# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

П.РОУЧ

Книга посвящена численному решению уравнений гидрогазодинамики. В ней рассматриваются различные формы уравнений и варианты граничных условий, описываются разнообразные типы конечно-разностных схем, обсуждаются их точность, устойчивость и сходимость. Даются рекомендации по программпрованию и обработке получаемой информации.

Книга представляет интерес для научных работников и инженеров, ведущих исследования как по механике жидкости и газа, так и по вычислительной математике. Благодаря широкому охвату материала, доступности изложения и наличию упражнений она может служить учебным пособием для аспирантов и студентов названных специальностей.

**ОГЛАВЛЕНИЕ**


Предисловие редактора перевода
Предисловие
Рекомендации по учебному курсу, основанному на настоящей книге
Глава 1. Введение 13
1.1. Область вычислительной гидродинамики 13
1.2. Исторический обзор 16
1.3. Существование и единственность решений 24
1.4. Предварительные замечания об аппроксимации, сходимости и устойчивости решений 26
Глава 2. Уравнения движения несжимаемой жидкости в декартовой системе координат 29
2.1. Уравнения движения для физических переменных 29
2.2. Уравнение переноса вихря и уравнение для фупкции тока в случае плоских течений 30
2.3. Консервативная форма уравнений 32
2.4. Уравнения в безразмерных переменных 32
2.5. Одномерные модельные уравнения переноса 34
Глава 3. Основные численные методы расчета движений несжимаемой жидкости 36
3.1. Методы решения уравнения переноса вихря 38
3.1.1. Пекоторые основные конечно-разностные формулы 39
3.1.1.а. Разложение в ряды Тейлора 39
3.1.1.б. Основные конечно-разностные формулы; полиномиальная аппроксимация 43
3.1.1.в. Основные конечно-разностные формулы; интегральный метод 45
3.1.2. Метод контрольного объема 48
3.1.3. Свойство консервативности 51
3.1.4. Описание неустойчивости 58
3.1.5. Исследование устойчивости 62
3.1.5.а. Исследование устойчивости методом дискретных возмущений 62
3.1.5.б. Анализ устойчивости по фон Пейману 68
3.1.5.в. Анализ устойчивости по Хёрту 73
3.1.5.г. Краткий обзор и оценка различных критериев устойчивости 77
3.1.5.д. Метод фон Пеймана для многомерных задач 83
3.1.6. Одношаговые явные схемы; схема “чехарда со средней точкой” 85
3.1.7. Схема “чехарда” Дюфорта—Франкела 95
3.1.8. Первая схема с разностями против потока. Ошибки, обусловленные схемной искусственной вязкостью 101
3.1.9. Свойство транспортивности 106
3.1.10. Транспортивные и консервативные разностные схемы 110
3.1.11. Вторая схема с разностями против потока 113
3.1.12. Схемы Адамса — Бэшфорта и Крокко 115
3.1.13. Схема Лейта; фазовые ошибки, ошибки, обусловленные неразличимостью, расщепление по времени 117
3.1.14. Пеявные схемы 128
3.1.15. Многошаговые явные схемы 134
3.1.16. Пеявные схемы метода чередующихся направлений 139
3.1.17. Явные схемы метода чередующихся направлений 146
3.1.18. Схема “классики” 151
3.1.19. Схемы четвертого порядка точности Робертса—Вейса и Кроули 154
3.1.20. Схема Фромма с нулевой средней фазовой ошибкой 158
3.1.21. Схема Аракавы 160
3.1.22. Замечания о схемах для расчета стационарных течений 161
3.1.23. Замечания к оценке методов; ошибки, связанные со свойствами схемы; компактные разностные схемы 168
3.2. Методы решения уравнений для функции тока 175
3.2.1. Прямые методы 175

3.2.2. Метод Ричардсона и метод Либмана 177
3.2.3. Метод релаксации невязки Саусвелла 181
3.2.4. Метод последовательной верхней релаксации 182
3.2.5. Тактика и стратегия 187
3.2.6. Неявные схемы метода чередующихся направлений 188
3.2.7. Другие итерационные методы 191
3.2.8. Метод расчета распространения вектора ошибки (метод EVP) 194
3.2.9. Методы, использующие ряды Фурье 204
3.2.10. Аппроксимации высших порядков 207
3.2.11. Об оценке рассмотренных методов 211
3.3. Граничные условия для уравнения переноса вихря и уравнения для функции тока 213
3.3.1. О первостепенной важности численных граничных условий 214
3.3.2. Стенка в расчетной сетке первого типа 216
3.3.3. Стенка в других расчетных сетках 224
3.3.4. Линия симметрии 228
3.3.5. Верхняя граница 229
3.3.6. Условия на входной границе потока 233
3.3.7. Условия на выходной границе потока 236
3.3.8. Нилообразные осцилляции в конечно-разностном решении 247
3.3.9. Нарадокс, связанный с влиянием условий на выходной границе потока 253
3.3.10. Соотношение вычислительных и аналитических граничных условий 255
3.3.11. Условия “на бесконечности” 256
3.3.12. Угловые точки 258
3.3.12.а. Граничные условия в вершине выпуклого угла 258
3.3.12.б. Сходимость и точность в вершине выпуклого угла 263
3.4. Критерии сходимости и начальные условия 264
3.5. Расчет давления 275
3.5.1. Численное интегрирование для определения давления 275
3.5.2. Уравнение Нуассона для давления 276
3.5.3. Граничные условия второго рода для давления 278
3.5.4. Итерационные методы решения 279
3.5.5. Характерная величина для отсчета давления 281
3.6. Расчет температуры и концентрации 284
3.6.1. Основные уравнения 284
3.6.2. Учет диссипации 286
3.6.3. Конечно-разностное представление диссипативной функции 287
3.6.4. Граничные условия для температуры и концентрации 288
3.6.5. Источниковые члены и жесткие уравнения 292
3.7. Методы решения уравнений для простейших физических переменных 294
3.7.1. Общие замечания 294
3.7.2. Основные уравнения 295
3.7.3. Граничные условия для простейших физических переменных 297
3.7.4. Метод маркеров и ячеек 298
3.7.5. Другие методы решения уравнений для простейших физических переменных 304
3.7.6. Сравнительные достоинства систем уравнений для переменных (y,z) и для переменных (u, v, P) 306
3.8. Трехмерные течения 309
Глава 4. Уравнения движения сжимаемой жндкости в декартовой системе координат 315
4.1. Основные трудности 315
4.2. Традиционная форма уравнений 316
4.3. Консервативная форма уравнений 317
4.4. Дополнительные соотношения 321
4.5. Безразмерный вид консервативных уравнений 324
4.6. Сокращенная запись уравнений 329
4.7. Физические и математические особенности, связанные с наличием ударных волн 330
Глава 5. Основные схемы расчета движений сжнмаемой жндкости 333
5.1. Нредварительные соображения 333
5.1.1. Методы расчета течений без ударных волн и методы с выделением ударных волн 333
5.1.2. Исследование устойчивости 338
5.1.3. Использование неявных схем 341
5.2. Методы численного расчета ударных волн 342
5.3. Размазывание скачков при помощи искусственной диссипации 344
5.4. Схемы с явной искусственной вязкостью 345
5.4.1. Схема фон Неймана—Рихтмайера 345
5.4.2. Схемы Ландсхофа и Лонгли 349
5.4.3. Схема Русанова 350
5.4.4. Ошибки, возникающие при введении искусственной вязкости 352
5.5. Схемы с неявной искусственной вязкостью 353
5.5.1. Схемы с разностями против потока 353
5.5.2. Область влияния и ошибки аппроксимации 356
5.5.3. Метод частиц в ячейках и метод жндкости в ячейках 359

5.5.4. Схема Лакса 362
5.5.5. Схема Лакса — Вендроффа 365
5.5.6. Двухшаговая схема Лакса — Вендроффа 373
5.5.7. Схема Абарбанеля и Цваса 379
5.5.8. Другие схемы; алгоритм Бориса переноса с коррекцией потоков 380
5.6. Члены с вязкостью в уравнениях течения сжимаемой жидкости 382
5.6.1. Аппроксимации производных по пространственным переменным 382
5.6.2. Общие соображения 383
5.6.3. Схемы для аппроксимации членов с вязкостью 385
5.7. Граничные условия для течений сжимаемой жидкости 390
5.7.1. Стенка с условием скольжения 390
5.7.1.а. Стенка со скольжением в расчетной сетке первого типа 391
5.7.1.б. Стенка со скольжением в расчетной сетке второго типа 395
5.7.2. Стенка с прилипанием 397
5.7.2.а. Стенка с прилипанием в расчетной сетке первого типа 398
5.7.2.б. Стенка с прилипанием в расчетной сетке второго типа 402
5.7.2.в. Расчет плотности на гибридной сетке 405
5.7.3. Угловые точки 409
5.7.4. Линии симметрии 412
5.7.5. Входная граница 412
5.7.6. Выходная граница 413
5.7.7. Верхняя граница 417
5.8. Критерии сходимости и начальные условия 420
5.9. Замечания о расчете дозвуковых и сверхзвуковых течений 421
5.10. Схемы высокого порядка аппроксимации 423
Глава 6. Другие расчетные сетки, системы координат и системы уравнений 424
6.1. Специальные расчетные сетки 424
6.2. Преобразования координат 432
6.3. Другие ортогональные системы координат 443
6.4. Другие системы уравнений 446
6.5. Паправления будущих исследований 464
Глава 7. Рекомендации по программпрованию, контролю и обработке информации 470
7.1. Составление программы для ЭВМ 470
7.2. Отладка и контроль 479
7.3. Обработка информации 489
7.3.1. Числовые данные 490
7.3.2. Графики и кинофильмы картин течений 493
7.3.3. Диагностические функционалы 506
7.4. Заключение 508
Приложение А. Метод прогонки 509
Приложение Б. Об искусственной схемной вязкости 515
Задачи 529
Список литературы 537
Дополнительный список литературы 597
Предметный указатель

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

*Абарбанеля— Цваса* схема 379—380, 526
Автомодельные решения 13, 290, 291, 412, 413, 487, 488
*Адамса—Бэшфорта* схема 115—117, 119, 522, 526, 532
Адвекция и конвекция 31
Адиабатическая стенка 282, 288—291, 390, 404
Адиабатическое течение 535
Акустические волны 455, 456
ALE алгоритм 458
Анализ экономической эффективности методов расчета 17, 174—175,211— 212
Аналогия между стационарными итеративными и нестационарными методами 161—164, 167, 178, 188
Аппроксимации ошибки *см.* Ошибки аппроксимации
Аппроксимация дифференциального уравнения разностным аналогом 27, 79, 81, 393, 395, 401, 402
— *Паде* 452
— полиномиальная 43—45, 56, 166, 404, 426
*Аракавы* схема 57, 160—161, 296, 310, 526
А-устойчивости критерий 78
Бесконечная скорость распространения возмущения 131, 132, 140, 141, 151, 356
“b-плоскости” приближение 160, 455—457
Бигармоническое уравнение 166, 191, 192, 454
*Блазиуса* решение 217, 235, 442, 451, 459, 531
Блок-схемы 474
Блочно-трехдиагональная матрица 133, 175, 198, 204, 220
Блочные методы 176
*Больцмана* уравнение 464
*Бориса* алгоритм переноса с коррекцией потоков (алгоритм FGT) 380—382
Боры 330
*Брайловской* схема 135—138, 382,386, 387, 436, 437, 521, 523, 532, 536
*Буземана* иитегральное соотношение 412

*Бунемана* метод 176—177, 204
*Буссинеска* приближение 25, 101, 454, 507
Быстрое преобразование *Фурье* 176, 204
*Бюргерса* уравнение 29, 35, 56, 138, 251, 331, 332, 335, 358, 359, 381, 482, 485
Векторное поле соленоидальное 311
Векторный потенциал 311
Верхней релаксации оптимальный метод 183
— — — параметр 183, 187, 281, 533
"Ветровое напряжение" 233, 535
Взаимодействие ударной волны с пограничным слоем 351, 401, 433, 438
Взвешенных невязок метод 172
Взрыва в ячейках метод (EIC) 23, 361
Висячие скачки 296, 377
Вихрь модифицированный 443
Вихря естественная конвекция 26
Вихря переноса уравнение 21, 29—32, 34, 35, 38, 529
— — — методы решения 38—175
Внутренияя энергия 316, 317, 320, 325, 327
— — торможения 317
— — удельная 320, 321
Возвратно-циркуляционного течения зона 274
Возмущения шумовые 45
Волновое число 69, 83
— — в двумерном случае 83
Волны длина 69, 83
— — в двумерном случае 83
Времени масштаб диффузионный 33
— — конвективный 32, 34
— масштабы иные 34
Время переноса частицы через расчетную область 273
— ирохождения ирограммы 479—480
Второй закон термодинамики 76, 98
*Вудса* условие для вихря на стенке 217—218
Выпуклого угла обтекание жидкостью несжимаемой 258—264, 273, 279, 297
— — — — — сжимаемой 409—412, 447
Вычисления вручную 19, 182, 215
"Вычислительные молекулы" 342, 361
Вычислительный цикл 36—38
Вычислительных схем и программ контроль 470, 479—489, 508. *См .также* Отладка.
Вязкоупругости задачи 443
Вязкость физическая 15, 25, 29, 31, 316, 317, 319—322
— эффективная 76. *См. также* Искусственная вязкость
Газ с постоянным показателем адиабаты 322, 327
— совершенный 322, 325
Газовая постоянная 321, 322, 327
*Галилея* преобразование 528
— принцип инвариантности 104, 169, 361
*Гаусса* метод исключения 176, 193, 198, 199, 207, 220
*Гаусса—Зейделя* метод 164, 180. *См. также Либмана* метод
Гексагональные сетки 432
Геофизические и метеорологические расчеты 20, 57, 101, 121, 122, 127, 216, 233, 247, 455—457, 460, 462, 486, 506
Гибридная сетка 224, 225, 266, 397, 405—409, 536
— — прямоугольно-полярная 430—432
Гидравлический прыжок 330
Гидродинамика аналитическая 13, 14, 16
— вычислительная 13—16
— экспериментальная 13, 14, 16
Гидродинамическая устойчивость 165, 188, 228, 468
Гидростатического давления тензор 320
Гидростатическое давление как независимая переменная 455
Гистерезис при срыве потока 25
Годограф множителя перехода 71
*Годунова* схема 381, 434, 437
Градиентные граничные условия *ем Неймана* граничные условия
Градиентов напряжений тензор 319
Граница верхняя течения жидкости несжимаемой 229—233
— — — — сжимаемой 417—420
— входная *ем.* Условия на границе входной
— выходная *ем.* Условия на границе выходной
— раздела двух сред 353
— с постоянным давлением 447
Границы криволинейные 216
— нерегулярные в прямоугольной сетке 428—430
— регулярные 36
Граничные условия 20, 21, 28, 36, 83, 106, 121, 134, 142, 143, 145, 148, 150, 151, 154, 156, 157, 164, 166, 171, 173, 213—265, 269, 274, 275, 280, 281, 288—291, 297, 298, 306, 307, 374, 376, 377, 390—420, 436, 438, 439, 454, 509—514, 528
— — в гибридных сетках 224, 225, 375
— — важиость численной постановки 21, 214—216
— — вычислительные и аналитические 255, 256, 439
— — для метода прогонки 281, 509—514
— — — простейших физических переменных 297—298, 301, 307
— — — схем неявных 150, 151, 269, 274
— — — — с расщеплением по времени 127, 159, 377

— — — температуры 288—291
— — — течения жидкости несжимаемой 106, 121, 134, 142, 143, 145, 148, 164, 166, 171, 173, 213—265, 288—291
— — — — — — — на стенке в сетке гибридной 224, 225
— — — — — — — — — — — нерегулярной 13
— — — — — — — — — — — первого типа 216—224, 227, 278, 279, 533—535
— — — — — — — — — — фиктивных точках внутри стенки 226, 533
Граничные условия для течения жидкости несжимаемой на стенке движущейся 224, 230, 232, 438, 458
— — — — — — — — — для вихря трехмерного 312
— — — — — — — — — — давления 278—281
— — — — — — — — — — простейших физических переменных 297, 298, 301
— — — — — — — — — — уравнения бигармонического 454, 534
— — — — — — — — — — — теплопроводности 154, 290, 291
— — — — — — — — — линейная форма 217
— — — — — — — — — на выпуклых углах 258—263
— — — — — — — — — — промежуточном шаге 127
— — — — — — — — — наклонной 221, 222
— — — — — — — — — переопределенность 223
— — — — — — — — — прилипания 105, 217, 223, 225, 227, 230, 278, 297, 312
— — — — — — — — — проницаемой 216, 224
— — — — — — — — — скольжения 105, 142, 222, 229, 232, 291, 297, 301
— — — — — — — — — согласованность с формулой для скорости 219, 220
— — — — — — сжимаемой 390—420, 436
— — — — — — — на стенке 344, 374, 376, 377, 390—420, 417, 429, 536
— — — — — — — — — адиабатической 390, 404, 413
— — — — — — — — — в сетке второго типа 395—397
— — — — — — — — — — — гибридной 397
— — — — — — — — — — — нерегулярной 429
— — — — — — — — — — — первого типа 391—395, 409—411
— — — — — — — — — для градиента давления 393, 394, 396, 401,404, 407—409, 411
— — — — — — — — — — плотности 398
— — — — — — — — — — схем с расщеплением по времени 377
Граничные условия для течения жидкости сжимаемой на стенке, отражения способ 391—393, 395—398, 402, 404, 405, 410, 412, 536
— — — — — — — — — прилипания 397—412, 417, 429, 536
— — — — — — — — — — скольжения 390—398
— — и устойчивость 82, 83, 213, 214
— — на бесконечности 13, 231, 237, 255—258, 439, 441
— — периодические 204, 238, 239
— — — на входной и выходной границах 236—239, 241
— — симметричные 188
— — смешанного типа 154, 203, 213—214, 511, 512, 514
*Грасгофа* число 143, 219
Грубая сетка для проверки сходимости и отладки программы 269, 479—483
Грунтов динамика 457, 461, 462, 468
Давление безразмерное 275
Давления коэффициент 281, 422, 423, 500
— расчет для несжимаемой жидкости 275—284, 295, 296, 305—307
— характерная (для отсчета) величина 281—284
Движение жидкости несжимаемой, расчета методы 36—314, 333
— — — уравнения 29—33, 356
— — сжимаемой 31, 36, 53, 57, 98, 101, 127, 135, 136, 138, 151, 153, 166, 247, 243—255, 264, 275, 315— 423, 455
— — — расчета методы 333—423
— — — — трудности основные 315— 316
— — — уравнения 315—332
Двойные обходы узлов сетки 133, 194
Двухслойной схемы определение 85
Диагностика ошибок 479
Диагностические функционалы 506— 508
Дивергентная форма уравнений 32, 55, 442. *См. также* Консервативная форма
Дивергенция скорости для жидкости несжимаемой 295, 306, 309
— — — - сжимаемой 316, 317, 410
Динамический напор 34
Динамического программпрования подход 176
Динамической релаксации метод 193
*Дирихле* граничные условия 166, 175, 177, 178, 183, 184, 190, 194, 196, 198, 207, 213, 227, 278, 306, 510, 511, 513
Дискретного инвариантного вложения метод 176
Дискретных возмущений метод исследования устойчивости 62—68, 75, 77, 82, 243, 530
— — — — — и свойство транспортнвности 106—110
Диссипативная функция 284—288, 291, 500
Диссипации механизм 125, 344

Диффузии коэффициент переменный 58, 530
— уравнение 62, 63, 65, 66, 83, 84, 129—132, 134, 144—148, 151, 172, 176
— — двумерное 84
— — трехмерное 84, 144 Диффузионное время безразмерное 33
— число, определение 62
— — в многомерном случае 84, 85
Диффузия 31, 49, 530, 531
Диффузорный срыв 26, 414
Длина пути перемешивания 346
Длинные морские волны 456
До- и сверхзвуковые смешанные течения 423
— — — — — условия на выходе 414, 415
Дробные шаги по времени 126, 134, 159, 376, 377. *См. также* Расщепления по времени схема
— ячейки 303—304
*Дэвиса* метод для уравнений *Навье—Стокса* 166, 167
*Дюфорта—Франкела* схема "чехарда" 21, 95-101, 116, 117, 138, 154, 160, 238, 536
Единичного заряда метод 206
Единственность решения 11, 18, 24—26, 414
Е-оператор 154
Жесткие уравнения 11, 272, 292—294, 378, 460, 465, 535
Жидкости в ячейках метод (FLIC) 48, 102, 106, 355, 359—362, 385
Жидкости неньютоновские 15, 457, 461—463
Зависимость вязкости от температуры 328, 383, 476
Зависимых переменных преобразования 438, 445, 455
Задача о взаимодействии ударной волны с пограничным слоем 372, 398, 401
— — горении 449
— — движении транспорта на автостраде 31
— — следе 228, 362, 452
— — течении внутри замкнутой области с одной подвижной границей 12, 56, 105, 114, 271, 275, 282, 534, 536
— об обтекании затупленного тела с отошедшей ударной волной 268, 336, 423, 449
— — — обратного уступа, обозначения для границ 215
— с условиями граничными 31, 175
— — — начальными 31, 175
Задачи с поверхностями раздела 308, 361
— — свободной поверхностью 302, 304, 306, 308, 361, 447, 458
— теории упругости 349
— тестовые 483—488
Затухание искусственное (схемное) 88, 89, 102, 120, 125, 353, 398, 459, 516
Звука скорость 286, 325, 350
— — местная 326, 339, 350
Звуковые волны 340, 422
— — уравнение распространения 75
Излучение 376, 459, 460, 473, 487
Изменение размера ячеек и изменение расстояния между узлами сетки 425—426
— — — однократное и непрерывное 427
*Израэли* способ определения вихря на стенке 223
Интегральный метод построения разностных формул 45—48, 155
Интегральные формы уравнений движения 318
Интегральных соотношений метод 436
Интегро-интерполяционный метод 57
Интерполяционный многочлен Лагранжа 220
Интерполяция 118, 119, 302, 303, 534
— линейная по двум переменным 302
— на более мелкую сетку 534
Информации выдача 474
— — в виде графиков, построенных ЭВМ 493-506
— обработка 12, 469, 470, 489—508
— — в отдельной программе 507— 508
— скорость распространения вычислительная 339
ICE метод (неявный эйлеров метод) 203—204, 423
Искусственная вязкость в случае нестационарном 129, 137, 139, 515— 528, 531, 532
— — — — — стационарном 137, 139, 370, 437, 515—528, 536
— — неявная 23, 83, 103—105, 114, 116, 120, 121, 344, 353—382, 437, 485, 505, 515—528. *См. также Схемная* вязкость
— — явная 22, 23, 344—353, 370, 379, 381, 410, 443, 446, 515, 536
— — — в тензорной форме 443
— диффузия 103, 398, 429
— — коэффициент 350
— — — эффективный 363
— — массы 350, 352, 364, 399
— сжимаемость 305
— скорость конвекции 518, 519
— теплопроводность 350, 364
Искусственное давление 346
— затухание *ем.* Затухание искусственное
Искусственный источник 112
— сток 112
Испарение и конденсация 455, 458
Использование нестационарных уравнений для решения стационарных задач 31, 161—168
Источник массы 487
— энергии 487

"Источниковый" член 38, 134, 176, 178, 184, 292—294, 500
Итерации стационарные линейные 192
Итераций этапами неполными метод 180
— — полными метод 179
Итерационная сходимость 162, 264— 270, 281
Итерационный коэффициент диффузии 162
*Кенсена* формула для вихря на стенке 219
*Йи* метод 176
Квазилинеаризация 306
Квазиодномерное приближение 454
— течение в канале 253—255
Квазиодиомерные задачи 372
— уравнения 388, 413, 414
Квазиоднородные сетки 432
"Классики" схема (hopscotch) 151—154, 193, 378, 381, 385, 466
Классификация ошибок по свойствам 169, 170
— уравнений в частных производных 13, 32
Количества движения уравнения для жидкости несжимаемой 29—30, 294, 295
— — — — — сжимаемой 309, 315, 316, 319
"Комбинированное итерирование" 164, 167, 268, 482
Компактная разностная схема 172—174
Конвективный нелинейный член 60
— поток 49
Конвекция и адвекция 31
— естественная 34, 143, 219, 304 312, 454
— — в замкнутом сосуде 55—56
— — устойчивость 34
— свободная *см.* Конвекция естественная
Конечно-разностные формулы основные 39—48, 529—530, 533, 534
Конечных элементов методы 172, 430, 465, 466
Конверватиная форма уравнений 23, 32—35, 55—58, 105, 294, 295, 315, 317—321, 324—328, 332, 347, 362, 394, 414, 436, 437, 443—445 448 529, 530, 536
Консервативности свойство 36, 48, 51—58, 98, 109—111, 169, 170, 224, 273, 317—320, 355, 370, 400—402, 428, 437, 438, 443, 445, 448 485, 529, 530, 536
— — различный смысл 441, 536
— — и ошибки на границах 224, 273, 290, 402
— — — точность схемы 56, 530
Контактный разрыв 330, 344, 381
Контрольного объема метод 48—51, 112, 113, 157, 318, 395, 396, 399, 406, 445, 536
Концентрации расчет 284, 291
Координат растяжение экспоненциальное 433—434, 438, 441, 536
Координаты параболические 262, 263, 442—445
— сферические 308, 348, 352, 365, 443—446, 454
— тороидальные 436, 444
— цилиндрические 145, 163, 207, 229, 297, 304, 308, 335, 349, 352, 361, 365, 374, 443—446, 454, 484, 536
— эллиптические 257, 432, 433, 443—445
Коротковолновый предел 123, 124. *См. также Найквиста* частота
Корректная постановка задачи 100
*Кортевега — де Вриза* уравнение 500
*Кранка — Николсона* схема 129—131, 134, 171, 452, 526, 535
— — — неустойчивость при градиентных начальных условиях 134
Критический размер шага по времени 61, 65
— — — — — вычисление на ЭВМ 479
*Крокко* интеграл 279
— преобразование 442
— схема 115—117, 382, 388, 522, 526, 532, 536
*Кроули* схема четвертого порядка точности 154, 157, 159, 526
"Кубатура" 276
*Куранта — Изаксона — Риса* метод 23, 102, 353
*Куранта — Фридрихса — Леви* условие *см.* КФЛ условие
*Куранта* число для жидкости несжимаемой 22, 66—68, 71, 72, 77, 84, 102, 104, 119, 121—124, 126, 155, 156, 162, 244, 531, 532
— — — — — аналоги двумерные 84
— — — — — итерационное 162
— — — — — как параметр интерполяции 119
— — — — — ограничение при устойчивости 68, 72, 119, 162, 244
— — — — — определение 66, 126
— — — — сжимаемой 339, 340, 350, 364, 376, 386, 535
— — — — — двумерное 350, 364
— — — — — ограничение при устойчивости 339, 340, 347, 371, 376, 386, 535
— — — — — трехмерное 364
*Курихары* схема 139, 532
КФЛ условие 22, 316, 339—341, 357, 448
Лагранжево описание движения 117, 118, 236, 349, 458, 487
Лагранжевы методы 22,110,334,464
— переменные 302, 330, 344, 345, 372, 380, 487
LAD метод 167
*Лакса — Вендроффа* схемы двухшаговые 23, 27, 127, 318. 343, 348, 365— 380, 385, 387, 388, 413, 421, 427, 432, 435, 437, 467, 478, 482, 521— 523 527 536
*Лакса* схема 23, 252, 350, 362—365, 371, 373, 375, 376, 378, 407, 421, 436, 460, 480, 482, 521, 522, 535
— теорема эквивалентности 27, 79—80
*Ламе* кривые 444

*Ландсхофа* схема 349—350, 353
*Лапласа* оператор 154, 272
— — разложение по собственным функциям 180
— уравнение 42, 176, 179, 264
*Лейта* схема 117—127, 134, 154, 158, 159, 246, 352, 366, 370, 379, 435, 521—524, 526, 527, 532, 533
*Лелевье* схема 101, 354
*Лимбана* метод итерационный 17— 19, 164, 165, 167, 180—183, 187, 192
— — экстраполированный 18, 182, 533. *См. также* Последовательной верхней релаксации метод
Линеаризация членов с градиентом давления 338
Линеаризованные уравнения движения сжимаемой жидкости 454
Линии отмеченных частиц 302, 308, 496, 504, 506
Линия симметрии 228, 229, 255,391— 393, 412, 447
Локализация ошибок 480
“Локально одномерные схемы” 145
*Лонгли* схема 102, 349—350, 379
*Мак-Кормака* схема 376—378, 436, 521, 522
— — модифицированная 343, 379
Маркеров и ячеек метод (MAC) 295, 296, 298—304, 359, 360, 458, 498—304, 504, 506
— — — — — варианты (MACRL, SMAC, SUMMAC) 304
*Маха* конус 356
— линии 11. *См. также* характеристики
— число 15, 253, 254, 286, 305, 325
— — местное 326
Маховский скачок 374
Машинного времени выигрыш 269— 270
— — затраты 65, 174, 175, 189, 212, 273
— слова длина 168, 176, 269, 476
Машинной памяти объем 174, 181, 270
*Мацуно* схема 135—138, 521, 523, 532
Мгновенно начинающиеся движения 483, 484
Мелкой воды теория 146, 456
Минимизация ошибок на границах методом наименьших квадратов 211, 416
*Миякоды* схема для определения давления 280, 289
— — — уравнения переноса вихря 117
Многокомпонентные среды 361
Многомерные аспекты искусственной вязкости 520, 527
- — метода расчета распространения вектора ошибки 203
— — методов неявных 134
— — устойчивости 65, 83, 97, 126, 340, 341, 350, 354
— задачи 83—85, 203, 252
Многослойные схемы 274
Многошаговые явные схемы 134—139, 341, 492
Модельные уравнения 29, 34, 35, 338, 366, 485—488, 530—532
— — с переменными коэффициентами 485—487, 531
Модульное программирование 471, 473
Молчания зона 74
Монте-Карло методы 192, 194, 463, 464
*Моретти* метод 57, 335, 336, 435—437, 521, 522, 524, 525
*Мотца* метод 264
*Навье — Стокса* уравнения 24, 25, 29, 35, 214, 252, 262, 294—296, 316— 330, 424, 444, 446, 474, 488
— — — унрощения 446—457
— — — усложнения 446, 458—464
*Нагеля* схема 388—390
*Найквиста* частота 251
Папряжений вязких тензор 320, 322, 323
— полных тензор 316—321
Папряжения вязкие 317, 319
Патяжение поверхностное 304, 458
Пачальные условия 12, 36, 37, 100, 106, 130, 139, 164, 180, 191, 212, 263—275, 282, 420—421, 449, 450, 456, 482, 483
Пеавтомодельное решение 233
Певязка 181, 182, 201, 202, 269
— определение 181
Пеединственность стационарных решений 25, 26
*Неймана* граничные условия 95 98 134, 154, 175, 184, 186, 192, 195, 196, 202, 203, 205, 207, 212, 213, 227, 233, 252, 278—281, 288, 290, 291, 298, 306, 307, 310, 312, 313, 429, 443, 511—514, 530
*фон Неймана* анализ устойчивости 68—73
Пеконсервативная форма уравнений движения жидкости несжимаемой 54, 58, 316—321, 345
— — — — — — сжимаемой .360, 371, 390, 394, 401, 414
Перазрывности уравнение 29, 32, 53 55, 112, 166, 218, 294—296, 304, 310, 313—315, 318, 319, 329, 367, 399, 403, 404, 406—409, 529, 536
Песовместность условий на входной границе и на стенке 413
Пеустойчивость 42—43, 58—61, 125, 126, 213, 482
— в смысле Адамара 79
— динамическая 59, 61, 535
— и неразличимость частот 125

— монотонная 76
— связанная с нелинейностью 28, 57, 81, 143, 160, 161, 164, 274, 295— 297. 304, 371, 420, 421, 457, 482
— статическая 16, 59, 61, 242, 243, 535
— фазовая 94
— численная 28, 125, 151
Нечетно-четного исключения метод 176, 177, 204
Неявные схемы *см.* Схемы неявные
Нижней релаксации параметр 164
— — схема 19, 68, 162, 163, 167, 182
Норма ошибки 192, 193
NOS метод 167
*Нуссельта* число 288—290, 398, 403
*Ньютона— Рафсона* метод 192
Области непрямоугольные 141, 190— 191
— нерегулярной формы 201, 202, 205—207
Область влияния 74, 75, 356—359
Обмен энергией между фурье-компонентами 125
Обозначения для конечно-разностных аналогов производных 40, 41
Обратные методы 336—337
Обращение скорости невозмущенного потока 104, 169, 361, 469
Общая процедура решения полной задачи гидродинамики 36—38
Обыкновенные дифференциальные уравнения 169, 237, 240—242, 465, 467
Объемная вязкость 316, 325, 329,345, 346, 379, 410
Ограниченность решения 77, 98
*Огуры* метод 204
Однонаправленный поток информации 106, 108
Однослойная схема 85
Одношаговая схема, определение 85
*Озеена* решение для дальнего следа 237
Оптимальная последовательность в неявной схеме метода чередующихся направлений 189—191
Опытная и рабочая программы 470, 475—479, 490
*Орра — Зоммерфельда* теория 459
Осесимметричное течение 56, 218,219, 229, 231, 372, 377, 388, 447
Осцилляции, вызванные чрезмерно большим шагом по времени 63, 64, 68, 82, 98, 129— 131, 169, 171, 188
Осцилляции за скачком 247, 342, 346—348, 374, 376, 524, 536
Отказ от сохранения энергии 315
Отладка программы 175, 470, 479— 489, 508
Отношение размеров шагов сетки 42, 180, 199, 351
Отображение бесконечной области на конечную 439—441, 452
Отражение ударной волны от места изменения шага сетки 353, 427
Отражения способ *см.* Граничные условия для течения жидкости сжимаемой на стенке
— — как прием программпрования 402
Отрыв и повторное присоединение потока 15, 16, 223, 224, 226, 233, 237, 261, 264, 398—402, 404, 450, 498
Отщепление уравнения энергии от уравнений движения 285
Оценка эффективности методов 168— 175, 191—192, 211—212, 306—309, 312—314, 423
Ошибка аппроксимации 27, 40, 41, 44, 79, 100, 147, 153, 157, 168—170, 173, 215, 216, 231, 264—275, 279, 281, 305, 341, 356—359, 364, 396, 403, 423, 426—429, 438, 487, 515, 526, 527, 533
— — величина и порядок 98—99, 527
— дисперсионная 73, 83, 89, 123, 124, 370
— за счет эффективного смещения стенки 227
— обусловленная затуханием 88, 121, 122, 169, 170, 370, 438
— — искусственной вязкостью в расчетах скачка 352—353
— — нарушением ограниченности решения 169, 226, 290, 405, 534
— — — принципа инвариантности Галилея 169
— — — свойства консервативности 95, 111, 112, 169, 179, 273, 428, 448, 535
— — — — транспортивности 169
— — неразличимостью 117, 124, 125, 160, 169, 171, 251, 422, 438
— округления 27, 34, 55, 58, 133, 151, 166—170, 176, 194, 199, 267, 272, 336, 482, 483, 487, 509, 510
Ошибки, связанные со свойствами схемы 168, 169, 188, 251
Ошибки фазовые 93, 117, 121—124, 131, 154— 161, 169—171, 438, 459, 486
— — запаздывающие и опережающие 131, 158, 159
— — проверка при помощи точного решения модельного уравнения 486
Нарадокс влияния условий на выходной границе 253—255, 414
*Некле* число 285, 286
Неременных (попеременных) направлений метод *см.* Чередующихся направлений метод
Нереопределенность граничных условий 227, 229, 392, 393
Нерестройка ячеек сетки 344, 349, 428
Нерехода матрица 102

— множитель 70—72, 116, 121—123
— — комплексный 71
— — определение 70
Пилообразные осцилляции в решении 247—252, 535
Плазменные процессы 460
Поверхностного трения коэффициент 529
Пограничного слоя приближение и
— уравнения 11, 12, 20, 58, 104, 114, 163, 166, 235, 237, 238, 279, 290, 291, 305, 401, 412, 413, 441, 442, 450—454, 458—461, 463, 474, 487, 488, 500, 531
— — профили скорости 235, 506
— — толщина 15, 222, 295
— — — вытеснения 236
Пограничный слой 398, 441, 450, 451, 506
— — неавтомодельный 451
— переходный 461
— турбулентный 461
Полиэдральные сетки 432
Полуаналитические (полудискретные) методы 464, 465, 467, 498
Полярная сетка 427, 430, 431
Последовательной верхней релаксации метод (SOR) 19, 162—164, 167, 168, 182—187, 189—194, 198, 202, 220—221, 275, 279—281, 535
— — — — двухлинейной блочной 192
— — — — как линейная экстраполяция метода *Либмана* 533
— — — — нелинейной и поточечной 186
Потока визуализация 503, 506
*Прандтля — Майера* течение 417
*Прандтля* число 15, 285, 325, 413
Преобразование координат 230, 256, 335, 421, 424, 427, 432—442, 452, 465, 536
— — меияющееся в процессе построения решения 435
— — неортогональные 335, 435—438, 440
— ударного слоя 436, 437
Проверка точности решения глобальная 489
— — — сравнением с решениями надежными приближенными 488
— — — — — — “точными” 483—488
— — — — — экспериментальными данными 489
Прогонки метод 173, 176, 186, 241 247, 281, 509—514
— — матричной 509
— — потоковой 509
— — циклической 509
Программы для ЭВМ составление 470—479, 508
Продолженный подход к пределу 271
Пространственная сетка с переменным шагом 145, 252, 349, 353, 372, 424—428
Прямых метод 453, 465
*Пуассона* уравнение 22, 31, 33, 34, 38, 134, 151, 163—166, 168, .170, 175—213, 239—242, 265, 267, 269, 270, 274—280, 283, 294, 295, 304—307, 313, 355, 430, 480, 500, 509, 512, 533—535
— — векторное 311, 313
— — для давления 275—280, 283, 294, 295, 305, 500, 535
— — методы решения итерационные 178—194, 200, 279—281, 306
— — — — прямые 134, 176, 177, 194—217, 210, 212, 267, 296, 307, 308, 310, 313
— — — — — — в непрямоугольных областях 205—207
— — трехмерное 309, 312, 313
Разности вперед 40, 100
— назад 101, 158
— односторонние 101, 110, 111, 396, 398, 399, 404, 407, 411
— — вблизи точки отрыва 399, 404
— — представления для первой производной 39—40
— по потоку (подветренные) 101, 109, 244
— против потока (наветренные) 101, 109, 211, 244, 245
— центральные 40—43
Разрежения волны 26, 56, 318, 345, 347, 371, 378, 379, 487
Разреженного газа течение 51, 464
Разрешающая способность графиков, построенных на ЭВМ 493, 498
Разрешающей способности сетки увеличение 427, 429, 432, 433, 438
Распечатка значений в узлах сетки 491
Расчета распространения вектора ошибки метод (EVP) 176, 177, 194—204, 207, 212, 221, 286, 307
— — — — — влияния коэффициенты 194
— — — — — матрица 197, 198, 207
Расчетная сетка 11, 36—38, 224— 228 269, 290, 291, 344, 378, 381, 424—432, 437, 438, 479
— — автоматическое построение 429
— — грубая 11, 269, 479—483
— — криволинейная 429
— — подвижная 344, 381, 435, 437, 438
— — прямоугольная 36, 39
— — разнесенная в пространстве *см.* Гибридная сетка
— — — во времени 155, 157
— — с переменным шагом по пространственным переменным 230
— — — трапециевидными ячейками 378, 432
— — треугольная 430, 457

Расчленение решения по временным шагам 94, 106, 117, 151
Расщепление по времени 117
Расщепления по времени схема 126, 127, 134, 159, 340, 376, 377
*Рейнольдса* аналогия 330
— число 15, 19, 24, 28, 33, 290, 325, 475, 531
— — изменение с температурой 282
— — определение 33, 325
— — сеточное 21, 68, 72, 77, 84, 104, 106, 162, 215, 218, 245, 248, 249, 251, 252, 355, 385, 519
— — — по разным направлениям 104
— — эффективное 519, 528
Рекомендации по программпрованию, контролю и обработке информации 470—508
Релятивистские эффекты 348, 459, 468
Решение “сильное” 26
— “слабое” 26, 331
— типа уединенной волны 500
Решений единственность 11, 18, 24— 26, 414
—существование 11, 18, 24—26, 165, 168
*Римана* задача о распаде разрыва 381
*Рихтмайера* схема двухшаговая 23, 343, 373, 421, 522
*Ричардсона* метод для уравнения параболического 18, 96, 100
— — — — эллиптического 16—17, 161, 162, 164, 178—181, 188, 193, 198
— экстраполяции 271—273, 452
*Роббина* граничные условия *см.* Граничные условия смешанного типа
*Робертса—Вейса* схема с разностями по диагонали 149—151, 155,526
— — — четвертого порядка точности 154—157, 159, 211, 212, 224
*Роша* координаты 444
*Рунге — Кутта* схема 172
— — *Гилла* схема 172
*Русанова* схема 350—352, 355, 365, 371, 378, 399, 415, 416, 446, 522
— — третьего порядка 423
*Рэнкина — Гюгонио* соотношения 317, 318, 334, 346—348, 435, 448
*Сазерленда* формула для вязкости 328, 383, 476
*Саульева* схемы 99, 146, 147, 150, 151, 180, 390, 522, 533
*Саусвелла* метод релаксации невязки 18, 19, 181-182
Сверхзвуковые течения 22, 414, 415, 417, 422—423
“Свинарника схема” 109
Свободного полета условия 230—232, 417
Сдвиговые слои свободные 447, 452
*Сен-Венана* уравнения 455
Сеточная частота 90—92
Симметроморфные фигуры 442
*Симпсона* формула 235
Системы *N* алгебраических уравнений решение 132, 176
Скачка выделения методы 24, 316, 333-338, 344, 371, 377, 419, 436, 437, 465, 466, 505, 524
— размазывания методы 22—24, 316, 337, 344—382, 436, 457, 515, 524, 536
— улавливание 337. *См. также* Скачка размазывания методы
Сквозного счета методы 337. *См. также* Скачка размазывания методы
Сложные схемы и программы 175, 191, 192, 211, 473, 478, 481
Смешанные лагранжево-эйлеровы методы 464, 465
Смещений однородных метод 179
“Смещения” определение 182
Собственные значения матрицы 87, 192
— — — перехода 73, 87
Сопротивления коэффициент 276, 527
— — для сферы 256—258, 269, 529
Сопряженных градиентов метод 192
Спектральный радиус матрицы 87
Сплайн-функции 45, 172, 174
Сравнение различных методов вывода конечно-разностных аналогов 50—51
Сравнительные достоинства систем для (y,z) и для *(u, v, P)* 306—309, 312—314
Сращиваемых асимптотических разложений метод 467
Стенка без трения 230
— проницаемая 216, 234, 291,390,395
Сток массы 487
— энергии 487
*Стокса* гипотеза 320, 322
— задачи 483, 484
— решение 209, 237
Стрельбы метод 451
*Стренга* схема 378, 526
Стыковка систем координат 430—432, 440
Суммарного представления метод 176
Схема ВВЦП (FTCS) 43, 53, 58— 60, 62—76, 83—85, 96—100, 120, 121, 128—131, 138, 144, 148, 152, 158, 162, 178, 243, 293, 298, 350, 365, 384, 385, 477, 520—522, 524, 530—532, 534—536
— — определение 43
— — эквивалентность итерациям Якоби 161—162
— с донорными ячейками 102, 113, 360, 361, 381, 522
— — “перекидыванием” 378
— — разностями вперед по времени и с центральными разностями по

пространственным переменным *см.* Схема ВВЦП
— — разностями против потока 68, 73, 77, 84, 101—105, 119, 127, 137, 141, 143, 148, 153, 157, 159, 160, 163, 212, 242—245, 251—253, 255, 259, 305, 306, 349, 353—358, 361, 385, 406, 416, 417, 427, 445, 515— 517, 519—524, 526, 530—532, 536
— — — — — — второго порядка 106, 114
— — — — — — для простейших физических переменных 305
— — — — — — — сжимаемой жидкости 349, 353—358, 361, 385, 406, 416, 417
— — — — — — — членов с градиентом давления 354, 357—358
— — — — — — на выходной границе 242—245, 416
— — — — — — неявная 532
— — — — — — первого и второго типа 101—114, 141, 355, 522
Схема слабо неустойчивая 135
— со свойствами транспортивности и конвективности 110—113
Схемы для стационарных уравнений 161—168
— — — — — устойчивость 163, 167, 168
— — — — — эквивалентность некоторым схемам для нестационарных уравнений 162, 164, 167
— неявные 85, 128—134, 151—153, 293—294, 297, 304, 305, 311—314, 333, 340—342, 423, 455, 466, 522, 523, 526, 535
— — для жестких членов 293, 294
— — — решения уравнений в физических переменных 297, 304,305
— — — сжимаемой жидкости 333, 340—342, 423
— — — трехмерного вихря и векторного потенциала 310—313
— — полностью 128, 129, 138, 140, 176, 522, 523, 526, 535
— — определение 85, 152—153
— — частично 131, 132
— порядка точности второго 41, 114, 141, 150, 159
— — — высокого 171—172, 207— 211, 272, 289, 423, 455
— — — первого 40, 104
— — — четвертого 154—157, 159, 171, 172, 174, 203, 209
— явные, определение 85, 128
Схемная вязкость 23, 103, 104, 129, 136, 137, 139, 169, 252, 305, 306
Сходимости решения время 268, 273—274
— — — зависимость от размерности задачи 480—481
— критерии 12, 27, 198, 201, 264— 275, 420—421
— — объективные 420
— — субъективные 266, 270
— проверка 479—483
Сходимость аппроксимационная 265, 270—274
— итерационная (итерационной схемы) 27, 28, 36—38, 79, 80, 143, 162, 164, 166, 180, 183—185, 188, 212, 264—275, 281—310, 420, 422, 429, 438, 479—483
*Тайлера* форма искусственной вязкости 379
*Тейлора — Маккола* решение 337, 450
*Тейлора* ряды 39—44, 103, 109, 120, 129, 136, 150, 169, 358
Тензорного произведения методы 176
Температуры расчет для несжимаемой жидкости 284—294
Теплопроводности уравнение 37, 148, 151, 154
Течение двух жидкостей 304
— потенциальное 163, 213, 229, 233, 237, 311, 432, 442, 446—447, 453— 454, 488
— трансзвуковое 372, 446, 450
Течений без ударных волн методы расчета 333—338
Течения с химическими реакциями 109, 361, 376—378, 436, 449, 460
— трехмерные несжимаемой жидкости 309—314
*Тома* условие для вихря на стенке 217
Точность схемы 42, 43, 56, 209, 214, 225, 263—264, 436, 438, 489
— — локальная и глобальная 209, 264
Транспортивности свойство 83, 98, 106—110, 117, 169, 355, 358, 364, 532
Трехдиагональная матрица 133, 140, 153, 188, 509
Трехдиагональный алгоритм 133,147. *См. также* Прогонки метод
Трехслойная схема 115
Турбулентность 15, 35, 125, 331, 351, 451, 455—457, 461, 462, 507, 508
— вычислительные теории 461, 462, 468
— расчет на ЭВМ 508
— статистическая теория 508
Ударная труба 536
Ударной волны распространение одномерное 535, 536
— — — с изменениями фазовыми 460
— — толщина 330, 332, 342, 344, 347, 348, 421
Ударные волны 11, 22, 23, 35, 51, 56, 315—318, 330—333, 342—344, 346, 347, 420, 421, 437—438, 448, 450, 460, 487
— — в методе характеристик 448
— — графическое построение при помощи ЭВМ 503, 505—506

— — продолжение решения через них 334—335
*Уорминга — Хьетта* метод 82
Уравнение, включающее конвективный и диффузионные члены 29, 33— 34, 71, 137, 140, 151, 153, 247,515— 528
— для температуры 166, 167, 284— 285
— — функции тока 30—34, 160, 175— 213
— — — — — как единственной переменной 165, 223. *См. также* Бигармоническое уравнение
— — химических компонент 166
— состояння 15, 282, 315—317, 321, 322, 326—328, 367, 462, 468, 477
Уравнення в безразмерных переменных 11, 29, 32—34, 69, 284, 285, 315, 324, 328
— для возмущений 459
— — простейших переменных 12, 20, 29—30, 60, 294—309, 312—314
Условня на границе входной 228, 233—236, 290—291, 297, 530
— — — — — влняние на решение 237, 417
— — — — — дискретизированные способы задання 235—236
— — — — — для жидкости несжимаемой 233—236, 439
— — — — — — — сжимаемой 408, 412-413
— — — — — — простейших физических переменных 297
— — — — — — температуры 290—291
— — — выходной для жидкости несжимаемой 95, 121, 139, 228, 236— 247, 252, 297, 298, 439, 528, 530, 535
— — — — — — — сжимаемой 413—417, 528
— — — — простейших физических переменных 298
— — — — — достаточность 240—241, 535
Установлення по времени метод 20, 188, 273, 337, 338
Устойчивости исследование для жидкости несжимаемой 62—85, 127, 179, 429, 531
— — — — — — влняние неоднородного члена 178
— — — — — сжимаемой 333, 338—341, 383—386
— — — уравнений с непостоянными коэффициентами 80—82
— — метод дискретных возмущений *см.* Дискретных возмущений метод
Устойчивости исследование, метод *фон Неймана см. фон Неймана* анализ устойчивости
— — — *Хёрта см. Хёрта* анализ устойчивости
— — методы матричные 339, 340
— — ограничення на шаги пространственной сетки 340, 341, 429
— критерии 27, 77—83, 292. *См. также Куранта* число
— определение 27, 28
— понятие 77—79
Устойчивость абсолютная (безусловная) 98, 99, 128, 129, 136, 140, 144, 145, 147, 153
— динамическая 63, 68
— "поточечная" 78
— "пошаговая" 78
— статическая 63, 66, 67
*Фика* закон 49, 286, 374
Фильтрации задачи 457
*фридрихса* критерии 77, 78
*Фромма* схема с нулевой средней фазовой ошибкой 158—160, 522, 526, 533
Функции-операторы 472, 473, 476
Функцня тока, определение 30
*Фурье* закон теплопроводности 322, 323
— методы прямые 21
— ряды с конечным числом членов 69, 83—84
— — использующие их методы 176, 177, 204—207
Фурье-компоненты решения 69, 122, 123
— — стационарные 93, 95, 106, 124, 139, 532
Хаотической релаксации методы 193
Характеристик метод 12, 13, 22, 58, 331, 334—335, 341, 356, 359, 394, 417—419, 436, 446—450, 460, 463
— — в трехмерном случае 448, 449, 452
— — начальные данные 449—450
Характеристики 74, 102, 356, 359, 417—419, 448, 449. *См. также* Характеристик метод
"Характеристические линии" для разностных уравнений 74, 75
Хёрта анализ устойчивости 73—78, 82, 83, 102, 116, 120, 129, 136, 363, 516, 518, 532
Химическая неравновесность 413, 460
Химические реакции 292, 452, 453, 459, 460, 481, 487
*Хойна* схема 134, 526, 536
*Хокни* метод 21—22, 204
*Хоуарта* линейно замедленное течение 233
"Цветовое уравнение" 35
Циклического исключення методы 176
ZIP-аппроксимацня 529
Частиц в ячейках метод (PIC) 23, 48, 349, 355, 359—362, 385, 406, 458, 463, 504, 506
Частицы-маркеры 295, 296, 301—303, 359
*Чебышева* полуаналитический (полунтерационный) метод 162, 193
*Чена—Аллена* схема 138, 211, 212, 386—388, 521, 522, 536
Чередующихся направлений метода схема *Мак-Ки* и *Митчелла* 384
— — — схемы высшего порядка 172
— — — — для нелинейных членов 141

— — — — — — непрямоугольных областей 141, 144, 190
— — — — — — сжимаемой жидкости 342, 388, 390, 536
— — — — — — уравнений параболических 20, 126, 244, 384, 427, 443
— — — — — — — эллиптических 202, 242, 247, 443
— — — — — неявные (ADI) 134, 139— 145, 148, 153, 172, 188—191, 219, 220, 275, 281, 312, 456, 522, 526
— — — — — трехмерные 142, 144— 145, 312
— - — — явные (ADE) 146—151, 156, 164, 390, 533, 536
Четырехслойная схема 117
"Чехарда со средней точкой" схема 28, 85—96, 106, 116, 117, 124, 129, 130, 138, 139, 148, 150, 155—157, 161, 238, 243, 244, 259, 293, 296, 364, 365, 373, 378, 381, 384, 421, 526, 530, 531
— схема *Дюфорта — Франкела см. Дюфорта — Франкела* схема
Численное моделпрование 13, 14, 19, 21, 25, 48, 110, 359, 465
Численные эксперименты 12, 15—16, 213—215
*Чорина* метод 304
*Чудова* метод 385
Шаблон девятиточечный 154, 160, 203, 208, 209, 258, 264, 409, 432
— пятиточечный 42, 154, 173, 175, 203, 207—210, 222, 258, 262, 264, 272, 536
*Шапиро* и *0'Брайена* способ определения вихря на выходной границе 246—247, 252
*Шелдона* метод 193, 355
*Шмидта* число 286
*Шортли — Уэллера* метод 18, 178, 181
*Эдди* метод 77 *Эйлера* схема 110
— — модифицпрованная 129, 130, 134
Эйлерово описание движения 30, 118, 156
Эйлеровы переменные 344, 345, 380
— сетки 248
*Эккерта* число 285
*Экмана* слои 435
Эксперименты в аэродинамической трубе 15, 213, 230, 237
Экстраполяция значений на стенке 216, 289, 402
— — условий на границе верхней 232, 419—420
— — — — — выходной 239—242, 245, 246, 414—417, 530
Энергетические методы 77
Энстрофия 58
Энтальпия 321, 388
Энтропия 315, 327, 394, 500
— безразмерная 327
— переноса уравнение 315
— рост при переходе через скачок 345
— сохранение 315
*Якоби* итерационная схема 161
— метод 179

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Автор предлагаемой книги дал ей название "Вычислительная гидродинамика", тем самым намереваясь подчеркнуть, что эта дисциплина занимает самостоятельное место, подобно аналитической или экспериментальной гидродинамике. Действительно, возникнув два десятилетия тому назад на стыке вычислительной математики и теоретической гидромеханики, вычислительная гидродинамика прошла большой и плодотворный путь и к настоящему времени оформилась как обособленный раздел науки, предметом которого является численное моделпрование различных течений жидкости и газа и решение возникающих при этом задач при помощи методов, основанных на использовании электронных вычислительных машин. Этот раздел науки, имеющий большое прикладное значение, продолжает свое интенсивное развитие.

Современная вычислительная гидродинамика занимается разработкой таких актуальных направлений, как расчет движений вязкой жидкости, численное исследование течений газа с физико-химическими превращениями, изучение распространения ударных волн в различных средах, решение газодинамических задач при наличии излучения и т. д. Данная книга ограничена обсуждением лишь одной из этих проблем — численным расчетом течений вязкой жидкости, описываемых уравнениями Павье—Стокса. Эти уравнения необходимо рассматривать в целом ряде практически интересных случаев (отрыв потока, кормовой след, взаимодействие вязкого газа с ударной волной), которые не охватываются концепцией пограничного слоя.

Значительная часть книги посвящена численному иитегрированию уравнений движения несжимаемой вязкой жидкости в нестационарном случае. В силу того что эти уравнения имеют высокий порядок и в силу сложиости граничных условий примеияется итерационный алгоритм, основанный на последовательном иитегрировании двух связанных подсистем уравнений второго порядка—для переноса вихря и для функции тока. Разные типы этих подсистем уравнений (соответственно

параболический и эллиптический) позволяют изложить разнообразные численные схемы, которые широко используются при решении и других задач вычислительной гидродинамики.

Для течений сжимаемой жидкости различные численные схемы демонстрируются в основном при отсутствии вязкости, а разностные представления вязких членов рассматриваются отдельно. Здесь обсуждается расчет течений с ударными волнами при их размазывании из-за явной или неявной (схемной) искусственной диссипации.

В книге освещаются вопросы устойчивости и сходимости решения конечно-разностных уравнений. Представляет интерес анализ различного типа ошибок, обусловленных разностными схемами. Автор уделяет очень большое внимание численному представлению граничных условий, которые имеют первостепенное значение, влияя как на точность, так и на устойчивость численного решения задачи. Обсуждение этого вопроса проводится столь детально, что в этом отношении книга не имеет себе аналогов.

В смысле методологии и используемого подхода данная книга не относится к чисто математическим работам. В ней большую роль играют эвристические обоснования и результаты вычислительного эксперимента и обобщается огромный опыт практических расчетов, накопленный автором и другими исследователями. Это обстоятельство придает книге особую ценность, поскольку обычно читателя редко знакомят с технической стороной численного решения задач. Автор, напротив, написал даже специальную главу, в которой даются рекомендации по программированию, по проверке численных схем и по обработке получаемой информации.

Книга содержит весьма обширный список литературы по вычислительной гидродинамике. К сожалению, эта библиография ограничена 1972 г. и содержит недостаточное количество работ советских ученых. Например, в книге не упоминается оригинальный эффективный метод интегрирования уравнений Павье— Стокса, предложенный А. А. Дородницыным и основанный на введении малого параметра в граничное условие прилипания на стенке. Имея в виду эти обстоятельства, мы сочли нужным добавить список ряда советских публикаций, а в отдельных случаях давали подстрочные примечания с дополнительными ссылками.

При переводе книги на русский язык встретились трудности, связанные с тем, что кое-где материал преподносится в несколько сыром виде; многочисленные неточности и опечатки, замеченные в этих местах, исправлены без специальных оговорок. Работа по переводу распределялась так: В. А. Гущин перевел главы 2, 3 и приложение А, В. Я. Митницкий—предисловие, главы 1, 4—7 и приложение Б.

*Я. И. Чушкин*

Ко времени написания настоящей книги стало очевидным, что как общая область численного моделирования физических процессов, так и частный ее раздел — вычислительная гидродинамика — быстро развиваются. Достаточно бросить беглый взгляд на список заглавий в каком-либо научном реферативном журнале, чтобы увидеть непропорционально большое число диссертаций по вычислительной гидродинамике. Каждый имеющий доступ к вычислительной машине что-нибудь вычисляет.

К сожалению, прогресс исследований в этом направлении тормозится сильной разбросанностью литературных источников. Едва ли проходит месяц без того, чтобы кто-нибудь не “открыл” бы заново способ составления конечных разностей против потока или не растолковывал бы с настойчивостью новообращенного все прелести асимптотического нестационарного подхода для решения задач о стационарных течениях. А ведь эти идеи известны очень давно. Падеемся, что данная книга будет полезна начинающим как отправной пункт для дальнейших исследований.

В настоящее время существует несколько прекрасных учебных руководств по численному решению уравнений в частных производных; особо следует отметить книги Вазова и Форсайта [1960], Рихтмайера [1957], Рихтмайера и Мортона [1967], Эймса [1965, 1969] и Митчелла [1969] 1). Пастоящая книга отличается от них как отбором материала, так и способом его изложения.

Что касается охваченного материала, то необходимо предупредить читателя, что это не математическая книга; см. по этому поводу работу Форсайта “Подводные камни в вычислениях или о чем не пишут в математических книгах” (Форсайт [1970]). Здесь в ирямой и, как мы надеемся, вполне достунной форме приводятся основные конечно-разностные схемы для расчета внутренних точек области течения. Обсуждается также важиость численного представления граничных условий. Последнему вопросу до настоящего времени вообще не уделялось внимания в учебных руководствах и уделялось очень мало внимания в научных статьях, однако сейчас начинают понимать всю его значимость. В книге

обсуждаются и другие столь же важные и обычно не упоминаемые темы, а именно частные виды конечно-разностных сеток, специфические формы рассматриваемых дифференциальных уравнений, задачи с начальными условиями, критерии сходимости, способы машинного построения графиков и другие методы обработки получаемой информации и даже некоторые специфические рекомендации по практическому программированию. Короче говоря, в этом учебном руководстве читатель найдет не изящные математические построения и лишь упоминание задач, в которых они применимы, а всю совокупность вопросов, связанных с практическим получением численных решений гидродинамических задач.

Что касается примеияемого подхода, то снова предупреждаем читателя, что это не математическая книга. Даже в математических книгах признается необходимость физической интуиции, эвристических обоснований и численного экспериментирования, хотя интуптивный, эвристический и экспериментальный подходы в них используются не слишком часто. Конечно, некоторые чисто математические исследования имеют большую ценность, однако наши интересы — это в первую очередь интересы инженеров, физиков, химиков, т. е. мы интересуемся в первую очередь самим физическим явлением, математика же при этом играет лишь роль инструмента исследования. Это различие в подходах не просто имеет субъективное значение, а часто приводит к совершенно другим формулировкам задач, в особенности в отношении граничных условий. Вообще говоря, подход, основанный на моделпровании физических процессов, дает лучшие результаты.

В этой связи любопытно отметить, что большинство работающих в области вычислительной гидродинамики в прошлом были теоретиками (и все еще продолжают считать себя таковыми). Автор этой книги прежде занимался в основном экспериментом. Хочется надеяться, что мои научные склонности в сочетании с научными склонностями авторов предшествующих книг позволят создать нечто новое, поскольку я убежден в том, что вычислительная гидродинамика является самостоятельной дисциплиной, отличной от экспериментальной и теоретической гидродинамики и имеющей свои собственные методы, трудности и области применения.

БЛАГОДАРНОСТИ

Когда над книгой работаешь с некоторыми перерывами около четырех лет, то неизбежно обрастаешь своего рода долгами и практически оказывается невозможно выразить признательность всем тем, кто так или иначе способствовал твоему труду. Однако некоторых мне хочется поблагодарить особо.

Наиболее творческая (и приятная) часть работы была проделана в уииверситете Кентукки. В 1968 г. мой добрый друг д-р Чарлз Кнапп предложил мне работать над этой книгой и в 1970 году способствовал моей командпровке в этот упиверситет. Он и Энн позаботились об устройстве моей семьи и на протяжении всего пребывания в Кентукки мы пользовались их дружбой и моральной поддержкой. Завершением настоящей работы я более всего обязан, если не считать мою жену, д-ру Кнаппу.

Мое пребывание в Кентукки стало возможным благодаря декану инженерно-механического факультета д-ру Роджеру Эйххорну. Мне хочется искренне поблагодарить его, студентов, слушавших мой курс, а также многих других, оказавших мне дружеский прием, в частности д-ра Клиффа Кремерса, д-ра Джона Ленхарда, д-ра Шива Сингха, д-ра Фрэнка Саггендорфа и Делорес Блэк. Мое пребывание в Кентукки стало возможным также благодаря руководству лабораторий Сандиа, которое санкционировало мое длительное отсутствие и терпеливо оказывало поддержку в моей работе; в этой связи я благодарю д-ра Фреда Блоттнера, д-ра Кена Торьяна и Алана Ноупа.

В 1967 г., когда тематика книги еще только зарождалась, мне посчастливилось прослушать курс, прочитанный д-ром Стивом Ниачеком в уииверситете Нотр-Дам. Доктор Ниачек не только ознакомил меия с предметом, но и вдохновил на дальнейшую работу в этой области. Кроме того, я не смог бы заияться этой захватывающей наукой, если бы моим руководителем не был д-р Т. Дж. Мюллер.

Нрофессор Уильям Оберкампф из Техасского уииверситета в Остине на основе первых трех глав рукописи читал односеместровый курс. Он обнаружил в рукописи большое число ошибок и дал много ценных предложений по улучшению изложения материала. Мне только остается сожалеть, что остальная часть книги не была подвергнута столь полезному внимательному разбору профессором и его студентами. Кроме того, д-р С. У. Хёрт любезно согласился просмотреть часть материала, связанного с его работами и другими работами, выполненными в Лос-Ала-мосской лаборатории.

Большую часть этой трудной рукописи в черновом и окоичательном вариантах отпечатала Ева Мария Франке. Бетти Холлингсуорт также помогала при печатании рукописи. Редактпровала рукопись Розмари Тисдейл, Рут Барт готовила к печати иллюстративный материал. Многие из тех, кто

великодушно предоставил в наше пользование иллюстрации, упоминаются в подписях к рисункам, однако в этой связи хочется особо отметить д-ра Фрэнсиса Харлоу, д-ра С. У. Хёрта и д-ра Дэвида Томана.

В этом новом издании книги (март 1976 г.) учтены предположения и исправления, подсказанные мне моими друзьями (и критиками). Мне хочется искренне поблагодарить их всех, и в особенности проф. У. Л. Оберкампфа, проф. А. Дж. Чорина, д-ра Э. Д. Мартина, д-ра Р. С. Хёрша, д-ра Л. Бертрама, проф. Р. А. Дальримпла, д-ра У. Шумана, проф. Дж. Ф. Томпсона, проф. У. Гхиа, проф. К. Гхиа и д-ра Р. Ф. Уорминга.

Моя жена Кэтрин и наши дети живо интересовались моей работой. Нечего и говорить, что без их поддержки она не могла быть выполнена.

Я глубоко благодарен моим друзьям, коллегам и знакомым, поддерживавшим мое начинание. Их поддержка значила для меия очень много.

Наконец, искренне благодарю Томми Ноттера, который подготовил материал для шестой главы.

Н. *Дж. Роуч*

Эта книга посвящается Мери и ее упиверситету Нотр-Дам дю Лак.

1) Список литературы, составленный по алфавиту (по фамилии первого автора) и годам выхода, помещен в конце книги; список дополнительной литературы с краткими аннотациями можио найти в обзоре Нрайса [1966],

## РЕКОМЕНДАЦИИ НО УЧЕБНОМУ КУРСУ, ОСНОВАННОМУ НА НАСТОЯЩЕЙ КНИГЕ

Ниже мы изложим некоторые собственные наблюдения, основанные на чтении двух курсов по вычислительной гидродинамике, одного для повышения квалификации работников промышленности и другого—для выпускников университета.

1. Излагаемый материал не слишком труден сам по себе, однако из-за его новизны возникает много неясностей и неожиданностей.

2. Нолагаем, что материал книги достунен студентам старших курсов.

3. Из настоящего курса студенты (а в моем случае и сам лектор) могут почерпнуть различные сведения из области гидродинамики. Ноэтому его следует не рассматривать в отрыве от общего учебного плана, а, наоборот, использовать для введения (или по крайней мере закрепления) таких идей и поиятий, как зарождение и перенос вихрей, уравнения в безразмерных переменных, контрольные объемы, конвективные и диффузионные процессы, достаточность граничных условий, диссипация, жесткие уравнения, эллиптичность уравнений, описывающих течения несжимаемой жидкости, ударные волны, линии Маха, область влияния гиперболических уравнений, математические аспекты уравнений Эйлера и уравнений пограничного слоя, существование и единственность решений, особые точки.

4. Без особых затрат можио получить качественно разумные решения двумерных задач о течениях несжимаемой жидкости на грубой сетке. Например, один из моих студентов получил несо мненно сходящееся численное решение задачи о течении жидкости в замкнутой прямоугольной области с одной подвижной границей на сетке 5X5 за 20 с машинного времени IBM 360/65. Столь же экономично можно численно решать и нестационарные задачи об одномерном распространении ударной волны.

5. Я считаю важным приобщать студентов к работе на ЭВМ как можио раньше. Соответственно в процессе преподавания я не придерживаюсь строго последовательности изложения материала в настоящем учебном пособии. В книге последовательно описываются схемы для решения уравнения переноса вихря, затем схемы решения эллиптического уравнения для функциитока, затем методы постановки граничных условий и, наконец, вопросы, связанные с начальными условиями и критериями сходимости; вопросы, связанные с обработкой полученной информации, обсуждаются в последней главе. Однако в учебном курсе я даю задачу о течении жидкости в замкнутой прямоугольной области с одной подвижиой границей сразу же после изложения нескольких основных схем и непродолжительного численного экспериментирования с одномерным модельным уравнением конвекции и диффузии вихря и лекции, в которой излагаются простейшие схемы решения эллиптического уравнения для функции тока и граничные условия на стенках с прилипанием. Студенты в течение нескольких недель работают над этой двумерной задачей, в то время как я продолжаю чтение лекций уже в соответствии с изложением материала в настоящей книге.

6. Курс принимается студентами с энтузиазмом, в особенности если он подкреплен практикой на ЭВМ.

7. При двухсеместровом курсе я заканчивал бы первый семестр на главе 3, возможно, после изложения методов решения уравнения для температуры. Второй семестр мог бы начинаться с обсуждения решения уравнений течения несжимаемой жидкости в простейших физических переменных.

8. Существует много задач, которые можно предложить студентам в качестве практической работы по настоящему курсу. Пекоторые из них являются еще неисследованными научными проблемами, что может служить превосходным стимулом для их выполнения. Примерами публикаций, возникших из студенческих работ по задаче о течении жидкости в замкнутой области с одной подвижиой границей, являются работы Торранса с соавторами [1972] и Numerical studies of incompressible viscous flow in a driven cavity. - NASA SP-378, 1975.

9. При желании материал настоящей книги можно дополнить изложением метода характеристик и схем решения уравнений пограничного слоя.

# Глава 1

# ВВЕДЕНИЕ

«Гидродинамика особенно изобилует нелинейностями» (Эймс [1965]), как это хорошо знает каждый изучающий ее студент. Она также изобилует уравнениями в частных производных смешанного, гиперболического и эллиптического типов, математическими особенностями различных видов, задачами с граничными условиями на бесконечности. В прошлом гидродинамика в значительной мере стимулировала развитие теории уравнений в частных производных, теории функций комплексного переменного, векторного и тензорного анализа, нелинейных математических методов. Не удивительно поэтому, что в настоящее время гидродинамика, с одной стороны, извлекает большую выгоду из применения численных конечно-разностных методов исследования, а с другой стороны, вносит значительный вклад в их развитие.

Однако в настоящей книге мы не касаемся всех разделов численного анализа, используемых в гидродинамических задачах. Мы не рассматриваем интересную двухточечную краевую задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений, которая играет столь важную роль при расчете автомодельных решений теории пограничного слоя; мы не рассматриваем даже практически важного метода характеристик. Вместо этого мы сосредоточим свое внимание на новой, только еще появляющейся дисциплине, которую, по-видимому, лучше всего было бы назвать численным моделированием в гидродинамике. В настоящее время все чаще входит в употребление термин «вычислительная гидродинамика», который почти не отличается от более широкого термина «численная гидродинамика» [1]).

## 1.1. Область вычислительной гидродинамики

В прошлом гидродинамика, как и другие физические науки, делилась на теоретическую и экспериментальную части. Зададимся вопросом: в каком отношении к этим старым частям на-

[1]) Заметим, что автор использует как термин «вычислительная гидродинамика» (computational fluid dynamics), так и термин «численная гидродинамика» (numerical fluid dynamics). — *Прим. ред.*

ходится вычислительная гидродинамика? Можно ответить, что она является отдельной дисциплиной, хотя и обладает некоторыми чертами обеих этих частей и скорее дополняет, чем заменяет их.

Вычислительная гидродинамика, конечно, не является чисто теоретической наукой (если таковые вообще существуют) — она ближе к экспериментальной.

Существующая ныне математическая теория численного решения нелинейных уравнений в частных производных пока еще неадекватна: нет строгого исследования устойчивости, строгих оценок погрешностей и доказательств сходимости. Некоторые успехи достигнуты в доказательствах существования и единственности решений, но их не достаточно для того, чтобы дать недвусмысленный ответ на отдельные вопросы, представляющие известный интерес.

Поэтому в вычислительной гидродинамике приходится в основном полагаться на строгое математическое исследование упрощенных линеаризованных задач, имеющих большее или меньшее отношение к данной задаче, а также на эвристические обоснования, физическую интуицию, результаты продувок в аэродинамических трубах и на процедуры проб и ошибок.

Специалист по прикладной математике Био (см. Био [1956]) сделал некоторые замечания относительно прикладной математики вообще, которые сегодня кажутся особенно подходящими к вычислительной гидродинамике. Процитировав Бейтмена, охарактеризовавшего математика-прикладника как «математика без математической добросовестности», Био переходит к обсуждению отношений между математиком-прикладником и чистой математикой: «Можно понять чувства художника, которому в процессе творчества постоянно напоминали бы о необходимости строгого следования законам физики и психологии, хотя изучение науки о цветовых сочетаниях для него, безусловно, полезно». Начинающего изучать вычислительную гидродинамику необходимо предупредить, что в этой области требуется по меньшей мере столько же искусства, сколько и науки.

Численное моделирование гидродинамических задач, таким образом, ближе к экспериментальной, чем к теоретической, гидродинамике. Проведение каждого отдельного расчета на ЭВМ очень похоже на проведение физического эксперимента. Здесь исследователь «включает» уравнения, а затем следит за тем, что происходит; именно то же самое делает и экспериментатор. При проведении расчетов возможны открытия новых физических явлений; так, Кемпбелл и Мюллер [1968] открыли один случай дозвукового отрыва в численном эксперименте и лишь после этого обнаружили его при экспериментах в аэродинамических трубах. Однако исследователь, проводящий численный

эксперимент, имеет некоторые преимущества. Он может произвольно задавать такие свойства жидкости, как плотность, вязкость и др., причем при определении значений гидродинамических величин в поток не вносится возмущений. Вычислитель может проводить чисто двумерный эксперимент, фактически неосуществимый в лабораторных условиях. Он не стеснен в выборе параметров течения, т. е. может произвольно выбирать начальные толщину пограничного слоя и профиль скорости независимо от числа Рейнольдса на единицу длины и числа Маха, что невозможно при эксперименте в аэродинамических трубах. Вероятно, наиболее важен тот факт, что экспериментатор-вычислитель может делать то, чего не может сделать ни теоретик, ни экспериментатор-физик: он может проверить, как на данное физическое явление влияет в отдельности каждое из независимых упрощающих физических предположений, таких, как постоянство коэффициента вязкости, пренебрежение архимедовой силой, равенство числа Прандтля единице, предположения теории пограничного слоя и т. д. (Напомним старый анекдот о новичке, который для экспернментов в аэродинамической трубе заказал железнодорожную цистерну с невязким нетеплопроводным совершенным газом.) Вычислитель может проверить и адекватность основных уравнений состояния в случае, например, какой-либо новой неньютоновской модели жидкости.

Однако численный эксперимент никогда и ни в коей мере не может заменить ни физический эксперимент, ни теоретический анализ. Одна из очевидных причин этого заключается в том, что уравнения состояния сплошной среды никогда нельзя считать точными, а другая — в том, что экспериментатор-вычислитель не работает с дифференциальными уравнениями движения сплошной среды. При этом не важно, что рассчитываемые дискретизированные уравнения точно переходят в исходные дифференциальные уравнения в предельном случае измельчения сетки, так как таковой предел никогда не достигается.

Процесс дискретизации уравнений часто меняет не только количественную точность, но и качественное поведение решений. Так, некоторые виды дискретных аналогов привносят своего рода вязкостные эффекты, даже если исследователь намеревался иметь дело с уравнениями для невязкой жидкости. Другим очень важным ограничением является неспособность численного эксперимента надлежащим образом учитывать турбулентность и вообще такие физические явления (турбулентность, линии скольжения, вихри, срывающиеся с острых кромок), которые имеют слишком малый масштаб, чтобы быть с достаточной точностью разрешенными на конечно-разностной сетке, и в то же время могут оказывать существенное влияние на крупномасштабные свойства течения. Примером такого явления может

служить влияние турбулентности в пограничном слое на положение точки отрыва. Существуют также примеры течений, представляющихся двумерными, но на практике не являющихся таковыми, например течение за линией повторного присоединения оторвавшегося плоского потока и плоское течение над каверной. В подобных случаях кажущееся преимущество точной двумерности численного эксперимента может быть обманчивым.

Наконец, следует отметить, что численный эксперимент ограничен в том же смысле, что и физический, а именно дает дискретную информацию для некоторой частной комбинации параметров. Он не может установить какие-либо функциональные зависимости, помимо тех, которые получаются из основных уравнений при помощи анализа размерностей, и следовательно, не заменяет даже простейшей теории.

Итак, вычислительная гидродинамика является отдельной дисциплиной, отличной от экспериментальной и теоретической гидродинамики и дополняющей их. Она имеет свои собственные методы, свои собственные трудности и свою собственную сферу приложения, открывая новые перспективы для изучения физических процессов.

## 1.2. Исторический обзор[1])

В 1910 г. Л. Ричардсон представил в Королевское общество пятидесятистраничную статью, которая должна быть признана краеугольным камнем численного анализа дифференциальных уравнений в частных производных. До этого Шепперд выполнил некоторую фундаментальную работу по конечно-разностным операторам, однако вклад Ричардсона затмил все предыдущие исследования. Ричардсон разработал итерационные методы ре-

[1]) В этом историческом обзоре, к сожалению, совсем не дается ссылок на работы советских авторов, которые внесли очень большой вклад в развитие вычислительной математики и вычислительной гидродинамики. Обзор советских трудов по вычислительной математике проведен в статье А. А. Самарского и статье В. В. Бобкова и П. И. Монастырного в книге «История отечественной математики», т. 4, кн. 2. — Киев: Наукова думка, 1970. Большой обзор на эту тему имеется в монографии Г. И. Марчука «Методы вычислительной математики». — Новосибирск: Наука, 1973. Интересные библиографические комментарии содержатся в книге С. К. Годунова и В. С. Рябенького «Разностные схемы». — М.: Наука, 1973. Разностные методы решения уравнений Навье — Стокса обсуждаются в обзорной статье И. Ю. Браиловской, Т. В. Кусковой и Л. А. Чудова [1968] и в статье А. А. Дородницына в Lecture Notes in Physics, v. 18, 1973. В изданиях ВИНИТИ «Итоги науки и техники» подробные обзоры по отдельным проблемам вычислительной гидродинамики опубликовали В. В. Русанов и В. В. Поспелов «Исследования течения жидкости и газа» (сб. «Математический анализ», т. 13, М.: 1975) и Г. П. Воскресенский и П. И. Чушкин «Численные методы решения задач сверхзвукового обтекания тел» (сб. «Механика жидкости и газа», т. 11, М.: 1978). — *Прим. ред.*

шения уравнения Лапласа, бигармонического уравнения и других уравнений. Он установил различие между стационарными задачами в зависимости от того, «можно или нельзя продолжить решение, отправляясь от некоторой части границы», т. е. в современной терминологии различал гиперболические и эллиптические задачи. Ричардсон тщательно изучил численное задание граничных условий, включая граничные условия в угловой точке и на бесконечности. Он получил оценки погрешности, дал метод экстраполяции полученных результатов при стремлении шага сетки к нулю, а также предложил проверять численные решения сравнением с точными решениями для тел простой формы, скажем для цилиндра. Наконец, он впервые фактически применил численные методы к такой практической задаче большого масштаба, как определение напряжений в каменной дамбе [1]).

В итерационном методе Ричардсона для эллиптических уравнений на $n$-й итерации поочередно в каждом узле расчетной сетки удовлетворяется конечно-разностное уравнение, содержащее «старые» значения на $(n-1)$-й итерации в соседних узлах. В 1918 г. Либман показал, что можно значительно увеличить скорость сходимости просто за счет использования «новых» значений в узлах, как только они вычислены. В этой схеме «непрерывных замещений» на каждой $n$-й итерации используется некоторое число старых значений с $(n-1)$-й итерации и некоторое число новых значений с $n$-й итерации в соседних узлах. В каждом цикле итерационного метода Либмана наибольшие погрешности уменьшаются так же, как в двух циклах итерационного метода Ричардсона (Франкел [1950]).

Это сравнение служит примером специфики численного анализа уравнений в частных производных. Оказывается, что небольшое изменение конечно-разностных аппроксимаций, итерационных схем или трактовки граничных условий может дать большой выигрыш. Напротив, некоторые правдоподобные и на первый взгляд точные численные схемы могут приводить к пол-

[1]) Ричардсон занимался (применительно к вычислениям вручную) и тем, что теперь называют анализом экономической эффективности метода расчета. Он писал: «Пока что я платил за расчет одного координатного узла лапласиана по расценке $n$/18 пенсов, где $n$ — число цифр, с которыми проводятся вычисления. Основная ошибка вычислителей состояла в том, что они путали знаки «плюс» и «минус». Что касается скорости расчетов, то один из самых быстрых работников рассчитывал за неделю в среднем 2000 узлов лапласиана с трехзначными числами; ошибочные расчеты не оплачивались» (Ричардсон [1910, с. 325]).

Мы должны благодарить судьбу за то, что с 1910 г. социальные условия изменились. Многие из современных вычислителей-гидродинамиков окончили бы свои дни в богадельне, если бы они получали определенную плату за один расчет и при этом «ошибочные расчеты не оплачивались».

ной катастрофе. Классическим историческим примером здесь является явная схема Ричардсона для параболического уравнения теплопроводности, в которой использовались конечно-разностные аппроксимации производных центральными разностями как по пространственным переменным, так и по времени. О'Брайен с соавторами [1950] показал, что эта схема безусловно неустойчива [1]).

До появления ЭВМ основное внимание уделялось эллиптическим уравнениям. Первое строгое математическое доказательство сходимости и оценку погрешности итерационного метода Либмана для решения эллиптических уравнений дали Филлипс и Винер [1923]. В 1928 г. появилась классическая работа Куранта, Фридрихса и Леви. Эти авторы в основном интересовались использованием конечно-разностных методов как инструмента для исследований в чистой математике. Дискретизируя дифференциальные уравнения, доказывая сходимость дискретной системы к дифференциальной и, наконец, устанавливая существование решения дискретной системы алгебраическими методами, они доказывали теоремы существования и единственности для эллиптических, гиперболических и параболических систем дифференциальных уравнений [2]). Эта работа определила направление практического получения конечно-разностных решений в последующие годы.

Первое численное решение уравнений в частных производных для задач гидродинамики вязкой жидкости было дано Томом в 1933 г. В 1938 г. Шортли и Уэллер разработали метод, являвшийся, по существу, более сложным варианнтом метода Либмана. Они предложили блочную релаксацию, метод пробной функции, релаксацию погрешности, методы измельчения сетки и экстраполяцию погрешности. Они также впервые точно определили и исследовали скорость сходимости.

Саусвелл [1946] разработал более эффективный метод релаксации для численного решения эллиптических уравнений. В его методе релаксации невязки [3]) не проводятся вычисления последовательно в каждом узле сетки, а просматривается вся сетка для нахождения узлов с максимальными невязками и именно в этих узлах вычисляются новые значения. (В случае

---

[1]) Эта неустойчивость не проявилась в расчетах самого Ричардсона из-за малого числа рассчитанных шагов по времени.

[2]) Значение работы Куранта, Фридрихса и Леви [1928] обсуждалось в трех статьях, опубликованных вместе с английским переводом этой работы в марте 1967 г. в IBM Journal (Лакс [1967], Партер [1967], Видлунд [1967]).

[3]) Раньше термин «релаксация» относили только к методу Саусвелла релаксации невязки. Мы используем термин «релаксация невязки», чтобы отличить этот метод от итерационных методов типа метода Либмана, которые в настоящее время также называют релаксационными.

стационарного уравнения теплопроводности невязка пропорциональна скорости накопления энергии в ячейке сетки; следовательно, стационарное состояние достигается, когда все невязки обращаются в нуль.) Фокс [1948] разработал усложненные варианты метода релаксации Саусвелла, введя схемы верхней и нижней релаксации (при которых невязки не полагаются точно равными нулю), способ выбора узлов сетки, в которых осуществляется релаксация, а также схему блочной релаксации.

В 1955 г. Аллен и Саусвелл применили метод релаксации Саусвелла для расчета вручную обтекания цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью. В некоторых отношениях это была пионерская работа в численной гидродинамике. Для представления круговой границы на регулярной прямоугольной сетке использовалось конформное преобразование. Были получены численно устойчивые решения при числе Рейнольдса, равном 1000, что превышает физический предел устойчивости [1]). При проведении вычислений авторы столкнулись с ясно выраженной тенденцией к неустойчивости при числе Рейнольдса, равном 100, и связали это с тенденцией к физической неустойчивости потока, предвосхитив тем самым современное понятие численного моделирования. Их работа может также считаться образцом финансирования научных исследований: на ее проведение Лондонскому имперскому колледжу в 1945 г. были выделены большие ассигнования фирмой по пошиву одежды!

Метод Саусвелла не так просто приспособить к использованию на ЭВМ. Вычислитель вручную просматривал матрицу в поисках максимальной невязки гораздо быстрее, чем производил арифметические операции. Для ЭВМ скорость просмотра матрицы не намного превышает скорость выполнения арифметических операций, и поэтому здесь становится более эффективным проведение релаксации последовательно во всех узлах сетки до сведения невязки к нулю, что идентично методу Либмана.

Таким образом, применение ЭВМ дало основание к дальнейшему развитию методов типа метода Либмана с использованием преимуществ идеи верхней релаксации Саусвелла. В 1950 г. Франкел (и в 1954 г. независимо от него Янг) разработал метод, который он назвал экстраполированным методом Либмана и который впоследствии стал называться методом последовательной верхней релаксации (Янг [1954]) или методом оптимальной верхней релаксации. Франкел подметил также аналогию между итеративным решением эллиптических уравнений и решением шагами по времени параболических уравнений, что имело важные последствия.

С развитием ЭВМ стали по-настоящему уделять внимание и

[1]) Расчеты проводились при $Re = 0$, 1, 10, 100 и 1000. — *Прим. перев.*

уравнениям параболического типа, поскольку стало возможным рассчитывать нестационарные решения. В первой монографии Рихтмайера [1957], внесшей большой вклад в развитие одномерной нестационарной гидродинамики, было приведено свыше десяти численных схем. В многомерном случае первым неявным методом был метод Кранка — Николсона, опубликованный в 1947 г. и требовавший итераций на каждом временном слое. Этот метод остается одним из самых популярных и лежит в основе широко используемого метода расчета неавтомодельных решений уравнений пограничного слоя (Блоттнер [1970]).

Невозможно точно определить, когда впервые была выдвинута идея асимптотического метода установления по времени, при которой для получения стационарного решения интегрируются уравнения нестационарного течения. Сомнительно, чтобы такая идея могла серьезно рассматриваться до появления ЭВМ.

Многие из пионерских работ в области вычислительной гидродинамики были выполнены в Лос-Аламосской лаборатории. Именно в Лос-Аламосе во время второй мировой войны фон Нейман разработал свой критерий устойчивости параболических конечно-разностных уравнений и дал метод исследования линеаризованной системы. Краткий отчет о его работах появился в открытой литературе лишь в 1950 г. (Чарни с соавторами [1950] [1])). В этой важной статье были впервые приведены расчеты метеорологических задач большого масштаба, в которых рассматривались нелинейные уравнения для вихря. Авторы выяснили, что в смысле устойчивости уравнения для вихря имеют преимущество над традиционными уравнениями для простейших физических переменных (скорость и давление), и привели эвристические обоснования своей трактовки нестационарной задачи как задачи с математически неполными условиями на входной и выходной границах.

В середине пятидесятых годов в работах Писмена и Ракфорда [1955], а также Дугласа и Ракфорда [1956] были предложены эффективные неявные методы для решения параболических уравнений, пригодные при произвольно больших шагах по времени. Под названием неявных схем метода чередующихся направлений [2]) они применялись и для решения эллиптических задач с использованием аналогии Франкела [1950] между продвижением решения по времени в параболических задачах и продвижением решения по итерациям в эллиптических задачах.

---

[1]) Более полное описание дали О'Брайен, Хаймен и Каплан [1950].

[2]) Наряду с названием «метод чередующихся направлений» в советской литературе применяются также названия «метод переменных (или попеременных) направлений». При переводе данной книги мы употребляем первое (хотя реже встречающееся) название как более точно отражающее суть метода и его английское название (alternating direction method). — *Прим. ред.*

Неявные схемы чередующихся направлений, вероятно, наиболее популярны при расчетах задач о течениях несжимаемой жидкости, в которых используется уравнение переноса вихря.

В 1953 г. Дюфорт и Франкел опубликовали свою схему «чехарда» для параболических уравнений, которая, как и неявные схемы метода чередующихся направлений, пригодна для произвольно больших шагов по времени (при отсутствии конвективных членов), но сохраняет все преимущества чисто явных схем. Эта схема использована Харлоу и Фроммом [1963] при получении их широко известного численного решения для нестационарной вихревой дорожки.

Статья Харлоу и Фромма [1965], опубликованная на страницах журнала Scientific American, была предназначена специально для того, чтобы привлечь внимание научной общественности Соединенных Штатов к возможностям вычислительной гидродинамики. Примерно в то же время во французском журнале La Houille Blanche появилась аналогичная статья Макано [1965]. В обеих этих статьях были впервые четко сформулированы понятия численного моделирования и численного эксперимента. Выходом этих статей можно датировать возникновение вычислительной гидродинамики как отдельной дисциплины.

Вычислительная устойчивость всех упомянутых выше зависящих от времени решений была ограничена сверху по числу Рейнольдса (принципиально этот предел определяется сеточным числом Рейнольдса, т. е. числом, полученным по размеру шага ячейки конечно-разностной сетки). В 1966 г. Томан и Шевчик добились, по-видимому, неограниченной вычислительной устойчивости, используя для представления конвективных членов разности против потока и уделяя особое внимание граничным условиям. Их расчеты обтекания цилиндра простирались до чисел Рейнольдса, равных миллиону; они даже могли «вращать» цилиндр и получать магнусову подъемную силу, не сталкиваясь при этом с вычислительной неустойчивостью. Несмотря на то что их схема имела лишь первый порядок точности, согласование полученных ими результатов с экспериментальными данными заставило переоценить важность формального порядка ошибок аппроксимации при разностном представлении дифференциальных уравнений в частных производных. В этой связи представляется важной работа Чена [1968], установившая существенное влияние численной постановки граничных условий.

Прямые (неитеративные) методы Фурье для численного решения эллиптического уравнения Пуассона были известны уже в течение некоторого времени (см., например, монографию Вазова и Форсайта [1960]), но не применялись к задачам гидродинамики. В 1965 году Хокни разработал родственный, но более

быстродействующий метод, позволивший эффективно решать большие краевые задачи для уравнения Пуассона. После выхода этой работы прямые методы для уравнения Пуассона стали развиваться более интенсивно.

Описанные выше методы пригодны для расчета дозвуковых течений сжимаемой жидкости. Сверхзвуковые задачи отличаются от дозвуковых в нескольких важных аспектах, важнейшим из которых является возможность возникновения в сверхзвуковом течении ударных волн (т. е. разрывов в решениях).

Основополагающей работой для численного расчета гиперболических уравнений явилась статья Куранта, Фридрихса и Леви, опубликованная в 1928 г. Здесь обсуждались характеристические свойства уравнений и в общих чертах излагался известный метод характеристик. В этой работе было также получено и объяснено знаменитое необходимое условие устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви, гласящее, что при расчетной сетке, не совпадающей с характеристической, область зависимости разностных уравнений должна по крайней мере включать в себя область зависимости дифференциальных уравнений. Это условие устойчивости КФЛ (которое в современной терминологии просто гласит, что число Куранта должно быть меньше единицы) справедливо для уравнений гидродинамики как в лагранжевых, так и в эйлеровых переменных.

Лагранжевы методы, в которых прослеживаются «частицы», были доведены до высокой степени совершенства в Лос-Аламосской лаборатории (Фромм [1961]). Вообще говоря, для двумерных задач эйлеровы методы предпочтительнее, однако при их использовании затрудняется расчет ударных волн. Если размер ячейки сетки не меньше, чем толщина ударной волны, то появляются осцилляции, снижающие точность. Эти осцилляции на дискретной сетке имеют физический смысл (Рихтмайер [1957]). Кинетическая энергия, высвобождающаяся из-за потери скорости при переходе через ударную волну, превращается во внутреннюю энергию случайных соударений молекул; при расчетах роль молекул играют ячейки конечно-разностной сетки.

Наиболее обычным подходом к расчету ударных волн на эйлеровой сетке является «размазывание» скачка на несколько ячеек сетки путем явного или неявного введения искусственной вязкости, не оказывающей влияния на решение на некотором расстоянии от ударных волн. В 1950 г. фон Нейман и Рихтмайер предложили схему искусственной вязкости, в которой «коэффициент вязкости» был пропорционален квадрату градиента скорости. Ладфорд, Полячек и Зегер [1953] просто брали большие значения физической вязкости в уравнениях течения вязкой жидкости на лагранжевой сетке, однако в их методе требовались нереально высокие значения вязкости.

Для размазывания скачка вместо явного введения искусственной вязкости можно использовать и неявную вязкость, имеющую место в конечно-разностных аппроксимациях. Это было осуществлено в широко известном методе частиц в ячейках (методе PIC), разработанном в Лос-Аламосе Эванс, Харлоу и др.[1]), а также в методе Лакса (Лакс [1954]) и в других методах.

В работе Лакса, опубликованной в 1954 г., сама численная схема гораздо менее важна, чем использованная форма дифференциальных уравнений — консервативная форма. Лакс показал, что преобразованием обычных уравнений гидродинамики, в которых зависимыми переменными являются скорость, плотность и температура, можно получить систему уравнений, в которой в качестве зависимых переменных служат количество движения, плотность и удельная внутренняя энергия торможения. Эта новая система уравнений отражает сущность физических законов сохранения и позволяет сохранять интегральные характеристики течения в конечно-разностной схеме. Такая система уравнений широко используется в настоящее время для расчета распространения ударных волн независимо от применяемых конечно-разностных схем, поскольку скорость плоской ударной волны точно рассчитывается любой устойчивой схемой (см. Лонгли [1960] и Гари [1964]).

Размазывание ударной волны при помощи неявной схемной вязкости осуществляется и в некоторых других методах. Так, в настоящее время широко применяется схема Лакса — Вендроффа [1960] и ее двухшаговые варианты, например схема Рихтмайера (см. Рихтмайер [1963]). В методе PIC и в его модификации EIC (метод взрыва в ячейках), разработанной в 1964 г. Мадером, размазывание скачков достигается за счет введения конечного числа рассчитываемых частиц. Этот прием дает также возможность рассматривать поверхности раздела в жидкости (см. Харлоу и Уэлч [1965, 1966], а также Дали [1967]). В методе PIC, как и в более раннем методе Куранта — Изаксона — Риса [1952], используются односторонние разности для первых производных по пространству и таким образом вводится своего рода схемная вязкость (см. гл. 3), однако эти методы сохраняют истинные характеристические свойства дифференциальных уравнений. Хотя во всех этих методах неявно используются диссипативные члены, размазывающие ударные волны, для обеспечения устойчивости каждого из них в некоторых частных случаях требуется введение дополнительных членов с явной искусственной вязкостью.

