лагранжевы 27
— начальные 23
— точки 22
— эйлеровы 32
Коэффициент вязкости второй 172
— — динамический 172
— — кинематический 172
— кубического расширения 75
— относительного удлинения 66
— полезного действия тепловой машины 228
— Пуассона 172
Коэффициенты вязкости, их положительность 257, 258
— Ламе 170
— связности (символы Кристоффеля) 79
Критерии подобия 428
Критерий необратимости процесса 263
— обратимости процесса 263
Крыло 420

Линеаризация граничных условий 348
— задач механики сплошной среды 348, 352
Линия векторная 40, 115
— вихревая 115
— координатная 22
— тока 40, 41

Машина тепловая 227, 242
— холодильная 227
Метод исследования статистический 19
— — феноменологический 19
Механика ньютонианская 20
— сплошной среды 9
— — —, ее методы 14
— — —, ее проблемы 11
— — —, существенные для нее физико-химические процессы 17, 18
Модели, их выбор и построение 334
Моделирование 426, 430
— плавания кораблей 430

Моделирование по Фруду 431
— процессов в грунтах 432
— с использованием центробежной машины 432
— упругих конструкций 431
Модель вязкой жидкости 165, 255—256
— идеального газа 160, 253—255
— идеальной несжимаемой жидкости 250—253
— линейного упругого тела 166
— линейной вязкой жидкости 255—258, 260, 261
— проводящей жидкости в магнитной гидродинамике 322—329
— среды математическая, ее построение 160
— тела с наследственностью 196
— упругого тела 165
Модуль Юнга 172
Момент количества движения точки 147
— — — системы 148
— — — внутренний (собственный) 150, 153
— — — индивидуального объема сплошной среды 149—151
— — — орбитальный 150
— магнитный дипольный 270
— пондеромоторной силы 317
— пондеромоторный 316—319
— собственный поля 316
— электромагнитного поля и среды 320
Мощность источника (стока) 46

Намагничивание 305
Напряжения внутренние 135, 136, 140
Напряженность вихревой трубки 117
Начало термодинамики второе 228, 232, 236, 238—240
— — — для конечного объема сплошной среды 261
— — первое 205
— — — для конечного объема сплошной среды 261
Нелинейность задач механики сплошной среды 346
Необратимость разрывных движений 355, 363
Непрерывность функций, задающих закон движения 24

Область многосвязная 113
— односвязная 113
Обтекание клина и угла сверхзвуковое 391
— шара 420, 421
Оператор Лапласа от скалярной функции в ортогональной системе координат 182—183
Операция альтернирования тензоров 55
— симметрирования тензоров 55
Оси тензора главные 63, 73
— — деформаций главные 73, 159, 169, 170
— — напряжений главные 157, 159, 169, 170
— — скоростей деформаций главные 70, 103, 159, 170

Пара массовая распределенная 151
— поверхностная распределенная 151
Парадокс часов 293
Параметры макроскопические 195
— определяющие 194, 195, 197, 405, 406
— —, полная система 197
— состояния 194—198
Переменные лагранжевы 23, 33
— эйлеровы 32, 33
Переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера 33
— — — Эйлера к переменным Лагранжа 33
П-теорема 403, 404
Плазма 267
Плотность внутренней энергии 210
— заряда 267
— истинная массовая 124
— кинетической энергии 192
— массовой силы 133
— поверхностной силы 134
— средняя массовая 124
— тока 296
— функции Лагранжа 473
Поверхность векторная 43, 115
— вихревая 115
— изотермическая 36
— разрыва 353, 364, 365
— — в идеальной сжимаемой среде 373—393
— — скорости 330—331
— тензорная 62—63
— — тензора напряжений 156, 157, 159
— тока 43
— фазовая 350
— эквипотенциальная 36, 44
Поворот чистый 95
Подобие геометрическое 426
— при обтекании тел вязкой несжимаемой жидкостью 428
— — — — газом с учетом сжимаемости 429
— физическое 426
Поле 34
— векторное 35
— — потенциальное 44
— — соленоидальное 113
— гравитационное, его дифференциальные уравнения 271
— однородное 38
— скалярное 34
— скоростей потенциальное 44
— электромагнитное 266 и далее
— —, его инвариантные характеристики 295
Поляра ударная (гипоциссоида) 389
Поляризация 268, 305
Поршень плоский 384—385
— сферический 386
Постоянная Больцмана 217
— газовая 217
— — универсальная 217
Постулат о постоянстве скорости света 284
Потенциал векторный 279, 308
— скорости 44
— термодинамический Гиббса 247, 248
Потенциалы термодинамические 245—250
Преобразование аффинное 94
— — бесконечно малое 98, 104
— бесконечно малой частицы сплошной среды 93, 105
— векторов базиса ковариантных 51
— — базиса контравариантных 55, 56
— — основных электромагнитного поля 308
— — электрической и магнитной напряженности 293—296
— Галилея 282, 289
— компонент dr 51
— компонент тензора 53, 57, 58
— координат 47