---

[1]) См. Эванс и Харлоу [1957—1959], Харлоу с соавторами [1959], Эванс с соавторами [1962] и Харлоу [1963].

В противоположность подходу с размазыванием скачка на несколько расчетных ячеек можно, наоборот, выделять разрыв. Моретти, Аббетт и Блейх (Моретти и Аббетт [1966], Моретти и Блейх [1967]) проводили расчеты сверхзвуковых течений невязкого газа, выделяя ударные волны; этот подход стал очень популярен в начале семидесятых годов.

Прекрасное широкое обсуждение нелинейных численных методов можно найти в книгах Эймса [1965, 1969]. Для изучения математических аспектов численного исследования параболических и гиперболических систем, включая задачи, связанные с ударными волнами и диффузией нейтронов, можно рекомендовать книги Рихтмайера [1957], Рихтмайера и Мортона [1967]. Строгий математический курс Форсайта и Вазова [1960] рекомендуется для ознакомления с численными решениями эллиптических уравнений. В готовящейся к выходу в издательстве Academic Press книге Моретти можно будет найти детальное изложение метода выделения скачков.

## 1.3. Существование и единственность решений

Математические проблемы существования и единственности решений уравнений в частных производных, описывающих течения жидкости, далеки от своего завершения как для самих дифференциальных уравнений, так и для их конечно-разностных аналогов. В 1961 г. появилась монография Ладыженской, посвященная этим проблемам для стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости; изложение существа ее работы дано Эймсом [1965]. Основываясь на сравнении задачи о течении несжимаемой жидкости, описываемом уравнениями Навье — Стокса, с другими задачами, Эймс (с. 480) предполагает, что единственное стационарное решение существует только ниже некоторого неизвестного предельного значения числа Рейнольдса, выше этого значения в некотором интервале чисел Re существует несколько решений и, наконец, выше некоторого другого, также неизвестного, значения числа Рейнольдса решений вообще не существует. (Однако Эймс также задается правомерным вопросом, справедливы ли сами стационарные уравнения Навье — Стокса для чисел Рейнольдса, превышающих некоторое значение, при котором возникает турбулентность.) При конечно-разностном решении этой задачи положение может еще более усложняться из-за неясности граничных условий.

Для задачи о течении сжимаемой жидкости, описываемом чисто гиперболическими уравнениями (сверхзвуковое течение), существование решения для предельного невязкого случая легко доказывается. Фой [1964] показал, что если для невязкого газа два произвольных состояния могут быть связаны достаточно

слабым скачком, то для вязкого газа существует непрерывное решение. Представляется, что для более общих случаев и для задач о течении смешанного типа ничего действительно полезного относительно существования решения пока не установлено [1]).

Существование решения представляет собой в некотором смысле меньшую проблему в том случае, когда расчеты ведутся по нестационарным уравнениям, а этот подход оказался, вообще говоря, наиболее успешным при решении полных уравнений для течения вязкой жидкости. Будучи уверенными в сираведливости нестационарных уравнений Навье — Стокса, мы склонны думать, что численное решение, нолученное по физически реальным начальным условиям, имеет определенную ценность. Если же стационарного решения не существует, то, проводя нестационарные конечно-разностные расчеты, мы можем убедиться в этом. Может случиться, однако, что непрерывное течение, которое неустойчиво по отношению к малым возмущениям, будет оставаться устойчивым при численном моделировании. Это может иметь место как при крупномасштабной неустойчивости (такой, как отрыв вихрей), так и нри мелкомасштабной турбулентности в сдвиговом слое. Кроме того, внесение в нолные уравнения Навье — Стокса приближенных допущений (например, линеаризации Буссинеска) лишает уверенности в существовании решения. Это особенно относится к тем случаям, когда приходится работать с непроверенными уравнениями состояния. Годунов и Семендяев [1962] показали, что при использовании определенного класса уравнений состояния численное решение газодинамических задач может быть неединственным.

Вопрос о единственности нолученного численного решения вызывает даже большее беспокойство просто потому, что существует много примеров (как физических, так и чисто математических) неединственности стационарных решений. Наиболее очевидным примером физической неединственности течений являются работа двухрежимных приборов струйной автоматики и две устойчивые ориентации вихревой нити при обтекании стенки с полусферической выемкой (Снедекер и Дональдсон [1966]). В этих случаях имеет место выбор между двумя зеркально-симметричными картинами.

Более важным примером неединственности является гистерезис при срыве потока на крыловом профиле — при одних и тех же граничных условиях на угле атаки, близком к возникновению срыва, получаются совершенно различные картины течения в зависимости от того, с какой стороны приближаться

[1]) Статьи с последними исследованиями по этому вопросу можно найти в журнале Archive for Rational Mechanics and Analysis, издаваемом Трусделлом и Серрином и публикуемом издательством Springer-Verlag.

к данному углу атаки — со стороны меньших (досрывных) или больших (послесрывных) значений. Мак-Глолин и Гребер [1967] приводят другие примеры неединственности отрывных течений. Пиачек [1968] расчетами получил неединственные стационарные картины для естественной конвекции вихря, для которых, вероятно, существуют физические аналоги. Автор настоящей книги численно получил примеры течений, похожих на сверхзвуковой диффузорный срыв (см. разд. 5.7.6). Эти расчеты дают пример неединственности численного решения, возникающей из-за численной постановки граничных условий, хотя при этом и существует физический аналог.

Эймс [1965] приводит пример квазилинейного эллиптического дифференциального уравнения, не обладающего единственностью решения. Другим простым математическим примером неединственности является классическая теория косого скачка уплотнения. При сверхзвуковом обтекании клина невязким газом существуют три решения кубического уравнения Томпсона (Anon [1953]). Одно из этих решений приводит к уменьшению энтропии и отбрасывается [1]), а из двух оставшихся решений «слабое» решение, как известно, отвечает физическому обтеканию клина, в то время как «сильное» решение отвечает задаче с отошедшей ударной волной.

При рассмотрении всех этих примеров естественно напрашивается следующий вопрос: к какому из решений должна сходиться численная схема, если она вообще сходится к какому-либо решению? На этот вопрос нельзя дать определенный ответ. Необходимо руководствоваться физическим опытом, т. е. экспериментом и интуицией, для проверки разумности получаемых решений. Появление более строгих критериев зависит от разработки более совершенной математической теории, которая появится в будущем.

## 1.4. Предварительные замечания об аппроксимации, сходимости и устойчивости решений

Математические основы вопросов сходимости и устойчивости численных схем хорошо развиты только для линейных систем. Результаты линейной теории используются в виде наводящих соображений для нелинейных задач, а их применимость проверяется затем численными экспериментами.

В основе конечно-разностной схемы лежит замена производных типа $\partial f/\partial x$ в дифференциальных уравнениях на разностные отношения типа $\Delta f/\Delta x$ в конечно-разностных уравнениях. Схо-

[1]) В конечно-разностном методе отбрасывание этого решения (скачка разрежения) может осуществляться автоматически (см. Лакс [1954]).

дящаяся конечно-разностная схема математически определяется как схема, дающая конечно-разностное решение, которое стремится к решению дифференциального уравнения при стремлении размера ячейки сетки к нулю.

Эта конценция более тонкая, чем может показаться с первого взгляда. Она является не просто перефразировкой ньютоновского определения производной; под пределом здесь понимается предел всего решения дифференциального уравнения, а не просто его отдельных членов (производных). Последнее свойство называется аппроксимацией (Лакс и Рихтмайер [1956]). Например, конечно-разностный аналог дифференциального уравнения может состоять из конечных разностей, каждая из которых аппроксимирует соответствующий член дифференциального уравнения, но в целом этот аналог может быть неустойчивым и, следовательно, не сходящимся. Кроме того, здесь не принимается во внимание проблема критерия практической сходимости.

О'Брайен, Хаймен и Каплан [1950], а также Эдди [1949] определяют устойчивость исходя из роста или затухания ошибок округления. Лакс и Рихтмайер [1956] дают более общее определение устойчивости, устанавливая границу, до которой может возрастать любая компонента начальных данных в процессе численного расчета. Фундаментальную роль здесь играет теорема Лакса. Она устанавливает, что для системы линейных уравнений наличие устойчивости является необходимым и достаточным условием сходимости конечно-разностной схемы, аппроксимирующей систему дифференциальных уравнений.

Критерий устойчивости фон Неймана (Чарни с соавторами [1950], О'Браейн с соавторами [1950]) требует, чтобы наибольшее собственное значение матрицы перехода итерационной схемы было меньше, чем единица минус члены порядка ошибки аппроксимации. Лакс и Рихтмайер [1956] показали, что это условие является достаточным для устойчивости линейной системы с постоянными коэффициентами и что в случае, когда матрица перехода удовлетворяет одному из трех наборов свойств, выполнение этого критерия является достаточным также для сходимости. Эти и другие вопросы, связанные с устойчивостью, обсуждаются в разд. 3.1 и в монографии Рихтмайера и Мортона [1967].

Отметим здесь, что ни линейный анализ устойчивости, ни даже само ее определение не являются вполне удовлетворительными. Филлипс [1959] привел пример того, что он назвал нелинейной устойчивостью; она возникает из непостоянства коэффициентов уравнений (Лилли [1965]). Томмен [1966] показал, что при использовании двухшаговой схемы Лакса — Вендроффа или схемы Лакса — Вендроффа — Рихтмайера (Рихт-

майер [1963]) вблизи точки торможения потока развивается нелинейная неустойчивость. Эти примеры показывают, что исследование линейных уравнений и уравнений с постоянными коэффициентами недостаточно для установления неустойчивости.

Еще важнее то обстоятельство, что само определение устойчивости является неадекватным. Лилли [1965] показал, что применение схемы «чехарда» относительно средней точки к модельному уравнению приводит к осцилляциям, не имеющим ничего общего с правильным решением. Использованное при этом уравнение соответствовало уравнению переноса вихря в несжимаемой жидкости в предельном случае бесконечно большого числа Рейнольдса.

Автор настоящей книги установил, что и для малых чисел Рейнольдса при достижении стационарного состояния продолжают существовать осцилляции, хотя и меньшей амплитуды. Эти осцилляции нам хотелось бы назвать численной неустойчивостью, а между тем по общепринятым определениям, основанным на росте или ограниченности ошибки, эти результаты являются «устойчивыми». Кроме того, поскольку данные результаты не колеблются около правильного решения, мы не можем с уверенностью сказать, что правильное решение будет достигнуто при $\Delta x$, $\Delta t \to 0$. Все же мы знаем, что при уменьшении числа Рейнольдса мы приближаемся к правильному решению и, таким образом, при малых, но отличных от нуля числах Рейнольдса можно приблизиться к правильному решению «достаточно близко» для целей практики. Итак, результаты численного решения могут быть не сходящимися в математическом смысле, но сходящимися в практическом смысле.

Далее, в настоящее время ни в одном исследовании не учитывается влияние на решение математически не обоснованных граничных условий, которые используются в различных схемах на выходной границе. Эдди [1949], а несколько позднее и некоторые другие авторы рассмотрели влияние на устойчивость градиентных граничных условий. Очень часто дестабилизирующее влияние граничных условий имеет первостепенное значение.

Из сказанного выше ясно, что изящные математические исследования и определения устойчивости для численных схем не должны рассматриваться как окончательные результаты, а должны только служить разумной базой и наводящими соображениями для численного экспериментирования. В настоящей книге будет проводиться именно такая точка зрения.

# Глава 2

# УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В этой главе рассматриваются уравнения, которые используются при решении задач о плоском течении несжимаемой жидкости в прямоугольной системе координат. Сначала выписываются уравнения движения для простейших физических переменных (составляющие скорости и давление), а затем выводятся уравнения для вихря и функции тока. Далее дается консервативная форма уравнения переноса вихря (хотя смысл этой формы становится ясным лишь в следующей главе) и обсуждаются различные системы уравнений в безразмерных переменных. В заключение приводятся два одномерных модельных уравнения переноса вихря: уравнение Бюргерса и линеаризованное одномерное уравнение, включающее конвективный и диффузионный члены.

## 2.1. Уравнения движения для физических переменных

Основными уравнениями, описывающими плоское течение несжимаемой ньютоновой вязкой жидкости с постоянными свойствами при отсутствии внешних сил, являются два уравнения количества движения (уравнения Навье — Стокса) и уравнение неразрывности (см., например, Ламб [1945] или Шлихтинг [[1968]]), имеющие следующий вид:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \bar{\nu}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right), \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} + \bar{\nu}\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right), \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \tag{2.3}$$

(черточки над буквами означают, что соответствующие величины являются размерными). Уравнения записаны для физических переменных — составляющих скорости $\bar{u}$, $\bar{v}$ и давления $\bar{P}$; свойства жидкости характеризуются плотностью $\bar{\rho}$ и кинематическим коэффициентом вязкости $\bar{\nu}$. Эти уравнения основаны на

следующих физических законах: уравнения (2.1) и (2.2) являются проекциями векторного уравнения количества движения $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ (второго закона Ньютона), причем вязкие силы связаны со скоростью деформаций линейным ньютоновым законом для касательных напряжений, а уравнение (2.3) выражает закон сохранения массы. Приведенные уравнения записаны в эйлеровой системе координат, т. е. в неподвижной системе, относительно которой движется жидкость. (Иное — лагранжево — описание, в котором система координат движется вместе с жидкостью, не используется в этой книге, хотя некоторые замечания о лагранжевом подходе и будут сделаны в гл. 6.) Несмотря на то что можно численно решать непосредственно эти уравнения (см. разд. 3.7), лучшие результаты получаются при численном решении уравнений для вихря и функции тока. Преимущества и недостатки использования уравнения для вихря и функции тока будут обсуждаться в следующем разделе, а здесь мы отметим лишь методологическое примущество этого подхода, заключающееся в том, что при нем нужно рассматривать только одно уравнение переноса.

## 2.2. Уравнение переноса вихря и уравнение для функции тока в случае плоских течений

Из уравнений (2.1) и (2.2) можно исключить давление, продифференцировав первое из них по $y$, а второе по $x$. Определяя вихрь как [1])

$$\bar{\zeta} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}, \tag{2.4}$$

получаем уравнение переноса вихря, имеющее параболический тип:

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{t}} = -\bar{u}\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{x}} - \bar{v}\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{y}} + \bar{\nu}\left(\frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial \bar{y}^2}\right) = -\bar{\mathbf{V}} \cdot (\bar{\nabla}\bar{\zeta}) + \bar{\nu}\bar{\nabla}^2\bar{\zeta}. \tag{2.5}$$

Используя субстанциональную производную, это уравнение можно представить так:

$$\frac{D\bar{\zeta}}{D\bar{t}} = \bar{\nu}\bar{\nabla}^2\bar{\zeta}. \tag{2.6}$$

Определяя функцию тока $\bar{\psi}$ соотношениями

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} = \bar{u}, \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} = -\bar{v}, \tag{2.7}$$

[1]) В трехмерном случае вихрь обычно определяется как $\bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{V}}$, что при переходе к двумерному случаю дает выражение, отличающееся от приведенного ниже определения знаком.

уравнение (2.4) можно записать как уравнение Пуассона, имеющее эллиптический тип:

$$\bar{\nabla}^2\bar{\psi} = \bar{\zeta}. \tag{2.8}$$

В уравнение переноса вихря (2.5) входит нестационарный член $\partial\bar{\zeta}/\partial\bar{t}$, конвективные[1]) члены $\bar{u}\partial\bar{\zeta}/\partial\bar{x}$ и $\bar{v}\partial\bar{\zeta}/\partial\bar{y}$, а также член $\bar{\nu}\bar{\nabla}^2\bar{\zeta}$, связанный с вязкой диффузией. Это уравнение нелинейно из-за конвективных членов, так как в силу (2.7) и (2.8) $\bar{u}$ и $\bar{v}$ представляют собой функции зависимого переменного $\bar{\zeta}$. Оно является параболическим по времени, и поэтому для него ставится задача с начальными условиями, в которой решение «продвигается» шаг за шагом от некоторых начальных данных.

Уравнение (2.8) для функции тока является эллиптическим, поэтому для него ставится задача с граничными условиями, которая обычно решается итерационными методами. Во многих практических задачах интересуются не поведением решения во времени, а только стационарным решением; в этом случае в левой части уравнения (2.5) можно положить $\partial\bar{\zeta}/\partial\bar{t} = 0$, исключив таким образом одну независимую переменную — время. Как правило, так и делают при аналитических исследованиях; поэтому те, кто не имел дело с вычислительной гидродинамикой, обычно удивляются, обнаружив, что большинство (хотя и не все) эффективных численных методов решения даже стационарных задач гидродинамики основывается на интегрировании нестационарных уравнений, а стационарное решение (если оно существует) получается как асимптотический по времени предел решения нестационарных уравнений.

Стоит также заметить, что уравнение переноса вихря (2.5) служит для модельного описания многих других процессов переноса и что методы, излагаемые в следующей главе, часто применимы к самым разнообразным процессам переноса, включая случай течения сжимаемой жидкости, который будет рассмотрен в гл. 4[2]). Уравнения движения сжимаемой жидкости

[1]) Автор называет такие члены адвективными (advective) и поясняет это следующим образом: «Термины «конвективный» и «адвективный» практически являются синонимами (конвекция означает, что вихрь переносится по течению, а адвекция — что он движется вместе с жидкостью). Первым из них, как правило, пользуются инженеры, вторым — метеорологи, которые резервируют термин «конвекция» для вертикальных движений атмосферы». Так как в нашей гидродинамической литературе термин «адвективный», насколько нам известно, не применяется, в переводе везде используется более привычный читателю термин «конвективный». — *Прим. ред.*

[2]) Весьма систематическое описание общих процессов переноса дается в статье Фалфорда и Пея [1969]. Общность понятий убедительно иллюстрируется тем фактом, что уравнения движения сжимаемой жидкости могут быть использованы для моделирования задач о движении транспорта на автостраде.

гораздо сложнее уравнения переноса вихря, но связаны с ним в такой мере, что изучение более простого уравнения переноса вихря несомненно оказывается полезным для исследования уравнения движения сжимаемой жидкости.

Математики обычно довольствуются классификацией (линейных) дифференциальных уравнений в частных производных по следующим типам: параболические, эллиптические или гиперболические. При такой классификации не делается различия между уравнением (2.5) переноса вихря и уравнением диффузии $\partial\bar{\zeta}/\partial\bar{t} = \bar{a}\partial^2\bar{\zeta}/\partial\bar{x}^2$, однако, как мы увидим ниже, наличие в уравнении (2.5) производной первого порядка (конвективного члена) делает его качественно отличным от уравнения диффузии, причем при численном решении конвективный член играет важную роль. К сожалению, для двух указанных членов наиболее эффективными могут оказаться различные численные схемы.

## 2.3. Консервативная форма уравнений

Уравнение неразрывности (2.3)

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}} = 0$$

можно записать через вектор полной скорости $\bar{\mathbf{V}}$ в следующем виде:

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{\mathbf{V}} = 0. \tag{2.9}$$

Рассмотрим $\bar{\nabla}\cdot(\bar{\mathbf{V}},\bar{\zeta})$. В векторной алгебре известно тождество

$$\bar{\nabla}\cdot(\bar{\mathbf{V}}\bar{\zeta}) = \bar{\mathbf{V}}\cdot(\bar{\nabla}\bar{\zeta}) + \bar{\zeta}(\bar{\nabla}\cdot\bar{\mathbf{V}}) = \bar{\mathbf{V}}\cdot(\bar{\nabla}\bar{\zeta}).$$

Таким образом, для того чтобы получить консервативную форму уравнения переноса вихря, в уравнении (2.5) надо заменить $\bar{\mathbf{V}}\cdot(\bar{\nabla}\bar{\zeta})$ на $\bar{\nabla}\cdot(\bar{\mathbf{V}}\bar{\zeta})$, что дает

$$\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{t}} = -\bar{\nabla}\cdot(\bar{\mathbf{V}}\bar{\zeta}) + \bar{\nu}\bar{\nabla}^2\bar{\zeta} = -\frac{\partial(\bar{u}\bar{\zeta})}{\partial\bar{x}} - \frac{\partial(\bar{v}\bar{\zeta})}{\partial\bar{y}} + \bar{\nu}\left(\frac{\partial^2\bar{\zeta}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{\zeta}}{\partial\bar{y}^2}\right). \tag{2.10}$$

Смысл и преимущество использования такой «консервативной» или «дивергентной» формы уравнений будут обсуждаться в разд. 3.1.3.

## 2.4. Уравнения в безразмерных переменных

Система уравнений в безразмерных переменных, используемая в этой книге, всюду основывается на конвективном масштабе времени $\bar{L}/\bar{U}_0$, где $\bar{L}$ — характерная длина, а $\bar{U}_0$ — характерная скорость задачи; например, если $\bar{L}$ — длина хорды кры-

лового профиля и $\bar{U}_0$ — скорость набегающего потока, то $\bar{L}/\bar{U}_0$ — время, за которое частица набегающего потока проходит весь профиль. Введем следующие безразмерные величины:

$$u=\frac{\bar{u}}{\bar{U}_0},\quad v=\frac{\bar{v}}{\bar{U}_0},\quad x=\frac{\bar{x}}{\bar{L}},\quad y=\frac{\bar{y}}{\bar{L}},\quad \zeta=\frac{\bar{\zeta}}{\bar{U}_0/\bar{L}},\quad t=\frac{\bar{t}}{\bar{L}/\bar{U}_0}; \tag{2.11}$$

тогда уравнения (2.10) и (2.8) примут вид

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\nabla\cdot(\mathbf{V}\zeta)+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\zeta, \tag{2.12}$$

$$\nabla^2\psi=\zeta, \tag{2.13}$$

где Re — безразмерный параметр, число Рейнольдса,

$$\mathrm{Re}=\bar{U}_0\bar{L}/\bar{\nu}. \tag{2.14}$$

Таким образом, для любого заданного набора граничных условий течение характеризуется одним безразмерным параметром — числом Рейнольдса.

Для течений с большими числами Рейнольдса ($\mathrm{Re}\gg 1$) конвективный член в уравнении (2.12) превалирует над членом вязкой диффузии, и в этом случае величина $\bar{L}/\bar{U}_0$ будет представлять собой интервал времени, фактически характеризующий течение. Тогда, например, условие для безразмерного времени $t=\bar{t}/(\bar{L}/\bar{U}_0)\gg$ будет подходящим критерием для достижения стационарного состояния течения. Однако течения с малыми числами Рейнольдса ($\mathrm{Re}\ll 1$) лучше характеризуются безразмерным «диффузионным» временем. Определяя такое безразмерное время как

$$t'=\bar{t}\bar{\nu}/\bar{L}^2, \tag{2.15}$$

а другие безразмерные величины так же, как в (2.11), получаем для функции тока то же самое уравнение Пуассона (2.13), но уравнение переноса вихря при этом принимает вид

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t'}=-\mathrm{Re}\,\nabla\cdot(\mathbf{V}\zeta)+\nabla^2\zeta. \tag{2.16}$$

Величина $\bar{L}^2/\bar{\nu}$, очевидно, имеет размерность времени. Для того чтобы оценить ее физическую значимость как масштаба времени в задачах с преобладающей диффузией, достаточно заметить, что в пределе при $\mathrm{Re}\to 0$ уравнение (2.12) становится сингулярным, тогда как уравнение (2.16) ведет себя при этом хорошо, а конвективный член исчезает. Аналогично, уравнение (2.12) не имеет особенности при $\mathrm{Re}\to\infty$, но при этом исчезает диффузионный член [1]). Для течений с большими, но конечными, или с

[1]) Этот предел не даст корректного численного решения для невязкого или потенциального течения, если граничные условия не будут тоже приведены в соответствие невязкому течению.

малыми, но отличными от нуля, числами Рейнольдса применение соответствующих масштабов времени будет уменьшать ошибки округления, которые могут оказаться существенными при расчетах на некоторых вычислительных машинах. Использование уравнения (2.12), основанного на конвективном масштабе времени, имеет также то преимущество, что радиус-вектор частицы (лагранжева координата) $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_0 + \int \bar{\mathbf{V}}\, d\bar{t}$ сохраняет при этом свою форму в безразмерных переменных, т. е. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int \mathbf{V}\, dt$.

Для уравнений, описывающих другие течения жидкости, более подходящими могут оказаться другие масштабы времени. Например, в задаче об устойчивости естественной конвекции У. Кроули [1968] вводит четыре характерных времени, связанные с диффузией, конвекцией, средним градиентом вихря и архимедовой силой. Однако для наших целей будет достаточным уравнение (2.12), основанное на конвективном масштабе времени.

*Упражнение.* Записать в безразмерном виде уравнения (2.1) и (2.2), используя конвективный масштаб времени и вводя безразмерные скорости и расстояния так же, как в равенствах (2.11). Отнести при этом давление к удвоенному «динамическому напору», т. е. положить $P = \bar{P} / (\bar{\rho} \bar{U}_0^2)$.

*Упражнение.* Записать уравнение (2.1) в консервативной форме, т. е. преобразовать конвективный член $\bar{V} \cdot (\bar{\nabla} \bar{u})$ к дивергентной форме $\bar{\nabla} \cdot (\bar{\mathbf{V}} \bar{u})$.

## 2.5. Одномерные модельные уравнения переноса

Уравнение переноса вихря как в неконсервативной, так и в консервативной форме (2.12) является параболическим по времени, содержит две независимые пространственные переменные и связано с эллиптическим уравнением Пуассона для функции тока (2.13) через нелинейные конвективные члены. Исследование устойчивости конечно-разностных аналогов этих уравнений, в котором принимались бы во внимание все перечисленные выше свойства уравнений, до сих пор не проводилось. Тем не менее можно изучить многие аспекты поведения уравнения переноса вихря и выявить существенные черты многих конечно-разностных схем, рассматривая любое из двух одномерных модельных уравнений переноса, приведенных ниже.

Первым модельным уравнением переноса является линеаризованное одномерное уравнение с конвективным и диффузионным членами (Аллен [1968], У. Кроули [1968а]), записанное либо в консервативной форме

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial (u\zeta)}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \tag{2.17}$$

либо в неконсервативной форме

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \tag{2.18}$$

В этих уравнениях $\zeta$ моделирует вихрь или какую-либо другую конвективную и диффузионную величину [1]), $\alpha$ — обобщенный коэффициент диффузии, соответствующий величине 1/Re в уравнении переноса вихря, $u$ — линеаризованная скорость конвекции. Если не оговорено противное, то $u$ постоянна по $x$, хотя уравнение (2.17) может быть использовано и для изучения эффектов устойчивости в случае, когда $u = u(x)$.

Вторым модельным уравнением переноса является уравнение Бюргерса (Бюргерс [1948], Хопф [1950], Родин [1970])

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.19}$$

где $u$ рассматривается как обобщенная скорость. Это уравнение сохраняет нелинейность уравнения переноса вихря и уравнений Навье — Стокса. Благодаря своей нелинейности оно может служить модельным уравнением для изучения как турбулентности, так и ударных волн (см. разд. 4.7). На этом уравнении могут быть также исследованы различные конечно-разностные схемы (Рихтмайер [1963], Аллен и Чен [1970], Б. Кроули [1967], Фройдигер и др. [1967], Гринспэн [1967], Аллен [1968], Чен [1968], У. Кроули [1968а], Кофоэд-Хансен [1968]). Эквивалентная консервативная форма этого уравнения такова:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.20}$$

Поскольку известны некоторые аналитические решения уравнения Бюргерса, оно может служить для демонстрации преимуществ консервативной формы конечно-разностных уравнений.

Читатель должен помнить о том, что хотя изучение одномерных модельных уравнений удобнее и нагляднее, однако при этом накладываются значительные ограничения. Многие аспекты вычислительной гидродинамики *по существу* определяются размерностью, причем одно-, двух- и трехмерные задачи оказываются качественно различными. Эти вопросы будут обсуждаться в последующих главах.

---

[1]) Эти одномерные уравнения не являются уравнениями переноса вихря (в одномерном однородном потоке вихря не существует), но тем не менее моделируют некоторые аспекты многомерных уравнений. Физически эти уравнения описывают конвекцию и диффузию одной окрашенной жидкости в другой (например, чернил в воде) — в пятидесятых годах Лелевье называл уравнение (2.18) «цветовым уравнением» (см. У. Кроули [1968а]).

# Глава 3

# ОСНОВНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ДВИЖЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

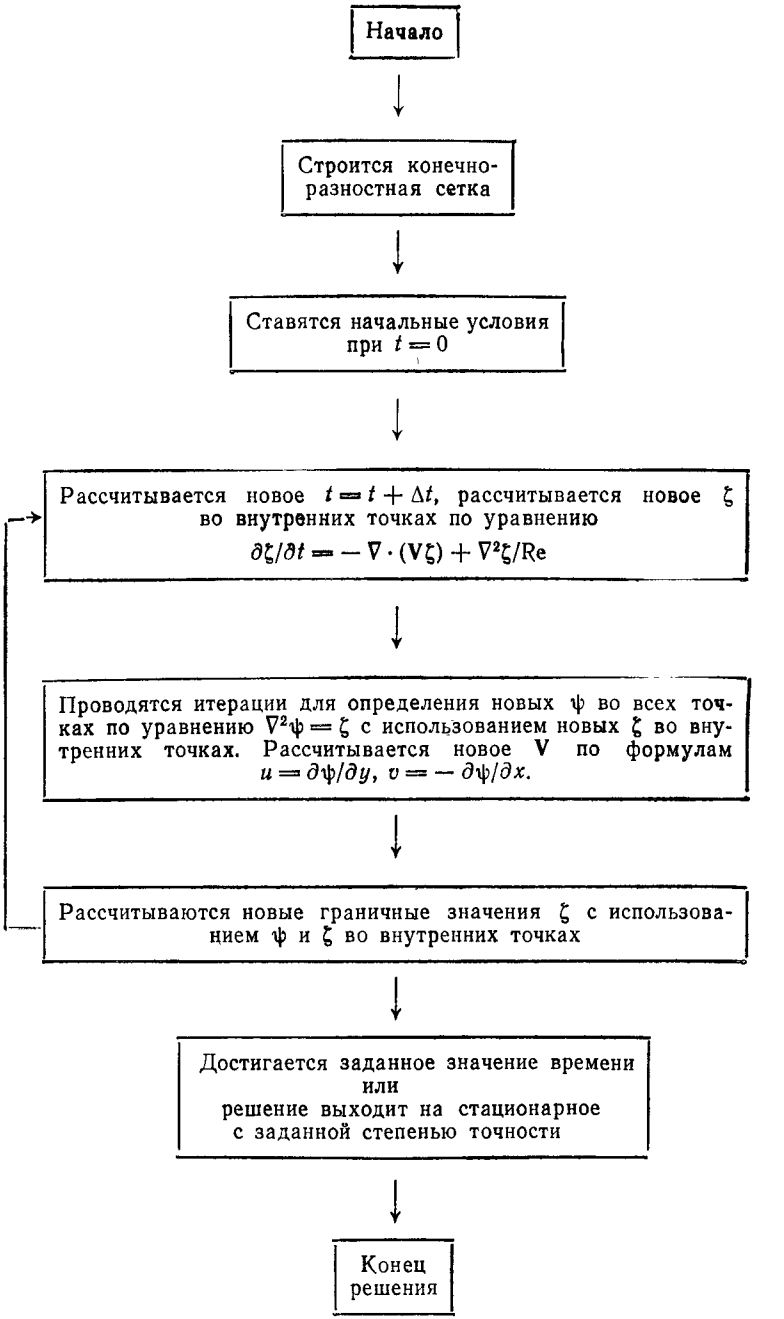
В этой главе рассматриваются основные численные методы решения задач о течении несжимаемой жидкости в области с регулярными границами, покрытой прямоугольной конечно-разностной сеткой. Многое из изложенного здесь будет применимо и в задачах о течении сжимаемой жидкости, поскольку для уравнений переноса в обоих случаях используются одни и те же модельные уравнения. Свойство консервативности и другие определенные здесь свойства, обсуждение роли граничных условий, а также исследование устойчивости и сходимости в равной мере относятся и к задачам о течении сжимаемой жидкости.

Прежде чем погрязнуть в изучении деталей, частных задач, вариантов и второстепенных вопросов, стоит, вероятно, описать в общих чертах всю процедуру решения полной задачи гидродинамики. Для конкретности мы опишем вычислительный цикл только для простейшего подхода, основанного на решении нестационарных уравнений.

Исследуемая область течения покрывается конечно-разностной сеткой. Конечно-разностное решение будет определяться в узлах сетки, лежащих на пересечении линий сетки.

Решение начинается с того, что во всех узлах сетки в момент времени $t = 0$ ставятся начальные условия для функций $\psi$, $\zeta$, $u$ и $v$. Эти начальные условия могут соответствовать некоторой реальной начальной ситуации (если речь идет о решении нестационарной задачи) или некоторому грубому приближению к стационарному решению (если речь идет только об установившемся режиме).

Далее начинается вычислительный цикл, когда для приближенного определения $\partial\zeta/\partial t$ во всех внутренних точках рассчитываемой области используется некоторый конечно-разностный аналог дифференциального уравнения переноса вихря (2.12). Новые значения $\zeta$ вычисляют на новом временно́м слое, соответствующем приращению времени $\Delta t$, продвигая уравнения переноса вихря по времени, например полагая (новое $\zeta$) = (старое $\zeta$) + $+ \Delta t \cdot \partial\zeta/\partial t$. Следующим шагом вычислительного цикла является


Начало
Строится конечно-разностная сетка
Ставятся начальные условия при $t = 0$
Рассчитывается новое $t = t + \Delta t$, рассчитывается новое $\zeta$ во внутренних точках по уравнению $\partial\zeta/\partial t = -\nabla\cdot(\mathbf{V}\zeta) + \nabla^2\zeta/\mathrm{Re}$
Проводятся итерации для определения новых $\psi$ во всех точках по уравнению $\nabla^2\psi = \zeta$ с использованием новых $\zeta$ во внутренних точках. Рассчитывается новое $\mathbf{V}$ по формулам $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$.
Рассчитываются новые граничные значения $\zeta$ с использованием $\psi$ и $\zeta$ во внутренних точках
Достигается заданное значение времени или решение выходит на стационарное с заданной степенью точности
Конец решения

решение конечно-разностного аналога уравнения Пуассона (2.13) для определения новых значений функции тока $\psi$, причем в «источниковом» члене уравнения (2.13) используются новые значения $\zeta$ во внутренних узлах сетки. Существенно, что уравнение Пуассона для новых $\psi$ не зависит от граничных условий для новых $\zeta$, которые пока еще не известны. Обычно решение для новых $\psi$ получается итерационным путем, так что итерационный процесс для нахождения $\psi$ включается в общий вычислительный цикл. Теперь, используя конечно-разностный аналог уравнений (2.7) в безразмерных переменных, находим новые составляющие скорости. Последний шаг вычислительного цикла состоит в расчете новых значений на границах рассматриваемой области. Обычно эти новые граничные значения $\zeta$ зависят от новых (уже вычисленных) значений $\psi$ и $\zeta$ во внутренних точках области, расположенных вблизи ее границы. Затем вычислительный цикл повторяется до тех пор, пока не будет достигнуто заданное значение времени или пока решение не выйдет на стационарное с заданной степенью точности.

Схематически данная процедура изображена на стр. 37. Для различных конкретных задач некоторые детали этой процедуры будут меняться, но основная схема остается неизменной.

## 3.1. Методы решения уравнения переноса вихря

Параболическое уравнение переноса вихря и эллиптическое уравнение Пуассона естественно рассматривать по отдельности, так как методы их решения, очевидно, различны. Однако сразу следует заметить, что при численном решении задачи гидродинамики фактически существует обратная связь между этими уравнениями. Например, в силу того что эти уравнения решаются циклически, увеличение допустимых временны́х шагов для уравнения переноса вихря должно быть компенсировано увеличением числа итераций при итерационном решении уравнения Пуассона. Неправильное обращение с граничными условиями в одном уравнении может привести к нарушению сходимости в другом.

Еще важнее то обстоятельство, что приходится явно искусственно отделять нахождение решения во внутренних точках от расчета граничных условий, так как обе эти процедуры должны выполняться совместно. Однако с чего-то же нужно начинать решение!

Окончательный выбор метода решения уравнения переноса вихря зависит от многих факторов[1]). Такой выбор не всегда

[1]) Таких, как граничные условия, геометрия задачи, тип искомого решения (стационарное или зависящее от времени), возможная необходимость расчета поля давления и температуры при решении нестационарной задачи, интервал изменения рассматриваемых параметров (в частности, числа Рейнольдса) и время, отведенное для разработки программы на ЭВМ.

очевиден, и читатель должен знать, что раз навсегда установленных рекомендаций по выбору лучшего метода не последует.

Цель этого раздела состоит не в том, чтобы дать некоторый ассортимент методов наподобие рецептов в поваренной книге. Она заключается в том, чтобы определить классы методов, изучить поведение таких классов и указать способы исследования этих методов, т. е. вообще в том, чтобы приучить читателя *вникать* в методы, а не бездумно их *программировать*.

## 3.1.1. Некоторые основные конечно-разностные формулы

### 3.1.1.а. Разложение в ряды Тейлора

Основные конечно-разностные формулы для частных производных могут быть получены при помощи разложения в ряды Тейлора. Используемая прямоугольная сетка показана на рис. 3.1. Нижние индексы $i$ и $j$ относятся к $x$ и $y$, а верхний

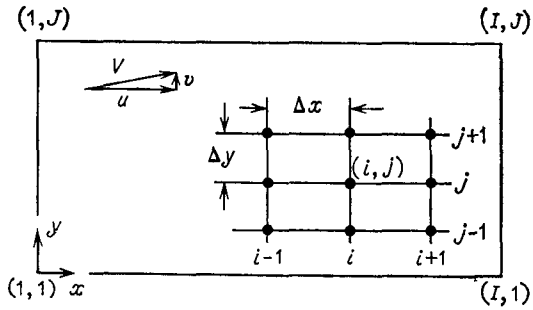



Рис. 3.1. Прямоугольная конечно-разностная сетка.

индекс $n$ соответствует временно́му слою. Шаги сетки в направлениях $i$ и $j$ обозначаются через $\Delta x$ и $\Delta y$ соответственно. (Для простоты до гл. 6 $\Delta x$ и $\Delta y$ считаются постоянными.) Переменная $f$ означает какую-либо функцию [1]).

Формы односторонних разностных представлений для первой производной $\partial f/\partial x$ можно вывести следующим образом. Мы предполагаем непрерывность производных и раскладываем $f_{i+1,\,j}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(i, j)$. Верхний индекс (временно́й) для простоты опускаем. Тогда

$$f_{i+1,\,j} = f_{i,\,j} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,\,j} (x_{i+1,\,j} - x_{i,\,j}) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,\,j} (x_{i+1,\,j} - x_{i,\,j})^2 + \ldots =$$

$$= f_{i,\,j} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,\,j} \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,\,j} \Delta x^2 + \text{ЧВП}, \quad (3.1)$$

где сокращение ЧВП означает члены высших порядков.

[1]) Мы используем одно и то же обозначение $f$ для непрерывной функции $f(x, y, t)$ и дискретной функции $f(i, j, n)$.

Разрешая (3.1) относительно $\partial f/\partial x$, получаем

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} - \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x + \text{ЧВП},$$

или

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x), \tag{3.2}$$

где запись $O(\Delta x)$ читается так: «член порядка $\Delta x$» и относится к членам, содержащим множители $\Delta x$, $\Delta x^2$ и т. д.

Обозначим конечно-разностный аналог $\partial f/\partial x$ через $\delta f/\delta x$. Тогда для $\delta f/\delta x$ при разностной аппроксимации вперед получаем выражение

$$\left.\frac{\delta f}{\delta x}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} \tag{3.3}$$

с ошибкой аппроксимации порядка $\Delta x$, т. е. с первым порядком точности.

Раскладывая $f_{i-1,j}$ в окрестности точки $(i, j)$, получаем для $\delta f/\delta x$ выражение при разностной аппроксимации назад:

$$\left.\frac{\delta f}{\delta x}\right|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x}, \tag{3.4}$$

которое также имеет первый порядок точности. Центральная (симметричная) разностная аппроксимация $\delta f/\delta x$ получается как разность разложений

$$f_{i+1,j} = f_{i,j} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \\ + \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{i,j} \Delta x^3 + \frac{1}{24}\left.\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right|_{i,j} \Delta x^4 + O(\Delta x^5) \tag{3.5}$$

и

$$f_{i-1,j} = f_{i,j} - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 - \\ - \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{i,j} \Delta x^3 + \frac{1}{24}\left.\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right|_{i,j} \Delta x^4 + O(\Delta x^5). \tag{3.6}$$

Вычитая (3.6) из (3.5), получаем

$$f_{i+1,j} - f_{i-1,j} = 2\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{3}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{i,j} \Delta x^3 + \text{ЧВП}.$$

Разрешая относительно $\partial f/\partial x$, имеем

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \text{ЧВП} = \\ = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \tag{3.7}$$

Таким образом, центральная разностная аппроксимация дает выражение

$$\left.\frac{\delta f}{\delta x}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} \tag{3.8}$$

с ошибкой аппроксимации порядка $\Delta x^2$, т. е. со вторым порядком точности. Аналогично можно получить выражения для производных по $y$ и $t$; например, центрально-разностный аналог $\partial f/\partial t$ имеет вид

$$\left.\frac{\delta f}{\delta t}\right|^{n}_{i,j} = \frac{f^{n+1}_{i,j} - f^{n-1}_{i,j}}{2\Delta t}. \tag{3.9}$$

Выведем теперь центрально-разностный аналог $\partial^2 f/\partial x^2$. Складывая (3.5) и (3.6), имеем

$$f_{i+1,j} + f_{i-1,j} = 2f_{i,j} + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{12}\left.\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right|_{i,j} \Delta x^4 + \text{ЧВП}. \tag{3.10}$$

Разрешая (3.10) относительно $\partial^2 f/\partial x^2$, получаем

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \tag{3.11}$$

Из (3.11) для $\delta^2 f/\delta x^2$ имеем

$$\left.\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{\Delta x^2} \tag{3.12}$$

со вторым порядком точности.

*Упражнение.* Вывести выражение (3.12), применяя формулу (3.8) к $g = \partial f/\partial x$. Использовать полушаги $\Delta x/2$, так что (3.8) примет вид

$$\left.\frac{\delta g}{\delta x}\right|_{i,j} = \frac{g_{i+1/2,j} - g_{i-1/2,j}}{\Delta x}. \tag{3.13}$$

*Упражнение.* Вывести разностный аналог $\delta^2 f/\delta x \delta y$ для смешанной производной $\partial^2 f/\partial x \partial y$:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x\, \delta y} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x\, \Delta y}. \tag{3.14}$$

Вывести (3.14) двумя способами: сначала применить (3.8) к $g = \delta f/\delta x$, а затем использовать разложение в ряд Тейлора по переменным $x$ и $y$. Заметим, что в первом способе при недостаточно аккуратном отбрасывании остаточных членов высшего порядка получается выражение только с первым порядком точности. Во втором способе при тщательном рассмотрении членов высшего порядка можно показать, что формула (3.14) имеет второй порядок точности с ошибкой аппроксимации $E = O(\Delta x^2 + \Delta y^2)$.

Заметим, что $\delta^2 f/\delta x \delta y$, определенное формулой (3.14), удовлетворяет правилу для непрерывных функций $\partial^2 f/\partial x \partial y =$

$= \partial^2 f/\partial y \partial x$. Всегда желательно, чтобы при прочих равных условиях наши конечно-разностные уравнения хорошо моделировали качественное поведение дифференциальных уравнений. Многие другие такие же случаи будут отмечены ниже.

Комбинации полученных конечно-разностных выражений для частных производных можно использовать для написания конечно-разностных формул дифференциальных *уравнений* в частных

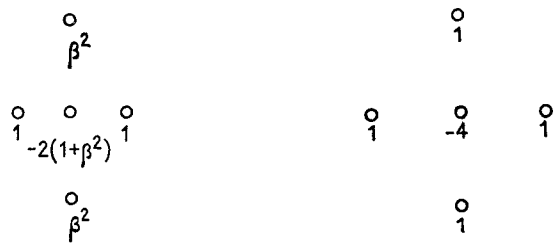



Рис. 3.2. Схематичное представление пятиточечного аналога уравнения Лапласа; $\beta = \Delta x/\Delta y$. Левая схема соответствует произвольному значению β, правая — $\beta = 1$.

производных. Например, уравнение Лапласа $\nabla^2 f = \partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 = 0$ будет иметь разностный аналог

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = \frac{f_{i+1,\,j} + f_{i-1,\,j} - 2f_{i,\,j}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,\,j+1} + f_{i,\,j-1} - 2f_{i,\,j}}{\Delta y^2} = 0,$$

или

$$f_{i+1,\,j} + f_{i-1,\,j} + \beta^2 (f_{i,\,j+1} + f_{i,\,j-1}) - 2(1+\beta^2) f_{i,\,j} = 0, \quad (3.15)$$

где β — отношение размеров шагов, $\beta = \Delta x/\Delta y$. Это так называемый пятиточечный аналог уравнения Лапласа. При $\beta = 1$ получается известное уравнение

$$f_{i,\,j} = \frac{1}{4}(f_{i+1,\,j} + f_{i-1,\,j} + f_{i,\,j+1} + f_{i,\,j-1}), \quad (3.16)$$

которое означает, что $f_{i,\,j}$ является средним значением $f$ в четырех соседних точках. Эти формулы схематично изображены на рис. 3.2.

Используя для аппроксимации пространственных производных и производной по времени разностные выражения второго порядка точности, линейное модельное уравнение (2.18) можно записать в виде

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^{n-1}}{2\Delta t} = -\frac{u\zeta_{i+1}^n - u\zeta_{i-1}^n}{2\,\Delta x} + \alpha \frac{\zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n - 2\zeta_i^n}{\Delta x^2}, \quad (3.17)$$

позволяющем явным образом выразить $\zeta_i^{n+1}$ через значения переменных на предыдущих временны́х слоях. Однако такая схема в действительности оказывается неприемлемой. Для всех $\alpha > 0$ и всех возможных $\Delta t > 0$ эта схема численно *неустойчива*, т. е. приводит к возникновению хаотических решений, не имеющих отношения к решению дифференциального уравнения. Такое поведение подчеркивает различие между точными конечно-разностными аналогами для *производных* и точным аналогом *дифференциального уравнения*.

Если вместо центральных разностей в нестационарном члене использовать разности вперед по времени, то получится разностный аналог линейного модельного уравнения, имеющий второй порядок точности по пространственной переменной и лишь первый по времени

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = -\frac{u\zeta_{i+1}^n - u\zeta_{i-1}^n}{2\Delta x} + \alpha \frac{\zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n - 2\zeta_i^n}{\Delta x^2}. \quad (3.18)$$

Эту схему с односторонними разностями вперед по времени и центральными (симметричными) разностями по пространственной переменной иногда называют схемой ВВЦП (схемой FTCS).

В дальнейшем будет показано, что эта схема *устойчива* (по крайней мере при некоторых условиях, наложенных на $\Delta t$, $u$, $\alpha$ и $\Delta x$). Но прежде чем приступить к исследованию устойчивости, рассмотрим некоторые другие вопросы, связанные с конечно-разностными уравнениями.

### 3.1.1.б. Основные конечно-разностные формулы; полиномиальная аппроксимация

Другой метод получения конечно-разностных выражений основан на применении аппроксимирующей аналитической функции со свободными параметрами, которая строится по значениям в узлах сетки и затем аналитически дифференцируется. Это обычный метод нахождения производных по экспериментальным данным. В идеале вид аппроксимирующей функции должен определяться приближенным аналитическим решением, однако обычно в качестве аппроксимирующих функций используются полиномы. Мы продемонстрируем настоящий метод на примере параболической аппроксимации.

Предположим, что значения функции $f$ заданы в точках $i-1$, $i$ и $i+1$, и проведем параболическую аппроксимацию функции

$$f(x) = a + bx + cx^2, \quad (3.19)$$

причем для удобства за начало координат ($x = 0$) примем точку $i$. Тогда уравнение (3.19), записанное в точках $i-1$, $i$ и $i+1$ соответственно, даст

$$f_{i-1} = a - b\Delta x + c\Delta x^2, \quad f_i = a, \quad f_{i+1} = a + b\Delta x + c\Delta x^2. \quad (3.20)$$

Складывая первое и последнее из этих равенств, получаем

$$c = \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{2\Delta x^2}, \quad (3.21)$$

а разрешая их относительно $b$, находим

$$b = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (3.22)$$

В точке $i$ значение первой производной (3.19) будет

$$\left.\frac{\delta f}{\delta x}\right|_i = [b + 2cx]_{x=0} = b, \quad (3.23)$$

а значение второй производной

$$\left.\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\right|_i = 2c. \quad (3.24)$$

Формулы (3.23) и (3.24) с учетом (3.21) и (3.22) в точности совпадают с формулами (3.8) и (3.12) второго порядка с центральными разностями, полученными разложением в ряд Тейлора. Если предположить, что $f$ — полином первой степени, т. е. $f = a + bx$, то в зависимости от того, какие значения используются для определения $a$ и $b$: значения $f_i$ и $f_{i+1}$ или $f_i$ и $f_{i-1}$, для $\delta f/\delta x$ получаются формулы с разностями вперед или назад соответственно. Очевидно, что при линейной аппроксимации $f$ нельзя получить выражение для $\delta^2 f/\delta x^2$. Однако если использовать полином первой степени для построения разностных аналогов первых производных $\left.\frac{\delta f}{\delta x}\right|_{i+1/2}$ и $\left.\frac{\delta f}{\delta x}\right|_{i-1/2}$, которые соответственно представляются разностями вперед и назад, то для $\delta^2 f/\delta x^2$ получится выражение, совпадающее с выражением (3.12) с центральными разностями.

Разностные формулы для производных более высокого порядка выводятся с использованием полиномов высших порядков. Выражения, полученные при помощи полиномов порядков выше второго, уже не идентичны выражениям, полученным разложениями в ряды Тейлора, и в каждом случае ошибка аппроксимации должна проверяться при помощи разложения в ряд Тейлора. В вычислительной гидродинамике метод полиномиальной аппроксимации, как правило, применяется только для вычислений значений производных вблизи границ (см. разд. 3.3.2).

Теперь отметим недостатки полиномиальных аппроксимаций

высшего порядка, хорошо известные специалистам, обрабатывающим данные измерений. С увеличением порядка аппроксимации они становятся чувствительными к «шумам», т. е. к более или менее случайно распределенным малым ошибкам в данных. Так, полином шестой степени, график которого проходит через семь точек, точно расположенных на одной прямой, приводит к аппроксимации в виде прямой, изображенной на рис. 3.3, *а*. Однако при добавлении к аппроксимируемым значениям шумовых возмущений коэффициенты полинома будут уже

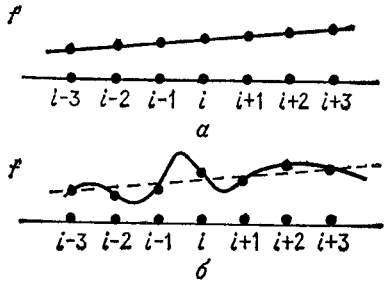



Рис. 3.3. Полиномиальная аппроксимация шестого порядка. *а* — алгебраические идеальные данные, *б* — данные с добавлением шумовых возмущений.

определяться этими искаженными данными, и тогда аналитическое вычисление производных в точке $i$ может привести к абсурдным результатам [1]), что можно усмотреть на рис. 3.3, *б*.

Квадратичная аппроксимация не может отразить наличие точки перегиба в рассматриваемых данных, т. е. точки, где $\partial^2 f/\partial x^2 = 0$. По этой причине для анализа имеющихся данных может быть оправдано использование полиномиальных аппроксимаций третьего порядка. (Часто используются сплайн-функции, гарантирующие непрерывность производных при переходе от одной узловой точки к другой.) В нашем случае уравнения, описывающие рассматриваемое физическое явление, не зависят от наличия точки перегиба или от третьей производной, поэтому нет необходимости останавливаться на этом вопросе.

### 3.1.1.в. Основные конечно-разностные формулы; интегральный метод

В интегральном методе требуется приближенно удовлетворить основным уравнениям, записанным в интегральной, а не

[1]) Чувствительность полиномиальных аппроксимаций можно уменьшить, если для полинома $N$-го порядка взять данные в $3N$ или $4N$ точках. Коэффициенты полиномов в таких случаях находятся не алгебраически, а методом наименьших квадратов. Этот требующий много времени метод обычно не используется, за исключением некоторых случаев, связанных с рассмотрением граничных условий (см. разд. 5.7.6).

в дифференциальной форме. Здесь удобнее использовать для пространственной координаты нижний индекс $x$, а для времени верхний индекс $t$ вместо $i$ и $n$ соответственно. Запишем линейное модельное уравнение в консервативной форме:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial (u\zeta)}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \tag{3.25}$$

Проинтегрируем это уравнение по времени от $t$ до $t + \Delta t$ и по пространственной области $R$ от $x - \Delta x/2$ до $x + \Delta x/2$, как показано на рис. 3.4. Поскольку порядок интегрирования по $t$ и $x$

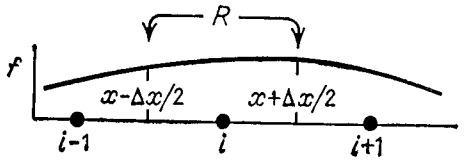



Рис. 3.4. Область интегрирования $R$ для интегрального метода.

несуществен, выберем его так, чтобы можно было провести одно точное интегрирование, а именно

$$\int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \left[ \int_{t}^{t+\Delta t} \frac{\partial \zeta}{\partial t}\, dt \right] dx = -\int_{t}^{t+\Delta t} \left[ \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \frac{\partial (u\zeta)}{\partial x}\, dx \right] dt + \alpha \int_{t}^{t+\Delta t} \left[ \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\, dx \right] dt. \tag{3.26}$$

Выполним интегрирование выражений, записанных в квадратных скобках:

$$\int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} [\zeta^{t+\Delta t} - \zeta^t]\, dx = -\int_{t}^{t+\Delta t} [(u\zeta)_{x+\Delta x/2} - (u\zeta)_{x-\Delta x/2}]\, dt + \alpha \int_{t}^{t+\Delta t} \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x/2} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\Big|_{x-\Delta x/2} \right] dt. \tag{3.27}$$

Оставшиеся интегралы определяются численно. По теореме о среднем можно записать

$$\int_{z_1}^{z_1+\Delta z} f(z)\, dz \approx f(\bar{z})\, \Delta z,$$

где $\bar{z} \in [z_1,\ z_1 + \Delta z]$. Сходимость гарантируется при $\Delta z \to 0$. Взяв при приближенном вычислении интегралов в левой части

уравнения (3.27) среднюю точку $x$, а в правой части значения подынтегральных функций при нижнем пределе, т. е. при $t$ (формула прямоугольников), получим

$$[\zeta_x^{t+\Delta t} - \zeta_x^t]\Delta x = -[(u\zeta)^t_{x+\Delta x/2} - (u\zeta)^t_{x-\Delta x/2}]\Delta t + \\ + \alpha\left[\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big|^t_{x+\Delta x/2} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big|^t_{x-\Delta x/2}\right]\Delta t. \quad (3.28)$$

Производные $\partial\zeta/\partial x$ можно найти из соотношения

$$\zeta^t_{x+\Delta x} = \zeta^t_x + \int\limits_x^{x+\Delta x} \frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big|^t dx.$$

Отсюда, используя теорему о среднем, получаем

$$\zeta^t_{x+\Delta x} = \zeta^t_x + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big|^t_{x+\Delta x/2}\Delta x,$$

или

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big|^t_{x+\Delta x/2} = \frac{\zeta^t_{x+\Delta x} - \zeta^t_x}{\Delta x}. \quad (3.29)$$

Значение $(u\zeta)^t_{x+\Delta x/2}$ можно вычислить как среднее арифметическое:

$$(u\zeta)^t_{x+\Delta x/2} = \frac{1}{2}[(u\zeta)^t_x + (u\zeta)^t_{x+\Delta x}]; \quad (3.30)$$

аналогичное выражение имеет место и для $(u\zeta)^t_{x-\Delta x/2}$.

Подставляя (3.29) и (3.30) в (3.28), находим

$$[\zeta_x^{t+\Delta t} - \zeta_x^t]\Delta x = -\left[\frac{1}{2}(u\zeta)^t_x + \frac{1}{2}(u\zeta)^t_{x+\Delta x} - \frac{1}{2}(u\zeta)^t_x - \frac{1}{2}(u\zeta)^t_{x-\Delta x}\right]\Delta t + \\ + \alpha\left[\frac{\zeta^t_{x+\Delta x} - \zeta^t_x}{\Delta x} - \frac{\zeta^t_x - \zeta^t_{x-\Delta x}}{\Delta x}\right]\Delta t.$$

Разделив последнее уравнение на $\Delta x\Delta t$, получим

$$\frac{\zeta_x^{t+\Delta t} - \zeta_x^t}{\Delta t} = -\frac{(u\zeta)^t_{x+\Delta x} - (u\zeta)^t_{x-\Delta x}}{2\Delta x} + \alpha\frac{\zeta^t_{x+\Delta x} + \zeta^t_{x-\Delta x} - 2\zeta^t_x}{\Delta x^2}. \quad (3.31)$$

Переходя к индексам $i$ и $n$, видим, что уравнение (3.31) совпадает с уравнением (3.18), выведенным при помощи разложений в ряды Тейлора. Очевидно, в любом методе существует большой произвол при выводе конечно-разностных уравнений. Если, например, интегрировать по времени не от $t$ до $t + \Delta t$, а от $t - \Delta t$ до $t + \Delta t$ и в качестве средней точки взять $t$, то получится уравнение (3.17). Как уже было отмечено выше, это уравнение безусловно неустойчиво.

Преимущество интегрального метода можно будет оценить после того, как будет изучено свойство консервативности. Различие между интегральным методом и методом разложения в ряды Тейлора наиболее четко проявляется при использовании непрямоугольных систем координат.

### 3.1.2. Метод контрольного объема

Метод контрольного объема для вывода конечно-разностных уравнений очень похож на интегральный метод, но более физичен по существу. Этот метод наиболее ярко освещает процесс «численного моделирования». Наилучшими примерами такого подхода могут служить широко известные метод частиц

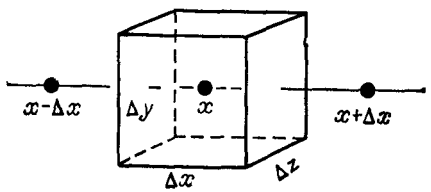



Рис. 3.5. Контрольный объем КО в точке $x$.

в ячейках (метод PIC) и метод жидкости в ячейках (метод FLIC), развитые в Лос-Аламосской лаборатории (Эванс и Харлоу [1947]; Джентри, Мартин и Дали [1966]); эти методы будут описаны ниже (см. разд. 5.5.3).

Выберем в пространстве контрольный объем с центром в точке $x$, как показано на рис. 3.5. В качестве значения $\zeta$ в узловой точке сетки будем брать среднее значение этой функции по контрольному объему (КО). Для *удельной* (т. е. осредненной по объему) величины $\zeta$, где $\zeta$ можно теперь рассматривать как любую переменную величину, запишем $\zeta = \Gamma/\text{объем}$.

Например, если $\zeta$ — плотность $\rho$, то $\Gamma$ — полная масса, заключенная в рассматриваемом контрольном объеме с центром в точке $x$. Если $\zeta$ — вихрь, то $\Gamma$ представляет собой циркуляцию (см. Ламб [1945]). Теперь запишем словесную формулировку следующего закона сохранения:

Полное приращение величины $\Gamma$ в КО = Чистый приток $\Gamma$ в КО за счет конвекции + Чистый приток $\Gamma$ в КО за счет диффузии. (3.32)

Полное приращение величины $\Gamma = \zeta \times (\text{объем})$ в КО за промежуток времени $\Delta t$ равно

$$\zeta\big|_x^{t+\Delta t} \times (\Delta x\, \Delta y\, \Delta z) - \zeta\big|_x^{t} \times (\Delta x\, \Delta y\, \Delta z).$$

Конвективный поток величины Г, втекающий в КО через левую грань за единицу времени, составляет

$$(u\zeta)_{x-\Delta x/2} \times (\text{площадь}) = (u\zeta)_{x-\Delta x/2}\,\Delta y\,\Delta z,$$

где $u$ может быть переменной, а значения функций на грани $x - \Delta x/2$, которые еще надо определить, должны быть некоторыми средними за $\Delta t$. Исходя из этой величины втекающего конвективного потока за единицу времени, полный конвективный поток величины Г в КО за промежуток времени $\Delta t$ через грань $x - \Delta x/2$ можно записать так:

$$(u\zeta)_{x-\Delta x/2}\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t.$$

Аналогично, полный конвективный поток Г, вытекающий из КО через $x + \Delta x/2$, будет равен

$$(u\zeta)_{x+\Delta x/2}\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t,$$

а чистый приток Г в КО получается как разность суммарного втекающего потока и суммарного вытекающего потока, т. е.

$$[(u\zeta)_{x-\Delta x/2} - (u\zeta)_{x+\Delta x/2}]\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t.$$

Чтобы вычислить поток в КО за счет диффузии, необходимо иметь закон для скорости диффузии. Простейший такой закон (согласующийся с уравнением переноса вихря) является линейным и гласит, что диффузионный поток величины $\zeta$ за единицу времени, который мы назовем $q$, пропорционален градиенту $\zeta$ (закон Фика):

$$q = -\alpha \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Здесь минус указывает на то, что увеличение $\zeta$ в направлении $x$ вызывает диффузию в противоположном направлении.

Диффузионный поток, втекающий в КО через левую грань за единицу времени, равен

$$q\Big|_{x-\Delta x/2}\,\Delta y\,\Delta z = -\alpha \frac{\partial \zeta}{\partial x}\Big|_{x-\Delta x/2}\,\Delta y\,\Delta z,$$

а вытекающий из КО через правую грань за единицу времени составляет

$$q\Big|_{x+\Delta x/2}\,\Delta y\,\Delta z = -\alpha \frac{\partial \zeta}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x/2}\,\Delta y\,\Delta z.$$

Здесь опять значения на гранях $x \pm \Delta x/2$ представляют собой некоторые средние за время $\Delta t$, которые еще должны быть определены. Величина потока в КО за счет диффузии за промежуток времени $\Delta t$ равна

$$\alpha\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t\left[\frac{\partial \zeta}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x/2} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\Big|_{x-\Delta x/2}\right].$$

Используя эти выражения, словесно сформулированный закон сохранения (3.32) для одномерного случая с конвекцией и диффузией можно записать следующим образом:

$$\zeta|_x^{t+\Delta t}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z-\zeta|_x^t\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z=(u\zeta|_{x-\Delta x/2}-u\zeta|_{x+\Delta x/2})\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t+$$
$$+\alpha\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t\left[\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x/2}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big|_{x-\Delta x/2}\right]. \quad (3.33)$$

Разделив на $\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$, получим

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\zeta|_x^{t+\Delta t}-\zeta|_x^t\right]=\frac{1}{\Delta x}\left[u\zeta|_{x-\Delta x/2}-u\zeta|_{x+\Delta x/2}\right]+$$
$$+\frac{\alpha}{\Delta x}\left[\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x/2}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big|_{x-\Delta x/2}\right]. \quad (3.34)$$

Как и в интегральном методе, при дальнейшем выводе конечно-разностных выражений появляется некоторая свобода действий при определении значений функций на гранях объема. В качестве значений на грани объема можно взять среднее арифметическое значение в соседних узлах в момент времени $n$; тогда

$$(u\zeta)_{x\pm\Delta x/2}=\frac{1}{2}\left[(u\zeta)^n_{x\pm\Delta x}+(u\zeta)^n_x\right]$$

и градиенты

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big|_{x\pm\Delta x/2}=\frac{\delta\zeta}{\delta x}\Big|^n_{x\pm\Delta x/2}$$

можно вычислить при помощи центральных разностей:

$$\frac{\delta\zeta}{\delta x}\Big|^n_{x+\Delta x/2}=\frac{\zeta|^n_{x+\Delta x}-\zeta|^n_x}{\Delta x}.$$

В результате уравнение (3.34) примет вид

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\zeta|_x^{t+\Delta t}-\zeta|_x^t\right]=\frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{1}{2}\left[(u\zeta)^t_x+(u\zeta)^t_{x-\Delta x}\right]-\frac{1}{2}\left[(u\zeta)^t_x+(u\zeta)^t_{x+\Delta x}\right]\right\}+$$
$$+\frac{\alpha}{\Delta x}\left[\frac{1}{\Delta x}\left(\zeta|^t_{x+\Delta x}-\zeta|^t_x\right)-\frac{1}{\Delta x}\left(\zeta|^t_x-\zeta|^t_{x-\Delta x}\right)\right],$$

или

$$\frac{\zeta^{t+\Delta t}_x-\zeta^t_x}{\Delta t}=-\frac{(u\zeta)^t_{x+\Delta x}-(u\zeta)^t_{x-\Delta x}}{2\,\Delta x}+\alpha\frac{\zeta^t_{x+\Delta x}+\zeta^t_{x-\Delta x}-2\zeta^t_x}{\Delta x^2}. \quad (3.35)$$

Если вернуться к индексам $i$ и $n$, то это уравнение совпадет с полученным ранее уравнением (3.18).

Таким образом видно, что все четыре метода вывода конечно-разностных аналогов дифференциальных уравнений в част-

ных производных — разложение в ряд Тейлора, метод полиномиальной аппроксимации, интегральный метод и метод контрольного объема — могут привести к одинаковым разностным выражениям. Это обнадеживает и укрепляет доверие ко всем этим методам. Но в каждом из них имеется некоторая свобода действий, так что выбор метода для вывода конечно-разностного аналога дифференциального уравнения определяет этот аналог не единственным образом. В самом деле, существует много используемых аналогов. Несмотря на то что большинство из них различается (как может показаться непосвященным) в незначительных деталях, они могут сильно отличаться по своему поведению. По личному мнению автора одним из удивительных аспектов вычислительной гидродинамики является наличие большого числа правдоподобных схем, которые, однако, не работают, как, например, было указано для уравнения (3.17). Это справедливо как для основных (т. е. предназначенных для расчета внутренних точек) разностных схем, так и для схем, предназначенных для расчета граничных точек.

Достоинство метода контрольного объема определяется не каким-либо его свойством, а тем, что он является наилучшим в некотором среднем смысле. Преимущество этого метода заключается в том, что он основан на макроскопических физических законах, а не на использовании математического аппарата непрерывных функций. Особенно важным это оказывается в тех случаях, когда имеют дело с разреженными газами или с течениями невязкого газа, в которых существуют ударные волны. В этих случаях дифференциальные уравнения не имеют всюду непрерывных решений, которые можно было бы в каждой точке представить рядами Тейлора. Однако масса, например, все же сохраняется, и конвективная часть уравнения (3.35) по-прежнему остается справедливой. Но даже и в тех случаях, когда непрерывные решения существуют, в методе контрольного объема внимание сосредоточивается на фактическом выполнении физических законов *макроскопически*, а не только в неком академическом пределе при $\Delta x$ и $\Delta t$, стремящихся к нулю. Это лежит в основе понятия консервативности конечно-разностного метода, к обсуждению которого мы переходим.

### 3.1.3. Свойство консервативности

Конечно-разностный метод является консервативным, если он обеспечивает выполнение определенных интегральных законов сохранения, справедливых для исходных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим уравнение переноса вихря (2.12), полагая $1/\mathrm{Re} = \alpha$,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{V}\zeta) + \alpha \nabla^2 \zeta. \tag{3.36}$$

Проинтегрируем это уравнение по некоторой пространственной области $R$:

$$\int\limits_R \frac{\partial \zeta}{\partial t}\, dR = -\int\limits_R \nabla \cdot (\mathbf{V}\zeta)\, dR + \int\limits_R \alpha \nabla^2 \zeta\, dR. \tag{3.37}$$

Так как $t$ не зависит от пространственных переменных, имеем

$$\int\limits_R \frac{\partial \zeta}{\partial t}\, dR = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_R \zeta\, dR. \tag{3.38}$$

Используя формулу Остроградского — Гаусса, получаем

$$\int\limits_R \nabla \cdot (\mathbf{V}\zeta)\, dR = \int\limits_{\partial R} (\mathbf{V}\zeta) \cdot \mathbf{n}\, ds, \tag{3.39}$$

где $\partial R$ — граница $R$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности (положительное направление соответствует внешней нормали) и $ds$ — дифференциал длины дуги границы $\partial R$. Аналогично, по той же формуле

$$\int\limits_R \alpha \nabla^2 \zeta\, dR = \alpha \int\limits_{\partial R} (\nabla \zeta) \cdot \mathbf{n}\, ds. \tag{3.40}$$

Тогда уравнение (3.37) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_R \zeta\, dR = -\int\limits_{\partial R} (\mathbf{V}\zeta) \cdot \mathbf{n}\, ds + \alpha \int\limits_{\partial R} (\nabla \zeta) \cdot \mathbf{n}\, ds. \tag{3.41}$$

Уравнение (3.41) констатирует, что скорость накопления величины $\zeta$ в области $R$ равна сумме конвективного и диффузионного притоков величины $\zeta$ в $R$ через $\partial R$ за единицу времени [1]). Требование консервативности заключается в тождественном сохранении в конечно-разностной схеме этого интегрального соотношения.

Простоты ради рассмотрим одномерное модельное уравнение для предельного случая невязкой жидкости ($\alpha = 0$), которое получается из уравнения (3.36) и имеет вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial (u\zeta)}{\partial x}. \tag{3.42}$$

[1]) Мы вывели (3.41) из (3.36), чтобы показать связь этих уравнений, но на самом деле уравнение (3.41) является более общим, чем (3.36). Например, если $\alpha = 0$, а $\zeta$ — массовая плотность, то оба эти уравнения представляют собой уравнение неразрывности, выражающее закон сохранения массы. Однако уравнение (3.41) остается справедливым даже в том случае, когда в некоторых внутренних точках области $R$ производные, входящие в (3.36), не существуют.

(Если, с другой стороны, величину $\zeta$ трактовать как массовую плотность, то уравнение (3.42) будет уравнением неразрывности для сжимаемой среды.) Используя разности вперед по времени и центральные разности по пространственной переменной, можно записать конечно-разностный аналог уравнения (3.42) в виде

$$\frac{\zeta_i^{n+1}-\zeta_i^n}{\Delta t}=-\frac{u_{i+1}\zeta_{i+1}-u_{i-1}\zeta_{i-1}}{2\,\Delta x} \tag{3.43}$$

(здесь для простоты верхний индекс $n$ опущен). Рассмотрим теперь одномерную область $R$ (причем $i$ меняется от $I_1$ до $I_2$) и вычислим сумму

$$\frac{1}{\Delta t}\sum_{i=I_1}^{I_2}\zeta_i\,\Delta x,$$

соответствующую интегралу $\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_R \zeta\,dR$ в уравнении (3.41):

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\sum_{i=I_1}^{I_2}\zeta_i^{n+1}\Delta x-\sum_{i=I_1}^{I_2}\zeta_i^n\,\Delta x\right]=\sum_{i=I_1}^{I_2}\left(-\frac{u_{i+1}\zeta_{i+1}-u_{i-1}\zeta_{i-1}}{2\,\Delta x}\right)\Delta x=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=I_1}^{I_2}[(u\zeta)_{i-1}-(u\zeta)_{i+1}]. \tag{3.44а}$$

Суммирование в правой части проводится следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=I_1}^{I_2}[(u\zeta)_{i-1}-(u\zeta)_{i+1}]=\\
&=+(u\zeta)_{I_1-1}\quad-(u\zeta)_{I_1+1}+\qquad\qquad\qquad\qquad[i=I_1]\\
&\quad+(u\zeta)_{I_1}\quad-(u\zeta)_{I_1+2}+\qquad\qquad\qquad[i=I_1+1]\\
&\quad+(u\zeta)_{I_1+1}\quad-(u\zeta)_{I_1+3}+\qquad\qquad[i=I_1+2]\\
&\quad+(u\zeta)_{I_1+2}\quad-(u\zeta)_{I_1+4}+\qquad[i=I_1+3]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\
&+(u\zeta)_{I_2-4}\quad-(u\zeta)_{I_2-2}+\qquad\qquad\qquad[i=I_2-3]\\
&\quad+(u\zeta)_{I_2-3}\quad-(u\zeta)_{I_2-1}+\qquad\qquad\qquad[i=I_2-2]\\
&\quad+(u\zeta)_{I_2-2}\quad-(u\zeta)_{I_2}\;+\qquad\qquad\qquad[i=I_2-1]\\
&\quad+(u\zeta)_{I_2-1}\quad-(u\zeta)_{I_2+1}=\qquad\qquad[i=I_2]\\
&=(u\zeta)_{I_1-1}+(u\zeta)_{I_1}-(u\zeta)_{I_2}-(u\zeta)_{I_2+1}.
\end{aligned} \tag{3.44б}$$

Тогда уравнение (3.44а) принимает вид

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\sum_{i=I_1}^{I_2}\zeta_i^{n+1}\Delta x-\sum_{i=I_1}^{I_2}\zeta_i^{n}\Delta x\right]=\frac{1}{2}[(u\zeta)_{I_1-1}+(u\zeta)_{I_1}]-\frac{1}{2}[(u\zeta)_{I_2}+(u\zeta)_{I_2+1}]=$$
$$=(u\zeta)_{I_1-1/2}-(u\zeta)_{I_2+1/2}. \qquad (3.44в)$$

Данное уравнение показывает, что скорость накопления величины $\zeta_i$ в области $R$ в точности равна [1]) потоку величины $\zeta$ в область $R$ через границы $I_1-{}^1/_2$ и $I_2+{}^1/_2$ (это следует также из уравнения (3.41) при $\alpha=0$). Таким образом, полученный конечно-разностный аналог сохраняет интегральное свойство, которое выражает формула Остроградского — Гаусса для дифференциального уравнения, и мы будем говорить, что этот аналог обладает свойством консервативности.

Свойство консервативности зависит как от используемой формы дифференциального уравнения, так и от принятой конечно-разностной схемы. Например, неконсервативная форма одномерного модельного уравнения (2.18) при $\alpha=0$ такова:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-u\frac{\partial\zeta}{\partial x}. \qquad (3.45)$$

Используя ту же схему, что и в предыдущем примере, т. е. разности вперед по времени и центральные разности по пространственной переменной, получаем

$$\frac{\zeta_i^{n+1}-\zeta_i^n}{\Delta t}=-u_i^n\frac{\zeta_{i+1}-\zeta_{i-1}}{2\Delta x}. \qquad (3.46)$$

Тогда суммы, соответствующие (3.44а), имеют вид

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\sum_{i=I_1}^{I_2}\zeta_i^{n+1}\Delta x-\sum_{i=I_1}^{I_2}\zeta_i^{n}\Delta x\right]=\sum_{i=I_1}^{I_2}\left(-u_i\frac{\zeta_{i+1}-\zeta_{i-1}}{2\Delta x}\right)\Delta x=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=I_1}^{I_2}u_i(\zeta_{i-1}-\zeta_{i+1}). \qquad (3.47а)$$

Снова суммируем:

$$\sum_{i=I_1}^{I_2}u_i(\zeta_{i-1}-\zeta_{i+1})=$$
$$=u_{I_1}\zeta_{I_1-1}\quad -u_{I_1}\zeta_{I_1+1}\quad +\qquad\qquad [i=I_1]$$
$$+u_{I_1+1}\zeta_{I_1}\quad -u_{I_1+1}\zeta_{I_1+2}+\qquad [i=I_1+1]$$
$$+u_{I_1+2}\zeta_{I_1+1}\quad -u_{I_1+2}\zeta_{I_1+3}+\qquad [i=I_1+2]$$
$$+u_{I_1+3}\zeta_{I_1+2}\quad -u_{I_1+3}\zeta_{I_1+4}+\qquad [i=I_1+3]$$
$$+\ \ldots\ . \qquad (3.47б)$$

[1]) Здесь имеется в виду алгебраическое равенство без учета ошибок округления на ЭВМ.

Отсюда видно, что при такой форме исходного дифференциального уравнения члены, соответствующие потокам через грани смежных ячеек, взаимно не уничтожаются, например

$$u_{I_1+2}\zeta_{I_1+1} - u_{I_1}\zeta_{I_1+1} = (u_{I_1+2} - u_{I_1})\,\zeta_{I_1+1} \neq 0, \qquad (3.47в)$$

за исключением частного случая, когда $u_i = \text{const}$. Значит, в этом случае конечно-разностный аналог оказывается не в состоянии обеспечить выполнение формулы Остроградского — Гаусса для дифференциального уравнения. Теперь становится ясным смысл терминов «консервативная» или «дивергентная» форма уравнения (2.10).

В первом случае консервативность обеспечивается применением метода контрольного объема при выводе конечно-разностных выражений. При использовании консервативной формы конвективный поток величины $\zeta$, вытекающий через грань $i + {}^1/_2$ из контрольного объема с центром в точке $i$ за единицу времени, составляет ${}^1/_2(u_i\zeta_i + u_{i+1}\zeta_{i+1})$ и в точности равен конвективному потоку, втекающему через ту же грань в контрольный объем с центром в точке $i + 1$ за единицу времени. Как показано выше, в случае неконсервативной формы это не имело бы места.

*Упражнение.* Показать, что использование для $\partial^2\zeta/\partial x^2$ выражения (3.12) с центральными разностями при $\alpha > 0$ обеспечивает консервативность для диффузионных членов.

Ясно, что при $\alpha > 0$ единственный путь обеспечить сохранение суммарного потока в общем случае (когда $u$ является функцией пространственной переменной) заключается в независимом сохранении *конвективных* и *диффузионных* членов; в неодномерном случае необходимо обеспечить консервативность этих членов отдельно *по каждой* пространственной переменной.

Важность свойства консервативности легко понять на примере уравнения неразрывности для сжимаемой среды. Рассмотрим задачу об естественной конвекции в полностью замкнутом сосуде с непроницаемыми стенками. В начальный момент времени считаем, что во всем объеме $\mathbf{V} = 0$. К нижней стенке сосуда подводится тепло, и происходит естественная конвекция, возможно достигающая стационарного состояния. Если для расчетов принимается какая-либо неконсервативная схема (см. задачу 3.2), то полная масса в исследуемом объеме будет меняться. Если же используется консервативная схема, то полная масса не будет меняться (без учета машинных ошибок округления). Некоторым утешением в первом случае может служить тот факт, что ошибки, вызванные нарушением сохранения

массы, уменьшаются при $\Delta x \to 0$, но в практических вычислениях с конечной величиной $\Delta x$ такое утешение является слабым. Эти соображения мы считаем существенными и настоятельно рекомендуем применять консервативные схемы. Однако здесь имеются доводы и за и против, причем примеры численных контрольных расчетов, опубликованные в литературе, не дают возможности сделать однозначный выбор. Обратимся к этим доводам и к результатам контрольных расчетов.

Свойство консервативности *не обязательно* связано с повышением точности схемы. Например, неустойчивые решения консервативных уравнений сохраняют свойство консервативности. Более того, неконсервативный метод может быть в некотором смысле точнее консервативного. Например, для представления функций по значениям в узлах сетки можно было бы применять одномерные аппроксимации полиномами высокого порядка и при этом производные по пространственным переменным будут, вероятно, определяться с ошибкой более высокого порядка (см. Томас [1954]). Однако построенная таким образом схема может быть неконсервативной, а если критерий точности включает условие консервативности, то неконсервативная схема окажется менее точной.

До сих пор опыт показывает, что консервативные схемы, вообще говоря, дают более точные результаты. Чен [1968] и Аллен [1968] показали, что с помощью консервативной схемы получаются существенно более точные результаты для некоторых решений уравнения Бюргерса (2.19) и (2.20). Сайрус и Фалтон [1967] выяснили, что для эллиптических уравнений консервативная схема дает более точные результаты, чем неконсервативная. На примере задачи о течении внутри замкнутой прямоугольной области с одной подвижной границей Торранс с соавторами [1972] убедились в том, что даже схема первого порядка точности для уравнений в консервативной форме дает более точные результаты, чем схема второго порядка для уравнений в неконсервативной форме. Преимущества расчета ударных волн при консервативной форме уравнений (Гари [1964]) хорошо известны (они будут рассматриваться в гл. 5), однако следует заметить, что в работе Гари волны разрежения несколько точнее рассчитывались по неконсервативной схеме. Кроме того, дивергентная форма уравнений более осмысленна физически и облегчает постановку граничных условий для течений сжимаемой жидкости.

Пиачек [1966] показал, как вывести консервативные уравнения в осесимметричном случае. Робертс и Вейс [1966] обсужда-

ли консервативность для векторных величин. Лакс [1954] первым использовал в конечно-разностных вычислениях консервативную форму уравнений движения сжимаемого газа, предложенную Курантом и Фридрихсом [1948], и детально исследовал свойство консервативности [1]).

Метеорологи распространили идею консервативности на величины, связанные с количеством движения. Брайен [1963, 1966] предложил схемы, обеспечивающие сохранение не только вихря, но и кинетической энергии. Схема Аракавы [1966] (см. также Лилли [1965] или Фромм [1967], а также разд. 3.1.2) сохраняет вихрь, квадрат вихря, количество движения и кинетическую энергию. Но такие дополнительные усложнения схем *не всегда* оправданы и выгодны. Бенгтсон [1964] показал, что подобные усложненные схемы дают небольшие улучшения, незначительные по отношению к истинным данным, и в то же время могут привести к бóльшим ошибкам в скорости волн. Однако в предельном невязком случае сохранение кинетической энергии дает возможность избежать «нелинейной» неустойчивости [2]), рассмотренной в работах Филлипса [1959] и Сандквиста [1963]. Бенгтсон [1964] предложил схему, сохраняющую разность между кинетической энергией и (метеорологической) полной статической устойчивостью [3]), что полезно в задачах с большими градиентами силы тяжести.

Обычно схемы, обеспечивающие сохранение основных величин, таких, как вихрь, масса, количество движения или полная энергия, не требуют большого труда. В двумерной задаче о переносе вихря дополнительная работа заключается в выполнении двух лишних конечно-разностных операций для получения составляющих скорости из решения для функции тока и двух лишних умножений. В задачах о движении сжимаемой среды дополнительная работа больше, что в некоторых случаях может оказаться причиной отказа от применения консервативной схемы (см. метод Моретти, гл. 6). При решении многих задач консер-

[1]) Для построения консервативных разностных схем А. Н. Тихонов и А. А. Самарский развили интегро-интерполяционный метод. Консервативные схемы разрабатывали эти авторы, Г. И. Марчук, И. В. Фрязинов и др.

Для одномерной нестационарной газовой динамики Ю. П. Попов и А. А. Самарский (Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, № 7) предложили полностью консервативные схемы. В схемах такого типа обеспечивается не только сохранение полной энергии, но и выполняются дополнительные балансы по отдельным видам энергии (внутренней и кинетической). — *Прим. ред.*

[2]) Обычно обусловленной непостоянством коэффициентов, а не настоящей нелинейностью.

[3]) Количественное понятие полной статической устойчивости (gross static stability) было введено Э. Лоренцем (Lorenz E. N. — Tellus, 1960, v. 12, No. 4, 364—373). — *Прим. перев.*

вативные схемы не использовались, см., например, работы Аллена и Саусвелла [1955], Хына и Макано [1966], Мета и Лавана [1968], Бао и Догерти [1969]. Заметим, что все схемы метода характеристик являются неконсервативными и что при конечно-разностном решении уравнений пограничного слоя консервативная схема обычно также не используется. В таких случаях свойство консервативности может служить для проверки точности вычислений (см. разд. 3.4).

Для того чтобы предостеречь от фетишизации консервативных схем, заметим в заключение, что неконсервативная форма для члена $\partial(\alpha\partial\zeta/\partial x)/\partial x$ с переменным коэффициентом диффузии может привести к более точным результатам, чем консервативная (см. задачи 3.3 и 3.4).

*Упражнение.* Показать, что первый момент уравнения переноса вихря в невязкой жидкости ($1/\mathrm{Re} = 0$), полученный умножением уравнения (2.12) на $\zeta$, можно записать в консервативной форме:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla\cdot(\mathbf{V}E),$$

где величина $E = \zeta^2$ называется энстрофией.

### 3.1.4. Описание неустойчивости

Для ознакомления с некоторыми феноменологическими аспектами численной неустойчивости рассмотрим одномерное модельное линейное уравнение для $\zeta$. На рис. 3.6, *а* показано стационарное решение $\hat{\zeta}^n$ на $n$-м временно́м слое, а на рис. 3.6, *б* — наложение на $\zeta^n$ возмущения $\varepsilon$, форма которого представлена на рис. 3.6, *в*. Такие возмущения могут порождаться либо машинными ошибками округления, либо поперечными движениями в реальной двумерной задаче. Используя схему с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной, проследим за развитием наложенного возмущения. Линейное модельное уравнение в консервативной форме имеет вид

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\frac{\partial(u\zeta)}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2},$$

а разностное — вид

$$\frac{\zeta_i^{n+1}-\zeta_i^n}{\Delta t} = -\frac{u\zeta_{i+1}^n - u\zeta_{i-1}^n}{2\Delta x} + \alpha\frac{\zeta_{i-1}^n + \zeta_{i-1}^n - 2\zeta_i^n}{\Delta x^2}. \qquad (3.48)$$

Представим величину $\zeta$ как сумму стационарной компоненты $\hat{\zeta}$ и возмущения $\varepsilon$:

$$\zeta_i^n = \hat{\zeta}_i^n + \varepsilon_i; \qquad (3.49)$$

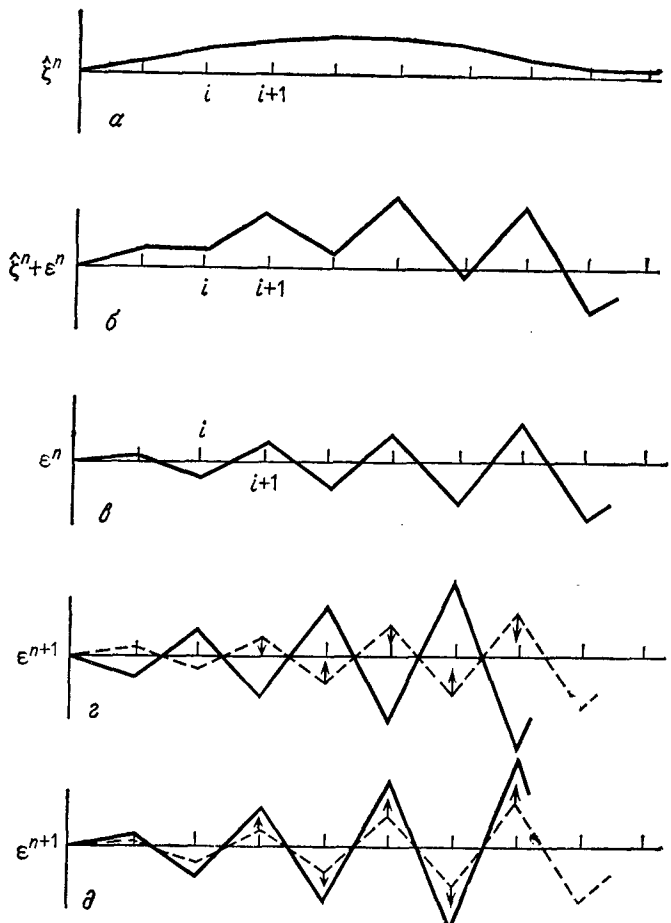



Рис. 3.6. Рост ошибки при использовании конечно-разностной схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной для модельного уравнения, описывающего конвекцию и диффузию. *а* — стационарное решение на $n$-м слое по времени; *б* — возмущенное решение на $n$-м слое; *в* — возмущение на $n$-м слое; *г* — колебательный рост ошибки, связанный с чрезмерно большим шагом $\Delta t$ (динамическая неустойчивость); *д* — монотонный рост ошибки, обусловленный применением центральных разностей для конвективного члена (статическая неустойчивость).

после этого уравнение (3.48) запишется так:

$$\frac{\zeta_i^{n+1}-\zeta_i^n}{\Delta t}=-\frac{u\hat{\zeta}_{i+1}^n-u\hat{\zeta}_{i-1}^n}{2\Delta x}+\alpha\frac{\hat{\zeta}_{i+1}^n+\hat{\zeta}_{i-1}^n-2\hat{\zeta}_i^n}{\Delta x^2}-$$
$$-\frac{ue_{i+1}-ue_{i-1}}{2\Delta x}+\alpha\frac{e_{i+1}+e_{i-1}-2e_i}{\Delta x^2}. \qquad (3.50)$$

Сумма первых двух членов в правой части уравнения (3.50) представляет собой конечно-разностное значение $(\partial\hat{\zeta}/\partial t)_i^n$, равное нулю в силу предположения, что на $n$-м временно́м слое существует стационарное решение. Тогда уравнение (3.50) сводится к следующему:

$$\zeta_i^{n+1}-\zeta_i^n\equiv\Delta\zeta_i=-\Delta t\frac{ue_{i+1}+ue_{i-1}}{2\Delta x}+\alpha\Delta t\frac{e_{i+1}+e_{i-1}-2e_i}{\Delta x^2}. \qquad (3.51)$$

Первый член в правой части уравнения (3.51) дает изменение $\zeta$, обусловленное конвекцией [1]), а второй — обусловленное диффузией.

Рассмотрим уравнение (3.51) только с одним диффузионным членом и оценим его в точке $i$. Поскольку $e_{i+1}>0$, $e_i<0$ и $e_{i-1}>0$, имеем

$$\Delta\zeta_i=\alpha\Delta t\frac{e_{i+1}+e_{i-1}-2e_i}{\Delta x^2}>0. \qquad (3.52)$$

Значит, для всех $\Delta t>0$ приращение $\Delta\zeta_i$ положительно и стремится корректировать отрицательное возмущение $e_i$.

Аналогично, рассматривая $\Delta\zeta$ в точке $i+1$, имеем $e_{i+2}<0$, $e_i<0$, $e_{i+1}>0$; поэтому

$$\Delta\zeta_{i+1}=\alpha\Delta t\frac{e_{i+2}+e_i-2e_{i+1}}{\Delta x^2}<0, \qquad (3.53)$$

т. е. положительное возмущение $e_{i+1}$ корректируется отрицательным приращением $\Delta\zeta_{i+1}$.

Заметим, что приращение $\Delta\zeta_i=\zeta_i^{n+1}-\zeta_i^n$ (а также $\Delta\zeta_{i+1}$ и т. д.) пропорционально шагу $\Delta t$. Если шаг $\Delta t$ слишком велик, то поправка за счет приращения $\Delta\zeta_i$ окажется чрезмерной. Для

[1]) При обсуждении проблемы устойчивости нелинейных уравнений переноса вихря и уравнений гидродинамики в физических переменных конвективный член обычно называют нелинейным членом. Но это название не отражает существа дела. В общем случае проблема устойчивости возникает не из-за нелинейности уравнений и даже не из-за переменности их коэффициентов. Это показывают все рассматриваемые здесь задачи, в которых $\zeta$ интерпретируется как температура в движущейся несжимаемой жидкости, а $u$ считается постоянной во времени и, может быть, даже постоянной в пространстве. Обсуждаемая проблемы устойчивости возникает здесь просто из-за того, что конвективный член содержит первую производную.

таких слишком больших $\Delta t$ величина нового $\zeta_i^{n+1}$ будет больше начального возмущения, как это показано на рис. 3.6, *г*:

$$|\zeta_i^{n+1}| > |\varepsilon_i| \tag{3.54}$$

и аналогично

$$|\zeta_{i\pm1}^{n+1}| > |\varepsilon_{i\pm1}|. \tag{3.55}$$

Появление таких осцилляций нарастающей амплитуды, обусловленных чрезмерно большим шагом по времени, называется *динамической* неустойчивостью, которую можно устранить уменьшением шага по времени, сделав его меньше некоторого «критического шага по времени» $\Delta t_{\text{кр}}$.

Рассмотрим теперь уравнение (3.51) только с одним конвективным членом. Оценим это уравнение в точке $i$, полагая $u > 0$. Предположим, что возмущение колеблется по $i$, а его амплитуда растет с ростом $i$. Поэтому $u\varepsilon_{i+1} > 0$, $u\varepsilon_{i-1} > 0$, $u\varepsilon_{i+1} > u\varepsilon_{i-1}$ и

$$\Delta\zeta_i = -\Delta t \frac{u\varepsilon_{i+1} - u\varepsilon_{i-1}}{2\Delta x} < 0, \tag{3.56}$$

т. е. приращение $\zeta_i$, обусловленное конвекцией, отрицательно даже при $\varepsilon_i < 0$. Это означает, что ошибка растет монотонно (см. рис. 3.6, *д*). Появление такой нарастающей ошибки называется *статической* неустойчивостью, которую нельзя устранить уменьшением шага по времени и можно устранить только переходом к какой-либо другой конечно-разностной схеме.

Если пространственное направление роста $\varepsilon$ по отношению к $u$ отличается от показанного на рис. 3.6, т. е. если либо $u < 0$, либо амплитуда $\varepsilon$ уменьшается по $i$, то конвективный член становится статически устойчивым, но при достаточно больших $\Delta t$ еще может иметь место динамическая неустойчивость. В любой реальной задаче начальные ошибки распределены более или менее случайно, и можно быть уверенным, что в некоторый момент времени и в некоторой точке их распределение будет похоже на изображенное на рис. 3.6 «катастрофическое» распределение.

Если в уравнение (3.51) входят и конвективный, и диффузионный члены, то они взаимодействуют. Как мы вскоре увидим, для рассматриваемой разностной схемы возникает ограничение на $\Delta t$, обусловленное диффузионным членом, и другое ограничение на $\Delta t$, зависящее от сравнительной величины статически неустойчивого конвективного члена и статически устойчивого диффузионного члена, т. е. от числа Рейнольдса. Эти моменты станут ясны в следующем разделе.

## 3.1.5. Исследование устойчивости

После того как было дано общее описание устойчивости, рассмотрим три метода исследования устойчивости, их взаимосвязи и сравнительные достоинства. Эти методы будут продемонстрированы на примере разностной схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной в применении к линейному модельному уравнению (3.18).

### 3.1.5. а. Исследование устойчивости методом дискретных возмущений

Метод исследования устойчивости, который мы называем методом дискретных возмущений, представляет собой обобщение метода, впервые использованного Томом и Апельтом [1961] и развитого Томаном и Шевчиком [1966]. Этот метод полностью отвечает уже данному нами описанию неустойчивости. Он прям и прост по идее, применим для анализа как устойчивости, так и свойства транспортивности, которое будет определено ниже. Коротко говоря, в уравнения в некоторой точке вводится дискретное возмущение величины $\zeta$ и прослеживается влияние этого возмущения; конечно-разностная схема будет устойчивой, если возмущения затухают.

Простоты ради сначала рассмотрим уравнение (3.18) только с диффузионным членом и предположим, что найдено стационарное решение $\zeta_i^n = 0$ для всех $i$. Введем в решение $\zeta_i^n$ возмущение $\varepsilon$ и из (3.18) по схеме с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной получим

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - (\zeta_i^n + \varepsilon)}{\Delta t} = \alpha \frac{\zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n - 2(\zeta_i^n + \varepsilon)}{\Delta x^2}, \tag{3.57}$$

или

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \varepsilon}{\Delta t} = -\frac{2\alpha\varepsilon}{\Delta x^2}, \tag{3.58}$$

$$\zeta_i^{n+1} = \varepsilon(1 - 2d), \tag{3.59}$$

где диффузионное число $d$ определяется равенством

$$d = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}. \tag{3.60}$$

В силу требования устойчивости эти возмущения должны затухать. Для первого шага по времени это приводит к условию

$$\left|\zeta_i^{n+1}/\varepsilon\right| \leqslant 1, \tag{3.61}$$

или

$$-1 \leqslant 1 - 2d \leqslant 1. \tag{3.62}$$

Правое неравенство является результатом требования статической устойчивости и автоматически выполняется при положительных $d$, т. е. при $\alpha > 0$ и $\Delta t > 0$ [1]). Левое неравенство является требованием динамической устойчивости и выполняется при $d \leqslant 1$. Если, следуя Томану и Шевчику [1966], потребовать еще, чтобы численное решение моделировало физическое явление, *не допуская* осцилляций, обусловленных чрезмерно большим шагом по времени, т. е. чтобы

$$\zeta_l^{n+1}/\varepsilon \geqslant 0, \tag{3.63}$$

то получается ограничение

$$d \leqslant 1/2. \tag{3.64}$$

Неравенство (3.63), однако, не является условием устойчивости в смысле уменьшения амплитуды возмущения. Интересно отметить, что если рассматривать достаточно большое число слоев по времени, то потребуется *выполнение* неравенства (3.64). Сначала по схеме с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной (уравнение (3.18)) вычислим возмущение в соседних точках:

$$\zeta_{l\pm1}^{n+1} = d\varepsilon. \tag{3.65}$$

Для следующего слоя по времени получим

$$\zeta_l^{n+2} = \zeta_l^{n+1} + d\left[\zeta_{l+1}^{n+1} + \zeta_{l-1}^{n+1} - 2\zeta_l^{n+1}\right] =$$
$$= \varepsilon(1-2d) + d[d\varepsilon + d\varepsilon - 2\varepsilon(1-2d)] = \varepsilon(1-4d+6d^2). \tag{3.66}$$

Снова потребуем, чтобы имело место неравенство

$$\left|\zeta_l^{n+2}/\varepsilon\right| \leqslant 1, \tag{3.67}$$

откуда получается

$$-1 \leqslant 1 - 4d + 6d^2 \leqslant 1. \tag{3.68}$$

Левое неравенство выполняется всегда, в то время как правое накладывает ограничение $d \leqslant 2/3$.

Таким образом, рассмотрение первого временно́го слоя приводит к условию $d \leqslant 1$, а второго — к условию $d \leqslant 2/3$. Можно рассматривать и последующие временны́е слои, которые приводят к еще более ограничительным условиям для $d$. Начальное

[1]) Заметим, что уравнение диффузии не может решаться ни для разностей назад по времени ($\Delta t < 0$), ни для $\alpha < 0$, так как при этом оно будет математически и физически неустойчиво. Этот вопрос будет обсуждаться ниже.

единичное возмущение ε в точке $i$ асимптотически стремится к осциллирующему распределению $\zeta_i = \pm\varepsilon'$, где $\varepsilon'$ — некоторое возмущение меньшей амплитуды, как показано на рис. 3.7.

Таким образом, видно, что наиболее ограничительное условие для $d$ появляется при таком типе распределения возмущений; начиная расчет с таким осциллирующим возмущением $\varepsilon'$, наложенным на $\zeta = 0$, и применяя схему (3.18) с разностями

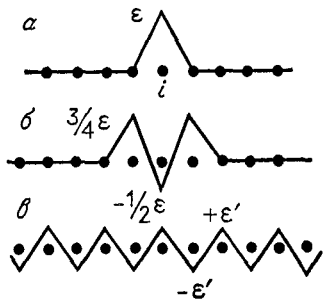



Рис. 3.7. Асимптотическое распространение единичного возмущения ε в точке $i$ для уравнения диффузии, решаемого по схеме с разностями вперед по времени и с центральными разностями по пространственным переменным. *а* — начальное возмущение; *б* — возмущение после одного шага по времени, $d = 3/4$; *в* — возмущение после очень большого числа шагов по времени.

вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной, получаем

$$\zeta_i^{n+1} = \varepsilon' + d(-\varepsilon' - \varepsilon' - 2\varepsilon') = \varepsilon'(1 - 4d). \tag{3.69}$$

Требование устойчивости

$$\left|\zeta_i^{n+1}/\varepsilon'\right| \leqslant 1 \tag{3.70}$$

дает

$$-1 \leqslant 1 - 4d \leqslant 1, \tag{3.71}$$

или

$$d \leqslant 1/2. \tag{3.72}$$

Для последующих временны́х слоев условие (3.72) не меняется. Таким образом, это условие для больших значений времени эквивалентно условию (3.64) — условию отсутствия осцилляций, обусловленных чрезмерно большим шагом по времени, в случае изолированного возмущения.

Из формулы (3.60) следует, что при фиксированном шаге пространственной сетки и фиксированном $\alpha$ условие $d \leqslant 1/2$ накладывает ограничение на шаг по времени:

$$\Delta t \leqslant \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{\alpha}. \tag{3.73}$$

Отметим, что ограничение, накладываемое условием (3.73), является тяжелым в смысле затраты времени для численного решения уравнения диффузии. Предположим, что расчет ведется с некоторым пространственным шагом $\Delta x_1$ до некоторого безразмерного времени $T = N_1 \Delta t_1$, где $\Delta t_1 = {}^1/_2 \Delta x_1^2/\alpha$ — максимально возможный шаг по времени. Если желательно повторить расчет с вдвое меньшим пространственным шагом $\Delta x_2 = \Delta x_1/2$ (например, для того, чтобы проконтролировать уменьшение ошибок аппроксимации), то надо брать шаг по времени $\Delta t_2 = {}^1/_2 \Delta x_2^2/\alpha = {}^1/_4 \Delta t_1$. Значит, чтобы достигнуть того же значения безразмерного времени $T$, потребуется вчетверо больше шагов по времени, т. е. $T = N_2 \Delta t_2$ и $N_2 = 4N_1$. Кроме того, для расчета каждого временно́го слоя потребуется вдвое больше времени, так как $\Delta x_2 = \Delta x_1/2$, а это означает, что число расчетных точек в исследуемой области возросло вдвое. Таким образом, для одномерного случая уменьшение *вдвое* шага пространственной сетки увеличивает затраты машинного времени в *восемь* раз!

В двумерной задаче [1]) уменьшение вдвое шагов $\Delta x$ и $\Delta y$ увеличивает число расчетных точек в четыре раза, увеличивая тем самым необходимое машинное время в 16 раз. В трехмерной задаче диффузии уменьшение всех трех пространственных шагов вдвое увеличивает машинное время в 32 раза. В общем случае уменьшение размера шага с $\Delta x_1$ до $\Delta x_2$ при решении $D$-мерной задачи диффузии с использованием явной схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным увеличивает машинное время в $(\Delta x_1/\Delta x_2)^{2+D}$ раз. Ясно, что методы, в которых удается избежать условия устойчивости (3.73), были бы весьма желательны.

В проведенных выше рассуждениях предположение о стационарности решения несущественно. Если из возмущенного уравнения вычесть полное невозмущенное нестационарное уравнение, то получится уравнение для роста ошибки

$$\varepsilon_i^{n+1} = d\left(\varepsilon_{i+1}^n + \varepsilon_{i-1}^n - 2\varepsilon_i^n\right) + \varepsilon_i^n \qquad (3.74)$$

с условием устойчивости $\left|\varepsilon_i^{n+1}/\varepsilon_i^n\right| \leqslant 1$ и т. д. Результаты в этом случае будут те же, что и выше.

Рассмотрим теперь уравнение (3.18) с конвективным и диффузионным членами и без потери общности положим $u > 0$. (Если $u < 0$, то изменится роль индексов $i+1$ и $i-1$.) Снова

[1]) В двумерных и трехмерных задачах ограничения на шаг по времени имеют вид $\Delta t \leqslant {}^1/_2 A/\alpha$, где $A = 1/(\Delta x^{-2} + \Delta y^{-2})$ и $A = 1/(\Delta x^{-2} + \Delta y^{-2} + \Delta z^{-2})$ соответственно.

применим схему с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной, накладывая на $\zeta_i^n$ в точке $i$ возмущение $\varepsilon$, что даст

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - (\zeta_i^n + \varepsilon)}{\Delta t} =$$

$$= -\frac{u\zeta_{i+1}^n - u\zeta_{i-1}^n}{2\Delta x} + \alpha\left[\frac{\zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n - 2(\zeta_i^n + \varepsilon)}{\Delta x^2}\right]. \qquad (3.75)$$

Исследование этого уравнения не дает дополнительной информации по сравнению с предыдущим анализом уравнения с одним только диффузионным членом, так как на конвективных членах в точках $i \pm 1$ не сказывается возмущение в точке $i$. Применяя схему с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной и в точке $i + 1$, получаем

$$\zeta_{i+1}^{n+1} = -\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[u\zeta_{i+2}^n - u(\zeta_i^n + \varepsilon)\right] +$$

$$+ \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\left[\zeta_{i+2}^n + \zeta_i^n + \varepsilon - 2\zeta_{i+1}^n\right] + \zeta_{i+1}^n, \qquad (3.76)$$

или

$$\zeta_{i+1}^{n+1} = \frac{C}{2}\varepsilon + d\varepsilon, \qquad (3.77)$$

где $C = u\Delta t/\Delta x$ — число Куранта [1]), а $d = \alpha\Delta t/\Delta x^2$, как и ранее.

Для устойчивости опять потребуем, чтобы

$$\left|\zeta_{i+1}^{n+1}/\varepsilon\right| \leqslant 1, \qquad (3.78)$$

или

$$-1 \leqslant \frac{C}{2} + d \leqslant 1. \qquad (3.79)$$

Левое неравенство автоматически выполняется при $u > 0$. Правое неравенство (требование статической устойчивости) дает другое необходимое условие устойчивости:

$$u\,\Delta t/\Delta x + 2\alpha\,\Delta t/\Delta x^2 \leqslant 2,$$

или

$$\Delta t \leqslant \frac{2}{(2\alpha/\Delta x^2) + u/\Delta x}. \qquad (3.80)$$

Обратившись теперь к точке $i - 1$, получим

$$\zeta_{i-1}^{n+1} = -\frac{C}{2}\varepsilon + d\varepsilon, \qquad (3.81)$$

[1]) В честь Рихарда Куранта (1888—1972), математика, работы которого в области численных методов и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных легли в основу современной вычислительной гидродинамики.

и требование устойчивости $\left|\zeta_{i-1}^{n+1}/\varepsilon\right| \leqslant 1$ здесь дает

$$-1 \leqslant -\frac{C}{2} + d \leqslant 1. \tag{3.82}$$

Рассматривая сначала правое неравенство (3.82) (статическая устойчивость), получаем

$$\Delta t\left[\frac{2\alpha}{\Delta x^2} - \frac{u}{\Delta x}\right] \leqslant 2. \tag{3.83}$$

Если член в квадратных скобках отрицателен, то это неравенство будет справедливо для всех $\Delta t > 0$, если же этот член положителен, то получаем

$$\Delta t \leqslant \frac{2}{2\alpha/\Delta x^2 - u/\Delta x}. \tag{3.84}$$

Поскольку знаменатель положителен, условие (3.84) менее ограничительно, чем (3.80), и поэтому перекрывается им.

Исследование левого неравенства (3.82) (динамическая устойчивость) дает

$$-2 \leqslant \Delta t\,[2\alpha/\Delta x^2 - u/\Delta x]. \tag{3.85}$$

Если член в квадратных скобках положителен, то это неравенство выполняется для всех $\Delta t > 0$, если же этот член отрицателен, то получаем

$$\Delta t \leqslant \frac{2}{u/\Delta x - 2\alpha/\Delta x^2}, \tag{3.86}$$

где знаменатель положителен. Условие (3.86) также менее ограничительно, чем (3.80), и поэтому им перекрывается.

Таким образом, из анализа устойчивости уравнения, включающего конвективный и диффузионный члены, при помощи метода дискретных возмущений следуют два необходимых условия — уравнения (3.73) и (3.80). Если распространить этот анализ на последующие слои по времени, то могут появиться другие более ограничительные условия, но метод анализа при этом становится очень неудобным. Заметим (и это будет показано ниже), что анализ устойчивости по фон Нейману дает другое условие (неравенство (3.112)).

Кроме того, если следовать работе Томана и Шевчика [1966] и дополнительно потребовать отсутствия в точке $i-1$ осцилляций, обусловленных чрезмерно большим шагом по времени, то должно быть

$$\zeta_{i-1}^{n+1}/\varepsilon > 0, \tag{3.87}$$

а уравнение (3.81) даст

$$-C/2 + d \geqslant 0, \tag{3.88}$$

т. е.

$$-u\,\Delta t/\Delta x + 2\alpha\,\Delta t/\Delta x^2 \geqslant 0, \tag{3.89}$$

или

$$u\,\Delta x/\alpha \leqslant 2. \tag{3.90}$$

В уравнении переноса вихря $\alpha = 1/\mathrm{Re}$ и член $u\Delta x/\alpha$ представляет собой сеточное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_c$. Таким образом, $\mathrm{Re}_c$ есть число Рейнольдса, полученное по локальной скорости и характерной длине, равной размеру шага пространственной сетки $\Delta x$. Для отсутствия осцилляций, обусловленных чрезмерно большим шагом по времени, требуется, чтобы

$$\mathrm{Re}_c \leqslant 2 \tag{3.91}$$

независимо от $\Delta t$ [1]). Если требование отсутствия осцилляций (3.90) скомбинировать с условием (3.73), накладываемым диффузией, то в результате получаются следующие ограничения: число Куранта $C = u\Delta t/\Delta x \leqslant 1$ и $\Delta t \leqslant 2\alpha/u^2$. Как увидим в дальнейшем, эти ограничения являются правильными.

*Упражнение.* Используя метод дискретных возмущений, исследовать устойчивость схемы с разностями против потока (см. разд. 3.1.7—3.1.9)

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = -\frac{u\zeta_i^n - u\zeta_{i-1}^n}{\Delta x}, \qquad u > 0, \tag{3.92}$$

соответствующей модельному уравнению течения невязкой жидкости. Показать, что условие устойчивости накладывает на число Куранта ограничение $C = u\Delta t/\Delta x \leqslant 1$ и что оно включает критерий отсутствия осцилляций, обусловленных чрезмерно большим шагом по времени.

### 3.1.5. б. Анализ устойчивости по фон Нейману

Наиболее распространенный метод анализа устойчивости был предложен Дж. фон Нейманом в Лос-Аламосе в 1944 г. В то время с этим методом был частным образом ознакомлен сравнительно узкий круг заинтересованных в нем сотрудников (Эдди [1949]). Краткое описание метода впервые появилось в работе Кранка и Николсона [1947], а затем в работе Чарни, Фьёртофта и фон Неймана [1950]. Наиболее раннее полное обсуждение метода было дано в работе О'Брайена, Хаймена и

[1]) Это ограничение на $\mathrm{Re}_c$ не следует путать с ограничением устойчивости в работе Тома и Апельта [1961, с. 136]. В этом случае итерирование стационарных уравнений выполнялось без «нижней релаксации». Это аналогично интегрированию нестационарных уравнений с фиксированным $\Delta t$ (см. разд. 3.1.2), и ограничение на $\mathrm{Re}_c$ у указанных авторов фактически соответствует ограничению, накладываемому на $\Delta t$.

Каплана [1950]. Как мы покажем ниже, в этом методе решение модельного уравнения представляется рядом Фурье с конечным числом членов и устойчивость (или неустойчивость) определяется тем, что каждое отдельное колебание затухает (или нарастает).

Рассмотрим сначала линейное модельное уравнение с одним только диффузионным членом, снова используя схему (3.18) с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной:

$$\frac{\xi_i^{n+1}-\xi_i^n}{\Delta t}=\alpha\left(\frac{\xi_{i+1}^n+\xi_{i-1}^n-2\xi_i^n}{\Delta x^2}\right),$$

или

$$\xi_i^{n+1}=\xi_i^n+d\left(\xi_{i+1}^n+\xi_{i-1}^n-2\xi_i^n\right), \tag{3.93}$$

где $d=\alpha\Delta t/\Delta x^2$. Каждая фурье-компонента решения записывается в виде

$$\xi_i^n=V^n\exp\left[Ik_x(i\,\Delta x)\right], \tag{3.94}$$

где $V^n$ — амплитуда отдельной компоненты с волновым числом $k_x$ (длина волны $\Lambda=2\pi/k_x$) на $n$-м временно́м слое и $I=\sqrt{-1}$. Пространственная область считается бесконечной [1]).

[1]) При таком подходе возникают некоторые вопросы, которые лучше игнорировать при первом чтении и которые выясняются после ознакомления с соответствующей литературой.

Формула (3.94) представляет собой решение конечно-разностного уравнения (3.93) при нулевых граничных условиях. Общее решение получается заменой в (3.94) $V^n$ на $A\xi^n$, где $n$ интерпретируется как показатель степени. Это конечно-разностное решение можно использовать для того, чтобы наглядно продемонстрировать некоторые свойства сходимости конечно-разностной схемы (3.93) (см. Рихтмайер и Мортон [1967]). Хотя (3.94) не является решением уравнения с конвективным и диффузионным членами, мы хотим вскоре обратиться к такому полному уравнению, избегая, однако, обсуждения вопроса о влиянии граничных условий. Это легко сделать (после дополнительной аппроксимации), анализируя устойчивость для бесконечной области согласно фон Нейману.

Для рассматриваемой здесь бесконечной пространственной области $k_x$ принимает все целые значения, $k_x=1, 2, \ldots$. Если желательно исследовать влияние граничных условий, то максимальное $k_x$ должно быть конечным и должно зависеть от $\max\, i=I$. Некоторая путаница может возникнуть из-за того, что в литературе используются две различные «нормирующие» системы для длин. В одной системе $\max\, k_x=I-1$ выбирается как $\pi/\Delta x$. При этом требуется, чтобы $X(=\max x$ сетки) было задано как $X=\pi$. Если фазовый угол определен как $\theta=k_x\Delta x$ и $k_x\in[1, I-1]$, то это дает $\min\theta=\Delta x=\pi/(I-1)$ и $\max\theta=(I-1)\Delta x=\pi$. Во второй системе $\max x$ сетки задается более естественной нормированной величиной $X=1$. Тогда $\Delta x=1/(I-1)$ и фазовый угол определяется как $\theta=\pi k_x\Delta x$. Отсюда снова получается соответственно $\min\theta=\pi\Delta x=\pi/(I-1)$ и $\max\theta=\pi(I-1)\Delta x=\pi$. Понятно?

Если ввести фазовый угол $\theta = k_x \Delta x$, то (3.94) примет вид

$$\zeta_l^n = V^n e^{Ii\theta}. \tag{3.95}$$

Аналогично,

$$\zeta_{l\pm1}^{n+1} = V^{n+1} e^{I(l\pm1)\theta}. \tag{3.96}$$

Подставляя в уравнение (3.93) выражения (3.95) и (3.96), получаем

$$V^{n+1} e^{Ii\theta} = V^n e^{Ii\theta} + d\left[V^n e^{I(l+1)\theta} + V^n e^{I(l-1)\theta} - 2V^n e^{Ii\theta}\right], \tag{3.97}$$

или, после деления на общий множитель $e^{Ii\theta}$,

$$V^{n+1} = V^n \left[1 + d\left(e^{I\theta} + e^{-I\theta} - 2\right)\right]. \tag{3.98}$$

Используем тождество

$$e^{I\theta} + e^{-I\theta} = 2\cos\theta \tag{3.99}$$

и определим *множитель перехода* $G$ равенством

$$V^{n+1} = GV^n. \tag{3.100}$$

Из (3.98) для $G$ имеем

$$G = 1 - 2d(1 - \cos\theta). \tag{3.101}$$

Заметим, что $G = G(\theta)$, т. е. в этом случае множители перехода для различных фурье-компонент различны.

Равенство (3.100) ясно показывает, что для того, чтобы решение оставалось ограниченным, для всех $\theta$ должно выполняться условие

$$|G| \leqslant 1. \tag{3.102}$$

Это условие является критерием устойчивости для уравнения (3.93) с диффузионным членом.

Из (3.101) и (3.102) получаем условия

$$-1 \leqslant 1 - 2d(1 - \cos\theta) \leqslant 1, \tag{3.103}$$

которые должны выполняться для всех возможных $\theta$, т. е. всех возможных фурье-компонент. Правое неравенство выполняется для всех $\theta$. Левое неравенство становится критическим при $\max(1 - \cos\theta) = 2$, что накладывает на $d$ условие устойчивости $d \leqslant 1/2$ или

$$\Delta t \leqslant \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\alpha}. \tag{3.104}$$

Это условие совпадает с критерием (3.73), полученным при помощи метода дискретных возмущений.

Теперь рассмотрим схему с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной для уравнения (3.18), включающего конвективный и диффузионный члены; это даст

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n + \left[ -\frac{C}{2}(\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n) + d(\zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n - 2\zeta_i^n) \right]. \quad (3.105)$$

Подставляя (3.95) и (3.96) и сокращая на $e^{Ii\theta}$, снова получаем (3.100), но с множителем перехода $G$, имеющим вид

$$G = 1 - \frac{C}{2}(e^{I\theta} - e^{-I\theta}) + d(e^{I\theta} + e^{-I\theta} - 2). \quad (3.106)$$

Используя тождество (3.99) и тождество

$$e^{I\theta} - e^{-I\theta} = 2I \sin\theta, \quad (3.107)$$

получаем

$$G = 1 - 2d(1 - \cos\theta) - IC\sin\theta. \quad (3.108)$$

В отличие от предыдущего случая уравнение, включающее конвективный и диффузионный члены, приводит к *комплексному* множителю перехода (3.108). Этот комплексный множитель $G$ сводится к действительному множителю $G$, определенному равенством (3.100), при $C \to 0$, т. е. когда уравнение,

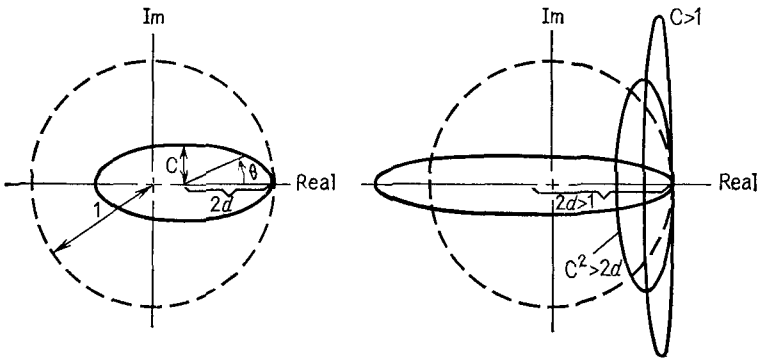



Рис. 3.8. Годограф множителя перехода $G$, записанного в виде (3.110). При $C < 1$, $d < 1/2$ и $C^2 < 2d$ эллипс лежит внутри единичного круга, что соответствует устойчивости.

включающее конвективный и диффузионный члены, сводится к уравнению, содержащему только диффузионный член.

Условие устойчивости в рассматриваемом случае имеет вид

$$|G| \leqslant 1, \quad (3.109)$$

где теперь $|G|$ — модуль комплексного множителя перехода $G$, годограф которого построен на рис. 3.8. Уравнение (3.108) мож-

но переписать в виде

$$G = 1 - 2d + 2d\cos\theta - I\,C\sin\theta, \tag{3.110}$$

что соответствует уравнению эллипса с центром в точке $1 - 2d$ на действительной оси и с полуосями $C$ и $2d$. Устойчивость ($|G| \leqslant 1$) имеет место в том случае, когда этот эллипс целиком лежит внутри единичного круга.

Для устойчивости, очевидно, необходимо, чтобы $C \leqslant 1$ и $d \leqslant {}^1/_2$. Более общее условие можно найти, используя для модуля $G$ следующее выражение:

$$|G|^2 = G\bar{G} = [1 + 2d(\cos\theta - 1)]^2 + C^2(1 - \cos^2\theta) \tag{3.111}$$

(здесь через $\bar{G}$ обозначена величина, комплексно-сопряженная $G$).

Используя элементарные методы определения максимума $|G|^2$ в зависимости от $\cos\theta$, можно убедиться [1]) в том, что при

$$C^2 \leqslant 2d \tag{3.112}$$

внутри интервала $-1 < \cos\theta < 1$ максимума $|G|$ не существует. Этот максимум достигается при $\cos\theta = -1$ и просто дает условие $d \leqslant {}^1/_2$, которое было получено для уравнения с одним диффузионным членом. При $\mathrm{Re}_c > 2$ максимум имеет место в интервале $-1 < \cos\theta < 1$ и всегда $|G|^2_{\max} > 1$. Следовательно, двойное неравенство $C^2 \leqslant 2d \leqslant 1$ является необходимым и достаточным условием для устойчивости.

Условие (3.112) можно записать в виде [2])

$$\Delta t \leqslant 2\alpha/u^2, \tag{3.113}$$

откуда сразу следует, что при отсутствии вязкости ($\alpha = 0$) схема с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной неустойчива при *всех* $\Delta t$.

Два условия $d \leqslant {}^1/_2$ и $\mathrm{Re}_c \leqslant 2$ являются достаточными для устойчивости в случае *линейного* уравнения в бесконечной области при постоянном $u$. Случай, когда $u$ является функцией пространственной переменной, также можно исследовать при помощи данного метода, но это трудно.

В случае более общих конечно-разностных схем, использующих не менее трех временны́х слоев, уравнение, соответствующее

---

[1]) Эти методы элементарны, но выкладки несколько громоздки. Результаты для двумерного случая, приведенные Фроммом [1964] и в первом английском издании настоящей книги, были неверны в том отношении, что в качестве необходимого условия накладывалось ограничение на сеточное число Рейнольдса; см. по этому поводу разд. 3.3.8.

[2]) Это ограничение может быть получено также из условия, что кривизна $|d^2y/dx^2|$ эллипса $G(\theta)$ в точке $(1, 0)$ должна быть больше кривизны единичной окружности (У. Д. Сандберг, личное сообщение).

(3.101), становится матричным уравнением. Для устойчивости при этом требуется, чтобы $|\lambda_m| \leqslant 1$, где $\lambda_m$ — все собственные значения [1]) матрицы $G$. Когда $G$ — просто число, это условие эквивалентно условию (3.102). Пример такого случая будет приведен в разд. 3.1.6.

Помимо сведений об устойчивости анализ по фон Нейману дает также информацию о дисперсионных ошибках, которые будут рассмотрены в разд. 3.1.14.

*Упражнение.* Повторить предыдущее упражнение для схемы с разностями против потока и найти условие устойчивости, используя на этот раз анализ по фон Нейману.

### 3.1.5. в. Анализ устойчивости по Хёрту

Третий метод анализа устойчивости был предложен Хёртом [1968] [2]). В этом методе члены, входящие в конечно-разностные уравнения, раскладываются в ряды Тейлора для того, чтобы получить дифференциальное уравнение в частных производных. Устойчивость затем определяется из известных свойств устойчивости дифференциальных уравнений [3]). (Аналогичный подход к изучению конечно-разностных уравнений при помощи полученных таким образом дифференциальных уравнений был использован в работе Сайруса и Фалтона [1967] для исследования не устойчивости, а точности конечно-разностных методов, применяемых для эллиптических уравнений.)

Рассмотрим опять схему (3.18) с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной для модельного уравнения, включающего конвективный и диффузионный члены, предполагая, что $u$ постоянно:

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = -u\left(\frac{\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n}{2\Delta x}\right) + \alpha\left(\frac{\zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n - 2\zeta_i^n}{\Delta x^2}\right). \qquad (3.114)$$

[1]) Задача нахождения собственных значений является нетривиальной для сложных схем и для систем уравнений, которые описывают течения сжимаемой жидкости. Задача отыскания собственных значений сама по себе может решаться численно (см. также Уолден [1967] и Уэстлейк [1968]).

[2]) Идея применения первого дифференциального приближения для исследования устойчивости разностных уравнений была предложена А. И. Жуковым еще в пятидесятых годах (см. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. — М.: Наука, 1973). Современная теория дифференциальных приближений основана на работах Н. Н. Яненко и Ю. И. Шокина. Обзор и некоторые новые результаты по анализу устойчивости схем при помощи метода дифференциальных приближений содержатся в следующей работе: Давыдов Ю. М., Скотников В. П. Дифференциальные приближения разностных схем — М.: изд. ВЦ АН СССР, 1978. — *Прим. ред.*

[3]) Хорошо, если с помощью такого разложения получаются дифференциальные уравнения с известными свойствами устойчивости. В противном случае можно пытаться определить устойчивость полученных дифференциальных уравнений при помощи какого-либо численного метода, обязательно исследуя *его* устойчивость и т. д.

Разложим каждый член уравнения (3.114) в ряды Тейлора в окрестности точки $(x, t)$, т. е. относительно $\zeta_i^n$; тогда

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n + \Delta t \frac{\partial \zeta}{\partial t}\Big|_i^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\Big|_i^n + O(\Delta t^3), \tag{3.115}$$

$$\zeta_{i+1}^n = \zeta_i^n \pm \Delta x \frac{\partial \zeta}{\partial x}\Big|_i^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\Big|_i^n \pm O(\Delta x^3). \tag{3.116}$$

Подставляя эти разложения в (3.114) и приводя подобные члены, получаем

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\Delta t \frac{\partial \zeta}{\partial t}\Big|_i^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\Big|_i^n + O(\Delta t^3)\right] =$$

$$= -\frac{u}{2\Delta x}\left[2\Delta x \frac{\partial \zeta}{\partial x}\Big|_i^n + O(\Delta x^3)\right] + \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left[\Delta x^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\Big|_i^n + O(\Delta x^4)\right], \tag{3.117}$$

или, опуская индексы $i$ и $n$,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + O(\Delta t^2, \Delta x^2). \tag{3.118}$$

При $\Delta t \to 0$ и $\Delta x \to 0$ это уравнение переходит в исходное дифференциальное уравнение в частных производных (2.18). Но при $\Delta t > 0$ уравнение (3.118) принимает вид

$$\frac{\Delta t}{2\alpha}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{u}{\alpha}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0. \tag{3.119}$$

Это уравнение, полученное сохранением всех членов первого порядка в разложениях ряда Тейлора, является гиперболическим

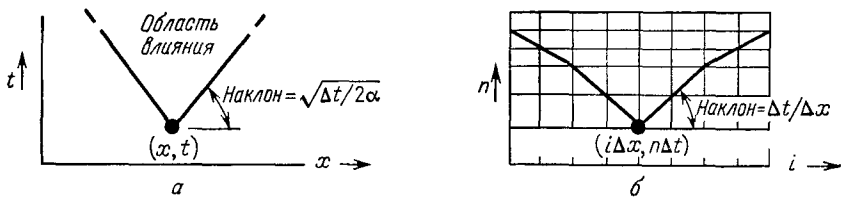



Рис. 3.9. Область влияния точки $(x, t)$ для уравнения (3.118) гиперболического типа. *а* — область влияния для дифференциального уравнения; *б* — область влияния для конечноразностного уравнения.

(см., например, Вейнбергер [1965]). Как показано на рис. 3.9, *а*, для таких уравнений существует область влияния произвольной точки $(x, t)$, ограниченная проходящими через эту точку и имеющими наклон $\pm\sqrt{\Delta t/(2\alpha)}$ характеристиками. Возмущения, возникающие в точке $(x, t)$, проявляются только внутри этой области. Часть плоскости $(x, t)$, расположенную вне этой области, иногда называют зоной молчания.

Для конечно-разностного уравнения (3.114) также существует область влияния. Каждое новое рассчитанное значение

$\zeta_i^{n+1}$ зависит от значений $\zeta_{i\pm1}^n$ в соседних точках $i\pm1$ в предыдущий момент времени. Иначе говоря, каждое значение $\zeta_i^n$ оказывает влияние на значения $\zeta_{i\pm1}^{n+1}$ в соседних точках на следующем слое по времени. Это влияние в свою очередь распространяется на значения $\zeta_{i\pm2}^{n+2}$ и т. д. Таким образом, область влияния дискретизированного уравнения (3.118) ограничивается конечно-разностными «характеристическими линиями» с наклоном $\Delta t/\Delta x$ (см. рис. 3.9, *б*). Условие Куранта (Курант, Фридрихс и Леви [1928]) устойчивости конечно-разностного аналога таких гиперболических уравнений требует, чтобы область влияния конечно-разностного уравнения по крайней мере включала в себя область влияния дифференциального уравнения [1]). Из рис. 3.9 видно, что это накладывает условие $\Delta t/\Delta x \leqslant \sqrt{\Delta t/(2\alpha)}$, или

$$\Delta t \leqslant \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{\alpha}. \tag{3.120}$$

Но это ограничение на $\Delta t$ в точности совпадает с ограничением, обусловленным диффузионным членом в уравнении и полученным ранее из анализа устойчивости как при помощи метода дискретных возмущений, так и при помощи метода фон Неймана.

Чтобы определить другое необходимое условие устойчивости, вычислим член $\partial^2\zeta/\partial t^2$ в уравнении (3.119), дифференцируя исходное дифференциальное уравнение [2]) с учетом предположения $u = \text{const}$:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -u\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}, \tag{3.121}$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = -u\frac{\partial^2\zeta}{\partial t\,\partial x} + \alpha\frac{\partial^3\zeta}{\partial t\,\partial x^2}. \tag{3.122}$$

Меняя порядок дифференцирования и подставляя $\partial\zeta/\partial t$ из исходного дифференциального уравнения в частных производных,

[1]) Здесь уместно привести пример уравнения распространения звуковых волн. Условие Куранта просто означает, что для устойчивости расчета звуковая волна за один шаг по времени не должна проходить расстояние, большее размера одной пространственной ячейки.

[2]) Возможен и другой путь получения приведенного ниже уравнения при помощи разложения членов в уравнении (3.114) как функций двух независимых переменных в ряды Тейлора в окрестности точки $(x_i,\ t_{n+1/2})$, т. е. относительно $\zeta_i^{n+1/2}$. В работах Хёрта такое разложение приводит к уравнению (3.124), которое получается не в результате дифференцирования исходного дифференциального уравнения (3.121), а из уравнения (3.118). Анализ такого же типа можно найти в статье Уорминга и Хьетта [1974], где показано, что в случае постоянных коэффициентов и периодических граничных условий такой подход эквивалентен методу фон Неймана. Использование описанного выше способа нахождения $\zeta_{tt}$ из уравнения (3.121) приводит к ошибкам в коэффициентах при производных более высокого порядка.

получаем

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = -u\frac{\partial}{\partial x}\left(-u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\alpha\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)+\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\alpha\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right), \tag{3.123}$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = u^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}-2u\alpha\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}+\alpha^2\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}. \tag{3.124}$$

Подставляя это выражение в (3.119) и преобразуя результат, получаем

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\left(\alpha-\frac{u^2\Delta t}{2}\right)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+u\alpha\Delta t\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}-\frac{\alpha^2\Delta t}{2}\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}. \tag{3.125}$$

Следуя Хёрту [1968], отбрасываем в уравнении (3.125) высшие производные и сохраняем первые и вторые производные по каждому независимому переменному ($x$ и $t$), что дает полезное дифференциальное приближение. Оно имеет смысл по двум причинам. Во-первых, производные высших порядков обычно меньше. Во-вторых, a posteriori известно, что условие устойчивости, полученное в результате этого анализа, будет сильнее ограничения, накладываемого на шаг по времени при наличии только диффузионного члена, лишь для течений с малой вязкостью, т. е. для $\alpha \ll u$, когда коэффициенты при высших производных в уравнении (3.125) становятся малыми. В результате получается дифференциальное приближение

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\alpha_{\text{эфф}}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}, \tag{3.126}$$

где

$$\alpha_{\text{эфф}} = \alpha - u^2\Delta t/2. \tag{3.127}$$

Поскольку уравнение (3.126) эквивалентно исходному модельному дифференциальному уравнению, будем называть $\alpha_{\text{эфф}}$ эффективной вязкостью.

С математической (и физической) точки зрения роль вязкости (диффузии) заключается в «размазывании» (диффузии) возмущения величины $\zeta$, в стремлении сделать распределение $\zeta$ однородным. Отрицательная вязкость физически невозможна, так как она приводила бы к концентрации любых малых возмущений, возникших в однородном распределении, и создавала бы таким образом монотонную неустойчивость[1]). Для устойчивости необходимо, чтобы выполнялось условие $\alpha_{\text{эфф}} \geqslant 0$, или условие

$$\Delta t \leqslant 2\alpha/u^2, \tag{3.128}$$

совпадающее с условием (3.113), полученным при помощи ме-

[1]) Применительно к уравнению теплопроводности условие $\alpha_{\text{эфф}} \geqslant 0$ можно интерпретировать как требование, что конечно-разностное уравнение не должно противоречить второму началу термодинамики.

тода фон Неймана. В сочетании с условием (3.120) оно включает условие Куранта $C = u\Delta t/\Delta x \leqslant 1$. Этот анализ не снимает ограничения (3.112) на сеточное число Рейнольдса и поэтому обеспечивает необходимые, но не достаточные условия устойчивости для модельного уравнения с конвективным и диффузионным членами.

*Упражнение.* Повторить предыдущие два упражнения по определению условий устойчивости для схемы с разностями против потока, используя метод Хёрта.

### 3.1.5. г. Краткий обзор и оценка различных критериев устойчивости

Выше были приведены примеры трех различных методов анализа устойчивости: метод дискретных возмущений, метод фон Неймана и метод Хёрта. В методе Хёрта использовался критерий Куранта — Фридрихса — Леви [1928] для гиперболических систем. Известны еще по меньшей мере три более или менее популярных метода, а также ряд других менее популярных. Ограниченность решения разностных уравнений можно непосредственно проверить при помощи критерия Фридрихса о положительности коэффициентов (см. Рихтмайер и Мортон [1967, с. 22] и Хан [1958]), а также при помощи «энергетических» методов [1]) Келлера и Лакса (см. Рихтмайер и Мортон [1967, с. 23 и далее]). На практике эти методы оказываются применимыми только для простейших разностных схем дифференциальных уравнений. Подобно этим двум методам в методе Эдди [1949] также рассматриваются непосредственно свойства множителя перехода для конечно-разностных уравнений, а не дискретные фурье-компоненты. Оказывается, что в простых случаях, рассмотренных в работе Эдди [1949], этот метод дает результаты, совпадающие с результатами метода фон Неймана, но он сложнее в приложениях и не используется в открытой литературе.

Критерии устойчивости в этих трех методах, так же как и в методе фон Неймана [2]), где требуется, чтобы множитель перехода удовлетворял условию $|G| \leqslant 1$, основаны на ограниченности решения. (Однако критерий фон Неймана можно модифицировать, приведя его к виду $|G| \leqslant 1 - O(\Delta t)$, что дает возможность рассматривать случаи неограниченных решений дифференциальных уравнений.) Все эти указанные критерии не

[1]) Вообще говоря, в этих методах рассматривается квадрат независимой переменной (а не обязательно физическая энергия).

[2]) В чаще всего цитируемом в открытой литературе изложении метода фон Неймана (О'Брайен, Хаймен и Каплан [1950]) устойчивость фактически определяется по росту или затуханию машинных ошибок округления. Это принципиально отличается от требования ограниченности решения, но такое различие практически неважно, поскольку при анализе устойчивости по

идентичны. Хан [1958] показал, что критерии фон Неймана, Фридрихса и Куранта — Фридрихса — Леви эквивалентны только для простейших конечно-разностных схем в применении к линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами. В случае же переменных коэффициентов условие фон Неймана является только необходимым, а условие Фридрихса только достаточным. Для конечно-разностных аналогов волнового уравнения, в которых в точке $i$ используются значения не в точках $i \pm 1$, а в более удаленных точках, условие Куранта — Фридрихса — Леви больше не является достаточным. Митчелл [1969] указывает, что условие фон Неймана является необходимым и достаточным (в случае постоянных коэффициентов) для двухслойных схем только с одной зависимой переменной и любым числом независимых переменных, в противном случае оно является только *необходимым*. Кроме того, не ясно, эквивалентны ли эти критерии устойчивости критериям, полученным в методе дискретных возмущений и в методе Хёрта при переменных коэффициентах, и поэтому не следует ожидать одинаковых результатов во всех случаях.

Для ознакомления с другими определениями и критериями устойчивости рекомендуется следующая литература. Хилденбранд [1968, с. 205] обсуждает «пошаговую» устойчивость (рассматривается поведение во времени, когда $t \to \infty$ при фиксированном $\Delta t$, как и в трех изложенных выше методах[1])) и сопоставляет ее с «поточечной» устойчивостью (рассматривается поведение конечно-разностных уравнений, когда размер шага пространственной сетки стремится к нулю). Густафсон [1969] вводит критерий $A$-устойчивости. Роджерс [1967] исследует устойчивость разностных операторов при помощи переходных функций, используемых в теории управления. В работах Кузика и Лави [1968] и Лави [1969] обсуждается устойчивость различных методов и предлагается неитерационный метод оценки устойчивости в ходе расчетов. С точки зрения обоснования теории устойчивости важны работы Крейса [1964, 1968] и Ошера [1969б], а также книги Вазова и Форсайта [1960] и Келлера [1968].

Карплюс [1958] предложил подход для исследования устойчивости конечно-разностных уравнений, основанный на теории электрических цепей; несмотря на то что иногда этот подход можно использовать с успехом, его применимость лимитируется

фон Нейману делается то же самое. Ограниченность решения является более предпочтительным критерием, так как в нем обращают особое внимание на то, что устойчивость нужно исследовать даже в предельном случае алгебраически точных вычислений при общих начальных условиях (Лакс и Рихтмайер [1956]).

[1]) Свойства устойчивости аналогичны свойствам, полученным при $\Delta t \to 0$ при фиксированном интервале времени (Лакс и Рихтмайер [1956]).

некой присущей ему неопределенностью. Другой концепцией численной неустойчивости является неустойчивость в смысле Адамара (см., например, Вейнбергер [1965]), т. е. чувствительность решения к начальным данным в задаче с начальными условиями. Один метод для экспериментальной проверки этого типа неустойчивости был предложен Миллером [1967]. Чен [1970] анализирует устойчивость подобно Хёрту, но только в пределе при $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$, связанных некоторой заданной зависимостью.

Таким образом, видно, что понятие устойчивости не определяется универсально даже для линейных систем. Франкел [1956] избегал попыток дать точное определение устойчивости. Рихтмайер [1963] показал, что понятие устойчивости зависит от выбора нормы в функциональном пространстве зависимого переменного и что использование анализа Фурье, как в методе фон Неймана, предполагает использование $L_2$ или среднеквадратичной нормы, которая отчасти произвольна. Для ознакомления с иными определениями устойчивости читатель может обратиться к книге Рихтмайера и Мортона [1967, с. 104].

Понятие устойчивости непосредственно связано с понятиями аппроксимации и сходимости[1]). Конечно-разностный аналог аппроксимирует дифференциальное уравнение, если при $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ конечно-разностное *уравнение* стремится к дифференциальному *уравнению* в частных производных. Хотя при выводе конечно-разностных уравнений при помощи разложений в ряды Тейлора может показаться, что это положение выполняется автоматически, на самом деле это не так; здесь могут потребоваться иные ограничения для относительной скорости сходимости при уменьшении $\Delta x$ и $\Delta t$ (см. разд. 3.1.7). Конечно-разностное уравнение сходится, если при $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ *решение* конечно-разностного уравнения стремится к *решению* дифференциального уравнения в частных производных. Два очевидных необходимых условия такой сходимости состоят в том, что конечно-разностное уравнение устойчиво (в некотором смысле) и аппроксимирует соответствующее дифференциальное уравнение.

Для линейных систем, таких, как рассмотренное нами модельное уравнение с постоянными коэффициентами, теорема эквивалентности Лакса (Лакс и Рихтмайер [1956]) устанавливает эквивалентность устойчивости и сходимости[2]) при выпол-

[1]) Под сходимостью здесь подразумевается сходимость в смысле убывания ошибки аппроксимации. Обсуждение сходимости итерационных процессов можно найти в разд. 3.4.

[2]) Первая формулировка теоремы эквивалентности была дана В. С. Рябеньким (ДАН СССР, т. 86, № 6, 1952). Затем эта теорема была сформулирована при различных подходах Лаксом, Рихтмайером, А. Ф. Филипповым — *Прим. ред.*

нении следующих условий: задача с начальными данными должна быть корректно поставлена в смысле Адамара (Вейнбергер [1965]), т. е. решение дифференциального уравнения в частных производных должно непрерывно зависеть от начальных данных; конечно-разностное уравнение должно аппроксимировать дифференциальное уравнение в частных производных; устойчивость должна быть определена в норме $L_2$ (как в методе фон Неймана). При выполнении этих требований необходимое условие устойчивости фон Неймана становится и достаточным. Ф. Джон [1952] показал, что несколько усиленная форма условия фон Неймана является достаточной для устойчивости линейных параболических уравнений даже в случае переменных коэффициентов. Лакс (см. Лакс и Рихтмайер [1956]) получил аналогичный результат для гиперболических уравнений с переменными коэффициентами.

Теорема эквивалентности Лакса, безусловно, является важной, но, к сожалению, ее значимость слишком переоценивается. В частности, некоторые авторы заключение о сходимости нелинейных конечно-разностных уравнений (отчаявшись, по-видимому, доказать ее иначе) основывают на теореме эквивалентности Лакса для линейных систем. Несмотря на то что изучение линейных систем полезно для понимания поведения нелинейных систем, очевидно, что теорему эквивалентности Лакса нельзя непосредственно применять к нелинейным уравнениям. Один факт возможной неединственности решений нелинейных уравнений, рассмотренный в гл. 1, должен был бы предостеречь от такого неправильного использования этой теоремы. Применение теоремы Лакса некорректно даже для линейных систем, если устойчивость определяется не в норме $L_2$.

Точный критерий устойчивости в действительности не требуется с математической точки зрения. При исследовании нелинейных уравнений Хикс [1969] предлагает миновать вопросы, связанные с критериями устойчивости, и переходить непосредственно к сути дела, а именно к обеспечению сходимости разностного решения (Лакс и Рихтмайер [1956]). Главное состоит в том, что решение конечно-разностного уравнения должно сходиться к решению дифференциального уравнения в частных производных, а определение устойчивости представляет уже вторичный интерес. В свете сказанного теорема эквивалентности Лакса может применяться для непосредственного исследования сходимости при условии, что устойчивость определена таким образом, что оба эти понятия являются эквивалентными.

Ни один из рассмотренных критериев и методов анализа устойчивости не является адекватным для проведения практических расчетов. В действительности в задачах гидродинамики ограничения, связанные с устойчивостью, применяются локаль-

но. Расчетные точки сетки просматриваются одна за другой, чтобы установить, где имеют место наиболее жесткие ограничения, накладываемые критериями устойчивости, а затем из всех максимально допустимых в каждой точке выбирается наименьший шаг $\Delta t$ и он принимается для всех точек сетки. На практике полученное таким образом допустимое значение максимального шага по времени обычно берут с коэффициентом запаса $0.8 \div 0.9$. На ранней стадии расчета, когда градиенты по времени велики, может потребоваться уменьшение этого коэффициента (см., например, Торранс [1968]).

Недостатки такого подхода очевидны. Многие авторы (Филлипс [1959], Рихтмайер [1963], Хёрт [1968], Гурли и Моррис [1968а]) описывают неустойчивость, обусловленную нелинейностью или по крайней мере переменностью коэффициентов уравнений. Другие авторы (Лилли [1965]) сообщают о явлении расчленения решения по временным шагам (см. разд. 3.1.6), которое хотя и не представляет собой неустойчивости в смысле получения неограниченных решений, но является неустойчивостью в практическом смысле отсутствия сходимости итераций. Важно понимать, что может оказаться невозможным провести границу между тем, что называется «настоящей» неустойчивостью и очень малой скоростью сходимости решения.

В действительности исследование строгих определений аппроксимации, сходимости и устойчивости при $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$ — занятие зачастую бесплодное, так как реальные расчеты проводятся при конечных $\Delta x$ и $\Delta t$. (Изредка такое исследование может привести к практически полезной путеводной нити, как, например, в случае требования аппроксимации в схеме Дюфорта — Франкела; см. разд. 3.1.7.)

Можно дать следующую окончательную оценку трех описанных в предыдущих разделах методов исследования устойчивости. Обычно используемый метод фон Неймана, вообще говоря, самый простой, самый прямой и самый надежный. Важной его чертой является возможность непосредственного формального распространения на многомерные задачи (см. следующий раздел). Для более сложных конечно-разностных уравнений разрешение неравенства $|G| \leqslant 1$ (или неравенства для собственных значений, разд. 3.1.6) может оказаться затруднительным [1]). Кроме того, наименьшие рассматриваемые здесь возмущения представляют собой периодические возмущения с длиной волны $\lambda = 2\Delta x$, точечные же возмущения не могут

[1]) При этом может оказаться, что границы устойчивости матрицы перехода нужно будет определять численно.

рассматриваться. Этот метод можно использовать для исследования влияния на устойчивость некоторых граничных условий (Кемпбелл и Кист [1968], П. Дж. Тейлор [1968]).

Анализ устойчивости при помощи метода дискретных возмущений менее надежен. По сравнению с систематичным и формализованным методом фон Неймана успех применения этого метода является делом удачи. Для схемы с разностями против потока он приводит к тому же результату, что и метод фон Неймана (см. последние три упражнения). Дополнительное требование об отсутствии осцилляций, обусловленных чрезмерно большим шагом по времени (которое, впрочем, не является очевидным требованием устойчивости в смысле ограниченности решения), также приводит в этом методе к результатам, совпадающим с результатами метода фон Неймана для схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной, но при существенно меньших затратах труда. Однако совсем не очевидно, что этот критерий дает правильные результаты для более сложных схем, поэтому в настоящее время его применимость в общем случае находится под вопросом. Тем не менее с помощью метода дискретных возмущений можно исследовать устойчивость в граничных и во внутренних точках в тех случаях, когда метод фон Неймана оказывается непригодным.

После выхода в свет работы Уорминга и Хьетта [1974] метод Хёрта стал столь же формален, как и метод фон Неймана. Он обычно с успехом применяется для определения условий устойчивости простых конечно-разностных уравнений (требуя в некоторых случаях меньшего числа алгебраических операций, чем метод фон Неймана). Этот метод был аккуратно распространен на случай исследования устойчивости нелинейных уравнений с переменными коэффициентами (Хёрт [1968]), что не так легко сделать с помощью метода фон Неймана.

Итак, все три рассмотренных метода анализа устойчивости дают полезную информацию. По-прежнему наиболее широко используется метод фон Неймана, но модифицированный метод Уорминга и Хьетта оказывается даже более полезным. Однако ни один из этих методов не является полностью адекватным. Если целью является получение численных решений, а не просто анализ численных методов самих по себе, то необходимо обращаться к численному эксперименту, имея в виду, что все или почти все методы исследования устойчивости являются ключом к выяснению практической устойчивости.

Тем не менее полезность рассмотренных методов не ограничивается определением условий устойчивости. Метод дискретных возмущений обладает тем преимуществом, что в нем внимание концентрируется на дискретных конкретных фактически

проводимых расчетах, а не на каких-либо абстракциях. Это дает возможность использовать данный метод при постановке и анализе граничных условий и при определении свойства транспортивности (см. разд. 3.1.9). Метод фон Неймана дает информацию не только о затухании возмущений (т. е. об устойчивости), но и о фазовых соотношениях для конечно-разностных уравнений и о получающихся дисперсионных ошибках (см. разд. 3.1.13). Метод Хёрта также дает информацию о дисперсионных ошибках и о поведении конечно-разностных уравнений, связанном с эффектом «искусственной вязкости». Таким образом, все три рассмотренных метода исследования устойчивости находят свое применение и будут использоваться в следующих разделах этой книги.

### 3.1.5. д. Метод фон Неймана для многомерных задач

Метод дискретных возмущений (Томан и Шевчик [1966]) и метод Хёрта (Хёрт [1968]) могут быть распространены на случай исследования устойчивости в многомерных задачах. Мы же в качестве примера приведем здесь более простое обобщение метода Неймана на такой случай. Используя схему с разностями вперед по времени и с центральными разностями по пространственной переменной для линеаризованного уравнения переноса вихря (2.12) с постоянными коэффициентами в плоском случае (когда $\alpha = 1/\mathrm{Re}$), получаем

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n}}{\Delta t} = -u\frac{\zeta_{i+1,j}^{n} - \zeta_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x} - v\frac{\zeta_{i,j+1}^{n} - \zeta_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y} + \\ + \alpha\left[\frac{\zeta_{i+1,j}^{n} + \zeta_{i-1,j}^{n} - 2\zeta_{i,j}^{n}}{\Delta x^2} + \frac{\zeta_{i,j+1}^{n} + \zeta_{i,j-1}^{n} - 2\zeta_{i,j}^{n}}{\Delta y^2}\right]. \quad (3.129)$$

Теперь запишем каждую фурье-компоненту решения в виде

$$\zeta_{i,j}^{n} = V^{n}\exp[I(k_x i\Delta x + k_y j\Delta y)], \quad (3.130)$$

где $V^n$ снова является амплитудой на временно́м слое $n$ частной фурье-компоненты, имеющей в направлениях $x$ и $y$ волновые числа $k_x$ и $k_y$ (длины волн $\Lambda_x = 2\pi/k_x$ и $\Lambda_y = 2\pi/k_y$), а $I = \sqrt{-1}$. Вводя фазовые углы $\theta_x = k_x\Delta x$ и $\theta_y = k_y\Delta y$ для координат $x$ и $y$, запишем выражение (3.130) как

$$\zeta_{i,j}^{n} = V^{n}\exp[I(i\theta_x + j\theta_y)]; \quad (3.131)$$

аналогично

$$\zeta_{i+1,j+1}^{n+1} = V^{n+1}\exp\{I[(i+1)\theta_x + (j+1)\theta_y]\} \quad (3.132)$$

и т. д. Соответствующие двумерные аналоги числа Куранта C определяются как $C_x = u\Delta t/\Delta x$ и $C_y = v\Delta t/\Delta y$, а соответствующие аналоги величины $d$ как $d_x = \alpha\Delta t/\Delta x^2$ и $d_y = \alpha\Delta t/\Delta y^2$. Подставляя эти величины в выражение (3.130), сокращая на общий множитель $\exp[I(i\theta_x + j\theta_y)]$ и используя формулы Эйлера, снова получаем $V^{n+1} = GV^n$, где

$$G = 1 - 2(d_x + d_y) + 2d_x \cos\theta_x + 2d_y \cos\theta_y - I(C_x \sin\theta_x + C_y \sin\theta_y). \quad (3.133)$$

Очевидные необходимые условия выполнения неравенства $|G| \leqslant 1$ будут

$$d_x + d_y \leqslant 1/2 \quad (3.134)$$

и

$$C_x + C_y \leqslant 1. \quad (3.135)$$

В частном случае $d_x = d_y = d$ неравенство (3.134) принимает вид

$$d \leqslant 1/4. \quad (3.136)$$

Это условие вдвое сильнее ограничения, полученного для одномерного уравнения с одним только диффузионным членом. В частном случае $C_x = C_y = C$ неравенство (3.135) принимает вид

$$C \leqslant 1/2 \quad (3.137)$$

и снова оказывается вдвое сильнее соответствующего необходимого условия в одномерном случае. Фромм [1964] показал, что для частного случая $\Delta x = \Delta y = \Delta$ и $\theta_x = \theta_y$ ограничение на сеточное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_c = (|u| + |v|)\Delta/\alpha$ дается неравенством

$$\mathrm{Re}_c \leqslant 4, \quad (3.138)$$

которое является менее жестким, чем в одномерном случае.

*Упражнение.* Применить метод Неймана для исследования устойчивости схемы с разностями против потока для уравнения переноса в случае нулевой вязкости

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^n}{\Delta t} = -u\frac{\zeta_{i,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n}{\Delta x} - v\frac{\zeta_{i,j}^n - \zeta_{i,j-1}^n}{\Delta y}, \quad u > 0, \quad v > 0. \quad (3.139)$$

Показать, что условие устойчивости имеет вид

$$C_x + C_y \leqslant 1. \quad (3.140)$$

*Упражнение.* Применить метод Неймана к схеме с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным для трехмерного уравнения диффузии

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right) \quad (3.141)$$

и показать, что условие

$$d_x + d_y + d_z \leqslant 1/2 \tag{3.142}$$

является необходимым и достаточным для устойчивости. В частном случае, когда $d_x = d_y = d_z = d$, условие (3.142) имеет вид

$$d \leqslant 1/6 \tag{3.143}$$

и оказывается втрое жестче, чем в одномерном случае.

## 3.1.6. Одношаговые явные схемы; схема «чехарда со средней точкой»

Рассмотренная для линейного модельного уравнения грубая схема ВВЦП, использующая разности вперед по времени и центральные разности по пространственным переменным, является одношаговой явной двухслойной по времени схемой. Она называется одношаговой, так как для перехода к новому слою по времени требуется только один вычислительный шаг. Эта схема называется явной, так как все значения в правой части (3.44в), необходимые для вычисления $\zeta_i^{n+1}$ на новом слое по времени, известны, т. е. значения $\zeta_{i\pm1}^{n+1}$ не входят в правую часть уравнения [1]). Она является двухслойной по времени [2]), так как для вычислений здесь привлекаются только два слоя по времени; новые значения на слое $n+1$ вычисляются только по значениям на слое $n$.

Уравнение (3.17) соответствует схеме с центральными разностями по пространственным переменным и по времени, которая, как уже было отмечено, безусловно неустойчива при любых $\alpha > 0$ и $\Delta t > 0$. Но при применении только к конвективным членам (т. е. при $\alpha = 0$) эта схема, называемая схемой со средней точкой (Лилли [1965]) или схемой «чехарда со средней точкой» или — чаще всего — просто «чехарда» (Курант, Фридрихс, Леви [1928]), обладает нужными свойствами устойчивости. Таким образом, уравнение

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial (u\zeta)}{\partial x} \tag{3.144}$$

по этой схеме представляется в виде

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^{n-1}}{2\Delta t} = -\frac{u\zeta_{i+1}^n - u\zeta_{i-1}^n}{2\Delta x}. \tag{3.145}$$

Данная схема имеет второй порядок точности по пространству и по времени; это одношаговая явная трехслойная по вре-

[1]) Схемы, в которых в правую часть уравнения входят значения $\zeta_{i+1}^{n+1}$ и $\zeta_{i-1}^{n+1}$, называются неявными, и при этом для вычисления значений на новом временно́м слое, вообще говоря, требуется обращение матрицы.

[2]) Схемы, которые в этой книге именуются однослойными, некоторые авторы называют одношаговыми.

мени схема. Значит, для вычисления новых значений на слое $n+1$ в этой схеме необходимы значения на слоях $n$ и $n-1$. Заметим, что новые $\zeta$ на четном временном слое вычисляются как значения $\zeta$ на предыдущем четном временном слое плюс некоторое приращение, а предыдущий нечетный временной слой при этом «перепрыгивается» (отсюда и название схемы — «чехарда»).

Метод фон Неймана исследования устойчивости для этой и других многослойных схем применяется следующим образом. Используя те же определения и предположения, что и в предыдущих примерах, уравнение (3.145) можно записать в следующем виде:

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^{n-1} - C\left(\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n\right), \tag{3.146}$$

где $C = u\Delta t/\Delta x$ — число Куранта. Подставляя сюда фурье-компоненты, получаем связь для амплитуд

$$V^{n+1} = aV^n + V^{n-1}, \tag{3.147}$$

где

$$a = -2IC\sin\theta. \tag{3.148}$$

Чтобы получить матричное уравнение, добавим к (3.147) тождество

$$V^n = 1 \cdot V^n + 0 \cdot V^{n-1}. \tag{3.149}$$

Рассматривая это уравнение совместно с уравнением (3.147), получаем

$$\begin{bmatrix} V^{n+1} \\ V^n \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} V^n \\ V^{n-1} \end{bmatrix}, \tag{3.150}$$

где множитель перехода $G$ теперь представляет собой матрицу

$$G = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.151}$$

Для изученной ранее однослойной схемы множитель перехода $G$ был просто числом, а условие устойчивости имело вид $|G| \leqslant 1$. В данном случае, когда $G$ представляет собой матрицу, условие устойчивости (согласно фон Нейману) имеет следующий вид:

$$|\lambda| \leqslant 1, \tag{3.152}$$

де $\lambda$ — все возможные собственные значения матрицы $G$ [1]). Собственное значение $\lambda$ матрицы определяется как корень характеристического уравнения, которое получается приравниванием нулю определителя матрицы, у которого из каждого диагонального элемента вычитается $\lambda$.) Таким образом, характеристическое уравнение для определения матрицы $G$ записывается так:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3.153}$$

Когда $G$ представляет собой просто число, как в предыдущих примерах, оно рассматривается как одномерная матрица. Тогда равнение для определения собственного значения принимает ид $G - \lambda = 0$ или $\lambda = G$, поэтому условие (3.152) сведется предыдущему условию (3.102), а именно $|G| \leqslant 1$.) Раскрывая пределитель и решая полученное квадратное уравнение для $\lambda$, находим два решения:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\left[a \pm \sqrt{a^2 + 4}\,\right]. \tag{3.154}$$

Учитывая, что $a = -2I\,\mathrm{C}\sin\theta$ и $a^2 = -4\mathrm{C}\sin^2\theta$, имеем

$$\lambda_{\pm} = -I\mathrm{C}\sin\theta \pm \sqrt{1 - \mathrm{C}^2\sin^2\theta}. \tag{3.155}$$

В тех случаях, когда $\mathrm{C}^2\sin^2\theta > 1$, квадратное подкоренное выражение будет отрицательным, и тогда

$$\lambda_{\pm} = I\left[-\mathrm{C}\sin\theta \pm \sqrt{\mathrm{C}^2\sin^2\theta - 1}\,\right]. \tag{3.156}$$

При этом абсолютная величина $|\lambda| > 1$, что означает неустойчивость. В том же случае, когда $\mathrm{C}^2\sin^2\theta \leqslant 1$, для чего, вообще говоря, требуется выполнение условия

$$\mathrm{C} \leqslant 1, \tag{3.157}$$

для абсолютной величины $\lambda$ получаем

$$|\lambda_{\pm}|^2 = \mathrm{C}^2\sin^2\theta + (1 - \mathrm{C}^2\sin^2\theta), \tag{3.158}$$

$$|\lambda_{\pm}| = 1 \quad \text{при} \quad \mathrm{C} \leqslant 1. \tag{3.159}$$

Это, очевидно, удовлетворяет условию устойчивости (3.152) в предельном случае равенства. Аналогичный результат получается также при двух пространственных переменных, но здесь для устойчивости требуется выполнение неравенства $\mathrm{C}_x + \mathrm{C}_y \leqslant 1$.

[1]) Часто для удобства это условие формулируется так: для устойчивости схемы спектральный радиус матрицы $G$ не должен превышать единицы, т. е. $\rho(G) \leqslant 1$, где $\rho(G) = \max|\lambda_p|$, а $\lambda_p$ есть $p$-е собственное значение $G$. Спектральный радиус, очевидно, есть радиус круга в комплексной плоскости, центр которого находится в точке $(0, 0)$ и внутри которого лежат все собственные значения.

Можно думать, что даваемое (3.159) значение $|\lambda_{\pm}| = 1$, отвечающее границе устойчивости, является приемлемым лишь в крайнем случае, но в действительности это значение даже весьма желательно, если решение исходного дифференциального уравнения не является затухающим. В самом деле, уравнение конвекции (3.144) *при отсутствии вязкости и постоянном* $u$ выражает тот факт, что произвольное начальное распределение функции $\zeta(x, 0)$ просто сдвигается со скоростью конвекции $u$; значит, для любого сдвига $\tau$ по времени решение этого уравнения имеет вид

$$\zeta(x, t + \tau) = \zeta(x - u\tau, t). \tag{3.160}$$

Таким образом, метод фон Неймана показывает, что схема «чехарда» правильно моделирует одно из свойств, присущих решению исходного дифференциального уравнения при $u = \text{const}$, а именно отсутствие затухания. Любая разностная схема для решения уравнения для невязкой жидкости, такая, что $|G| < 1$, обладает ошибкой, обусловленной искусственным или численным затуханием. В любой сходящейся разностной схеме эта ошибка должна, конечно, стремиться к нулю при $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$, но применение метода фон Неймана показывает, что схема «чехарда» при $u = \text{const}$ и $C \leqslant 1$ обладает нулевой ошибкой, обусловленной затуханием, даже при конечных $\Delta x$ и $\Delta y$.

Действительно, в частном случае $C = 1$ рассматриваемая схема дает точные результаты. Полагая $\tau = \Delta t$, имеем $x - u\tau = x - C\Delta x$, поэтому при $C = 1$ решение (3.160) можно переписать так:

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_{i-1}^n. \tag{3.161}$$

Следовательно, точное решение дифференциального уравнения, если его рассматривать в узловых точках конечно-разностной сетки, выражает перенос величины $\zeta$ *из точки* $i - 1$ *на слое* $n$ в точку $i$ на слое $n + 1$. Величина $\zeta$ за один шаг по времени переносится с конвективной скоростью $u$ на расстояние $u\Delta t$, а при $C = 1$ расстояние $u\Delta t$ равно $\Delta x$. Через два временны́х шага точное решение будет

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_{i-2}^{n-1}. \tag{3.162}$$

В результате применения схемы «чехарда» (3.146) *при* $C = 1$ получаем

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^{n-1} - \zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n. \tag{3.163}$$

Задав правильные начальные значения согласно уравнению (3.161), а именно $\zeta_{i+1}^n = \zeta_i^{n-1}$ и $\zeta_{i-1}^n = \zeta_{i-2}^{n-1}$, получаем, что разностное решение (3.163) совпадает с точным решением (3.162). Таким образом, при $u = \text{const}$ и $C = 1$ схема «чехарда» дает точное решение

Однако при практических гидродинамических расчетах, когда скорость меняется в пространстве, ограничение на шаг $\Delta t$ будет определяться (если не учитывать дополнительные усложнения, обусловленные нелинейностью) наибольшим значением $u$ в узловых точках сетки. Значит, вообще говоря, нельзя получить $C = 1$ во всех точках. Но при $C < 1$ разностная схема «чехарда» уже не будет давать точного решения.

Прежде всего вопреки результатам метода фон Неймана рассматриваемой схеме может быть присуще некоторого рода численное затухание, хотя это обычно не допускается. На рис. 3.10 представлены трехмерные графики величины $\zeta(x, t)$, рассчитанной по схеме «чехарда» при синусоидально меняющейся на входной границе потока величине $\zeta(0, t) = \sin t$. При $C = 1$, как видно на рис. 3.10, *а*, получается точное решение с синусоидальным законом на входной границе, которое переносится за счет конвекции без затухания. На рис. 3.10, *б* построена диаграмма, рассчитанная с вдвое меньшим шагом по времени, т. е. при $C = {}^1/_2$. Ясно видно, что в этом случае максимум амплитуды первого горба уменьшается по мере движения вниз по потоку. Рис. 3.10, *в* снова соответствует $C = {}^1/_2$, но период изменения $\zeta$ на входной границе и величина шага по времени выбраны таким образом, чтобы их отношение (и шаг $\Delta x$) были такими же, как и для рис. 10, *а*; в этом случае затухание очень сильное.

Здесь возникает вопрос относительно применения термина «затухание». Метод фон Неймана стал настолько широко известным, что «затухание» обычно понимается в смысле поведения фурье-компонент как случай, когда $|\lambda| < 1$. Очевидно, если термин «затухание» означает по определению, что $|\lambda| < 1$, то схема «чехарда» по определению не обладает затуханием. Уменьшение же экстремальных величин амплитуды, которое видно на рис. 3.10, *б* и 3.10, *в*, правильно связывать с дисперсионной ошибкой [1]), которая проявляется в методе фон Неймана и будет кратко обсуждаться в дальнейшем. Такая терминология целесообразна, и ее можно даже рекомендовать в тех случаях, когда имеется в виду, что схема в самом деле может вызывать уменьшение экстремальных величин амплитуд волн. В обычной речи такое свойство называется «затуханием»; что же касается рис. 3.10, *в*, то лучше было бы говорить, что волна

[1]) Дисперсионную ошибку мы будем обсуждать на стр. 123—124, а пока ограничимся кратким замечанием. Ошибка в волновой скорости различна для различных фурье-компонент, поэтому каждая из них имеет различную скорость конвекции. Таким образом, фурье-компоненты исходного распределения имеют тенденции «размазываться» или диспергировать в процессе решения. Эта ошибка обычно больше для компонент с меньшей длиной волны и, конечно, зависит от числа Куранта, причем при $C = 1$ она не возникает.

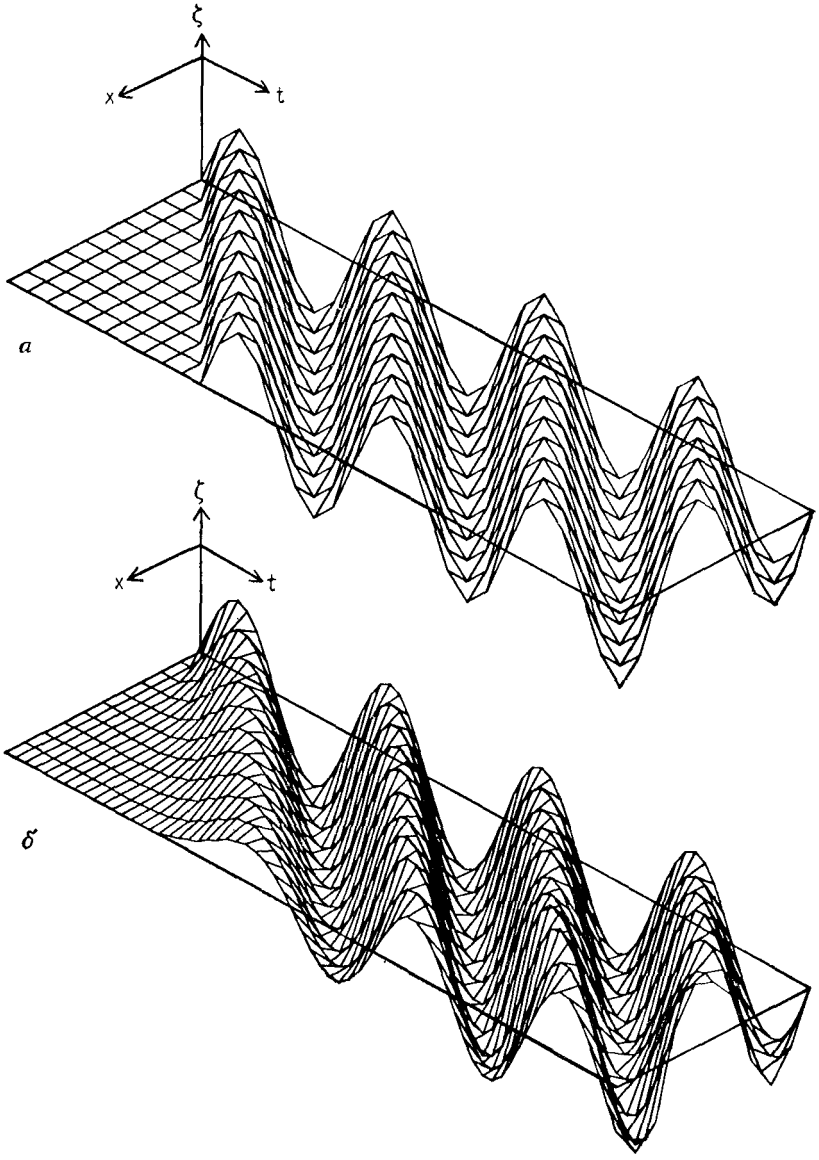



Рис. 3.10. Решения уравнения $\partial\zeta/\partial t = -u\partial\zeta/\partial x$, полученные при помощи схемы «чехарда». Здесь C — число Куранта, $N$ — сеточная частота. Диаграммы любезно предоставлены У. Сандбергом из лаборатории Сандиа. *а*: $C = 1$, $N = 8$; *б*; $C = 0.5$, $N = 16$.

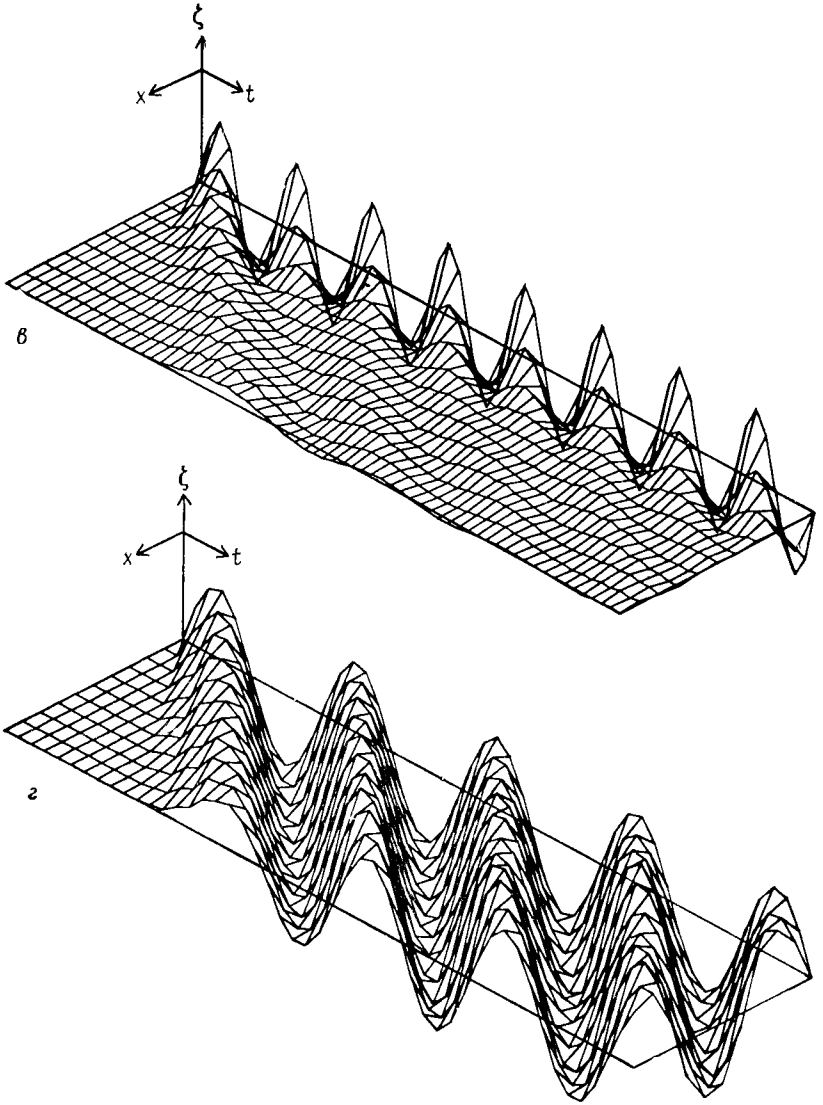



Рис. 3.10. Продолжение. *в*: C = 0.5, $N = 8$; *г*: C = 0.75, $N = 10^2/_3$.

не затухает, а уменьшает свою амплитуду по мере ее переноса за счет конвекции.

Основываясь на рис. 3.10, можно сделать и другое очень интересное заключение. Обычно не обращают внимания на то, что при решении конечно-разностных уравнений для задач, аналогичных представленной на рис. 3.10, существует *два* характеристических параметра. Первый параметр представляет собой число Куранта, которое является единственным параметром при решении конечно-разностного уравнения во внутренних точках. Вторым параметром является сеточная частота $N = 2\pi/\Delta t$, т. е. число временны́х слоев за период изменения функции на входной границе потока.

Сравнение рис. 3.10, *б* и 3.10, *в* приводит к выводу, что для фиксированного $C < 1$ затухание (уменьшение экстремальных амплитуд) ослабляется с увеличением сеточной частоты в том случае, когда сеточная частота $N$ представляет собой целое число. Но когда $N$ не является целым числом (случай, изображенный на рис. 3.10, *г*), то происходит «недозатухание» амплитуды; как показано на рис. 3.10, *г*, амплитуды «недозатухают» на 15% от амплитуды пика на входной границе, что обусловлено фазовыми ошибками. Данный эффект нельзя полностью отнести за счет условия на выходной границе потока; уже до того, как почувствуется какое-либо влияние этих условий, наблюдается недозатухание амплитуды на 8%.

Схеме «чехарда» присущи также другие ошибки и аномалии. Дифференциальное уравнение (3.144) является уравнением первого порядка по пространственным переменным и по времени; для всех $x > 0$, $t > 0$ решение полностью определяется заданием начальных условий $\zeta(x, 0)$ и граничных условий $\zeta(0, t)$. Но для начала вычислений при помощи дискретного аналога (3.145) требуется два набора начальных условий, так как для расчета значений на $(n+1)$-м слое необходимы значения на $n$-м и $(n-1)$-м слоях.

Таким образом, конечно-разностное уравнение фактически является уравнением второго порядка по времени и требует начальных условий $\zeta_i^1$ и $\zeta_i^2$; это аналогично заданию начальных значений $\zeta(x, 0)$ и $\left.\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right|_{t=0}$ для дифференциального уравнения, что делает задачу для дифференциального уравнения *переопределенной*. Для получения $\zeta_i^2$ должна быть использована другая «разгонная» конечно-разностная схема, после чего можно применять схему «чехарда». Если такая «разгонная» схема дает точные результаты, как это предполагалось после обсуждения уравнения (3.163), то последующее решение по схеме «чехарда» при $C = 1$ будет точным. Если же «разгонная» схема вносит

ошибку в значения $\zeta^2$, то эта ошибка будет сохраняться при последующих расчетах по схеме «чехарда».

Таким образом, правильнее говорить, что схема «чехарда» при $C = 1$ *сохраняет*, а не дает точное решение, заданное на первом временно́м слое, для всех времен.

Другим типом ошибки схемы «чехарда» (и всех других схем) при $C < 1$ является *фазовая ошибка*. При решении дифференциального уравнения все начальное распределение $\zeta(x, 0)$ распространяется со скоростью конвекции $u$. При конечно-разностных расчетах различные фурье-компоненты имеют разные

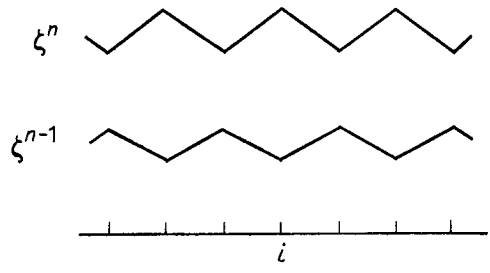



Рис. 3.11. Фурье-компонента с длиной волны $\Lambda = 2\Delta x$ на пространственной сетке бесконечной протяженности.

скорости конвекции, причем скорость компонент с наибольшей длиной волны $\Lambda$ приближается к правильному значению $u$, а компоненты с меньшими длинами волн распространяются с меньшими скоростями. Фазовая ошибка будет подробно обсуждаться в разд. 3.1.13, но это явление легко продемонстрировать, рассматривая (см. рис. 3.11) наименьшую возможную длину волны $\Lambda = 2\Delta x$ на пространственной сетке бесконечной протяженности. Для общности возмущения на $(n-1)$-м и $n$-м временны́х слоях взяты с различными амплитудами, что соответствует использованию «разгонной» схемы, для которой не выполняется условие $G = 1$.

Из рис. 3.11 ясно, что

$$\left.\frac{\delta\zeta}{\delta t}\right|_i^n = \frac{\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \qquad (3.164)$$

для всех $i$. Таким образом, $\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^{n-1}$, $\zeta_i^{n+2} = \zeta_i^n$ и т. д. Значит, здесь имеет место чередование двух искусственно заданных начальных распределений с произвольной амплитудой. Фурье-компонента с длиной волны $\lambda = 2\Delta x$ является *полностью стационарной*, причем имеет место полная ошибка фазовой скорости.

Это странное поведение совместимо с тем, казалось бы, противоречащим ему фактом, что схема «чехарда» при $C = 1$ сохраняет точное решение. Если начать расчет с точного решения $\zeta_i^n = \zeta_{i-1}^n$, то для компоненты с $\Lambda = 2\Delta x$ следующее правильное решение в самом деле будет $\zeta_i^{n+1} = \zeta_{i-2}^{n-1} = \zeta_i^{n-1}$. Ясно, что, хотя схема «чехарда» имеет второй порядок точности, *в действительности точность определяется точностью «разгонной» схемы*, используемой на начальной стадии расчета [1]).

Опыт расчетов показывает, что явления, продемонстрированные на этой модельной задаче с постоянной скоростью конвекции, возникают также и в нелинейных задачах. Таким образом, в практических расчетах всегда имеется возможность *расчленения решения по временны́м шагам* (Лилли [1965]), когда развиваются два несвязанных расчлененных решения, чередующихся на каждом шаге. Заметим, что, поскольку $\partial\zeta/\partial t = 0$, изменение временно́го шага не приведет к изменению двух расчлененных решений! Лилли [1965] указал, что такая «неустойчивость», связанная с расчленением решения по временны́м шагам, по всей видимости, развивается при приближении к стационарному состоянию. Автор настоящей книги также сталкивался с этим явлением в случае уравнений для плоского течения даже при наличии вязкости. При решении задачи об обтекании обратного уступа за счет вязких членов (которые не могут быть рассмотрены с помощью схемы «чехарда», см. разд. 3.1.7) возникла тенденция свести воедино два расчлененных решения, но при приближении к стационарному состоянию расчлененные решения развивались даже при столь малом значении числа Рейнольдса, как $\mathrm{Re} = 100$ [2]).

Схема «чехарда», рассмотренная для конвективных членов, применима также для течений с малыми Re (Хын и Макано [1966]) и для течений невязкой жидкости при условии, что точное начальное решение рассчитывается отдельно и что стационарное состояние не достигается.

---

[1]) Для того чтобы получить хорошее начальное решение, можно брать меньшие величины $\Delta t$ для первых 10—20 шагов по времени, используя какую-либо двухслойную схему. Однако вопрос о начальном решении нетривиален. Например, Полджер [1971] показал, что в случае использования схемы «чехарда» для производных по времени в уравнениях для невязкой жидкости начальное решение оказывает существенное влияние на нелинейную неустойчивость при больших значениях времени.

[2]) Фромм [1967] сообщил, что Минцу [1965] удалось избавиться от такого расчленения решения по временны́м шагам (которое он назвал фазовой неустойчивостью), периодически полагая решение на $(n-1)$-м слое равным решению на $n$-м слое. Но не ясно, как часто это надо делать, когда начинать и как это повлияет на нестационарное и стационарное решения. Вопрос о свойствах решений, расчлененных по временны́м шагам, остается открытым.

В схеме «чехарда» (и во всех схемах второго порядка точности с центральными разностями по пространственным переменным) имеют место и дополнительные ошибки. Рассмотрим конечно-разностную схему, у которой наибольшее значение $i$ равно $IL$. Применение схемы «чехарда» (3.145) для вычисления $\zeta_{IL}^{n+1}$ потребовало бы значения величины $\zeta_{IL+1}^{n}$ в точке, которая находится вне расчетной сетки. Поэтому в точке $IL$ нельзя провести расчеты и для определения $\zeta_{IL}^{n+1}$ требуется задать численное граничное условие в $IL$.

Подобные условия будут рассматриваться в разд. 3.3, а здесь мы лишь укажем, что такое требование аналогично необходимости задания двух наборов начальных условий и ведет к переопределенности задачи для дифференциального уравнения. Заметим также, что обычно используемое условие равенства нулю градиента для задания условия на входной границе потока (см. разд. 3.3.7), когда полагают $\zeta_{IL}^{n+1} = \zeta_{IL-1}^{n+1}$, приводит к движению стационарной (в прочих отношениях) фурье-компоненты с длиной волны $\Lambda = 2\Delta x$, но это движение не имеет ничего общего с тем, что происходит при конвекции. С ростом времени эта фурье-компонента с $\Lambda = 2\Delta x$ затухает по сетке справа (от выходной границы потока) налево, тогда как настоящая конвекция развивается слева направо.

Такое неправильное требование, состоящее в задании дополнительного условия на выходной границе потока, является следствием ошибки еще одного вида, а именно обусловленной нарушением свойства транспортивности, которая будет обсуждаться ниже.

*Упражнение.* При помощи вычислений вручную и геометрических соображений проверить, что схема «чехарда» дает правильное поведение решения на левой границе (входная граница потока). Задав начальное условие, включающее только компоненту с $\lambda = 2\Delta x$, и зафиксировав граничное условие на входной границе потока для всех моментов времени, начать расчеты по схеме «чехарда» при $C = 1$ при точном решении на втором временно́м слое. Показать, что при $C = 1$ начальный профиль правильно распространяется по сетке.

Следует также заметить, что название «чехарда» применяется для многих схем, отличающихся видом аппроксимации пространственных производных, но все они являются трехслойными и используют центральные разности по времени, как и только что рассмотренная схема.

### 3.1.7. Схема «чехарда» Дюфорта — Франкела

Как было показано, при использовании центральных разностей как по времени, так и по пространственным переменным для аппроксимации модельного уравнения, описывающего тече-

ние невязкой жидкости, схема «чехарда» обладает некоторыми желательными свойствами, включая второй порядок точности по пространственным переменным и по времени и тот факт, что множитель перехода $|G| = 1$. К сожалению, эта разностная схема, примененная к уравнению диффузии, приводит к безусловно неустойчивой схеме Ричардсона. Так как $|G| = 1$ для уравнения, содержащего только конвективный член, а для уравнения диффузии $|G| > 1$, то неудивительно, что разностное уравнение (3.17), включающее конвективный и диффузионный члены, также безусловно неустойчиво.

Некоторые авторы комбинировали схему «чехарда», имеющую ошибку порядка $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$, для конвективных членов со схемой, использующей разности вперед по времени и центральные разности по пространственным переменным (на интервале $2\Delta t$) и имеющей ошибку порядка $O(\Delta t, \Delta x^2)$, для диффузионных членов:

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^{n-1}}{2\Delta t} = -\frac{u\zeta_{i+1}^n - u\zeta_{i-1}^n}{2\Delta x} + \alpha \frac{\zeta_{i+1}^{n-1} + \zeta_{i-1}^{n-1} - 2\zeta_i^{n-1}}{\Delta x^2}. \quad (3.165)$$

Формально порядок ошибки аппроксимации соответствует величине ошибки при $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$, поэтому общая ошибка аппроксимации для конечно-разностного уравнения (3.165) будет величиной порядка $O(\Delta t, \Delta x^2)$. На практике величина такой ошибки может быть меньше. При малых, но отличных от нуля $\Delta t$ можно считать, что $\alpha = 1/\mathrm{Re} = O(\Delta t)$. В этом случае первый отбрасываемый член в ряде Тейлора диффузионного члена будет иметь порядок $O[\alpha(\Delta t, \Delta x^2)]$, а величина суммарной ошибки для уравнения (3.165) — порядок $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$. Условие устойчивости для уравнения (3.165) будет определяться наиболее жестким из условий, связанных с конвективным членом, $C = u\Delta t/\Delta x \leqslant 1$, и с диффузионным членом, $d = \alpha\Delta t/\Delta x^2 \leqslant 1/2$. (Устойчивость для конвективного и диффузионного членов во многих случаях, но не всегда, можно исследовать раздельно; см., например, Касахара [1965].) Известной явной схемой, устраняющей ограничение, обусловленное диффузионным членом, является схема Дюфорта и Франкела [1953]. Эту схему для решения многих задач гидродинамики с успехом использовали разные авторы, например, Пейн [1958], Фромм и Харлоу [1963], Фромм [1963, 1965, 1967], Амсден и Харлоу [1964], Хын и Макано [1966], Торранс [1968].

В диффузионном члене уравнения (3.17) значение $\zeta_i^n$ в центральной узловой точке заменяется средним по времени значением для $(n+1)$-го и $(n-1)$-го слоев, что дает

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^{n-1}}{2\Delta t} = -\frac{u\zeta_{i+1}^n - u\zeta_{i-1}^n}{2\Delta x} + \alpha \frac{\zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n - \zeta_i^{n+1} - \zeta_i^{n-1}}{\Delta x^2}. \quad (3.166)$$

Несмотря на то что здесь в правую часть входят значения на $(n+1)$-м слое, эти значения относятся к точке $i$. Следовательно, уравнение (3.166) можно явно разрешить относительно $\zeta_i^{n+1}$:

$$\zeta_i^{n+1} = \frac{\zeta_i^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u\zeta_{i+1}^n - u\zeta_{i-1}^n\right) + \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\left(\zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n - \zeta_i^{n-1}\right)}{1 + \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}}. \quad (3.167)$$

При помощи метода фон Неймана для анализа устойчивости можно убедиться в том, что единственным условием устойчивости для уравнения (3.167) является условие $C \leqslant 1$, как в случае невязкой жидкости. В многомерном случае при больших Re возможно ослабление этого условия более чем на 50% (см. Шуман [1975]).

Эта схема обладает интересным свойством. Если функции, входящие в уравнение (3.167), разложить в ряды Тейлора (как в разд. 3.1.5. в), то получится уравнение гиперболического типа:

$$\alpha\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + \frac{\partial\zeta}{\partial t} = -u\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}. \quad (3.168)$$

Устойчивость схемы Дюфорта — Франкела «можно считать обусловленной наличием гиперболического члена в уравнении дифференциального приближения» (Дюфорт и Франкел [1953]). Таким образом, конечно-разностное уравнение (3.167) аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение (т. е. при $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ стремится к модельному уравнению (2.18), содержащему конвективный и диффузионный члены) только в том случае, когда $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ так, что $\Delta t/\Delta x \to 0$. Если же $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$, но $\Delta t/\Delta x \neq 0$, то конечно-разностное уравнение (3.167) будет аппроксимировать уравнение (3.168) гиперболического типа.

На практике характер стремления $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$ не выбирается и понятие аппроксимации становится нечетким. Но уравнение (3.168) дает практическое руководство для расчетов. Если сходимость нестационарного решения проверяется (как это обычно делается на практике для обыкновенных дифференциальных уравнений) численно путем пересчета решения с вдвое меньшим шагом $\Delta x$, то $\Delta t$ следует уменьшать более чем в 4 раза (Рихтмайер [1957]). Если к тому же перенести вторую производную по времени в правую часть уравнения (3.168), то получится

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -u\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + O\left[\Delta t^2, \Delta x^2, \alpha(\Delta t/\Delta x)^2\right]. \quad (3.169)$$

Отсюда видно, что рассматриваемая схема имеет второй порядок точности только в том случае, когда $\alpha(\Delta t/\Delta x)^2$ мало. Действительно, для первого порядка точности по времени получаем

условие $O[\alpha(\Delta t/\Delta x)^2] = O(\Delta t)$, или $\alpha\Delta t/\Delta x^2 = O(1)$. Это совпадает с условием устойчивости (3.72) $d \leqslant 1/2$ для простой схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным (ВВЦП), имеющей первый порядок точности по времени.

Мы уже указывали выше, что конечно-разностные аналоги могут воспроизводить некоторые свойства дифференциальных уравнений даже без перехода к пределу при $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$. Таковыми свойствами являются свойство независимости порядка дифференцирования $\delta^2 f/\delta x\delta y = \delta^2 f/\delta y\delta x$, свойство консервативности, равенство единице множителя перехода для схемы «чехарда» и свойство транспортивности, которое будет кратко рассмотрено ниже. Уравнение диффузии, рассмотренное выше, обладает свойством ограниченности, которое заключается в том, что $\zeta(x, t)$ никогда не превосходит максимальных значений начальных и граничных условий [1]), поставленных для уравнения $\partial\zeta/\partial t = \alpha\partial^2\zeta/\partial x^2$. Это справедливо и для конечно-разностной схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной при условии, что расчет устойчив. (Как указывалось в разд. 3.1.5. а, это свойство можно вывести из условия отсутствия осцилляций, обусловленных чрезмерно большим шагом по времени.) Гордон [1968] показал, что схема Дюфорта — Франкела не отражает такого поведения из-за наличия членов порядка $O(\Delta t, \Delta x)$ и это является ее дополнительным недостатком.