Преобразование координат при переходе от одной инерциальной системы к другой в специальной теории относительности 285—287
— Лоренца 281, 287, 289,
— — бесконечно малое 289
— — частное 290
— ортогональное 289
— полиадных произведений 53, 57
— символов Кристоффеля 86
Принцип неубывания энтропии для изолированной системы 245
— относительности Галилея — Ньютона 26, 283
Приток тепла полный извне к двухпараметрической системе 224, 227
— энергии к среде 204, 219, 224, 258, 260, 262, 313—315
Проводимость 299
Проводник электрический 296
Произведение векторное 186
Произведения векторов базиса полиадные 52, 53
— — — диадные 52, 53
Производная индивидуальная (субстанциональная, полная) 36, 39, 192
— конвективная 36, 38, 39
— локальная (местная) 36, 39
— по направлению 37
Производные компонент вектора ковариантные 79, 82
— — тензора ковариантные 80, 81
Производство энтропии 261, 263—265
Пространство евклидово 20, 59, 88
— метрическое 20
— Минковского 278, 282, 287
— неевклидово 59
— псевдоевклидово 26, 59, 278
— состояний 199
Процесс 199
— адиабатический 220, 254
— — необратимый 244
— — обратимый 244
— баротропный 164, 221
— без диффузии 128
— замкнутый по параметрам внутренней энергии и незамкнутый по параметрам энтропии 243
— изотермический 220, 254
— необратимый 213
— непрерывный 200
— неравновесный 212
— нестационарный (неустановившийся) 39
— обратимый 213
— политропный 221
— равновесный 212
— разрывный 200
— с диффузией 129
— стационарный (установившийся) 39
Процессы физико-химические, существенные для механики сплошной среды 17, 18
Псевдотензор третьего ранга 185
Пучность 350

Работа внешних поверхностных сил 190
— внутренних поверхностных сил 191
— — — — в вязкой жидкости 256
— — — — в идеальной жидкости 199, 251
— — — — в среде с симметричным тензором напряжений 191
— — и внешних массовых сил 190, 192
—, совершаемая двухпараметрической системой 224, 226, 227
Равновесие термодинамическое 212
Размерность 395
Разрыв неподвижный 373
— слабый 358
— сильный 358, 359
— — в электромагнитном поле 368
— тангенциальный 366
Ранг (валентность) тензора 54
Распадение разрыва 365
Распределение скоростей в абсолютно твердом теле 101
— — в бесконечно малой частице сплошной среды 98
Распространение разрыва по частицам среды 374
Расход источника (стока) 46
Реология 160
Решения разрывные 353, 355
Ротация вектора 109
— — в криволинейной системе координат 185