Тейлор [1970] показал, что граничные условия типа Неймана (задание величины градиента $\zeta$) могут привести к неустойчивости численного решения уравнения диффузии по схеме Дюфорта — Франкела, если представление разностей в граничных точках плохо согласовано со схемой расчета во внутренних точках. По-видимому, такое согласование не столь важно для течений с большими Re, но существенно для течений с малыми Re и в задачах диффузии. Аллен [1968] столкнулся с некоторыми трудностями решения у границы при применении этой схемы к уравнениям, описывающим течения сжимаемой жидкости.

Несмотря на то что схема Дюфорта — Франкела обладает некоторыми недостатками, она имеет те преимущества, что является явной и абсолютно устойчивой. В практических расчетах с фиксированными $\Delta x$ и малым $\alpha$, как отмечено выше, разностное уравнение может иметь «второй порядок» точности в смысле малости величины ошибок, а не в смысле действительного по-

[1]) *В применении к уравнению теплопроводности это свойство связано* со вторым законом термодинамики. Температура замкнутого объема вещества, определяемая только диффузией, не может превышать своего наибольшего начального значения и своего наибольшего значения на границе объема.

рядка точности. Пирсон [1965а, б] показал, что в некоторых практических расчетах схема Дюфорта — Франкела является более точной, чем схема с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной (см. также Фромм [1964]).

Конечно-разностное представление Дюфорта — Франкела, рассмотренное для диффузионных членов, можно использовать и в сочетании с другими трехслойными схемами для конвективных членов, но при этом каждый раз необходимо исследовать устойчивость полного уравнения. Единственной другой одношаговой явной абсолютно устойчивой схемой для уравнения диффузии является одна из схем Саульева (Саульев [1964], Рихтмайер и Мортон [1967], Карнахан и др. [1969]; см. также разд. 3.1.17). Как показывает неопубликованное исследование автора, этот подход оказался неприменимым к полному уравнению, включающему конвективный и диффузионный члены. При применении любой из этих схем к конвективным членам для любого числа Куранта $C > 0$ получается то же ограничение на шаг по времени, которое определяется диффузионным членом для простой схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной. Кроме того, схема Саульева в действительности оказывается неявной по граничным условиям, которые требуют особого рассмотрения при гидродинамических расчетах.

Поучительно рассмотреть двухслойную схему, аналогичную схеме Дюфорта — Франкела. Аллен [1968] заметил коварную ловушку, имеющуюся при этом подходе. Рассматривая схему с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной (ВВЦП) для уравнения диффузии

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n - 2\zeta_i^n}{\Delta x^2}, \tag{3.170}$$

заменим, как и в схеме Дюфорта — Франкела, значение в средней точке $\zeta_i^n$ в диффузионном члене на $\zeta_i^{n+1}$; это даст

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n - 2\zeta_i^{n+1}}{\Delta x^2}. \tag{3.171}$$

Отсюда можно в явном виде найти значение $\zeta_i^{n+1}$. Метод фон Неймана исследования устойчивости показывает, что (как и можно надеяться) такая схема абсолютно устойчива. Но после простых алгебраических преобразований эту схему можно переписать так:

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t'} = \alpha \frac{\zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n - 2\zeta_i^n}{\Delta x^2}, \tag{3.172}$$

где

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{1 + 2\alpha\,\Delta t/\Delta x^2}. \tag{3.173}$$

Теперь условие устойчивости для уравнения (3.172) имеет вид $\Delta t' \leqslant {}^1/_2\Delta x^2/\alpha$; в то же время из равенства (3.173) при $\Delta t \to \infty$ следует, что $\Delta t' \to {}^1/_2\Delta x^2/\alpha$. Иначе говоря, схема (3.171) представляет собой всего лишь завуалированную простую схему с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной с ошибочно предполагаемой величиной шага по времени (ошибочно предполагаемой, так как пользователь думает, что результат, полученный после $n$ шагов по времени, соответствует моменту времени $n\Delta t$, в действительности же он соответствует времени $n\Delta t'$) [1].

Полезно рассмотреть схему Дюфорта — Франкела в применении к стационарному течению. В этом случае

$$\zeta_i^n = \frac{1}{2}\left(\zeta_i^{n+1} + \zeta_i^{n-1}\right) \tag{3.174}$$

и легко видеть, что схема Дюфорта — Франкела алгебраически эквивалентна схеме Ричардсона (схеме «чехарда» как для конвективных, так и для диффузионных членов). Однако анализ показывает, что схема Дюфорта — Франкела устойчива, в то время как схема Ричардсона безусловно неустойчива. Разрешение этого парадокса связано с идеей корректной постановки задачи или чувствительности решения к начальным данным. Поскольку некоторые специальные случаи несущественны для практических расчетов, мы не будем рассматривать устойчивость в этих случаях. Тогда, если

$$\zeta_i^n = \frac{1}{2}\left(\zeta_i^{n+1} + \zeta_i^{n-1}\right) + \varepsilon_i, \tag{3.175}$$

где $\varepsilon_i$ — произвольно малые, но не все тождественно равные нулю числа, то расчеты конечно-разностных уравнений по схеме Ричардсона расходятся, а по схеме Дюфорта — Франкела устойчивы. Заметим, что в любой реальной задаче гидродинамики $\varepsilon_i$ не равны тождественно нулю.

Заметим также, что при $d \equiv \alpha\Delta t/\Delta x^2 = {}^1/_2$ схема Дюфорта — Франкела, примененная к уравнению диффузии без конвективного члена, алгебраически эквивалентна схеме с разностями вперед по времени и центральными разностями по про-

[1]) Данная схема содержит ошибку аппроксимации, связанную с отбрасыванием членов. Строго говоря, эта схема может быть математически аппроксимирующей, если, например, устремить $\Delta x$ и $\Delta t$ к нулю таким образом, чтобы отношение $\Delta t/\Delta x^3$ было постоянным — это даст в пределе $t' \to t$.

странственной переменной. Но при $d \neq 1/2$ эти две схемы, полученные по ним результаты и свойства устойчивости оказываются различными.

### 3.1.8. Первая схема с разностями против потока. Ошибки, обусловленные схемной искусственной вязкостью

Одношаговая явная двухслойная по времени схема, обеспечивающая статическую устойчивость для конвективных членов, основана на использовании односторонних, а не центральных разностей по пространственным переменным. Когда скорости положительны, то используются разности назад, и наоборот [1]). Таким образом, односторонняя разность всегда берется против потока, т. е. в направлении вверх по течению от точки, в которой вычисляется $\delta\zeta/\delta t$ [2]). Данная схема имеет ошибку аппроксимации $E = O(\Delta t, \Delta x)$ и записывается так:

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = \begin{cases} -\dfrac{u\zeta_i^n - u\zeta_{i-1}^n}{\Delta x} & \text{при } u > 0, \\ -\dfrac{u\zeta_{i+1}^n - u\zeta_i^n}{\Delta x} & \text{при } u < 0. \end{cases} \tag{3.176}$$

Данная схема часто применяется в литературе под различными названиями и с разными объяснениями. Метеорологам давно известно стабилизирующее влияние разностей против потока (Лилли [1965], Вазов и Форсайт [1960]) или «наветренных (Франкел [1956]) разностей [3]), и они используют их для решения задач о течении несжимаемой жидкости и о течении в приближении Буссинеска. Математики относят эту схему к разностным уравнениям «с положительными коэффициентами» (Вазов и Форсайт [1960], Моцкин и Вазов [1953]); употребляется также термин «несимметричные разности» (Ломекс с соавторами [1970]).

Эту схему Рихтмайер [1957] сначала приписывал Лелевье, впервые применившему ее для исследования течения невязкой сжимаемой жидкости при условии симметрии слоя. Робертс и Вейс [1966], Курцрок [1966] и Крокко [1965], по-видимому следуя Рихтмайеру, тоже связывали ее с именем Лелевье. В более поздней работе того же Рихтмайера (Рихтмайер [1963]) эта схема была названа «схемой с разностями против потока»

[1]) Термины «назад» или «вперед», очевидно, имеют смысл только по отношению к скорости.

[2]) С учетом этого при переводе принято название «схема с разностями против потока». — *Прим. ред.*

[3]) «Наветренным разностям» противоположны безусловно неустойчивые «подветренные разности» (Франкел [1956]).

и указано (в этом к Рихтмайеру присоединились Стоун и Брайен [1963]), что она восходит к статье Куранта, Изаксона и Риса [1952]. В этой статье была впервые продемонстрирована тесная связь данной схемы с теорией характеристик, а сама схема применена для плоских течений невязкой сжимаемой жидкости.

Схема «типа II» Лонгли [1960] и первая схема Филлера и Ладлоффа [1961] представляют собой применение обсуждаемой схемы для исследования одномерных течений сжимаемой жидкости с учетом вязкости. В методе FLIC (метод жидкости в ячейках) Джентри, Мартина и Дали [1966] данная схема называется «разностной схемой с донорными ячейками» [1]). Курцрок [1966] применил эту схему для исследования плоского течения вязкой сжимаемой жидкости и нашел критическое условие для величины шага по времени в этом случае. В литературе можно найти и много других приложений этой схемы.

Переписывая уравнения (3.176) и вводя число Куранта $C = u\Delta t/\Delta x$ с положительной постоянной скоростью $u$, получаем

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - C\left(\zeta_i^n - \zeta_{i-1}^n\right). \tag{3.177}$$

При $C = 1$ эта схема дает $\zeta_i^{n+1} = \zeta_{i-1}^n$, что соответствует точному решению (см. разд. 3.1.6). Условие $C = 1$ является также предельным условием устойчивости (см. предыдущее упражнение). При $C < 1$ схема вносит искусственное затухание; при этом исследование устойчивости по методу фон Неймана показывает, что матрица перехода имеет собственные значения $\lambda < 1$. Любая схема для уравнения с одним только конвективным членом в невязком случае при $\lambda < 1$ обладает таким схемным искусственным затуханием, а разложение в ряд Тейлора (так же, как и применение метода Хёрта исследования устойчивости) показывает, что уравнение (3.176) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial (u\zeta)}{\partial x} + \alpha_e \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \text{ЧВП} + \text{ПВП}, \tag{3.178}$$

где ПВП — производные высшего порядка, а

$$\alpha_e = {}^1/_2 u\,\Delta x\,(1 - C). \tag{3.179}$$

Поскольку здесь появляется нефизический коэффициент $\alpha_e$ при производной $\partial^2\zeta/\partial x^2$, это объясняет не только искусственное затухание, но, говоря конкретнее, и то, что схема с разностями

[1]) Схему с донорными ячейками Джентри, Мартина и Дали мы будем рассматривать ниже, называя ее второй схемой с разностями против потока (см. разд. 3.1.11).

против потока обладает *схемной искусственной диффузией* (Нох и Проттер [1963]), или *схемной искусственной вязкостью* [1]).

Интерпретация коэффициента $\alpha_e$ в случае многомерных и вязких течений не столь очевидна, как это могло бы показаться. Рассмотрим, например, случай, когда достигается стационарное состояние. Тогда левая часть уравнения (3.176) обращается в нуль и можно уменьшать $\Delta t$, не меняя при этом решения конечно-разностного уравнения. Уравнение же (3.179) иоказывает, что уменьшение $\Delta t$ приводит к увеличению $\alpha_e$ (через C). Если понятие схемной вязкости $\alpha_e$ имеет какой-либо смысл, то решение конечно-разностного уравнения, казалось бы, должно было зависеть от величины $\alpha_e$. Однако если вместо исследования нестационарного уравнения положить $\partial\zeta/\partial t = 0$ в уравнении (3.176) и воспользоваться разложением в ряды Тейлора, то получится

$$\alpha_e = {}^1/_2 u\,\Delta x. \tag{3.180}$$

При этом $\alpha_e$ не является функцией от $\Delta t$ и стационарное решение не зависит от $\Delta t$.

Противоречие между выражениями (3.179) и (3.180) для $\alpha_e$ можно объяснить, вспомнив, что для модельного уравнения, содержащего только конвективный член, единственным возможным стационарным решением при $u = \text{const}$ является тривиальное решение $\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n = \text{const}$. В этом случае $\delta^2\zeta/\delta x^2 = \partial^2\zeta/\partial x^2 = 0$, что допускает произвольный вид коэффициента $\alpha_e$.

Рассмотрим теперь применение схемы с разностями против потока к уравнению плоского течения, учитывающему как конвекцию, так и (физическую) диффузию. При постоянных положительных $u_i$, $v_i$ получаем

$$\frac{\zeta_{i,\,j}^{n+1} - \zeta_{i,\,j}^n}{\Delta t} = -\frac{u\zeta_{i,\,j}^n - u\zeta_{i-1,\,j}^n}{\Delta x} - \frac{v\zeta_{i,\,j}^n - v\zeta_{i,\,j-1}^n}{\Delta y} +$$
$$+ \alpha\left(\frac{\zeta_{i+1,\,j}^n + \zeta_{i-1,\,j}^n - 2\zeta_{i,\,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{\zeta_{i,\,j+1}^n + \zeta_{i,\,j-1}^n - 2\zeta_{i,\,j}^n}{\Delta y^2}\right), \tag{3.181}$$

причем условие устойчивости накладывает следующее ограничение на $\Delta t$:

$$\Delta t \leqslant \left[2\alpha\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right) + \frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y}\right]^{-1}. \tag{3.182}$$

Разложения в ряды Тейлора дают

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\frac{\partial(u\zeta)}{\partial x} - \frac{\partial(v\zeta)}{\partial y} + (\alpha + \alpha_{ex})\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} +$$
$$+ (\alpha + \alpha_{ey})\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \text{ЧВП} + \text{ПВП}, \tag{3.183}$$

[1]) Как мы увидим позже, представление коэффициента схемной вязкости $\alpha_e$ для схемы с разностями против потока не единственно.

где в случае исследования нестационарного уравнения

$$\alpha_{ex} = {}^1/_2 u\,\Delta x\,(1 - C_x), \qquad \alpha_{ey} = {}^1/_2 v\,\Delta y\,(1 - C_y), \tag{3.184}$$

а в случае исследования стационарного уравнения

$$\alpha_{ex} = {}^1/_2 u\,\Delta x, \qquad \alpha_{ey} = {}^1/_2 v\,\Delta y. \tag{3.185}$$

Автор настоящей книги (см. приложение Б) показал, что результат (3.185) действительно соответствует стационарным решениям. Для нестационарных решений формулы (3.184) показывают, что влияние схемной вязкости будет минимальным, если $C_x$ и $C_y$ по возможности близки к единице. Однако на практике невозможно добиться, чтобы эти две величины одновременно были близки к единице во всех частях области течения, поэтому схемная вязкость обязательно будет входить в расчеты.

Заметим также, что коэффициенты схемной вязкости зависят от составляющих скорости $u$ и $v$, которые рассматриваются относительно неподвижной эйлеровой системы координат. Это приводит к нарушению принципа инвариантности Галилея, т. е. преобразование, связанное с обращением скорости невозмущенного потока и допустимое для дифференциальных уравнений, неприменимо к этим конечно-разностным уравнениям, за исключением случая, когда $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Термины «искусственная вязкость» и «схема первого порядка» часто используются как синонимы, но в действительности это не так. Например, можно просто добавить в схему второго порядка дополнительный член $\alpha_{Bx}\partial^2\zeta/\partial x^2$ с явной искусственной вязкостью $\alpha_{Bx} \sim \Delta x^2$. Такая схема с явной искусственной вязкостью имеет второй порядок; на ней, в частности, основывается метод фон Неймана — Рихтмайера для расчета ударных волн (см. разд. 5.4.1).

Обсудим некоторые соображения относительно того, что точное решение невозможно до тех пор, пока не выполнено условие $\alpha_e \ll \alpha$. Из соотношений (3.185), полученных при исследовании стационарного уравнения, видно, что для выполнения этого условия должно быть $u\Delta x/\alpha \ll 2$ и $v\Delta y/\alpha \ll 2$, т. е. сеточные числа Рейнольдса по различным направлениям должны быть много меньше 2. Эти условия являются требованием формальной точности, но на практике положение оказывается не столь уж плохим. Рассмотрим некоторую область, где применимо приближение пограничного слоя (см. Шлихтинг [1968]). Тогда производная $\partial^2\zeta/\partial x^2$ будет мала и вклад члена с коэффициентом $\alpha + \alpha_{ex}$ в уравнение (3.183) будет мал. Кроме того, величина $v$ также мала, поэтому $\alpha_{ey}$ в (3.184) и (3.185) может быть меньше, чем $\alpha$ (см. задачу 3.9).

Исследования Ранчела и Вольфштейна [1969] (см. также Вольфштейн [1969]) показывают, что для плоского течения

$\alpha_e \approx {}^1/_3 u\Delta x \sin 2\theta$, где $\theta$ — угол, который линия тока образует с осью абсцисс. Эти авторы использовали вторую схему с разностями против потока [1]), которая будет рассмотрена ниже, для расчета течения внутри замкнутой прямоугольной области с одной подвижной границей. При $Re = 100$ на неравномерной сетке $13 \times 13$ максимальное сеточное число Рейнольдса было около 20. Тем не менее полученные здесь результаты достаточно хорошо согласуются с решением этой задачи, полученным при помощи схемы второго порядка на сетке $51 \times 51$.

Аналогично, результаты расчетов естественной конвекции, выполненных Торрансом [1968] также с использованием второй схемы с разностями против потока при большом числе Грасгофа (эквивалентном $Re \approx 300$), отличаются от решения, полученного при помощи схемы второго порядка, менее чем на 5%. Кемпбелл и Мюллер [1968], а также Мюллер и О'Лири [1970] установили хорошее согласование результатов расчетов с данными физических экспериментов для нескольких отрывных течений при больших числах Рейнольдса.

На примере расчета течения внутри замкнутой прямоугольной области с одной подвижной границей Торранс с соавторами [1972] показали, что результаты, полученные при помощи второй схемы с разностями против потока для уравнений в консервативной форме, значительно точнее результатов, полученных при помощи схемы второго порядка для уравнений в неконсервативной форме.

Следует также напомнить, что вязкость оказывает влияние на поле течения не только через диффузионный член в уравнении переноса вихря, но также и через условие прилипания на стенке. Последнее может привести к более существенным различиям между течениями вязкой и невязкой жидкостей. Так, Кенцер [1970a] установил, что решение даже при таком малом схемном (т. е. основанном на $\alpha_e$) числе Рейнольдса, как 300, может достаточно хорошо аппроксимировать решение при отсутствии вязкости ($\alpha = 0$) с условием скольжения на стенке. При этом конкретная ограничительная величина такого схемного числа Re будет, конечно, зависеть от задачи. (Очевидно, что в задачах, не зависящих от Re, таких, как расчет течения Пуазейля или течения Куэтта, искусственная вязкость не оказывает никакого влияния.)

Таким образом, оказывается, что полезные решения можно получать при помощи схем с разностями против потока, но при оценке точности результатов следует учитывать влияние схемной вязкости. Схемы с разностями против потока обладают

[1]) Такой анализ искусственной вязкости применим также для первой схемы с разностями против потока, рассматриваемой в настоящем разделе.

также несколькими преимуществами. В отличие от схемы, использующей разности вперед по времени и центральные разности по пространственным переменным, в схеме с разностями против потока на сеточное число Рейнольдса не накладывается ограничение, обусловленное требованиями устойчивости. В отличие от схемы «чехарда со средней точкой» (рассмотренной в предыдущем разделе) и некоторых других схем схема с разностями против потока не приводит к расчленению решения по временны́м шагам, а при расчетах требует на один массив меньше величин $\zeta$. В отличие от других схем, использующих центральные разности второго порядка по пространственным переменным, схема с разностями против потока не сохраняет фурье-компоненту $\Lambda = 2\Delta x$ стационарной и не требует большего числа начальных и граничных условий, чем ставится для исходного дифференциального уравнения в частных производных.

Рассматриваемая схема обладает еще одним важным свойством, связанным с двумя последними пунктами, а именно свойством транспортивности. Три группы авторов с успехом использовали физическую особенность схемы с односторонними разностями. Для того чтобы избежать введения «пустых ячеек» и улучшить свойства устойчивости Джентри, Мартин и Дали [1966] применяют разности с донорными ячейками в методе FLIC (метод жидкости в ячейках). При решении задачи о течении несжимаемой жидкости Томан и Шевчик [1966] «определяют величину вихря в граничных ячейках в соответствии с направлением составляющих скорости на соответствующей границе» и таким образом «пользуются средним вихрем для ячеек, из которых он переносится». Франкел [1956] говорит об «однонаправленном потоке информации». Все эти подходы тесно связаны с понятием «свойства транспортивности», которое мы теперь определим.

### 3.1.9. Свойство транспортивности

Будем говорить, что конечно-разностный аналог дифференциального уравнения, описывающего течение жидкости, обладает *свойством транспортивности* (Роуч и Мюллер [1970]), если возмущение, наложенное на какую-либо функцию, переносится за счет конвекции только в направлении скорости.

Это определение представляется безобидным и очевидным, но дело в том, что большинство схем не обладает этим свойством. Так, все схемы, в которых для представления конвективных членов используются центральные разности по пространственным переменным, не обладают этими свойствами.

Особое ударение делается на слова «переносится за счет конвекции». Физическое возмущение вихря распространяется за

счет диффузии во всех направлениях, но оно должно переноситься только в направлении скорости. Рассмотрим модельное уравнение, описывающее течение невязкой жидкости:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial (u\zeta)}{\partial x}. \tag{3.186}$$

При помощи схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной (ВВЦП) одномерное уравнение (3.186) можно записать в следующей конечно-разностной форме:

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = -\frac{u\zeta_{i+1}^n - u\zeta_{i-1}^n}{2\Delta x}. \tag{3.187}$$

Рассмотрим в точке $m$ возмущение $\varepsilon_m = \delta$, полагая во всех остальных точках $\varepsilon = 0$ и $u > 0$. Тогда в точке $m + 1$, вниз по потоку от точки возмущения,

$$\frac{\zeta_{m+1}^{n+1} - \zeta_{m+1}^n}{\Delta t} = -\frac{(0 - u\delta)}{2\Delta x} = \frac{u\delta}{2\Delta x}, \tag{3.188}$$

что приемлемо. Но в точке, где наложено возмущение,

$$\frac{\zeta_m^{n+1} - \zeta_m^n}{\Delta t} = -\frac{(0 - 0)}{2\Delta x} = 0, \tag{3.189}$$

а это уже неразумно. Еще более существенно, что в точке $i = m - 1$, расположенной *вверх по потоку* от точки возмущения,

$$\frac{\zeta_{m-1}^{n+1} - \zeta_{m-1}^n}{\Delta t} = -\frac{(u\delta - 0)}{2\Delta x} = -\frac{u\delta}{2\Delta x}. \tag{3.190}$$

Таким образом, влияние возмущения проявляется *вверх* по потоку от точки возмущения, и, значит, свойство транспортивности нарушается. На следующем шаге по времени положительное возмущение появится в точке $i = m - 2$ и т. д.

Сравним полученный результат с результатом, который дает схема с разностями против потока при $u > 0$:

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = -\frac{u\zeta_i^n - u\zeta_{i-1}^n}{\Delta x}. \tag{3.191}$$

Тогда при $\varepsilon_m = \delta$, как и ранее, в точке $m + 1$, расположенной вниз по потоку от точки возмущения, будем иметь

$$\frac{\zeta_{m+1}^{n+1} - \zeta_{m+1}^n}{\Delta t} = -\frac{(0 - u\delta)}{\Delta x} = \frac{u\delta}{\Delta x}, \tag{3.192}$$

что приемлемо. В точке же $m$, где наложено возмущение, получаем

$$\frac{\zeta_m^{n+1}-\zeta_m^n}{\Delta t}=-\frac{(u\delta-0)}{\Delta x}=-\frac{u\delta}{\Delta x}, \tag{3.193}$$

а это означает, что возмущение выносится из области, где оно было приложено, как это и должно быть. (Очевидна связь между этим фактом и ранее отмеченным для схем с разностями против потока свойством нестационарности фурье-компоненты с $\Lambda=2\Delta x$.) Наконец, в точке $m-1$, расположенной вверх по потоку от точки возмущения, имеем

$$\frac{\zeta_{m-1}^{n+1}-\zeta_{m-1}^n}{\Delta t}=\frac{0-0}{\Delta x}=0, \tag{3.194}$$

и это указывает на то, что возмущение не переносится вверх по потоку. Таким образом, схема с разностями против потока обладает свойством транспортивности. Она обеспечивает «однонаправленный поток информации» (Франкел [1956]).

Однако выбор разностей против потока отнюдь не всегда гарантирует свойство транспортивности схемы. Рассмотрим двумерную задачу, используя необычную схему с разностями против потока, в которой потоки определяются пространственным осреднением по обоим направлениям. Простоты ради предположим, что составляющие скорости постоянны. Тогда для уравнения

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\nabla\cdot(\mathbf{V}\zeta) \tag{3.195}$$

получаем

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+1}-\zeta_{i,j}^n}{\Delta t}=-u\frac{\hat\zeta_R-\hat\zeta_L}{\Delta x}-v\frac{\hat\zeta_T-\hat\zeta_B}{\Delta y}. \tag{3.196}$$

Эта конечно-разностная схема записана для положительных составляющих скорости; осредненные значения вихря определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\hat\zeta_R&=\frac{\zeta_{i,j+1}+2\zeta_{i,j}+\zeta_{i,j-1}}{4},\\
\hat\zeta_L&=\frac{\zeta_{i-1,j+1}+2\zeta_{i-1,j}+\zeta_{i-1,j-1}}{4},\\
\hat\zeta_T&=\frac{\zeta_{i-1,j}+2\zeta_{i,j}+\zeta_{i+1,j}}{4},\\
\hat\zeta_B&=\frac{\zeta_{i-1,j-1}+2\zeta_{i,j-1}+\zeta_{i+1,j-1}}{4}.
\end{aligned} \tag{3.197}$$

В этой схеме значение $\hat\zeta_R$ в ячейке, расположенной вверх по потоку, определяется как среднее параболическое трех значений $\zeta$

в том сечении $i$, через которое переносится вихрь $\zeta$. Рассмотрим теперь стационарное решение и будем считать, что всюду $v = 0$; введем возмущение вихря $\varepsilon_{a,\,b} = \delta$, полагая во всех остальных точках $\varepsilon = 0$. Тогда в точке $(a,\ b-1)$ получим

$$\frac{\zeta^{n+1}_{a,\,b-1} - \zeta^{n}_{a,\,b-1}}{\Delta t} = -u\frac{\delta/4 - 0}{\Delta x} - 0 = -\frac{u\delta}{4}. \qquad (3.198)$$

Таким образом, возмущенне из точки $(a, b)$ переносится в направлении $v$ в точку $(a,\ b-1)$ несмотря на то, что скорость $v$ тождественно равна нулю. Данная схема не обладает свойством транспортивности, хотя она представляет собой некоторую разновидность схемы с разностями против потока.

Формальное разложение в ряды Тейлора указывает на то, что схемы с центральными разностями точнее односторонних схем с разностями против потока. Как было отмечено в разд. 3.1.3 при обсуждении свойства консервативности, при использовании неконсервативной схемы можно точнее аппроксимировать производную, но если в каком-либо критерии точности учитывается свойство консервативности, то система в целом не будет точнее. Оказывается, свойство транспортивности имеет такой же физический смысл, как и свойство консервативности. Схемы с разностями против потока, обладающие свойством транспортивности, точнее, чем схемы с центральными разностями для первых производных именно в этом смысле, а не в смысле порядка ошибки аппроксимации.

Чтобы подчеркнуть значение свойства транспортивности в противоположность схеме с разностями против потока, рассмотрим схему с разностями по потоку или наветренные разностные схемы (Франкел [1956]). Такая схема неустойчива, но предполагается, что ее можно сделать устойчивой при помощи некоторого конечно-разностного представления производной по времени. С точки зрения точности представления только производных эта схема и схема с разностями против потока одинаково приемлемы. Однако в схеме с разностями по потоку возмущение будет переноситься за счет конвекции только вверх по потоку, а вовсе не в направлении скорости! Это физический абсурд [1]), и стоит еще раз напомнить то, что было сказано относительно свойства консервативности: точность конечно-разностного представления производных не эквивалентна точности представления дифференциального уравнения.

---

[1]) Сполдинг предложил называть схему с разностями против потока «схемой свинарника». Его мысль заключается в том, что если $\zeta$ рассматривать как концентрацию некоторого вещества, то мы должны почувствовать запах свинарника, когда находимся на его подветренной, а не на наветренной стороне (если исключить влияние диффузии).

Робертс и Вейс [1966] называют схему Лелевье с разностями против потока «неадекватной», однако в подстрочном примечании признают: «Тем не менее эта односторонняя схема сохраняет знак положительно определенных величин, так же как и лагранжевы схемы; эйлеровы же схемы с центральными разностями не обладают таким свойством».

Интересно отметить, что в рассмотренной конечно-разностной схеме каждая узловая точка сетки аналогична конечному элементу в расчетах конечно-элементной модели реактора, иногда используемой инженерами-химиками (Кридер и Фосс [1966]). Поэтому, очевидно, оправдано представление этой схемы как схемы «моделирования».

### 3.1.10. Транспортивные и консервативные разностные схемы

Первая схема с разностями против потока (3.176) является консервативной, а также транспортивной до тех пор, пока составляющие скорости не меняют свой знак. Покажем для одномерного течения, когда все $u_i > 0$, что эта схема обладает свойством консервативности. Проводя такие же выкладки, как в разд. 3.1.3, получаем

$$\frac{\Delta\zeta_i}{\Delta t} = -\frac{u_i\zeta_i - u_{i-1}\zeta_{i-1}}{\Delta x}, \tag{3.199}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=I_1}^{I_2}\frac{\Delta\zeta_i}{\Delta t} &= \sum_{i=I_1}^{I_2}\frac{u\zeta|_{i-1} - u\zeta|_i}{\Delta x}\Delta x = \\
&= u\zeta|_{I_1-1} - u\zeta|_{I_1} + && [i = I_1] \\
&\quad + u\zeta|_{I_1} - u\zeta|_{I_1+1} + && [i = I_1+1] \\
&\quad + u\zeta|_{I_1+1} - u\zeta|_{I_1+2} + && [i = I_1+2] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ u\zeta|_{I_2-3} - u\zeta|_{I_2-2} + && [i = I_2-2] \\
&\quad + u\zeta|_{I_2-2} - u\zeta|_{I_2-1} + && [i = I_2-1] \\
&\quad + u\zeta|_{I_2-1} - u\zeta|_{I_2}, && [i = I_2]
\end{aligned} \tag{3.200}$$

или

$$\sum_{i=I_1}^{I_2}\frac{\Delta\zeta_i}{\Delta t} = u\zeta|_{I_1-1} - u\zeta|_{I_2}. \tag{3.201}$$

Правая часть представляет собой вычисленную против потока разность двух величин, а именно потока, втекающего в об-

ласть $R$ через ее границу $I_1$ за единицу времени, и потока, вытекающего из области $R$ через ее границу $I_2$ за единицу времени. Таким образом, свойство консервативности здесь имеет место.

Однако в области, где скорость меняет знак, направление разностей против потока также меняется, и тогда свойство консервативности утрачивается. Покажем это для одномерного случая при $u_i > 0$ для $i \leqslant l$ и $u_i < 0$ для $i > l$.

Применяя схему с разностями против потока, получаем

$$\frac{\Delta\zeta}{\Delta t} = -\frac{u\zeta|_i - u\zeta|_{i-1}}{\Delta x} \quad \text{при } i \leqslant l, \text{ где } u_i > 0, \tag{3.202}$$

$$\frac{\Delta\zeta}{\Delta t} = -\frac{u\zeta|_{i+1} - u\zeta|_i}{\Delta x} \quad \text{при } i > l, \text{ где } u_i < 0; \tag{3.203}$$

тогда

$$\sum_{i=I_1}^{I_2} \frac{\Delta\zeta_i}{\Delta t} = \sum_{i=I_1}^{l} \frac{u\zeta|_{i-1} - u\zeta|_i}{\Delta x}\Delta x + \sum_{i=l+1}^{I_2} \frac{u\zeta|_i - u\zeta|_{i+1}}{\Delta x}\Delta x =$$

$$\begin{aligned}
&= u\zeta|_{I_1-1} - u\zeta|_{I_1} \; + \\
&\qquad + u\zeta|_{I_1} \; - u\zeta|_{I_1+1} + \\
&\qquad\qquad + u\zeta|_{I_1+1} - u\zeta|_{I_1+2} + \\
&+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; + \\
&+ u\zeta|_{l-2} - u\zeta|_{l-1} + \\
&\qquad + u\zeta|_{l-1} - u\zeta|_{l} \; + \\
&\qquad\qquad + u\zeta|_{l+1} - u\zeta|_{l+2} + \\
&\qquad\qquad\qquad + u\zeta|_{l+2} - u\zeta|_{l+3} + \\
&+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; + \\
&+ u\zeta|_{I_2-2} - u\zeta|_{I_2-1} + \\
&\qquad + u\zeta|_{I_2-1} - u\zeta|_{I_2} \; + \\
&\qquad\qquad + u\zeta|_{I_2} \; - u\zeta|_{I_2+1},
\end{aligned} \tag{3.204}$$

или

$$\sum_{i=I_1}^{I_2} \frac{\Delta\zeta_i}{\Delta t} = u\zeta|_{I_1-1} - u\zeta|_{I_2+1} - u\zeta|_l + u\zeta|_{l+1}. \tag{3.205}$$

Первые два члена представляют собой вычисленную против потока разность потоков в единицу времени на двух границах области $R$; третий и четвертый члены представляют собой ошибки, обусловленные неконсервативностью. Поскольку $u_l > 0$ и $u_{l+1} < 0$, эти члены можно переписать как

$$-u\zeta|_l + u\zeta|_{l+1} = -[|u_l|\zeta_l + |u_{l+1}|\zeta_{l+1}], \tag{3.206}$$

и тогда

$$\sum_{i=I_1}^{I_2} \frac{\Delta\xi_i}{\Delta t} = u\xi|_{I_1-1} - u\xi|_{I_2+1} - [|u_l|\xi_l + |u_{l+1}|\xi_{l+1}]. \quad (3.207)$$

Рассмотрим случай, когда $\xi$ не меняет знака [1]) при переходе от точки $l$ к точке $l+1$. Тогда член, соответствующий ошибке, можно рассматривать как *искусственный сток* функции $\xi$. Если же $u_l < 0$, а $u_{l+1} > 0$, то этот член можно рассматривать как *искусственный источник* $\xi$ [2]).

Так как на участке между точками $l$ и $l+1$ существует точка, где $u = 0$, то $u_l$ и $u_{l+1}$ обычно малы и при уменьшении шага пространственной сетки ошибка, обусловленная неконсервативностью, стремится к нулю.

В двух модификациях схемы с разностями против потока можно устранить появление искусственного источника. Первая модификация основана на первой схеме с разностями против потока (3.176), когда скорость не меняет знак ни между точками $i-1$ и $i$, ни между точками $i$ и $i+1$. Если же скорость меняет здесь знак, то конечно-разностная схема строится при помощи метода контрольного объема, охватывающего точку $i$ [3]). Итак, мы имеем

$$\frac{\Delta\xi_i}{\Delta t} = \frac{f_{i-1} + f_i + f_{i+1}}{\Delta x}, \quad (3.208)$$

где

$$f_i = -|u_i|\xi_i, \quad (3.209)$$

$$f_{i-1} = \begin{cases} |u_{i-1}|\xi_{i-1} & \text{при } u_{i-1} > 0, \\ 0 & \text{при } u_{i-1} \leqslant 0 \end{cases} \quad (3.210)$$

и

$$f_{i+1} = \begin{cases} 0 & \text{при } u_{i+1} \geqslant 0, \\ |u_{i+1}|\xi_{i+1} & \text{при } u_{i+1} < 0. \end{cases} \quad (3.211)$$

[1]) Это всегда имеет место в том случае, когда в качестве $\xi$ рассматривается плотность (положительно определенная величина), входящая в уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости.

[2]) В плоской задаче такая ошибка появляется только при условии, что составляющая скорости меняет знак при движении в направлении этой составляющей. Таким образом, если $v_{i,j} > 0$, а $v_{i,j+1} < 0$, то ошибка, обусловленная неконсервативностью, появляется, но если $v_{i,j} > 0$, а $v_{i+1,j} < 0$, то такой ошибки нет. Первая ситуация встречается в отрывных течениях, вторая — в случае, когда при обтекании составляющая скорости $v$ меняет знак при переходе от лобовой части к кормовой без отрыва потока. Таким образом, разностные решения Скалы и Гордона [1967] консервативны.

[3]) Такой частный случай в действительности эквивалентен применению схемы (3.176), когда скорость не меняет знак. Эта схема при расчетах используется вместо схемы (3.176) не во всех точках только потому, что в ней для вычислений и логических операторов IF при реализации программы на Фортране требуются несколько бо́льшие затраты машинного времени, чем в схеме (3.176).

Легко проверить, что такая модификация делает первую схему с разностями против потока консервативной и транспортивной. При этой модификации требуется меньше арифметических операций, но по точности она уступает второй схеме с разностями против потока, к обсуждению которой мы теперь приступим.

### 3.1.11. Вторая схема с разностями против потока

Во второй схеме с разностями против потока, называемой также схемой с донорными ячейками (Джентри, Мартин и Дали [1966]), по каждую сторону от узловой точки пространственной сетки находятся некоторые средние значения скоростей на границах ячейки; знак этих скоростей определяет, из какого именно узла сетки надо взять значения $\zeta$ для написания разностей против потока. В одномерном случае будем иметь

$$\frac{\Delta\zeta_i}{\Delta t} = -\frac{u_R\zeta_R - u_L\zeta_L}{\Delta x}, \tag{3.212}$$

где

$$\begin{aligned} u_R &= {}^1/_2(u_{i+1} + u_i), \\ u_L &= {}^1/_2(u_i + u_{i-1}) \end{aligned} \tag{3.213}$$

(возможны и некоторые другие способы осреднения). Значения $\zeta$ берутся так:

$$\zeta_R = \begin{cases} \zeta_i & \text{при } u_R > 0, \\ \zeta_{i+1} & \text{при } u_R < 0, \end{cases} \qquad \zeta_L = \begin{cases} \zeta_{i-1} & \text{при } u_L > 0, \\ \zeta_i & \text{при } u_L < 0. \end{cases} \tag{3.214}$$

Легко проверить, что эта схема является консервативной и транспортивной. Эту схему просто интерпретировать с точки зрения метода контрольного объема, если величины скоростей на границах ячеек находятся как средние значения, а соответствующие величины $\zeta$ определяются направлением потока. (*Замечание.* Если величины $\zeta$ на сторонах ячеек определять тоже как средние, то получится схема с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным, не обладающая свойством транспортивности.)

По сравнению с первой схемой с разностями против потока в рассматриваемой схеме требуется проведение дополнительных вычислений для скоростей: дополнительное численное дифференцирование функции тока $\psi$ для получения $u$ и дополнительные расчеты средних значений (3.213). Однако эта схема точнее первой схемы при аппроксимации производной $\partial(u\zeta)/\partial x$, так

как сохраняет кое-что от второго порядка точности, которым обладают схемы с центральными разностями.

Рассмотрим случай, когда $\zeta$ постоянно, т. е. $\zeta_{i-1} = \zeta_i = \zeta_{i+1} = \hat{\zeta}$, а $u$ является функцией пространственной переменной. Тогда уравнение (3.212) принимает вид

$$\frac{\Delta\zeta_i}{\Delta t} = -\frac{u_R\zeta_R - u_L\zeta_L}{\Delta x} = -\frac{{}^1/_2\hat{\zeta}\,(u_{i+1}+u_i) - {}^1/_2\hat{\zeta}\,(u_i+u_{i-1})}{\Delta x}, \qquad (3.215а)$$

или

$$\frac{\Delta\zeta_i}{\Delta t} = -\hat{\zeta}\,\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta x}, \qquad (3.215б)$$

что дает второй порядок точности для члена, описывающего конвекцию. Таким образом, вторая схема с разностями против потока обладает как свойством консервативности, так и свойством транспортивности и сохраняет кое-что от второго порядка точности, присущего схемам с центральными разностями для пространственных производных. Превосходство второй схемы над первой схемой с разностями против потока было фактически продемонстрировано Торрансом [1968] при расчете плоских течений.

Теперь можно объяснить удивительное согласование результатов (при $\mathrm{Re} = 100$ отклонение менее 5%) решения задачи о течении вязкой жидкости внутри замкнутой прямоугольной области с одной подвижной границей, полученных при помощи этой второй схемы и при помощи схемы второго порядка точности, использованной Торрансом. Вдоль средней части стенок, где применимо приближение пограничного слоя, влияние члена со схемной искусственной вязкостью $\alpha_e$ мало (см. обсуждение в разд. 3.1.8). Вблизи же углов скорости малы, поэтому здесь коэффициент физической вязкости $\alpha \gg \alpha_e$. А во вращающейся центральной части области течения вихрь $\zeta$ меняется слабо, и поэтому рассматриваемая вторая схема имеет почти второй порядок точности в соответствии с уравнением (3.215б).

Схема Ранчела с соавторами [1969] алгебраически эквивалентна второй схеме с разностями против потока. За счет некоторых усложнений и увеличения числа арифметических операций в ней удается избежать связанных с определением знаков $u$ и $v$ логических операторов IF Фортрана. Прайс с соавторами [1966] в одномерном случае использовали неконсервативную схему второго порядка точности с разностями против потока. Конвективная производная при $u > 0$ здесь аппроксимировалась следующим образом:

$$\frac{\delta\zeta_i}{\delta x} = \frac{3\zeta_i - 4\zeta_{i-1} + \zeta_{i-2}}{2\Delta x}. \qquad (3.216)$$

### 3.1.12. Схемы Адамса — Бэшфорта и Крокко

Разностная схема Адамса — Бэшфорта, использованная Лилли [1965] для уравнения, содержащего только конвективный член, является явной одношаговой трехслойной по времени схемой с разностями вперед по времени; она имеет ошибку $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$. Ее можно интерпретировать как конечно-разностную аппроксимацию *второй производной по времени.*

Запишем разложение $\zeta_i^{n+1}$ в ряд Тейлора по времени:

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_1^n + \frac{\partial \zeta}{\partial t}\Big|_i^n \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\Big|_i^n \Delta t^2 + O(\Delta t^3). \qquad (3.217)$$

Аппроксимируем вторую производную по времени односторонними конечными разностями:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\Big|_i^n = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right]_i^n = \frac{\dfrac{\partial \zeta}{\partial t}\Big|_i^n - \dfrac{\partial \zeta}{\partial t}\Big|_i^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t). \qquad (3.218)$$

Подставляя это выражение в (3.217), получаем

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n + \frac{\partial \zeta}{\partial t}\Big|_i^n \Delta t + \frac{1}{2}\left[\frac{\dfrac{\partial \zeta}{\partial t}\Big|_i^n - \dfrac{\partial \zeta}{\partial t}\Big|_i^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t)\right]\Delta t^2 + O(\Delta t^3),$$

или

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n + \left[\frac{3}{2}\frac{\partial \zeta}{\partial t}\Big|_i^n - \frac{1}{2}\frac{\partial \zeta}{\partial t}\Big|_i^{n-1}\right]\Delta t + O(\Delta t^3). \qquad (3.219)$$

Это выражение дает основную форму разностной схемы Адамса — Бэшфорта для конвективных членов. В сочетании с апироксимацией диффузионного члена центральными разностями для момента времени $n$ в случае плоской задачи получаем

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n + \Delta t\left[-\frac{3}{2}\frac{\delta u\zeta}{\delta x}\Big|_i^n + \frac{1}{2}\frac{\delta u\zeta}{\delta x}\Big|_i^{n-1} - \frac{3}{2}\frac{\delta v\zeta}{\delta y}\Big|_i^n + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\delta v\zeta}{\delta y}\Big|_i^{n-1} + \alpha\left(\frac{\delta^2 \zeta}{\delta x^2}\Big|_i^n + \frac{\delta^2 \zeta}{\delta y^2}\Big|_i^n\right)\right]. \qquad (3.220)$$

Однако эта схема при наличии вязких членов имеет только первый порядок точности.

Основная форма разностного уравнения (3.219) была предложена Бэшфортом и Адамсом в 1883 г. Томас [1954] использовал аналогичную схему более высокого порядка для приближения к ударному фронту при помощи односторонних разложений по пространственной переменной и назвал эту схему схемой Адамса. Лилли [1965] применил такое же разложение по времени, как и в (3.219), для уравнения переноса вихря в невязкой

жидкости и без каких-либо исторических ссылок назвал эту схему схемой Адамса — Бэшфорта.

Уравнение (3.219) в том виде, как оно записано, является безусловно неустойчивым уравнением *со слабой* расходимостью, обусловленной тем, что здесь множитель перехода имеет вид $G = 1 + O(\Delta t^2)$; см. Лилли [1965]. Так как неустойчивость слабая, эту схему можно использовать для расчетов нестационарных течений невязкой жидкости при условии, что полное время решения невелико. Лилли [1965] обнаружил, что эта схема точнее схемы Лакса — Вендроффа [1964] (см. разд. 5.5.5). Наличие вязких членов в уравнении (3.220) стабилизирует это уравнение, давая возможность выбрать шаг $\Delta t$ в зависимости от числа Рейнольдса Re (см. задачу 3.11).

Крокко [1965] предложил схему для расчета квазиодномерного течения сжимаемой жидкости, которая будет аппроксимирующей *только* при достижении стационарного состояния. Эта схема имеет следующий вид:

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - u\,\Delta\zeta_i + a\Delta^2\zeta_i, \tag{3.221а}$$

$$\Delta\zeta_i = (1+\Gamma)\frac{\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n}{2\,\Delta x} - \Gamma\frac{\zeta_{i+1}^{n-1} - \zeta_{i-1}^{n-1}}{2\,\Delta x}, \tag{3.221б}$$

$$\Delta^2\zeta_i = \frac{\zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n - 2\zeta_i^{n+1}}{\Delta x^2}. \tag{3.221в}$$

Крокко исследовал весовой множитель [1]) $\Gamma$ и в случае течения невязкой жидкости установил, что для устойчивости наименьшим значением $\Gamma$ должно быть $\Gamma = 1/2$, а это в точности соответствует схеме первого порядка Адамса — Бэшфорта (уравнение (3.219)). Алгебраические выкладки при применении метода фон Неймана для анализа устойчивости схемы оказались слишком громоздкими, поэтому Крокко представил численные результаты исследования устойчивости графически, показывая при каких комбинациях $\Gamma$, $\mathrm{Re}_c$, C и $\Delta t$ имеет место устойчивость в расчетах для больших значений времени. В действительности расчеты течений были выполнены при $\Gamma = 1$. Применение метода Хёрта для исследования устойчивости (см. задачу 3.12) дает в нестационарном случае значение $\alpha_e = u^2\Delta t(\Gamma - 1/2)$, что также приводит к условию устойчивости $\Gamma \geqslant 1/2$.

Схемы Адамса — Бэшфорта и Крокко (так же, как схема «чехарда со средней точкой» и схема «чехарда» Дюфорта — Франкела) имеют второй порядок точности для конвективных

[1]) Это хорошо известный прием; см. Рихтмайер [1957].

пространственных производных. Подобно схемам «чехарда», в них для расчета значений на некотором слое по времени используются значения на двух предшествующих слоях, но в то же время они не являются схемами типа «чехарда», так как в них значение $\zeta_i^{n+1}$ вычисляется как старое значение $\zeta_i^n$ непосредственно в предшествующий момент времени плюс соответствующее приращение. Следовательно, эти схемы не приводят к расчленению решений по временным шагам, как схемы «чехарда». Они не обладают свойством транспортивности и не дают точного решения при $C = 1$.

Схема Миякоды [1962] (см. также Лилли [1965]) в некоторых отношениях сходна со схемой Адамса — Бэшфорта. Это четырехслойная схема, и для вычисления значений на слое $n + 1$ в ней используются значения на слоях $n - 2$, $n - 1$ и $n$. Схема Миякоды тоже имеет второй порядок точности и не приводит к расчленению решений по временным шагам. Она также является слабо неустойчивой и, по-видимому, не имеет каких-либо преимуществ по сравнению с более простой схемой Адамса — Бэшфорта.

### 3.1.13. Схема Лейта; фазовые ошибки, ошибки, обусловленные неразличимостью, расщепление по времени

Чрезвычайно интересна одношаговая двухслойная схема Лейта [1965] второго порядка точности; одномерный вариант этой схемы предложили ранее Нох и Проттер [1963] (см. также Вендрофф [1961]). Построим сначала схему для одномерного течения, обратившись к лагранжеву описанию движения жидкости, при котором следят за движением частиц.

На рис. 3.12, *а* стрелками изображены траектории (кривые в плоскости $(x, t)$) частиц жидкости для одномерной задачи при постоянной скорости $u$. При изменении времени от $t$ до $t + \Delta t$ частицы перемещаются в направлении $x$ на расстояние $u\Delta t$. Пометим теперь каждую частицу, приписав ей значение $\zeta$, причем $\zeta$ может быть любым естественным свойством, связанным с отдельной частицей жидкости. В случае отсутствия диффузии каждая частица жидкости будет сохранять свое значение $\zeta$. Таким образом, траектории, изображенные на рис. 3.12, *а*, представляют собой линии постоянного $\zeta$.

Уравнение конвекции для невязкой жидкости $\partial\zeta/\partial t = -u\partial\zeta/\partial x$ как раз и означает, что $\zeta$ есть некоторое свойство жидкости, которое не меняется в процессе течения. Это является определением субстанциональной производной, которая в обозначениях Лагранжа записывается как $D\zeta/Dt = \partial\zeta/\partial t +$

$+ u\partial\zeta/\partial x$. Производная $D\zeta/Dt$ связана с частицей жидкости, а уравнение конвекции для невязкой жидкости как раз означает, что $D\zeta/Dt = 0$, т. е. значение $\zeta$ любой частицы остается неизменным [1]).

Как показывает рис. 3.12, *б*, уравнение конвекции без учета вязких членов означает, что $\zeta_i^{n+1} = \zeta^*$. Построение конечно-разностных уравнений сводится к задаче приближенного определе-

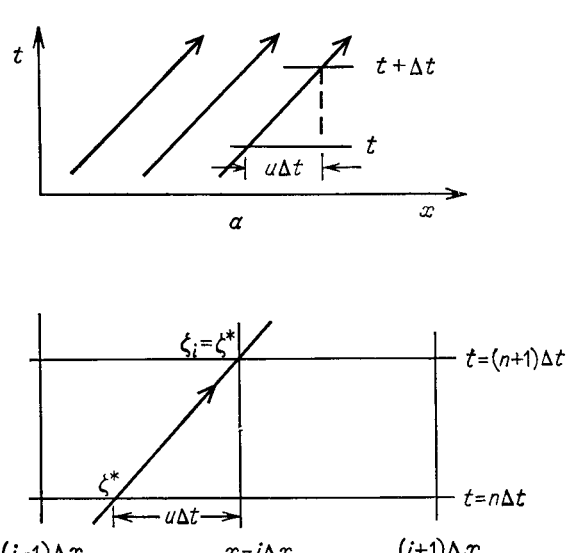



Рис. 3.12. Построение схемы Лейта в одномерном случае. *а* — траектории частиц в плоскости $(x, t)$ при $u = \text{const}$; *б* — перенос величины $\zeta^*$.

ния $\zeta^*$ с помощью какой-либо интерполяции по известным значениям $\zeta^n$.

Заметим сначала, что при некоторой определенной комбинации параметров траектория проходит через узловую точку с координатами $i - 1$ и $n$. В этом случае $\zeta^* = \zeta_{i-1}^n$, т. е. $\zeta^*$ находится точно без внесения ошибки при интерполяции. Необходимое для

[1]) Тем, кто впервые сталкивается с этим понятием, может оказаться полезной следующая интерпретация. Представим себе, что на поверхность плавно текущей воды помещена капля чернил, и будем рассматривать $\zeta$ как концентрацию окраски, которая, очевидно, приписывается (конечной) частице жидкости. Если пренебрегать диффузией, то эйлерово описание изменения окраски в точке дается уравнением $\partial\zeta/\partial t = -u\partial\zeta/\partial x$, а лагранжево — уравнением $D\zeta/Dt = 0$. Рекомендуется также объяснение, предложенное Бердом, Стьюартом и Лайтфутом [1960].

этого условие (см. рис. 3.12, *б*) имеет вид $u\Delta t = \Delta x$, или $C = 1$; значит, при числе Куранта, равном единице, получается точное решение $\zeta_i^{n+1} = \zeta_{i-1}^n$ (как и в разд. 3.1.6).

Рассмотрим теперь более общее условие $C \neq 1$. Если $u\Delta t < \Delta x$, то точка со значением $\zeta^*$ находится между точками $i$ и $i-1$ (см. рис. 3.12, *б*). Используя для приближенного определения $\zeta^*$ линейную интерполяцию, получаем оценку с первым порядком точности

$$\zeta^* = \zeta_i^n - (\zeta_i^n - \zeta_{i-1}^n)\frac{u\,\Delta t}{\Delta x}. \tag{3.222}$$

Полагая $\zeta_i^{n+1} = \zeta^*$, будем иметь

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = -u\left(\frac{\zeta_i^n - \zeta_{i-1}^n}{\Delta x}\right), \tag{3.223}$$

что соответствует схеме с разностями против потока, рассмотренной в разд. 3.1.8. Если применить линейную интерполяцию по точкам $i+1$ и $i-1$, то получится схема с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным. Если же для интерполяции по точкам $i-1$, $i$ и $i+1$ использовать квадратичный аппроксимационный полином (см. разд. 3.1.1), то получится схема Лейта

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - \frac{1}{2}\left(\frac{u\,\Delta t}{\Delta x}\right)(\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n) + \frac{1}{2}\left(\frac{u\,\Delta t}{\Delta x}\right)^2(\zeta_{i+1}^n - 2\zeta_i^n + \zeta_{i-1}^n). \tag{3.224}$$

Число Куранта $C = u\Delta t/\Delta x$ теперь можно рассматривать как *параметр интерполяции*. Ограничение $C \leqslant 1$, накладываемое условием устойчивости, как можно показать применительно к разностным уравнениям (3.224) и (3.223), теперь можно интерпретировать как требование, что $\zeta^*$ должно определяться *интерполяцией*, а не *экстраполяцией*.

Другой вывод схемы Лейта получается при рассмотрении разложения в ряд Тейлора вперед по времени до $O(\Delta t^3)$, как и при выводе схемы Адамса — Бэшфорта, но вторая производная по времени теперь определяется из исходного уравнения конвекции следующим образом:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \tag{3.225}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -u\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial t} = -u\frac{\partial}{\partial x}\left(-u\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = u^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \tag{3.226}$$

Тогда разложение в ряд Тейлора дает

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n + \Delta t\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta t^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + O(\Delta t^3). \tag{3.227}$$

Используя для производных в уравнениях (3.225) и (3.226) формулы с центральными разностями второго порядка $\delta\zeta/\delta x$ и $\delta^2\zeta/\delta x^2$ и подставляя их в (3.227), будем иметь

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - u\,\Delta t\,\frac{\delta\zeta^n}{\delta x} + \frac{1}{2}u^2\,\Delta t^2\,\frac{\delta^2\zeta^n}{\delta x^2} + O(\Delta t^3,\ \Delta x^2), \qquad (3.228)$$

этот результат совпадает с (3.224) и показывает, что данная схема имеет второй порядок точности.

Эти два способа вывода схемы, один из которых основывается на квадратичной интерполяции по пространственной переменной, а другой — на разложении второй производной по времени, приводят к одинаковым результатам, так как уравнение (3.226) дает связь между производными $\partial^2\zeta/\partial t^2$ и $\partial^2\zeta/\partial x^2$. Однако эта связь справедлива *только* в случае уравнения для невязкой жидкости при постоянном $u$. В этом случае схема Лейта совпадает со схемой Лакса — Вендроффа и другими двухшаговыми схемами Лакса — Вендроффа, основанными на разложении по времени (см. гл. 5).

Наиболее интересный аспект, важный и при обсуждении других схем, связан с искусственным затуханием в схеме Лейта. Если все члены, входящие в уравнение (3.224), разложить в ряды Тейлора в окрестности точки $(i, n)$, как это делается в методе Хёрта при исследовании устойчивости, то получится

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\Delta t^2 + O(\Delta t^3) =$$
$$= -\frac{u\,\Delta t}{\Delta x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Delta x - \frac{1}{6}\frac{u\,\Delta t}{\Delta x}\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}\Delta x^3 + \frac{1}{2}\frac{u^2\,\Delta t^2}{\Delta x^2}\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\Delta x^2 + O(\Delta x^4)\right], \qquad (3.229)$$

или

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -u\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{1}{2}\Delta t\left[-\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + u^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right] + O(\Delta t^2,\ \Delta x^2). \qquad (3.230)$$

В уравнении (3.230) член, стоящий в квадратных скобках, при постоянном $u$ равен нулю в силу связи (3.226). Коэффициент при $\partial^2\zeta/\partial x^2$ равен нулю, и в схеме Лейта нет схемной искусственной вязкости[1]). Таким образом, схема Лейта, фактически представляя уравнение для невязкой жидкости в разностной форме с ошибкой порядка $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$, приводит к той же форме (3.224), что и схема с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной, дающая в применении к полному уравнению для вязкой жидкости

[1]) Диссипация появляется лишь в члене четвертого порядка.

ошибку порядка $O(\Delta t, \Delta x)$ при $\alpha_e = {}^1/_2 u^2 \Delta t$ (сравните с формулой (3.18)).

Однако при исследовании только стационарных уравнений для этой схемы снова получается $\alpha_e = {}^1/_2 u^2 \Delta t$, откуда следует, что стационарное решение зависит от $\Delta t$ и имеет только первый порядок точности. Такая аномалия связана с необходимостью постановки дополнительного условия на выходной границе потока при использовании центральных разностей для производных по пространственным переменным. На практике высокая точность обеспечивается за счет постановки на выходной границе потока условия градиентного типа (разд. 3.3.7). Эту аномалию можно рассматривать только совместно с граничными условиями; подробности можно найти в статье Роуча [1971в].

Отметим один важный момент, на который обычно не обращают внимания. Если в уравнении, включающем конвективный и вязкий члены, для конвективного члена используется схема Лейта, то схемная искусственная вязкость имеет вполне определенный вид $\alpha_e = {}^1/_2 u^2 \Delta t$, за исключением единственного случая, когда $C = 1$ (см. приложение Б).

Анализ устойчивости при помощи метода фон Неймана можно провести очень просто, используя пример в разд. 3.1.5.б, относящийся к схеме с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной, и замечая, что теперь в уравнении (3.105) надо заменить $d$ на $C^2/2$. Тогда в силу формулы (3.108) для множителя перехода в схеме Лейта будем иметь

$$G = 1 - C^2(1 - \cos\theta) - IC \sin\theta, \tag{3.231}$$

откуда следует, что

$$|G|^2 = 1 + C^2(C^2 - 1)(1 - \cos\theta)^2, \tag{3.232}$$

и для устойчивости должны выполняться неравенства

$$-1 \leqslant 1 + C^2(C^2 - 1)(1 - \cos\theta)^2 \leqslant +1. \tag{3.233}$$

Легко проверить, что левое неравенство выполняется всегда, а правое, как обычно, только при $C \leqslant 1$.

При помощи формулы (3.232) можно также исследовать ошибку, обусловленную затуханием, и фазовую ошибку рассматриваемой схемы. Лейт [1965] провел такой анализ для случая, когда $C \ll 1$ и $\theta$ мало, что представляет интерес при метеорологических расчетах. Первое условие имеет место потому, что метеорологические расчеты проводятся при малых $\Delta t$,

а второе связано с тем, что наибольший интерес здесь представляют длинноволновые (по сравнению с $\Delta x$) возмущения, когда $\theta = k_x \Delta x = 2\pi \Delta x/\Lambda \ll 1$. Полагая $C^4 \ll C^2$ и $1 - \cos\theta \approx \approx \theta^2/2$, формулу (3.232) можно переписать в следующем виде:

$$|G|^2 \approx 1 - C^2\theta^4/4; \tag{3.234}$$

так как $(1-\varepsilon)^{1/2} \approx 1 - \varepsilon/2$ при $\varepsilon \ll 1$, отсюда следует, что

$$|G| \approx 1 - C^2\theta^4/8. \tag{3.235}$$

Поскольку для исходного дифференциального уравнения $|G| = = 1$, член $C^2\theta^4/8$ представляет собой приближенное выражение для ошибки, обусловленной затуханием. Заметим, что ошибка, обусловленная затуханием, имеет четвертый порядок по $\Delta x$.

Аналогично можно оценить фазовую ошибку. Как уже обсуждалось выше (см. разд. 3.1.6), точная фазовая скорость для дифференциального уравнения при всех $\theta$ будет $u$. Решение дифференциального уравнения можно (пренебрегая влиянием границ) записать в виде (3.160) или в следующем эквивалентном виде:

$$\zeta(x, t) = \zeta(x - u\tau, t - \tau), \tag{3.236}$$

где $\tau$ — произвольный сдвиг по времени. Это решение можно записать через фурье-компоненты с волновым числом $k_x$ и соответствующей амплитудой $V$ [1]):

$$\zeta_{k_x} = V \exp[Ik_x(x - ut)], \tag{3.237}$$

или

$$\zeta_{k_x}(x, t) = V \exp[I(\theta - k_x u t)]. \tag{3.238}$$

Значит, точный сдвиг по фазе за время $\tau$ для решения дифференциального уравнения равен $\Delta\theta = -k_x u\tau$. Сравним теперь этот результат со сдвигом по фазе для численного решения. Вычислим сдвиг по фазе для дифференциального уравнения (ДУ) в частных производных за время $\tau = \Delta t$:

$$(\Delta\theta)_{ДУ} = -k_x u \Delta t = -k_x C \Delta x, \tag{3.239}$$

т. е.

$$(\Delta\theta)_{ДУ} = -C\theta. \tag{3.240}$$

Фактический сдвиг по фазе для конечно-разностного уравнения (КРУ) находится из геометрических соображений (см., например, рис. 3.8) и определяется равенством

$$\sin[(\Delta\theta)_{КРУ}] = \frac{\operatorname{Im} G}{|G|}. \tag{3.241}$$

[1]) Продифференцировав (3.237), получим $\partial\zeta/\partial t = -Iuk_x\zeta$ и $\partial\zeta/\partial x = = Ik_x\zeta$, т. е. уравнение $\partial\zeta/\partial t = -u\partial\zeta/\partial x$ выполняется точно.

Из уравнения (3.231) имеем $\operatorname{Im} G = -C \sin\theta$. Полагая $\sin(\Delta\theta) \approx \Delta\theta$ и используя равенство (3.235), получаем

$$(\Delta\theta)_{\text{КРУ}} = \frac{-C\sin\theta}{1 - C^2\theta^4/8}, \tag{3.242}$$

или, поскольку $(1-\varepsilon)^{-1} \approx 1 + \varepsilon$ при $\varepsilon \ll 1$,

$$(\Delta\theta)_{\text{КРУ}} = -C\sin\theta\,(1 + C^2\theta^4/8). \tag{3.243}$$

Для удобства сравнения с (3.240) перепишем (3.243) в виде

$$(\Delta\theta)_{\text{КРУ}} = -C\theta r, \tag{3.244}$$

где

$$r = \frac{\sin\theta}{\theta}\left(1 + \frac{C^2\theta^4}{8}\right) \approx \frac{\sin\theta}{\theta}. \tag{3.245}$$

Поскольку $\theta$ мало, раскладывая $\sin\theta$ в ряд, получаем

$$r \approx \frac{\theta - \theta^3/3! + O(\theta^5)}{\theta}, \tag{3.246}$$

или

$$r \approx 1 - \theta^2/6 < 1. \tag{3.247}$$

Сравнивая равенства (3.244) и (3.240), мы видим, что в конечно-разностном решении каждая фурье-компонента переносится вдоль оси $x$ медленнее из-за наличия множителя $r(\theta) < 1$. В точном решении дифференциального уравнения в частных производных (ДУ) все компоненты переносятся за счет конвекции со скоростью $u$; в решении же конечно-разностных уравнений остаются все фурье-компоненты точного решения, но различные компоненты переносятся с различными скоростями. Эта ошибка больше для больших $\theta$, т. е. для более коротких длин волн $\Lambda$. Таким образом, в процессе численного решения различные фурье-компоненты будут отклоняться одна от другой или диспергировать; это явление часто называется *дисперсионной ошибкой*. (Одно из первых исследований дисперсионной ошибки было дано в работе Стоуна и Брайена [1963].)

Фазовая ошибка за один шаг по времени будет $E_\theta = (\Delta\theta)_{\text{КРУ}} - (\Delta\theta)_{\text{ДУ}}$. Из формул (3.240) и (3.243) находим, что $E_\theta \approx -C\sin\theta - (-C\theta) = -C[\theta - \theta^3/3! + \ldots - \theta]$, или

$$E_\theta \approx C\theta^3/6. \tag{3.248}$$

Таким образом, фазовая ошибка имеет третий порядок по $\theta$, а следовательно, третий порядок и по $\Delta x$.

Предельный случай коротких длин волн можно рассмотреть без дополнительных приближенных допущений. При $C < 1$ из уравнения (3.232) следует, что $|G|^2 < 1$, за исключением случая, когда $\theta = 0$. Из равенства (3.231) имеем $\operatorname{Im} G = -C\sin\theta$.

В пределе при $\theta \to \pi$ $\mathrm{Im}(G) \to 0$ и из равенства (3.241) получаем, что $\sin(\Delta\theta) \to 0$ или $(\Delta\theta)_{\text{КРУ}} \to 0$. Таким образом, фазовая ошибка будет полной, причем *фурье-компонента с наименьшей длиной волны становится полностью стационарной.* Этот эффект также имеет место в схеме «чехарда со средней точкой» (см. разд. 3.1.6) и типичен для всех схем, использующих центральные разности для члена $\delta\zeta/\delta x$ (Фромм [1968]).

При $C = 1$ из равенства (3.232) следует, что $|G|^2 = 1$. Здесь фазовая ошибка также исчезает, поскольку равенство (3.241) принимает вид

$$[\sin(\Delta\theta)]_{\text{КРУ}} = -\frac{\sin\theta}{1}, \tag{3.249}$$

или

$$(\Delta\theta)_{\text{КРУ}} \approx -\theta, \tag{3.250}$$

что соответствует равенству (3.240) для точного решения при $C = 1$. Это легко проверить, полагая $C = 1$ в конечно-разностном уравнении (3.224):

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - \frac{1}{2}(\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n) + \frac{1}{2}(\zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n - 2\zeta_i^n), \tag{3.251}$$

откуда $\zeta_i^{n+1} = \zeta_{i-1}^n$, что соответствует точному решению.

В работе Фромма [1968] приведены изолинии фазовой и амплитудной ошибок схемы Лейта в зависимости от параметров $C$ и $\theta$. Отмечается хорошее поведение этих линий в предельных случаях при $C \to 1$ и $\theta \to 0, 2\pi$. В качестве фундаментальной работы по фазовым ошибкам можно рекомендовать статью Кроули [1968а].

Если интересуются только стационарным решением, то фазовые ошибки не представляют интереса. Однако в нестационарном решении они могут играть важнейшую роль. Основываясь на формуле (3.248), Лейт [1965] нашел, что число $N$ шагов по времени, при котором получается фазовая ошибка в один радиан, равно $N = 6/(C\theta^3)$. Лейт считает, что при численных расчетах фазовые ошибки оказываются важнее амплитудных ошибок.

*Упражнение.* Определить фазовую и дисперсионную ошибки для схемы с разностями против потока.

Другой тип ошибки, которая оказывает влияние на точность нестационарных и стационарных расчетов при использовании как схемы Лейта, так и любых других схем, называется *ошибкой, обусловленной неразличимостью.* Ошибка, обусловленная неразличимостью, впервые была описана и проанализирована Филлипсом [1959]. В качестве других важных работ на эту

тему можно указать статьи Граммельтведта [1969] и Роберта с соавторами [1970]. Здесь мы только опишем это явление.

Неразличимость связана с обменом энергией между фурье-компонентами (термин «энергия» здесь используется в общем смысле первого момента переносимой функции $\zeta^2$). Как уже было указано выше, наименьшая длина волн компонент, которые можно различить при данной разностной сетке, равна $\Lambda = 2\Delta x$. Обычно больший интерес представляет точность длинноволновых компонент, и поэтому невозможность различать коротковолновые компоненты могла бы показаться несущественной.

В самом деле, если предположить, что конвективное поле $u$ всюду постоянно, то ошибка, обусловленная неразличимостью, не будет появляться. Однако в нелинейных задачах, как известно, компоненты взаимодействуют таким образом, что энергия переносится от длинноволновых компонент к коротковолновым. (В физике известно, что энергия турбулентности обычно переносится от бо́льших вихрей к меньшим, а энергия малых вихрей диссипирует или преобразуется во внутреннюю энергию посредством трения.) Для того чтобы имело место такое взаимодействие компонент, совсем не обязательно наличие настоящей нелинейности; достаточно, чтобы скорость $u$ была функцией пространственных переменных.

Теперь возникает следующий вопрос: что будет происходить в том случае, когда механизм диссипации для отбора энергии от коротковолновых компонент отсутствует и когда при расчетах нельзя различить компоненты с длиной волны $\Lambda < 2\Delta x$? Неожиданный ответ заключается в том, что тогда энергия перераспределяется и вновь переходит к длинноволновым компонентам, искажая эти представляющие наибольший интерес компоненты и даже приводя к некоторому роду численной неустойчивости (Филлипс [1959]). Наличие в расчетах какого-либо затухания, физического или численного, обеспечивает диссипативный механизм и тем самым облегчает решение этого вопроса. Таким образом, расчеты течений при малых Re и расчеты течений невязкой жидкости при помощи численных методов, вводящих искусственное затухание коротковолновых компонент, меньше страдают из-за ошибок, обусловленных неразличимостью.

Слово *неразличимость* используется также для описания того факта, что на конечной сетке просто нельзя добиться различимости некоторых частот. (Именно из-за этого энергия может перераспределяться к длинноволновым компонентам.) То обстоятельство, что два таких распределения, как $\zeta_{i\pm} = \cos[\pi(m \pm n)i]$, имеют в точности одинаковые значения в узловых точках $i$, является следствием простых тригонометрических тождеств. Такая же дискретизация или «сеточное» пред-

ставление явления *во времени* вызывает стробоскопические эффекты в движущихся картинах, например колеса вагона кажутся замедляющими движение и вращающимися в обратном направлении. Такое смещение частот является неизбежным следствием дискретизации; см. Хемминг [1962, с. 276, 303].

В заключение этого раздела рассмотрим обобщение схемы Лейта на случай двух пространственных переменных. Очевидным обобщением уравнения (3.224) будет уравнение

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^{n} - \frac{1}{2}C_x(\zeta_{i+1,j}^{n} - \zeta_{i-1,j}^{n}) + \frac{1}{2}C_x^2(\zeta_{i+1,j}^{n} - 2\zeta_{i,j}^{n} + \zeta_{i-1,j}^{n}) -$$
$$- \frac{1}{2}C_y(\zeta_{i,j+1}^{n} - \zeta_{i,j-1}^{n}) + \frac{1}{2}C_y^2(\zeta_{i,j+1}^{n} - 2\zeta_{i,j}^{n} + \zeta_{i,j-1}^{n}), \quad (3.252)$$

или в очевидных сокращенных обозначениях

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^{n} - \frac{1}{2}C_x\delta_x(\zeta^n) + \frac{1}{2}C_x^2\delta_x^2(\zeta^n) - \frac{1}{2}C_y\delta_y(\zeta^n) + \frac{1}{2}C_y^2\delta_y^2(\zeta^n), \quad (3.253)$$

где $C_x = u\Delta t/\Delta x$, а $C_y = v\Delta t/\Delta y$. Эта схема *не* является схемой второго порядка точности. Схема второго порядка должна была бы включать член с производной $\partial^2\zeta/\partial x\,\partial y$ в разложениях в ряды Тейлора. Более того, данная схема *неустойчива* (Лейт [1965]). Таким образом, конечно-разностная схема (3.252) является примером двумерной неустойчивой схемы, полученной в результате комбинации двух одномерных схем, каждая из которых устойчива.

Лейт [1965] дает устойчивую двумерную схему, которая основывается на понятии дробных шагов по времени (Марчук [1965]) и которую теперь обычно называют схемой расщепления по времени. Ее идея заключается в последовательном применении каждой одномерной схемы по отдельности, причем результаты, получающиеся на первом промежуточном шаге, лишены физического смысла [1]). Эта схема записывается так:

$$\zeta_{i,j}^{n+1/2} = \zeta_{i,j}^{n} - \frac{1}{2}C_x\delta_x(\zeta^n) + \frac{1}{2}C_x^2\delta_x^2(\zeta^n), \quad (3.254а)$$

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^{n+1/2} - \frac{1}{2}C_y\delta_y(\zeta^{n+1/2}) + \frac{1}{2}C_y^2\delta_y^2(\zeta^{n+1/2}). \quad (3.254б)$$

Она является аппроксимирующей, в отличие от схемы (3.253) обеспечивает полный второй порядок точности и устойчива при условиях $C_x < 1$, $C_y < 1$.

[1]) Эта концепция похожа на расщепление, ранее использованное Писменом и Ракфордом [1955] в неявной схеме метода чередующихся направлений (см. разд. 3.1.16), но не эквивалентна ему. В монографии Яненко [1967] рассматриваются и другие методы дробных шагов по времени.

По-видимому, любую устойчивую одномерную схему можно применять и в случае двух пространственных переменных, когда проводится расщепление по времени, причем условия устойчивости для одномерной схемы не меняются. В задачах обтекания тел такое расщепление по времени приводит к трудностям, связанным с граничными условиями на промежуточном шаге. Как мы увидим, для вычисления граничных значений $\zeta$ на поверхности тела используются значения функции тока $\psi$ во внутренних точках, но вычислять значения $\psi^{n+1/2}$ на промежуточном шаге, кажется, не имеет смысла.

При достаточно малых шагах по времени на втором шаге схемы (3.254), вероятно, можно брать значение $\zeta^n$ с предшествующего слоя по времени. Как влияет такая постановка граничного условия на устойчивость и точность какой-либо схемы расщепления по времени, пока что не установлено. (При решении метеорологических задач, рассматривавшихся Лейтом, трудностей не возникает.) Фромму [1971] при помощи введения в одношаговую схему членов со смешанными производными удалось добиться устойчивости в схеме, которая была устойчива в одномерном случае и неустойчива в двумерном.

Расщепление по времени может привести помимо улучшения устойчивости и к улучшению точности (см. следующее упражнение).

*Упражнение.* Применить схему с разностями против потока в случае двух пространственных переменных и отсутствия вязкости для уравнения переноса с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u\frac{\partial \zeta}{\partial x} - v\frac{\partial \zeta}{\partial y}.$$

Показать, что схема расщепления по времени в отличие от схемы без расщепления приводит к точному решению, когда числа Куранта $u\Delta t/\Delta x = 1$ и $v\Delta t/\Delta y = 1$.

Некоторые схемы, аналогичные схеме Лейта, обсуждаются в работах Касахары [1965] и Фишера [1965а]. Эти схемы и схема Лейта похожи на схему Лакса — Вендроффа и ее двухшаговые варианты, которые будут рассматриваться в гл. 5. Хотя схемы Лакса — Вендроффа были разработаны для течений сжимаемой жидкости, они представляют интерес и для течений несжимаемой жидкости (Лилли [1965]), несмотря на то что эти схемы приводят к сильному затуханию коротковолновых возмущений.

Другие схемы, построенные на идее расщепления по времени и обладающие лучшими дисперсионными свойствами, будут рассматриваться в следующих разделах, а сейчас мы продолжим обсуждение некоторых более простых схем.

### 3.1.14. Неявные схемы

Рассмотренные выше схемы являются явными, т. е. в них для вычисления значений на $(n+1)$-м слое по времени необходимы только известные значения на $n$-м, $(n-1)$-м, ... слоях. Теперь приступим к обсуждению неявных схем, в которых в пространственных производных используются значения на $n+1$ слое по времени и поэтому для продвижения расчета нужно одновременно решать систему уравнений на $n+1$ слое.

Запишем общую схему для модельного уравнения, описывающего течение невязкой жидкости, в следующем виде:

$$\zeta^{n+1} = \zeta^n - (u\,\Delta t)\,\delta\zeta/\delta x. \tag{3.255}$$

Здесь будет рассматриваться представление пространственной производной только центральными разностями, так что

$$\frac{\delta\zeta_i}{\delta x} = \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_{i-1}}{2\,\Delta x}, \tag{3.256}$$

где слой по времени $n$ пока еще не определен. Аналогично, для уравнения диффузии положим

$$\zeta^{n+1} = \zeta^n + (\alpha\,\Delta t)\,\delta^2\zeta/\delta x^2. \tag{3.257}$$

Если пространственные производные в (3.255) или (3.257) выписать на $n$-м слое по времени, то получится рассмотренная ранее явная схема с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной и с ошибкой порядка $O(\Delta t, \Delta x^2)$. Если же член $\delta\zeta/\delta x$ в уравнении конвекции (3.255) записать на новом $(n+1)$-м слое, то получится так называемая *полностью неявная* схема

$$\zeta^{n+1} = \zeta^n - (u\,\Delta t)\,\delta\zeta^{n+1}/\delta x. \tag{3.258}$$

Ошибка при этом по-прежнему имеет порядок $O(\Delta t, \Delta x^2)$, но эта схема обладает существенным преимуществом в смысле устойчивости. Исследуя устойчивость методом фон Неймана и полагая $C = u\,\Delta t/\Delta x$, получаем

$$V^{n+1} = V^n - (C/2)\,V^{n+1}\left(e^{I\theta} - e^{-I\theta}\right), \tag{3.259}$$

$$V^{n+1}(1 + CI\sin\theta) = V^n, \tag{3.260}$$

$$G = \frac{1}{1 + CI\sin\theta} = \frac{1 - CI\sin\theta}{1 + C^2\sin^2\theta}, \tag{3.261}$$

$$|G|^2 = \frac{1 + C^2\sin^2\theta}{[1 + C^2\sin^2\theta]^2} = \frac{1}{1 + C^2\sin^2\theta}. \tag{3.262}$$

Таким образом, для полностью неявной схемы имеем $|G| \leqslant 1$ независимо от величины C. Данная схема абсолютно устойчива,

что дает возможность вести расчеты с произвольно большим шагом по времени, а это является большим преимуществом.

Полностью неявная схема первого порядка точности абсолютно устойчива также и для уравнения диффузии[1]) (Лаасонен [1949], Рихтмайер и Мортон [1967]). При $d = \alpha \Delta t/\Delta x^2$ получаем

$$\zeta^{n+1} = \zeta^n + \alpha \Delta t \delta^2 \zeta^{n+1}/\delta x^2, \tag{3.263}$$

$$V^{n+1} = V^n + V^{n+1} d\,(e^{I\theta} + e^{-I\theta} - 2), \tag{3.264}$$

$$V^{n+1}[1 - 2d\,(\cos\theta - 1)] = V^n, \tag{3.265}$$

$$G = \frac{1}{1 + 2d\,(1 - \cos\theta)}. \tag{3.266}$$

Так как $1 - \cos\theta \geqslant 0$ для любых $\theta$, имеем $|G| \leqslant 1$ для любых $d$ или любых $\Delta t$. Заметим также, что $G > 0$ для любых $\theta$; как было указано ранее, это условие отвечает случаю, когда осцилляции, обусловленные чрезмерно большим шагом по времени, отсутствуют.

*Упражнение.* При помощи метода фон Неймана убедиться в том, что полностью неявная схема абсолютно устойчива для уравнения, включающего конвективный и диффузионный члены.

*Упражнение.* Используя, как в методе Хёрта, разложения в ряды Тейлора, показать, что в нестационарном случае схемная вязкость полностью неявной схемы имеет вид $a_\varepsilon = u^2 \Delta t/2$. (*Указание.* Для упрощения вычислений разложение проводить в окрестности точки $(i, n + 1)$.)

Если в уравнении конвекции (3.255) величину $\delta\zeta/\delta x$ вычислять как среднее значение на $n$-м и $(n + 1)$-м слоях, то будем иметь

$$\zeta^{n+1} = \zeta^n - \frac{1}{2}(u \Delta t)\left[\frac{\delta \zeta^n}{\delta x} + \frac{\delta \zeta^{n+1}}{\delta x}\right]. \tag{3.267}$$

Лилли [1965] назвал эту схему «модифицированной схемой Эйлера» (схема с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным называется схемой Эйлера[2])). Данная схема также неявная, но поскольку осреднение центрирует пространственную производную относительно $(n + 1/2)$, как и в схеме «чехарда со средней точкой» (см. разд. 3.1.6), ошибка имеет порядок $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$. Множи-

[1]) Предыдущие примеры могли бы навести на мысль, что разностные схемы, с успехом используемые для уравнения конвекции, обычно неприменимы к уравнению диффузии. Но это эмпирическое правило неприменимо для неявных схем.

[2]) Данная схема называется также схемой Кранка — Николсона. Как будет указано ниже, это название лучше подходит к схеме для уравнения диффузии, такой, как схема (3.273).

тель перехода для этой схемы тождественно равен единице, $|G| = 1$. Действительно,

$$V^{n+1} = V^n - \frac{C}{4}\left(e^{I\theta} - e^{-I\theta}\right)\left(V^{n+1} + V^n\right), \tag{3.268}$$

$$V^{n+1} = V^n - Ia\left(V^{n+1} + V^n\right), \tag{3.269}$$

где

$$a = (C/2)\sin\theta; \tag{3.270}$$

тогда

$$G = \frac{1 - aI}{1 + aI} = \frac{1 - 2aI - a^2}{1 + a^2}, \tag{3.271}$$

и

$$|G|^2 = G\bar{G} = \frac{(1 - a^2)^2 + (2a)^2}{(1 + a^2)^2} = 1. \tag{3.272}$$

Другие преимущества модифицированной схемы Эйлера заключаются в следующем: в отличие от схемы «чехарда со средней точкой» здесь не требуется двух наборов начальных данных и не развивается неустойчивость, связанная с расчленением решения по времени.

Такое же усреднение по времени, примененное к уравнению диффузии (3.257), приводит к известной схеме Кранка — Николсона [1947], также имеющей ошибку порядка $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$:

$$\zeta^{n+1} = \zeta^n + \frac{1}{2}\alpha\,\Delta t\left[\frac{\delta^2\zeta^n}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\zeta^{n+1}}{\delta x^2}\right]. \tag{3.273}$$

Анализ устойчивости по методу фон Неймана дает

$$V^{n+1} = V^n + \frac{d}{2}\left(e^{I\theta} + e^{-I\theta} - 2\right)\left(V^{n+1} + V^n\right), \tag{3.274}$$

$$V^{n+1} = V^n + d\,(\cos\theta - 1)\left(V^n + V^{n+1}\right), \tag{3.275}$$

$$G = \frac{1 - d\,(1 - \cos\theta)}{1 + d\,(1 - \cos\theta)}. \tag{3.276}$$

Для $1 - \cos\theta = 0$ имеем $G = 1$. Рассмотрим теперь случай, когда $1 - \cos\theta > 0$. Если $d \to 0$, то $G \to 1$ (как это и должно быть при $\Delta t \to 0$). Если $d \to \infty$, то $G \to -1$. Таким образом, схема Кранка — Николсона абсолютно устойчива и $|G| < 1$ для больших $\Delta t$; но большие по величине $\Delta t$ приводят к обусловленным чрезмерно большим шагом по времени осцилляциям некоторых фурье-компонент. Это наводит на мысль, что схема Кранка — Николсона второго порядка при достаточно больших $\Delta t$ будет менее точной, чем явная схема с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной (схема ВВЦП). Действительно, это получается

просто и сопоставлением членов, дающих ошибку схем: для достаточно малых $\Delta t$ член порядка $O(\Delta t^2)$ будет меньше члена порядка $O(\Delta t)$, а при достаточно больших $\Delta t$ дело обстоит наоборот.

*Упражнение.* Исходя из равенства (3.276), показать, что если шаг $\Delta t$ в схеме Кранка — Николсона превышает критическое для явной схемы ВВЦП значение $\Delta t$, то будут иметь место обусловленные чрезмерно большим шагом по времени осцилляции фурье-компоненты с длиной волны $\Lambda = 2\Delta x$.

Модифицированная схема Эйлера для уравнения конвекции (3.267) и схема Кранка — Николсона для уравнения диффузии (3.273) могут быть скомбинированы для применения к полному уравнению, включающему конвективный и диффузионный члены; построенная схема также будет абсолютно устойчивой.

В рассмотренных «частично неявных» схемах значения $\partial\zeta^n/\partial x$ на $n$-м и $\partial\zeta^{n+1}/\partial x$ на $(n+1)$-м слоях берутся при осреднении с одинаковыми весовыми множителями, поэтому ошибка здесь имеет порядок $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$. Наиболее точный вариант такого подхода, частично основанный на ранней работе Брайена [1961], был предложен Стоуном и Брайеном [1963]. В этой работе рассматриваются отдельные весовые множители и делается попытка их оптимизации. Наилучший результат получается в том случае, когда для разных шагов по времени принимаются различные весовые множители.

Другая неявная схема была рассмотрена Ивановым с соавторами [1970].

Один из недостатков неявных схем, применяемых к уравнению конвекции в случае невязкой жидкости, заключается в том, что они приводят к бесконечной скорости распространения возмущения. Для модельного уравнения в случае невязкой жидкости возмущение величины $\zeta$ распространяется за время $\Delta t$ на расстояние $l = u\Delta t$. Для простой явной конечно-разностной схемы возмущение всегда распространяется за любое время $\Delta t$ в соседнюю узловую точку на расстояние $l = \Delta x$. Но для неявной схемы, поскольку в ней все $\zeta^{n+1}$ рассматриваются одновременно, возмущение распространяется на расстояние $l = \infty$ (или до границ расчетной сетки)[1]). Заметим, однако, что это свойство желательно для уравнения диффузии, которое в дифференциальной форме имеет бесконечную скорость распространения возмущения. Простые явные конечно-разностные аналоги

[1]) Такая бесконечная скорость распространения возмущения также означает, что хотя бы некоторые фурье-компоненты имеют опережающую фазовую ошибку в противоположность запаздывающей фазовой ошибке в простых явных схемах.

для уравнения диффузии не обладают таким свойством. Для того чтобы моделировать правильное качественное поведение уравнения, включающего конвективный и диффузионный члены, по скорости распространения возмущения, можно для конвективного члена применять явную схему, а для диффузионного члена — неявную (см. Прахт [1971а]). Конечно, такое поведение не существенно, если отыскивается только стационарное решение.

Другим очевидным недостатком рассмотренных неявных схем является необходимость одновременного решения на новом шаге по времени $N$ алгебраических уравнений (где $N$ — число точек $i$ по пространственной переменной, в которых решение не определяется известными граничными условиями). Если при решении нелинейной задачи частично неявные схемы должны действительно обеспечить порядок точности $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$, то поле скоростей $u^{n+1}$ должно рассчитываться также неявно. В настоящее время решение системы нелинейных уравнений является весьма трудным делом, и на практике неявные расчеты конвективного поля не проводятся. Решить систему из $N$ линейных уравнений, конечно, труднее, чем провести расчеты по простой явной схеме, но, как будет показано ниже, такое решение не является исключительно трудным и не требует чрезмерно много времени (в одномерном случае).

Конечно-разностное уравнение в каждой точке $i$ включает неизвестные значения только в двух соседних точках $i \pm 1$. Для иллюстрации покажем, как можно проводить решение системы таких уравнений. (В действительности описываемый способ решения применяется не часто.) Пусть известны значения $\zeta_1$ и $\zeta_l$ на $(n+1)$-м слое. Уравнение в узловой точке имеет вид

$$\zeta_{i-1} + a\zeta_i + b\zeta_{i+1} = c', \tag{3.277}$$

где верхний индекс $n+1$ опущен для простоты. При известном значении $\zeta_1$ из уравнения (3.277), рассматриваемого в точке $i = 2$, можно найти

$$\zeta_3 = f(\zeta_2, \zeta_1), \tag{3.278}$$

т. е. $\zeta_3$ как функцию значений $\zeta_2$ и $\zeta_1$. Переходя к точке $i = 3$, получаем

$$\zeta_4 = f(\zeta_3, \zeta_2). \tag{3.279а}$$

При помощи (3.278) выразим $\zeta_3$ через $\zeta_2$ и $\zeta_1$, что даст

$$\zeta_4 = f(\zeta_2, \zeta_1). \tag{3.279б}$$

Продолжая, получаем в точке $i = I - 2$

$$\zeta_{I-1} = f(\zeta_{I-2}, \zeta_{I-3}) = f(\zeta_2, \zeta_1) \tag{3.280}$$

и, наконец, в точке $i = I - 1$

$$\zeta_I = f(\zeta_2, \zeta_1). \tag{3.281}$$

При известных граничных значениях $\zeta_1$ и $\zeta_I$ отсюда можно найти $\zeta_2$. Затем, проводя для решения уравнений вида (3.277) «второй обход» узловых точек, можно найти значения $\zeta$ в остальных точках. Такой способ решения легко приспособить и к граничным условиям другого вида.

Данный способ решения, в том виде, как он был описан, используется редко, так как при подобных «двойных обходах» иногда происходит накопление машинных ошибок округления. Этого недостатка лишены некоторые алгоритмы прогонки («трехдиагональные алгоритмы»), один из которых рассматривается в приложении А.

Система разностных уравнений называется трехдиагональной в том случае, когда в матричной записи этой системы

$$[A][\zeta] = [B] \tag{3.282}$$

матрица $[A]$, которая должна быть обращена, имеет трехдиагональную форму, т. е. все ее элементы, отстоящие от диагонали более чем на одну позицию, равны нулю. Трехдиагональную матрицу схематически можно представить как

$$[A] = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & \cdot & \cdot \end{bmatrix}. \tag{3.283}$$

Такие трехдиагональные системы разностных уравнений решаются достаточно просто. Однако применение неявных схем для решения двумерных задач приводит к матрице *блочно-трехдиагональной* формы

$$[A] = \begin{bmatrix} d & t & 0 \\ t & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ 0 & & \cdot \end{bmatrix}, \tag{3.284}$$

где элементы $d$ и $t$ сами являются трехдиагональными матрицами (см. Митчелл [1969, с. 120]). Уравнения с такой матрицей уже не так просто решить, и наиболее известные методы их решения являются итерационными.

Поэтому, несмотря на то что при использовании неявных схем допустимы крупные шаги по времени, на каждом шаге, вообще говоря, требуется выполнение большого числа итераций. При этом неявная схема уже не дает выигрыша по сравнению с многократным применением явной схемы. Вследствие этого такие неявные схемы не находят непосредственного применения для решения многомерных гидродинамических задач [1]). Единственным исключением является уравнение пограничного слоя (разд. 6.4); здесь диффузией в направлении потока пренебрегают, а вдоль другой координатной оси к уравнению диффузии применяется схема Кранка — Николсона [2]), так что в этом случае получается трехдиагональная система уравнений.

Неявная формулировка часто используется в неявных схемах чередующихся направлений, основанных на идее дробных шагов по времени (разд. 3.1.13) и приводящих к трехдиагональным матрицам даже в случае многомерных задач. Такие схемы будут обсуждаться в дальнейшем, но сначала рассмотрим некоторые многошаговые явные схемы.

### 3.1.15. Многошаговые явные схемы

Ранее описанные схемы для одномерного линейного модельного уравнения являются «одношаговыми», поскольку в них для получения значений на новом временно́м слое требуется только один вычислительный шаг [3]). Рассмотрим теперь несколько многошаговых схем.

Одной из двухшаговых явных схем для решения уравнения конвекции при отсутствии вязкости является схема Хойна (Heun). Она использовалась Лоренцем [1963] и была исследована Лилли [1965]. Эта схема представляет собой первое итерационное приближение для «модифицированной схемы Эйлера» (3.267). Вместо неявного члена $\delta\zeta^{n+1}/\delta x$ в нее входит аналогичный член, содержащий величину $\overline{\zeta^{n+1}}$, которая вычисляется предварительно при помощи схемы с разностями вперед

[1]) Для простого нестационарного уравнения диффузии в случае двух или трех пространственных переменных $\partial\zeta/\partial t = \alpha\nabla^2\zeta$, неявное разностное уравнение Кранка — Николсона сводится к уравнению Пуассона с «источниковым» членом вида $(2/\alpha)\partial\zeta/\partial t - \nabla^2\zeta^n$. В этом случае для решения неявного разностного уравнения диффузии можно использовать неитерационные методы решения уравнения Пуассона (см. разд. 3.2.1, 3.2.8 и 3.2.9) и схема будет точной и эффективной.

[2]) Если ставятся граничные условия градиентного типа, то схема Кранка — Николсона в этом случае может привести к неустойчивости (Ф. Блоттнер, личное сообщение).

[3]) В схеме Лейта (см. разд. 3.1.13) два шага требуются только в случае двух пространственных переменных.

по времени и с центральными разностями по пространственным переменным:

$$\overline{\zeta^{n+1}} = \zeta^n - u\,\Delta t\,\delta\zeta^n/\delta x, \tag{3.285а}$$

$$\zeta^{n+1} = \zeta^n - \frac{1}{2}u\,\Delta t\left[\frac{\delta\zeta^n}{\delta x} + \frac{\delta\overline{\zeta^{n+1}}}{\delta x}\right]. \tag{3.285б}$$

Эта схема сохраняет второй порядок точности, присущий схеме (3.267), но оказывается слабо неустойчивой (Лилли [1965]), имея множитель перехода $G = 1 + O(\Delta t^2)$. Ее можно использовать на ранней стадии в нестационарных расчетах, но не следует применять в нестационарных расчетах до больших значений времени и в стационарном случае.

Первое итерационное приближение для полностью явной схемы (3.258) применительно к уравнению конвекции при отсутствии вязкости было предложено Мацуно (см. Лилли [1965]). Браиловская [1965] использовала такой же подход для уравнений, описывающих течение вязкой сжимаемой жидкости. Эта схема такова:

$$\overline{\zeta^{n+1}} = \zeta^n - u\,\Delta t\,\delta\zeta^n/\delta x, \tag{3.286а}$$

$$\zeta^{n+1} = \zeta^n - u\,\Delta t\,\delta\overline{\zeta^{n+1}}/\delta x. \tag{3.286б}$$

Здесь ошибка аппроксимации имеет порядок $O(\Delta t, \Delta x^2)$.

Для того чтобы исследовать устойчивость этой двухшаговой схемы методом фон Неймана, прежде всего представим ее в виде одношаговой схемы. Выпишем уравнение (3.286а) в точках $i \pm 1$:

$$\overline{\zeta^{n+1}_{i+1}} = \zeta^n_{i+1} - \frac{C}{2}\left[\zeta^n_{i+2} - \zeta^n_i\right], \tag{3.287}$$

$$\overline{\zeta^{n+1}_{i-1}} = \zeta^n_{i-1} - \frac{C}{2}\left(\zeta^n_i - \zeta^n_{i-2}\right). \tag{3.288}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3.286б), получаем

$$\zeta^{n+1}_i = \zeta^n_i - \frac{C}{2}\left[\overline{\zeta^{n+1}_{i+1}} - \overline{\zeta^{n+1}_{i-1}}\right] =$$

$$= \zeta^n_i - \frac{C}{2}\left[\zeta^n_{i+1} - \frac{C}{2}\left(\zeta^n_{i+2} - \zeta^n_i\right) - \zeta^n_{i-1} + \frac{C}{2}\left(\zeta^n_i - \zeta^n_{i-2}\right)\right], \tag{3.289}$$

или

$$\zeta^{n+1}_i = \zeta^n_i - \frac{C}{2}\left(\zeta^n_{i+1} - \zeta^n_{i-1}\right) + \left(\frac{C}{2}\right)^2\left(\zeta^n_{i+2} + \zeta^n_{i-2} - 2\zeta^n_i\right). \tag{3.290}$$

Тогда метод фон Неймана даст

$$V^{n+1} = V^n\left[1 - \frac{C}{2}(e^{I\theta} - e^{-I\theta}) + \left(\frac{C}{2}\right)^2 (e^{2I\theta} + e^{-2I\theta} - 2)\right], \quad (3.291)$$

$$G = 1 - \frac{C}{2}(2I\sin\theta) + \left(\frac{C}{2}\right)^2 (2\cos 2\theta - 2). \quad (3.292)$$

Так как $1 - \cos 2\theta = 2\sin^2\theta$, имеем

$$G = 1 - IC\sin\theta - C^2\sin^2\theta. \quad (3.293)$$

Вводя обозначение $a = C\sin\theta$, получим

$$|G|^2 = (1 - a^2)^2 + a^2, \quad (3.294)$$

или

$$|G|^2 = 1 - a^2 + a^4. \quad (3.295)$$

Условие устойчивости $|G|^2 \leqslant 1$ будет выполняться при $|a| \leqslant 1$, откуда $C \leqslant 1$. Таким образом, первое итерационное приближение для полностью неявной схемы приводит к обычному условию устойчивости для явных схем, а не к абсолютной устойчивости неявной схемы.

Для двухшаговой схемы (3.286) получается то же условие устойчивости, что и для одношаговой схемы (3.290), но с вычислительной точки зрения эти схемы не эквивалентны. Двухшаговую схему можно применять в соседних с границей узловых точках, а для одношаговой схемы требуются нефизические значения в узлах, расположенных за границей расчетной области. В случае применения этой схемы к течениям сжимаемой жидкости (Брайловская [1965]) к различиям приводит и нелинейность.

Определим схемную вязкость рассматриваемой схемы в нестационарном случае, раскладывая, как это делалось в методе Хёрта, входящие в одношаговое уравнение (3.290) члены в ряды Тейлора. Опуская индексы $i$ и $n$, получаем

$$\zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\Delta t^2 + O(\Delta t^3) =$$

$$= \zeta - \frac{u\,\Delta t}{2\,\Delta x}\left\{\left[\zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)\right] - \right.$$

$$\left. - \left[\zeta - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)\right]\right\} +$$

$$+ \frac{u^2\,\Delta t^2}{4\,\Delta x^2}\left\{\left[\zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial x}(2\Delta x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}(2\Delta x)^2 + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}(2\Delta x)^3 + O((2\Delta x)^4)\right] + \left[\zeta - \frac{\partial\zeta}{\partial x}(2\Delta x) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}(2\Delta x)^2 - \frac{1}{6}\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}(2\Delta x)^3 + O((2\Delta x)^4)\right] - 2\zeta\right\}. \quad (3.296)$$

После приведения подобных членов и деления на $\Delta t$ будем иметь

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + O(\Delta t^2) = -u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + O(\Delta x^2) + u^2 \Delta t \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \quad (3.297)$$

Определим $\partial^2\zeta/\partial t^2$ из уравнения конвекции при отсутствии вязкости (см. уравнение (3.226)):

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \quad (3.298)$$

Тогда уравнение (3.297) принимает вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{u^2 \Delta t}{2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + O(\Delta t^2, \Delta x^2). \quad (3.299)$$

Следовательно, в нестационарном случае рассматриваемая схема имеет следующий коэффициент схемной вязкости:

$$\alpha_e = {}^1/_2 u^2 \Delta t = {}^1/_2 C(u \Delta x). \quad (3.300)$$

Если учесть ограничение на величину шага по времени, накладываемое диффузионным членом в случае явной схемы

$$\Delta t \leqslant \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{\alpha_e}, \quad (3.301)$$

то из (3.300) получится

$$\Delta t \leqslant \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{{}^1/_2 u^2 \Delta t}, \quad (3.302а)$$

$$u^2 \Delta t^2 \leqslant \Delta x^2, \quad (3.302б)$$

или $C \leqslant 1$, как и при исследовании методом фон Неймана.

В противоположность схемной вязкости в схеме с разностями против потока (3.179) вязкость в схеме Мацуно для нестационарного решения убывает с уменьшением $\Delta t$. Для стационарного решения коэффициент схемной вязкости равен нулю. В этом легко убедиться, замечая, что при достижении стационарного решения результаты, полученные на каждом из обоих шагов схемы, будут совпадать (Аллен [1968], Аллен и Чен [1970]), так как обе формулы идентичны. (Все прочие двухшаговые схемы не обладают этим желаемым свойством.) Использование в этом случае центральных разностей для производной $\delta\zeta/\delta x$ приводит к равенству $\alpha_e = 0$.

Рассматриваемую схему можно применять и для полного уравнения, включающего конвективный и диффузионный члены, либо вычисляя предварительные значения только для конвективного члена и оставляя старые значения для диффузионного члена, либо вычисляя предварительные значения для обоих

этих членов. В любом из этих случаев исследование устойчивости методом фон Неймана, показывает (Браиловская [1965], Аллен [1968]), что достаточные условия устойчивости имеют вид $C \leqslant 1$ и $d \leqslant 1/4$. Второе условие оказывается *вдвое более жестким*, чем обычное ограничение, обусловленное диффузионным членом в схеме с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным. Аллен и Чен [1970] (см. также Аллен [1968]) устранили ограничение, обусловленное диффузионным членом, модифицируя эту схему по той же идее и с той же простотой, с какими Дюфорт и Франкел модифицировали схему «чехарда со средней точкой» (см. разд. 3.1.7), а именно положили

$$\overline{\zeta_i^{n+1}} = \zeta_i^n - \frac{C}{2}\left(\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n\right) + d\left(\zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n - 2\overline{\zeta_i^{n+1}}\right), \tag{3.303а}$$

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - \frac{C}{2}\left(\overline{\zeta_{i+1}^{n+1}} - \overline{\zeta_{i-1}^{n+1}}\right) + d\left(\overline{\zeta_{i+1}^{n+1}} + \overline{\zeta_{i-1}^{n+1}} - 2\zeta_i^{n+1}\right). \tag{3.303б}$$

Такая схема с успехом использовалась для уравнения Бюргерса (2.20) и для уравнений, описывающих течение сжимаемой жидкости в случае двух пространственных переменных (Аллен [1968], Аллен и Чен [1970]). Данная схема также дает ошибку порядка $O(\Delta t, \Delta x^2)$.

Если в схеме Мацуно — Браиловской (3.286) для уравнения, описывающего течение идеальной жидкости, продолжить итерации, то получится аппроксимация полностью неявной схемы (3.258). Обозначая номер итерации верхним индексом $k$, будем иметь

$$\begin{aligned}
\zeta^{(n+1)1} &= \zeta^n - u\,\Delta t\,\frac{\delta}{\delta x}\left(\zeta^n\right),\\
\zeta^{(n+1)2} &= \zeta^n - u\,\Delta t\,\frac{\delta}{\delta x}\left(\zeta^{(n+1)1}\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\zeta^{(n+1)k+1} &= \zeta^n - u\,\Delta t\,\frac{\delta}{\delta x}\left(\zeta^{(n+1)k}\right).
\end{aligned} \tag{3.304}$$

Этот подход можно распространить и на схему (3.285), причем получится устойчивая схема с ошибкой порядка $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$:

$$\begin{aligned}
\zeta^{(n+1)0} &= \zeta^n - u\,\Delta t\,\delta\zeta^n/\delta x,\\
\zeta^{(n+1)1} &= \zeta^n - \frac{1}{2}u\,\Delta t\left[\frac{\delta\zeta^n}{\delta x} + \frac{\delta}{\delta x}\left(\zeta^{(n+1)1}\right)\right],\\
\zeta^{(n+1)2} &= \zeta^n - \frac{1}{2}u\,\Delta t\left[\frac{\delta\zeta^n}{\delta x} + \frac{\delta}{\delta x}\left(\zeta^{(n+1)2}\right)\right],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\zeta^{(n+1)k+1} &= \zeta^n - \frac{1}{2}u\,\Delta t\left[\frac{\delta\zeta^n}{\delta x} + \frac{\delta}{\delta x}\left(\zeta^{(n+1)k}\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.305}$$

Ни одна из этих схем не использовалась для решения уравнения переноса вихря, но Веронис [1968] применил схему (3.305) для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Он обнаружил, что при «оптимальном» выборе $\Delta t$ для достижения сходимости достаточно взять $k = 3$. (Однако устойчивость схемы существенно улучшается только при больших значениях $k$.)

Трехслойная двухшаговая схема, предложенная Курихарой [1965] (см. также Полджер [1971]), обладает некоторыми интересными свойствами. В случае уравнения для невязкой жидкости ее можно записать в следующем виде:

$$\zeta^{\overline{n+1}} = \zeta^{n-1} - 2u\,\Delta t \frac{\delta \zeta^n}{\delta x}, \tag{3.306а}$$

$$\zeta^{n+1} = \zeta^n - \frac{1}{2} u\,\Delta t \left[\frac{\delta \zeta^n}{\delta x} + \frac{\delta \zeta^{\overline{n+1}}}{\delta x}\right]. \tag{3.306б}$$

Первый шаг есть не что иное, как предиктор по схеме «чехарда», а второй — схема (3.285). Данная схема обладает некоторыми интересными характеристиками (см. задачу 3.16). Подобно схеме «чехарда», она имеет ошибку второго порядка $E = O(\Delta t^2, \Delta x^2)$; исследование устойчивости методом фон Неймана показывает, что $|\lambda| = 1$ при $C \leqslant 1$, и схема имеет нулевую схемную вязкость как в нестационарном, так и в стационарном случаях. Она также обладает недостатками, присущими схеме «чехарда», т. е. требует дополнительных условий на выходной границе потока и дополнительных начальных условий и фурье-комионента с длиной волны $\Lambda = 2\Delta x$ стационарна. В отличие от схемы «чехарда» она обладает еще и тем недостатком, что не дает точного решения модельного уравнения при $C = 1$; однако значительным преимуществом рассматриваемой схемы является отсутствие неустойчивости, связанной с расчленением решения по временны́м шагам.

## 3.1.16. Неявные схемы метода чередующихся направлений

Неявные схемы метода чередующихся направлений (схемы ADI) были предложены в работах Писмена, Ракфорда [1955] и Дугласа [1955]. Называемая также схемой переменных направлений (Кускова [1968]), эта схема основана на расщеплении шага по времени с целью построения многомерной неявной схемы, в которой требуется обращение только трехдиагональной матрицы [1]). Первые приложения этой схемы к задачам

[1]) Н. Н. Яненко [1967] разработал метод дробных шагов, в котором многомерное уравнение расщепляется на последовательность одномерных уравнений; первые результаты он опубликовал в ДАН СССР, 1959, т. 125, № 6. Метод расщепления был также развит советскими математиками

гидродинамики дали Уилкс и Черчилл [1966], Сэмюелс и Черчилл [1967], Пирсон [1]) [1964, 1965а, 1965б], Азиз и Хеллумс [1967]. В настоящее время неявные схемы чередующихся направлений — наиболее распространенные схемы для задач с учетом вязкости.

Для линеаризованной задачи неявную схему метода чередующихся направлений Писмена и Ракфорда можно представить в следующем виде. Обозначим через $\delta\zeta/\delta x$ и $\delta^2\zeta/\delta x^2$ аппроксимации с центральными разностями для $\partial\zeta/\partial x$ и $\partial^2\zeta/\partial x^2$ в точке $i$. Интегрирование по времени на интервале $\Delta t$ уравнения, включающего конвективные и диффузионные члены,

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -u\frac{\partial\zeta}{\partial x} - v\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \alpha\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}, \tag{3.307}$$

осуществляется за два следующих шага:

$$\frac{\zeta^{n+1/2} - \zeta^n}{\Delta t/2} = -u\frac{\delta\zeta^{n+1/2}}{\delta x} - v\frac{\delta\zeta^n}{\delta y} + \alpha\frac{\delta^2\zeta^{n+1/2}}{\delta x^2} + \alpha\frac{\delta^2\zeta^n}{\delta y^2}, \tag{3.308а}$$

$$\frac{\zeta^{n+1} - \zeta^{n+1/2}}{\Delta t/2} = -u\frac{\delta\zeta^{n+1/2}}{\delta x} - v\frac{\delta\zeta^{n+1}}{\delta y} + \alpha\frac{\delta^2\zeta^{n+1/2}}{\delta x^2} + \alpha\frac{\delta^2\zeta^{n+1}}{\delta y^2} \tag{3.308б}$$

($x$ и $y$ можно поменять ролями).

Преимущество этого подхода по сравнению с полностью неявными схемами заключается в том, что в рассматриваемой схеме каждое разностное уравнение, хотя и неявное, имеет только трехдиагональную матрицу. Уравнение (3.308а) содержит неявные неизвестные $\zeta_{i,j}^{n+1/2}$, $\zeta_{i\pm1,j}^{n+1/2}$. Уравнение (3.308б) содержит неявные неизвестные $\zeta_{i,j}^{n+1}$, $\zeta_{i,j\pm1}^{n+1}$. Эта двумерная схема абсолютно устойчива, как и полностью неявная схема (уравнения (3.258) или (3.263)). Но в данной схеме требуется решать только трехдиагональную систему (см. приложение А), которая для обычных неявных схем имеет место лишь в одномерном случае. (Другой недостаток неявных схем, связанный с бесконечной скоростью распространения возмущения для конвектив-

---

Е. Г. Дьяконовым, Г. И. Марчуком, А. А. Самарским, В. К. Саульевым. Одно из первых применений метода расщепления к многомерной гидродинамике было дано К. А. Багриновским и С. К. Годуновым в статье, опубликованной в ДАН СССР, 1957, т. 115, № 3. — *Прим. ред.*

[1]) Пирсон [1964] показал, что конвективные члены не меняют безусловной устойчивости этой схемы, как и в случае полностью неявной схемы. Однако Хаустон и де Бремекер [1974] утверждают, что собственные функции, использованные Пирсоном, правильны только тогда, когда конвективные члены малы, и поэтому его доказательству нехватает общности. Легко убедиться в том, что требуемая здесь малость измеряется, как и можно было предполагать, условием для сеточного числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_c \leqslant 2$.

ного члена, сохраняется и в неявных схемах метода чередующихся направлений.)

Кроме того, рассматриваемая схема, примененная к линейному уравнению, имеет формальную ошибку порядка $O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$. Для того чтобы убедиться в том, что схема действительно имеет второй порядок точности по времени (это на первый взгляд не очевидно), нужно выписать отдельно вклады от производных по переменным $x$ и $y$. Пренебрегая зависимостью от $y$, уравнение (3.308) можно записать в форме

$$\frac{\zeta^{n+1}-\zeta^n}{\Delta t} = -u\frac{\delta\zeta^{n+1/2}}{\delta x} + \alpha\frac{\delta^2\zeta^{n+1/2}}{\delta x^2}, \qquad (3.309)$$

которая, очевидно, имеет порядок $O(\Delta t^2)$. Аналогично, пренебрегая в уравнении (3.308) зависимостью от $x$, получаем форму

$$\frac{\zeta^{n+1}-\zeta^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2}v\left[\frac{\delta\zeta^n}{\delta y}+\frac{\delta\zeta^{n+1}}{\delta y}\right]+\frac{1}{2}\alpha\left[\frac{\delta^2\zeta^n}{\delta y^2}+\frac{\delta^2\zeta^{n+1}}{\delta y^2}\right], \qquad (3.310)$$

которая также, очевидно, имеет порядок $O(\Delta t^2)$. Второй порядок точности, аппроксимация и сходимость данной схемы в применении к уравнению диффузии для прямоугольных и непрямоугольных областей были формально показаны Дугласом [1955, 1957].

Второй порядок точности схемы может быть нарушен нелинейными членами, которые соответственно должны вычисляться как $u^{n+1/2}$, $v^n$ в уравнении (3.308а) и как $u^{n+1/2}$, $v^{n+1}$ в уравнении (3.308б). Поскольку $u$ и $v$ определяются через функцию тока $\psi$, которая в свою очередь находится из эллиптического уравнения $\nabla^2\psi = \zeta$, в этом случае требуется совместно решать уравнения для $\zeta$ и для $\psi$ на слоях $n+1/2$ и $n+1$, что совсем нереально. Если же в схеме всюду использовать старые значения $u^n$ и $v^n$, как в работе Сона и Ханратти [1969], то схема будет иметь формальную точность $O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2)$; если же поле скоростей меняется слабо, то в линеаризованной системе остается кое-что от второго порядка точности[1]). Брили [1970] по вычисленным значениям $u^n$ и $v^n$ и по ранее вычисленным $u^{n-1}$ и $v^{n-1}$ линейной экстраполяцией определял $u^{n+1/2}$ и $v^{n+1/2}$. Такая схема устойчива и, как оказалось, имеет второй порядок точности. Однако она требует дополнительной памяти для хранения значений $\psi^{n-1}$.

Можно также проводить полную итерационную процедуру (Пирсон [1965], Азиз и Хеллумс [1967]): из уравнения (3.308)

[1]) Это аналогично тому случаю, когда во второй схеме с разностями против потока, формально имеющей точность $O(\Delta x)$, остается кое-что от второго порядка точности при расчете конвективного поля, если $\zeta$ слабо меняется в зависимости от пространственной переменной (см. разд. 3.1.11).

с $u^n$ и $v^n$ найти первое приближение $\zeta^{\overline{n+1}}$, а затем из уравнения $\nabla^2\psi = \zeta^{\overline{n+1}}$ определить первое приближение $u^{\overline{n+1}}$ и $v^{\overline{n+1}}$. На второй итерации конвективные члены в уравнении (3.308) можно брать как средние $u = {}^1/_2(u^n + u^{\overline{n+1}})$ и т. п. Итерации можно закончить на этом или продолжать до $(k+1)$-й итерации, т. е. до тех пор, пока не будет выполняться условие $(u^{n+1})^{k+1} = (u^{n+1})^k$; в любом случае ошибка будет иметь порядок $O(\Delta t^2)$, как и в схеме (3.285); см. разд. 3.1.15. При одной итерации объем вычислений на одном временно́м шаге удваивается, и требуется дополнительная память для хранения $\psi^{n+1}$.

Другая возможная процедура заключается в том, что после решения уравнения (3.308а) вычисляется функция тока $\psi^{n+1/2}$ и получаемые из нее значения $u^{n+1/2}$, $v^{n+1/2}$ подставляются в уравнение (3.308б). Это приводит к линеаризации только на первом полушаге. Такая процедура может оказаться более точной, чем процедура линеаризации по значениям $u^n$ и $v^n$, и не требует дополнительной памяти как схема со строго вторым порядком точности, поскольку здесь нет необходимости различать в памяти $\psi^n$ и $\psi^{n+1/2}$. (То есть $\psi^n$ и $\psi^{n+1/2}$ имеют одинаковые идентификаторы в программе). Азиз и Хеллумс [1967] исследовали эти разновидности схем. Как и следовало ожидать, схема со строго вторым порядком точности ($\psi^n$ и $\psi^{\overline{n+1}}$) оказалась точнее, но для решения трехмерной задачи эти авторы применяли последнюю схему ($\psi^n$ и $\psi^{n+1/2}$), потому что объем используемой памяти в этом случае был на пределе.

В этих схемах итерации, необходимые для достижения второго порядка точности и для нелинейных членов, не обязательно связаны с дополнительной работой, так как они могут потребоваться и при численной реализации граничных условий. Одним из недостатков неявных схем метода чередующихся направлений, так же как и других неявных схем, является необходимость иметь граничные значения для $\zeta^{n+1}$. Вдоль некоторых границ можно задать условия для $\zeta^{n+1}$, допускающие неявное решение. Но на стенке с условием прилипания значения $\zeta_w$ на этой границе зависят от значений $\psi$ во внутренних точках (такие возможные зависимости будут обсуждаться в разд. 3.3.2). Поэтому для определения значения $\zeta_w^{n+1}$ на стенке требуется неявное решение уравнения $\nabla^2\psi^{n+1} = \zeta^{n+1}$. Таким образом, полная неявная задача при наличии граничного условия прилипания практически не поддается расчету даже при линеаризации скоростей по значениям $u^n$ и $v^n$.

Возможные процедуры расчета граничных значений $\zeta_w^{n+1}$ идентичны рассмотренным выше возможным процедурам для $u$ и $v$. Для значений на стенке можно принять $\zeta_w^{n+1} = \zeta_w^n$,

и в этом случае значения $\zeta$ на стенке будут отставать на $\Delta t$ от значений во внутренних точках. Такая схема использовалась в работе Уилкса и Черчилла [1966]. При малых $\Delta t$ эта аппроксимация достаточно точна, но ведь основное преимущество неявных схем метода чередующихся направлений — возможность счета с большими шагами $\Delta t$. При больших $\Delta t$ такая схема может оказаться не только не точной, но и дестабилизирующей. Решение при помощи итераций, как и при нахождении решения $\psi^{n+1}$, очевидно, оказывается предпочтительнее.

При использовании неявных схем метода чередующихся направлений для расчета течений при больших Re (или при больших числах Грасгофа для течений со свободной конвекцией) многие исследователи обнаруживали вычислительную неустойчивость (или, возможно, очень малую скорость сходимости итераций). Они либо не смогли получить решение при больших Re (напрпмер, Парис и Уитекер [1965], Торранс [1968]), либо были вынуждены осреднять с весом рассчитанные данные на старом и новом слоях по времени (Пирсон [1965а]), что эквивалентно уменьшению $\Delta t$, либо переходили к схемам с разностями против потока для конвективных членов (Бао и Догерти [1969]), что в некоторой степени было эквивалентно уменьшению Re (см. разд. 3.1.8). Было неясно, чем обусловливалась потеря сходимости: медленной сходимостью линеаризованной задачи, нелинейной неустойчивостью уравнений во внутренних точках, отставанием $\zeta_w^n$ на $\Delta t$ в одношаговой процедуре, недостаточной степенью сходимости $\zeta_w^{n+1}$ в итерационной процедуре или видом уравнения, используемого для расчета $\zeta_w$ по значениям $\psi$ во внутренних точках. Определяющими оказались две последние причины, и в свете работы Брили [1970] возникающие здесь затруднения могут быть разрешены.

Затруднения, описанные Уилксом и Черчиллом [1966], связаны как с отставанием $\zeta_w$ по времени (т. е. с тем, что его значение берется с предшествующего слоя), так и с частным видом разностного уравнения второго порядка точности, используемого для $\zeta_w$. Результаты Брили, относящиеся к граничным условиям для $\zeta_w$, будут приведены в разд. 3.3.2. Сэмюелс и Черчилл [1967] вернулись к уравнению первого порядка точности для $\zeta_w$, которое не приводит к неустойчивости, благодаря чему им удалось продолжить расчеты авторов предшествующей работы для больших чисел Грасгофа до тех пор, пока отставание $\zeta_w$ на $\Delta t$ не приводило к неустойчивости.

Степень сходимости $\zeta_w$, требуемая для получения устойчивого решения, зависит прежде всего от самой задачи. При больших $\Delta t$ сходимость может нарушаться из-за нелинейности. Очевидно, что при фиксированном числе итераций требуется

меньший шаг $\Delta t$ для достижения одной и той же точности сходимости итераций, т. е. одной и той же величины $\varepsilon$ в критерии сходимости $\left(\zeta_w^{n+1}\right)^{k+1} = \left(\zeta_w^{n+1}\right)^k + \varepsilon$. Торранс [1968] (см. также Брили [1970], Брили и Уоллс [1971]) обнаружил, что условие сходимости для значения вихря на стенке в действительности накладывает ограничение на величину шага по времени вида $\Delta t \leqslant a/\Delta x^2$, где $a$ — некоторое число, зависящее от задачи и от требований сходимости. Несмотря на то что метод фон Неймана указывает на безусловную устойчивость рассматриваемой схемы, оказывается, что неявное определение значений $\zeta_w$ на стенке фактически приводит к ограничению на величину шага по времени, которое аналогично ограничению, имеющему место для простейшей явной схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным. Такое поведение присуще не только неявным схемам метода чередующихся направлений, но и всем неявным схемам.

Хотя преимущества неявных схем метода чередующихся направлений над явными схемами практически не таковы, как это следует из анализа при помощи метода фон Неймана, опыт многих исследователей показывает, что неявные схемы метода чередующихся направлений допускают бо́льшие по величине размеры шагов по времени, ускоряют расчет в целом (вдвое и более) и, кроме того, дают возможность получить второй порядок точности по времени. Можно быть уверенным в том, что для простых прямоугольных областей такие схемы будут широко применяться и в дальнейшем. В случае же областей неправильной формы программирование для этих схем может усложниться и более практичными могут оказаться явные схемы.

Для успешного распространения основной неявной схемы метода чередующихся направлений (3.308) на случай трех пространственных переменных нужно принять во внимание некоторые тонкости. В наиболее очевидной схеме в этом случае надо выполнить три вычислительных шага с двумя промежуточными шагами при $t + \Delta t/3$ и $t + 2\Delta t/3$. Эта схема уже не обладает ни вторым порядком точности по времени, ни безусловной устойчивостью (Рихтмайер и Мортон [1967]) и неустойчива при $d > 3/2$ (Карнахан с соавторами [1969]). Продемонстрируем такое распространение схемы на случай трехмерного уравнения диффузии

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right). \tag{3.311}$$

Дуглас [1962] предложил следующую трехшаговую схему (верхние индексы * и ** относятся к промежуточным значе-

ниям, вычисленным с помощью алгоритма прогонки):

$$\frac{\zeta^* - \zeta^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\delta^2}{\delta x^2}\left[\frac{1}{2}(\zeta^* + \zeta^n)\right] + \alpha \frac{\delta^2 \zeta^n}{\delta y^2} + \alpha \frac{\delta^2 \zeta^n}{\delta z^2}, \quad (3.312а)$$

$$\frac{\zeta^{**} - \zeta^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\delta^2}{\delta x^2}\left[\frac{1}{2}(\zeta^* + \zeta^n)\right] + \alpha \frac{\delta^2}{\delta y^2}\left[\frac{1}{2}(\zeta^{**} + \zeta^n)\right] + \alpha \frac{\delta^2 \zeta^n}{\delta z^2}, \quad (3.312б)$$

$$\frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\delta^2}{\delta x^2}\left[\frac{1}{2}(\zeta^* + \zeta^n)\right] + \alpha \frac{\delta^2}{\delta y^2}\left[\frac{1}{2}(\zeta^{**} + \zeta^n)\right] + \alpha \frac{\delta^2}{\delta z^2}\left[\frac{1}{2}(\zeta^{n+1} + \zeta^n)\right]. \quad (3.312в)$$

Схема имеет порядок точности $O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2)$ и безусловно устойчива. Эта процедура может быть обобщена и на случай большего числа переменных. Дуглас и Ракфорд [1956], Дуглас и Ганн [1964] и Брайен [1961] предложили другие неявные схемы метода чередующихся направлений в случае трех пространственных переменных (см. также Карнахан с соавторами [1969]). Еще раз отметим, что казалось бы правдоподобные обобщения здесь часто оказываются неверными. Если в члене $\delta^2/\delta x^2$ в уравнении (3.312в) вместо $\zeta^*$ использовать последнее приближенное значение $\zeta^{**}$, то, как показали Рихтмайер и Мортон [1967], безусловная устойчивость схемы будет утрачена.

Азиз и Хеллумс [1967] с успехом использовали трехмерные неявные схемы метода чередующихся направлений для полного уравнения, включающего конвективный и диффузионный члены. Мак-Ки и Митчелл [1970] рассмотрели неявные схемы чередующихся направлений для задач со смешанными производными по координатам $\partial^2\zeta/\partial x\,\partial y$. Келлог [1969] исследовал неявную схему метода чередующихся направлений для нелинейного уравнения диффузии с нелинейным граничным условием. Применение неявных схем метода чередующихся направлений для уравнения диффузии в случае переменного шага пространственной сетки и граничных условий общего вида рассмотрел Спеньер [1967]. Общее обсуждение метода проводится в работе Видлунда [1967]. Густафсон [1971] предложил неявную схему метода чередующихся направлений для уравнений мелкой воды. Гурли и Митчелл [1969а] установили эквивалентность некоторых неявных схем метода чередующихся направлений и «локально одномерных» схем (см. также Митчелл [1969]). Ричардс [1970] использовал неявную схему метода чередующихся направлений для уравнения переноса вихря в цилиндрической системе координат. См. также работы Пиачека [1968, 1969б].

### 3.1.17. Явные схемы метода чередующихся направлений

В основном из методических соображений рассмотрим теперь явные схемы метода чередующихся направлений (схемы ADE). Это целый класс схем, которые впервые были рассмотрены Саульевым [1957] (см. также Саульев [1964], Рихтмайер и Мортон [1967] и Карнахан с соавторами [1969]). В применении к одномерному уравнению диффузии простейшая схема Саульева соответствует следующей одношаговой схеме. Для большей ясности запишем уравнение диффузии в виде

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right); \tag{3.313}$$

тогда конечно-разностная схема Саульева будет выглядеть так:

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\left.\frac{\delta \zeta}{\delta x}\right|_{i+1/2}^{n} - \left.\frac{\delta \zeta}{\delta x}\right|_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta x}, \tag{3.314}$$

или, если $d = \alpha \Delta t/\Delta x$, то так:

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n + d\left(\zeta_{i+1}^n - \zeta_i^n - \zeta_i^{n+1} + \zeta_{i-1}^{n+1}\right) \quad \text{при } i\uparrow. \tag{3.315}$$

Заметим, что если обход точек при расчете проводится в направлении роста $i$ (на что указывает запись $i\uparrow$ в уравнении (3.315)), то значение $\zeta_{i-1}^{n+1}$ на рассчитываемом слое уже известно. Несмотря на то что эта схема является двухслойной, требуется только один массив для хранения неизвестной величины $\zeta$, поскольку в программе $\zeta^{n+1}$ и $\zeta^n$, входящие в уравнение (3.315), можно идентифицировать одинаково. Так как уравнение (3.315) можно разрешить относительно $\zeta^{n+1}$, данная схема будет *явной*.

Если на каждом шаге по времени направление обхода точек при расчете чередовать от увеличения $i$ к уменьшению $i$, то такая явная схема метода чередующихся направлений будет близка к симметричной и может быть записана в виде

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n + d\left(\zeta_{i+1}^n - \zeta_i^n - \zeta_i^{n+1} + \zeta_{i-1}^{n+1}\right) \quad \text{при } i\uparrow, \tag{3.316а}$$

$$\zeta_i^{n+2} = \zeta_i^{n+1} + d\left(\zeta_{i+1}^{n+2} - \zeta_i^{n+2} - \zeta_i^{n+1} + \zeta_{i-1}^{n+1}\right) \quad \text{при } i\downarrow. \tag{3.316б}$$

При исследовании устойчивости уравнений (3.316) метод фон Неймана применяется на двух шагах. Для первого шага из уравнения (3.316а) получаем

$$V^{n+1} = V^{n+1} + d\left[V^n\left(e^{I\theta} - 1\right) + V^{n+1}\left(e^{-I\theta} - 1\right)\right], \tag{3.317}$$

$$G_A = \frac{1 - d + de^{I\theta}}{1 + d - de^{-I\theta}}. \tag{3.318}$$

Для второго шага из уравнения (3.316б) получаем

$$V^{n+2} = V^{n+1} + d[V^{n+2}(e^{I\theta} - 1) + V^{n+1}(e^{-I\theta} - 1)], \quad (3.319)$$

$$G_B = \frac{1 - d + de^{-I\theta}}{1 + d - de^{I\theta}}. \quad (3.320)$$

Тогда для полной двухшаговой схемы будем иметь

$$V^{n+2} = G_B V^{n+1} = G_B(G_A V^n), \quad (3.321)$$

или

$$V^{n+2} = GV^n, \quad (3.322)$$

где

$$G = G_A G_B. \quad (3.323)$$

Учитывая, что $e^{\pm I\theta} = \cos\theta \pm I\sin\theta$, из (3.323) находим

$$G = \frac{1 - d + d\cos\theta - Id\sin\theta}{1 + d - d\cos\theta - Id\sin\theta} \cdot \frac{1 - d + d\cos\theta + Id\sin\theta}{1 + d - d\cos\theta + Id\sin\theta}. \quad (3.324)$$

Используя для упрощения числителя и знаменателя тождество $(a + Ib)(a - Ib) = a^2 + b^2$, получаем

$$G = \frac{[1 - d(1 - \cos\theta)]^2 + d^2\sin^2\theta}{[1 + d(1 - \cos\theta)]^2 + d^2\sin^2\theta} \leqslant 1, \quad (3.325)$$

что показывает безусловную устойчивость схемы. Доказательства безусловной устойчивости схемы (3.315) с одним направлением обхода точек можно найти у Саульева [1964].

Явная схема метода чередующихся направлений, примененная к уравнению диффузии, безусловно устойчива, как и неявная схема метода чередующихся направлений, имеет формальную ошибку аппроксимации $E = O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ (см. Саульев [1964]) и аналогично обобщается на случай большего числа пространственных переменных, например

$$\frac{\xi_{i,j}^{n+1} - \xi_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\xi_{i+1,j}^n - \xi_{i,j}^n - \xi_{i,j}^{n+1} + \xi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \alpha \frac{\xi_{i,j+1}^n - \xi_{i,j}^n - \xi_{i,j}^{n+1} + \xi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \quad \text{при } i\uparrow,\ j\uparrow. \quad (3.326)$$

(О различных циклических перестановках направлений обходов точек при расчете см. Ларкин [1964].) Важное преимущество этой явной схемы по сравнению с неявной схемой метода чередующихся направлений заключается в том, что здесь не требуется использовать неявный трехдиагональный алгоритм. Другие варианты явных схем метода чередующихся направлений предложили Саульев [1964], Ларкин [1964], Баракат

и Кларк [1966]; см. также книгу Карнахана с соавторами [1969]. Применение явной схемы метода чередующихся направлений к нелинейному уравнению диффузии

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right), \quad \alpha = \alpha(x, \zeta) \tag{3.327}$$

проводится очень просто (см. Квон с соавторами [1966]).

Однако применение явных схем метода чередующихся направлений для решения задач гидродинамики ограничено по двум причинам. Во-первых, хотя для внутренних точек конечно-разностная схема (3.316) является явной, в целом эта схема фактически будет неявной из-за граничных условий. При первом направлении обхода по схеме (3.316а) должно быть известно значение $\zeta_1^{n+1}$ с $(n+1)$-го временно́го слоя; при втором направлении обхода по схеме (3.316б) должно быть известно значение $\zeta_I^{n+1}$, где $I = \max i$. Это обстоятельство не вызывает осложнений в случае задач теплопроводности, где температуры или градиенты температуры на границах, как правило, известны для всех моментов времени. Но значения вихря на стенке не известны и, как уже было отмечено при обсуждении неявных схем метода чередующихся направлений, это вызывает затруднения. Во-вторых (и это гораздо важнее), если данная схема комбинируется с другими схемами и в ней для конвективных членов используются какие-либо варианты аппроксимации из схемы с разностями против потока, схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным, схемы «чехарда» и явной схемы метода чередующихся направлений, то полученная комбинированная схема либо оказывается безусловно неустойчивой, либо для нее опять появляются ограничения вида $C \leqslant 1$ и $d \leqslant 1/2$ [1]), характерные для явных схем. Единственной сравнительно успешной комбинацией является комбинация схемы, в которой по обоим чередующимся направлениям обхода точек используются разности против потока для конвективных членов и явной схемы метода чередующихся направлений с осреднением для диффузионных членов (см. Ларкин [1964]):

$$\zeta_i^* = \zeta_i^n - C\left(\zeta_i^n - \zeta_{i-1}^n\right) + d\left(\zeta_{i+1}^n - \zeta_i^n - \zeta_i^* + \zeta_{i-1}^*\right), \tag{3.328а}$$

$$\zeta_i^{**} = \zeta_i^n - C\left(\zeta_i^n - \zeta_{i-1}^n\right) + d\left(\zeta_{i+1}^{**} - \zeta_i^{**} - \zeta_i^n + \zeta_{i-1}^n\right), \tag{3.328б}$$

$$\zeta_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(\zeta_i^* + \zeta_i^{**}\right). \tag{3.328в}$$

[1]) Неопубликованный результат автора.

Для такой схемы анализ устойчивости при помощи метода фон Неймана дает

$$G^* = \frac{1 - C - d + de^{I\theta} + Ce^{-I\theta}}{1 + d - de^{-I\theta}}, \tag{3.329а}$$

$$G^{**} = \frac{1 - C + Ce^{-I\theta} - d + de^{-I\theta}}{1 + d - de^{I\theta}}, \tag{3.329б}$$

$$G = \frac{1}{2}(G^* + G^{**}). \tag{3.329в}$$

Алгебраическое исследование уравнений (3.329) весьма затруднительно. Численное исследование их для полного интервала изменения параметров C, $d$ и $\theta$ приводит к условию устойчивости $C \leqslant 1$; ограничения на $d$ здесь нет. Для решения задач гидродинамики с ненулевыми конвективными членами ни схема (3.328), ни какая-либо другая явная схема метода чередующихся направлений на практике не использовалась. Единственное исключение составляет рассчитанное Сакураи и Ивасаки [1970] решение задачи о структуре одномерной ударной волны, в которой не ставятся краевые условия.

Робертс и Вейс [1966] предложили удачный вариант явной схемы метода чередующихся направлений для решения уравнения переноса для невязкой жидкости, который они назвали «схемой с разностями по диагонали». Эта схема основана на центральных разностях как для производной по времени, так и для производной по пространственной переменной, которые вычисляются в точках, расположенных на полушагах сетки:

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = -u\,\frac{\zeta_{i+1/2}^{n+1/2} - \zeta_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x}. \tag{3.330}$$

Члены, стоящие в правой части, вычисляются как средние значения вдоль диагонали ячеек пространственно-временно́й сетки. Если расчет ведется в направлении увеличения $i$ (см. рис. 3.13), то будем иметь

$$\zeta_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(\zeta_i^{n+1} + \zeta_{i+1}^n\right) \quad \text{при } i\uparrow, \tag{3.331а}$$

$$\zeta_{i-1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(\zeta_{i-1}^{n+1} + \zeta_i^n\right) \quad \text{при } i\uparrow. \tag{3.331б}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3.330), получаем

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - \xi\left(\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^{n+1}\right), \tag{3.332а}$$

где

$$\xi = \frac{C/2}{1 + C/2}. \tag{3.332б}$$

*Упражнение.* Показать, что в случае проведения расчета в направлении убывания $i$ схема с разностями по диагонали Робертса и Вейса имеет вид

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - \xi' \left(\zeta_{i+1}^{n+1} - \zeta_{i-1}^n\right), \tag{3.333а}$$

где

$$\xi' = \frac{C/2}{1 - C/2}. \tag{3.333б}$$

Поскольку в рассматриваемой схеме используются центральные разности как по времени, так и по пространственной переменной, схема имеет второй порядок точности; однако из-за

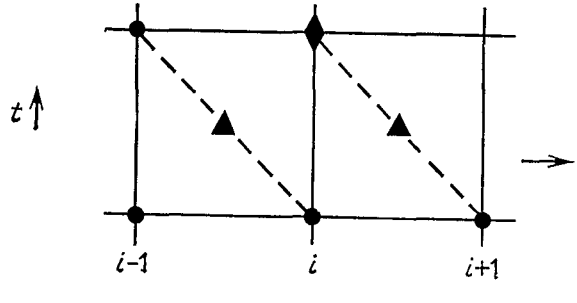



Рис. 3.13. Схема с разностями по диагонали. Кружки соответствуют известным значениям при обходе в направлении роста $i$, ромбик — неизвестному значению в точке $(i, n+1)$, треугольники — значениям, определяемым на середине диагоналей ячеек на полушагах. Стрелка справа показывает направление обхода.

наличия смешанной производной (по времени и по пространственной переменной) в разложениях в ряды Тейлора формально это трудно доказать. Как установили Пиачек и Уильямс [1970], эта схема обладает достаточной точностью в практических расчетах.

Подобно схеме Саульева, рассматриваемая схема оказывается явной во внутренних точках и неявной при расчете граничных условий. Для достижения симметрии при расчете можно чередовать направления обхода точек $i\uparrow$ и $i\downarrow$. Исследование устойчивости схемы (3.332) при помощи метода фон Неймана дает

$$V^{n+1} = V^n - \xi\left(V^n e^{I\theta} - V^{n+1} e^{-I\theta}\right), \tag{3.334}$$

$$G = \frac{1 - \xi e^{I\theta}}{1 - \xi e^{-I\theta}}, \tag{3.335}$$

откуда $|G|^2 = 1$ тождественно. Значит, эта явная схема чередующихся направлений безусловно устойчива по фон Нейману и для нее $|G| = 1$, как это имеет место и для схемы «чехарда»

(см. разд. 3.1.6), но в отличие от последней не обладает неустойчивостью, связанной с расчленением решения по временны́м шагам. Эта схема двухслойная, но при ее программировании на Фортране достаточно одного массива для хранения $\zeta^n$ и $\zeta^{n+1}$.

Однако любая ошибка, допущенная при вычислении значений на границе в начале обхода узловых точек, может расти не с увеличением времени, а при изменении *пространственной координаты*. Пусть все $\zeta^n = 0$, и пусть на граничное значение $\zeta_i^{n+1}$ наложена некоторая ошибка $\varepsilon$. Тогда из уравнения (3.332) следует, что $\zeta_{i+1}^{n+1} = \xi\varepsilon$. Для того чтобы избежать увеличения ошибок (скажем, машинных ошибок округления) вдоль *пространственной* координаты, необходимо, чтобы при возрастании $i$ ($i\uparrow$) было $|\xi| \leqslant 1$, а при уменьшении $i$ ($i\downarrow$) было $|\xi'| \leqslant 1$. Для схемы чередующихся направлений оба эти ограничения приводят к условию $|C| \leqslant 1$ (см. задачу 3.19). Это один из примеров, когда обычный метод фон Неймана не дает ответа относительно действительной вычислительной неустойчивости.

Подобно неявным схемам, явные схемы метода чередующихся направлений в применении к уравнению конвекции для невязкой жидкости приводят к появлению бесконечной скорости распространения возмущения, что не является свойством дифференциального уравнения.

Рассмотренная явная схема метода чередующихся направлений не комбинировалась с явной схемой метода чередующихся направлений для уравнения диффузии с целью получения безусловно устойчивой явной схемы для полного уравнения, включающего конвективные и диффузионные члены, и не использовалась для решения реальных задач гидродинамики.

*Упражнение.* Показать, что явная схема метода чередующихся направлений Саульева (3.315) для уравнения диффузии не приводит к росту ошибок при переходе от одной пространственной точки к другой.

## 3.1.18. Схема «классики»

Эта схема была впервые использована для итерационного решения уравнения Пуассона Шелдоном [1962] (см. разд. 3.2.7), а для решения уравнений, описывающих течение сжимаемой жидкости, Скалой и Гордоном [1966, 1967]. Гурли [1970a] обобщил эту схему, доказал ее устойчивость для общего случая уравнений многомерных течений, применил схему к нестационарному уравнению теплопроводности и к эллиптическим уравнениям и дал ей точное образное название «классики».

Это название связано со способом обхода расчетных точек, показанным на рис. 3.14. На каждом слое по времени $n$ обход точек пространственной сетки совершается дважды. На первом и последующих слоях по времени с нечетными $n$ вычисляют

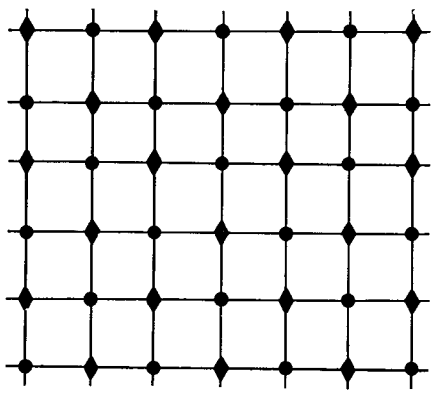


Рис. 3.14. Схема «классики». Ромбики соответствуют первому обходу, четному числу $i+j+n$; кружки — второму обходу, нечетному числу $i+j+n$.

значения в узлах с нечетной суммой $i+j$ (на рисунке они отмечены ромбиками). Для простого уравнения диффузии

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \tag{3.336}$$

получаем

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^{n} + \Delta t \left( \frac{\zeta_{i+1,j}^{n} - 2\zeta_{i,j}^{n} + \zeta_{i-1,j}^{n}}{\Delta x^2} + \frac{\zeta_{i,j+1}^{n} - 2\zeta_{i,j}^{n} + \zeta_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2} \right),$$

$$i+j \text{ нечетное.} \tag{3.337}$$

Этот первый обход основан на схеме с разностями вперед по времени и с центральными разностями по пространственным переменным в узлах с нечетными $i+j$. При втором обходе на том же слое по времени выполняются те же вычисления в узлах с четной суммой $i+j$ (на рисунке они отмечены кружками), причем в соседних точках берутся значения на $(n+1)$-м слое, полученные при первом обходе:

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^{n} + \Delta t \left( \frac{\zeta_{i+1,j}^{n+1} - 2\zeta_{i,j}^{n+1} + \zeta_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{\zeta_{i,j+1}^{n+1} - 2\zeta_{i,j}^{n+1} + \zeta_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right),$$

$$i+j \text{ четное.} \tag{3.338}$$

Этот расчет при втором обходе полностью неявен в том смысле, что значения в точках $(i,j)$, $(i \pm 1, j)$ и $(i, j \pm 1)$ берутся на $(n+1)$-м слое, но эта «неявность» не влечет за собой

необходимости решения системы алгебраических уравнений, так как значения в соседних точках на $(n+1)$-м слое уже известны в результате расчета при первом обходе, а значение $\xi_{i,j}^{n+1}$ можно определить простым исключением:

$$\xi_{i,j}^{n+1} = \left(\xi_{i,j}^{n} + \frac{\xi_{i+1,j}^{n+1} + \xi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{\xi_{i,j+1}^{n+1} + \xi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2}\right) \Big/ \left(1 + \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\right). \tag{3.339}$$

На втором и последующих слоях по времени с четными $n$ роли узлов, отмеченных ромбиками и кружками, меняются. Кратко это можно резюмировать так: при $i+j+n$ четном берется разностное уравнение (3.337), а при $i+j+n$ нечетном — уравнение (3.338).

Скорость расчета существенно увеличивается при использовании соотношения (3.340), следующего из алгебраической структуры схемы (Гурли [1970а]).

*Упражнение.* Показать, что из уравнений (3.337) и (3.338) следует соотношение

$$\xi_{i,j}^{n+2} = 2\xi_{i,j}^{n+1} - \xi_{i,j}^{n}, \quad i+j+n \text{ четное.} \tag{3.340}$$

На тех слоях по времени, где требуется выдавать информацию во всех точках, надо вести расчеты по основным уравнениям схемы.

Формально рассматриваемая схема имеет ошибку аппроксимации $E = O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2)$. Схема применима и для уравнения, включающего конвективные и диффузионные члены, причем соотношение (3.340) сохраняется.

Гурли [1970а] показал безусловную устойчивость этой схемы для уравнения диффузии и для уравнения, включающего конвективные и диффузионные члены, когда конвективные члены представляются разностями против потока. Скала и Гордон [1966, 1967] применяли схему «классики» с разностями против потока для расчета течения вязкой сжимаемой жидкости. Однако возможно, что такие схемы могут использоваться и при представлении конвективных членов центральными разностями, как это делается в неявных схемах метода чередующихся направлений. Гурли [1970а] сообщает, что из-за отсутствия обращения трехдиагональных матриц и эффективности соотношения (3.340) расчет одного шага по времени по схеме «классики» производится в три-четыре раза быстрее, чем по неявной схеме метода чередующихся направлений Писмена — Ракфорда. Кроме того, схема «классики» существенно проще для программирования по сравнению с неявной схемой метода чередующихся направлений (особенно для областей сложной формы)

и легко обобщается на случай трех пространственных переменных. Однако при расчетах уравнения переноса вихря эта схема, как и явные и неявные схемы метода чередующихся направлений, встречается с трудностью, связанной с неявностью граничных условий. Гурли [1970а, 1970б] обнаружил тесную связь между схемой «классики», неявной схемой метода чередующихся направлений и схемой Дюфорта — Франкела.

«Явность» уравнений (3.338) обусловлена тем фактом, что здесь в обычном пятиточечном аналоге оператора Лапласа используются значения только в точках $(i, j)$, $(i \pm 1, j)$ и $(i, j \pm 1)$. Гурли [1970а] называет такие конечно-разностные выражения $E$-операторами. Форма с центральными разностями для конвективных членов также является $E$-оператором, а разностные формы для членов со смешанными производными и девятиточечные разностные формулы для оператора Лапласа (см. разд. 3.2.10) таковым не являются и поэтому они требуют неявного разрешения уравнений, соответствующих уравнению (3.338). Гурли и Мак-Ки [1971] применили схему «классики» в случае смешанных производных, а Гурли и Моррис [1971] для гиперболических систем со скачками. В последней работе фактически рассматривалась одномерная ударная волна. Моррис [1971] применял эту схему для расчета уравнения теплопроводности (параболического типа) в трехмерном случае с граничными условиями смешанного типа (условия Роббина), которые возникают при использовании ньютоновских уравнений конвективной теплопередачи. Для расчета многомерных течений несжимаемой жидкости при некоторых граничных условиях градиентного типа данная схема пока не применялась, но можно предвидеть ее широкое применение в дальнейшем.

### 3.1.19. Схемы четвертого порядка точности Робертса — Вейса и Кроули

В следующих трех разделах мы обратимся к обсуждению таких явных схем, которые оказываются сложнее неявных. Сложность этих схем объясняется тем, что они строятся с целью уменьшения фазовой ошибки, рассмотренной в разд. 3.1.13 на примере схемы Лейта.

Статья Робертса и Вейса [1966] появилась почти одновременно с работой Лейта [1965] Обе работы продемонстрировали важность фазовой ошибки. Робертс и Вейс разработали четыре различных вида явных схем и изучили другие схемы. Читателю, желающему подробно ознакомиться с фазовыми ошибками, кроме этой работы рекомендуются работы Фромма [1968] и Граммельтведта [1969].

В предыдущем разделе уже была рассмотрена схема с разностями по диагонали Робертса и Вейса, имеющая второй порядок точности. Здесь будут представлены наиболее интересные и наилучшие (с точки зрения уменьшения фазовой ошибки) схемы этих авторов, имеющие порядок точности $O(\Delta t^2, \Delta x^4)$. Эти схемы были построены при помощи интегрального метода (разд. 3.1.1в), что обеспечивало их строгую консервативность. Следуя Робертсу и Вейсу [1966], определим две переплетенные

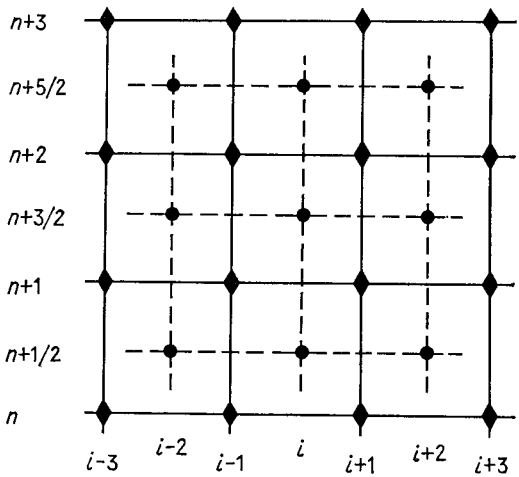



Рис. 3.15. Сетка с расположением узлов в шахматном порядке для схемы Робертса и Вейса четвертого порядка в случае одной пространственной переменной.

сетки с расположением узлов в шахматном порядке [1]), как показано на рис. 3.15, где узлы одной сетки отмечены ромбиками, а другой — кружками. Взяв для аппроксимации пространственной производной в линеаризованном уравнении четыре значения с $(n + 1/2)$-го слоя по времени, получим первую схему Робертса — Вейса четвертого порядка, имеющую следующий вид:

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - \frac{C}{2}\left(\zeta_{i+1}^{n+1/2} - \zeta_{i-1}^{n+1/2}\right) + \\ + \frac{1}{24}\left(1 - \frac{C^2}{4}\right)\left(\zeta_{i-3}^{n+1/2} - 3\zeta_{i-1}^{n+1/2} + 3\zeta_{i+1}^{n+1/2} - \zeta_{i+3}^{n+1/2}\right). \quad (3.341)$$

Первый заключенный в скобки член в этом уравнении в точности соответствует схеме «чехарда», а второй представляет

[1]) Эту схему можно также описать на одной двумерной сетке. Схема Робертса — Вейса с сеткой с расположением узлов в шахматном порядке фактически эквивалентна схеме «чехарда» (см. разд. 3.1.6).

собой поправку более высокого порядка. Для этой схемы $|\lambda| = 1$ при $C \leqslant 2$. (Заметим, что $C = u\,\Delta t/\Delta x$, где $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. Но за один расчетный шаг известное в момент времени $t^{n+1/2}$ решение продвигается до момента времени $t^{n+1}$ только на $\Delta t/2$. Поэтому эффективное число Куранта в действительности будет $C' = (u\,\Delta t/2)/\Delta x$, причем для устойчивости требуется выполнение условия $C' \leqslant 1$.) Для сдвига фазы $\Delta\theta/2$ за один шаг по времени Робертс и Вейс [1966] получили (в обозначениях, введенных в разд. 3.1.13) выражение

$$\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)_{\text{КРУ}} = \frac{C}{2}\sin\theta\left[6 + \left(1 - \frac{C^2}{4}\right)\sin^2\theta\right]. \qquad (3.342)$$

Вторая схема четвертого порядка точности Робертса — Вейса строится как комбинация предложенных ими двух схем второго порядка точности: явной схемы метода чередующихся направлений с разностями по диагонали (уравнения (3.332) и (3.333) из разд. 3.1.17) и схемы «чехарда», записанной на сетке с расположением узлов в шахматном порядке, и имеет следующий вид:

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - \frac{C/2}{1 - MC/2}\left[(1 + 2M)\left(\zeta_{i+1}^{n+1/2} - \zeta_{i-1}^{n+1/2}\right) - \right.$$
$$\left. - M\left(\zeta_{i+2}^n - \zeta_{i-2}^{n+1}\right)\right] \quad \text{при } i\uparrow, \qquad (3.343а)$$

где

$$M = \frac{1 - C/2}{6\,(1 + C/2)}. \qquad (3.343б)$$

Поскольку в правую часть уравнения (3.343а) входит значение $\zeta_{i-2}^{n+1}$, эта вторая схема является явной схемой метода чередующихся направлений, записанной для обхода точек в направлении возрастающих значений $i\uparrow$. Подобно другим явным схемам метода чередующихся направлений, рассмотренным в разд. 3.1.17, эта схема неявная по граничному условию, т. е. для того, чтобы начать расчет в направлении роста $i$, необходимо знать $\zeta_1^{n+1}$.

При $C \to 0$ имеем $M \to 1/6$ и $\frac{C/2}{1 - MC/2} \to C/2$. В этом случае уравнение (3.343а) можно переписать в виде

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - \frac{C}{2}\left[\frac{4}{3}\left(\zeta_{i+1}^{n+1/2} - \zeta_{i-1}^{n+1/2}\right) - \frac{1}{6}\left(\zeta_{i+2}^n - \zeta_{i-2}^{n+1}\right)\right]. \qquad (3.344)$$

Сдвиг фазы определен в работе Робертса и Вейса [1966]. При $C \to 0$ фазовую ошибку можно найти из следующего соотношения:

$$\frac{(\Delta\theta)_{\text{КРУ}}}{(\Delta\theta)_{\text{ДУ}}} \approx \frac{C\sin\theta\,(4 - \cos\theta)}{3\theta}, \qquad (3.345)$$

Вторая схема обладает несколько меньшей фазовой ошибкой, чем первая, но обе эти схемы существенно лучше схем второго порядка точности. Все эти схемы не оказывают воздействия на компоненту возмущения с длиной волны $\Lambda = 2\Delta x$, т. е. для нее имеет место полная фазовая ошибка, как и во всех схемах (за исключением схем с разностями против потока).

Как и следовало ожидать, рассматриваемая схема обладает некоторыми недостатками. Для ее использования в случае двух пространственных переменных требуется четыре сетки с расположением узлов в шахматном порядке: по две переплетенных сетки для каждой пространственной переменной, построенных на целых и полуцелых слоях по времени (см. Робертс и Вейс [1966]). Объем вычислений при этом существенно увеличивается. Моленкамп [1968] отмечает, что при использовании схемы с расположением узлов в шахматном порядке требуется в 45 раз больше машинного времени и в 4 раза больший объем памяти, чем при использовании схемы с разностями против потока. Формальная ошибка аппроксимации $E = O(\Delta t^2, \Delta x^4)$ не выдерживается глобально во всех точках, если граничные условия тоже не будут иметь ошибку порядка $O(\Delta x^4)$, что, как правило, не выполняется (см. разд. 3.3.2).

Неустойчивость, связанная с расчленением решения по временны́м шагам в схеме «чехарда» (разд. 3.1.6), приводит к появлению двух расчлененных решений; данная схема допускает появление *четырех* расчлененных решений. Для объединения этих решений, очевидно, требуется наличие диффузионных членов и (если считать, что опыт применения схемы «чехарда» может служить некоторым руководством) требуются малые числа Re при условии вероятного достижения стационарного решения. Шахматная сетка приводит также к некоторым затруднениям при постановке граничных условий; постановка граничных условий, предложенная Робертсом и Вейсом, приводит к тому, что интерпретация значений в узлах границы при помощи метода контрольного объема оказывается несогласованной с интерпретацией значений во внутренних узлах сетки, а это приводит к снижению точности вблизи границ.

Другая схема четвертого порядка точности с меньшей фазовой ошибкой предложена У. Кроули [1967]. Здесь на первом шаге по схеме Лейта (3.224) с $\Delta t/2$ вычисляются предварительные значения $\zeta^{n+1/2}$ в точках $i$, $i \pm 1$. На втором шаге используется схема «чехарда»:

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - \frac{C}{2}\left(\zeta_{i+1}^{n+1/2} - \zeta_{i-1}^{n+1/2}\right). \tag{3.346}$$

Фазовая ошибка данной схемы обсуждается в работах У. Кроули [1967] и Фромма [1968].

### 3.1.20. Схема Фромма с нулевой средней фазовой ошибкой

Большинство явных схем обладает только запаздывающей фазовой ошибкой, т. е. рассчитанная скорость конвекции θ-компоненты составляет $ur(\theta)$, где $r(\theta) \leqslant 1$. Фромм [1968] построил комбинацию схем с опережающей и запаздывающей фазовыми ошибками для получения схемы, которая 1) была бы безусловно устойчива и 2) имела бы нулевую среднюю фазовую ошибку.

Идея такой схемы заключается в определении точного решения (для линеаризованного уравнения с постоянным $u$) в новый момент времени при $C = 1$. Из этого точного решения при помощи схемы Лейта с разностями *назад* по времени получается искомое решение при $C < 1$. Для простоты продемонстрируем эту идею сначала на схеме с разностями вперед по времени и с центральными разностями по пространственной переменной, а не на схеме Лейта.

Для точного решения при числе Куранта, равном единице, имеем $\Delta t' = \Delta x/u$. Тогда перенос сеточных значений от точки к точке в случае точного решения происходит таким образом:

$$\zeta_i^{t+\Delta t'} = \zeta_{i-1}^{t} \equiv \zeta_{i-1}^{n}, \tag{3.347а}$$

$$\zeta_{i+1}^{t+\Delta t'} = \zeta_{i}^{t} \equiv \zeta_{i}^{n}, \tag{3.347б}$$

$$\zeta_{i-1}^{t+\Delta t'} = \zeta_{i-2}^{t} \equiv \zeta_{i-2}^{n}. \tag{3.347в}$$

Искомое решение находится переходом по времени в обратном направлении от $t + \Delta t'$ до $t + \Delta t$, где $\Delta t < \Delta t'$; тогда

$$\frac{\zeta_i^{t+\Delta t'} - \zeta_i^{t+\Delta t}}{\Delta t' - \Delta t} = -u\,\frac{\delta\zeta_i^{t+\Delta t'}}{\delta x} = -\frac{u}{\Delta x}\left(\zeta_{i+1}^{t+\Delta t'} - \zeta_{i-1}^{t+\Delta t'}\right). \tag{3.348}$$

Разрешая это уравнение относительно $\zeta_i^{t+\Delta t}$ и замечая, что

$$\frac{u\,(\Delta t' - \Delta t)}{\Delta x} = 1 - C, \tag{3.349}$$

получаем

$$\zeta_i^{t+\Delta t} = \zeta_i^{t+\Delta t'} + (1 - C)\left(\zeta_{i+1}^{t+\Delta t'} - \zeta_{i-1}^{t+\Delta t'}\right). \tag{3.350}$$

Члены в правой части определяются точным решением (3.347), и, учитывая обозначение $\zeta_i^{t+\Delta t} \equiv \zeta_i^{n+1}$, имеем

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_{i-1}^{n} + (C - 1)\left(\zeta_i^{n} - \zeta_{i-2}^{n}\right). \tag{3.351}$$

Уравнение (3.351) показывает построение одномерной схемы с опережающей фазовой ошибкой. Вместо центрально-разностного представления второго порядка точности для $\delta\zeta^{t+\Delta t'}/\delta x$, принятого в уравнении (3.348), Фромм берет схему Лейта

дробных шагов по времени (3.254) для двух пространственных переменных. Схема с опережающей фазовой ошибкой комбинируется (в смысле осреднения) со схемой Лейта (3.254), которая имеет запаздывающую фазовую ошибку. В результате получается схема Фромма, названная «схемой с нулевой средней фазовой ошибкой». Отметим значения, вычисленные на полушаге $n+1/2$ и не имеющие физического смысла, знаком тильда и положим $C_x = u\,\Delta t/\Delta x$ и $C_y = v\,\Delta t/\Delta y$. Тогда схема Фромма с нулевой средней фазовой ошибкой будет иметь следующий вид:

$$\tilde{\zeta}_{i,j} = \zeta^n_{i,j} + \frac{C_x}{4}\left(\zeta^n_{i-1,j} - \zeta^n_{i+1,j} + \zeta^n_{i-2,j} - \zeta^n_{i,j}\right) + \\ + \frac{C_x^2}{4}\left(\zeta^n_{i-1,j} - 2\zeta^n_{i,j} + \zeta^n_{i+1,j}\right) + \\ + \left(\frac{C_x^2 - 2C_x}{4}\right)\left(\zeta^n_{i-2,j} - 2\zeta^n_{i-1,j} + \zeta^n_{i,j}\right), \qquad (3.352а)$$

$$\zeta^{n+1}_{i,j} = \tilde{\zeta}_{i,j} + \frac{C_y}{4}\left(\tilde{\zeta}_{i,j-1} - \tilde{\zeta}_{i,j+1} + \tilde{\zeta}_{i,j-2} - \tilde{\zeta}_{i,j}\right) + \\ + \frac{C_y^2}{4}\left(\tilde{\zeta}_{i,j-1} - 2\tilde{\zeta}_{i,j} + \tilde{\zeta}_{i,j+1}\right) + \left(\frac{C_y^2 - 2C_y}{4}\right)\left(\tilde{\zeta}_{i,j-2} - 2\tilde{\zeta}_{i,j-1} + \tilde{\zeta}_{i,j}\right). \qquad (3.352б)$$

Эта схема устойчива при $C_x + C_y \leqslant 1$. Фромм [1968] построил изолинии модуля $|G|$ и фазовой ошибки в зависимости от параметров $C_x$, $C_y$ и $\theta$. Несмотря на то что схема формально имеет второй порядок точности, ее фазовые свойства существенно лучше соответствующих свойств схем четвертого порядка точности Робертса — Вейса [1966] и Кроули [1967], рассмотренных в предыдущем разделе. Как и для этих схем, затраты машинного времени для схемы Фромма значительно больше затрат для более простых схем. Как и в схеме Лейта и во всех схемах дробных шагов здесь имеется трудность, связанная с постановкой граничных условий на первом полушаге (3.352а). Эти трудности можно преодолеть, выбирая в качестве значений $\zeta$ на стенке значения $\zeta$ с первого полушага или получая их итерационным путем (см. разд. 3.1.16). Фромм [1]) рекомендует вблизи границы переходить к более простым разностным схемам с центральными разностями или с разностями против потока. Разностные схемы типа (3.352) с учетом диффузионных членов пока еще не появлялись в открытой литературе.

*Упражнение.* Построить схему с нулевой средней фазовой ошибкой на основе разностей против потока.

[1]) Личное сообщение.

В одной из последующих работ Фромм [1971] использовал разности против потока и центральные разности на чередующихся шагах по времени, а не в двухшаговой схеме, уменьшая тем самым время вычислений, но разности против потока брались при числах Куранта $C_x < 1/2$, $C_y < 1/2$. Расчет точек вблизи границ здесь также требует специального рассмотрения (см. Фромм [1971]).

### 3.1.21. Схема Аракавы

Схема Аракавы [1966] часто применяется для решения метеорологических задач, в которых рассматривается уравнение переноса вихря в невязкой жидкости. Это существенно двумерная девятиточечная схема с узлами типа $(i+1, j-1)$ и т. д. В ней составляющие скорости непосредственно выражены через функцию тока, т. е. принято $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$. Не приводя вывода схемы, мы просто вынишем ее не в обозначениях автора, а в наших обозначениях:

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^{n-1} + \frac{\Delta t}{6\Delta x\Delta y}\{(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})(\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1}) -$$
$$- (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})(\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j}) + \psi_{i+1,j}(\zeta_{i+1,j+1} - \zeta_{i+1,j-1}) -$$
$$- \psi_{i-1,j}(\zeta_{i-1,j+1} - \zeta_{i-1,j-1}) - \psi_{i,j+1}(\zeta_{i+1,j+1} - \zeta_{i-1,j+1}) +$$
$$+ \psi_{i,j-1}(\zeta_{i+1,j-1} - \zeta_{i-1,j-1}) + \zeta_{i,j+1}(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1}) -$$
$$- \zeta_{i,j-1}(\psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j-1}) - \zeta_{i+1,j}(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1}) +$$
$$+ \zeta_{i-1,j}(\psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j-1})\}^n. \quad (3.353)$$

Несмотря на очевидную сложность, данная схема обладает некоторыми преимуществами. У нее формальная ошибка аппроксимации составляет $E = O(\Delta t^2, \Delta x^4, \Delta y^4)$. Это одношаговая схема, и поэтому здесь не возникает проблем, связанных с граничными условиями. Для этой схемы тождественно выполняется равенство $|G| = 1$ и тождественно сохраняются величины $\zeta$, $\zeta^2$ и кинетическая энергия $u^2 + v^2$; эти свойства схемы делают ее особенно удобной для решения задач гидродинамической устойчивости. Поскольку схема сохраняет величину $\zeta^2$, она не подвержена нелинейной неустойчивости Филлипса [1959], возникающей из-за обусловленных неразличимостью ошибок (такие ошибки имеют место, но остаются ограниченными, так как $\zeta^2$ остается ограниченным). Хорошие свойства этой схемы, относящиеся к фазовой ошибке и обобщающие ее на случай метеорологических уравнений в приближении «β-плоскости», рассмотрены Граммельтведтом [1969]. Используя подход Дюфорта — Франкела (разд. 3.1.7), Феста [1970] включил в данную схему диффузионные члены.

К сожалению, эта схема обладает недостатками, присущими другим схемам, использующим разности по времени типа «чехарда» (см. разд. 3.1.6), которые чувствительны к неустойчивости, связанной с расчленением решения по временны́м шагам (см. Уильямс [1969]). Для достижения устойчивого стационарного решения Феста [1970] время от времени проводил усреднение по временным слоям.

### 3.1.22. Замечания о схемах для расчета стационарных течений

Многие свойства схем для уравнения переноса вихря, описанные выше, имеют смысл только для нестационарных решений (например, фазовая ошибка). Хотя сама идея нестационарного подхода привлекательна (Харлоу и Фромм [1965], Макано [1965]), естественно возникает следующий вопрос: зачем возиться с нестационарным решением, если интерес представляет только возможное стационарное решение? Почему бы не положить $\partial\zeta/\partial t$ и не работать с уравнениями, описывающими стационарное течение?

Такой подход на самом деле с успехом использовался многими авторами. Однако в общем случае пока рекомендуется нестационарный иодход. В качестве нервого решающего аргумента в его пользу продемонстрируем эквивалентность простейшей схемы для стационарного уравнения и одной разностной схемы для нестационарного уравнения.

Одномерное стационарное модельное уравнение переноса получается из модельного уравнения переноса параболического типа (2.18) и имеет вид

$$u\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\alpha\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}. \tag{3.354}$$

Это уравнение можно представить в конечно-разностной форме, используя центральные разности по пространственной переменной:

$$u\frac{\zeta_{i+1}-\zeta_{i-1}}{2\Delta x}=\alpha\frac{\zeta_{i+1}-2\zeta_i+\zeta_{i-1}}{\Delta x^2}. \tag{3.355}$$

Для решения этого уравнения эллиптического типа можно воспользоваться какой-либо из итерационных схем, которые будут обсуждаться в разд. 3.2. В простейшей итерационной схеме (Ричардсона или Якоби) уравнение (3.355) разрешается относительно $\zeta_i$. Считая известным некоторое начальное приближение $\zeta_i^1$ для всех $i$, новые значения $\zeta_i^{k+1}$ на $(k+1)$-й итерации определяются по стоящим в правой части старым значениям

после $k$-й итерации:

$$\zeta_i^{k+1} = -\frac{u\,\Delta x}{4\alpha}\left(\zeta_{i+1}^k - \zeta_{i-1}^k\right) + \frac{1}{2}\left(\zeta_{i+1}^k + \zeta_{i-1}^k\right). \qquad (3.356)$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока не будет выполнен некоторый критерий сходимости (разд. 3.4). Если из обеих частей уравнения (3.356) вычесть $\zeta_i^k$, то итерационная вычислительная схема не изменится

$$\zeta_i^{k+1} - \zeta_i^k = -\frac{u\,\Delta x}{4\alpha}\left(\zeta_{i+1}^k - \zeta_{i-1}^k\right) + \frac{1}{2}\left(\zeta_{i+1}^k - 2\zeta_i^k + \zeta_{i-1}^k\right), \qquad (3.357)$$

или

$$\zeta_i^{k+1} - \zeta_i^k = -\frac{u\,\Delta x^2}{2\alpha}\,\frac{\zeta_{i+1}^k - \zeta_{i-1}^k}{2\,\Delta x} + \frac{\Delta x^2}{2}\,\frac{\zeta_{i+1}^k - 2\zeta_i^k + \zeta_{i-1}^k}{\Delta x^2}. \qquad (3.358)$$

Заметим теперь, что уравнение (3.358) будет эквивалентно уравнению (3.18) (*нестационарному* конечно-разностному уравнению с разностями вперед по времени и с центральными разностями по пространственной переменной), если определить шаг по времени в уравнении (3.18) как $\Delta t^и = 1$, итерационную скорость конвекции как $u^и = u\,\Delta x^2/(2\alpha)$ и итерационный коэффициент диффузии как $\alpha^и = \Delta x^2/2$. Из анализа уравнения (3.18) известно, что для сходимости требуется, чтобы итерационное число Куранта $C^и$ не превышало единицы, т. е. чтобы

$$C^и = \frac{u^и\,\Delta t^и}{\Delta x} = \frac{u\,\Delta x^2 \cdot 1}{2\alpha\,\Delta x} = \frac{u\,\Delta x}{2\alpha} \leqslant 1, \qquad (3.359а)$$

или

$$\mathrm{Re}_c \leqslant 2. \qquad (3.359б)$$

Значит, при сеточном числе Рейнольдса $u\Delta x/\alpha > 2$ данная итерационная схема будет расходиться.

Этот пример показывает, что итерационная схема Ричардсона *в точности эквивалентна* нестационарной схеме и является ограниченной. Другие итерационные схемы для уравнений эллиптического типа эквивалентны или по меньшей мере аналогичны нестационарным схемам для уравнений параболического типа. Впервые на такую аналогию указал Франкел [1950].

Впоследствии Ходжкинс [1966] установил соответствие между полуаналитическим методом Чебышева и решением нестационарного уравнения гиперболического типа. Хейвуд [1970] исследовал связь между решением уравнений для стационарного течения и пределом решения нестационарного уравнения.

В схемах нижней и верхней релаксации существенную роль играет умножение членов, стоящих в правой части уравнения (3.357), на множитель $r$, причем $r < 1$ соответствует нижней релаксации, а $r > 1$ — верхней релаксации. Например, для схемы (3.358) уменьшение $r$, очевидно, эквивалентно уменьше-

нию величины шага по времени. Как следует ожидать из анализа для нестационарных уравнений, при увеличении числа Re требуется нижняя релаксация. Текстор [1968] и Техейра [1966] экспериментально установили, что нужная величина $r \sim 1/\mathrm{Re}$ в соответствии с полученным ранее ограничением на число Куранта. Но начиная с некоторого Re и выше, сходимость не достигается даже при произвольно малых $r$ [1]). Это подтверждает опыт многих исследователей, которые (успешно) использовали схему такого типа; см., например, Том и Орр [1931], Том [1933], Том и Апельт [1961], Кавагути [1953, 1961, 1965], Бургграф [1966], Майкл [1966], Гамилец с соавторами [1967а, 1967б], Фридман с соавторами [1968], Деннис с соавторами [1968], Фридман [1970], Ли и Фын [1970].

Ограничение на $\mathrm{Re}_c$ сохраняется даже при использовании некоторых (но не всех) приближений пограничного слоя (Плоткин [1968]). При итерационном решении стационарного уравнения это ограничение удается устранить, вернувшись для аппроксимации конвективных членов к разностям против потока, как это сделали Ранчел и Вольфштейн [1969], Гринспэн [1969а, 1969б], Госмэн и Сполдинг [1971]. Возможны и другие итерационные схемы, которые могут оказаться вполне эффективными; в дополнение к отмеченным работам укажем здесь ряд работ. Аллен и Саусвелл [1955] использовали релаксационную разностную схему Саусвелла (разд. 3.2.3) для решения задачи об обтекании цилиндра при $\mathrm{Re} = 1000$; Гриффитс с соавторами [1969] применял линейный метод последовательной верхней релаксации (разд. 3.2.4) в цилиндрической системе координат; Катсанис [1967] и Бреди [1967] решали итерационным методом стационарные уравнения, описывающие потенциальное течение.

Отметим интересный исторический факт, заключающийся в том, что большинство исследователей, применявших итерационные схемы для решения стационарных задач, не занималось анализом устойчивости и скорости сходимости своих схем, а определяло характеристики эмпирически, хотя уже в то время из ранней работы фон Неймана был известен метод исследования устойчивости для уравнений, описывающих нестационарное течение. Возможное объяснение этого факта заключается в том, что методы расчета стационарных течений развивались из раздела численного анализа, относящегося к решению уравнения Пуассона, для которого простейшие итерационные методы не имеют ограничений, связанных с устойчивостью.

[1]) Несмотря на то что в действительности это ограничение, наложенное на Re, может быть связано с линейной неустойчивостью в итерационном процессе, аналогичном процессу нестационарного решения, оно может быть связано и с влиянием границ, которое рассматривается в разд. 3.3.8.

Рассмотрение нелинейных конвективных членов может изменить строгую эквивалентность между итерационной схемой Ричардсона и нестационарным подходом. При нестационарном подходе на каждом шаге по времени решается уравнение переноса вихря и обычно итерируется до сходимости уравнение Пуассона эллиптического типа, $\nabla^2\psi = \zeta$. При стационарном же подходе каждое из этих двух уравнений можно (хотя и не обязательно) итерировать последовательно. При таком подходе с «комбинированным итерированием» сходимость итераций, если она имеет место, может быть достигнута за меньшее число шагов; Госмэн (личное сообщение; см. также Госмэн и Споллдинг [1971]) указывал, что затраты машинного времени при этом сокращаются на 40%. Однако, поскольку для уравнения $\nabla^2\psi = \zeta$ не обеспечивается сходимость на каждой итерации для уравнения вихря, плохой выбор исходных значений при стационарном подходе может привести к неустойчивости, обусловленной нелинейностью (Техейра [1966], Лил [1969], Ричардс [1970]) из-за конвективных членов и/или из-за граничных условий. Опыт показывает, что если граничные условия итерируются с достаточной степенью точности, то такая трудность не возникает ни при использовании явных нестационарных схем, ни при использовании неявных схем. Более того, программа на Фортране может быть написана для нестационарных уравнений, а затем приспособлена для стационарного подхода.

При «комбинированном итерировании» уравнения Пуассона и уравнения переноса вихря можно пользоваться простым критерием сходимости для уравнения Пуассона. (Эту процедуру действительно можно рекомендовать для расчетов; см. разд. 3.4). Преимущество, присущее итерационному методу Либмана (методу Гаусса — Зейделя) или итерационному методу последовательной верхней релаксации (будут рассмотрены в разд. 3.2), которые аналогичны нестационарным явным схемам метода чередующихся направлений (разд. 3.1.17), можно обеспечить простым добавлением в программу оператора EQUIVALENCE для массивов $\zeta^{n+1}$ и $\zeta^n$. На практике использование меньших значений параметра нижней релаксации вблизи границ (Фридман [1970] для расчетов в граничных точках брал параметр $r$ приблизительно равным одной трети от его значения, принятого для внутренних точек) может быть реализовано введением переменного в пространстве [1]) шага $\Delta t$.

---

[1]) Таким образом, локальное значение $\Delta t(x, y)$ можно определять в зависимости от локального критического значения $\Delta t$, а затем брать его локально для продвижения $\zeta$ посредством $\partial\zeta/\partial t$. Нестационарное решение при этом, очевидно, не будет иметь смысла, но скорость сходимости итераций к стационарному состоянию может быть увеличена.

Одной из работ, в которых использовались как стационарный, так и нестационарный подходы, является работа Хына и Макано [1966]. Эти авторы нашли, что с нестационарными уравнениями легче работать и они более устойчивы; к такому же выводу с тех пор пришли многие другие исследователи. Такое заключение, очевидно, связано с простотой используемого нестационарного метода. Когда интерес представляет только стационарное решение, не рекомендуется применять сложную схему, такую, например, как схема Фромма (разд. 3.1.19). В достаточно простых нестационарных схемах привлекает их гибкость в отношении возможностей получения нестационарного решения, если именно оно представляет интерес. И — что более важно — при нестационарном подходе не предполагается существование стационарного решения, которого в действительности может и не существовать.

При этом следует соблюдать определенную осторожность. Если нестационарные конечно-разностные уравнения сходятся к устойчивому стационарному решению, то еще нельзя считать, что соответствующие дифференциальные уравнения в частных производных имеют устойчивое стационарное решение. Как мы уже видели, дискретизация иногда приводит к появлению схемной вязкости. Эта и другие ошибки аппроксимации могут привести к тому, что конечно-разностные уравнения окажутся более устойчивыми, чем дифференциальные уравнения в частных производных. Выяснение отличия гидродинамической устойчивости от завышенной численной устойчивости представляет трудную задачу (см. разд. 6.5).

Другой заслуживающий внимания подход к решению задач гидродинамики несжимаемой жидкости состоит в решении уравнения четвертого порядка для единственной переменной — функции тока. Подставляя уравнение Пуассона (2.13) и выражения для составляющих скорости (2.7) в уравнение переноса вихря (2.12), получаем

$$\frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\nabla^2\psi\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\nabla^2\psi\right) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^4\psi. \quad (3.360a)$$

Несмотря на то что это уравнение в принципе описывает нестационарное течение, оно обычно рассматривается в стационарной форме, когда его левая часть равна нулю. Используя это уравнение, успешных результатов добились Бурсье и Франсуа [1969], которые применяли неявные схемы чередующихся направлений (см. разд. 3.2.7), и Пау с соавторами [1971], пользовавшиеся итерационным методом Либмана. Большинство исследователей (Том и Апельт [1961], Парис и Уитекер [1965], Пирсон [1964, 1965а]) столкнулись здесь с трудностями, связанными с граничными условиями и с малой скоростью сходи-

мости. Пирсон [1964, 1965а] выполнил расчеты в предельном случае отсутствия конвективных членов, т. е. когда для стационарного течения уравнение (3.360а) сводится к уравнению

$$\nabla^4\psi = 0 \tag{3.360б}$$

с простейшими граничными условиями Дирихле. Он обнаружил, что даже в этом простом случае скорость сходимости на порядок меньше, чем в случае, когда решается система двух уравнений (для функции тока и для вихря). Действительно, известно, что наиболее эффективный итерационный метод решения бигармонического уравнения (3.360б), общепринятый в задачах теории упругости, заключается в разделении этого уравнения на два уравнения Пуассона, если это допускается заданными граничными условиями (см., например, Том и Апельт [1961], а также Пальцев [1970]). Диас [1970] вычислял оператор $\nabla^2\psi$ с помощью полиномиальных аппроксимаций четвертого и пятого порядков, но при этом возникали трудности с граничными условиями.

Преимущество стационарного подхода особенно убедительно в том случае, когда стационарные уравнения являются параболическими по пространственной переменной, т. е. когда возможно или требуется «маршевое» продвижение решения по пространственной координате. К таким случаям относятся уравнения пограничного слоя, течения с химическими реакциями, имеющими конечные скорости, эффекты, которые зависят от предыстории лагранжевых частиц (разд. 6.4), и решение обратной задачи об отошедшей ударной волне (разд. 5.1.1). При решении задачи о течении газа с отошедшей ударной волной Кайрис [1970] пытался построить метод, соединяющий наилучшие свойства, присущие каждому из подходов (стационарному и нестационарному), взяв нестационарные формы уравнения неразрывности и уравнений количества движения и стационарные формы уравнений для температуры и для химических компонентов.

Дэвис [1972] разработал метод решения уравнений Навье — Стокса, похожий на нестационарный метод, но обладающий некоторыми свойствами, присущими стационарным методам. Вычисления расщепляются по двум направлениям; в одном направлении расчет проводится по нестационарным уравнениям пограничного слоя с поправкой второго порядка на кривизну, а в другом направлении уравнения будут линейными. Вследствие используемых преобразований начальные условия для определения *стационарного* решения уравнений пограничного слоя получаются естественным образом. Начальное решение также фиксирует граничные значения на бесконечности, соот-

ветствующие стационарному состоянию. (Преобразования также устраняют особенность на передней кромке в предельном случае плоской пластинки.) Для течений при больших числах Рейнольдса, когда уравнения пограничного слоя точны, сходимость достигается за одну итерацию. Для безотрывных течений при меньших числах Рейнольдса сходимость все еще достигается за сравнительно малое число итераций. Есть все основания считать, что этот метод будет широко применяться в будущем.

Автор данной монографии также предложил несколько методов, которые отличаются от нестационарных подходов проведением итерирования (Роуч [1972]). Эти методы — метод, в котором итерируются уравнения типа уравнения Озеена (метод NOS), и метод, в котором итерируется только лапласиан (Laplace Driver method, метод LAD) — основаны на использовании последних достижений в решении линейных конечно-разностных уравнений второго порядка (см. разд. 3.2.1, 3.2.8 и 3.2.9). Разработка этих методов далека от завершения, но по крайней мере для некоторых типов течений они показали очевидное преимущество по сравнению с нестационарными методами даже в случае отрывных течений.

Для решения уравнений, описывающих стационарное течение, неитерационные методы неприменимы из-за нелинейности этих уравнений. Однако методы, подобные рассматриваемым в разд. 3.2.1, 3.2.8 и 3.2.9, могут оказаться весьма эффективными для решения линеаризованных уравнений (например, уравнения для температуры, разд. 3.6).

Таким образом, сравнивая итерационные стационарные и нестационарные методы, можно прийти к следующим выводам.

1) Некоторые стационарные методы в точности эквивалентны нестационарным методам, причем регулирование множителя в схемах нижней или верхней релаксации эквивалентно изменению величины шага по времени $\Delta t$. Большинство стационарных итерационных методов по меньшей мере аналогичны нестационарным методам. Во всяком случае, такая аналогия показывает, что

2) Стационарные итерационные методы нельзя заведомо считать устойчивыми и их устойчивость должна быть исследована при помощи метода фон Неймана.

3) Программу на Фортране, написанную для нестационарного подхода, можно а) просто использовать для реализации комбинированного итерирования в стационарном методе, причем рассматривается критерий сходимости для уравнения Пуассона, и б) быстро превратить в метод Либмана или метод типа

метода последовательной верхней релаксации (метод SOR) посредством использования оператора EQUIVALENCE.

4) Явные нестационарные методы, в которых после расчета каждого шага для уравнения переноса вихря итерируется до сходимости уравнение Пуассона, менее восприимчивы к неустойчивости, обусловленной нелинейностью уравнений, и поэтому менее чувствительны к начальным условиям.

5) Нестационарная формулировка дает бо́льшую гибкость при получении нестационарного решения, если оно представляет интерес, и — что более важно — не предполагает существования стационарного решения, которого в действительности может и не существовать.

6) Есть нечто привлекательное (с принципиальной и даже с эстетической точки зрения) в моделировании именно реального физического процесса, который в конце концов существенно нестационарен.

### 3.1.23. Замечания к оценке методов; ошибки, связанные со свойствами схемы; компактные разностные схемы

В предыдущих разделах был рассмотрен целый ряд численных методов для решения уравнения переноса вихря. Перед исследователем, который собирается пользоваться этими методами, встает вопрос об оценке этих методов применительно к интересующим его гидродинамическим задачам, а также вопрос о построении новых методов, если описанные здесь он найдет недостаточными.

Основным фактором при оценке и построении численных методов является, очевидно, анализ ошибок конечно-разностного аналога. В обычных учебниках ошибки конечно-разностных уравнений классифицируются как ошибки *округления* и ошибки *аппроксимации*. Ошибки округления обусловлены конечностью длины слова у электронных вычислительных машин при представлении чисел в форме с плавающей запятой. Длина слова, или число значащих цифр, может быть только целым в системе счисления ЭВМ (обычно 2, 8, 10 и 16). Для современных американских ЭВМ при использовании одного процессора эквивалентная длина слова в десятичной системе меняется от 7 до 14 значащих десятичных цифр.

Трудности исследования ошибок округления обусловлены тем, что эти ошибки приводят к качественному отклонению от нормального поведения; например, сложение и умножение чисел, представленных в форме с плавающей запятой, обладают свойством коммутативности, но в то же время не имеют свойств ассоциативности и дистрибутивности. (В работе Форсайта [1970] имеется прекрасное и общедоступное описание эффектов, к которым приводит ошибка округления.)

Ошибка округления может играть главную роль при нахождении высокоточных решений обыкновенных дифференциальных уравнений, поскольку величина шага $\Delta x$ может стать очень малой и поскольку используются схемы высокого порядка точности, чувствительные к ошибкам округления. Для дифференциальных уравнений в частных производных в одномерном случае величины $\Delta x$ и $\Delta t$ могут также оказаться столь малыми, что ошибка округления будет играть важную роль. Ошибка округления важна и в некоторых задачах обращения матрицы (см. разд. 3.2.8). Эта ошибка будет оказывать влияние на выбор критерия сходимости (см. разд. 3.4) и, очевидно, будет ограничивать наименьшую величину шага по времени $\Delta t$, для которой вычисления имеют смысл.

Несмотря на важность понимания проблемы, связанной с ошибкой округления, обычно дифференциальные уравнения в частных производных в случае многомерных задач по необходимости решаются при достаточно больших величинах шагов по пространственной сетке $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ и по времени $\Delta t$, так что ошибки аппроксимации оказываются больше ошибок округления.

Ошибка аппроксимации связана с тем, что в разложениях в ряды Тейлора сохраняются не все члены, а это эквивалентно использованию конечных величин $\Delta \mathbf{x}$ и $\Delta t$. Пренебрегая ошибками округления, можно сказать, что все остальные ошибки являются ошибками аппроксимации. Несмотря на свою точность, такая классификация ошибок не является адекватной. В предыдущих разделах мы обсуждали другую классификацию ошибок, которую можно назвать классификацией *по свойствам*.

Ошибки, связанные с различными свойствами схемы, включают в себя ошибки, обусловленные нарушением консервативности, ошибки, обусловленные нарушением свойства транспортивности, ошибки, связанные с численным затуханием и схемной вязкостью, ошибки, обусловленные нарушением принципа инвариантности Галилея (т. е. преобразования, связанного с обращением скорости невозмущенного потока), ошибки, связанные с ограниченностью решения (или появлением осцилляций, обусловленных чрезмерно большим шагом по времени), фазовые ошибки и ошибки, обусловленные неразличимостью. Все эти ошибки являются *ошибками аппроксимации* в том смысле, что они стремятся к нулю при $\Delta \mathbf{x} \to 0$, $\Delta t \to 0$, но в действительности это лишь грубое определение. Например, ошибки, обусловленные нарушением консервативности, можно устранить независимо от ошибок аппроксимации (хотя при этом сохранится некоторый вклад от ошибок округления). Аналогично некоторые методы обладают свойством транспортивности, другие

не имеют ошибок, обусловленных затуханием для уравнения с постоянными коэффициентами, и т. д. По-видимому, имеет смысл классифицировать ошибки по свойствам, а не просто делить их на ошибки округления и ошибки аппроксимации.

При выборе численного метода пользователь должен оценить важность этих ошибок в рассматриваемой им задаче. Например, для принятого метода ошибка, обусловленная нарушением консервативности, может служить для проверки сходимости решения; фазовые ошибки несущественны для стационарного решения; для получения схем с желаемыми свойствами Бунеман [1967] рассматривал обращаемость по времени симметричных по времени схем и т. д. Целесообразно оценивать метод с точки зрения классификации ошибок по свойствам, а не сосредоточивать внимание исключительно на порядке ошибки аппроксимации, скажем $E = O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ и т. п., хотя порядок ошибки тоже важен.

Те, кто знаком только с численными методами для обыкновенных дифференциальных уравнений, постоянно удивляется низкому порядку аппроксимации в схемах, применявшихся в прошлом для дифференциальных уравнений в частных производных. Причина этого просто заключается в том, что для нетривиальных задач гидродинамики трудно добиться фактического получения результатов равномерно высокого порядка точности. В полной задаче точность решения уравнения переноса вихря будет ограничена точностью решения уравнения Пуассона (см. разд. 3.2) и *постановкой граничных условий* (см. разд. 3.3.1). Последняя особенно увеличивает трудность достижения равномерно высокого порядка точности для задачи в целом при использовании стандартных многоточечных уравнений высокого порядка точности, таких, которые рассматриваются в разд. 3.2.10. (Например, вблизи прямолинейной границы, обычно параллельной одной из осей координат, для схемы с ошибкой порядка $O(\Delta x^4)$ требуется знать значения на границе и в пяти ближайших внутренних точках; см. Саусвелл [1946].) Исследовать устойчивость таких схем очень трудно, хотя здесь на помощь может прийти понятие *расщепления по времени* (разд. 3.1.13).

Другая причина, объясняющая получение часто не оправдывающих ожидания характеристик схем высокого порядка для дифференциальных уравнений в частных производных, заключается в том, что порядок точности схем имеет смысл только при $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$. Таким образом, порядок точности схем имеет большее значение в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, когда требуется меньший объем оперативной памяти и допустимое время расчетов позволяет брать значительно меньшие шаги $\Delta x$.

Во многих тестовых расчетах схемы низкого порядка точности приводят к довольно точным результатам при грубых $\Delta x$ и $\Delta t$; см. Сайрус и Фалтон [1967], Чен [1968], Хемминг [1962, с. 210], а также примеры, приведенные в разд. 3.1.8. (По мнению Чена [1970а], схемы второго порядка, грубо говоря, являются оптимальными.) В действительности при часто желаемых больших $\Delta t$ можно ожидать исчезновения преимущества схем, имеющих высокий порядок точности во времени. Например, в разд. 3.1.14 указывалось, что схема Кранка — Николсона с ошибкой $E = O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ при применении к уравнению диффузии приводит к ошибочным осцилляциям, обусловленным чрезмерно большим шагом по времени ($G < 0$), для больших $\Delta t$, в то время как полностью неявная схема с ошибкой $E = O(\Delta t, \Delta x^2)$ дает качественно правильное поведение решения. Даже в успешных приложениях существует широкий диапазон условий, при которых больший успех дают схемы второго порядка и еще более широкий диапазон условий, при которых более успешны схемы четвертого порядка. Различия в точности конкурирующих схем четвертого порядка часто обусловлены *консервативностью* схем (см., например, Уильямсон [1969]) и тем, что основное внимание при их построении сосредоточено на проблеме *фазовой* ошибки (см. разд. 3.1.18—3.1.20). Кроме того, *ошибка, обусловленная неразличимостью*, у некоторых схем четвертого порядка точности по пространственной переменной ($O(\Delta x^4)$) оказывается больше, чем у схем второго порядка ($O(\Delta x^2)$), особенно для коротковолновых компонент (Граммельтведт [1969]).