Свертка 62
Свойства непрерывных отображений 25
Связь антисимметричного тензора второго ранга и аксиального вектора в трехмерном пространстве 104, 183
— — — — — с аксиальным и полярным вектором в четырехмерном пространстве 186—188
— компонент тензоров деформаций и скоростей деформаций 97
Сила внешняя 134
— внутреннего трения 136
— внутренняя 134
— гравитационная 134
— инерции 134
— Лоренца 301
— массовая 133, 134
— обобщенная 476
— объемная 133, 134
— поверхностная 134
— подъемная 417
— пондеромоторная 300, 312
— распределенная 133
— сопротивления 417
— сосредоточенная 133
— термодинамическая обобщенная 264
Силы внутренних напряжений 135
Символ Кронекера 49
Символы Кристоффеля 79, 84, 86, 177
— — в ортогональной системе 177
Симметрия 167
— тензора напряжений в классическом случае 157
Система единиц измерения 395
— координат 22
— — в специальной теории относительности 285, 287
— — вмороженная (сопутствующая) 27, 291, 465, 466
— — инерциальная 26, 283
— — криволинейная 22
— определяющих параметров 466
— отсчета наблюдателя 26, 333
— координат прямолинейная 22
— — собственная 291
— термодинамическая 194
— —, взаимодействие с внешними объектами 201
— — голономная 198, 207
— — изолированная 245
Скаляр 62
Скачок внутренней энергии 375
— неподвижный 383

Скачок разрежения 367, 375, 382, 388
— уплотнения 367, 375, 382, 388
— — косой 390
— — прямой 390
Скорость 28
— относительного изменения объема 107
— — удлинения 101
— поверхности разрыва 365
— распространения прогрессивных волн 351
— света 273, 278
— чистой деформации 103
Сложение тензоров 55
Сопротивление 417, 422
Состояние начальное 67, 68
«Состояние начальное» 67, 68
Состояние системы 194
— — равновесное, наиболее вероятное 214
Спин 150, 269
— -тензор 54
Спинор 54
Среда анизотропная 167
— гиротропная 168
— двухпараметрическая 216—237, 245—250
— идеальная 160
— изотропная 167
— многопараметрическая 194, 238
— несжимаемая 130
— с бесконечной проводимостью 300
— сплошная 19, 24
Сток 46
Строение реальных тел 15—16
Структура разрывов 354
Сумма тензоров 52
Суперпозиция решений 350

Тело материальное 124
— упругое 165
Температура 215
Тензор 47, 54
— Абрагама 320
— антисимметричный 55, 104, 183, 186—188
— внутренних напряжений 145
— второго ранга 54, 61
— Леви-Чивита 185
— метрический (фундаментальный) 59, 60
— Минковского 308
— момента электромагнитного поля 319
— напряжений 145
— — в идеальной жидкости 161
— —, симметрия в классическом случае 154
— нулевого ранга 61
— первого ранга 54, 61
— пондеромоторного момента электромагнитного поля 318
— ранга P 61
— Римана — Кристоффеля 89
— симметричный 54
— скоростей деформаций 96
—, число его компонент 61
— шаровой 162
— электромагнитного поля 279, 282
— энергии-импульса 283, 308, 319, 320, 321
Тензоры деформаций 67, 95
Теорема Гаусса — Остроградского 120, 121
— живых сил 189, 203
Теорема живых сил для бесконечно малого объема сплошной среды 192
— — — для конечного объема сплошной среды 191
— Карно 228
— Коши — Гельмгольца о разложении скорости 107
— Лагранжа 331, 332
— Стокса 111
— Томсона 330
Теоремы Гельмгольца кинематические о вихрях 117
— — динамические 332
Теория волн 350
— дислокаций 467
— молекулярно-кинетическая 215
— Онзагера 265
— относительности 21
— — общая 26, 287, 466, 471—485
— — специальная 26, 277—296, 306—322, 472
— пластичности 13, 467
— упругости 13, 95, 166, 350
Тепло джоулево 219, 303
— некомпенсированное 242, 257, 363
—, подвод к среде 204, 219, 224, 258, 262
— — — — за счет теплопроводности по закону Фурье 260
Теплоемкость при постоянном давлении 219
— — — объеме 218
Теплопроводность 219, 262
Теплосодержание 247
Течение вихревое 117
— поступательное 45
— потенциальное 44, 110, 112
Ток проводимости 296
— смещения 298
— Холла 300
Точка зрения Лагранжа 28, 32
— — Эйлера 32
Точки критические 43
— особые 43, 337
— — дифференциальных уравнений линий тока 43
Трубка векторная 44, 115
— вихревая 115
— тока 44, 130