Тем не менее в настоящее время проводится разработка схем более высокого порядка точности, и, по-видимому, они найдут более широкое применение в вычислительной гидродинамике. В первом издании этой книги (1972 г.) мы повторяли «обычную благоразумную» мысль: при переходе к схемам высокого порядка точности из-за потери информации при дискретизации граничных условий для дифференциальных уравнений в частных производных практически следует ожидать только умеренного улучшения точности по сравнению с обыкновенными дифференциальными уравнениями; теперь же у нас возникли серьезные сомнения в справедливости этого соображения. Правда, практические трудности, оказывающие влияние на точность схем второго порядка, — трудности, связанные с граничными условиями и со сложной формой границы, определение соответствующего решения уравнения Пуассона и проблема сеточного числа Рейнольдса, — все эти трудности становятся более щекотливыми при получении решений более высокого порядка точности; к тому же скорость сходимости не всегда равномерно велика во всех точках двумерной сетки. Тем не

менее при этом результаты высокого порядка для многомерных задач могут быть получены и фактически получаются.

Некоторые схемы высокого порядка точности были описаны в разд. 3.1.18—3.1.20. Отметим дополнительно следующие работы, в которых используются обычные схемы высокого порядка точности. Фейрвезер [1969] применил неявную схему метода чередующихся направлений для уравнения диффузии, имеющую порядок точности $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$. (Заметим, что некоторые схемы, приведенные в книге Рихтмайера и Мортона [1967] для уравнения диффузии, приобретают высокий порядок точности при определенных комбинациях параметров, но эти условия обычно не характерны для задач гидродинамики.)

Гунаратнам и Перкинс [1970] построили схемы высокого порядка с помощью метода взвешенных невязок. Даусон и Маркус [1970] использовали модифицированную схему Рунге — Кутта — Гилла только для интегрирования по времени. Ломекс с соавторами [1970] применил схему Рунге — Кутта четвертого порядка точности для интегрирования по времени одномерного модельного уравнения, описывающего течение невязкой жидкости. Фридман [1970] представлял выражениями четвертого порядка точности вторые производные по нормали к стенке (преобладающее направление диффузии) и выражениями второго порядка производные по направлению, параллельному стенке.

Аналогичный эффект может быть достигнут при использовании прямоугольной сетки с неравными шагами $\Delta x \neq \Delta y$; реальное преимущество такой сетки продемонстрировали Хын и Макано [1966]. Рыбицки и Хуппер [1970] решали двумерное уравнение диффузии при помощи полностью неявных разностей первого порядка $O(\Delta t)$ по времени и конечных элементов, имеющих 36 степеней свободы, по пространству.

После 1972 г. появились и другие конечно-разностные схемы высокого порядка точности обычного типа, но наиболее перспективными оказались схемы, основанные на «компактных разностях». Орсаг и Израэли [1974] и Хёрш [1975] использовали схему, предложенную Крайсом [1973], и назвали ее компактной разностной схемой. Но согласно работе Рубина и Хосла [1975], следующие схемы эквивалентны (т. е. каждая из них может быть получена из любой другой): компактная схема Крайса, аппроксимационная формула Эрмита — Паде, схема Мерштелленга, собственная схема Рубина — Хосла со сплайнами четвертого порядка. В обозначениях Хёрша [1975] компактную схему можно записать в следующем виде.

Рассмотрим дискретную функцию $\zeta_i$, для которой мы хотим определить приближенное значение $F_i$ первой частной производной по пространственной переменной и приближенное зна-

чение $S_i$ второй частной производной по пространственной переменной. Чтобы вычислить $F_i$, сначала найдем первую производную по обычной аппроксимационной формуле второго порядка точности с центральной разностью, обозначим ее через $f_i$ и будем хранить в соответствующем массиве. Итак,

$$f_i = \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_{i-1}}{2\Delta}, \tag{3.361а}$$

где $\Delta$ — шаг пространственной сетки в направлении $x$ или $y$. Тогда приближенное значение $F_i$ четвертого порядка точности получается из решения уравнений вида

$$\frac{1}{6}(F_{i+1} + 4F_i + F_{i-1}) = f_i. \tag{3.361б}$$

Обычные схемы четвертого порядка точности имеют вид явных разностных формул, построенных на пятиточечном шаблоне (точка $i$ и соседние точки $i \pm 1$, $i \pm 2$). В компактной схеме берутся только три точки ($i$ и $i \pm 1$), но разностная формула получается неявной, т. е. не локальной. Значения $F_i$ находятся из уравнения (3.361б) при помощи метода прогонки (см. приложение А), так что эти значения во всех точках $i$ зависят от значений в других точках и, следовательно, зависят от $f_i$ и $\zeta_i$ глобально, а не локально. (Из-за такой глобальной зависимости компактная схема подобна снектральным и псевдоспектральным схемам; см. Орсаг и Израэли [1974].) Компактная схема обладает также меньшим коэффициентом при ошибке аппроксимации порядка $O(\Delta^4)$, чем обычная схема четвертого порядка точности. Аналогично, сначала по явной схеме второго порядка точности вычисляется вторая производная, которая обозначается через $s_i$ и хранится в соответствующем массиве. Таким образом,

$$s_i = \frac{\zeta_{i+1} - 2\zeta_i + \zeta_{i-1}}{\Delta^2}. \tag{3.361в}$$

Тогда приближенное значение $S_i$ четвертого порядка точности получается из решения методом прогонки уравнений вида

$$\frac{1}{12}(S_{i+1} + 10S_i + S_{i-1}) = s_i. \tag{3.361г}$$

Само собой разумеется, что при решении уравнений для функции $F$ необходимо поставить граничное условие для первой производной; аналогично надо ставить граничное условие и для $S$. Такая трудность присуща всем схемам высокого порядка. Однако Хёрш [1975] показал, что для объединенной системы уравнений для $F$ и $S$ граничные значения четвертого

порядка точности могут быть получены с помощью второго диагонального аппроксиманта Паде

$$\zeta_i - \zeta_{i+1} + \frac{\Delta}{2}(F_i + F_{i+1}) + \frac{\Delta^2}{12}(S_i - S_{i+1}) = 0. \qquad (3.362)$$

Это уравнение позволяет объединенной системе уравнений для $F$ и $S$ сохранить как четвертый порядок точности, так и трехдиагональный вид матрицы вплоть до границы. Таким образом, данная форма проще и точнее, чем обычные пятиточечные выражения.

Используя компактную схему в неявном методе чередующихся направлений (см. разд. 3.1.16), Хёрш [1975] рассчитал двумерные стационарные течения вязкой жидкости при малом числе Рейнольдса. При помощи компактной схемы четвертого порядка удалось достигнуть экономии машинного времени в 20 раз и объема машинной памяти в 3 раза по сравнению со схемой второго порядка (примерно при той же точности). Граничные условия для вихря брались с предыдущего слоя по времени (как это обычно делается в том случае, когда интерес представляет только стационарное решение), что приводило к потере точности по времени. Трехточечные компактные разности можно также применять для построения схем шестого и более высокого порядка точности (Хёрш, личное сообщение). В схеме Рубина — Хосла [1975], основанной на аппроксимации сплайнами, вводится *переменный шаг по пространственной сетке*, и в этом случае порядок ошибки для $F$ остается $O(\Delta^4)$, но порядок ошибки для $S$ уменьшается до $O(\Delta^3)$.

Для ознакомления с разностными схемами высокого порядка точности, а также со спектральными и псевдоспектральными схемами рекомендуются монография Крайса и Олиджера [1973] и обзор Орсага и Израэли [1974].

Важно отметить, что даже правильные и равномерно точные во всех точках схемы высокого порядка не решают проблему сеточного числа Рейнольдса, описанную в разд. 3.1.8. В самом деле, колебания, возникающие при $\mathrm{Re}_c > 2$ при использовании разностей высокого порядка, часто увеличиваются. По-видимому, неблагоприятные оценки схем высокого порядка точности, приведенные во многих ранних исследованиях, можно отнести за счет недостаточного понимания роли ограничения на $\mathrm{Re}_c$, которое, возможно, является самой сложной проблемой вычислительной гидродинамики; см. Роуч [1975].

В заключение заметим, что точность не является единственным соображением при выборе метода. Суммарные затраты, как машинного времени, так и времени человека, часто играют главенствующую роль. Суммарные затраты должны включать как затраты на проведение серийных расчетов, так и затраты

на разработку программы для ЭВМ, причем последние в значительной мере зависят от простоты метода. Сложные методы затрудительны для программирования, проверки и особенно для отладки по сравнению с простыми методами, что становится более важным в случае областей с границами сложной формы и при включении дополнительных факторов, например химических реакций. Ясно, что выбор наилучшего метода отнюдь не очевиден.

## 3.2. Методы решения уравнений для функции тока

В предыдущих разделах была рассмотрена только одна из трех частей полной задачи динамики несжимаемой жидкости, а именно решение параболического уравнения переноса вихря. При этом решалась задача с начальными данными, т. е. задача «маршевого» типа по времени. Рассмотрим теперь вторую часть полной задачи, а именно методы решения эллиптического уравнения Пуассона (2.13) для функции тока $\psi$:

$$\nabla^2\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \zeta. \tag{3.363}$$

Здесь имеет место краевая задача, для решения которой требуются другие методы. Мы будем рассматривать решение уравнения Пуассона с двумя типами граничных условий вдоль различных частей границы: либо с условием Дирихле, когда на границе известны значения функции $\psi$, либо с условием Неймана, когда на границе известны значения нормальной производной $\partial\psi/\partial n$. Именно вопрос о том, когда эти условия являются подходящими, составляет заключительную часть полной задачи и будет рассматриваться в разд. 3.3.

Дискретизированная форма уравнения Пуассона

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\psi}{\delta y^2} = \zeta, \tag{3.364}$$

использующая разности второго порядка, представляет собой пятиточечный шаблон (Том и Апельт [1961])

$$\frac{\psi_{i+1,\,j} - 2\psi_{i,\,j} + \psi_{i-1,\,j}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,\,j+1} - 2\psi_{i,\,j} + \psi_{i,\,j-1}}{\Delta y^2} = \zeta_{i,\,j}, \tag{3.365}$$

где $\zeta_{i,\,j}$ известно.

### 3.2.1. Прямые методы

В прямоугольной области, где $\max i = I$ и $\max j = J$, уравнения (3.365) и граничные условия образуют в совокупности систему $N = (I-2)\times(J-2)$ линейных алгебраических уравнений. Эта система является блочно-трехдиагональной, как

и система, которая была получена при использовании полностью неявной схемы для решения двумерного уравнения диффузии (см. разд. 3.1.14), отличается от последней лишь наличием «источникового» неоднородного члена $\zeta_{i,j}$ и также не может быть решена при помощи метода прогонки.

Наиболее элементарными методами решения такой системы являются правило Крамера и различные варианты метода исключения Гаусса (см. Кренделл [1956]). Для задач, представляющих практический интерес, $N$ весьма велико и эти методы становятся неподходящими. В правиле Крамера требуется выполнить невероятно большое число операций — приблизительно $(N+1)!$ умножений, и даже если имеется достаточно машинного времени, то точность решения будет фактически сведена на нет ошибками округления [1]). Число умножений в методах Гаусса прямо пропорционально $N^3$, и можно ожидать, что точность решения будет ухудшаться при $N$, больших пятидесяти (Хемминг [1962]), в зависимости от деталей метода и длины слова в машине. Эти (и другие) методы обсуждаются в книге Уэстлейка [1968].

За последние годы были разработаны высокоэффективные прямые методы. Дорр [1970] приводит обзор «блочных» методов, методов циклического исключения, методов тензорного произведения, методов, использующих ряды Фурье, и некоторых других. Ланкастер [1970] также представил обзор прямых схем. Другими недавно опубликованными прямыми методами являются метод дискретного инвариантного вложения Энджела [1968а], его подход динамического программирования (Энджел [1968б]), метод суммарного представления Положего [1965], а также Диденко и Ляшенко [1964] (см. также Чаленко [1970]), метод Йи [1969], метод нечетно-четного исключения Базби с соавторами [1969, 1970б] и метод расчета распространения вектора ошибки (метод EVP) Роуча [1971а, 1971б]. Хейз [1970] использовал интегральную формулу Грина для прямого решения уравнения Лапласа ($\zeta = 0$). Энджел и Калаба [1970] получили формулы метода с одним обходом расчетных точек, основанного на инвариантном вложении. Другие прямые методы рассматривали Свифт [1971] и Цао [1970].

Особенно привлекательным является метод Бунемана [1969], основанный на нечетно-четном исключении. Соответствующая программа для ЭВМ достаточно коротка и замкнута, не зависит от подпрограмм для быстрого преобразования Фурье

[1]) Но времени, как правило, бывает недостаточно. Данные, приведенные Форсайтом [1970], показывают, что на выполнение умножений для решения 26 уравнений при помощи правила Крамера на вычислительной машине CDC 6600 потребуется $10^{16}$ лет, что в $10^6$ раз превышает возраст Вселенной (по современным оценкам).

и дает результаты, имеющие машинную точность. Но непосредственное применение этого метода ограничено прямоугольными областями с граничными условиями Дирихле на всей границе, причем $I-1$ и $J-1$ должны быть степенями двойки. (Возможные способы обобщения таких методов можно найти в разд. 3.2.9.) Этот метод использовал Фромм [1971] для решения задачи в большой области с числом ячеек $128\times 128$. Программа здесь получается очень хорошей, но использованная в ней система индексации точек $(M, N)$ несопоставима с системой $(I, J)$, применяемой в этой книге, т. е. систему $(M, N)$ невозможно перевести в систему $(I, J)$.

Все эти методы обладают одним или несколькими из следующих недостатков: ограничены[1]) прямоугольными, L- или T-образными областями и выбором граничных условий типа $\psi = 0$; требуют большого объема памяти ЭВМ; неприменимы в случае системы координат, отличной от декартовой; из-за накопления ошибки округления могут быть использованы лишь для областей ограниченного размера (т. е. для ограниченных значений $I$ и $J$); накладывают ограничение на выбор узлов расчетной сетки (например, $I-1$ и $J-1$ должны иметь вид $2^k$, где $k$ — целое число); требуют громоздких предварительных вычислений для построения сетки; приводят к сложным программам и алгоритмам. Однако для решения больших задач все большее применение находят именно прямые методы, особенно методы, основанные на разложении в ряды Фурье. Наиболее гибкий и простой по сравнению с другими прямыми методами метод расчета распространения вектора ошибки обсуждается в разд. 3.2.8; в разд. 3.2.9 рассматриваются методы, использующие ряды Фурье (и играющие все бóльшую и бóльшую роль).

По сравнению с прямыми методами различные итерационные методы проще с точки зрения понимания и программирования и являются достаточно гибкими. Скорость сходимости в таких методах существенно больше скорости сходимости в старых прямых методах (Уэстлейк [1968]), так как в них используются «разреженные» матрицы. Исторически сложилось так, что итерационные методы чаще применяются в вычислительной гидродинамике и, несомненно, не утратят своей важности. Здесь итерационные методы будут рассматриваться в хронологическом порядке.

### 3.2.2. Метод Ричардсона и метод Либмана

Как обсуждалось ранее в § 3.1.22, решение (стационарных) уравнений эллиптического типа аналогично получению асимптотически стационарного решения нестационарной задачи (Фран-

[1]) При непосредственном применении; см. разд. 3.2.9.

кел [1950]). Предположим, что рассматривается нестационарное уравнение диффузии для $\psi$ с «источниковым членом» $\zeta$ и с коэффициентом диффузии, равным единице:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla^2 \psi - \zeta. \tag{3.366}$$

Физический смысл нестационарного решения здесь не играет роли, но когда решение такого уравнения диффузии приближается к стационарному, оно стремится к интересующему нас решению уравнения Пуассона (3.363).

В некоторых случаях такая аналогия выполняется точно. Для того чтобы продемонстрировать подобную эквивалентность, выведем итерационный метод Ричардсона для эллиптического уравнения Пуассона из нестационарной схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным для уравнения диффузии параболического типа.

Применяя к уравнению (3.366) разностную схему с разностями вперед по времени и с центральными разностями по пространственным переменным, получаем

$$\frac{\psi_{i,j}^{k+1} - \psi_{i,j}^{k}}{\Delta t} = \frac{\delta^2 \psi^k}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \psi^k}{\delta y^2} - \zeta_{i,j}. \tag{3.367}$$

Для простоты временно ограничимся случаем, когда $\Delta x = \Delta y = \Delta$ и уравнение (3.367) принимает следующий вид:

$$\psi_{i,j}^{k+1} = \psi_{i,j}^{k} + \frac{\Delta t}{\Delta^2}\left[\psi_{i+1,j}^{k} + \psi_{i-1,j}^{k} + \psi_{i,j+1}^{k} + \psi_{i,j-1}^{k} - 4\psi_{i,j}^{k} - \Delta^2 \zeta_{i,j}\right]. \tag{3.368}$$

Покажем сначала, что $\zeta_{i,j}$ не оказывает влияния на устойчивость уравнения (3.368). Следуя работе Шортли и Уэллера [1938], будем рассматривать граничные условия Дирихле и обозначим через $\psi^\infty$ точное конечно-разностное решение[1]) конечно-разностного уравнения Пуассона (3.364). Тогда ошибка $e_{i,j}^{k}$ значения $\psi_{i,j}^{k}$ после итерации $k$ будет составлять

$$e_{i,j}^{k} = \psi_{i,j}^{\infty} - \psi_{i,j}^{k}. \tag{3.369}$$

Подставляя полученное отсюда выражение для $\psi^k$ в уравнение (3.364), будем иметь

$$\frac{\delta^2 \psi^\infty}{\delta x^2} - \frac{\delta^2 e^k}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \psi^\infty}{\delta y^2} - \frac{\delta^2 e^k}{\delta y^2} = \zeta. \tag{3.370}$$

[1]) Формальное заключение, что точное решение получается при $k \to \infty$, является скорее предположительным, чем строгим. Предел $\lim_{k\to\infty} \psi^k$ будет отличаться от точного решения уравнения (3.365) из-за ошибок округления.

Так как $\psi^\infty$ в точности удовлетворяет уравнению (3.364), уравнение (3.370) сводится к уравнению Лапласа

$$\frac{\delta^2 e^k}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 e^k}{\delta y^2} = 0. \tag{3.371}$$

Поскольку граничные условия заданы, на всех границах $\psi^k = \psi^\infty$, или $e = 0$. Тогда аналогично итерационному конечно-разностному уравнению (3.368) можно записать для ошибки $e$ следующее уравнение:

$$e^{k+1}_{i,j} = e^k_{i,j} + \frac{\Delta t}{\Delta^2}\left[e^k_{i+1,j} + e^k_{i-1,j} + e^k_{i,j+1} + e^k_{i,j-1} - 4e^k_{i,j}\right]. \tag{3.372}$$

Таким образом, итерационное уравнение (3.368) для $\psi$ эквивалентно итерационному уравнению (3.372) для $e$, причем последнее, очевидно, не зависит от $\zeta$.

Условие устойчивости уравнения (3.368) или (3.372) (см. разд. 3.1.5.д) имеет вид $d = \alpha\Delta t/\Delta^2 \leqslant {}^1/_4$ или при $\alpha = 1$ $\Delta t \leqslant \Delta^2/4$. Поскольку желательно достичь асимптотического решения как можно скорее, выберем максимально возможное значение $\Delta t = \Delta^2/4$. Подстановка этого значения в уравнение (3.368) дает

$$\psi^{k+1}_{i,j} = \psi^k_{i,j} + \frac{1}{4}\left[\psi^k_{i+1,j} + \psi^k_{i-1,j} + \psi^k_{i,j+1} + \right.$$
$$\left. + \psi^k_{i,j-1} - 4\psi^k_{i,j} - \Delta^2\zeta_{i,j}\right]. \tag{3.373}$$

Приводя подобные члены, содержащие $\psi^k_{i,j}$, получаем

$$\psi^{k+1}_{i,j} = \frac{1}{4}\left[\psi^k_{i+1,j} + \psi^k_{i-1,j} + \psi^k_{i,j+1} + \psi^k_{i,j-1} - \Delta^2\zeta_{i,j}\right]. \tag{3.374}$$

Этот алгоритм представляет собой *метод Ричардсона*[1]) при $\Delta x = \Delta y$. В частном случае для уравнения Лапласа ($\zeta_{i,j} = 0$) он сводится просто к требованию, чтобы значение $\psi$ на новой итерации равнялось среднему арифметическому значению в четырех соседних точках.

Уравнение (3.374) представляет собой тот же результат, который можно получить, разрешая стационарное уравнение (3.365) эллиптического типа относительно $\psi_{i,j}$ при условии, что этот член в левой части уравнения берется на итерации $k+1$,

[1]) Этот метод известен также как метод Якоби (Сальвадори и Барон [1961]), как метод «итераций полными этапами» (Кренделл [1956]) и как метод «одновременных смещений» (Янг [1954]); последнее название связано с тем, что каждое значение $\psi^{k+1}$ вычисляется в точке, которую можно брать независимо в любом порядке из последовательности точек $(i, j)$, и поэтому все точки можно в известном смысле рассчитать одновременно. Такое свойство алгоритма очень важно при оценке методов для вычислительных машин с параллельными процессорами.

а все члены в правой части берутся на итерации $k$. Введем величину отношения размеров шагов сетки $\beta = \Delta x/\Delta y$; тогда

$$\psi_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2(1+\beta^2)}\left[\psi_{i+1,j}^{k} + \psi_{i-1,j}^{k} + \beta^2\psi_{i,j+1}^{k} + \beta^2\psi_{i,j-1}^{k} - \Delta x^2\zeta_{i,j}\right]. \tag{3.375}$$

Этот алгоритм представляет собой *метод Ричардсона* при $\Delta x \neq \Delta y$.

Исследование скорости сходимости методов можно провести так же, как и исследование устойчивости для уравнения переноса вихря, подставляя в уравнение для ошибки (3.372)

$$V^{k+1} = GV^{k} \tag{3.376}$$

или раскладывая оператор Лапласа в дискретизированной форме по его собственным функциям; результаты оказываются идентичными при условии, что граничные условия правильно учтены [1]). Представим здесь полученные таким способом (но в других обозначениях) результаты Франкела [1950].

Компоненты ошибки с наибольшей и наименьшей длинами волн затухают наиболее слабо (т. е. имеют наибольшую величину $|G(\theta)|$). Таким образом, независимо от начального распределения ошибки по $\theta$ данные компоненты будут доминировать при асимптотически больших $k$. Обе эти компоненты имеют одну и ту же величину $|G(\theta)|$, но коротковолновая компонента ошибки ($\Lambda = 2\Delta x$) совершает знакопеременные колебания при $G < 0$, что в некотором смысле оптимально (Франкел [1950]).

Уравнение (3.375) является двухслойным уравнением, и в памяти вычислительной машины необходимо хранить массивы для величин $\psi^{k+1}$ и $\psi^{k}$. Если обход расчетных точек вести в направлении возрастания $i$ и $j$ и в уравнении (3.375) использовать, где это возможно, уже полученные новые значения $\psi^{k+1}$, то получится следующая схема:

$$\psi_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2(1+\beta^2)}\left[\psi_{i+1,j}^{k} + \psi_{i-1,j}^{k+1} + \beta^2\psi_{i,j+1}^{k} + \beta^2\psi_{i,j-1}^{k+1} - \Delta x^2\zeta_{i,j}\right], \tag{3.377}$$

которая называется *методом Либмана* [2]). При программировании этого метода достаточно в памяти хранить лишь один мас-

[1]) Более изящные матричные методы описаны в книгах Вазова и Форсайта [1960] и Эймса [1969].

[2]) Этот метод известен также как метод Гаусса — Зейделя (Сальвадори и Барон [1961]), как метод «итераций неполными этапами» (Кренделл [1956]) и как метод «последовательных смещений» (Янг [1954]). Этот метод похож на методы Саульева для нестационарных уравнений (см. разд. 3.1.17), но не идентичен им.

сив для величины $\psi$ в уравнении (3.377), предусмотрев в программе оператор замещения. Кроме того, Франкел [1950] показал, что для наиболее «стойких» компонент ошибки с большими и малыми волновыми числами в методах Либмана и Ричардсона имеет место соотношение

$$G(\text{Либман}) = [G(\text{Ричардсон})]^2. \tag{3.378}$$

Асимптотически при достаточно большом числе итераций $k$ итераций по методу Либмана эквивалентны $2k$ итерациям по методу Ричардсона; кроме того в методе Либмана требуется вдвое меньший объем машинной памяти [1]).

Более сложный вариант метода Либмана был предложен Шортли и Уэллером [1938].

### 3.2.3. Метод релаксации невязки Саусвелла

Метод релаксации невязки Саусвелла (Саусвелл [1946]) применялся в течение многих лет при расчетах вручную для получения численных решений важных технических и научных задач, включая одно из самых ранних решений задачи о течении при большом числе Рейнольдса (Аллен и Саусвелл [1955]). Первоначально он назывался просто «релаксационным методом», но здесь это название заменено на «метод релаксации невязки», чтобы было можно отличать его от метода Либмана и других итерационных методов, которые в настоящее время иногда называют релаксационными методами.

Простейшая форма метода релаксации невязки Саусвелла основана на том же уравнении (3.375), что и метод Ричардсона для вычисления новых значений $\psi_{i,j}^{k+1}$. Различие заключается в том, что уравнение (3.375) не используется во всех без исключения узловых точках сетки. Здесь невязка $r_{i,j}$ определяется из уравнения

$$r_{i,j} = \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j}}{\Delta y^2} - \zeta_{i,j}. \tag{3.379}$$

Когда $r_{i,j} = 0$, уравнение Пуассона (3.365) удовлетворяется, но только в точке $(i, j)$. Таким образом, величина $|r_{i,j}|$ показывает, как на ошибку в точке $(i, j)$ влияют все текущие прибли-

[1]) В действительности для методов, подобных методу Ричардсона, потребность в величине объема памяти ЭВМ можно сократить за счет нехитрых программистских приемов и использования несколько большего числа операторов замещения.

женные значения $\psi_{i,j}$. Затем перебором находят ту узловую точку, где величина $|r_{i,j}|$ является наибольшей, полагают в этой точке $r_{i,j}=0$ и при помощи уравнения (3.375) находят отсюда новое значение $\psi_{i,j}$. Это в свою очередь приводит к изменению невязок $r$ во всех соседних точках, и процесс повторяется.

Метод Саусвелла не применяется на современных электронных вычислительных машинах, так как время, нужное для нахождения наибольшей величины $|r_{i,j}|$ и для пересчета невязок $r$ в соседних точках, не отличается существенно от времени, необходимого для непосредственного применения схемы (3.375). Таким образом, на современных ЭВМ целесообразнее по очереди устранять невязку в каждой точке, используя уже найденные новые значения, т. е. применять метод Либмана. Исторически метод Саусвелла интересен потому, что его усовершенствование привело к экстраполяционному методу Либмана, более известного под названием метода последовательной верхней релаксации.

### 3.2.4. Метод последовательной верхней релаксации

Практика применения (Фокс [1948]) метода Саусвелла показала, что для достижения наибольшей скорости сходимости нужно устранять не *наибольшую* невязку $|r_{i,j}|$, а ту невязку $r_{i,j}$, для ликвидации которой требуется наибольшее «смещение» $|\psi_{i,j}^{k+1}-\psi_{i,j}^{k}|$. Такой прием, очевидно, может быть применен только достаточно квалифицированным вычислителем, который может быстро приближенно вычислить максимальное смещение при визуальном переборе невязок. Затем был развит другой подход. Было обнаружено, что оптимальная скорость сходимости достигается не приравниванием невязок нулю, а использованием «верхней» или «нижней» релаксации в зависимости от того, какие знаки имеют невязки в соседних точках: одинаковые или противоположные (Фокс [1948]). (Общее понятие верхней релаксации было предложено Ричардсоном еще в 1910 г.) Такая идея с успехом была использована в методе Саусвелла, но теперь для реализации этого метода потребовался вычислитель, обладающий еще бо́льшими мастерством и интуицией. (Это требование фактически было даже выгодным (Фокс [1948]) при расчетах вручную, так как вычислитель, вероятно, менее утомлялся от однообразной работы!)

Франкел [1950] и независимо от него Янг [1954] разработали способ применения схемы верхней релаксации для метода Либмана, удобный для электронных вычислительных машин. Франкел назвал его «экстраполированным методом Либмана» (см. задачу 3.21), а Янг — «методом последовательной верхней релаксации».

Сложив уравнение (3.377) и тождество $0 = \psi^k_{i,j} - \psi^k_{i,j}$, а затем перегруппировав члены, получим

$$\psi^{k+1}_{i,j} = \psi^k_{i,j} + \frac{1}{2(1+\beta^2)}\left[\psi^k_{i+1,j} + \psi^{k+1}_{i-1,j} + \beta^2\psi^k_{i,j+1} + \beta^2\psi^{k+1}_{i,j-1} - \Delta x^2\zeta_{i,j} - 2(1+\beta^2)\psi^k_{i,j}\right]. \quad (3.380)$$

Теперь при приближении к решению $\psi^{k+1} \to \psi^k$ для всех $(i, j)$ член в квадратных скобках становится равным нулю в силу уравнения (3.365), а уравнение (3.380) переходит в отвечающее сходимости равенство $\psi^{k+1}_{i,j} = \psi^k_{i,j}$. Если положить, что член в квадратных скобках равен нулю и что в точке $(i, j)$ $\psi^{k+1}_{i,j} = \psi^k_{i,j}$, то получится метод Либмана. В методе последовательной верхней релаксации член в квадратных скобках в уравнении (3.380) умножается на релаксационный множитель (параметр релаксации) $\omega$, где $\omega \neq 1$; таким образом, в общем случае невязка $r_{i,j} \neq 0$, но $r_{i,j} \to 0$ при $\psi^{k+1} \to \psi^k$. Метод последовательной верхней релаксации приводит к уравнениям

$$\psi^{k+1}_{i,j} = \psi^k_{i,j} + \frac{\omega}{2(1+\beta^2)}\left[\psi^k_{i+1,j} + \psi^{k+1}_{i-1,j} + \beta^2\psi^k_{i,j+1} + \beta^2\psi^{k+1}_{i,j-1} - \Delta x^2\zeta_{i,j} - 2(1+\beta^2)\psi^k_{i,j}\right]. \quad (3.381)$$

Для сходимости требуется, чтобы $1 \leqslant \omega \leqslant 2$. Франкел и Янг определили «оптимальное» значение параметра $\omega_0$, причем их критерий оптимальности основывался на асимптотическом уменьшении наиболее стойкой ошибки. Оптимальное значение $\omega_0$ зависит от сетки, конфигурации области и типа граничных условий. Используя подход Франкела [1950] для решения задачи Дирихле в прямоугольной области размером $(I-1)\Delta x \times (J-1)\Delta y$ с постоянными $\Delta x$ и $\Delta y$, можно показать, что

$$\omega_0 = 2\frac{1-\sqrt{1-\xi}}{\xi}, \quad (3.382а)$$

где

$$\xi = \left[\frac{\cos(\pi/(I-1)) + \beta^2\cos(\pi/(J-1))}{1+\beta^2}\right]^2. \quad (3.382б)$$

При $\omega = \omega_0$ число итераций $k$, необходимое для уменьшения невязки до некоторого заданного уровня, прямо пропорционально полному числу итерируемых уравнений $N = (I-2) \times (J-2)$, тогда как для метода Либмана $k \sim N^2$. Поэтому метод последовательной верхней релаксации с оптимальным параметром релаксации $\omega_0$ (иногда называемый оптимальным методом верхней релаксации) лучше для больших задач.

Аналитическая оценка величины $\omega_0$ имеется только для довольно узкого класса задач (Янг [1954], Митчелл [1969], Уорлик и Янг [1970]). Миякода [1962] показал, что если на всех

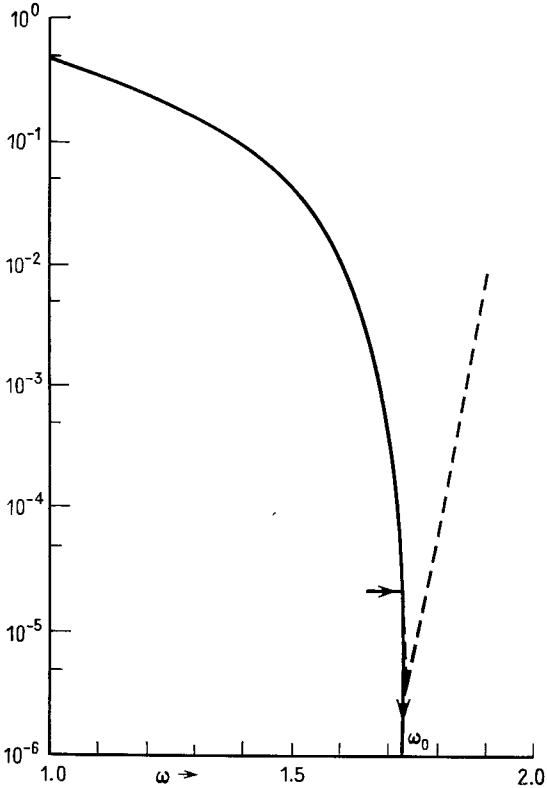



Рис. 3.16а. Поведение итераций в методе последовательной верхней релаксации в зависимости от величины параметра релаксации $\omega$. Размер сетки $I = J = 21$, $\Delta x = \Delta y$, оптимальное значение $\omega$ в этом случае $\omega_0 = 1.7295$. По оси ординат отложена величина $\max e_{ij}$ на пятидесятой итерации.

границах ставятся условия Неймана, то $\omega_0$ увеличивается. В тех случаях, когда на некоторых границах ставятся условия Дирихле, а на остальных условия Неймана, когда $\Delta x$ или $\Delta y$ переменны и когда рассматривается L-образная область (и многие другие непрямоугольные области), параметр $\omega_0$ аналитически не определен. В таких случаях $\omega_0$ можно найти экспериментально, последовательно решая уравнения Лапласа с нулевыми граничными условиями при различных значениях $\omega$ $(1 < \omega < 2)$ и проверяя сходимость к решению $\psi^k_{i,j} = 0$ при больших $k$. (Величина $\omega_0$ не зависит от наличия источникового члена $\zeta$.) При этом весьма важно, чтобы в начальное условие входили все компоненты ошибки (данному требованию легко удовлетворить, положив во всех внутренних точках $\psi^0_{i,j} = 1$).

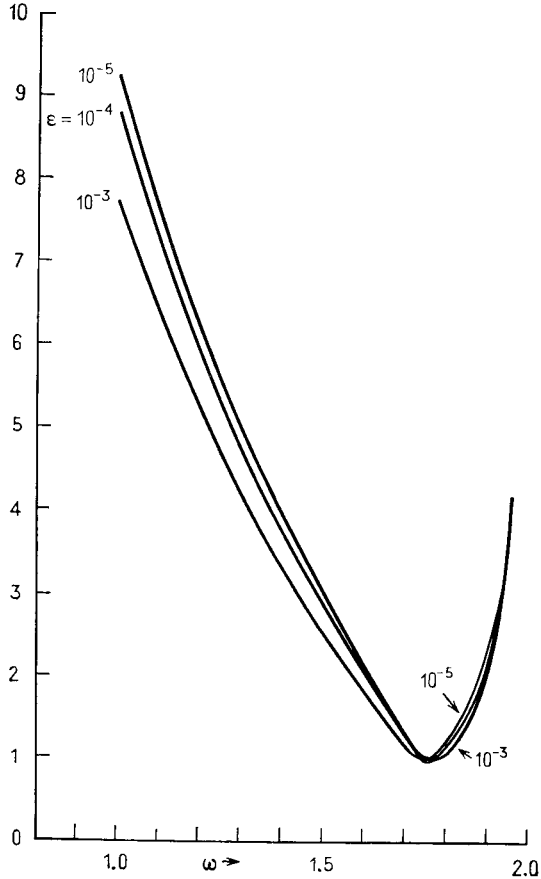



Рис. 3.16б. Поведение итераций в методе последовательной верхней релаксации в зависимости от величины параметра релаксации ω при тех же данных, что на рис. 3.16а. По оси ординат отложено относительное число итераций, необходимых для выполнения условия $\psi_{\max}^{k+1} - \psi_{\max}^{k} = \varepsilon$.

Процесс экспериментального нахождения $\omega_0$ затруднителен, так как обычно скорость сходимости резко меняется при изменении параметра ω в окрестности его оптимального значения $\omega_0$. Соответствующий пример представлен на рис. 3.16а и 3.16б. Изменение кривизны приведенных на них графиков в окрестности $\omega_0$ показывает, что обычно лучше брать $\omega_0$ с небольшим избытком, чем с недостатком. Видно также, что выбор близкого к единице значения ω, например $\omega = 1.1$, приводит к *незначительному* улучшению сходимости по сравнению со случаем $\omega = 1$.

Поскольку уравнение Пуассона надо решать на каждой итерации уравнения переноса вихря, всегда имеет смысл экспериментально оценить величину $\omega_0$. Джейн [1967] предложил другой удобный в некоторых случаях способ оценки $\omega_0$ из численных расчетов. Следуя Карре [1961], Стробридж и Хупер [1968], а также Хопер и Венструп [1970] при решении задач с осевой симметрией тоже оценивали $\omega_0$ по прошествии нескольких первых итераций. Оценкой параметра $\omega_0$ занимались и другие исследователи (Янг и Эйдсон [1970], Житко [1970]).

Описанный здесь метод последовательной верхней релаксации является исходным методом «поточечной» последовательной верхней релаксации Франкела и Янга. В нем берутся значения с $(k+1)$-й итерации в двух соседних с $(i, j)$ точках $(i-1, j)$ и $(i, j-1)$. Можно несколько увеличить скорость сходимости при помощи «полинейной» последовательной верхней релаксации, когда используются «продвинутые» значения с $(k+1)$-й итерации в трех соседних точках. Пусть обход расчетных точек ведется в направлении возрастания $j$. Когда рассчитывается строка $j1$, значения в предшествующей строке $j1-1$ уже найдены на $(k+1)$-й итерации. Значения в строке $j1$ находятся по этим значениям из строки $j1-1$ $(k+1)$-й итерации при помощи неявного решения для узловых точек строки $j1$ с разными значениями $i$, что требует применения метода прогонки (см. приложение А).

Эймс [1969, с. 147] указал, что при $\Delta x = \Delta y \to 0$ число итераций, необходимое для сходимости решения при расчетах по методу полинейной последовательной верхней релаксации, в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем при использовании метода поточечной последовательной верхней релаксации. Однако здесь на выполнение каждой итерации требуется больше времени, так как для решения используется неявный метод (прогонка). В численных экспериментах, выполненных Бао и Догерти [1969], был достигнут небольшой выигрыш в скорости вычислений по методу полинейной последовательной верхней релаксации, не окупавший дополнительных трудностей, связанных с методом прогонки. Дорр [1969] получил оценки для величины $\omega_0$ в случае применения метода полинейной последовательной верхней релаксации для решения уравнения Пуассона с граничными условиями Неймана.

Из-за своей простоты и эффективности метод поточечной последовательной верхней релаксации является наиболее популярным из всех итерационных методов для решения уравнения Пуассона в задачах вычислительной гидродинамики. В последние годы широко применяются и несколько более сложные неявные схемы метода чередующихся направлений, которые будут рассмотрены ниже.

Одной из простейших легко программируемых модификаций метода последовательной верхней релаксации является использование на первой итерации метода Либмана при $\omega = 1$, а затем расчет при $\omega = \omega_0$ (Шелдон [1959], Карре [1961], Янг и Кинкейд [1969]). Предложение Чу [1970] чередовать направление обхода расчетных точек оказалось полезным при решении более общих задач, чем решение простого уравнения Пуассона.

## 3.2.5. Тактика и стратегия

Форсайт [1956] указал, что значение параметра релаксации $\omega_0$, получаемое из уравнения (3.382), оптимально в «стратегическом» смысле, т. е. при длительном итерировании. При этом суммарная ошибка $\sum_{i,j} e^k_{i,j} \to 0$ асимптотически (при $k \to \infty$) быстрее всего при $\omega = \omega_0$. Но при конечном $k$ оптимальное значение может оказаться несколько меньше $\omega_0$ в зависимости от начального распределения ошибки. Действительно, если ограничиться одной итерацией ($k = 1$), то выбор параметра $\omega = 1$ (метод Либмана) приводит к наибольшему уменьшению суммарной ошибки за один обход расчетных точек; таким образом, метод Либмана оптимален в «тактическом» смысле, т. е. при кратковременном итерировании (Форсайт [1956]). (Метод Либмана и метод последовательной верхней релаксации сопоставлял и Келлер [1958].)

Как всегда, выбор критерия оптимальности оказывает влияние на определение величины оптимального параметра, а точная математическая теория не может внести ясность в произвольно установленные стандарты [1]). Янг и Кинкейд [1969] установили, что результаты сравнения различных итерационных методов в значительной степени зависят от различного выбора критериев оптимальности даже при $k \to \infty$.

Численные расчеты, выполненные автором настоящей книги на сетке с размером $21 \times 21$, показали, что преимущество (в смысле суммарной ошибки) выбора величины $\omega = 1$ над выбором оптимального параметра $\omega = \omega_0$ может сохраняться до числа итераций $k = 6$ или $k = 8$. Кроме того, по сравнению со случаем $\omega = 1$ выбор $\omega = \omega_0$ приводит к большому разбросу ошибки; если же направление обхода расчетных точек меняется на каждой итерации (скажем, с $i\uparrow$, $j\uparrow$ на $i\downarrow$, $j\downarrow$ или другим

[1]) Такой произвол существует даже для сравнительно хорошо поставленной задачи сходимости решения дискретизированного уравнения Пуассона. А что подразумевают под «оптимальным» решением военные, разрабатывающие оборонительные планы, экономисты, социологи, градостроители и т. д.?

образом), то это не оказывает влияния на сходимость в среднем, но разброс ошибки уменьшается. (Усложнение программирования и дополнительная затрата машинного времени при таком способе обхода зависят от типа ЭВМ.) Наиболее эффективные итерационные методы не приводят к строго симметричным численным результатам даже при симметричных граничных условиях, что можно классифицировать как еще одну «ошибку», связанную со свойствами схемы. Заметим, что одним из преимуществ грубого метода Ричардсона является строгая симметричность получаемых численных результатов. Такая симметричность может оказаться желательной, например, при проведении сверхустойчивых расчетов для исследования гидродинамически неустойчивого течения. Заметим также, что в методе последовательной верхней релаксации осцилляция, вызванная чрезмерно большим шагом по времени, при $\omega = \omega_0$ оказывается больше, чем при $\omega = 1$ или в методе Ричардсона.

В заключение заметим, что в гидродинамике полученное для $\psi$ решение используется для определения составляющих скорости $u$ и $v$ при помощи численного дифференцирования. Таким образом, ошибки в величинах $\delta\psi/\delta x$ и $\delta\psi/\delta y$ должны рассматриваться как надлежащие показатели сходимости решения, но, насколько известно автору, ни в одном исследовании они в таком качестве не использовались.

### 3.2.6. Неявные схемы метода чередующихся направлений

Продолжая аналогию между итерационным решением уравнения Пуассона и асимптотическим установлением по времени решения нестационарного уравнения диффузии, естественно рассмотреть неявные схемы метода чередующихся направлений, описанные в разд. 3.1.16. Действительно, Писмен и Ракфорд в своей статье [1955] обсуждали обе эти задачи. По аналогии с уравнением (3.308) при $\beta = \Delta x/\Delta y$ имеем

$$\psi^{k+1/2} = \psi^k + \frac{\alpha\,\Delta t}{2\,\Delta x^2}\left[\delta_x^2\psi^{k+1/2} + \beta^2\delta_y^2\psi^k + \Delta x^2\zeta\right], \qquad (3.383а)$$

$$\psi^{k+1} = \psi^{k+1/2} + \frac{\alpha\,\Delta t}{2\,\Delta x^2}\left[\delta_x^2\psi^{k+1/2} + \beta^2\delta_y^2\psi^{k+1} + \Delta x^2\zeta\right], \qquad (3.383б)$$

где $\delta_x^2\psi = \psi_{i+1,\,j} - 2\psi_{i,\,j} + \psi_{i-1,\,j}$ и $\delta_y^2\psi = \psi_{i,\,j+1} - 2\psi_{i,\,j} + \psi_{i,\,j-1}$. Первое уравнение неявно по $x$, имея трехдиагональную форму (см. приложение А), второе неявно по $y$. Сходимость обеспечивается тем, что на обоих полушагах берется одна и та же величина $\Delta t$ (см. ссылки в разд. 3.1.16).

После умножения на $\rho = 2\Delta x^2/(\alpha\,\Delta t)$ уравнения (3.383) можно записать в виде

$$\psi^{k+1/2}_{i+1,\,j} - (2+\rho)\,\psi^{k+1/2}_{i,\,j} + \psi^{k+1/2}_{i-1,\,j} = \\ = -\beta^2\left[\psi^{k}_{i,\,j+1} - (2-\rho)\,\psi^{k}_{i,\,j} + \psi^{k}_{i,\,j-1}\right] - \Delta x^2\zeta_{i,\,j}, \qquad (3.384а)$$

$$\psi^{k+1}_{i,\,j+1} - (2+\rho)\,\psi^{k+1}_{i,\,j} + \psi^{k+1}_{i,\,j-1} = \\ = -\frac{1}{\beta^2}\left[\psi^{k+1/2}_{i+1,\,j} - (2-\rho)\,\psi^{k+1/2}_{i,\,j} + \psi^{k+1/2}_{i,\,j+1}\right] - \Delta y^2\zeta_{i,\,j}. \qquad (3.384б)$$

Может показаться, что выбор очень больших $\Delta t$ (малых $\rho$) будет ускорять асимптотическую по времени скорость сходимости, но в действительности существуют некоторые оптимальные значения $\Delta t$ или $\rho$. При оптимальном $\rho$ сходимость достигается за несколько меньшее число итераций, чем при использовании метода последовательной верхней релаксации с оптимальным параметром. Такая более быстрая сходимость представляется правдоподобной, ибо неявность схемы приводит к тому, что влияние эллиптических граничных условий сказывается в течение всего времени. Однако выполнение одной итерации в неявной схеме метода чередующихся направлений занимает больше времени, и поэтому метод последовательной верхней релаксации с оптимальным параметром фактически требует меньше машинного времени, чем такая «однопараметрическая» неявная схема метода чередующихся направлений (Биркгоф с соавторами [1962], Уэстлейк [1968]).

Неявная схема метода чередующихся направлений становится по-настоящему эффективной в случае выбора *последовательности* итерационных параметров $\rho_k$, которая заменяет один параметр $\rho$ в уравнении (3.384). Найти такую оптимальную последовательность, очевидно, труднее, чем найти один оптимальный параметр. Здесь накладываются дополнительные ограничения, такие, как желательное относительное уменьшение начальной ошибки или желательное число итераций. Определение последовательности $\rho_k$ по праву было и остается предметом исследований прикладной математики. В качестве примера мы приведем последовательность $\rho_k$, применявшуюся в работе Писмена и Ракфорда [1955].

В этой работе решалась плоская симметричная задача теплопроводности в квадратной области с шагами сетки $\Delta x = \Delta y$; тогда в уравнении (3.384) $\zeta = 0$, $\beta = 1$. Граничные условия (в силу симметрии рассматривалась четверть области) были таковы:

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \qquad (3.385а)$$

$$\psi(1,\,y) = 0, \quad \psi(x,\,1) = 1. \qquad (3.385б)$$

В случае четырнадцати интервалов сетки на каждой границе ($\Delta x = \Delta y = {}^1/_{14}$) задача включала $14 \times 14$ неизвестных в узловых точках с индексами $i, j = 1, 2, \ldots, 14 = I - 1 = J - 1$. Использовалась последовательность $\rho_k$ следующего вида:

$$\rho_k = 4 \sin^2\left[\frac{(2k+1)\pi}{4(I-1)}\right], \tag{3.386}$$

откуда $\rho_0 = 0.012576$, $\rho_{13} = 3.9874$. Тогда соответствующая убывающая последовательность $\Delta t$ будет начинаться членами $\Delta t_0 = 0.40571$, $\Delta t_1 = 0.04546$ и кончаться членом $\Delta t_{13} = 0.00128$.

«Оптимальная» последовательность $\rho_k$ в общем случае недостижима. Способы получения «хороших» последовательностей были предложены Дугласом [1962] и Вахпрессом [1966]. Эти способы описаны в книгах Эймса [1969] и Митчелла [1969]; оба последних автора утверждают, что параметры, предложенные Вахпрессом, предпочтительнее, но не приводят достаточно убедительных доводов. В обоих способах требуется оценить наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы, что само по себе нетривиально. Развитые теории применимы только для задач с граничными условиями Дирихле в квадратной области при одинаковых шагах сетки $\Delta x = \Delta y$, хотя Брили [1970] с успехом использовал параметры Вахпресса в одном цикле из четырех на неквадратной сетке.

Хаджидимос [1969] обсуждает выбор последовательности $\rho_k$ и указывает на некоторые неверные интерпретации теории в прошлом. Уэстлейк [1968] отмечает, что в общем случае лучше завысить число циклов, чем занизить его. В случае непрямоугольной области способа выбора последовательности $\rho_k$ не имеется, хотя известно, что метод сходится для всех $\rho$. (Отметим, что на обоих полушагах должно браться одно и то же $\rho_k$.) Мурадоглу [1968], Краудер и Дальтон [1971б] провели некоторые предварительные исследования свойств сходимости неявной схемы метода чередующихся направлений в случае непрямоугольной сетки.

В методах последовательной верхней релаксации число итераций, необходимое для сходимости, увеличивается с ростом $N$. Для неявных схем метода чередующихся направлений, применяемых в областях квадратной формы, $k_{\max}$ почти не зависит от $N$, так что для достаточно больших $N$ неявные схемы метода чередующихся направлений предпочтительнее. В численных расчетах Биркгофа с соавторами [1962] на сетке $40 \times 40$ неявные схемы метода чередующихся направлений с параметрами Вахпресса оказались почти в четыре раза быстрее, чем метод последовательной верхней релаксации с оптимальным параметром релаксации. Однако неясно, будут ли неявные схемы метода чередующихся направлений быстрее в случае непрямо-

угольных областей, тем более что для областей сложной формы методы последовательной верхней релаксации заведомо проще с точки зрения программирования.

Линч и Райс [1968] рассмотрели влияние гладкости начальных ошибок на оптимальную последовательность $\rho_k$ и влияние ошибок при вычислении собственных значений матрицы, рекомендовали использовать для практических расчетов параметры Вахпресса и указали, что последующие циклы $\rho_k$ менее эффективны, чем первый цикл. Последовательность параметров $\rho_k$ рассматривалась также в статьях Гайера и Тодда [1967] и Вахпресса [1968].

Неявные схемы метода чередующихся направлений и аналогичные им схемы изучали Янг [1954], Самарский [1962] и Фейрвезер [1969]. Фейрвезер с соавторами [1967], Хаджидимос [1969], Бурсье и Франсуа [1969] использовали неявные схемы метода чередующихся направлений для решения бигармонических уравнений. Каспар [1968] рассмотрел неявные схемы метода чередующихся направлений для слабо нелинейных уравнений эллиптического типа. Видлунд [1967] сообщил об известных успехах при решении некоторых задач с помощью подхода, при котором рассчитывается нестационарное асимптотическое решение уравнения более общего вида:

$$c(x, y)\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla^2 \psi - \zeta, \tag{3.387}$$

где для ускорения сходимости выбирается положительный коэффициент $c(x, y)$.

Для понимания современных исследований неявных схем метода чередующихся направлений требуется знакомство с обозначениями и семантикой линейной алгебры. Здесь можно рекомендовать краткое изложение этого вопроса в первой главе книги Митчелла [1969][1]).

## 3.2.7. Другие итерационные методы

Для решения уравнения Пуассона разработано много вариантов итерационных методов. Один из первых обзоров таких методов был дан Гейрингер [1959]. Несмотря на то что для некоторых задач многие из этих методов обладают определенными преимуществами или ограничениями, к результатам их

[1]) Советскому читателю можно рекомендовать более доступные книги по линейной алгебре: Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. — 4-е изд., доп. — М.: Наука, 1971; Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. — 4-е изд., стереотип. — М.: Наука, 1975; Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — 2-е изд., доп. — М.: Физматгиз 1963. — *Прим. ред.*

сравнения следует относиться с известной осторожностью. Как было указано выше в разд. 3.2.5 (и в работе Янга и Кинкейда [1969]), результаты сравнения методов часто зависят от нормы ошибки, формы области и граничных условий задачи.

При оценке какого-либо нового метода необходимо учитывать его сложность, гибкость, приспособляемость (например, можно ли его использовать для решения задачи с граничными условиями Неймана или на сетке, отличной от квадратной) и ожидаемый выигрыш при решении полной задачи гидродинамики. Наконец, при выборе метода немаловажную роль играют личное знакомство с методом и ясность его описания автором.

Кроме представленных выше методов, Уэстлейк [1968] оценил метод сопряженных градиентов (см. также Симеонов [1967]), градиентные методы, которые сходятся быстрее, чем метод Либмана, но требуют чрезмерного объема машинной памяти, метод Ньютона — Рафсона, также требующий слишком большого числа итераций и слишком большого объема памяти, стационарные линейные итерации и методы Монте-Карло. Известно, что методы Монте-Карло эффективны при решении уравнения для $\psi$, когда на сетке имеется всего одна или несколько узловых точек, и именно поэтому они не представляют ценности для решения гидродинамических задач [1]).

Уэстлейк также опробовал метод двухлинейной блочной последовательной верхней релаксации с циклическим чебышевским ускорением. Этот метод превосходит неявную схему метода чередующихся направлений для квадратной сетки с размером шага больше некоторого зависящего от задачи значения, но для задач с мелкой сеткой неявная схема метода чередующихся направлений дает лучшие результаты. Мартин и Ти [1961] провели сравнение итерационных методов, включая градиентные методы. Пирсон и Каплан [1970] исследовали различные способы обхода расчетных точек сетки для метода последовательной верхней релаксации. Они обнаружили, что можно достичь сходимости за меньшее число итераций, но из-за дополнительного усложнения программы при этом может увеличиться машинное время.

Янг и Кинкейд [1969] сравнили представленные выше методы с некоторыми другими методами. Они охватили метод последовательной верхней релаксации с переменным параметром релаксации $\omega$, как и в неявной схеме метода чередующихся направлений Дугласа — Ракфорда (см. также Мак-Доуэлл [1967]), еще один модифицированный метод последовательной верхней релаксации, параметры Шелдона для метода верхней

[1]) Гопалсами и Аггарвала [1970] рассматривали методы Монте-Карло для бигармонических уравнений.

релаксации и их модификацию, циклический чебышевский полуитерационный метод и его вариант (см. также Ходжкинс [1966] и Риглер [1969]), полуитерационный метод Шелдона и его модификацию. Именно здесь Янг и Кинкейд [1969] рекомендовали проводить первый обход расчетных точек в методе последовательной верхней релаксации с параметром релаксации $\omega = 1$, а также обсудили некоторые детали того, как норма ошибки может влиять на результаты сравнения различных методов.

Апельт [1969], а также Сон и Ханратти [1969] использовали вариант метода последовательной верхней релаксации, предложенный Расселлом [1962]. Одно из самых простых усовершенствований для программирования метода последовательной верхней релаксации ввел Шелдон [1962]; см. также работу Йенссена и Стреде [1968]. Шелдон расщепляет процесс обхода расчетных точек в методе последовательной верхней релаксации на две части с обходом узловых точек в шахматном порядке — сначала обходятся точки с нечетной суммой $i + j$, а затем с четной суммой $i + j$. На первой части такого обхода новая информация не используется (в случае рассматриваемого здесь обычного пятиточечного аналога лапласиана). На второй части обхода во всех четырех соседних точках учитываются новые значения (см. разд. 3.1.18 о методе «классики»).

Стоун [1968], Вейнстейн с соавторами [1968] и Дюпон с соавторами [1968] рассмотрели методы для решения уравнения диффузии (пригодные здесь в силу аналогии между шагами по времени и итерациями), неявные в большей мере, чем неявная схема метода чередующихся направлений, но все-таки не полностью неявные. Эти методы основаны на проведении предварительной матричной факторизации (как это делается во многих прямых методах) и решении возникающей при этом задачи с разреженной матрицей при помощи прямого метода исключения Гаусса.

Раштон и Лейнг [1968] использовали метод «динамической релаксации» для решения трехмерного уравнения Лапласа (см. также Вуд [1971]).

Виноград [1969] рассмотрел класс методов «хаотической релаксации», которые, подобно методу Ричардсона, удобны для программирования на вычислительных машинах с параллельными процессорами. Здесь новые значения рассчитываются одновременно в многих узловых точках. Автору удалось получить сходящиеся результаты, вообще не задавая заранее ни порядка выбора каждой обрабатываемой точки $(i, j)$, ни числа итераций при решении уравнения. Этот результат Винограда наводит на мысль о необходимости исследовать выбор параметров релаксации для неявной схемы метода чередующихся направлений

при помощи метода Монте-Карло, что может представлять по меньшей мере теоретический интерес. Лик и Танстолл [1968], а также Ахамед [1970] рассматривали итерационные методы для решения уравнения вида $\nabla^2\psi = f(\psi)$. Методы решения уравнения Пуассона обсуждаются также в работах Алексидзе и Пертая [1969] и Вонка [1970].

В силу своей простоты и приемлемой скорости сходимости основной метод последовательной верхней релаксации (с параметром $\omega = 1$ на первой итерации), по-видимому, остается наиболее популярным итерационным методом в случае областей непрямоугольной формы, тогда как неявная схема метода чередующихся направлений Дугласа и Ракфорда (и, возможно, метод последовательной верхней релаксации) найдет, вероятно, более широкое применение для областей нрямоугольной формы.

### 3.2.8. Метод расчета распространения вектора ошибки (метод EVP)

Сравнительно простой и гибкий *прямой* метод решения уравнения Пуассона был предложен автором настоящей монографии (Роуч [1971а, 1971б]). Этот метод относится к классу методов с двойным обходом расчетных точек или методов с расчетом коэффициентов влияния (см., например, Исидзаки [1957], Люси и Хаусен [1964], Хирота с соавторами [1970]). В нем используются только наиболее элементарные правила линейной алгебры, однако он обладает существенным недостатком: из-за ошибок округления его можно применять лишь для задач с ограниченным размером области.

Опишем этот метод для одномерной задачи (он применяется и при рассмотрении условия на выходной границе потока в разд. 3.3.7). Рассмотрим сначала одномерную по $y$ задачу с граничными условиями Дирихле, используя для представления второй производной $\delta^2\psi/\delta y^2$ обычную конечно-разностную формулу второго порядка точности:

$$\frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{\Delta y^2} = \zeta_j, \tag{3.388}$$

$$\psi_1 = a, \quad \psi_J = b. \tag{3.389}$$

Возьмем некоторое произвольное значение $\psi_2'$ (где штрих означает предварительное значение), скажем $\psi_2' = \psi_1 = a$. Это значение $\psi_2'$ отличается от истинного значения $\psi_2$ на единичную ошибку $e$, т. е.

$$\psi_2 = \psi_2' + e. \tag{3.390}$$

Все остальные предварительные значения $\psi'$ вплоть до точки $J$ определяются при помощи преобразованного уравнения (3.388) при первом обходе расчетных точек, начиная с $j = 3$,

$$\psi'_{j+1} = \Delta y^2 \zeta_j + 2\psi'_j - \psi'_{j-1}. \qquad (3.391)$$

Эти предварительные значения $\psi'_j$ отличаются от истинных на величину ошибки $e_j$, т. е.

$$\psi_j = \psi'_j + e_j. \qquad (3.392)$$

Подставляя выражение (3.392) в уравнение (3.388) и используя уравнение (3.391), получаем рекуррентное соотношение для расчета распространения ошибки

$$e_{j+1} = 2e_j - e_{j-1}, \qquad (3.393)$$

которое не зависит от неоднородного члена $\zeta_j$. При условии (3.389) на левой границе, очевидно, имеем $e_1 = 0$, а по определению $e_2 = e$; по индукции можно показать, что тогда уравнение (3.393) принимает вид

$$e_j = (j-1)\,e. \qquad (3.394)$$

Единичная ошибка $e$ вычисляется в конце первого обхода по известному граничному условию $\psi_J = b$; таким образом,

$$e = \frac{b - \psi'_J}{J-1}. \qquad (3.395)$$

С учетом полученной величины $e$ при втором обходе исправляются предварительные значения и окончательные значения определяются при помощи уравнения

$$\psi_j = \psi'_j + (j-1)\,e. \qquad (3.396)$$

Эти окончательные значения можно найти и иначе — при помощи уравнения (3.391) и правильных значений

$$\psi_1 = a, \quad \psi_2 = \psi'_2 + e. \qquad (3.397)$$

Такой подход будет использован в двумерной задаче.

Если на второй границе при $j = J$ задано условие Неймана в каком-либо из двух видов

$$\frac{\psi_J - \psi_{J-1}}{\Delta y} = U \quad \text{или} \quad \frac{\psi_{J+1} - \psi_{J-1}}{2\Delta y} = U, \qquad (3.398)$$

то, как легко проверить, уравнение (3.395) для определения $e$ заменяется одним из следующих уравнений:

$$e = U\Delta y - (\psi'_J - \psi'_{J-1}) \quad \text{или} \quad e = U\Delta y - {}^1/_2(\psi'_{J+1} - \psi'_{J-1}). \qquad (3.399)$$

Если при $j = 1$ условие Неймана задано в виде

$$\frac{\psi_2 - \psi_1}{\Delta y} = C, \tag{3.400}$$

то вместо $e_1 = 0$ и $e_2 = e$ будем иметь

$$e_1 = e_2 = e, \tag{3.401}$$

а уравнение (3.394), описывающее распространение ошибки, заменится следующим:

$$e_j = e + (j - 2)\, C\, \Delta y. \tag{3.402}$$

Поскольку уравнения (3.394) или (3.402), описывающие распространение ошибки, линейны по $j$, практически можно не

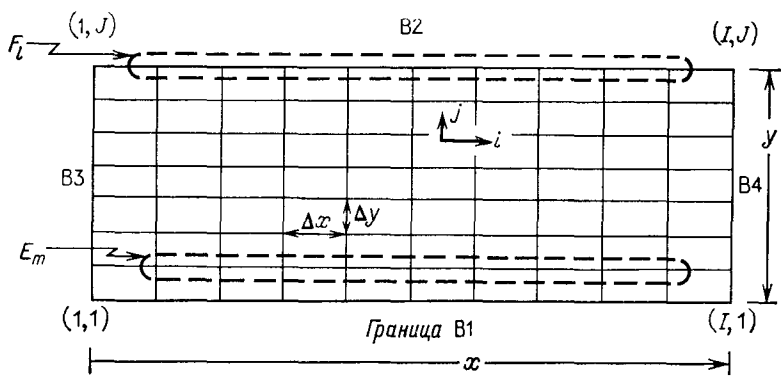



Рис. 3.17. Расчетная область эталонной двумерной задачи для метода расчета распространения ошибки; $E_m$ — вектор начальной ошибки, $F_l$ — вектор конечной ошибки.

опасаться получить чрезмерно большие величины $\psi'_j$ и тем самым нарушить точность из-за машинных ошибок округления. Двумерная задача не свободна от этого недостатка.

Расчетная область эталонной двумерной задачи представлена на рис. 3.17. Пусть сначала на всех границах заданы условия Дирихле. По аналогии с одномерным случаем, когда мы выбирали одно-единственное предварительное значение $\psi'_2$, теперь выберем *вектор* предварительных значений $\psi'_{i,2}$, где $i$ пробегает все целочисленные значения от $i = 2$ до $i = I - 1$. Этот вектор $\psi'_{i,2}$, определенный на точках, расположенных непосредственно над границей B1 на рис. 3.17, отличается от истинного значения $\psi_{i,2}$ на вектор единичной ошибки $e_{i,2}$, т. е.

$$\psi_{i,2} = \psi'_{i,2} + e_{i,2}. \tag{3.403}$$

При выбранном таким образом $\psi'_{i,2}$ остальные предварительные значения во внутренних точках до $j = J$ включительно вычисляются при первом обходе при помощи преобразованного уравнения (3.365). Таким образом, при $\beta = \Delta x/\Delta y$ получаем

$$\psi'_{i,j+1} = \Delta y^2 \zeta_{i,j} + 2(1+\beta^2)\psi'_{i,j} - \beta^2[\psi'_{i+1,j} + \psi'_{i-1,j}] - \psi'_{i,j-1}. \tag{3.404}$$

В случае необходимости в уравнении (3.404) используются точные граничные значения $\psi_{1,j}$ на границе В 3 и $\psi_{I,j}$ на границе В 4. Уравнение, описывающее распространение ошибки и соответствующее уравнению (3.393), имеет вид

$$e_{i,j+1} = 2(1+\beta^2)e_{i,j} - \beta^2 e_{i+1,j} - \beta^2 e_{i-1,j} - e_{i,j-1}, \tag{3.405}$$

причем на границах В 1, В 3 и В 4 значения ошибок равны

$$e_{i,1} = e_{1,j} = e_{I,j} = 0. \tag{3.406}$$

После первого обхода, учитывая точные граничные значения $\psi_{i,J}$, вычисляют вектор конечной ошибки на границе В 2:

$$e_{i,J} = \psi_{i,J} - \psi'_{i,J}. \tag{3.407}$$

Затем определяют вектор начальной ошибки $e_{i,2}$ через $e_{i,J}$ при помощи предварительно установленного линейного соотношения (см. ниже). Правильные значения $\psi_{i,2}$ находятся из уравнения (3.403); затем при втором обходе расчетных точек из маршевого уравнения (3.404), заменив в нем $\psi'$ на $\psi$, находят окончательное решение.

Теперь для того, чтобы установить линейное соотношение между $e_{i,2}$ и $e_{i,J}$, удобно ввести дополнительные обозначения для этих двух векторов, как показано на рис. 3.17. Вектор конечной ошибки обозначим через $F_l = e_{i,J}$; здесь $l = i - 1$ пробегает все целочисленные значения от $l = 1$ до $l = I - 2$. Вектор начальной ошибки обозначим через $E_m = e_{i,2}$; здесь $m = i - 1$ также пробегает значения от $m = 1$ до $m = I - 2$. Затем при помощи соотношения

$$F_l = C_{lm} E_m \tag{3.408}$$

вводится «матрица коэффициентов влияния» $C = \{C_{lm}\}$.

В отличие от одномерного случая для нахождения $C_{lm}$ не существует удобного уравнения. Эта матрица получается до решения конкретной задачи с помощью следующего алгоритма. Выбирается некоторое частное значение $m_1$ величины $m$, полагается $E_{m_1} = e_{m_1+1,2} = 1$, а для всех остальных $m$ принимается $E_m = 0$. Затем при помощи уравнений (3.405) и (3.406) рассчитывается распространение вектора ошибки $E$. В результате

получается вектор конечной ошибки $F_l = e_{i,\,l}$, где $l = i - 1$ пробегает значения от 1 до $I - 2$. Таким образом определяется столбец $m_1$ матрицы $C$:

$$C_{lm_1} = F_l. \tag{3.409}$$

Полагая $E_{m_1} = 1$, а все остальные $E_m = 0$ поочередно для всех $m_1$, меняющихся от 1 до $I - 2$, заполним всю матрицу коэффициентов влияния $C$. Чтобы выразить $e_{i,\,2}$ через $e_{i,\,1}$, разрешим при помощи метода исключения Гаусса уравнение (3.408) относительно $E_m$, получим

$$E_m = C_{ml}^{-1} F_l \tag{3.410}$$

и, наконец, определим

$$e_{m+1,\,2} = C_{ml}^{-1} e_{m+1,\,1}. \tag{3.411}$$

Такой метод в приложениях, очевидно, эффективнее прямого метода исключения Гаусса. Здесь исходная задача решения системы из $(I-2)\times(I-2)$ уравнений с блочно-трехдиагональной матрицей сводится к решению $I - 2$ уравнений [1]) для определения обратной матрицы $C^{-1}$ и при этом дополнительно проделывается работа, эквивалентная $I$ итерациям по методу Ричардсона: два обхода расчетных точек для определения $\psi'$ и $\psi$ из уравнения (3.404) и $I - 2$ обхода для определения $e$ из уравнения (3.405). Поскольку уравнение (3.405), описывающее распространение ошибки, не зависит от неоднородного члена $\zeta_{i,\,j}$ и поскольку граничные условия (3.406) для этого уравнения не зависят от граничных значений $\psi$, а только от типа граничных условий, являющихся в данном случае условиями Дирихле, расчет $e$ при помощи уравнений (3.405) и (3.406) и обращение матрицы $C$ необходимо проводить только один раз для целого семейства решений, определяемых на одной и той же сетке и при одном и том же типе граничных условий, но с различными граничными значениями $\psi$ и различными $\zeta$. Именно так обстоит дело в гидродинамических задачах.

Легко добиться того, чтобы рассмотренный метод сходился примерно в $10 \div 100$ раз (в зависимости от выбранного шага сетки и выбранного критерия сходимости) быстрее других итерационных методов. Но этот метод обладает тем недостатком, что требует существенно большего объема памяти и по простоте не может конкурировать с методом последовательной верхней релаксации. Еще важнее то обстоятельство, что из-за свойств распространения ошибки метод применим только в областях ограниченных размеров.

[1]) В нашем описании метода фигурирует обратная матрица $C^{-1}$, но известно, что на практике удобнее не вычислять $C^{-1}$, а непосредственно решать систему уравнений, оставляя треугольный вид системы и применяя метод исключения Гаусса.

При достаточно больших $J$ матрица $C$, очевидно, может стать плохо обусловленной, а это, как интуитивно ясно, приводит к тому, что трудно отличить ошибку в точке $(i, 2)$ от ошибок в точках $(i \pm 1, 2)$, и может послужить источником любой ошибки при $j = J$. Но, как правило, применение метода на практике ограничивается не этим, а следующим обстоятельством. В отличие от линейного по $j$ рекуррентного соотношения (3.393) для распространения ошибки в одномерном случае в двумерном случае уравнение (3.405) дает величину $F_{ic}$ ($ic$ означает среднюю по $I$ точку сетки), которая с ростом $j$ увеличивается экспоненциально. Для больших значений $J$ это означает, что применимость метода для нахождения ошибки при $j = J$ будет ограничена машинными ошибками округления.

Такое поведение накладывает абсолютное ограничение на разрешающую способность метода даже при условии, что обращение матрицы $C$ может быть выполнено с идеальной точностью. Однако практически используются стандартные программы для метода исключения Гаусса, при помощи которых можно проводить расчеты с удвоенной точностью, уменьшая эту ошибку до пренебрежимо малой величины. Кроме того, детали конкретной задачи (т. е. значения $\psi$ и $\xi$) также не оказывают существенного влияния на распространение ошибки при условии, что граничные значения для $\psi$ представлены в разумном масштабе [1]). Практически оценить ограничения для метода расчета распространения вектора ошибки можно путем численного решения уравнений (3.405) и (3.406) с единичными ошибками при $j = J$.

Распространение ошибки в данном методе имеет также и некоторые положительные аспекты. Наибольшая (и поэтому накладывающая наибольшее ограничение) ошибка возникает посередине сетки, поэтому необходимо рассматривать только $F_{ic}$. Кроме того, влияние различных граничных условий вдоль границ $i = 1$ и $i = I$, параллельных направлению расчета, на значение в середине сетки пренебрежимо мало даже при столь малых $I$, как $I = 7$, поэтому размером по $I$ можно пренебречь, а граничные условия на B 3 и B 4 рассматривать как параметры для распространения ошибки. Наконец, существенное влияние оказывает отношение шагов сетки $\beta = \Delta x/\Delta y$, что может дать определенное преимущество. Малые $\beta$ оказывают на распространение ошибки неблагоприятное влияние, а большие $\beta$, напротив, положительное. (В пределе при больших $\beta$ распространение ошибки приближается к соответствующему распростране-

[1]) Ошибки от этих источников можно уменьшить, проводя дополнительное полное итерирование для метода в целом, но достигаемое при этом улучшение обычно меньше того, которое получается за счет уменьшения $J$ на единицу. Кроме того, такая процедура расходится после второй итерации.

нию ошибки в одномерном случае, которое просто линейно по $J$. Однако в этом случае точность ограничена из-за плохой обусловленности матрицы $C$. Было обнаружено, что эта ошибка играет основную роль в задаче с сеткой $101 \times 101$ при $\beta = 10$.)

Безразмерным расстоянием, представляющим практический интерес при определении применимости метода, является отно-

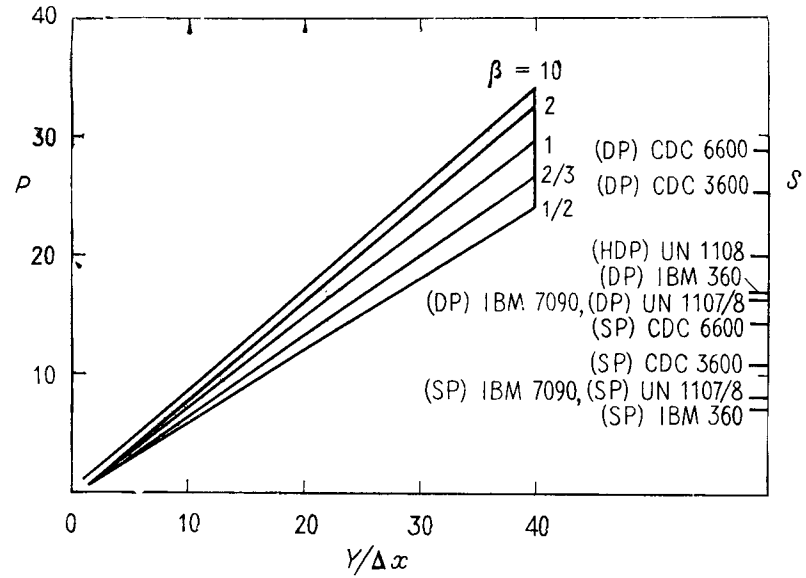
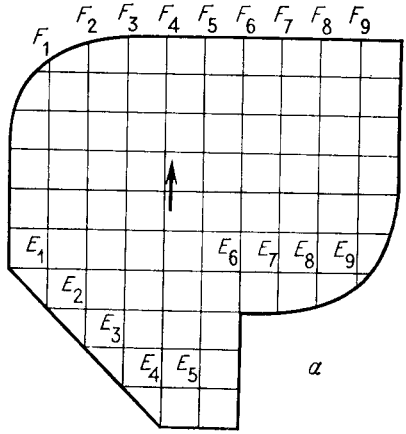



Рис. 3.18. Характеристики распространения ошибки в методе расчета распространения вектора ошибки, примененном для уравнения Пуассона в декартовой системе координат $(x, y)$. Здесь $P = \lg F_{ic}$, $\beta = \Delta x/\Delta y$.

шение $Y/\Delta x$ (т. е. число шагов $\Delta x$, которое проходится в направлении $y$). На рис. 3.18 представлен график величины $P = \lg F_{ic}$ для единичной ошибки $E_{ic} = 1$, где $\beta$ служит параметром. На этом же рисунке приведены данные о разрешающей способности вычислений, характеризуемой числом значащих цифр $S$ в некоторых используемых в настоящее время в США вычислительных машинах. (Сокращения SP, DP и HDP соответственно означают одинарную точность вычислений, удвоенную точность вычислений и удвоенную точность, обеспечиваемую специальным устройством.)

В качестве примера к рис. 3.18 рассмотрим вычислительную машину CDC 6600 с одинарной точностью вычислений, когда $S = 14.45$. При $\beta = 1$ и $Y/\Delta x = 20$ имеем $S \approx P$. При этом условии $(J = 21)$ можно ожидать, что разрешаемые ошибки в величинах $\psi_{i,j}$ будут порядка единицы, а это неприемлемо. Но



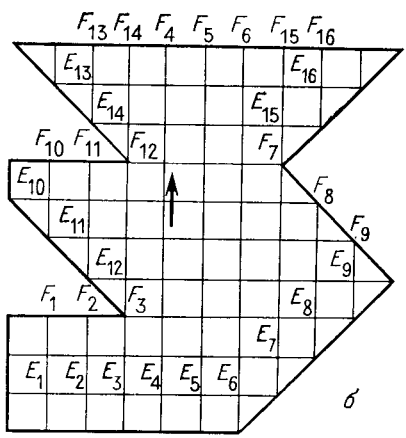




Рис. 3.19. Метод расчета распространения вектора ошибки для областей **не**регулярной формы. $E_m$ — составляющие вектора начальной ошибки, $F_l$ — составляющие вектора конечной ошибки. Стрелкой указано направление продвижения расчета.

при $\beta = 2$ и $Y/\Delta x = 10$ (при этом по-прежнему $J = 21$) имеем $P \approx 7.5$. В этом случае разность $S - P = 14.5 - 7.5 = 7$, и поэтому можно ожидать, что разрешаемые ошибки в величинах $\psi_{i,j}$ будут иметь порядок $10^{-7}$, а это обычно уже приемлемо.

Разрешаемые ошибки в методе расчета распространения вектора ошибки отличаются от меры сходимости или невязки в итерационных методах. Наибольшие разрешаемые ошибки

в методе расчета распространения вектора ошибки возникают на границе в конце обхода расчетных точек, в то время как во внутренних точках ошибки существенно меньше. Невязки в итерационных методах имеют наибольшую величину во внутренних точках области, в то время как заданные граничные значения остаются неизменными. Таким образом, разрешаемую ошибку порядка $10^{-6}$ в величине $\psi$ на последней границе в рассматриваемом методе нельзя непосредственно сопоставлять с невязкой порядка $10^{-6}$ для $\psi$ в неявной схеме метода чередующихся направлений и в методе последовательной верхней релаксации.

Одним из преимуществ метода расчета распространения вектора ошибки по сравнению с другими прямыми методами является простота его приспособления к случаям областей со сложной границей и случаям различных комбинированных граничных условий. Единственный момент, требующий разъяснения в случае применения метода для областей сложной формы, заключается в определении векторов начальной и конечной ошибки $E$ и $F$. Два соответствующих примера приведены на рис. 3.19. Используемая здесь индексация $E$ и $F$ не является единственной.

Для каждого отдельного применения метода расчета распространения вектора ошибки надо соответственно определять его характеристики. Однако, поскольку наличие границ, находящихся на расстоянии более чем четыре или пять ячеек от какого-либо внутреннего пути продвижения расчета, оказывает сравнительно слабое благоприятное воздействие на расчет величины $e$, можно ожидать, что данный метод будет чаще всего ограничен величиной $P$ на рис. 3.18, вычисленной по наибольшему пути продвижения расчета в рассматриваемой задаче.

Заметим также, что уравнения (3.404) и (3.405) можно использовать для рассмотрения неполных ячеек около нерегулярных границ (см. разд. 6.1, а также книгу Сальвадори и Барона [1961]).

Граничное условие типа Неймана приводит к условию нулевого градиента для $e$.

*Упражнение.* Показать, что любое граничное условие типа Неймана для функции $\psi$, т. е. $d\psi/dn = c$, где $c$ не обязательно равно нулю, в рассмотренном методе расчета распространения вектора ошибки приводит к условию $de/dn = 0$.

Например, если условие вдоль границы B 1 имеет вид

$$\frac{\psi_{i,2} - \psi_{i,1}}{\Delta y} = c, \tag{3.412}$$

то после того, как выбраны предварительные значения $\psi'_{i,2}$, из него находятся величины $\psi'_{i,1}$. Аналогично, расчет вектора

ошибки по уравнению (3.405) для каждого $m_1$ начинают, принимая $E_{m_1} = e_{m_1+1,\,2} = 1$, но вместо $e_{m_1+1,\,1} = 0$ теперь берут $e_{m_1+1,1} = 1$. Условие типа Неймана вдоль границы В 3

$$\frac{\psi_{2,\,j} - \psi_{1,\,j}}{\Delta x} = d \tag{3.413}$$

включается в расчет величин $\psi'$ и $\psi$, проводимый по уравнению (3.404), а граничное условие (3.406) для ошибки на границе В 3 заменяется условием

$$e_{1,\,j} = e_{2,\,j}. \tag{3.414}$$

Аналогично, любое условие типа Неймана на границе В 4 приводит к условию $e_{I,\,j} = e_{I-1,\,j}$.

Если условие типа Неймана ставится на границах В 3 или В 4, то оно оказывает несущественное влияние на характеристики ошибки, если же это условие ставится на границе В 1, то оно оказывает незначительное благоприятное влияние, а будучи поставленным на границе В 2, оно приводит к серьезным неблагоприятным эффектам. В случае нерегулярной сетки численная реализация условий Роббина тоже проводится просто. Также легко можно решать трех- и $n$-мерные задачи, но обращение матрицы $C$ может оказаться затруднительным. Хотя переход от одного измерения к двум сильно ухудшает характеристики ошибки, последующее увеличение размерности задачи приводит к быстро уменьшающемуся неблагоприятному влиянию.

В методе расчета распространения вектора ошибки для конечно-разностной аппроксимации лапласиана (см. разд. 3.3.10) можно использовать пятиточечный шаблон с диагонально расположенными узловыми точками и девятиточечные шаблоны. При этом неявная схема ухудшает характеристики ошибки, в то время как использование явной схемы с диагональным направлением продвижения расчета (решение для $\psi_{i+1,\,j+1}$) улучшает их при малом $I$. Другая заслуживающая внимания модификация заключается в использовании пятиточечного аналога четвертого порядка точности для $\partial^2\psi/\partial x^2$ в направлении, перпендикулярном направлению продвижения расчета. Это приводит к увеличению $P$ на 12% при $\beta = 1$, что позволяет также брать бóльшие $\beta$ при соответствующем увеличении $P$. Метод расчета распространения вектора ошибок применим также и для других линейных эллиптических уравнений гидродинамики; кроме того, его можно использовать при итерационном подходе для решения нелинейных уравнений Пуассона с переменными коэффициентами (подробности можно найти в работе Роуча [1971а]). При помощи этого метода возможно прямое решение уравнения $\nabla^2\psi = f(\psi)$ (которое получается в неявном эйлеровом методе расчета движения сплошной среды (методе

ICE) см. разд. 5.1) и некоторых электродинамических задач с внутренними условиями согласованности на контактных поверхностях.

### 3.2.9. Методы, использующие ряды Фурье

Методы, использующие ряды Фурье, основаны на том факте, что *точное* решение *конечно-разностного* уравнения (3.365) может быть представлено в виде разложения по собственным функциям, содержащего конечное число членов. Например, для прямоугольной области размером $X \times Y$ с количеством внутренних точек $M \times N$ ($N = I - 2, M = J - 2$) при постоянных $\Delta x$ и $\Delta y$ и при $\psi = 0$ на всех границах точное решение уравнения (3.365) можно записать в следующем виде (Дорр [1970]):

$$\psi_{i,j} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{p=1}^{N} H_{p,j} \sin \frac{p\pi x_i}{X}, \tag{3.415}$$

где $x_i = (i-1)\Delta x$, а $H_{p,j}$ (при $1 \leqslant p \leqslant N$) суть решения трехдиагональной системы разностных уравнений

$$\frac{1}{\Delta y^2}(H_{p,j-1} - 2H_{p,j} + H_{p,j+1}) + \lambda_p H_{p,j} = V_{p,j}, \tag{3.416}$$

причем

$$H_{p,1} = H_{p,J} = 0 \tag{3.417}$$

и

$$V_{p,j} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{q=1}^{N} \zeta_{q+1,j+1} \sin \frac{q\pi p\,\Delta x}{X}, \tag{3.418}$$

$$\lambda_p = \frac{2}{\Delta x^2}\left(\cos \frac{p\pi\,\Delta x}{X} - 1\right). \tag{3.419}$$

Хокни [1965, 1971] показал возможность эффективного использования этого решения для расчетов в предположении, что $N = 2^k$ или $N = 3 \cdot 2^k$, где $k$ — некоторое целое число. В методе Хокни используется также нечетно-четное исключение (Дорр [1970], Базби с соавторами [1970]), и его скорость зависит от применения быстрого преобразования Фурье (Кули и Тьюки [1965], Пайпс и Хованесян [1969], Уэбб [1970]), которое имеется в библиотеке стандартных программ многих вычислительных центров. Менее сложный и менее ограничительный метод был использован Уильямсом [1969], который рассмотрел также периодические условия. Аналогичные методы развивали Бунеман [1969] и Огура [1969]. Для того чтобы полностью войти в курс дела, читателю рекомендуется ознакомиться

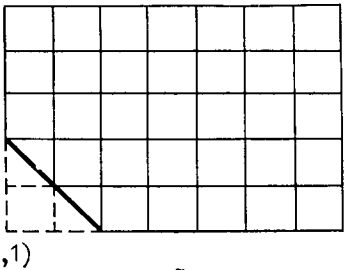
с этими работами (см. также работу Колони и Рейнольдса [1970]), поскольку упомянутые здесь методы выходят за рамки данной книги.

Заметим, однако, что, хотя эти методы в своей основной форме довольно ограничены по типу граничных условий задачи, при известной модификации их можно применять и к более общим задачам. Рассмотрим сначала случай прямоугольной области с граничным условием Дирихле $\psi = f(x, y)$, где всюду $f \neq 0$. Введем вспомогательную функцию $\psi^{\mathrm{I}}$, которая определяется как точное решение уравнения $\nabla^2\psi^{\mathrm{I}} = \zeta$ с граничными условиями $\psi^{\mathrm{I}} = 0$ на всей границе. Затем введем вторую вспомогательную функцию $\psi^{\mathrm{II}}$, которая определяется как точное решение конечно-разностного уравнения Лапласа $\nabla^2\psi^{\mathrm{II}} = 0$ с граничным условием $\psi^{\mathrm{II}} = f(x, y)$. *Точное* решение получается при помощи метода разделения переменных, разработанного для дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, Вейнбергер [1965]) и применяемого к *конечно-разностному* уравнению. (Необходимые разложения по собственным функциям уже известны из разложения, которое требуется при решении уравнения Пуассона.) Тогда в силу линейности задачи окончательное решение получается суперпозицией. Поскольку $\nabla^2\psi^{\mathrm{I}} = \zeta$ и $\nabla^2\psi^{\mathrm{II}} = 0$, имеем $\nabla^2(\psi^{\mathrm{I}} + \psi^{\mathrm{II}}) = \zeta$ и, поскольку на границах $\psi^{\mathrm{I}} = 0$ и $\psi^{\mathrm{II}} = f(x, y)$, имеем $\psi^{\mathrm{I}} + \psi^{\mathrm{II}} = f(x, y)$. Поэтому функция $\psi = \psi^{\mathrm{I}} + \psi^{\mathrm{II}}$ удовлетворяет уравнению $\nabla^2\psi = \zeta$ и граничному условию $\psi = f(x, y)$.

Если ставятся граничные условия типа Неймана с нулевым градиентом, то разложение проводится в ряд по косинусам. Если же градиент по нормали к границе отличен от нуля, $\partial\psi/\partial n = g(x, y)$, то задача решается следующим образом (Уильямс [1969]). Теперь вспомогательная функция $\psi^{\mathrm{I}}$ вводится следующим образом: $\psi^{\mathrm{I}} = 0$ во всех внутренних точках, $\psi^{\mathrm{I}} = +g(x, y)\Delta n$ на границах $i = I$ и $j = J$ и $\psi^{\mathrm{I}} = -g(x, y)\Delta n$ на границах $i = 1$ и $j = 1$. Эта функция $\psi^{\mathrm{I}}$ является решением вспомогательного дискретизированного уравнения Пуассона $\nabla^2\psi^{\mathrm{I}} = \zeta^{\mathrm{I}}$ с граничным условием $\delta\psi^{\mathrm{I}}/\delta n = g(x, y)$ и с $\zeta^{\mathrm{I}} = 0$ всюду, за исключением точек, смежных с границами, где $\zeta^{\mathrm{I}} = \nabla^2\psi^{\mathrm{I}} \neq 0$. (В узле, отстоящем на две позиции внутрь от границы, $\nabla^2\psi^{\mathrm{I}} = 0$, поскольку $\psi^{\mathrm{I}} = 0$ во всех соседних точках.) Если ввести $\psi^{\mathrm{II}} = \psi - \psi^{\mathrm{I}}$ и $\zeta^{\mathrm{II}} = \zeta - \zeta^{\mathrm{I}}$, то исходная задача сведется к нахождению решения конечно-разностного уравнения $\nabla^2\psi^{\mathrm{II}} = \zeta^{\mathrm{II}}$ с граничным условием $\delta\psi^{\mathrm{II}}/\delta n = 0$, что можно сделать с помощью разложения по косинусам. Искомое решение имеет вид $\psi = \psi^{\mathrm{I}} + \psi^{\mathrm{II}}$.

Аналогичным приемом можно решать задачу в непрямоугольной области, используя прямоугольную сетку, перекрывающую рассматриваемую область. Рассмотрим изображенную

на рис. 3.20, *а* область, образованную отсечением небольшого углового участка от прямоугольной области. Граничная точка (2, 2) не лежит на границе перекрывающего прямоугольника. Пусть $\psi = 0$ на всех границах области. Первая вспомогательная функция $\psi^{\mathrm{I}}$ определяется решением уравнения $\nabla^2\psi^{\mathrm{I}} = \zeta$ на перекрывающей сетке при $\zeta_{2,\,2} = 0$. Вторая вспомогательная функция $\psi^{\mathrm{II}}$ находится решением уравнения $\nabla^2\psi^{\mathrm{II}} = \zeta^{\mathrm{II}}$, где $\zeta^{\mathrm{II}}$ определяется так, что $\zeta_{2,\,2} = 1$, а в остальных точках $\zeta_{i,\,j} = 0$ [1]). Затем находится $\psi_{2,\,2}$ как линейная комбинация $\psi^{\mathrm{I}}_{2,\,2}$ и $\psi^{\mathrm{II}}_{2,\,2}$, такая, что $\psi_{2,\,2} = 0$, причем значение $\zeta$ во внутренних точках не меняется. Значит,




*а*

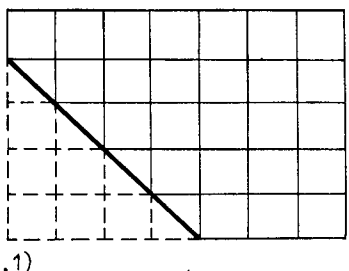
$$\psi_{2,\,2} = 0 = 1 \cdot \psi^{\mathrm{I}}_{2,\,2} + a \cdot \psi^{\mathrm{II}}_{2,\,2}, \quad (3.420)$$

откуда

$$a = -\psi^{\mathrm{I}}_{2,\,2}/\psi^{\mathrm{II}}_{2,\,2} \quad (3.421)$$

(знаменатель всегда отличен от нуля.) Окончательное решение получается суперпозицией

$$\psi = \psi^{\mathrm{I}} + a\psi^{\mathrm{II}}. \quad (3.422)$$




*б*

Рис. 3.20. Применение метода разложения в ряды Фурье для непрямоугольных областей.

Несмотря на то что величина $\zeta$ для такого «суммарного» решения в точке (2, 2) равна $a \times$ $\times$ (истинное) $\zeta_{2,\,2}$, она не оказывает влияния на решение, поскольку точка (2, 2) является граничной точкой суммарной задачи и поэтому $\zeta_{2,\,2}$ не фигурирует в решении этой задачи.

Если на границе перекрывающего прямоугольника не лежат несколько граничных точек, то для каждой такой точки необходимо решать дополнительное уравнение Пуассона. На рис. 3.20, *б* вспомогательные решения $\psi^{\mathrm{II}}$, $\psi^{\mathrm{III}}$, $\psi^{\mathrm{IIII}}$ являются соответственно решениями при условии, что $\zeta = 1$ в точках (2, 4), (3, 3) и (4, 2). Аналогично уравнению (3.420) в послед-

[1]) В электродинамических приложениях, где $\psi$ представляет собой потенциал, а $\zeta$ — заряд, этот прием известен под названием метода единичного заряда. За обсуждение этого приема автор благодарен О. Бунеману и Дж. Борису.

нем случае для определения $a$, $b$ и $c$ должна быть решена линейная система

$$\begin{aligned}\psi_{2,4} &= 0 = \psi^{I}_{2,4} + a\psi^{II}_{2,4} + b\psi^{III}_{2,4} + c\psi^{IIII}_{2,4},\\ \psi_{3,3} &= 0 = \psi^{I}_{3,3} + a\psi^{II}_{3,3} + b\psi^{III}_{3,3} + c\psi^{IIII}_{3,3},\\ \psi_{4,2} &= 0 = \psi^{I}_{4,2} + a\psi^{II}_{4,2} + b\psi^{III}_{4,2} + c\psi^{IIII}_{4,2},\end{aligned} \tag{3.423}$$

дающая матрицу коэффициентов влияния для нулевых граничных значений, необходимую для следующего решения с новым $\zeta$. Для $w$ граничных точек должно быть решено $w$ вспомогательных уравнений Пуассона, а линейная система порядка $w$, аналогичная системе (3.423), решается методом исключения Гаусса; однако при решении семейства задач с различными $\zeta$ на одной и той же сетке это нужно сделать только для первого решения.

Таким же образом можно решать задачи с комбинациями ненулевых граничных условий Дирихле и Неймана в областях, отличных от прямоугольных, но, очевидно, такое решение будет очень громоздким. Примеры применения рассмотренных методов для областей нерегулярной формы можно найти в работах Базби с соавторами [1970] и Джорджа [1970]. Для девятиточечного аналога уравнения Лапласа (разд. 3.2.10) подобными методами пользовались Лебейль [1969], а также Бёрдсолл и Фасс [1969][1]). Все эти методы сложнее, чем рассмотренный в разд. 3.2.8 метод расчета распространения вектора ошибки, однако они не ограничены размерами области, дают почти точное конечно-разностное решение и одинаково пригодны для трехмерных задач и для цилиндрической системы координат (Уильямс [1969]). В силу высокой скорости и точности эти методы несомненно найдут применение в будущем для задач с простой геометрией.

## 3.2.10. Аппроксимации высших порядков

До сих пор мы рассматривали только обычный пятиточечный аналог оператора Лапласа для уравнения Пуассона, но существуют и другие аналоги. Три из них применимы только для квадратной сетки с размерами шагов $\Delta x = \Delta y = \Delta$. В терминологии, схематическом представлении и освещении истории вопроса мы следуем работе Тома и Апельта [1961]. Рассмотренный здесь пятиточечный аналог впервые был использован Рунге в 1908 г. и иногда называется оператором, построенным

[1]) Для того чтобы получить наиболее полное представление о применении методов, использующих ряды Фурье, нужно ознакомиться со статьей Лебейля [1972].

на пятиточечном шаблоне «крест». Для случая квадратной сетки его можно схематически представить как на рис. 3.21, *а*, что соответствует уравнению

$$S_1 - 4\psi_{i,j} = \Delta^2\zeta_{i,j}, \tag{3.424}$$

которое имеет второй порядок точности относительно $\Delta$ и в котором

$$S_1 = \psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}. \tag{3.425}$$

Так как оператор Лапласа инвариантен относительно поворота системы координат, его можно записать в системе координат, повернутой на 45° по отношению к линиям сетки, так что

$$\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & -4 & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}$$

*а* *б*

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -12 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

*в* *г*

Рис. 3.21. Схематичное представление конечно-разностного аналога лапласиана на сетке с квадратной ячейкой. *а* — пятиточечный шаблон «крест»; *б* — пятиточечный диагональный шаблон, *в* — девятиточечный шаблон с коэффициентом 12, *г* — девятиточечный шаблон с коэффициентом 20.

расстояние между узловыми точками будет равно $\sqrt{2}\Delta$. Полученный в результате оператор, построенный на пятиточечном диагональном шаблоне и схематически представленный на рис. 3.21, *б*, соответствует уравнению

$$S_2 - 4\psi_{i,j} = 2\Delta^2\zeta_{i,j}, \tag{3.426}$$

которое имеет второй порядок точности относительно $\sqrt{2}\Delta$ и в котором

$$S_2 = \psi_{i+1,j+1} + \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i-1,j-1}. \tag{3.427}$$

Из девятиточечных шаблонов наиболее известными являются «шаблон с коэффициентом 12» Тома (рис. 3.21, *в*) и «шаблон с коэффициентом 20» Бикли (рис. 3.21, *г*). Первый из них соответствует уравнению

$$2S_1 + S_2 - 12\psi_{i,j} = 4\Delta^2\zeta_{i,j}, \tag{3.428}$$

а второй — уравнению

$$4S_1 + S_2 - 20\psi_{i,j} = 6\Delta^2\zeta_{i,j}. \tag{3.429}$$

Формула Тома имеет четвертый порядок точности только тогда, когда $^1/_{12}(\nabla^4 + \partial^4/\partial x^2\partial y^2)\psi$ не превышает $O(\Delta^2)$, а формула Бикли только при $^1/_{12}\nabla^4\psi = O(\Delta^2)$. В гидродинамических задачах такие условия обычно не выполняются. Исключением является стационарное течение Стокса ($\mathrm{Re} = 0$), когда уравнение переноса вихря сводится к уравнению Лапласа $\nabla^2\zeta = 0$, что соответствует уравнению $\nabla^4\psi = 0$. В общем случае эти девятиточечные разностные формулы оказываются даже менее точными, чем разностная формула, построенная на пятиточечном шаблоне «крест» (см. Сайрус и Фалтон [1967], Йенссен и Стреде [1968]).

Локальной точности более высокого порядка реально можно добиться при помощи разностных формул, в которых используются значения $\psi$ не только в смежных, но и в более удаленных узловых точках, например значения $\psi_{i+2,\,j}$. Йенссен и Стреде [1968] рассматривают некоторые из них, такие, как

$$\left.\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}\right|_{i,\,j} = \frac{1}{12\,\Delta x^2}[-\psi_{i+2,\,j} + 16\psi_{i+1,\,j} - 30\psi_{i,\,j} + 16\psi_{i-1,\,j} - \psi_{i-2,\,j}] + O(\Delta x^4), \qquad (3.430)$$

и соответствующую формулу для $\delta^2\psi/\delta y^2$ (см. также работу Фейервезера [1969]). Перейра [1969] в своем методе «итерированных отсроченных поправок» рассмотрел разностные формулы асимптотически высокого порядка точности.

Здесь важно понимать, что (как и в случае уравнения переноса вихря в разд. 3.1.23) *локально* четвертый порядок точности не означает *глобальной* точности. Последняя может существенно зависеть от точности задания граничных условий, которая, как правило, далека от четвертого порядка (см. разд. 3.3). Кроме того, схемы, подобные разностной формуле (3.430), невозможно использовать в точках, смежных с граничными, так как при этом требуется информация из точек вне разностной сетки. При расчете точек, смежных с граничными, исследователи обычно обращаются к формулам второго порядка точности [1]). Более рационально в приграничных точках локально использовать схемы более низкого порядка точности на мелкой сетке, а вдали от границы применять схемы более высоких порядков на грубой сетке. Такие методы были рассмотрены Бахваловым [1959]. В любом случае точность решения уравнения $\nabla^2\psi = \zeta$

[1]) Многие исследователи используют вблизи границ схемы четвертого порядка точности, вводя вне рассчитываемой области фиктивные точки сетки, значения в которых ставятся в соответствие граничным условиям. Даже в этом случае происходит потеря четвертого порядка точности, за исключением случаев, когда граница представляет собой ось (плоскость) симметрии. Известны и нецентральные формулы высокого порядка точности (например, Саусвелл [1946]), но они менее устойчивы и редко используются.

будет, конечно, ограничена точностью решения уравнения переноса вихря и точностью граничных условий для него, поэтому рекомендуется получать решение равномерно высокого порядка точности для всей задачи в целом.

Итерационные методы, описанные ранее, применимы и в случае рассмотренных разностных формул для лапласиана, хотя скорость сходимости может при этом измениться. Здесь можно приспособить и некоторые прямые методы (Лебейль [1969], Роуч [1971а, 1971б]), но в этом отношении они обычно оказываются менее гибкими, чем итерационные методы.

Наконец, остановимся на вопросе согласованной аппроксимации при дискретизации уравнения Пуассона и при определении скоростей. Решение уравнения Пуассона для $\psi$ используется только для определения скоростей конвекции, входящих в уравнение переноса вихря. Уравнение Пуассона $\nabla^2\psi = \zeta$ представляет собой не что иное, как определение вихря и в дискретизированной форме будет записываться так:

$$\zeta = \frac{\delta u}{\delta y} - \frac{\delta v}{\delta x}, \tag{3.431}$$

где $u = \delta\psi/\delta y$ и $v = -\delta\psi/\delta y$. Решение уравнения $\nabla^2\psi = \zeta$ следует рассматривать не как решение для $\psi$, а как решение для $\delta\psi/\delta x$ и $\delta\psi/\delta y$. Только пятиточечная схема для оператора Лапласа, по которой записано уравнение (3.365), соответствует разностным представлениям для $u$ и $v$ со вторым порядком точности [1])

$$u_{i,\,j} = (\psi_{i,\,j+1} - \psi_{i,\,j-1})/(2\,\Delta y), \tag{3.432а}$$

$$v_{i,\,j} = -(\psi_{i+1,\,j} - \psi_{i-1,\,j})/(2\,\Delta x). \tag{3.432б}$$

Если лапласиан представляется по схемам более высокого порядка, то может оказаться, что точность решения полной задачи фактически снизится, если $u$ и $v$ не аппроксимируются согласованно с тем же порядком точности, что и лапласиан.

Аналогичные замечания относятся и к методам наименьших квадратов для решения уравнений эллиптического типа (например, Дэвис и Рабинович [1960]). В этих методах величины $\psi$ аппроксимируются полиномами высокого порядка или некото-

[1]) Точнее, пятиточечная схема для лапласиана соответствует определению скоростей на *границах ячейки* между узлами (см. разд. 3.1.2), как в уравнениях

$$u_{i,\,j+1/2} = (\psi_{i,\,j+1} - \psi_{i,\,j})/\Delta y, \tag{3.433а}$$

$$u_{i,\,j-1/2} = (\psi_{i,\,j} - \psi_{i,\,j-1})/\Delta y, \tag{3.433б}$$

причем значения в узловых точках находятся следующим образом:

$$u_{i,\,j} = {}^1/_2\,(u_{i,\,j+1/2} + u_{i,\,j-1/2}). \tag{3.433в}$$

рыми другими $m$-параметрическими функциональными формами. Функциональные формы обычно выбираются таким образом, чтобы удовлетворить дифференциальным уравнениям во внутренних точках (что не трудно для уравнения Лапласа), а $m$ параметров (или коэффициентов полиномов) находятся при помощи минимизации ошибок на границах методом наименьших квадратов [1]). Как правило, от этих методов не следует ожидать успеха, особенно когда $\psi$ меняется не монотонно, и их не рекомендуется использовать в вычислительной гидродинамике. Но если эти методы применяются, то определение $u$ и $v$ должно быть согласовано с выбранной аппроксимирующей функциональной формой.

## 3.2.11. Об оценке рассмотренных методов

Замечания, сделанные в разд. 3.1.23 относительно оценки методов решения уравнения переноса вихря, применимы также к оценке методов нахождения решения и конечно-разностным представлениям уравнения Пуассона. Следует также учесть замечания, сделанные в предыдущем разделе относительно согласованности уравнения Пуассона для функции тока и уравнения переноса вихря как в отношении порядка ошибки аппроксимации, так и в отношении вычисления скоростей.

Наконец, при оценке быстроты проведения серийных расчетов в зависимости от сложности метода и времени разработки программы необходимо рассматривать *оба* эти уравнения *вместе*. Если при решении уравнения Пуассона для функции тока $\nabla^2\psi = \zeta$ используются итерационные методы, а в уравнении переноса вихря для $\partial\zeta/\partial t$ берется простейшая одношаговая явная схема, то при нестационарном подходе обычно около 90% машинного времени затрачивается на решение уравнения $\nabla^2\psi = \zeta$. Поэтому, если при представлении $\partial\zeta/\partial t$ перейти к двухшаговой явной схеме (например, к схеме Аллена — Чена из разд. 3.1.15), то машинное время при решении всей системы уравнений для $\psi$ и $\zeta$ не удвоится, а только увеличится приблизительно на 10%. Тогда отношение скоростей расчета по схеме с разностями против потока и по схеме Робертса — Вейса четвертого порядка точности (разд. 3.1.19), равное 45, при решении всей системы уравнений для $\psi$ и $\zeta$ намного уменьшится (хотя и останется все еще значительным) и станет равным примерно 6.

[1]) Либо функциональные формы выбираются таким образом, что граничные условия точно удовлетворяются, а невязка дифференциального уравнения в частных производных минимизируется. Возможно также, что не удовлетворяются ни граничные условия, ни дифференциальные уравнения, а минимизируется комбинация ошибок на границах и невязки уравнений (личное сообщение А. Руссо).

Аналогично, число итераций, необходимых для сходимости решения уравнения $\nabla^2\psi = \zeta$, отчасти зависит от начального приближения для $\psi_{i,j}$. В качестве начального приближения для $\psi^{n+1}$ при решении уравнения $\nabla^2\psi^{n+1} = \zeta^{n+1}$ естественно брать ранее полученное решение уравнения $\nabla^2\psi^n = \zeta^n$. При больших $\Delta t$ величина $\zeta^{n+1}$ существенно отличается от $\zeta^n$, и тогда $\psi^n$ будет уже недостаточно хорошим начальным приближением для $\psi^{n+1}$. В пределе при $\Delta t \to 0$ вихрь $\zeta^{n+1} \to \zeta^n$, а начальное приближение $\psi^n \to \psi^{n+1}$. (Это наблюдается и при приближении к стационарному состоянию.) Таким образом, выигрыш в машинном времени за счет увеличения допустимых шагов $\Delta t$ при использовании неявных схем для $\partial\zeta/\partial t$ по меньшей мере частично теряется из-за увеличения времени, требуемого для каждого шага итерационного решения уравнения $\nabla^2\psi = \zeta$, а также из-за дополнительного времени вычислений за счет неявности самой схемы. Иллюстрируя это, Фромм [1964] привел ряд примеров расчетов, в которых в определенных пределах машинное время практически не зависело от $\Delta t$!

При использовании прямых методов решения уравнения $\nabla^2\psi = \zeta$ возникает противоположная ситуация. Прямой метод расчета вектора распространения ошибки (разд. 3.2.8) приводит к уменьшению машинного времени, необходимого для решения уравнения $\nabla^2\psi = \zeta$, приблизительно в 100 раз; это значит, что на решение этого уравнения теперь потребуется только 10% машинного времени, а на расчет $\partial\zeta/\partial t$ по одношаговой явной схеме — около 90%. Если же для расчета $\partial\zeta/\partial t$ использовать двухшаговую схему Чена — Аллена, то полное машинное время почти удвоится, а схема Робертса — Вейса четвертого порядка точности окажется приблизительно в 40 раз медленнее схемы с разностями против потока. С другой стороны, увеличение допустимой величины шага $\Delta t$ (если не учитывать дополнительного усложнения самого уравнения для $\partial\zeta/\partial t$) непосредственно приводит к сокращению машинного времени, так как время решения уравнения $\nabla^2\psi = \zeta$ при помощи прямого метода не зависит от выбора начального приближения для $\psi$.

Выбор между итерационными и прямыми методами определяется также видом граничных условий. Если на всех границах ставятся условия типа Неймана, как, например, при решении уравнения для давления (разд. 3.5), то итерационный процесс сходится очень медленно. Если же уравнение для давления желательно решать на каждом шаге по времени, то прямые методы оказываются более эффективными.

Рассмотренные здесь методы, конечно, применимы не только для уравнений для функции тока и давления, но и для других гидродинамических задач, описываемых уравнением Пуассона. Например, в работе Розенбаума [1968] приведен расчет невяз-

кого потенциального течения. Итерационные методы для нелинейных уравнений эллиптического типа рассматривали Эймс [1965, 1969] и Лик [1969].

## 3.3. Граничные условия для уравнения переноса вихря и уравнения для функции тока

Нетрудно представить себе некоторые типы правдоподобных граничных условий для $\psi$ и $\zeta$, но попытки определить реальные точные условия, приводящие к устойчивым решениям, могут оказаться весьма неудачными. Было обнаружено, что адекватность любого граничного условия, определенного при помощи численных экспериментов, может зависеть от числа Рейнольдса, разностных схем, используемых во внутренних точках, других граничных условий, а иногда и от начальных условий. Многочисленность этих факторов затрудняет аналитические исследования и ограничивает их применимость. Тем не менее в этом направлении известен целый ряд работ; см., например, Эдди [1949], Кист и Митчелл [1967], Кемпбелл и Кист [1968], П. Дж. Тейлор [1968, 1969, 1970] и Чен [1968, 1970].

Для многих задач отсутствуют математически строгие решения. Наши выводы в основном будут основываться на интуиции, на экспериментах в аэродинамических трубах и на численных экспериментах. Большинство численных экспериментов по исследованию граничных условий осуществлялось при помощи простых двухслойных явных схем для уравнений переноса вихря. Заметим, что известно несколько случаев, когда те же граничные условия, взятые в иных схемах, приводят к неустойчивости. (Термин «неустойчивость» используется здесь в смысле отсутствия сходимости итераций, а не обязательно в смысле экспоненциального роста ошибки.) Эти примеры могут служить предостережением от применения таких существенно частных методов. В данной связи мы предлагаем на начальном этапе построения вычислительного алгоритма для отладки программы и выяснения устойчивости схемы, применяемой во внутренних точках, брать граничные условия, которые имеют наинизший порядок и являются наиболее ограничительными. Затем можно будет попробовать граничные условия, накладывающие меньшие ограничения.

Большинство задаваемых граничных условий являются или условиями типа Дирихле (задано значение функции), или условиями типа Неймана (задан градиент функции по нормали к границе). До настоящего времени гидродинамические задачи с условиями смешанного типа (условия Роббина), где задана

линейная комбинация значений функции и нормальной производной, не решались. (Подобные условия возникают в задачах теплопередачи со свободной конвекцией при использовании ньютоновского «закона» охлаждения.) Кемпбелл и Кист [1968] показали, что условия этого типа могут привести к неустойчивости в расчетах уравнения диффузии из-за наличия неограниченных решений у исходного дифференциального уравнения в частных производных, а Кист и Митчелл [1967] обнаружили, что решения уравнений эллиптического типа с такими граничными условиями не всегда можно получить при помощи нестационарного подхода. Какие-либо нелинейные граничные условия, например задание градиента квадрата функции, тоже никем и никогда не использовались.

### 3.3.1. О первостепенной важности численных граничных условий

*Обыкновенное* дифференциальное уравнение первого порядка $df/dx = 0$ определяет решение задачи с точностью до аддитивной постоянной; граничное условие позволяет определить эту *постоянную*. Дифференциальное уравнение *в частных производных* первого порядка $\partial f(x, y)/\partial x = 0$ дает сравнительно мало информации о решении; такому дифференциальному уравнению в частных производных удовлетворяет любая функция $g(y)$, и граничные условия должны определить эту *функцию*. Дифференциальное уравнение $\nabla^2\psi = \zeta$ действительно дает очень мало информации о функции $\psi$. Все многообразие течений как газов, так и жидкостей описывается решениями одних и тех же дифференциальных уравнений в частных производных, уравнений Навье — Стокса. Различные течения (т. е. решения) отличаются только граничными и начальными условиями, а также параметрами течения, такими, как число Рейнольдса Re.

Поэтому не удивительно, что задание численных граничных условий оказывает существенное влияние не только на устойчивость, но и на точность решения конечно-разностного уравнения. Следует удивляться другому: почему важность этих условий не была широко признана в течение многих лет (и, возможно, недооценивается даже в настоящее время). Ричардсон [1910] вполне определенно охарактеризовал важность граничных условий, но в последующие годы в большинстве работ внимание уделялось разностным схемам во внутренних точках. Одной из возможных причин этого было то, что основное внимание тогда уделялось задачам теплопроводности, в которых граничные условия, как правило, просты и однозначны. Другой причиной было отсутствие реальной возможности численных экспериментов с различными граничными условиями

до тех пор, пока в повседневную практику не вошли электронные вычислительные машины [1]).

Первые работы по изучению граничных условий (до расчетов на электронных вычислительных машинах) были выполнены Саусвеллом [1946], Алленом и Саусвеллом [1955], Томом и Апельтом [1961]. После появления ЭВМ одной из первых

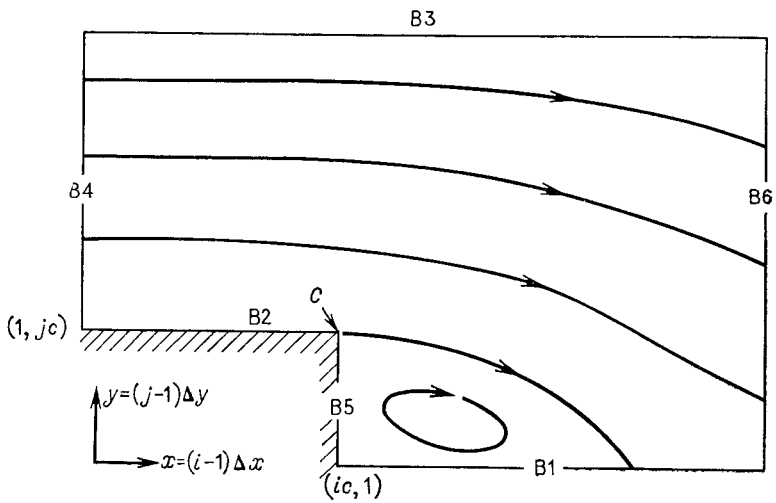



Рис. 3.22. Границы расчетной области в задаче об обтекании обратного уступа. В 1 — осевая линия (линия симметрии), В 2 — наветренная часть твердой поверхности, В 3 — верхняя граница, В 4 — входная граница потока, В 5 — основание уступа, В 6 — выходная граница потока.

работ по изучению различных типов граничных условий на конечной расчетной сетке была работа Томана и Шевчика [1966]. Статьи Чена [1968, 1970] и Моретти [1968б], хотя и часто отражающие противоположные точки зрения, еще раз подчеркнули важность граничных условий. В частности, Чен [1970], проводя численные эксперименты с уравнением Бюргерса, показал, что схемы высших порядков дают менее точные результаты, чем схемы первого порядка при сеточных числах Рейнольдса $\mathrm{Re}_c > 1$, именно из-за граничных условий и что ошибки на границах могут вдвое превышать ошибки аппрок-

[1]) Кавагути [1953] рассчитал на механической настольной вычислительной машине одно-единственное решение задачи об обтекании кругового цилиндра при $\mathrm{Re} = 40$, работая по 20 часов в неделю в течение полутора лет. Вряд ли можно было бы ожидать, чтобы он повторил расчеты для того, чтобы опробовать три различных вида граничных условий в выходном сечении потока, граничные условия первого и второго порядка для вихря на поверхности тела и т. п.

симации во внутренних точках. В этой же работе было отмечено, что существенное различие результатов, полученных Йенсеном [1959] и Гамилецем с соавторами [1967] при решении задачи об обтекании цилиндра вязким потоком, обусловлено именно ошибками на границах и что эти ошибки сохраняются даже при $\Delta x \to 0$. Таким образом, представляется, что граничные условия в некоторых отношениях играют главную роль в вычислительной гидродинамике.

Именно эти аспекты, связанные с постановкой граничных условий в вычислительной гидродинамике, требуют подлинной артистичности специалистов, которых за нее иногда обвиняют в применении знахарских приемов.

Обсудим граничные условия на примере плоской задачи об обтекании прямоугольного обратного уступа, изображенного на рис. 3.22, где представлены все типы границ, присущие составленной из прямоугольников области. (Криволинейные границы и соответствующие сетки будут рассматриваться в гл. 6.) К этому рисунку мы будем постоянно обращаться в этом разделе, а также и в гл. 6. Читателю стоило бы загнуть здесь уголок страницы или положить закладку.

### 3.3.2. Стенка в расчетной сетке первого типа

Твердая стенка, обозначенная на рис. 3.22 через B 2, соответствует наветренной части твердой поверхности, а B 5 — основанию уступа. На расчетной сетке первого типа значения функций $\psi$ и $\zeta$ будут определяться в узлах, расположенных вдоль этих стенок.

Так как линия B 2 — B 5 — B 1 является линией тока [1]), на ней можно принять любое постоянное значение $\psi$ (обычно полагают $\psi = 0$).

Особенно важно определить значения вихря на стенке. Уравнение (2.12) переноса вихря описывает распространение вихря за счет конвекции и диффузии, но вихрь $\zeta$ *зарождается* не во внутренних точках, а на границах, где ставится условие прилипания. Именно диффузия и последующая конвекция этого возникшего на стенке вихря фактически определяет содержание задачи. Некоторые ранее выполненные геофизические расчеты были неверными, так как в них значения $\zeta$ на стенке определялись с помощью экстраполяции, что не имело ничего общего с физикой задачи [2]).

[1]) Если необходимо моделировать проницаемую стенку, например на основании уступа, то скорость $u$ вдоль основания может быть задана в виде $u = f(y)$. Тогда $\psi$ можно определить интегрированием уравнения $\delta\psi/\delta y = f(y)$ вдоль основания от угловой точки $C$; см. замечания в разд. 3.3.6.

[2]) С. А. Пиачек (личное сообщение).

Значение вихря на стенке получается из условия прилипания. В качестве примера рассмотрим границу В 2 и запишем разложение $\psi_{i,\,jc+1}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(i, jc)$:

$$\psi_{i,\,jc+1} = \psi_{i,\,jc} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\Big|_{i,\,jc}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\Big|_{i,\,jc}\Delta y^2 + \\ + \frac{1}{6}\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\Big|_{i,\,jc}\Delta y^3 + O(\Delta y^4). \qquad (3.434)$$

Но $\partial\psi/\partial y|_{i,\,jc} = u_{i,\,jc} = 0$ в силу условия прилипания, а $\partial^2\psi/\partial y^2|_{i,\,jc} = \partial u/\partial y|_{i,\,jc}$; кроме того, $\zeta = \partial u/\partial y - \partial v/\partial x$. Поскольку $v = \text{const}$ (т. е. $v = 0$) вдоль стенки, $\partial v/\partial x|_{i,\,jc} = 0$. Таким образом, $\partial u/\partial y|_{i,\,jc} = \zeta_{i,\,jc}$. Подставляя эти выражения в (3.434) и разрешая относительно $\zeta_{i,\,jc}$ с учетом условия $\psi_{i,\,jc} = 0$, получаем $\zeta_{i,\,jc} = 2\psi_{i,\,jc+1}/\Delta y^2 + O(\Delta y)$. Независимо от ориентации стенки и от значения $\psi$ на границе можно записать

$$\zeta_w = \frac{2(\psi_{w+1} - \psi_w)}{\Delta n^2} + O(\Delta n), \qquad (3.435а)$$

где $\Delta n$ — расстояние по нормали к стенке от ближайшей к стенке узловой точки $w + 1$ до ее проекции $w$ на стенку.

Такое условие первого порядка было впервые предложено в 1928 г. в работе Тома [1928, 1933] и широко используется до настоящего времени. Это условие очень надежно и часто приводит к результатам, достаточно хорошо согласующимся с результатами, полученными при помощи форм высших порядков граничного условия для вихря [1]); см., например, эксперименты Эша, описанные в работе Пирсона [1965а].

Как было указано в гл. 2, альтернативное определение вихря в виде $\zeta' = -\zeta = -\partial u/\partial y + \partial v/\partial x$ не меняет форму уравнения переноса вихря. Но при этом принятый знак «войдет» в расчет переноса вихря через граничные условия, и аналогом соотношения (3.435а) будет

$$\zeta'_w = -\frac{2(\psi_{w+1} - \psi_w)}{\Delta n^2} + O(\Delta n). \qquad (3.435б)$$

Сохраняя в разложении (3.434) члены порядка $\Delta y^3$, Вудс [1954] предложил формулу второго порядка точности для граничного условия для вихря на твердой стенке. Дифференцируя выражение, определяющее вихрь, получаем

$$\frac{\partial\zeta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (3.436)$$

[1]) В самом деле, для профиля Блазиуса в пограничном слое на стенке $\partial^3\psi/\partial y^3 = \partial^2 u/\partial y^2 = 0$; численные расчеты показывают, что в этом случае разностные формулы первого порядка приводят к более точным результатам, чем разностные формулы второго порядка.

Из уравнения неразрывности (2.3) имеем $\partial v/\partial y = -\partial u/\partial x$. Учитывая это и записывая (3.436) на стенке, находим

$$\left.\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right|_w = \left.\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}\right|_w + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_w. \tag{3.437}$$

Второй член $\partial^2 u/\partial x^2|_w$ равен нулю в силу условия прилипания ($u = \text{const} = 0$). Член $\partial\zeta/\partial y|_w$ вычисляется по схеме с разностями назад, имеющей первый порядок точности:

$$\left.\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right|_w = \frac{\zeta_{w+1} - \zeta_w}{\Delta y} + O(\Delta y) = \left.\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}\right|_w. \tag{3.438}$$

Подставив это выражение для $\partial^3\psi/\partial y^3|_w$ в уравнение (3.434) и разрешив относительно $\zeta_w$, получим условие Вудса для вихря на стенке:

$$\zeta_w = \frac{3(\psi_{w+1} - \psi_w)}{\Delta y^2} - \frac{1}{2}\zeta_{w+1} + O(\Delta y^2). \tag{3.439}$$

Условие Вудса с успехом использовал Расселл [1963]; см. также работы Лестера [1961] и Майкла [1966]. Хын и Макано [1966] независимо вывели условие (3.439) и применили его для расчета течений при умеренных числах Re ($\text{Re} \approx 300$); аналогичное условие было получено и автором этой книги. Теоретические расчеты П. Дж. Тейлора [1968] указали на возможную неустойчивость, связанную с этим условием, при больших сеточных числах Рейнольдса. В ходе численного эксперимента Ранчел с соавторами [1969] снова независимо пришли к условию (3.439). Используя итерационные методы для расчета стационарных течений, они (Ранчел с соавторами [1969]) обнаружили, что данная форма граничного условия второго порядка, вероятно, приводит к расходимости, особенно при больших Re и при переменных $\Delta y$.

Формулу второго порядка для $\zeta_w$ в осесимметричном случае оценивали Люгт и Римон [1970], сравнив ее с точным решением задачи об обтекании сплюснутого эллипсоида вращения; к сожалению, это решение пригодно только при $\text{Re} = 0$. Они рассмотрели выражение, включающее нестационарный член $\partial\zeta_w/\partial t$. Записанное через локальный радиус кривизны $r_c$, это выражение имеет следующий вид:

$$\zeta_w = \frac{3\psi_{w+1}/\Delta y^2 - {}^1/_2\zeta_{w+1} + {}^1/_{24}\,\Delta y^2\,\text{Re}\,\partial\zeta_w/\partial t}{1 - \Delta y/(2r_c) + 3\,\Delta y^2/(8r_c^2)} + O(\Delta y^2). \tag{3.440}$$

При $r_c \to \infty$ получается условие, соответствующее обтеканию плоской пластинки и отвечающее условию Вудса (3.439) с добавлением нестационарного члена. Даусон и Маркус [1970] установили, что нестационарный член $\partial\zeta_w/\partial t$ в условии (3.440) «весьма сильно снижает устойчивость и должен быть опущен».

Наиболее часто используемая формула второго порядка точности для граничного условия для вихря была впервые предложена Йенсеном [1959], а позднее Пирсоном [1965а]. Эта формула получается аппроксимацией значений $\psi$ в окрестности стенки полиномом третьего порядка с условием $\partial\psi/\partial y|_w = u_w = 0$ и имеет вид (см. также Брили [1970])

$$\zeta_w = \frac{-7\psi_w + 8\psi_{w+1} - \psi_{w+2}}{2\Delta y^2} + O(\Delta y^2). \qquad (3.441)$$

Эту формулу позже применяли Уилкс и Черчилл [1966] для решения задачи о свободной конвекции при малом числе Грасгофа, но когда Сэмюелс и Черчилл [1967] продолжили эти расчеты, они обнаружили, что решение неустойчиво, и вернулись к условию первого порядка точности (3.435). Вероятно, при бо́льших числах Рейнольдса расчеты Йенсена [1959] также были бы неустойчивы. Расчеты Торранса [1968] и расчеты Бао и Догерти [1969], в которых использовалось условие (3.441), тоже ограничивались умеренными числами Рейнольдса; см. также работы Саусвелла [1946], Париса и Уитекера [1965]. В дальнейшем при сравнении решения осесимметричной задачи о вращающемся цилиндре с точным решением в одномерном случае Бёрдсли [1969] обнаружил, что формула Йенсена (3.441) даже в случае, когда она устойчива, приводит в действительности к менее точным результатам, чем условие первого порядка [1]).

До последнего времени было широко распространено мнение (предрассудок?), что неустойчивость условия (3.441) как-то связана с тем фактом, что в нем используется информация из точки $w+2$, а такие схемы считались обреченными на неудачу. В работе Брили [1970], внесшей в этот вопрос ясность, было доказано, что это мнение неверно. Брили отметил, что представление $\psi$ в виде многочлена при выводе условия (3.441) не согласуется с определением $u = \partial\psi/\partial y$ в точке $w+1$, если пользоваться центральными разностями; требование согласованности здесь приводит к необходимости использовать для определения $u$ следующую специальную формулу (только в точке $w+1$):

$$u_{w+1} = \frac{\delta\psi}{\delta y}\bigg|_{w+1} = \frac{-5\psi_w + 4\psi_{w+1} + \psi_{w+2}}{4\Delta y} + O(\Delta y^2). \qquad (3.442)$$

Если эту формулу применять вместе с условием (3.441), то расчеты, проведенные по неявной схеме метода чередующихся

[1]) Бёрдсли [1969] установил, что наилучшей формулой, совместимой с глобальным сохранением физических величин в осесимметричном случае, является выражение $\zeta_J = (2J-1)\psi_{J-1}/[(J-1/4)\Delta r^2]$, где $r = J\Delta r$ — максимальный радиус. При больших $J$ ($r \to \infty$) это условие переходит в условие (3.435).

направлений, оказываются устойчивыми даже при больших числах Рейнольдса. (Конечно, действительно разумной связи между устойчивостью и «согласованностью» нет, причем наше объяснение неустойчивости по-прежнему не более чем упоминавшийся выше предрассудок. По мнению Брили, мы, возможно, просто заменяем несогласованный предрассудок согласованным.) Брили даже вывел формулу для граничного условия, основанную на интерполяционном многочлене Лагранжа четвертого порядка:

$$\zeta_w = \frac{-85\psi_w + 108\psi_{w+1} - 274\psi_{w+2} + 4\psi_{w+3}}{18\,\Delta y^2} + O(\Delta y^2). \quad (3.443)$$

Для согласованности здесь требуется, чтобы скорости в двух точках вблизи стенки вычислялись по особым формулам

$$u_{w+1} = \frac{-17\psi_w + 9\psi_{w+1} + 9\psi_{w+2} - \psi_{w+3}}{18\,\Delta y^2} + O(\Delta y^2), \quad (3.444а)$$

$$u_{w+2} = \frac{14\psi_w - 36\psi_{w+1} + 18\psi_{w+2} + 4\psi_{w+3}}{18\,\Delta y^2} + O(\Delta y^2), \quad (3.444б)$$

и, кроме того, чтобы член $\partial^2\psi/\partial y^2$ в уравнении Пуассона был представлен в виде

$$\left.\frac{\delta^2\psi}{\delta y^2}\right|_{w+1} = \frac{29\psi_w - 54\psi_{w+1} + 27\psi_{w+2} - 2\psi_{w+3}}{18\,\Delta y^2}, \quad (3.445а)$$

$$\left.\frac{\delta^2\psi}{\delta y^2}\right|_{w+2} = \frac{11\psi_w - 27\psi_{w+2} + 16\psi_{w+3}}{18\,\Delta y^2}. \quad (3.445б)$$

Эти формулы также устойчивы при больших Re. Значение $\zeta_w$, полученное по формуле (3.443), очень мало отличается от значения, полученного по условию Йенсена (3.441), так как полная ошибка аппроксимации при этом не меняется (Брили [1970]). Но в неявной схеме метода чередующихся направлений итерации для $\zeta_w^{n+1}$ (см. разд. 3.1.16) сходятся быстрее, можно проводить расчеты с большими величинами шагов по времени, а суммарное машинное время сокращается вдвое. Однако программа становится сложнее, так как формулы (3.445) при решении уравнения Пуассона с помощью неявной схемы метода чередующихся направлений приводят к появлению членов в узлах, отстоящих от границы более чем на один шаг; таким образом, расщепленные по времени неявные разностные уравнения вдоль $y$ в неявной схеме метода чередующихся направлений не будут трехдиагональными. Для того чтобы исключить эту дополнительную неявность в точках $w+1$ и $w+2$, Брили [1970] применял простую модификацию метода исключения Гаусса. Может оказаться, что условия (3.445) препятствуют сходимости при решении уравнения Пуассона методом после-

довательной верхней релаксации и ограничивают возможность использования многих прямых методов. (Метод расчета распространения вектора ошибки, рассмотренный в разд. 3.2.8, мог использоваться при обходе узловых точек в направлении $x$.)

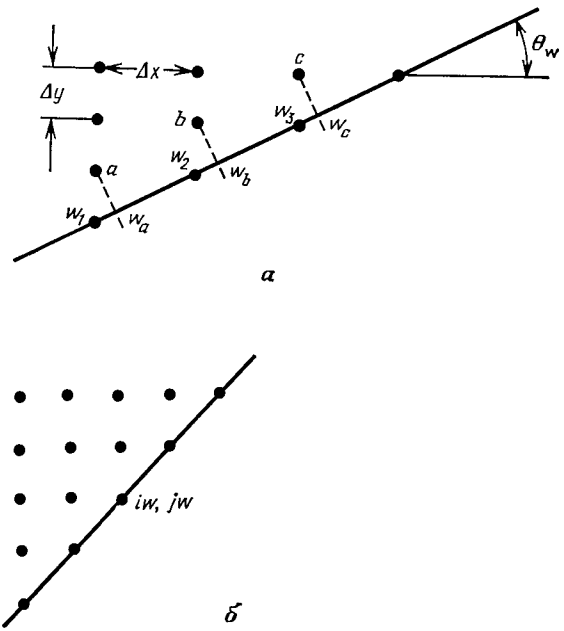



Рис. 3.23. Определение значения вихря на стенке, не параллельной оси $x$. $а$ — произвольный угол наклона стенки $\theta_w$, $б$ — угол наклона стенки $\theta_w = 45°$.

Для случая наклонной стенки, проходящей по диагонали через ячейки сетки, как показано на рис. 3.23, значение вихря на стенке можно найти при помощи формулы первого порядка точности (3.435) следующим образом. Значения на стенке в точках $w_a$, $w_b$, $w_c$, не являющихся узлами сетки, находятся так:

$$\zeta_{w_a} = \frac{2(\psi_a - \psi_{w_a})}{\Delta n^2}, \tag{3.446а}$$

$$\Delta n^2 = (\Delta y \cos\theta_w)^2 = \frac{\Delta x^2}{1+\beta^2}, \tag{3.446б}$$

где $\beta = \Delta x/\Delta y$ — отношение шагов сетки. Аналогично вычисляются $\zeta_{w_b}$ и $\zeta_{w_c}$. Далее интерполяцией вдоль стенки определяются значения $\zeta$ на стенке в узлах $w_1$, $w_2$, $w_3$. Этот способ устойчив и, по-видимому, точен (Кемпбелл и Мюллер [1968]).

В частном случае, когда угол наклона стенки равен 45° ($\beta = 1$), для точки $(iw, jw)$, изображенной на рис. 3.23, *б*, получается

$$\zeta_{iw,\,jw} = \frac{2(\psi_{iw-1,\,jw} + \psi_{iw,\,jw+1} - 2\psi_{iw,\,jw})}{\Delta^2}, \qquad (3.447)$$

где $\Delta = \Delta x = \Delta y$ (О'Лири и Мюллер [1969])[1]). Такой способ оказывается точнее, чем расчет по формуле

$$\zeta_{iw,\,jw} = \frac{\psi_{iw-1,\,jw+1} - \psi_{iw,\,jw}}{\Delta^2}, \qquad (3.448)$$

так как значения $\psi$, входящие в выражение (3.448), берутся в узлах, расположенных дальше от стенки, чем узлы, в которых берутся значения $\psi$, входящие в (3.447).

При рассмотрении уравнений движения вязкой жидкости может быть полезно также моделирование условия скольжения на стенке. В этом случае предполагается, что толщина пограничного слоя меньше, чем величина $\Delta y$. Это условие эвристически можно моделировать с помощью условия скольжения на стенке, как это делается и в разд. 3.3.5. На стенке задается значение $\psi$, а вихрь получается из условия Неймана

$$\zeta_w = \zeta_{w+1}. \qquad (3.449)$$

Справедливость такого подхода не доказана. В этом случае нельзя получить математически «согласованную» систему уравнений, поскольку толщина пограничного слоя не может оставаться меньше $\Delta y$ при $\Delta y \to 0$. Однако представляется, что такое условие обеспечивает разумное физическое приближение.

Следует отметить, что при расчете *течения невязкой жидкости* недостаточно формально положить $1/\mathrm{Re} = 0$ в уравнении переноса вихря; необходимо также применять *граничное условие скольжения*. В действительности последнее более важно, чем простое предположение $1/\mathrm{Re} = 0$. Известно, что течения невязкой жидкости можно достаточно хорошо моделировать даже при таких малых числах Re, как 300, если ставится граничное условие скольжения (Кенцер [1970а]). Из уравнения (2.12) легко видеть, что для течения невязкой жидкости $\zeta$, как и $\psi$, постоянно вдоль любой стационарной линии тока, включая стенку с условием скольжения на ней, поскольку в этом течении $D\zeta/Dt = 0$. Таким образом, для течения невязкой жидкости условие на стенке $\zeta_w = \mathrm{const}$ является корректным граничным условием (константа определяется из условий в набегающем потоке).

---

[1]) Аналогичную процедуру, использующую оператор, построенный на пятиточечном диагональном шаблоне (см. разд. 3.2.10), можно найти в книге Тома и Апельта [1961, с. 126].

Необходимо сделать замечание о возможной переопределенности граничных условий. Для простоты рассмотрим некоторое течение в замкнутой полости, *все* стенки которой неподвижны. Если стенки, параллельные оси $x$, непроницаемы и на них удовлетворяется условие прилипания, то на них $u = 0$ и $v = 0$. Записывая эти условия через функцию тока $\psi$, приходим к следующим соотношениям: $\partial\psi/\partial x = -v = 0$, откуда получаем, что $\psi_w = \text{const}$ (скажем 0) вдоль стенки и $\partial\psi/\partial y = u = 0$ по нормали к стенке. Если рассматривать *одно* уравнение Пуассона $\nabla^2\psi = \zeta$, то каждое из этих двух условий явится достаточным граничным условием для нахождения решения. Очевидно, для уравнения Пуассона нельзя брать оба условия одновременно, так как это делает задачу переопределенной. Но условия $\psi_w = 0$ *не* достаточно для того, чтобы определить *вихрь* $\zeta_w$ на стенке; здесь, как и при выводе формул (3.435а) или (3.439), необходимо также использовать условие $\partial\psi/\partial y|_w = 0$. Поэтому за неимением иного граничного условия для вихря $\zeta$ используется градиентное условие $\partial\psi/\partial y|_w = 0$, а условие $\psi_w = 0$ берется для уравнения Пуассона для $\psi$. Это *единственно* правильное распределение данных условий. (См. также задачу 3.27.)

Несколько смущает то обстоятельство, что численное решение для $\psi$ не удовлетворяет[1]) условию $\delta\psi/\delta y = (\psi_{w+1} - \psi_w)/\Delta y = 0$. Этот парадокс возникает из-за того, что для $\delta\psi/\delta y|_w$ используется формула первого порядка точности, в то время как решение полного уравнения ищется со вторым порядком точности. Если вместо системы двух уравнений второго порядка (для $\psi$ и $\zeta$) рассматривать одно уравнение четвертого порядка для $\psi$, то для конечно-разностного уравнения потребуются и будут удовлетворяться оба условия для $\psi_w$ и $\partial\psi/\partial y|_w$. Таким образом, может показаться, что решение одного уравнения четвертого порядка будет более точным, по крайней мере в отношении граничных условий. Однако производные четвертого порядка по пространственным переменным *в окрестности* стенки необходимо аппроксимировать нецентральными разностями, и тогда полученные разностные формулы не будут соответствовать выражению $\delta\psi/\delta y|_w = (\psi_{w+1} - \psi_w)/\Delta y$; значит, даже при конечно-разностном представлении четвертого порядка опять получается $\psi_{w+1} \neq \psi_w$.

Следует сделать замечание и относительно определения точек отрыва и вторичного присоединения потока к стенке. Легко показать, что в дифференциальных уравнениях $\zeta_w = 0$ как в точке отрыва потока, так и в точке вторичного присоеди-

---

[1]) Израэли [1972] определяет $\zeta_w^{n+1}$ итерационным путем (при помощи нижней релаксации) так, чтобы на каждом временно́м слое выполнялось условие $\delta\psi/\delta n|_w = 0$.

нения. Если известны значения $\zeta_w$, то положение точек, где $\zeta_w = 0$, можно найти интерполяцией. Но такие проинтерполированные значения будут не лучше, чем рассчитанные значения на стенке, а, следовательно, положение точек отрыва и вторичного присоединения потока нельзя определить с большой точностью. Способ определения указанных точек по полученному решению должен, конечно, рассматриваться в любой работе (Лаван с соавторами [1969], Роуч и Мюллер [1970], Шаве и Ричардс [1970]).

В заключение отметим, что рассчитанные величины вихря на стенке можно использовать для определения граничной ошибки, связанной с некоторым нарушением свойства консервативности решения, что может служить для проверки сходимости аппроксимации. (См. задачу 3.32.)

*Упражнение.* Вывести[1]) формулы первого и второго порядка точности для вихря на параллельной оси $x$ стенке, если стенка а) движется с заданной скоростью $u_w = U_w$, $v_w = 0$; б) является проницаемой, причем задана скорость вдува (отсоса) $v_w = V_w$ и $u_w = 0$.

В работе Тейлора [1970] указано, что вдув через стенку может привести к численной неустойчивости.

### 3.3.3. Стенка в других расчетных сетках

В методе Робертса — Вейса (разд. 3.1.19) применяется система из двух сеток, *разнесенных во времени* с шахматным расположением узлов. Аналогичный вид имеют сетки, *разнесенные в пространстве* (*гибридные сетки*), где некоторые переменные определяются на одном наборе узлов, а остальные переменные — на сетке, смещенной по диагонали относительно первой (Харлоу и Фромм [1954]; Фромм [1963]; Уильямс [1969]; см. также разд. 3.7.3). Используются также *сдвинутые* сетки, когда одна сетка сдвинута на половину пространственного шага относительно другой, причем сдвинута вдоль координатной линии, а не вдоль диагонали. При сетках всех этих трех видов вихрь $\zeta$ определяется в узле, отстоящем на $\Delta n/2$ от стенки, как показано на рис. 3.24, *а*.

Для расчета вихря $\zeta$ не рекомендуется брать сетки второго типа. При постановке задачи здесь требуется некоторая осторожность, иначе несогласованное вычисление $\zeta_w$ приведет к тому, что стенка будет эффективно смещена на $\Delta n/2$ (Фромм [1967]). Даже если вычисления проводятся надлежащим обра-

[1]) Заметим, что наличие движущейся стенки приводит к появлению дополнительного члена $2U_w/\Delta n$ в формуле первого порядка для $\zeta_w$ и дополнительного члена $3U_w/\Delta n$ в формуле второго порядка.

зом, сетка второго типа, как будет показано ниже, приводит к снижению точности для $\zeta$.

Условие прилипания должно выполняться на стенке, а не в ее окрестности. На рис. 3.24 вихрь в точке $(i, ja)$, соседней со стенкой, рассчитывается по уравнению переноса вихря. При

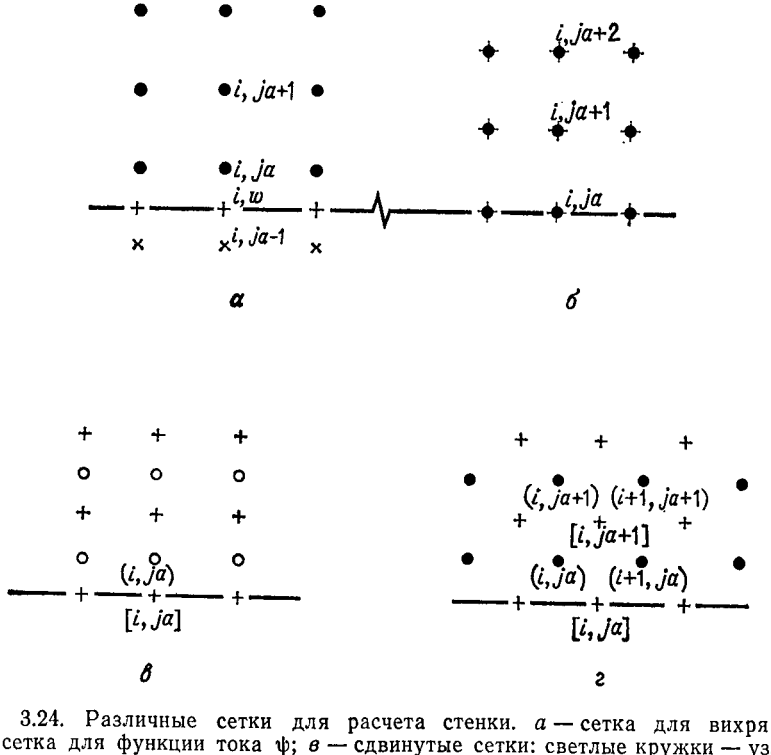



Рис. 3.24. Различные сетки для расчета стенки. *а* — сетка для вихря $\zeta$; *б* — сетка для функции тока $\psi$; *в* — сдвинутые сетки: светлые кружки — узлы сетки для вихря $\zeta$, крестики — узлы сетки для функции тока $\psi$; *г* — гибридная сетка с шахматным расположением узлов: темные кружки — узлы сетки для вихря $\zeta$, крестики — узлы сетки для функции $\psi$.

помощи формулы (3.435), где $\Delta n$ заменяется на $\Delta n/2$, в точке $w$, не являющейся узловой точкой, находится значение вихря на стенке $\zeta_w$ с первым порядком точности:

$$\zeta_{i,\, ja-1/2} \equiv \zeta_{i,\, w} = \frac{2(\psi_{i,\, ja} - \psi_w)}{(\Delta n/2)^2} + O(\Delta n/2). \qquad (3.450)$$

(Можно также брать и формулу второго порядка точности.)

Для того чтобы получить конечно-разностное представление для производных в точке $(i, ja)$, смежной со стенкой, необходимо взять какую-либо схему с несимметричными разностями. Эта необходимость приводит к снижению точности. Одним из

возможных способов определения значений в промежуточной точке $(i, ja + 1/2)$ является следующий:

$$\zeta_{i,\ ja+1/2} = 1/2\,[\zeta_{i,\ ja+1} + \zeta_{i,\ ja}], \tag{3.451а}$$

$$(v\zeta)_{i,\ ja+1/2} = 1/2\,[(v\zeta)_{i,\ ja+1} + (v\zeta)_{i,\ ja}]. \tag{3.451б}$$

Затем обычные пространственные разности по $y$ в уравнении переноса вихря в точке $(i, ja)$ заменяются разностями значений в этих полуцелых точках:

$$\left.\frac{\delta\,(v\zeta)}{\delta y}\right|_{i,\ ja} = \frac{(v\zeta)_{i,\ ja+1/2} - (v\zeta)_{i,\ w}}{\Delta y} = \frac{(v\zeta)_{i,\ ja+1/2}}{\Delta y}, \tag{3.452}$$

$$\left.\frac{\delta^2\zeta}{\delta y^2}\right|_{i,\ ja} = \frac{\zeta_{i,\ ja+1/2} - 2\zeta_{i,\ ja} + \zeta_{i,\ w}}{(\Delta y/2)^2}. \tag{3.453}$$

Легко показать (задачи 3.24, 3.25), что определение значений $(v\zeta)_{i,\ ja+1/2}$ и $\zeta_{i,\ ja+1/2}$ в полуцелых точках, как это делается в формулах (3.451), не согласуется с использованием центральных разностей в целых узлах пространственной сетки; для первых производных это не вносит ошибки, но выражение (3.453) снижает порядок точности до первого. Действительно, для простой одномерной задачи, когда в уравнение входит только член со второй производной, легко показать (задача 3.25), что сетка второго типа приводит на стенке к ошибке, связанной с *нарушением ограниченности решения*; в гидродинамических задачах эта ошибка, связанная со свойствами схемы, могла бы привести к неправильному указанию на отрыв потока.

Определяя фиктивные значения $v$ и $\zeta$ в узлах, обозначенных на рис. 3.24, *а* крестиками и расположенных *внутри* твердой стенки, можно добиться известных удобств в смысле программирования и создать иллюзию второго порядка точности. Эти значения $\zeta$ в узлах также размещены в общем двухиндексном массиве, отведенном для $\zeta$ и обозначенном, скажем, через $Z(I, J)$. Например, если стенка расположена на нижнем крае сетки, то элементы $Z(I, 1)$ соответствуют значениям $\zeta$ в узлах, обозначенных крестиками и находящихся внутри стенки, а элементы $Z(I, 2)$ — значениям $\zeta_{i,\ ja}$. Значения в узлах сетки, обозначенных крестиками, должны определяться после каждого вычислительного цикла для $\zeta$ во внутренних точках так, чтобы удовлетворить надлежащему граничному условию в точках $(i, w)$; при этом в точках $(i, ja)$ используются такие же уравнения, как и в обычных внутренних точках. Этот способ расчета удобнее, но ограничен первым порядком точности. Поэтому применение сеток второго типа для расчета вихря ни в коем случае не рекомендуется.

Если сетку второго типа все-таки использовать для расчета вихря, то функцию тока определенно не следует рассчитывать на такой сетке. Условие прилипания $u_w = (\delta\psi/\delta y)_w = 0$ может быть сведено к условию нулевого градиента $\psi_{i,\,ja-1} = \psi_{i,\,ja}$. При этом возникает необходимость решать уравнение Пуассона с граничными условиями Неймана, что снижает скорость сходимости итерационного процесса. Еще важнее то обстоятельство, что этот прием не дает правильного значения $\psi$ на стенке. Если такой прием дает значение $\psi_w = 0$, то это означает, что $\psi_{i,\,ja} = 0$ и в точках, расположенных на расстоянии $\Delta n/2$ над стенкой. В результате над стенкой как будто появляется неподвижный слой жидкости толщиной $\Delta n/2$. Таким образом, стенка окажется эффективно смещенной вверх на расстояние $\Delta n/2$ при расчете $\psi$, но не при решении уравнений для $\zeta$, что, очевидно, приводит к несогласованности.

Основная трудность заключается в том, что при решении уравнения Пуассона нельзя одновременно использовать *оба* граничных условия $\psi_w = 0$ и $u_w = \partial\psi/\partial y\,|_w = 0$ вдоль одной и той же границы, поскольку при этом задача становится переопределенной, так как для ее решения достаточно либо условия Дирихле, либо условия Неймана. Для уравнения Пуассона следует брать условие $\psi = 0$. (См. также разд. 3.3.2 и задачу 3.27.)

Функцию $\psi$ необходимо рассчитывать на сетке первого типа, которая, как показано на рис. 3.24, сдвинута на $\Delta y/2$ относительно сетки для $\zeta$. Скорость конвекции вихря $\zeta$ рассматривается в узлах $\zeta$-сетки и соответственно находится по значениям $\psi$ в узлах $\psi$-сетки следующим образом:

$$u_{i,\,j} = \frac{\psi_{i,\,j+1} - \psi_{i,\,j}}{\Delta y} \tag{3.454}$$

(обозначения те же, что на рис. 3.24). Можно сдвинуть $\psi$-сетку относительно $\zeta$-сетки и в направлении $x$. Оказывается, что такой прием может даже привести к уменьшению ошибки аппроксимации при вычислении скорости, но при этом в решение уравнения Пуассона $\nabla^2\psi = \zeta$ вносится дополнительная ошибка. Для решения уравнения Пуассона требуются значения $\zeta$ в узлах $\psi$-сетки; эти значения мы обозначим через $\zeta^+$. Учитывая обозначения на рис. 3.24 (которые могут быть выбраны и иначе), значения $\zeta^+$ можно найти осреднением значений $\zeta$ в узлах $\zeta$-сетки; эти значения мы обозначим через $\zeta^*$. Тогда

$$\zeta^+_{i,\,j} = {}^1/_4\left(\zeta^*_{i,\,j} + \zeta^*_{i+1,\,j} + \zeta^*_{i,\,j+1} + \zeta^*_{i+1,\,j+1}\right). \tag{3.455}$$

Составляющие вектора скорости в узлах $\zeta$-сетки, обозначенные через $u^*$ и $v^*$, находятся по значениям $\psi^+$ в узлах $\psi$-сетки при

помощи следующих разностных формул:

$$u^{\bullet}_{i,\,j}=\frac{1}{2}\left[\frac{\psi^{+}_{i,\,j+1}-\psi^{+}_{i,\,j}}{\Delta y}+\frac{\psi^{+}_{i-1,\,j+1}-\psi^{+}_{i-1,\,j}}{\Delta y}\right], \qquad (3.456а)$$

$$v^{\bullet}_{i,\,j}=-\frac{1}{2}\left[\frac{\psi^{+}_{i,\,j+1}-\psi^{+}_{i-1,\,j+1}}{\Delta x}+\frac{\psi^{+}_{i,\,j}-\psi^{+}_{i-1,\,j}}{\Delta x}\right]. \qquad (3.456б)$$

Условия на входной и на выходной границах потока также могут несколько усложняться. Например, при использовании сетки с шахматным расположением узлов значения $\psi$ на входе должны быть заданы на прямой, отстоящей на расстояние $\Delta x/2$ от прямой, на которой заданы значения $\zeta$ на входе, что снова приводит к несогласованности.

Сетка первого типа, очевидно, гораздо удобнее в применении, а также приводит к большей точности, и поэтому обычно рекомендуется использовать именно ее. Использование сетки второго типа для расчета $\zeta$ и сетки первого типа (сдвинутой или с шахматным расположением узлов) для расчета $\psi$ обладает тем преимуществом, что здесь не требуется специального исследования узловой точки $C$, расположенной в вершине выпуклого угла (см. рис. 3.22 в разд. 3.3.2.а). Но это преимущество минимально, и поэтому для расчетов на стенке рекомендуется брать исключительно сетку первого типа.

### 3.3.4. Линия симметрии

Если центральная граница B 1 на рис. 3.22 является разделяющей твердой пластиной, то на ней ставятся такие же граничные условия, как и на твердой стенке с условием прилипания. Если считать, что на этом рисунке представлена только верхняя полуплоскость симметричного течения около плоского уступа, то на прямой B 1 по-прежнему необходимо поставить условие $\psi = 0$, имеющее смысл только для докритических решений задачи о следе[1]). В этом случае прямая B 1 играет роль разделяющей пластины с условием скольжения, а граничное условие для вихря имеет очень простой вид. На всей центральной линии $v = 0$, и поэтому $\partial v/\partial x = 0$. Далее, поскольку ско-

[1]) В случае закритических режимов, когда возможно появление осцилляций и асимметрии в следе, необходимо рассматривать полную область, вводя кроме верхней границы еще и нижнюю границу (которая симметрична границе B 3 относительно прямой B 1; см. рис. 3.22). При этом точки сетки, лежащие на центральной линии, будут представлять собой регулярные внутренние точки.

Для исследования гидродинамической устойчивости может представлять интерес расчет закритического режима; в этом случае условие симметрии накладывается даже при закритических значениях Re.

рость $u$ симметрична относительно центральной линии; здесь $\partial u/\partial y = 0$. Таким образом,

$$\zeta_{\text{ц. л.}} = 0. \tag{3.457}$$

Наряду с условием $\psi = 0$ нельзя использовать условия симметрии для производных от $\psi$, так как это переопределило бы задачу для уравнения Пуассона.

В случае осесимметричного течения в цилиндрической системе координат имеем $\zeta = \nabla \times \mathbf{V}$ и условие (3.457) по-прежнему выполняется. Но уравнения в этом случае удобнее записать для $\zeta' = \zeta/r$, где $r$ —локальный радиус, причем на центральной линии $r = 0$. Торранс [1968] указал, что на центральной линии величина $\zeta'$ хотя и ограничена, но не равна нулю.

Ранчел и Вольфштейн [1969], рассчитывая струю, ударяющую о стенку под прямым углом, брали условие симметрии $\zeta = 0$ вдоль прямой, образующей угол 45° со стенкой и с центральной линией струи[1]). Строгая симметрия в этом случае имеет место только для потенциального течения, но в этой работе она принималась в качестве приближения для течения при больших значениях Re.

## 3.3.5. Верхняя граница

Верхняя граница (граница В 3 на рис. 3.22) также представляет большой интерес при постановке задачи. Конечно, можно выбрать такие физические задачи, в которых граничные условия на верхней границе очевидны; например, в задаче о течении в несимметричном расширяющемся канале граница В 3 будет твердой стенкой с условием прилипания и на ней будут применимы формулы для расчета вихря, полученные в разд. 3.3.2. Величина $\psi$ на границе В 3 постоянна и может быть найдена при помощи интегрирования профиля скорости $u$ во входном сечении В 4 канала (см. разд. 3.3.6). Этой задачей занимался Кавагути [1965]. Если же рис. 3.22 рассматривать как нижнюю полуплоскость задачи о течении в симметричном расширяющемся канале, то в силу условий симметрии (как и в случае разделяющей пластины с условием скольжения на центральной линии в разд. 3.3.4) на границе В 3 будем иметь $\zeta = 0$. Величина $\psi$ в этом случае также получается интегрированием профиля скорости $u$ на границе В 4. Если же условия симметрии ставятся и на В 1, и на В 3, то это будет соответствовать элементарной части поля течения при обтекании бесконечного ряда

[1]) Заметим, что вихрь $\zeta$ определяется векторным оператором $\zeta = \pm \nabla \times \mathbf{V}$ и поэтому инвариантен по отношению к повороту системы координат. Таким образом, равенство $\zeta = 0$ будет справедливо вдоль *любой* линии симметрии независимо от ее ориентации.

прямоугольных тел (практически они могут представлять собой, например, ряд ребер теплообменника).

Если рассматривается течение в неограниченной по $y$ области, то на В 3 надо поставить условие *отсутствия* границы как при «свободном полете»; в этом случае выбор граничных условий уже не столь очевиден.

Первое, что приходит на ум, это моделировать В 3 стенкой аэродинамической трубы с условием прилипания. Из экспериментов в аэродинамической трубе известно, что с увеличением расстояния между стенками трубы уменьшается «блокировка» трубы, а течение вблизи тела будет соответствовать течению при свободном полете тела. Однако ограниченность времени и оперативной памяти вычислительных машин приводит к ограничению числа точек сетки, а требования точности ограничивают размер шага $\Delta y$ пространственной сетки, поэтому существует ограничение на размер области, аналогичный размеру рабочей части аэродинамической трубы. (Сетки с переменным шагом по пространственным переменным и преобразования координат для задач такого типа будут рассмотрены в гл. 6. Даже при использовании таких приемов расчет граничных условий, описанных здесь, остается справедливым.)

Можно добиться существенного улучшения, рассматривая границу В 3 как *движущуюся* стенку трубы; так делается в работах Фромма [1963] и Фромма и Харлоу [1963]. В этих работах на границе ставились условия $v = 0$ и $u = U_0$, где $U_0$ можно интерпретировать как скорость невозмущенного потока [1]). Тогда граничные условия для системы уравнений, определяющих $\psi$ и $\zeta$, будут условиями для движущейся стенки с условием прилипания на ней, т. е. $\psi = \text{const}$, а $\zeta$ (см. предыдущее упражнение) находится по формулам

$$\zeta_{i,J} = \frac{2(\psi_{i,J-1} - \psi_{i,J} + U_0 \Delta y)}{\Delta y^2} + O(\Delta y) \qquad (3.458)$$

или

$$\zeta_{i,J} = \frac{3(\psi_{i,J-1} - \psi_{i,J} + U_0 \Delta y)}{\Delta y^2} - \frac{1}{2}\zeta_{i,J-1} + O(\Delta y^2). \qquad (3.459)$$

Формулу (3.458) с успехом применяли Кемпбелл и Мюллер [1968].

Другим усовершенствованием при моделировании физической стенки аэродинамической трубы является применение модели «стенка *без трения*». Значение $\psi$ (В 3) в этом случае остается

[1]) Продолжая аналогию с аэродинамической трубой, заметим, что практически движение стенки трубы с постоянной скоростью реализуется при помощи движущейся по роликам ленты; при испытании автомобилей в аэродинамической трубе это используется для моделирования влияния близости дорожного полотна.

постоянным, а вихрь определяется при помощи концепции «зеркального отражения», применяемого для определения поправок на блокировку аэродинамической трубы. В этом случае симметрия приводит к условию $\zeta(\text{В}\,3) = 0$. Это граничное условие принималось в работе Йенсена [1959] для решения осесимметричной задачи о течении в круглой трубе. Томан и Шевчик [1966] использовали подобный подход, оказавшийся, однако, менее ограничительным, поскольку рассмотрение граничного условия проводилось на *соседней* граничной линии. Здесь ставились условия, как на бесконечно удаленной границе, т. е. задавалось $\zeta = 0$ при $\partial\psi/\partial y \equiv u = U_0$ и $\partial\psi/\partial x \equiv -v = 0$. Условие Неймана вдоль В 3 с учетом $U_0$ дает

$$\psi_{i,J} = \psi_{i,J-1} + U_0 \Delta y. \tag{3.460}$$

Если считать, что граница В 3 *совпадает* с линией $j = J$, то условие (3.460) имеет только первый порядок точности. Но принимая, что В 3 лежит между линиями $j = J$ и $j = J - 1$, и обозначая ее через $(i, J - {}^1/_2)$, мы обеспечиваем для условия (3.460) второй порядок точности [1]). Этот момент часто понимают неправильно. В действительности вопрос заключается не в том, какова будет ошибка аппроксимации в формуле (3.460), если положить $u = U_0$ вдоль В 3, а в том, насколько хорошо условие $u = U_0$ вдоль В 3 аппроксимирует условие «свободного полета», которое мы хотим смоделировать. Условие $v = 0$ вдоль В 3 означает $\partial\psi/\partial x = 0$ вдоль В 3. Если граница В 3 находится на линии $(i, J)$, то

$$\psi(\text{В}\,3) = \psi_{i,J} = \psi_{1,J}; \tag{3.461}$$

если же В 3 находится на линии $(i, J - {}^1/_2)$, то, учитывая формулу (3.460), получаем

$$\psi_{i,J} = \psi_{1,J-1} + U_0 \Delta y. \tag{3.462}$$

В этих формулах $\psi_{1,J}$ и $\psi_{1,J-1}$ суть значения, соответствующие верхним точкам левой *входной* границы потока В 4 на рис. 3.22. Если значения $\psi$ полностью заданы на входе потока, то такая постановка эквивалентна тому, что на границе В 3 стенки трубы не обладают трением. Если же значения $\psi$ на входе не заданы, а определяются в процессе вычисления, как это сделано в работе Томана и Шевчика [1966] (см. разд. 3.3.6), то такая постановка менее ограничительна. При ней поток массы через «рабочую часть трубы» не задается заранее, и хотя верхняя граница В 3, «крышка», по-прежнему является линией тока

[1]) Другой прием заключается в том, чтобы поместить В 3 на линии $j = J - 1$, а на линии $j = J$ ввести «фиктивные» точки таким образом, чтобы вдоль В 3 получить $U_0$ из равенства $\psi_{i,J} = \psi_{i,J-2} + 2U_0\Delta y$.

с постоянными значениями $\psi$, само это значение $\psi$ не задается, а определяется в процессе счета.

Роуч и Мюллер [1970] моделировали стенку трубы, фиксируя $\zeta$ на входной границе и считая, что В 3 является линией тока, но модельное условие отсутствия трения на «крышке» для $\zeta$ получалось менее ограничительным способом. Желательно, чтобы «крышка» не обладала трением, т. е. допускала скольжение, хотя в то же время на самое жидкость вблизи «крышки» должно действовать трение. Заметим, что если на «крышке» $v = 0$, то на ней $\partial v/\partial x = 0$ и $\zeta = \partial u/\partial y$. Таким образом, условие $\zeta = 0$ приводит к условию $\partial u/\partial y = 0$.

Делая следующий шаг к условиям свободного движения на верхней границе, полагаем

$$\zeta(\text{В } 3) = \zeta_{I,\,J} = \zeta_{I,\,J-1}. \tag{3.463}$$

Для интерпретации этого условия в терминах скорости заметим, что формула (3.461) дает $\partial v/\partial x|_J = 0$. Если граница В 3 расположена достаточно далеко от стенки В 2, так что $u(\text{В } 3)$ меняется почти линейно по $x$ (т. е. если $\partial^2 u/\partial x^2|_J = 0 + O(\Delta y)$), то можно показать, что $\partial v/\partial x|_{J-1} = 0 + O(\Delta y^2)$ и условие (3.463) приблизительно эквивалентно линейной экстраполяции составляющей скорости $u$ на «крышку» [1]). Экстраполяции высших порядков для $\zeta$ приводят к быстрому развитию неустойчивости или к смещению решения.

Последний способ лучше моделирует условие «свободного полета», чем способ с «движущейся стенкой трубы» (формулы (3.458) и (3.459)), хотя привести достаточные основания в общем случае довольно трудно. Но способ с «движущейся стенкой» обладает тем достоинством, что правильно моделирует некоторую *физическую* задачу. Единственный остающийся открытым вопрос (помимо вопроса об ошибках аппроксимации) заключается в том, насколько хорошо эта физическая задача аппроксимирует интересующую нас задачу, т. е. случай «свободного полета». Последний из рассмотренных способов, однако, менее ограничителен.

Существуют и другие способы моделирования условия «свободного полета», фактически допускающие протекание через верхнюю границу В 3. Для течения при достаточно больших Re можно использовать аналитическое решение, соответствующее потенциальному течению, с тем чтобы фиксировать $\psi$ вдоль границы В 3. Том [1933] для построения граничных условий

[1]) В работе Томана и Шевчика [1966] при решении задачи об обтекании кругового цилиндра более жесткое условие $\zeta = 0$ было необходимо только в случае вращающегося цилиндра. Если же вращение отсутствовало, то вполне удовлетворительные результаты получались и при условии $\partial^2 u/\partial y^2 \approx 0$. (Личное сообщение.)

брал графическое решение о потенциальном обтекании цилиндра [1]). В течениях при малых Re для задания $\psi$ и $\zeta$ вдоль В 3 можно исходить из решения Стокса, а при бо́льших Re для этих целей подходит решение Озеена. Но предпочтительнее брать градиентные условия по этим решениям; градиентные условия не столь жестки, а ошибки при этом склонны к затуханию (Чен [1970]). Эти способы, по-видимому, не перспективны при моделировании задач, подобных задаче об обтекании обратного уступа, в которых влияние области отрывного течения преобладает над эффектом отклонения потока от прямолинейного и для которых нет удобных решений ни при каких числах Рейнольдса.

Брили [1970] решил задачу об отрыве пограничного слоя на плоской пластинке, задавая скорость $u$ на границе В 3 условием линейно замедленного течения Хоуарта

$$u = U_0(x) = a + bx \tag{3.464}$$

до некоторого $x_1$, такого, что $x(\text{отрыва}) < x_1 < -a/b$, и выбирая далее $u = \text{const}$ при $x \geqslant x_1$. Помимо выполнения условия $\zeta = 0$ на границе В 3 такое задание $u$ приводит к отрыву пограничного слоя на В 1 и его вторичному присоединению. Данный способ допускает протекание через границу В 3 и дает устойчивость при расчетах. Он также обладает тем достоинством, что имеется неавтомодельное точное решение для пограничного слоя, с которым можно сравнивать выражение (3.464) вплоть до отрыва потока.

Бао и Догерти [1969] брали вдоль границы В 3 условия $\partial\zeta/\partial y = 0$ и $\partial^2\psi/\partial y^2 = 0$. Как будет показано в разд. 3.3.7, достаточность этих условий зависит от вида входной и выходной границ потока.

В некоторых метеорологических задачах воздействие ветра на поверхность жидкости представляется тем, что на некой недеформируемой поверхности ставится условие $\psi(\text{В 3}) = \text{const}$ и задается постоянное «ветровое напряжение», т. е. задается $\zeta(\text{В 3}) = \text{const}$ (см. Феста [1970]).

### 3.3.6. Условия на входной границе потока

Граничные условия на входной границе потока В 4 (рис. 3.22) нельзя представить единственным образом, поскольку они будут меняться в зависимости от физических условий вверх по потоку от рассматриваемой границы и зависят от решения

[1]) Графические или численные решения для такого потенциального течения, по-видимому, предпочтительнее, чем простое аналитическое решение для обтекания цилиндра, которое плохо согласуется с конечно-разностными решениями.

в исследуемой области. До появления работы Томана и Шевчика [1966] все авторы полностью задавали граничные условия на входной границе потока. Например, Кавагути [1965] для того, чтобы фиксировать на этой границе как $\psi$, так и $\zeta$ при решении задачи о течении во внезапно расширяющемся канале, брал решение для полностью развитого течения Пуазейля. Том [1933] ставил условия потенциального потока для решения задачи о поперечном обтекании цилиндра. Бреннен [1968] применял решение о потенциальном течении для того, чтобы задать на входной границе градиент $\psi$, а не самое функцию $\psi$. Этот менее ограничительный способ является предпочтительным. Фромм [1963, 1967], Харлоу и Фромм [1963] и Катсанис [1967] задавали на входной границе равномерный поток со скоростью $u(1, j)$ и полагали $v(1, j) = 0$. Бао и Догерти [1969] задавали $\zeta = 0$ и $\partial\psi/\partial y = U_0$, фиксируя $\psi$. Гринспэн [1969б] фиксировал $\psi$ и полагал $\partial v/\partial x = 0$, что дает $\zeta = \partial^2\psi/\partial y^2$. Как бы ни была ограничительна эллиптическая природа уравнений, совсем не очевидно, что следует полностью задавать граничные условия на входе, но в то же время *что-то* должно быть задано. Даже фон Нейман (Чарни с соавторами [1950]) смог привести лишь эвристические аргументы в пользу того, что на входной границе достаточно задавать только величину $\zeta$.

Томан и Шевчик [1966] ставили менее жесткие условия на входной границе перед цилиндром. Они потребовали, чтобы $v(1, j) = 0$, что приводит к условию

$$\psi_{1,j} = \psi_{2,j}. \tag{3.465}$$

Это условие дает возможность находить $u(1, j)$ в процессе вычислений. В постановке этих авторов на верхней границе В 3 задается $u = U_0$, а $\psi$(В 3) также получается в результате расчета. При использовании условия (3.465) влияние вверх по потоку сказывается даже на входной границе.

При изучении задач, подобных задаче о течении около обратного уступа (рис. 3.22), влияние вязкости важно на входной границе, поэтому желательно фиксировать $u_{1,j}$, а $v_{1,j}$ дать возможность развиваться свободно. Роуч и Мюллер [1970] задавали $\psi_{1,j}$ при помощи решения уравнений пограничного слоя, фиксируя таким образом $\partial\psi/\partial y|_{1,j} = u_{1,j}$. Это также означает, что фиксировалась производная $\partial^2\psi/\partial y^2|_{1,j} = \partial u/\partial y|_{1,j}$, являющаяся первым членом в выражении для вихря $\zeta_{1,j} = \partial u/\partial y|_{1,j} - \partial v/\partial x|_{1,j}$. Второй член также можно было задать при помощи решения для пограничного слоя, но вместо этого авторы брали менее жесткое условие. Оказалось, что лучше всего получать эту величину из условия

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{1,j} = 0, \tag{3.466}$$

откуда

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{1,j} = \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{2,j} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{2,j} = -\left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right|_{2,j}, \qquad (3.467)$$

или окончательно

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{1,j} = -\frac{\psi_{1,j} + \psi_{3,j} - 2\psi_{2,j}}{\Delta x^2}. \qquad (3.468)$$

Таким образом, на входной границе потока фиксируются $\psi$ и $\partial u/\partial y$, в то время как величина $\zeta = \partial u/\partial y - \partial v/\partial x$ находится по значению $\partial u/\partial y$ на входе и при помощи уравнения (3.486).

Делались попытки использовать даже более «мягкие» условия, а именно получать величину $\partial v/\partial x|_{1,j}$ линейной экстраполяцией вверх по потоку из внутренних точек или экстраполяцией Адамса — Бэшфорта. Такой способ при больших значениях Re оказался приемлемым, но неэффективным, при малых же Re он приводил к «блужданию» решения.

Одной из удобных форм задания $u(y)$ на входной границе является использование для этой величины (Роуч и Мюллер [1970]) однопараметрического семейства профилей Польгаузена (см. Шлихтинг [1968]). Такой профиль, описываемый многочленом четвертого порядка, получается в результате интегрирования уравнений пограничного слоя. При этом параметр Польгаузена $\Lambda$ представляет собой безразмерный градиент давления, а координата $\eta$ определяется как отношение $y/\delta$, где $\delta$ — толщина пограничного слоя. Профиль $u$ имеет следующий вид:

$$u(\text{B } 4) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 + {}^1/_6\Lambda(\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4). \qquad (3.469)$$

Можно также брать профиль Блазиуса или профили Фолкнера — Скэн (Шлихтинг [1968]).

Возможны два способа задания дискретизированных граничных условий во входном сечении потока. В первом способе берутся дискретные значения $\psi$, которые соответствуют решению дифференциальных уравнений во входном сечении. Эти значения получаются при помощи уравнения (3.469) вычислением интеграла, например, по формуле Симпсона:

$$\psi_{1,j} = \int_0^{y_j} u(\text{B } 4)\, dy. \qquad (3.470)$$

Однако если затем численно продифференцировать $\psi_{1,j}$, чтобы найти $u_{1,j}$, то полученные дискретные величины $u(1,j)$ не будут соответствовать решению $u(\text{B } 4)$ дифференциальных уравнений на границе B 4. Второй способ заключается в дискретизации решения $u(\text{B } 4)$ и последующем определении $\psi_{1,j}$ таким образом, чтобы это было совместимо с принятым конечно-разност-

ным представлением для $u_{1,j}$, например

$$u_{1,j} = \frac{\psi_{1,j+1} - \psi_{1,j-1}}{2\Delta y}. \tag{3.471}$$

Тогда будем иметь

$$\psi_{1,jc} = 0, \tag{3.472а}$$

$$\psi_{1,jc+1} = 2u_{1,jc+1}\Delta y, \tag{3.472б}$$

$$\psi_{1,j} = 2u_{1,j-1}\Delta y + \psi_{1,j-2}. \tag{3.472в}$$

При втором способе получаются правильные величины скоростей, но в результате дискретизации вносится ошибка в величины $\psi_{1,j}$. Очевидно, что оба эти способа сходятся при $\Delta y \to 0$. Поскольку наибольшее влияние на динамику течения оказывает $u$, а не $\psi$, второй способ, заключающийся в задании во входном сечении потока профиля для $u$ при допущении ошибок в величинах $\psi$, кажется предпочтительнее.

Заметим, что ошибка в $\psi$, обусловленная дискретизацией, приводит к возникновению ошибки при вычислении толщины вытеснения $\delta^*$ (Шлихтинг [1968]), если последнюю определять по формуле

$$\delta^* = \lim_{y\to\infty}\left[y - \frac{\psi(y)}{u(y)}\right]. \tag{3.473}$$

Эта величина обычно используется для того, чтобы приближенно определить положение границы пограничного слоя, отмечаемой индексом $e$:

$$\delta^* \approx y_e - \frac{\psi_e}{u_e}. \tag{3.474}$$

Чтобы получить результаты, согласующиеся с дискретными условиями на входной границе, необходимо находить $\delta^*$ путем численного интегрирования (интегрирование известной функции) по формуле трапеций. Поскольку скорость $u$ безразмерна, $u = \bar{u}/\bar{U}_0$, величина $\delta^*$ будет определяться интегралом

$$\delta^* = \int_0^{y_e} (1 - u)\, dy. \tag{3.475}$$

Для соответствия всего численного решения результатам эксперимента необходимо, чтобы имело место соответствие граничных условий во входном сечении потока (см. Мюллер и О'Лири [1970], Феннинг и Мюллер [1971], Шавит и Лаван [1971]).

### 3.3.7. Условия на выходной границе потока

Определение значений $\psi$ и $\zeta$ на выходной границе B 6 (рис. 3.22) является одной из наиболее интересных задач о вычислительных граничных условиях. Необходимо каким-то обра-

зом пренебречь деталями течения далеко вниз по потоку и при этом обеспечить получение реального решения в области вверх по потоку от этой границы. Опять же обратимся к эксперименту в аэродинамической трубе; если протяженность «рабочей части» достаточно велика, то течение в области далеко вниз по потоку не столь важно. Тем не менее опыт проведения расчетов показывает, что неустойчивость, зарождающаяся на выходной границе, может распространяться вверх по потоку и искажать решение. Наша цель заключается в постановке условий, дающих максимально допустимую свободу потока на границе В 6 и в тоже время обеспечивающих решение задачи.

Наиболее надежный с точки зрения устойчивости способ основан на полном задании условий на выходной границе. Том [1933], а также Аллен и Саусвелл [1955], Майкл [1966], Сон и Ханратти [1969], Гамилец и Рааль [1969] брали условия из решения, соответствующего потенциальному течению. Катсанис [1967] задавал на выходе (а также и на входе) равномерный поток с $u = \text{const}$ и $v = 0$. Очевидно, такие условия непригодны для отрывных течений или для любых течений с вязким следом. Для течений при малых Re можно также взять решение Стокса или решение Озеена для дальнего следа, как это сделал Варапаев [1968].

Общая идея постановки граничных условий, отвечающих бесконечности на наиболее удаленной границе разностной сетки, была предложена Ричардсоном [1910]. Кавагути [1965], Фридман [1970], а также Ли и Фын [1970] в выходном сечении брали, например, профиль Пуазейля. Заметим, что асимптотическое решение, используемое в качестве граничного условия, должно рассматриваться *в переменных задачи*; например, если конечно-разностные уравнения записаны в переменных $\psi$ и $\zeta$, то и решение Пуазейля должно быть записано для $\psi$ и $\zeta$. Если $u$ задается по имеющемуся решению дифференциальных уравнений, а $\psi$ находится при помощи квадратур, то при этом возникает ошибка в результатах, обусловленная дискретизацией (аналогичная ситуация возникает и в случае постановки условий на входной границе потока; см. предыдущий раздел). Для течений более общего вида, например таких, как асимптотическое течение в пограничном слое, решение дифференциальных уравнений будет отличаться от асимптотического конечно-разностного решения по всем переменным. На выходной границе предпочтительнее брать конечно-разностное решение асимптотического *обыкновенного дифференциального уравнения* (Кавагути [1965]).

Вместо того чтобы ставить граничное условие вниз по потоку, соответствующее «бесконечности», можно использовать асимптотические решения, применимые на достаточно больших,

но конечных расстояниях от интересующей области. Плоткин [1968] и Иосидзава [1970] за функции на границе расчетной сетки брали решения уравнений пограничного слоя. Варжанская [1969] видоизменила это условие для уравнений пограничного слоя на большом расстоянии от интересующей области (область передней кромки плоской пластинки) и предложила «склеивать» уравнения Навье — Стокса и уравнения пограничного слоя, задавая непрерывность $\psi$, $v = -\partial\psi/\partial x$ и $\partial v/\partial x = -\partial^2\psi/\partial x^2$. Это позволяет продвигать решение уравнений пограничного слоя вниз по потоку, но не решает проблему условия на выходе для вихря в уравнениях Навье — Стокса, рассматриваемых в области вверх по потоку.

Фромм [1963, 1964], а также Гоэйн и Притчетт [1970] ставили периодические условия на входе и на выходе, единственным достоинством которых была простота математической постановки. Эти условия не соответствуют какой-либо реальной физической ситуации (за исключением задачи о свободной однородной турбулентности) и оказались одним из источников неустойчивости, с которой столкнулся Фромм при больших значениях Re.

По-видимому, первое действительно успешное с вычислительной точки зрения «мягкое» граничное условие в выходном сечении предложили Парис и Уитекер [1965]. В задаче о течении в плоском канале они поставили условия $v = -\partial\psi/\partial x = 0$ и $\partial\zeta/\partial x = 0$ на выходной границе и обнаружили, что эти условия предпочтительнее задания параболического профиля, так как они позволяют значительно сократить размеры разностной сетки при той же точности в исследуемой области. Обозначая $\max i = I$ и опуская индекс $j$, эти граничные условия можно записать в следующем виде:

$$\psi_I = \psi_{I-1}, \tag{3.476а}$$

$$\zeta_I = \zeta_{I-1}. \tag{3.476б}$$

Впоследствии эти условия применили Бао и Догерти [1969] при решении задачи об обтекании плоской пластинки. Опыт автора настоящей монографии по решению одномерного модельного уравнения переноса в невязком случае при помощи трехслойной по времени схемы «чехарда» (разд. 3.1.6) показал, что если применять в этой схеме условие (3.476б), то оно будет обладать дестабилизирующим свойством. Римон и Чен [1969], рассматривая схему «чехарда» и схему Дюфорта — Франкела (разд. 3.1.7) для вязких членов, ставили в следе за телом более жесткие условия

$$\psi_I = \psi_{I-1}, \tag{3.477а}$$

$$\zeta_I = 0. \tag{3.477б}$$

Опыт расчетов Аллена [1968] и Чена [1970] по решению уравнения Бюргерса подтвердил интуитивное предположение о том, что градиентное условие (3.476 б) для $\zeta$ приводит к меньшим ошибкам на границе, чем задание функции $\zeta$, как в условии (3.477б)[1]).

Томан и Шевчик [1966] предложили еще менее жесткие граничные условия на выходной границе потока. Они аппроксимировали условия $\partial\zeta/\partial x = 0$ и $\partial v/\partial x = 0$. Поскольку $v = -\partial\psi/\partial x$, из второго условия следует равенство $\partial^2\psi/\partial x^2 = 0$. Тогда линейная экстраполяция при постоянном шаге $\Delta x$ дает

$$\zeta_I = \zeta_{I-1}, \tag{3.478а}$$

$$\psi_I = 2\psi_{I-1} - \psi_{I-2}. \tag{3.478б}$$

Эти условия имеют второй порядок точности, если полагать $\partial\zeta/\partial x = 0$ при $I - 1/2$, а $\partial^2\psi/\partial x^2 = 0$ при $I - 1$. Экстраполяция для $\psi_{I,j}$ выполняется здесь после каждой итерации по методу Либмана при решении уравнения Пуассона. В более поздней работе Фромм [1967] ставил условие (3.478б), что дало ему возможность существенно увеличить интервал исследуемых значений Re по сравнению с предшествующей работой (Фромм [1963]), где задавались периодические граничные условия. Фромм также опробовал линейную экстраполяцию для постановки $\zeta$ на выходной границе и обнаружил, что такое условие обладает дестабилизирующим свойством в случае явных схем для уравнения переноса вихря. Автор настоящей монографии, применяя явные схемы, получил аналогичный результат.

В дальнейшем, применяя метод последовательной верхней релаксации для решения уравнения Пуассона, Кемпбелл и Мюллер [1968] и Роуч и Мюллер [1970] с успехом ставили условия Томана и Шевчика (3.478) в целом ряде задач.

В работах Хына и Макано (Хын и Макано [1966], Макано и Хын [1967]) задавались следующие условия на выходной границе:

$$\psi_I = \psi_{I-4} - 2\psi_{I-3} + 2\psi_{I-1}, \tag{3.479а}$$

$$\zeta_I = \zeta_{I-4} - 2\zeta_{I-3} + 2\zeta_{I-1}. \tag{3.479б}$$

Они получаются разложением в ряды Тейлора (с шагом $2\Delta x$) около точки $I - 2$ до членов второго порядка включительно. При таких условиях удалось получить решение задачи о течении около обратного уступа при $\mathrm{Re} = 333/2$, вычисленном по высоте уступа. Следуя Кавагути [1965], Хын и Макано [1966] выполнили расчеты с более простым заданием параболического профиля на выходной границе потока. Они установили, что это

[1]) См. также статью Варапаева [1969].

условие вполне удовлетворительно, хотя условия (3.479), конечно, лучше. Джакуинта и Хын [1968] брали условия (3.479) при исследовании течения неньютоновской жидкости (жидкости Рейнера — Ривлина).

Гринспэн [1969а] на выходной границе потока ставил следующие условия, предложенные Р. Мейером:

$$\partial\psi/\partial x = 0, \tag{3.480а}$$

$$\partial\zeta/\partial x - u\,\mathrm{Re}\,(\zeta + \partial u/\partial y) = 0. \tag{3.480б}$$

Первое условие означает, что $v = 0$; с учетом этого равенства и при предположении стационарности течения второе условие означает, что $\partial P/\partial y = 0$, т. е. отвечает обычному условию, принятому в приближении пограничного слоя [1]).

Экстраполяционное условие (3.478б) для $\psi_I$ может оказаться ошибочным. Такая экстраполяция должна проводиться на каждой итерации при решении уравнения Пуассона. Роуч [1970] исследовал достаточность этого условия для нахождения решения. Пусть условия на входной границе при $i = 1$ фиксированы. Для одномерной задачи, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением $d^2\psi/dx^2 = \zeta$, экстраполяционное условие $d^2\psi/dx^2 = 0$ на выходной границе либо противоречит указанному дифференциальному уравнению, если $\zeta \neq 0$ на выходной границе, либо просто совпадает с этим дифференциальным уравнением, если $\zeta = 0$. Значит, в одномерном случае такое граничное условие ставить вообще нельзя. В двумерном случае условие $\partial^2\psi/\partial x^2 = 0$ сводит на границе уравнение Пуассона к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$d^2\psi/dy^2 = \zeta. \tag{3.481}$$

---

[1]) Уравнение движения (2.2) в направлении $y$ в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right).$$

В случае стационарного течения при $v(x, y) = 0$ для всех $x$, $y$ и при $\partial P/\partial y = 0$ это уравнение упрощается:

$$\mathrm{Re}\,u\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Из определения $\zeta = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ получаем $\partial v/\partial x = \zeta + \partial u/\partial y$, $\partial^2 v/\partial x^2 = \partial\zeta/\partial x + \partial(\partial u/\partial x)/\partial y$. В силу уравнения неразрывности $\partial u/\partial x = -\partial v/\partial y$, поэтому $\partial(\partial u/\partial x)/\partial y = -\partial^2 v/\partial y^2 = 0$. Таким образом, $\mathrm{Re}\,u(\zeta + \partial u/\partial y) = \partial\zeta/\partial x$. Конечно-разностная форма этого условия такова:

$$\zeta_I = 2u_{I-1}\,\mathrm{Re}\left(\zeta_{I-1} + \frac{\delta u}{\delta y}\bigg|_{I-1}\right)\Delta x + \zeta_{I-2}.$$

Если условия на границах В 1 и В 3 (рис. 3.22) таковы, что дают достаточные граничные условия для уравнения (3.481) вдоль В 6, то экстраполяционная процедура может быть достаточной. В частности, если $\psi = 0$ вдоль В 1 и $\psi$ или $\partial\psi/\partial y$ фиксировано вдоль В 3 (как было рассмотрено ранее), то экстраполяции вдоль границы В 6 будет достаточно, но если условие на В 3 также получается с помощью экстраполяции, то экстраполяции вдоль В 6 *недостаточно.* Постановка же условия $\partial^2\psi/\partial y^2 = 0$ на В 3 либо противоречит (3.481), если $\zeta(\text{В}\,3) \neq 0$, либо просто совпадает с (3.481), если $\zeta(\text{В}\,3) = 0$. Таким образом, достаточность условия $\partial^2\psi/\partial y^2 = 0$ на границе, расположенной вниз по потоку, зависит от условий, заданных на смежных границах, причем существенную роль играет *размерность* задачи.

Отметим, что решение задачи методом последовательной верхней релаксации с экстраполяционными условиями как на В 3, так и на В 6 могло бы «сходиться» в пределах некоторой заданной точности; значит, дискретизация могла бы, вероятно, привести к единственному решению, т. е. к решению, не зависящему от начального приближения. Но полученное таким образом единственное решение зависит от $\Delta x$ и $\Delta y$, и при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ задача становится неопределенной.

Проведенные выше рассуждения подсказывают эффективный способ удовлетворения условия $\delta^2\psi/\delta x^2 = 0$ на границе, расположенной вниз по потоку (Роуч [1970], Брили [1970]). Вместо того чтобы применять это условие при $i = I - 1$ с помощью линейной экстраполяции, его можно поставить непосредственно при $i = I$, сводя условие (3.481) к разностному аналогу обыкновенного дифференциального уравнения

$$\delta^2\psi/\delta y^2 = \zeta, \tag{3.482}$$

для которого имеет место краевая задача с условием $\psi(I, 1) = 0$ в точке на В 1 и с условием Дирихле или с условием Неймана в точке на В 3. Величина $\zeta(I, j)$ на В 6 может быть найдена при помощи любого из уже рассмотренных способов. Это одномерное разностное уравнение можно быстро решить методом прогонки (см. приложение А), не прибегая к итерационным методам. Если на границе, расположенной вниз по потоку, величина $\psi$ определена таким образом, то можно с уверенностью проводить решение разностного аналога уравнения Пуассона с условиями Дирихле на В 6. Скорость сходимости при этом также увеличивается (неопубликованная работа автора). Такой способ реализации условия $\partial^2\psi/\partial x^2 = 0$, сводящий на границе уравнение Пуассона к обыкновенному дифференциальному уравнению, необходим, когда для решения уравнения Пуассона

применяются неявные схемы метода чередующихся направлений, поскольку расщепление в этих схемах эффективно сводит итерационное решение на полушаге по времени к решению обыкновенного дифференциального уравнения в направлении $x$ методом прогонки, а для такого уравнения условие $\partial^2\psi/\partial x^2 = 0$ *не* является достаточным.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (3.482) можно решать более простым одномерным методом, описанным в разд. 3.2.8, вместо более общего метода прогонки (приложение А).

Как уже было указано выше, Фромм [1967] и автор настоящей монографии, используя явные схемы для уравнения переноса вихря, опробовали экстраполяцию как для функции $\psi$, так и для $\zeta$ и обнаружили, что такие условия обладают дестабилизирующим свойством. Применяя неявные схемы метода чередующихся направлений, Брили [1970] и Феннинг и Мюллер [1971] получили устойчивое решение. Вводя только при расчете $\zeta$ дополнительную «фиктивную» узловую точку при $i = I + 1$, после каждого вычисления $\partial\zeta/\partial t$ вплоть до точки $i = I$ на каждом слое по времени Брили полагал

$$\zeta_{I+1} = 2\zeta_I - \zeta_{I-1}. \tag{3.483}$$

Чтобы удовлетворить условию $\partial^2\psi/\partial x^2 = 0$ в точке $i = I$, решалось обыкновенное дифференциальное уравнение $d^2\psi/dy^2 = \zeta$.