Узел 350
Умножение тензора на число 55
— тензоров 61
Уравнение вариационное базисное 470, 473
— — Лагранжа 471
— вековое 74, 158
— волновое 278, 280
— динамики основное 136
— закона сохранения энергии 209
— импульсов 139, 362
— — с учетом пондеромоторных сил 301
Уравнение Клапейрона 164, 217
— количества движения системы 137
— — — для конечного объема сплошной среды 138, 139
— — — для точки 136
— Лапласа 272
— моментов 362
— — в четырехмерной форме 315—322
— — количества движения в дифференциальной форме 153
— — — — в классическом случае 152
— — — — для конечного объема сплошной среды 151
— — — — для системы точек 148

Уравнение моментов количества движения для точки 147
— неразрывности 130, 132, 362
— — в криволинейных координатах 179
— — в переменных Лагранжа 132
— — — — Эйлера 125
— — в цилиндрической и сферической системах координат 180
— — для процессов с диффузией 129
— притока тепла 209
— — — дифференциальное 210
— — — — для вязкого теплопроводного газа 260
— — — — для идеального газа 216
— — — для проводящей среды 305
— Пуассона 272
— состояния совершенного газа 217
— теории упругости основное 147
— теплопроводности 261
— Умова — Пойнтинга 302, 304
— характеристическое (вековое) 74
— энергии 209, 362
— энтропии 363
Уравнения движения идеальной жидкости в цилиндрической и сферической системах 186
— — — —, полная система 163
— — — — при баротропных процессах (полная система) 164, 165
— — — — (уравнения Эйлера) 162
— — вязкой несжимаемой жидкости (полная система) 164, 165
— — сплошной среды 143, 146
— — упругого тела в перемещениях для малых деформаций (полная система) 175
— гравитационного поля дифференциальные 271
— движения в форме Лемба — Громеки 163
— Ламе 174—176
— линий тока 41
— магнитной гидродинамики для среды с бесконечной проводимостью 323
— Максвелла в электростатике 270
— — в интегральной форме 305, 368
— — в тензорной форме 277, 279, 307
— — в проводниках 277, 279, 297, 298
— — для электромагнитного поля в пустоте 273, 275, 282
— — в материальных поляризованных намагниченных телах 305, 307
— — в четырехмерном пространстве 277, 279, 307
— механики и термодинамики универсальные 362
— Навье — Стокса 173, 256, 417
— совместности деформаций конечных 86, 91, 337
— — — бесконечно малых 91
— — скоростей деформаций 97
— состояния 164, 217, 236, 253, 254, 256
Ускорение точки 31 (см. компоненты вектора)
Условие евклидовости пространства 90
— обтекания 339
— прилипания 338
Условия в бесконечности 336
Условия граничные (краевые) 338
— на величины, сохраняющие значение в индивидуальном объеме 125
— на поверхностях сильных разрывов 364, 365, 375
— — — — в электромагнитном поле 369—370
— на свободной границе 340
— — — — в идеальной жидкости 341
— начальные 337
— совместности деформаций, см. *уравнения совместности деформаций*

Форма квадратичная фундаментальная 59
Формула Гиббса 256
— дифференцирования по времени интеграла по жидкому объему 121—125
— — — — потока соленоидального вектора через жидкую поверхность 326—327
— Майера 219
— размерности 395
— Эйлера для распределения скоростей в абсолютно твердом теле 101
Функция гармоническая 343
— диссипативная 264, 265
— тока 344
— характеристическая 344

Характеристики системы обыкновенных дифференциальных уравнений 44

Центр масс системы 137
Цикл 200
— Карно 225—239
Циркуляция вектора по контуру 109

Число Маха 391, 424, 429
— Рейнольдса 418, 428
— Фруда 423, 431

Энергия, ее различные виды 201
— внутренняя как термодинамический потенциал 246
— кинетическая индивидуального объема сплошной среды 189
— несжимаемой жидкости внутренняя 252
— свободная 246
— системы внутренняя 208, 246
— — полная 208
— совершенного газа внутренняя 217
— электромагнитного поля 303
Энтальпия 247
Энтропия 235—237, 240, 244
—, изменение вдоль адиабаты Гюгонио 377
— совершенного газа 236
Эффект гиромагнитный 153
— магнитотермический 242