Даже при сравнительно мягких условиях (3.478), предложенных Томаном и Шевчиком [1966], можно получить нереально резкое изменение функции $\zeta$ в окрестности границы B 6 для течений при малых $\mathrm{Re} = O(10)$. Для течений при таких малых Re на выходной границе Роуч и Мюллер [1970] брали «самые мягкие» граничные условия для $\zeta$, которые получаются из уравнения переноса вихря. Предполагая, что $u_{I,j} \geqslant 0$ (т. е. что B 6 действительно является *выходной* границей потока), конвективный член для $u$ можно аппроксимировать с помощью разностей против потока при $i = I$, не прибегая к дальнейшим аппроксимациям. Конвективный член для $v$ также можно аппроксимировать при помощи разностей против потока (в зависимости от знака $v_{I,j}$) или при помощи какой-либо другой схемы, используемой во внутренних точках; аналогично, для диффузионного члена в направлении $y$ при $i = I$ не требуется аппроксимации. Член, описывающий диффузию в направлении $x$, мог бы быть вычислен при $i = I - 1$. Но само по себе такое вычисление является статически неустойчивым (см. разд. 3.1.4) для члена $(\partial^2\zeta/\partial x^2)/\mathrm{Re}$, особенно в течениях при малых Re. В этом легко убедиться, если вернуться к рис. 3.6; корректирующее смещение, обусловленное членом $\partial^2\zeta/\partial x^2$ для точки $i = I - 1$,

в действительности накладывается в точке $i = I$, вызывая тем самым монотонный рост ошибки или статическую неустойчивость [1]).

Исследование устойчивости при помощи метода дискретных возмущений показывает также, как разрешить эту проблему. Устойчивость члена $\partial^2\zeta/\partial x^2$ достигается дополнительным сдвигом этого члена на один слой по времени. В результате получается

$$\zeta_{I,\,j}^{n+1} = \zeta_{I,\,j}^{n} + \Delta t \left[ -\frac{(u\zeta)_{I,\,j}^{n} - (u\zeta)_{I-1,\,j}^{n}}{\Delta x} - \frac{\delta\,(v\zeta)^n}{\delta y}\bigg|_{I,\,j} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\delta^2\zeta^n}{\delta y^2}\bigg|_{I-1,\,j} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\delta^2\zeta^{n-1}}{\delta x^2}\bigg|_{I-1,\,j} \right]. \qquad (3.484)$$

Наличие дополнительного временно́го слоя $n-1$ в уравнении (3.484) отнюдь не означает, что необходимо хранить в памяти полную матрицу для $\zeta_{I,\,j}^{n-1}$. Поскольку это уравнение используется лишь на границе, необходимо помнить только вектор $V(j) = \delta^2\zeta/\delta x^2\,|_{I-1,\,j}^{n-1}$. Здесь производная вычисляется в конце каждого расчета нового значения вихря перед получением окончательных значений, а затем осуществляется переход к новому временно́му слою.

Рассчитывая все внутренние точки по схеме с разностями против потока, этот способ с успехом применяли О'Лири и Мюллер [1969], а также Роуч и Мюллер [1970]. Независимо от схемы, принятой для расчета внутренних точек, на выходной границе потока рекомендуется использовать разности против потока, хотя бы для представления конвективного члена для $u$. В пределе при $\mathrm{Re} \to \infty$ это означает, что граничное условие для $\zeta$ на выходной границе *не* является необходимым; это аналогично случаю одномерного дифференциального уравнения $\partial\zeta/\partial t = -\partial(u\zeta)/\partial x$, где для полной определенности задачи необходимо только условие на входной границе. Если, например, для конвективных членов выбрана схема «чехарда» (разд. 3.1.6), а для членов, описывающих диффузию, схема с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным, как в уравнении (3.165), то

---

[1]) Следуя методу дискретных возмущений (разд. 3.1.5.а) и пренебрегая конвективными членами и членами, описывающими диффузию в направлении оси $y$, получаем $\zeta_{I,\,j}^{n+1} = \zeta_{I,\,j}^{n} + (\Delta t/\mathrm{Re})\left(\zeta_{I-2,\,j}^{n} + \zeta_{I,\,j}^{n} - 2\zeta_{I-1,\,j}^{n}\right)/\Delta x^2$. Предположив, что решение стационарно, а в $\zeta_{I,\,j}$ введено возмущение $\delta$, получим $\left(\zeta_{I,\,j}^{n+1} - \zeta_{I,\,j}^{n}\right)/\delta = \Delta t/(\mathrm{Re}\,\Delta x^2)$, причем член, стоящий в правой части, положителен. Следовательно, $\Delta\zeta$ имеет тот же знак, что и $\delta$, т. е. вязкий член приводит к статической неустойчивости.

при $i = I$ можно применять следующее уравнение:

$$\zeta_{I,j}^{n+1} = \zeta_{I,j}^{n-1} + 2\Delta t \left[ -\frac{(u\zeta)_{I,j}^{n-1} - (u\zeta)_{I-1,j}^{n-1}}{\Delta x} - \frac{\delta (v\zeta)^n}{\delta y}\bigg|_{I,j} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\delta^2 \zeta^n}{\delta y^2}\bigg|_{I,j} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\delta^2 \zeta^{n-1}}{\delta x^2}\bigg|_{I-1,j} \right]. \qquad (3.485)$$

Эти способы были опробованы автором настоящей монографии, и при их помощи удалось добиться плавного изменения $\zeta$ у выходной границы до тех пор, пока не появлялся срыв вихрей. Когда появляется срыв вихрей, составляющая скорости $u$ может стать отрицательной при $i = I$, поэтому приведенные выше разностные формулы станут формулами с разностями *по потоку*, что приводит к неустойчивости. В этом случае для устойчивости следует ставить условие (3.478) Томана и Шевчика [1966]. Поскольку срыв вихрей пропсходит только при больших Re, схемы с разностями против потока в этом случае дадут несущественное улучшение.

Устойчивость схемы в целом теперь может определяться ограничением по числу Куранта, соответствующему применению разностей против потока, на границе В 6. Отметим, например, что в комбинации со схемой «чехарда», как это имеет место в уравнении (3.485), величина эффективного шага по времени для конвективного члена $u$ будет $2\Delta t$. Критерий устойчивости в одномерном случае будет $C_x = u\,\Delta t/\Delta x \leqslant {}^1/_2$. Однако, как показали Бао и Догерти [1969], разности против потока на границе В 6 можно применять в комбинации с неявной схемой метода чередующихся направлений без каких-либо ограничений на устойчивость. Другие комбинации должны быть проверены индивидуально.

Достаточность рассмотренного условия на выходной границе не была строго доказана даже для линейных дифференциальных уравнений в частных производных, однако некоторые выводы можно сделать из рассмотрения одномерной модельной стационарной задачи

$$-u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0. \qquad (3.486)$$

Применение разностей против потока для конвективного члена не накладывает каких-либо условий на выходной границе, а из рассмотрения члена, соответствующего диффузии в направлении оси $x$, в уравнении (3.484) следует, что при $\Delta x \to 0$

$$\partial^3 \zeta/\partial x^3 = 0. \qquad (3.487)$$

При $u > 0$ и $\alpha > 0$ этого граничного условия вместе с фиксированным значением величины $\zeta$ на выходной границе достаточно для нахождения решения (см. задачу 3.29). Если же

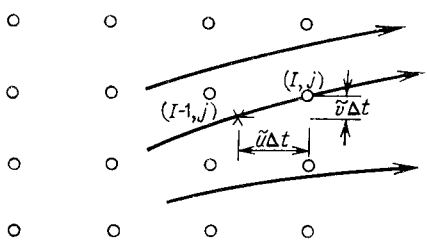
$\alpha = 0$ (т. е. $\mathrm{Re} = \infty$), то это условие на выходной границе, *поставленное для решения исходного дифференциального уравнения*, делает задачу переопределенной и создает особенность в решении при $\alpha \to 0$ (см. разд. 3.3.8). Однако в разностной схеме это условие используется только для диффузионного члена, и поэтому особенности в решении при $\alpha \to 0$ здесь не появляются. При аналитическом рассмотрении соответствующего аналога не существует даже для линейного модельного обыкновенного дифференциального уравнения. В другом предельном случае, когда $u = 0$ ($\mathrm{Re} = 0$), уравнение (3.487) вообще не является граничным условием (см. задачу 3.29). Оказывается, что применимость на выходной границе условия (3.484), соответствующего течениям при малых Re, ограничена требованием $\mathrm{Re} > 0$ и, возможно, некоторым *минимальным* сеточным числом Рейнольдса.

Идея применения разностей против потока на границе B 6 была также использована Фроммом [1967], а вычисление диффузионных членов в направлении $x$ в точке $I - 1$ без сдвига по времени, как в описанном выше подходе, проводили Итон и Цумвальт [1967] при решении нестационарной задачи о сверхзвуковом течении. Заметим, что часто применяемая искусственная экстраполяция величины $u\zeta$ в фиктивную точку $I + 1$ за сеткой и последующая аппроксимация $\partial(u\zeta)/\partial x|_{I,j} = [(u\zeta)_{I+1,j} - (u\zeta)_{I-1,j}]/(2\Delta x)$ при помощи центральных разностей только затуманивает суть дела. Алгебраически это эквивалентно применению односторонних разностей $\partial(u\zeta)/\partial x|_{I,j} = [(u\zeta)_{I,j} - (u\zeta)_{I-1,j}]/\Delta x$. Очевидно, такая аппроксимация не дает второго порядка точности, как считают некоторые авторы, и будет неустойчивой, когда сорвавшиеся вихри достигнут границы B 6.

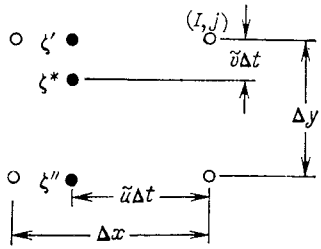
Было выполнено несколько систематических численных экспериментов по исследованию правильности граничных условий, поставленных в расчете на выходной границе для многомерных задач. Брили [1970] рассчитал два варианта, во втором из которых граница B 6 была отодвинута на пять узлов вниз по потоку. Используя условия (3.481) и (3.483), он обнаружил, что величина вихря на стенке во втором случае менялась менее чем на 0.2%. Чен [1970] выполнил сравнительные расчеты для течения сжимаемой жидкости и обнаружил, как и следовало ожидать, что мягкие условия обычно дают более точные результаты. Следует также отметить, что даже если при помощи экстраполяций высокого порядка для $\psi$ и $\zeta$ и можно добиться получения устойчивого решения, то, как правило, при этом результаты иолучаются менее точными, поскольку они основываются на значениях, вычисленных во внутренних точках, а не на точных значениях (Чен [1968, 1970]). Весьма желательны дальнейшие исследования многомерных случаев, основанные на

сравнительных расчетах. При этом должны быть опробованы не только различные условия на выходной границе, но и всевозможные их комбинации с различными условиями на верхней границе.

Для расчета течений невязкой жидкости Шапиро и О'Брайен [1970] (см. также Чарни [1962]) применили эффективный способ, который оказался точным, устойчивым и достаточно простым с точки зрения программирования. В данном способе следят за лагранжевой траекторией частицы, достигающей выходной границы, причем проводится линейная экстраполяция. Если предполагается отсутствие диффузии вблизи выходной границы, то величина вихря фиксирована для каждой частицы; согласно рис. 3.25, *а*, величина $\zeta_{I,\,J}^{n+1}$ на выходной границе получается следующим образом:




*а*




*б*

Рис. 3.25. Способ Шапиро и О'Брайена определения вихря на выходной границе потока.

$$\zeta_{I,\,J}^{n+1} = \zeta^* \equiv$$
$$\equiv \zeta\left(x_I - \tilde{u}\,\Delta t,\ y_J - \tilde{v}\,\Delta t\right) \tag{3.488}$$

(см. вывод схемы Лейта, разд. 3.1.13). Средние значения скоростей $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ вычисляются по значениям в соседних точках (например, при помощи экстраполяции или равенства $\tilde{u} = u_{I-1,\,J}^n$). Величина $\zeta^*(x^*, y^*)$ определяется по соседним точкам. В качестве примера рассмотрим случай, когда $\tilde{u} > 0$ и $\tilde{v} > 0$ (рис. 3.25, *б*). Имеем

$$\zeta' = \zeta_{I,\,J}^n + \frac{\tilde{u}\,\Delta t}{\Delta x}\left(\zeta_{I-1,\,J}^n - \zeta_{I,\,J}^n\right), \tag{3.489а}$$

$$\zeta'' = \zeta_{I,\,J-1}^n + \frac{\tilde{u}\,\Delta t}{\Delta x}\left(\zeta_{I-1,\,J-1}^n - \zeta_{I,\,J-1}^n\right), \tag{3.489б}$$

$$\zeta^* = \zeta' + \frac{\tilde{v}\,\Delta t}{\Delta y}\left(\zeta'' - \zeta'\right). \tag{3.489в}$$

Если $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ также находятся с помощью интерполяции, то вычисления могут оказаться «нечистыми»; в таком случае лучше всего вычисления проводить с помощью итераций.

Данный способ применим также и для течений при больших Re, но с единственным предположением, что в двух последних колонках узлов сетки диффузией пренебрегают.

Шапиро и О'Брайен [1970] сравнили результаты расчетов двумерной метеорологической задачи при применении этого способа с результатами, полученными в достаточно большой расчетной области при фиксированных значениях $\zeta$ на выходной границе (задача Дирихле). Хотя можно было ожидать, что последний способ даст более точные результаты, в действительности этого не произошло; на достаточно больших временах при расчете $\zeta$ возникали пилообразные осцилляции (см. также Варапаев [1969]). Такие осцилляции в решении представляют собой обычное явление, которое рассматривается в следующем разделе.

### 3.3.8. Пилообразные осцилляции в конечно-разностном решении

С пилообразными осцилляциями решения в узловых точках пространственной сетки можно встретиться во многих работах. При расчетах сверхзвукового потока при помощи схем с симметричными разностями для аппроксимации пространственных производных осцилляции обычно возникают за ударной волной (см. разд. 5.3). Но пилообразные осцилляции возникают также и при расчетах течений несжимаемой жидкости до больших значений времени. Многие авторы объясняют такое поведение нелинейностью или линейной неустойчивостью расчета нестационарного течения. (Осцилляции могут даже предотвращать сходимость итерационного процесса.) Здесь будет показано, что действительный источник этого явления гораздо проще.

На рис. 3.26 представлено полученное неитерационным прямым методом прогонки (см. приложение А) *точное* решение конечно-разностного уравнения, соответствующего стационарному *линейному* модельному уравнению с постоянными коэффициентами у конвективного и диффузионного членов

$$0 = -u\,\partial\zeta/\partial x + \alpha\partial^2\zeta/\partial x^2 \qquad (3.490а)$$

с граничными условиями

$$\zeta(0) = 0, \quad \zeta(1) = 1. \qquad (3.490б)$$

Соответствующее конечно-разностное уравнение с центральными разностями имеет вид

$$0 = -u\frac{\zeta_{i+1} - \zeta_{i-1}}{2\Delta x} + \alpha\frac{\zeta_{i+1} - 2\zeta_i + \zeta_{i-1}}{\Delta x^2}. \qquad (3.491а)$$

При выборе шага $\Delta x = {}^1/_{10}$ граничные условия в дискретной форме принимают вид

$$\zeta_1 = 0, \quad \zeta_{11} = 1. \qquad (3.491б)$$

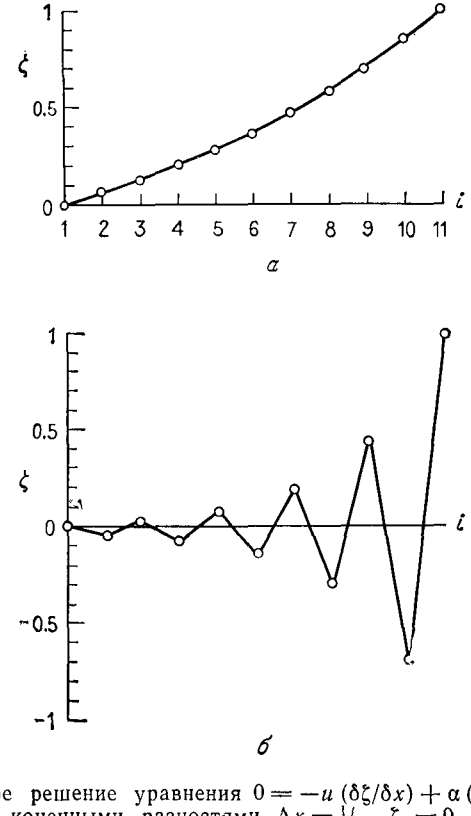
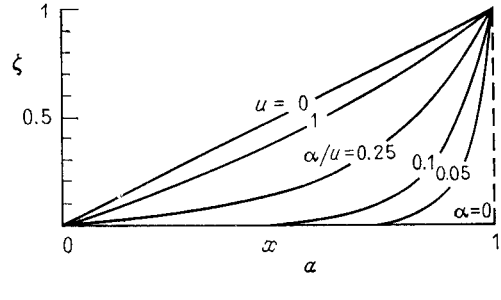


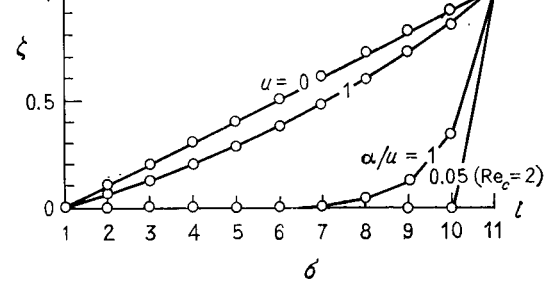

Рис. 3.26. Точное решение уравнения $0 = -u\,(\delta\zeta/\delta x) + \alpha\,(\delta^2\zeta/\delta x^2)$. Решение с центральными конечными разностями, $\Delta x = {}^1/_{10}$, $\zeta_1 = 0$, $\zeta_{11} = 1$, $u = \text{const}$. *а*: $\alpha/u = 1$, $\mathrm{Re} = 1$, $\mathrm{Re}_c = 0.1$; *б*: $\alpha/u = 0.01$, $\mathrm{Re} = 100$, $\mathrm{Re}_c = 10$.

Решение, представленное на рис. 3.26, *а*, получено при $\alpha/u = 1$, что соответствует $\mathrm{Re} = 1$, и является гладким. Решение, приведенное на рис. 3.26, *б*, получено при $\alpha/u = 0.01$, что соответствует $\mathrm{Re} = 100$, образует характерные пилообразные осцилляции. Подчеркнем, что изображенное на рис. 3.26 решение представляет собой *точное стационарное* решение *линейного* конечно-разностного уравнения (3.491) *с постоянными коэффициентами*. Пилообразные осцилляции в данном случае вызваны не неустойчивостью итерационного процесса, не нелинейностью и не переменностью коэффициентов; они просто являются решением конечно-разностного уравнения (3.491).

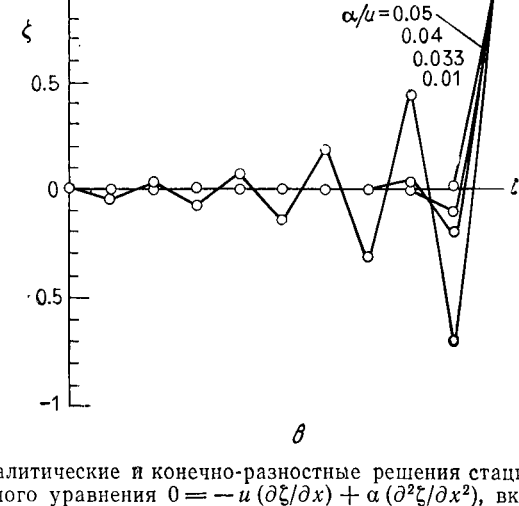
Легко показать, что в решении конечно-разностного уравнения должны появляться такие пилообразные осцилляции. Рассмотрим сначала дифференциальное уравнение (3.490), решение которого показано на рис. 3.27, *а*. При $u = 0$ (течение




а




б




в

Рис. 3.27. Аналитические и конечно-разностные решения стационарного линейного модельного уравнения $0 = -u\,(\partial\zeta/\partial x) + \alpha\,(\partial^2\zeta/\partial x^2)$, включающего конвективный и диффузионный члены; $\zeta(0) = 0$, $\zeta(1) = 1$, $u = \text{const}$. Решение с центральными конечными разностями, $\Delta x = {}^1/_{10}$. Сеточное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_c = u\,\Delta x/\alpha$. *а* — аналитические решения; *б* — конечно-разностные решения при $\mathrm{Re}_c \leqslant 2$; *в* — конечно-разностные решения при $\mathrm{Re}_c \geqslant 2$.

при $\mathrm{Re} = 0$, или ползущее течение) решение этого дифференциального уравнения представляется прямой $\zeta = x$. При $u > 0$ данному решению соответствует профиль, как бы «выдутый» потоком [1]). При больших $u/\alpha$ (течение при больших Re) решение в значительной части исследуемой области близко к горизонтали $\zeta = \zeta(0) = 0$, но затем для того, чтобы удовлетворить второму граничному условию (3.490б), т. е. $\zeta(1) = 1$, оно резко возрастает при $x \to 1$. При $\alpha = 0$ $(\mathrm{Re} = \infty)$ решение всюду имеет вид $\zeta = \zeta(0) = 0$ и второе граничное условие $\zeta(1) = 1$ использовать нельзя, поскольку оно переопределяло бы задачу для уравнения, имеющего в этом случае первый порядок. Такое изменение порядка дифференциального уравнения и числа допустимых граничных условий имеет место в классической *сингулярной* задаче с малым параметром $\alpha/u$.

Рассмотрим теперь решение конечно-разностного уравнения (3.491). Как показано на рис. 3.27, *б*, при $u = 0$ конечно-разностное уравнение дает точное решение. Если скорость потока увеличивается, то профиль $\zeta$ опять как бы «выдувается» потоком, как и в случае дифференциального уравнения, удовлетворяя всюду условиям (3.491б), поставленным для уравнения (3.491а), т. е. для уравнения

$$u\,\delta\zeta/\delta x = \alpha\delta^2\zeta/\delta x^2. \tag{3.492}$$

Как же формируется такое «колено» профиля в предпоследней точке при $i = 10$? В решении дифференциального уравнения с ростом $u/\alpha$ величина $\partial\zeta/\partial x$ при $x = 1$ неограниченно увеличивается так, чтобы сбалансировать конвективный и диффузионный члены в уравнении (3.492), но в решении конечно-разностного уравнения величина $\delta\zeta/\delta x$ ограничена. Когда «колено» появляется в последней ячейке, мы имеем

$$\left.\frac{\delta\zeta}{\delta x}\right|_{I-1} = \frac{\zeta_I - \zeta_{I-2}}{2\,\Delta x} = \frac{1-0}{2\,\Delta x} = \frac{1}{2\,\Delta x}. \tag{3.493}$$

Если значение $\zeta_{I-1} = 0$, то

$$\left.\frac{\delta^2\zeta}{\delta x^2}\right|_{I-1} = \frac{\zeta_I - 2\zeta_{I-1} + \zeta_{I-2}}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta x^2}. \tag{3.494}$$

Таким образом, конечно-разностное уравнение (3.491) удовлетворяется в точке $i = I - 1$, если

$$\frac{u}{\alpha} = \frac{\delta^2\zeta/\delta x^2|_{I-1}}{\delta\zeta/\delta x|_{I-1}} = \frac{1/\Delta x^2}{1/(2\,\Delta x)} = \frac{2}{\Delta x}. \tag{3.495}$$

[1]) Это решение таково: $\zeta = (1 - e^{xu/\alpha})/(1 - e^{u/\alpha})$.

В целом решение конечно-разностного уравнения будет $\zeta_i = 0$ для $i$ от 1 до 10 и $\zeta_{11} = 1$. Равенство (3.495) снова приводит к вездесущему условию на сеточное число Рейнольдса:

$$\mathrm{Re}_c \equiv u\,\Delta x/\alpha = 2. \tag{3.496}$$

Когда это условие нарушается (при $\mathrm{Re}_c > 2$), член $\delta\zeta/\delta x$ остается по-прежнему ограниченным, и для достижения баланса в уравнении (3.492) член $\delta^2\zeta/\delta x^2$ будет увеличиваться за счет уменьшения $\zeta_{I-1}$ вплоть до отрицательных значений, как показано на рис. 3.27, *в*. Заметим, что это решение конечно-разностного уравнения приводит к нарушению условий монотонности и ограниченности решения исходного дифференциального уравнения, приводя тем самым к ошибкам, связанным со свойствами схемы (см. разд. 3.1.23). Когда $\zeta_{I-1} < 0$, величина $\delta^2\zeta/\delta x^2|_{I-2}$ несколько уменьшается и этот эффект передается вперед, вызывая пилообразные осцилляции.

Появление пилообразных осцилляций в решении дискретного уравнения аналогично особенности у дифференциального уравнения; последняя возникает при $\mathrm{Re} \to \infty$, а осцилляции появляются при $\mathrm{Re}_c > 2$. Конечно-разностное уравнение имеет особенность при $\mathrm{Re}_c = 2$ в том смысле, что, когда параметр $\alpha$ становится достаточно малым (таким, что $\mathrm{Re}_c > 2$), конечно-разностное уравнение утрачивает свойства монотонности и ограниченности, присущие исходному дифференциальному уравнению.

Для нелинейного дифференциального уравнения Бюргерса такое явление может возникать в областях, удаленных от границ. С ростом Re частоты конечно-разностного решения увеличиваются до частоты Найквиста, отвечающей минимально возможной длине волны $\Lambda = 2\Delta x$. Для уравнения Бюргерса это наступает именно при $\mathrm{Re}_c = 2$. При бо́льших Re структуру решения нельзя получить на данной сетке хотя бы качественно (см. *ошибки, обусловленные неразличимостью*, разд. 3.1.13).

Помимо уменьшения сеточного числа Рейнольдса за счет уменьшения $\Delta x$ с тем, чтобы выполнялось условие $\mathrm{Re}_c < 2$, в случае уравнения с постоянными коэффициентами имеется два пути устранения ошибок, связанных с пилообразными осцилляциями. Они указаны в следующих упражнениях.

*Упражнение.* Показать, что схема с разностями против потока для уравнения (3.490) не приводит к пилообразным осцилляциям.

*Упражнение.* Показать, что использование условия градиентного типа $\partial\zeta/\partial x = 0$ при $x = 1$ не приводит к пилообразным осцилляциям.

Относительно первого способа (схема с разностями против потока) заметим, что условие появления пилообразных осцилляций при использовании центральных разностей ($\mathrm{Re}_c \geqslant 2$) как

раз совпадает с условием выполнения формальной точности схемы с разностями против потока (см. разд. 3.1.8). Таким образом, при $\mathrm{Re}_c > 2$ схемная вязкость $\alpha_e > \alpha$, так что в некотором смысле этот способ является фиктивным.

Относительно второго способа заметим, что при таком фиксированном граничном условии задача фактически *заменяется* другой задачей, имеющей тривиальное решение $\zeta(x) = \zeta(0) = 0$. (Если на выходной границе берется условие $\partial\zeta/\partial x \neq 0$, то для одномерной задачи существует нетривиальное решение, но ограничение на $\mathrm{Re}_c$ при этом по-прежнему имеет место; см. задачу 3.30.) Однако второй способ *применим* к двух- и трехмерным задачам, не сводя их к тривиальной, и часто используется в расчетах многомерных гидродинамических задач для устранения пилообразных осцилляций. Условия на выходной границе потока, используемые Шапиро и О'Брайеном (см. разд. 3.3.7), также устраняют пилообразные осцилляции. (Для одномерной стационарной задачи способ Шапиро — О'Брайена сводится к заданию градиентного условия $\delta\zeta/\delta x = 0$.)

Конечно, переменность скорости $u$ по пространственной координате и бóльшая размерность задачи могут привести к количественному изменению описанного поведения решения. В частности, при переменной скорости $u$ можно допускать, чтобы сеточное число Рейнольдса превышало значение $\mathrm{Re}_c > 2$ вне окрестности выходной границы, причем пилообразные осцилляции не возникают, если вблизи границы $\mathrm{Re}_c < 2$. Выводы проведенного здесь исследования оказались приемлемыми для двумерных гидродинамических задач. Используя полные уравнения Навье — Стокса для двумерных расчетов течения нескольких жидкостей в пограничном слое, А. Руссо (личное сообщение) столкнулся с одномерными пилообразными осцилляциями в каждом из направлений — параллельном стенке и перпендикулярном ей. Пилообразные осцилляции в каждом из направлений устранялись либо путем изменения граничного условия на условие Неймана, либо путем перехода к схеме с разностями против потока в одном таком направлении. Другим эффективным средством, примененным Руссо, является локальное уменьшение шага сетки вблизи стенки (см. разд. 6.1), что локально приводило к уменьшению сеточного числа Рейнольдса до значений $\mathrm{Re}_c < 2$. Полджер [1971] устранил пилообразные осцилляции в решении вблизи стенки, учитывая диффузию только с узла, отстоящего на один шаг от стенки. Он проводил расчеты по схеме Лакса (разд. 5.5.4), но схема с разностями против потока (разд. 3.1.8) в этом случае также работала бы. (В линейной одномерной задаче, представленной на рис. 3.26, применение схемы с разностями против потока при $i = 10$ почти полностью устраняет пилообразные осцилляции.)

## 3.3.9. Парадокс, связанный с влиянием условий на выходной границе потока

На первый взгляд кажется, что условие свободного выхода потока, поставленное на некоторой границе ниже по потоку, наиболее существенно для течения несжимаемой жидкости, поскольку в дальнейшем это условие оказывает влияние на все течение выше по потоку. Для сверхзвукового течения казалось бы, что условие на границе, расположенной ниже по потоку, будет существенно только для вязких членов, так как при сверхзвуковом течении ограничено влияние вверх по потоку. Различные авторы утверждают или подразумевают эти положения.

Прежде всего заметим, что в конечно-разностной схеме влияние вверх по потоку сказывается в сверхзвуковом течении даже при отсутствии вязких членов. Этот эффект проявляется наиболее ярко, если конвективные члены представляются центральными разностями; но даже если используются разности против потока, влияние члена с градиентом давления проявляется вверх по потоку. В самом деле, такое влияние вверх по потоку естественно и даже *необходимо*, например, если когда-то должна перемещаться ударная волна или если когда-то должен быть отключен приток воздуха в аэродинамическую трубу.

Но полный парадокс еще более выразителен: утверждается, что постановка условий на выходной границе ниже по потоку *более* важна в случае сверхзвукового течения, чем в случае дозвукового.

Рассмотрим два случая квазиодномерного течения невязкой жидкости в канале, как показано на рис. 3.28. Рассмотрим простейший случай, когда условия во входном сечении (1) фиксированы. Тогда в случае дозвукового течения (рис. 3.28, *а*) элементарные соотношения показывают, что в выходном сечении (2) имеет место единственное решение. Например, если $M \to 0$, то $u_2 = u_1 (A_1/A_2)$ и $P_2 = P_1 + \rho (u_1^2 - u_2^2)/2$ и т. д. По крайней мере интуитивно ясно, что для численной задачи необходимо предоставить возможность «свободно» развиваться условиям в выходном сечении (2). То, над чем мы обычно задумываемся в отношении влияния вверх по потоку, представляет собой *физическую* сторону задачи, в которой изменение в условиях даже ниже по потоку от (2) будут оказывать влияние на условия во входном сечении (1). Например, если противодавление в трубе повышается, то давление в сечениях (1) и (2) увеличивается, а скорости будут уменьшаться. В этом заключается суть дела. Если бы $P_2$ изменилось, то $P_1$ и $u_1$ также должны измениться. Но коль скоро поток во входном сечении (1) *задан*,

все параметры течения определены всюду единственным образом.

Проведем те же рассуждения для случая полностью сверхзвукового течения в трубе (рис. 3.28, *б*). Здесь также существует эффект запирания, который означает, что если противодавление падает ниже предельного значения, то во входном сечении (1) его влияние не проявляется. Но если противодавление повышается, то возникает ситуация, показанная на рис. 3.28, *в*. Ударная волна войдет внутрь трубы, и ее окончательное положение будет зависеть от величины противодавления. Будет существовать некоторый *интервал* противодавлений и соответствующий *интервал* параметров потока на границе (2), для которых поток на границе (1) остается сверхзвуковым. Тогда при фиксированных условиях во входном сечении, где имеет место сверхзвуковой поток, единственное решение будет зависеть от граничного условия, поставленного в выходном сечении потока.

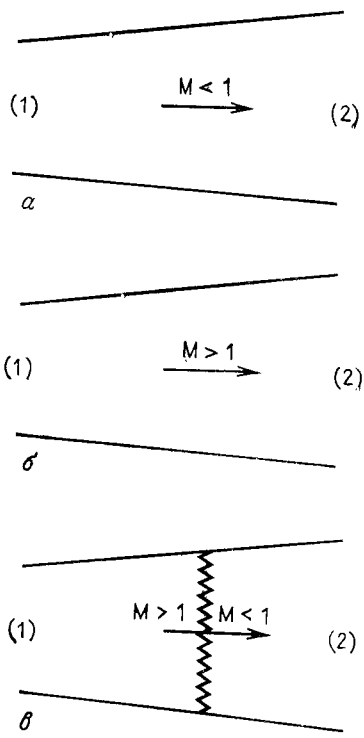



Рис. 3.28. Парадокс, связанный с влиянием граничных условий на выходной границе потока; квазиодномерное течение невязкой жидкости. *а* — полностью дозвуковое течение; *б* — полностью сверхзвуковое течение; *в* — течение со сверхзвуковой скоростью во входном сечении и с дозвуковой скоростью в выходном сечении.

Этот эффект обнаружил Крокко [1965] при расчетах квазиодномерного течения в трубе. Для достижения стационарного решения Крокко был вынужден задавать на выходной границе потока два параметра: давление и температуру. Когда стационарное решение было достигнуто, он смог «смягчить» условие для температуры, положив $T_{I,\,j} = T_{I-1,\,j}$. Но когда аналогичный прием был применен для плотности, ударная волна начала дрейфовать. Бенисон и Рубин [1969] при расчете квазиодномерного течения также были вынуждены фиксировать величину $\rho$ в выходном сечении, так как это определяло структуру ударной волны выше по потоку. Автор настоящей монографии обнаружил аналогичный эффект при расчетах течения в двумерной трубе.

Конечно, если условия в двумерной задаче таковы, что полностью гарантируют сверхзвуковой поток в выходном сечении, то можно ожидать меньшей зависимости от условий на выходной границе, особенно при аппроксимации члена, описывающего конвекцию в направлении $u$, разностями против потока (см. разд. 5.7.6).

## 3.3.10. Соотношение вычислительных и аналитических граничных условий

В предыдущих разделах были рассмотрены различные виды «вычислительных граничных условий». Для линий симметрии или для стенок с условием прилипания эти условия не отличаются от аналитических условий и основаны именно на них. Но вычислительные граничные условия на верхней, входной и выходной границах потока уже отличны от аналитических. Для выбора имеется целое многообразие вычислительных граничных условий, не эквивалентных общепринятым аналитическим граничным условиям, так что, вообще говоря, численное решение в целом не будет сходиться к какому-либо аналитическому решению (если, конечно, таковое имеется).

Однако термины «вычислительный» и «аналитический» не следует отождествлять со словами «приближенный» и «точный». С точки зрения физической природы явления следует признать, что как численный, так и аналитический подходы являются приближенными.

Аналитические граничные условия выбираются прежде всего из соображений удобства и простоты аналитической постановки задачи. Ни для одной реальной физической задачи условия на «бесконечности» не соответствуют условиям «невозмущенного потока». Если быть предельно точным при определении подъемной силы, действующей на самолет, то следовало бы потребовать, чтобы аналитическое граничное условие на верхней границе учитывало скорость воздуха относительно самолета, вызванную вращением Земли; плотность $\rho$ при $y \to \infty$ должна не стремиться к значению в «невозмущенном потоке» $\rho_\infty$, а, по-видимому, подчиняться экспоненциальному закону $\rho = \rho_0 e^{-c(y+h)}$, где $h$ — высота самолета над уровнем моря. В качестве условия на нижней границе при $y = -h$ надо было бы задать условие прилипания на стенке сферической формы (поверхность Земли).

Это, конечно, не обязательно. Из сравнения с физическими данными (и по интуитивным соображениям) известно, что аналитические условия в «невозмущенном потоке» приводят к достаточно «точным» результатам в области, представляющей интерес (вблизи самолета), т. е. совпадают с наблюдаемыми

физическими данными с некоторой точностью. Однако такие аналитические граничные условия являются наиболее *удобным приближением* для интересующей физической задачи.

Таким же образом по мере удаления верхней границы (и других границ) от интересующей нас области можно обнаружить, что расчетные данные в этой области согласуются с физическими данными в пределах некоторой точности. Аналитические и численные решения совпадают с некоторой точностью локально в области, представляющей интерес, но глобально (в частности, в окрестности верхней границы) они не обязательно должны согласовываться.

Нет особых причин выбирать аналитические граничные условия в качестве стандарта для сравнения, как это общепринято. То обстоятельство, что аналитические граничные условия возникли первыми, объясняется только исторической случайностью. Если бы электронные вычислительные машины вошли в обиход в шестидесятых годах семнадцатого века (а не в шестидесятых годах двадцатого века), то общепринятым могло бы стать требование, чтобы аналитик подгонял свое решение в замкнутой форме к разработанным стандартным вычислительным граничным условиям, а это было бы очень неудобно для аналитика.

### 3.3.11. Условия «на бесконечности»

Вопреки предыдущим замечаниям было бы *прекрасно*, если бы вычислительные и аналитические граничные условия были эквивалентны. Этого иногда можно добиться при помощи преобразования координат (см. разд. 6.2).

Ричардсон [1910] предложил общую идею — ставить аналитические условия «на бесконечности» на границах расчетной сетки, которые находятся на конечном расстоянии от области, представляющей интерес. Действительно, многие авторы применяли эту идею по крайней мере для одной из «бесконечно удаленных» границ, рассмотренных выше: верхней, входной и выходной. Босуэлл и Верле [1971] на примере задачи об обтекании параболы исследовали влияние граничных условий на бесконечности, поставленных на конечном расстоянии. Маслях и Эпштейн [1970] при помощи теории возмущений получили выражение для коэффициента сопротивления $C_D$ сферы при малых Re, когда условие для скорости в невозмущенном потоке ставилось на сферической поверхности радиуса $1/\gamma$. Это выражение таково:

$$C_D = \frac{120}{\mathrm{Re}} \frac{1}{5 - 9\gamma + 5\gamma^3 - \gamma^6}. \qquad (3.497)$$

Используя эту формулу, они сравнили величины коэффициента сопротивления в случае истинной «бесконечно удаленной» границы ($\gamma = 0$) и в случае, когда расчетная «бесконечно удаленная» граница находилась на расстоянии 100 радиусов сферы ($\gamma = 0.01$). В результате оказалось, что

$$C_D|_{\gamma=0.01}/C_D|_{\gamma=0} = 1.018. \qquad (3.498)$$

Таким образом, даже для границы, расположенной на расстоянии 100 радиусов от сферы, что существенно больше расстояния, обычно рассматриваемого в расчетах, постановка граничных условий для скорости, соответствующих «бесконечности», приводит к ошибке около 2% в коэффициенте сопротивления $C_D$ при малых Re. В случае же $\gamma = 0.1$, когда по-прежнему накладываются существенные ограничения на размер шага расчетной сетки, это отношение равно 0.821, т. е. ошибка составляет 18% — и это даже без учета ошибки аппроксимации в конечно-разностных уравнениях.

При исследовании течения около плоской пластинки в эллиптической системе координат Лил [1969] для определения $\psi$ и $\zeta$ на внешней границе брал асимптотическое решение на далеком расстоянии, предложенное Имаи. Это решение дает поправку первого порядка (к решению для потенциального течения), зависящую от коэффициента сопротивления пластинки $C_D$. Коэффициент $C_D$ получается интегрированием сил трения по поверхности пластинки (задача 2.2) на каждом итерационном шаге. Значит, вычислительные граничные условия на достаточно удаленной границе, задаваемые здесь посредством аналитического решения, итеративно связаны с определением вихря на стенке. (Это решение применимо только для стационарного состояния и, если его использовать на ранних стадиях итерационного решения, оно может препятствовать сходимости итерационного процесса.)

Как уже было указано в предыдущих разделах, предпочтительнее ставить «мягкие» вычислительные граничные условия, накладывающие меньшие ограничения. Если любое условие, соответствующее «бесконечности», используется отдельно, а не вместе с остальными, то это может дать вполне правильное приближение. Но отметим опасность, на которую не всегда обращают внимание[1]). Рассмотрим, например, задачу об обтекании цилиндра вязкой жидкостью. Если ось симметрии отсутствует, то расчеты выполняются в области со следующими четырьмя внешними границами: верхней, нижней, входной и выходной. Предположим, что на всех этих границах ставятся

[1]) Это замечание было сделано профессором М. Ван-Дайком во время дискуссии на симпозиуме в августе 1968 г.

условия, соответствующие условиям «на бесконечности», т. е. $u = U_\infty$, $v = 0$, $P = P_\infty$. Тогда численное интегрирование уравнения количества движения (см., например, Шлихтинг [1968]) по всей внешней границе дает нулевую величину лобового сопротивления цилиндра!

Численные расчеты Лила [1969] показывают, что во внутренних точках можно получить вполне удовлетворительные результаты, если даже поставленные граничные условия не совместимы с полным интегралом количества движения, отвечающим сопротивлению, но при этом требуемое расстояние оказывается больше, чем в случае, когда берутся «мягкие» вычислительные граничные условия.

## 3.3.12. Угловые точки

Постановка граничных условий в угловой точке $(ic, 1)$, расположенной в вершине вогнутого угла уступа (рис. 3.22), не представляет труда; независимо от того, является ли B 1 линией симметрии или твердой стенкой с условием прилипания, в этой точке ставятся условия $\psi = 0$ и $\zeta = 0$. (Значение $\zeta$ в этой точке даже не входит в расчеты, если внутренние точки рассчитываются с помощью обычной пятиточечной схемы, но это значение нужно при построении графиков и при использовании девятиточечной схемы.)

Вычислительные же условия в угловой точке $C(ic, jc)$, расположенной в вершине выпуклого угла уступа (рис. 3.22), требуют специального обсуждения значений в этой граничной точке и точности.

### 3.3.12. а. Граничные условия в вершине выпуклого угла

Определение значения функции тока в такой угловой точке не составляет проблемы. Как и на всей остальной части стенки, $\psi_c$ равна нулю или какой-либо другой константе. Но для определения вихря $\zeta_c$ имеется несколько возможностей: для нахождения величины вихря на стенке $\zeta_w$ условия прилипания можно использовать целым рядом способов. Здесь будут рассмотрены только условия первого порядка для $\zeta_c$, которые даются формулой (3.435) при $\psi_c = 0$.

Если условие на стенке ставится на ее участке, расположенном вверх по потоку от точки $C$, то получается $\zeta_c = \zeta_a$, где $\zeta_a$ определяется формулой $\zeta_a = 2\psi_{ic,\,jc+1}/\Delta y^2$ (рис. 3.29). Если это условие ставится на участке стенки, расположенной вниз по потоку от точки $C$, то $\zeta_c = \zeta_b = 2\psi_{ic+1,\,jc}/\Delta x^2$. Предлагаемый метод заключается в использовании обоих этих значений с рассмотрением разрыва величины $\zeta_c$. (Действительно, нет причин

предполагать, что в угловой точке, где имеет место геометрическая особенность, величина $\zeta$ непрерывна или однозначна.) Когда значение $\zeta_c$ берется в разностном уравнении, записанном для узла $(ic, jc+1)$, расположенного над угловой точкой $C$, то принимается $\zeta_c = \zeta_a$; когда же значение $\zeta_c$ берется

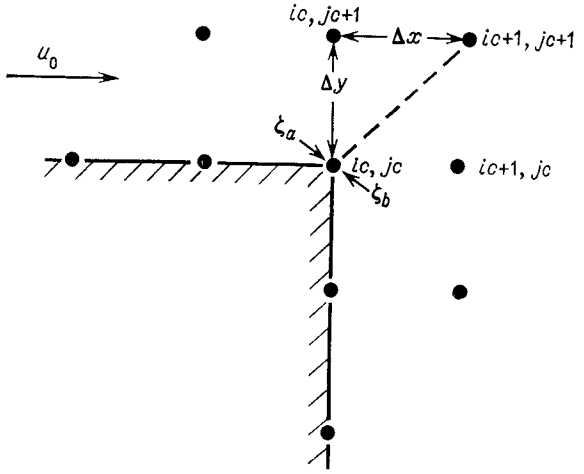



Рис. 3.29. Узлы сетки, используемые для определения значения вихря в угловой точке.

в разностном уравнении, записанном для узла $(ic+1, jc)$, расположенного вниз по потоку от угловой точки $C$, то принимается $\zeta_c = \zeta_b$. При таком неоднозначном подходе можно применять также условия на стенке второго порядка точности.

Однако существуют и другие возможности. В работе Роуча и Мюллера [1970] были проверены семь различных способов определения вихря в угловой точке для случая прямоугольной системы координат. Эти способы перечислены в подписи к рис. 3.30. Первые четыре способа были опробованы как со схемой «чехарда», так и со схемой с разностями против потока, последние же три способа были опробованы только со схемой с разностями против потока. В качестве тестовой задачи была выбрана задача об обтекании обратного уступа при $\mathrm{Re} = 10$, когда на входной границе задавался профиль Польгаузена, соответствующий течению в пограничном слое с параметрами $\delta/h = 1$ и $\Lambda = 0$, а на твердой стенке задавалось условие прилипания. (При бо́льших Re результаты мало зависели от выбранного способа расчета.)

Способ 1 уже был описан. Здесь рассматриваются разрывные значения $\zeta_c$, полученные из граничного условия (3.435) на твердой стенке. Такую постановку граничных условий предло-

жил Ричардсон [1910], а для расчета вихря ее реализовали Том и Апельт [1961], Роуч и Мюллер [1970], Кейкер и Уайтло [1970]. Способ 2 был разработан Кавагути [1965] в предположении, что функция тока $\psi$ симметрична относительно точки $C$. Здесь в двух точках на стенке определяются фиктивные значения функции тока $\psi^*$, а именно $\psi^*_{ic-1,\,jc} = \psi_{ic+1,\,jc}$ и $\psi^*_{ic,\,jc-1} = \psi_{ic,\,jc+1}$, и вихрь в точке $C$ находится из уравнения Пуассона (3.365) с учетом этих фиктивных значений $\psi^*$. Фактически

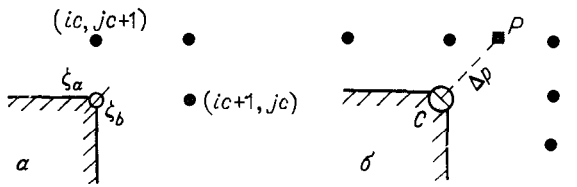



Рис. 3.30. Семь различных способов определения значения вихря в угловой точке.

1) разрывные значения: $\zeta_a = 2\psi_{ic,\,jc+1}/(\Delta y)^2$, $\zeta_b = 2\psi_{ic+1,\,jc}/(\Delta x)^2$; 2) симметрия $\psi$ относительно угловой точки $C$: $\zeta_c = 2\psi_{ic,\,jc+1}/(\Delta y)^2 + 2\psi_{ic+1,\,jc}/(\Delta x)^2$; 3) среднее от значений на стенке: $\zeta_c = \psi_{ic,\,jc+1}/(\Delta y)^2 + \psi_{ic+1,\,jc}/(\Delta x^2)$; 4) стенка, наклоненная под углом 45°: $\zeta_c = 2\psi_p/(\Delta p)^2$; 5) отрыв потока в точке $C$: $\zeta_c = 0$; 6) отрыв потока в точке $B$: $\zeta_b = 0$, $\zeta_a = 2\psi_{ic,\,jc+1}/(\Delta y)^2$; 7) значение на стенке перед точкой $C$: $\zeta_c = 2\psi_{ic,\,jc+1}/(\Delta y)^2$.

в данном способе величина $\zeta_c$ в угловой точке определяется так, как будто эта точка является внутренней точкой, причем здесь $\nabla^2\psi = \zeta_c$ вычисляется с учетом условий прилипания $u = v = 0$. В том случае, когда $\Delta x = \Delta y = \Delta$, данный способ эквивалентен другому способу, предложенному Ричардсоном [1910] для закругленного угла, в котором $\psi_p$ и $\Delta p$ находятся с помощью интерполяции в точке $P$ на прямой, проходящей через точки $(ic, jc+1)$ и $(ic+1, jc)$.

Способы 3 и 4 также испытывались для скругленного каким-либо образом угла. В способе 3 рассматривается одно значение для вихря в угловой точке, равное среднему арифметическому значений вихря на стенках, т. е. в точках $A$ и $B$. Это дает величину $\zeta_c$, равную половине значения $\zeta_c$, полученного в способе 2. То же самое значение может быть получено из уравнения Пуассона (3.365), записанного для угловой точки, при условии, что $\psi = 0$ в точках $(ic-1, jc)$ и $(ic, jc-1)$. Такая интерпретация предлагалась рядом авторов (см., например, Гринспэн [1969а]), причем считалось, что условие для величины $\zeta_c$ имеет второй порядок точности. Такая интерпретация неправомочна; поскольку конечно-разностная форма лапласиана, на которой основано уравнение (3.365), несправедлива в угловой точке, нет оснований предполагать, что в точке $C$ вторая производная

$\partial^2\psi/\partial x^2$ непрерывна по $x$ или $\partial^2\psi/\partial y^2$ непрерывна по $y$, поэтому вывод уравнения (3.365), проведенный с помощью разложения в ряды Тейлора, неприемлем для угловой точки $C$.

Отметим, что пятиточечная схема для лапласиана $\nabla^2\psi$ справедлива в точке $C$ только при условии непрерывности производных $\partial^2\psi/\partial x^2$ и $\partial^2\psi/\partial y^2$ при переходе через точку $C$, или, что эквивалентно, при условии непрерывности $\partial v/\partial x$ и $\partial u/\partial y$. Но односторонний предел при стремлении к $C$ вдоль границы B 2, когда $x < x_c$, в силу условия прилипания на стенке B 2 приводит к равенству $\partial v/\partial x = 0$; аналогично $\partial u/\partial y = 0$ вдоль B 5 [1]). Поскольку $\zeta = \partial u/\partial y - \partial v/\partial x$, ясно, что из непрерывности производных $\partial^2\psi/\partial x^2$ и $\partial^2\psi/\partial y^2$ в точке $C$ следует, что $\zeta_c = 0$. Отсюда можно прийти к заключению, что если и можно вычислить $\nabla^2\psi$ в точке $C$, то этого делать не надо, а можно сразу однозначно записать $\zeta_c = 0$.

В способе 4 условно считается, что стенка в узле $(ic, jc)$ имеет наклон 45° и формула (3.435) применяется в точке $P$ (рис. 3.30, *б*), где значение $\psi_p$ находится с помощью интерполяции по значениям $\psi_{ic,\,jc+1}$ и $\psi_{ic+1,\,jc+1}$ [2]). При $\beta = \Delta x/\Delta y = 1$ эта формула сводится к условию $\zeta_c = 2\psi_{ic+1,\,jc+1}/\Delta p^2$, или $\zeta_c = \psi_{ic+1,\,jc+1}/\Delta^2$, где $\Delta = \Delta x = \Delta y$.

Способы 5 и 6 основаны на введении искусственного отрыва потока в угловой точке, где его можно ожидать. Легко видеть, что для непрерывного потока вихрь равен нулю в точке отрыва (или в точке вторичного присоединения потока). В способе 5 рассматривается одно значение $\zeta_c$, которое равно нулю, в способе 6 рассматриваются два значения вихря в угловой точке, причем в точке $B$ принимается $\zeta_b = 0$. В общем случае такой отрыв лучше не вызывать искусственно, а давать возможность ему проявляться в результате решения, поэтому ни один из этих двух способов не считается правильным. (Как ни странно, эти способы не эффективны даже при искусственно вызванном отрыве, см. Роуч и Мюллер [1970].)

Способ 7 предложили Хын и Макано [1966]. Идея заключается в следующем: поскольку разделяющая линия тока (предполагается, что она отрывается от угловой точки) почти параллельна стенке, расположенной выше по потоку от угловой точки, то следует брать одно значение вихря $\zeta_c$, равное величине $\zeta_a$. Хын и Макано применяли для вихря на стенке условие второго порядка точности (3.439) в отличие от рассматриваемого нами условия первого порядка (3.435). Способ 7 приводит по существу к таким же результатам, как и способы 2 и 4.

---

[1]) Простой анализ профиля скорости в окрестности точки $C$ при $\partial u/\partial y = 0$ показывает, что это условие абсурдно.

[2]) При $\beta > 1$; если $\beta < 1$, то $\psi_p$ находится при помощи интерполяции по точкам $(ic + 1,\ jc + 1)$ и $(ic + 1,\ jc)$.

Если применяются сетки второго типа (разд. 3.3.3) и пятиточечная схема для лапласиана $\nabla^2\zeta$ в уравнении переноса вихря, то точка $C$, расположенная в вершине выпуклого угла, не требует специального рассмотрения. Если же для $\nabla^2\zeta$ берется девятиточечная схема, то для определения $\zeta_c$ на сетке второго типа могли бы использоваться способы, аналогичные способам 2, 3 и 4.

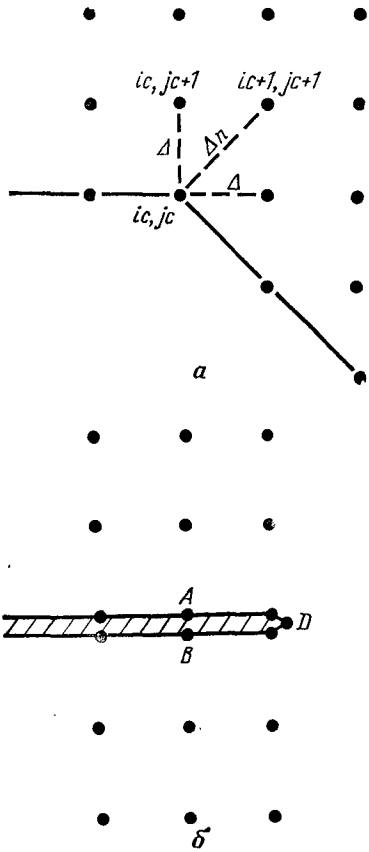



Рис. 3.31. Вихрь на выпуклом угле в 135° и на задней кромке плоской пластинки.

О'Лири и Мюллер [1969] также применили постановку разрывных значений вихря $\zeta_c$ в угловой точке, подобной точке $C$ на рис. 3.22, а также в угловой точке, расположенной в вершине тупого угла в 135° на квадратной сетке, как показано на рис. 3.31, *а*. В последнем случае значение вихря в точке $A$

$$\zeta_a = \frac{2\psi_{ic,\ jc+1}}{\Delta^2} \qquad (3.499)$$

можно брать для составления разности во внутренней точке $(ic,\ jc+1)$, а значение вихря в точке $B$

$$\zeta_b = \frac{2\psi_{ic+1,\ jc+1}}{\Delta n^2} = \frac{\psi_{ic+1,\ jc+1}}{\Delta^2} \qquad (3.500)$$

— для составления разности во внутренней точке $(ic+1,\ jc)$.

Такие постановки разрывных значений $\zeta$ в угловой точке рекомендуются в задачах о течении около передней или задней кромок бесконечно тонкой плоской пластинки; здесь, как показано на рис. 3.31, *б*, рассматриваются три значения вихря $\zeta_a$, $\zeta_b$ и $\zeta_a$. (Если не предполагается симметрия течения, то, очевидно, на разных сторонах пластинки необходимо задавать различные значения $\zeta$.) В связи с этой задачей отметим, что Иосидзава [1970] (а также другие авторы; см. разд. 6.4) численно решал задачу о течении в окрестности передней кромки плоской пластины, используя уравнения Навье — Стокса в параболиче-

ских координатах $(\xi, \eta)$, оптимальных для расчета быстрорастущего пограничного слоя. Далее он перешел к новой зависимой переменной $\theta = -\zeta(\xi^2 + \eta^2)$, что устранило сингулярность на передней кромке.

Несмотря на то что сравнительное качество каждого из рассмотренных выше семи способов дискутабельно, очевидно, что подходы, основанные на определении $\zeta_c$ при помощи произвольной экстраполяции по значениям во внутренних точках, некорректны и могут привести к неустойчивости.

### 3.3.12. б. Сходимость и точность в вершине выпуклого угла

Специальные вопросы, связанные с численным решением уравнений эллиптического типа в окрестности выпуклого угла, обсуждали Вудс [1953], Вазов [1957], Лаасонен [1958а, 1958б] и другие авторы. Для того чтобы продемонстрировать сходимость решения разностного уравнения в случае конечного числа разрывов функции $\zeta$, Лаасонен [1958б] рассматривал решение уравнения Пуассона, записанное в интегральной форме при помощи функции Грина (см. Вейнбергер [1965]). Доказанная им теорема требовала, чтобы решение дифференциального уравнения для $\zeta$ было кусочно непрерывно и чтобы разрывы находились между узловыми точками сетки. Второе из этих условий не удовлетворяется в наших разрывных постановках для $\zeta$. Однако необходимость этого условия не была доказана.

Вазов [1957] применил методы асимптотических разложений для доказательства сходимости решения конечно-разностного уравнения в случае, когда граничные значения представляли собой кусочно аналитические функции, а граница — аналитическую кривую без угловых точек. Он также доказал существование (и дал форму) асимптотического разложения в случае угла, образованного пересечением двух дуг аналитических кривых. Вудс [1953] предполагал различные формы особенностей для $\psi$ на границе (включая случай, когда $\psi$ конечна, но имеет бесконечные производные) и показал, как формально исключить особенности и решить получающиеся конечно-разностные уравнения методом Саусвелла. Он также ссылается на Саусвелла, когда говорит, что скорость сходимости итерационного процесса замедляется при скруглении угла.

В другой статье при изучении сходимости решения конечно-разностного уравнения в окрестности угловой точки Лаасонен [1958а] продемонстрировал как аналитические исследования, так и численный эксперимент. Эта статья имеет важное значение для задач вычислительной гидродинамики. Лаасонен показал вредное влияние на скорость сходимости как наличия угловой точки, так и разрыва функции. Если для прямолинейной границы с непрерывными значениями функции на границе

ошибка $E = O(\Delta^2)$, где $\Delta$ — размер шага сетки, то для прямолинейной границы с разрывными значениями функции на границе $E = O(\Delta)$; для прямого угла с непрерывными граничными значениями функции $E = O(\Delta^{4/3})$; для прямого угла с разрывными граничными значениями функции $E = O(\Delta^{2/3})$. Угловая точка $C$ на рис. 3.22 как раз соответствует последнему случаю, поэтому в данном случае решение в окрестности угловой точки имеет *менее* чем первый порядок точности. Форсайт и Вазов [1960] предполагают, что наличие угловой точки может оказать не только локальное, но и глобальное влияние на точность, хотя численные эксперименты Чена [1970б] в случае течения сжимаемой жидкости показывают, что ошибки, возникающие в угловых точках, быстро затухают. (См. также Мета и Лаван [1968]) для случая течения несжимаемой жидкости.)

Особенности типа вершин выпуклого угла рассматриваются также в работах других авторов. Уайтмен [1967] рассмотрел такую геометрическую особенность в случае уравнения Лапласа $\nabla^2\psi = \zeta = 0$, используя метод конформного отображения, который, однако, не применим для уравнения Пуассона. Он утверждал, что даже при $\zeta = 0$ вблизи угловой точки девятиточечные схемы менее точны, чем пятиточечные. Уайтинг [1968] применил метод Мотца (см. также Вудс [1953]), в котором при релаксационном процессе лапласиан в узлах вблизи угловой точки представляется не пяти- или девятиточечными разностными аналогами, а отрезками рядов по тригонометрическим функциям. Турайсами [1967] рассмотрел влияние особенностей в граничных условиях на скорость сходимости разностного решения уравнения Пуассона. Синнотт [1960] и Уиглн [1969] также изучали влияние угловых точек на решение уравнения Пуассона, в то время как Жаме [1968] доказал теорему существования в случае особенности в величине $\zeta$ при решении уравнения переноса вихря, имеющего параболический тип. Хауэлл и Спонг [1969] обсуждали аналогичные вопросы в случае геометрической особенности на клине, находящемся в потенциальном потоке невязкой сжимаемой жидкости.

Представляется, что хорошая точность вблизи вершины выпуклого угла и достаточно полная ясность в вопросе об отрыве вблизи угловой точки могут быть достигнуты только путем локального решения в полярных координатах с центром в угловой точке.

## 3.4. Критерии сходимости и начальные условия

Термин «сходимость» употребляется в двух различных смыслах. Термин «*итерационная сходимость*» относится к окончательному выходу на решение конечно-разностного уравнения,

рассчитываемое при помощи итераций. Этот термин означает, что достигается приемлемое решение дискретного уравнения Пуассона в пределах некоторой точности, для чего требуется выполнение в известном смысле равенства $\psi^{k+1} \approx \psi^k$. Он означает также, что при разрешении при помощи итераций неявного граничпого условия для вихря $\zeta$ достигается выполнение равенства $\left(\zeta_w^{n+1}\right)^{k+1} \approx \left(\zeta_w^{n+1}\right)^k$. Оба эти итерационные процессы включаются в итерационный цикл, сходимость итераций в котором приводит к стационарному решению (если оно существует), когда выполняется равенство $\zeta^{n+1} \approx \zeta^n$. Другое значение термина «сходимость» относится к обычно используемому математиками понятию сходимости, которую здесь мы будем называть *аппроксимационной сходимостью* для того, чтобы отличить ее от итерационной сходимости. Аппроксимационная сходимость есть не что иное, как сходимость решения конечно-разностного уравнения к решению дифференциального уравнения в частных производных при $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$.

*Ни для итерационной сходимости, ни для аппроксимационной сходимости не имеется какого-либо определенного критерия.*

Обычно в качестве *критерия итерационной сходимости*, например для достижения стационарного значения $\zeta$, берется условие вида

$$\max_{i,\,j} \left| \zeta_{i,\,j}^{n+1} - \zeta_{i,\,j}^{n} \right| \leqslant \varepsilon \qquad (3.501а)$$

и аналогичные условия для функции тока $\psi^{k+1}$ и $\left(\zeta_w^{n+1}\right)^{k+1}$. Часто в критерии итерационной сходимости фигурирует относительная ошибка

$$\max_{i,\,j} \left| \frac{\zeta_{i,\,j}^{n+1} - \zeta_{i,\,j}^{n}}{\zeta_r} \right| \leqslant \varepsilon, \qquad (3.501б)$$

где $\zeta_r$ — некоторое характерное для задачи значение $\zeta$: или $\zeta_r = \max\limits_{i,\,j} \left| \zeta_{i,\,j}^{n} \right|$, или просто $\zeta_r = \zeta_{i,\,j}^{n}$. Последний критерий имеет больше смысла, но, очевидно, несколько опасен, так как локально (в некоторых точках) значения $\zeta_{i,\,j}^{n}$ могут оказаться близкими к нулю, что в свою очередь может привести к переполнению в арифметическом устройстве ЭМВ при делении в формуле (3.501 б). Значение $\varepsilon$, входящее в условие (3.501), в опубликованных открытых работах меняется от $10^{-3}$ до $10^{-8}$, откуда можно понять, что в целом идея не очень рациональна, и в действительности дело обстоит именно так. Величину $\varepsilon$ в условии (3.501) можно выбрать сколь угодно малой, однако если решение ведет себя так, как показано на рис. 3.32, то при этом возможно преждевременное приостановление итерационного процесса. Такое поведение не столь уж редко встречается

при решении полной системы уравнений для $\psi$ и $\zeta$; см., например, Ингэм [1968]. (Решение уравнения эллиптического типа обычно ведет себя лучше.) Можно попытаться избежать преждевременного окончания итерационного процесса, введя в расчеты еще критерий для второй производной следующего вида:

$$\Delta^n\zeta = \max_{i,\,j} \left| \zeta_{i,\,j}^{n+1} - \zeta_{i,\,j}^{n} \right| < \varepsilon_1, \tag{3.502а}$$

$$\Delta^n\Delta^n\zeta = \left| \Delta^{n+1}\zeta - \Delta^n\zeta \right| < \varepsilon_2 \tag{3.502б}$$

и/или проводя контроль через несколько итераций, например по критерию

$$\max_{i,\,j} \left| \zeta_{i,\,j}^{n+10} - \zeta_{i,\,j}^{n} \right| < \varepsilon. \tag{3.503}$$

Но ни один из этих критериев не может заменить фактического анализа итерационого процесса по графикам, отражающим его

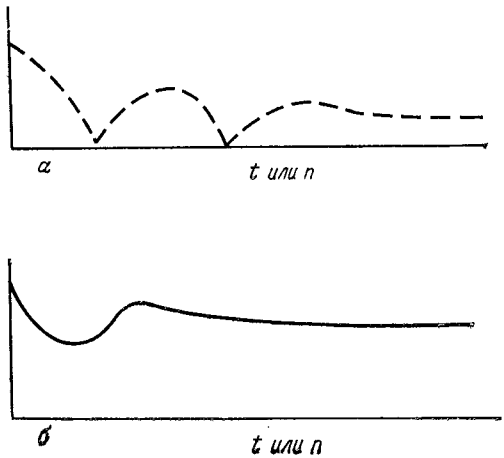



Рис. 3.32. Зависимость от времени некоторых характеристик решения задачи о течении вязкой жидкости в области с заданными входной и выходной границами. *а* — по оси ординат отложена величина $\max\limits_{i,\,j} \left| \zeta_{i,\,j}^{n+1} - \zeta_{i,\,j}^{n} \right|$; *б* — по оси ординат отложена величина $\zeta_{i,\,j}^{n}$ или $\sum\limits_{i,\,j} \left| \zeta_{i,\,j}^{n} \right|$.

поведение (рис. 3.32), и субъективного суждения о его сходимости. Большинство исследователей выбирают численное значение $\varepsilon$, соответствующее их субъективным суждениям о сходимости, и при публикации приводят только величину $\varepsilon$. В действительности они удовлетворяются тем, что исследуют графики, подобные представленным на рис. 3.32, и убеждаются

в сходимости принятой ими *процедуры*, а затем выбирают $\varepsilon$ исходя из имеющегося в их распоряжении машинного времени!

Чтобы прийти к определенному выводу, введем следующие дополнительные обозначения. Пусть $\zeta^P$ — (точное) решение дифференциального уравнения в частных производных, $\zeta^F$ — точное решение конечно-разностного уравнения, $\zeta^\infty = \lim_{k\to\infty} \zeta^k$ в итерационном процессе, а $\zeta^{k+1}$ — итерированное значение, при котором выполняется критерий сходимости. Заметим (Парис и Уитекер [1965]), что $\zeta^\infty$ не обязательно равно $\zeta^F$, так как $\zeta^\infty$ получается при помощи итерационной процедуры, в которой возможно систематическое накопление ошибок округления. Таким образом в нашем критерии сходимости дается ограничение на $|\zeta^{k+1} - \zeta^k|$, но не накладывается каких-либо ограничений на величину $|\zeta^{k+1} - \zeta^\infty|$, а поэтому и на величину $|\zeta^{k+1} - \zeta^F|$. Далее, нас интересует ограничение на величину $|\zeta^P - \zeta^F|$, которая должна входить в критерий аппроксимационной сходимости и столь же неопределенна, как и все остальные величины в рассмотренной последовательности.

Существует семь неотъемлемых требований, которые необходимо учесть при попытке сформулировать критерий итерационной сходимости.

(1) Отметим, что хотя предпочтительнее анализировать графики, дающие поведение итерационного процесса, наподобие рис. 3.32, необходимо также проверять выполнение количественного критерия, подобного критериям (3.501) и (3.503), как во внутреннем итерационном процессе при решении уравнения Пуассона для $\psi^{k+1}$, так и в итерационном процессе для неявного расчета значений $\left(\zeta_w^{(n+1)}\right)^{k+1}$ на стенке. Вопрос об адекватности этого критерия можно субъективно решить заранее, контролируя поведение итерационного процесса для двух таких задач, но при решении задачи в целом не имеет практического смысла следить за чем-либо иным, кроме сходимости решения по времени. (Привлекательность прямых методов решения уравнения Пуассона связана с тем, что здесь не нужно мучиться с выбором критерия сходимости.)

(2) Отметим, что для проверки сходимости по критерию вида (3.501) требуется определенное машинное время и для сокращения этого времени проверку следует осуществлять только через 10 или через какое-либо другое число итераций для $\psi$, как в случае критерия (3.503).

(3) Если для сходимости $\zeta^n$ проводится количественная проверка, то должна быть учтена возможность неустойчивости, связанной с расчленением решения во времени; такую неустойчивость нельзя обнаружить при проверке сходимости по любому

критерию, основанному на величине вида $|\zeta^{n+p} - \zeta^n|$, где $p$ — некоторое четное число.

(4) Скорость сходимости различна как для разных функций, описывающих течение, так и для одной и той же функции в разных точках области течения. Если известна функция с наименьшей скоростью сходимости итераций, то проверку можно проводить только по этой функции; в противном случае следует проверять все переменные. (Обычно скорость сходимости для вихря $\zeta$ меньше, чем для составляющих вектора скорости, для которых в свою очередь скорость сходимости меньше, чем для функции тока $\psi$, из-за операции дифференцирования.)

Рискованно также проводить проверку по какой-либо переменной только в одной точке: параметры течения в разных областях задачи могут сходиться с существенно различными скоростями. Например, при использовании стационарных методов с «комбинированными итерациями» (см. разд. 3.1.22) было обнаружено (Текстор [1968], Текстор с соавторами [1969]), что скорость сходимости для функции $\psi^{n+1}$ меньше, чем для вихря $\zeta^{n+1}$; противоположное явление наблюдается при использовании нестационарных методов. В задаче об отошедшей ударной волне давление в точке торможения сходится гораздо медленнее плотности в той же точке, а это означает, что в качестве переменной для проверки сходимости не следует брать плотность.

(5) Величина $\varepsilon$ должна зависеть от величины шага сетки; если шаг сетки уменьшается, то соответственно должно уменьшаться $\varepsilon$.

(6) В формулировке любого утверждения, относящегося к критерию достижения стационарного значения $\zeta$ (как долго решение должно устанавливаться или какой критерий по $\varepsilon$ должен выполняться), лучше использовать соответствующее физическое время $\bar{t}$, а не номер итерации $n$. Например, критерий (3.501) может выполняться на *любой* стадии расчета и при *любом* $\varepsilon$ просто за счет выбора достаточно малого $\Delta t$. Более осмыслен критерий

$$\max_{i,\,j} \left| \zeta_{i,\,j}^{t+1} - \zeta_{i,\,j}^{t} \right| < \varepsilon, \tag{3.504а}$$

где $t = \bar{t}(U_0/L)$, для задач с преобладающей конвекцией ($\mathrm{Re} \gg 1$) или критерий

$$\max_{i,\,j} \left| \zeta_{i,\,j}^{t'+1} - \zeta_{i,\,j}^{t'} \right| < \varepsilon, \tag{3.504б}$$

где $t' = \bar{t}(\nu/L^2) = t/\mathrm{Re}$, для задач с преобладающей диффузией ($\mathrm{Re} \ll 1$); см. разд. 2.4. Точно так же сообщение, что решение получено при $n = 1000$, несет меньше информации, чем указание для этого решения максимальных значений $t$ или $t'$, которые, конечно, зависят от принятой в методе величины $\Delta t$.

Сон и Ханратти [1969] оценивали стационарное значение коэффициента сопротивления для сферы, графически представляя зависимость $C_D$ от $1/t_{\max}$ и экстраполируя на $1/t_{\max} = 0$. Никаких подробностей, касающихся экстраполяции, они не приводили, но в действительности проведение такой экстраполяции по лекалу или «на глазок», вероятно, так же справедливо, как и любая другая процедура, хотя ни одна из этих процедур неповторима.

(7) Наконец, сходимость численного метода в целом, включая расчет граничных точек, особенно рекомендуется проверять на крайне грубой сетке, но с такой точностью решения, которую допускает длина машинного слова. Использование грубой сетки с несколькими стандартными внутренними точками обычно позволяет получить решение с «машинной» точностью за приемлемое время. Затем тест может быть повторен с существенно отличными начальными условиями и желательно с «противоположным» первому случаю направлением счета в итерационном процессе. Если два таких решения согласуются, то можно утверждать (хотя и не строго, но по крайней мере с чистой совестью), что данный метод сходится.

Имеются и некоторые другие способы проверки сходимости, которые целесообразно рассматривать для каждой задачи. Том [1933], а также Том и Апельт [1961] предложили критерий сходимости, основанный на величине «невязки» (см. разд. 3.2.3 и 3.2.4). Вообще говоря, даже для линейных уравнений такой тип проверки может оказаться ненадежным; см. Форсайт [1970]. Браун [1967] отметил, что в задаче тепловой конвекции температуры и скорости переноса тепла (которые представляют наибольший интерес) сходились задолго до того, как сходились скорости течения; убедившись в сходимости по скоростям, в дальнейшем он мог прекращать итерационный процесс раньше, как только устанавливалось поле температур.

Брили [1970] проверял сходимость итераций для $(\psi^{n+1})^{k+1}$ при решении уравнения Пуассона, определяя значение вихря на стенке $\zeta_w$ на каждой итерации $\psi$ и проверяя выполнение условия $\Delta^k\zeta_w < \varepsilon_1$. Этот чувствительный и рациональный тест для $\psi$ обладает также и тем преимуществом, что алгоритмически вычисления имеют такой же вид, как в тесте для расчета неявного граничного условия на стенке $\Delta^n\zeta_w < \varepsilon_2$. Для того чтобы этот второй тест имел смысл, очевидно, должно выполняться условие $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$; Брили [1970] положил $\varepsilon_1 = {}^1/_2\varepsilon_2$.

Роуч и Мюллер [1970] наряду с другими авторами обнаружили, что существенный выигрыш машинного времени может быть достигнут за счет применения грубой величины критерия, скажем $\varepsilon = 10^{-4}$, при решении уравнения Пуассона на

существенно нестационарном этапе и последующего его уменьшения до $10^{-6}$ при подходе к стационарному решению.

Другой общепринятый прием заключается в том, чтобы итерационный процесс для уравнения Пуассона заканчивать либо тогда, когда $\max\limits_{i,j} |\psi_{i,j}^{k+1} - \psi_{i,j}^{k}| < \varepsilon$, либо при $k > k_{\max}$, полагая, возможно, $k_{\max} = 50$. Торранс [1968] применил этот прием и отметил, что при приближении к стационарному решению критерий итерационной сходимости для уравнения Пуассона легко удовлетворялся при $k < k_{\max}$. Далее он вновь решал уравнение Пуассона только на $(n+p)$-м слое по времени, где $p \approx 1 + (k_{\max} + k_{\text{сх}})/4$, причем $k_{\text{сх}}$ — число итераций $k$, требовавшихся для сходимости решения уравнения Пуассона при предыдущем его итерировании на слое $n$ [1]). Следовательно, поле скорости при решении уравнения переноса вихря остается «замороженным» в течение $p$ шагов по времени, что приводит к существенной экономии машинного времени.

Многие из сделанных выше замечаний о итерационной сходимости приложимы также и к понятию *аппроксимационной сходимости*. После того как на разностной сетке с величиной шага $\Delta_1$ получено решение конечно-разностного уравнения, можно рассчитать другое решение на сетке с $\Delta_2 = \Delta_1/2$, где $\Delta_1$ может быть любой из величин $\Delta x$, $\Delta y$ и $\Delta t$ (если эти величины равны, то им равна и $\Delta_1$). Затем сходимость проверяется по равенству

$$\zeta(\Delta_2) = \zeta(\Delta_1) + \varepsilon \tag{3.505}$$

и т. п. Конечно, о сходимости можно судить по графику, изображающему решение в зависимости от $\Delta$ или от $1/\Delta$. Далее вычисляется разность между $\zeta(\Delta_2)$ и $\zeta(\Delta_1)$, и она служит той величиной, по которой можно судить о сходимости, но это суждение остается субъективным. Выбор величин $\varepsilon$ обычно определяется имеющимся машинным временем и объемом памяти машины.

Как правило, при решении дифференциальных уравнений в частных производных нерационально уменьшать величину шага сетки даже до величины $\Delta_3 = \Delta_1/4$; в действительности обычно рассчитывается только одно решение; оно и публикуется — хорошее ли оно или плохое. Было бы прекрасно, если бы мы могли с уверенностью хотя бы качественно представить поведение параметров течения исходя из решения, полученного

[1]) Предположим, например, что $k_{\max} = 50$, и допустим, что итерационный процесс при решении уравнения Пуассона на слое по времени $n = 1000$ сходился при $k_{\text{сх}} = 18$ итераций. Тогда $p = 1 + (50 + 18)/4 = 18$, поэтому уравнение Пуассона для $\psi$ можно не решать заново вплоть до слоя $n = 1018$.

на грубой сетке; иной раз это возможно, но такая практика опасна. Например, Бургграф [1968], решая задачу о течении жидкости внутри замкнутой прямоугольной области с подвижной стенкой, обнаружил противоположные тенденции в движении центра вихря в зависимости от числа Re для решений, полученных на грубой и мелкой сетках.

Стоит отметить, что скорость сходимости решения в случае схем второго порядка точности с ошибкой аппроксимации $O(\Delta^2)$ подчиняется квадратичному закону, а в случае схем первого порядка точности с $O(\Delta)$ — линейному закону, поэтому о реальной сходимости легче судить в случае схем второго порядка точности.

Здесь стоит вспомнить о известном способе, называемом экстраполяционным методом Ричардсона [1]) (Ричардсон [1910]; Шортли и Уэллер [1938]; Сальвадори и Барон [1961]) и служащем для оценки окончательной аппроксимационной сходимости разностного решения в схемах второго порядка точности. Пусть $\zeta$ — истинное решение дифференциального уравнения в частных производных с вычислительными граничными условиями, т. е. $\zeta = \lim\limits_{\Delta \to 0} \zeta(\Delta)$. Тогда ошибка, допущенная в решении $\zeta(\Delta_1)$ в некоторой точке $(x_1, y_1, t_1)$, может быть записана в виде ряда Тейлора

$$E_1 = \zeta - \zeta(\Delta_1) = a\Delta_1^2 + b\Delta_1^4 + \ldots . \tag{3.506}$$

Если $\Delta_2 = (1/p)\Delta_1$, где $p$ — некоторое целое число, то можно получить разностное решение $\zeta(\Delta_2)$ в той же точке $x_1$, $y_1$, $t_1$ и записать ошибку в виде

$$E_2 = \zeta - \zeta(\Delta_2) = a\Delta_2^2 + b\Delta_2^4 + \ldots . \tag{3.507}$$

Исключая из этих двух разложений $a$, получаем аппроксимацию более высокого порядка:

$$\zeta = \zeta(\Delta_2) - \frac{\zeta(\Delta_2) - \zeta(\Delta_1)}{1 - (\Delta_1/\Delta_2)^2} + O\left(\Delta_1^2\Delta_2^2,\ \Delta_2^4\right) \tag{3.508а}$$

и при $\Delta_2 = \Delta_1/2$ имеем

$$\zeta = {}^4/_3\,\zeta(\Delta_2) - {}^1/_3\,\zeta(\Delta_1) + O(\Delta^4). \tag{3.508б}$$

Неудобство, связанное с этим методом, заключается в том, что практически нет ни путей для нахождения коэффициентов при $\Delta^4$ и при членах более высокого порядка, ни способов

[1]) Этот прием известен под названием «экстраполяция к пределу», «продолженный подход к пределу» и «итерационная экстраполяция».

установить, является ли сходимость монотонной по $\Delta$[1]). Если сходимость не монотонна, то экстраполяция Ричардсона может привести к оценке $\zeta$, худшей чем $\zeta(\Delta_1)$. Экстраполяционные методы могут привести также к увеличению как ошибок округления (Бёрджес [1971]), так и ошибок в итерационном процессе.

Для того чтобы оценить аппроксимационную сходимость решения по шагу сетки, не меняя этого шага, можно провести пересчет задачи по схеме другого порядка точности. Том и Апельт [1961] предложили при $\Delta x = \Delta y$ пересчитывать оператор Лапласа ($\nabla^2\psi$ в уравнении Пуассона и $\nabla^2\zeta/\mathrm{Re}$ в уравнении переноса вихря) при помощи оператора, построенного на пятиточечном диагональном шаблоне (см. разд. 3.2.10), который имеет порядок точности $O(\sqrt{2}\Delta)$, или при помощи других шаблонов для лапласиана. Пересчет с помощью схем первого, второго и четвертого порядка точности, рассмотренных в разд. 3.1, предполагает то же самое. Заметим, что соответствующим образом должен быть изменен и порядок точности граничных условий. В опубликованных работах по вычислительной гидродинамике такой подход не использовался.

Важное замечание о аппроксимационной сходимости сделал Чен [1968, 1970]. Даже если и удается найти предел $\lim_{\Delta\to 0}\zeta(\Delta)$ или добиться выполнения равенства $\zeta(\Delta_2) = \zeta(\Delta_1) + \varepsilon$ при произвольно малом $\varepsilon$, для задач внешнего обтекания может проявиться эффект вычислительных граничных условий. Строго говоря, необходимо также проверять сходимость в интересующей нас области, когда «бесконечно удаленные» границы (верхняя, нижняя, входная и выходная) отодвигаются от этой области. Проверка сходимости только по шагу сетки или при помощи методов более высокого порядка *не дает* информации для установления сходимости в смысле уменьшения влияния границ.

В этой связи стоит упомянуть работу Гамилеца и Рааля [1969]. Они решали задачу об обтекании кругового цилиндра в полярной системе координат с разностной сеткой, постирающейся до $r = r_b$; все граничные условия, соответствующие «бесконечно удаленной» границе, ставились на окружности такого

[1]) Аппроксимационная сходимость с достоверностью монотонна для уравнения Лапласа $\nabla^2\psi = 0$ и для простого уравнения диффузии $\partial\zeta/\partial t = \alpha\nabla^2\zeta$, но не обязательно для уравнения Пуассона или для нелинейного уравнения с конвективными и диффузионными членами. Другие ссылки по применению экстраполяционных методов для дифференциальных уравнений в частных производных можно найти в работе Бёрджеса [1971] и в разд. 5.8 настоящей книги. Шёнхерр и Черчилл [1970] рассмотрели экстраполяцию нестационарных решений к стационарному пределу для уравнения диффузии; Штеттер [1970] рассмотрел экстраполяцию Ричардсона для жестких уравнений.

радиуса. Расчеты проводились при двух значениях $r_b$; предполагая, что скорость сходимости подчиняется квадратичному закону, эти авторы оценили коэффициент сопротивления кругового цилиндра при помощи экстраполяционного метода Ричардсона, проводя экстраполяцию до $1/r_b = 0$.

Другую информацию об ошибках аппроксимации можно получить 1) вычисляя ошибки, связанные с нарушением свойства консервативности (см. разд. 3.1.3) для неконсервативных схем, 2) вычисляя контурный интеграл от $\partial\zeta/\partial n$ по кривой, охватывающей границу тела (см. задачу 3.32), и 3) сравнивая два значения для давления в угловой точке контура тела (см. разд. 3.5.2).

Если для нахождения стационарного решения полной задачи о течении несжимаемой жидкости применяются нестационарные двухслойные схемы и если в итерационном процессе для нахождения $\psi^{k+1}$ и $(\zeta_\omega^{n+1})^{k+1}$ используются неявные достаточно хорошо сходящиеся [1]) методы, то *начальные условия* будут несущественны. (Начальные условия, очевидно, определяют начальное нестационарное решение, но даже это влияние экспоненциально затухает по времени, см., например, Бёрдсли [1969].)

Далее, начальные условия обычно не оказывают существенного влияния на требуемое для расчета машинное время, хотя многие исследователи предполагают противоположное. Начальные условия слабо влияют на требуемое машинное время, поскольку ошибки для выбираемого начального приближения обычно ограничены и по величине на много порядков превосходят величину, входящую в критерий сходимости. Например, если безразмерный расход в канале нормирован так, что $\psi_{\max} = O(1)$, то начальное приближение $\psi^0 = 0$ во всех внутренних точках будет давать ошибку только порядка $O(1)$. Очень хорошее начальное приближение для поля течения с отрывом в расширяющемся канале может давать ошибки в величине $\psi^0$ порядка $O(10^{-1})$. Однако если в критерии сходимости взять величину $\varepsilon = 10^{-6}$, то улучшение будет незначительным.

Для лучшего понимания процесса сходимости следует помнить, что при расчете течений с большими числами Re ошибка в значении вихря $\zeta$ в единственной узловой точке вблизи входной границы и вне пограничного слоя должна *за счет конвекции уноситься* из рассчитываемой области. Тогда нужное для сходимости число шагов по времени будет ограничено снизу величиной $n = \tau/\Delta t$, где $\tau$ — время переноса частицы из указанного положения через всю рассчитываемую область. Это

---

[1]) Если это не так, то устойчивость метода в целом можно повысить за счет уменьшения $\Delta t$ на начальной стадии расчета (Бао и Догерти [1969]).

время $\tau$ не зависит от размера ошибки и поэтому приближенно представляет собой время, нужное для сходимости.

В качестве характерного примера несущественности начальных условий рассмотрим задачу об обтекании обратного уступа (рис. 3.22). Автор данной монографии решал эту задачу, принимая в качестве начальных условий $\psi = 0$ во всех внутренних точках и вдоль границы В 1—В 5—В 2, задавая на входной границе значение $\psi$, соответствующее течению в пограничном слое, и считая, что граница В 3 является «крышкой», т. е. $\psi(\text{В}\,3) = \psi(1, J)$; для вихря всюду полагалось $\zeta = 0$. Такое начальное приближение кажется совершенно неразумным. Однако после первой итерации при решении уравнения Пуассона с граничными условиями на входной границе, заданными по формулам (3.478), всюду появилась отличная от нуля скорость конвекции. К моменту $n = 30$ формировалась вполне правдоподобная зона возвратно-циркуляционного течения, а это указывало на то, что начальное приближение оказалось лучше, чем можно было ожидать. При таком грубом подходе для окончательной сходимости при $\mathrm{Re} > 1$ потребовалось такое же машинное время, как и при общепринятом подходе, заключающемся в расчете очередного варианта при начальном приближении, взятом по результатам предыдущего варианта, полученным при ином Re или иных условиях на входной границе.

Начальные условия могут оказывать влияние в методах расчета стационарных течений при использовании «непрерывных замещений» при задании начального приближения в нестационарных методах, если уравнение Пуассона решается с недостаточной степенью точности, и в неявных методах, если граничное условие на стенке $\left(\zeta_\omega^{n+1}\right)^{k+1}$ недостаточно проитерировано. В этих случаях плохие начальные условия могут привести к неустойчивости, связанной с нелинейностью уравнений. (В двух последних случаях неустойчивость можно предотвратить уменьшением $\Delta t$ на начальной стадии расчета.) Даже в случае простейших уравнений, когда они решаются при помощи многослойных схем, начальные условия могут вызвать возникновение лишенных смысла осцилляций.

Поскольку данные на предыдущем слое по времени иногда могут быть очень хорошим начальным приближением для последующего слоя, точность начального условия может также оказать существенное влияние на итерируемое решение уравнения Пуассона. Сошедшееся решение $\psi^{n+1}$ на новом слое по времени отличается от $\psi^n$ только за счет источникового члена $\zeta$ и за счет граничных условий для $\psi$. Если $\Delta t$ достаточно мало или если сходимость по времени нестационарной задачи в целом почти достигнута, то $\zeta^{n+1} \approx \zeta^n$ и $\psi^{n+1} \approx \psi^n$ на границах. (Для задач, подобных задаче о течении внутри замкнутой прямо-

угольной области с подвижной стенкой, $\psi$ фиксировано вдоль всех границ и в течение всего времени.) Тогда выбор решения $\psi^n$ в качестве начального приближения $(\psi^{n+1})^{k=0}$ будет очень эффективным. Действительно, если сходимость для вихря $\zeta$ почти достигнута, то для функции тока $\psi$ критерий сходимости $|\psi^{k+1} - \psi^k| < \varepsilon$ часто удовлетворяется за одну итерацию, так что применяемый метод автоматически сводится к непрерывным замещениям, как в случае расчета стационарных течений с помощью итераций.

Линч и Райс [1968] показали, что для неявных схем метода чередующихся направлений скорость сходимости выше в случае гладких ошибок в начальных данных. На практике это обычно выполняется, поскольку гладкими являются и окончательное решение, и начальное приближение (включая случай $\psi = 0$).

Точность начальных условий может играть более важную роль в случае сверхзвуковых течений, где плохие начальные данные могут привести к распространению паразитных волн.

## 3.5. Расчет давления

Одно из преимуществ работы с уравнениями, описывающими течение несжимаемой жидкости, заключается в том, что здесь число зависимых переменных может быть уменьшено. Давление исключается из уравнений количества движения в переменных $(u, v, P)$ при помощи перекрестного дифференцирования, как в разд. 2.2. Теперь мы будем находить поле давления по известному численному решению для $\psi$ и $\zeta$.

Уравнение для давления представляет собой уравнение Пуассона и аналогично уравнению для функции тока. Однако при его решении методом последовательной верхней релаксации возникают значительные трудности из-за иного типа граничных условий, которые ставятся в этом случае.

### 3.5.1. Численное интегрирование для определения давления

Уравнения (2.1)—(2.3), записанные в безразмерных переменных (см. первое упражнение в разд. 2.4), имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 u, \tag{3.509а}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 v, \tag{3.509б}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{3.509в}$$

где $P$ — безразмерное давление:

$$P = \overline{P}/(\bar{\rho}\bar{U}_0^2). \tag{3.510}$$

Чтобы определить поле давления, расчет можно начинать с произвольной точки, принимая в ней произвольное характерное значение $P$ (постоянная интегрирования); дискретизированные уравнения (3.509), содержащие $\partial P/\partial x$ и $\partial P/\partial y$, интегрируются численно, причем составляющие скорости вычисляются по известному решению для функции тока. (Такой подход применяли многие авторы, в частности Кавагути [1965], Пирсон [1965а], Бургграф [1966], Хын и Макано [1966], Томан и Шевчик [1966], Римон и Чен [1969], Лаван с соавторами [1969], Сон и Ханратти [1969], Маслях и Эпштейн [1970], Шавит и Лаван [1971].) Если интересуются только давлением на поверхности тела, как, например, при определении коэффициента сопротивления, то такой метод может оказаться приемлемым. Расчет давления на поверхности удобно проводить при помощи легко выводимого соотношения (см. задачу 3.32)

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial \zeta}{\partial n}, \tag{3.511}$$

где $n$ и $s$ — нормаль и касательная к поверхности (см. Пирсон [1965а]). Полное описание трудностей, возникающих при численной реализации этого способа, можно найти в работе Масляха и Эпштейна [1970]. Но, вообще говоря, если интегрирование вести по различным путям до одной и той же точки, данный способ приводит к различным результатам. Такое различие частично обусловлено ошибками при вычислении функции тока $\psi$. Но даже если во всех узловых точках известно точное решение для функции тока $\psi$, интегрирование по различным траекториям будет приводить к разным результатам из-за ошибок, допущенных при численной квадратуре[1]). Далее заметим, что в уравнении (3.509) интегрируются *частные производные* скорости, для расчета которых требуется двукратное дифференцирование численно найденного поля функции тока, что обычно приводит к снижению точности. Этот способ особенно чувствителен к ошибкам в задачах, подобных задаче, представленной на рис. 3.22, когда путь интегрирования проходит вблизи от угловой точки.

### 3.5.2. Уравнение Пуассона для давления

Более точное решение можно найти, интегрируя уравнение Пуассона для давления, которое получается следующим образом.

---

[1]) Такое интегрирование известной функции $f(x, y)$ по двум независимым переменным Бакингем [1962] называет «кубатурой».

Продифференцируем уравнение (3.509а) по $x$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=$$
$$=-\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 u). \qquad (3.512)$$

Продифференцируем уравнение (3.509б) по $y$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=$$
$$=-\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 v). \qquad (3.513)$$

Сложение уравнений (3.512) и (3.513) дает

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+$$
$$+2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)+v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=$$
$$=-\nabla^2 P+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 u)+\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 v)\right]. \qquad (3.514)$$

Из уравнения неразрывности (3.509в) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial t}(0)=0; \qquad (3.515)$$

кроме того,

$$u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)=u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0, \qquad (3.516)$$

$$v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0. \qquad (3.517)$$

Наконец, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 u)+\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 v)=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y\,\partial x^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}=$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0. \qquad (3.518)$$

С учетом равенств (3.515)—(3.518) уравнение (3.514) принимает вид

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=-\nabla^2 P. \qquad (3.519)$$

Рассмотрим тождество

$$0=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad (3.520)$$

откуда

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (3.521)$$

Подставляя этот результат в уравнение (3.519), получаем

$$-\frac{1}{2}\nabla^2 P = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{3.522}$$

(Из этого уравнения видно, что на стенке с условием прилипания $\nabla^2 P = 0$.)

Для того чтобы записать уравнение (3.522) через функцию тока $\psi$, вспомним, что

$$u = \partial\psi/\partial y, \quad v = -\partial\psi/\partial x; \tag{3.523}$$

тогда

$$-\frac{1}{2}\nabla^2 P = \left(-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right)\left(-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right), \tag{3.524}$$

или

$$\nabla^2 P = S = 2\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]. \tag{3.525}$$

Это уравнение Пуассона для давления. Обычные конечно-разностные формулы с центральными разностями по пространственным переменным (см. разд. 3.1.1) приводят к следующему выражению:

$$S_{i,j} = 2\left[\frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j}}{\Delta x^2}\,\frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j}}{\Delta y^2} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i-1,j-1}}{4\,\Delta x\,\Delta y}\right)^2\right], \tag{3.526}$$

имеющему порядок точности $O(\Delta x^2, \Delta y^2)$.

Уравнение (3.525) аналогично уравнению для функции тока $\nabla^2\psi = \zeta$, причем источниковый член $S$ аналогичен источниковому члену $\zeta$. Все методы решения уравнения Пуассона, которые были рассмотрены в разд. 3.2, применимы и в данном случае, но как будет выяснено в следующем разделе, граничные условия в этих двух случаях различны.

### 3.5.3. Граничные условия второго рода для давления

При решении уравнения $\nabla^2\psi = \zeta$ хотя бы некоторые граничные условия являются условиями первого рода, или граничными условиями Дирихле: $\psi(x, y)$ есть заданная функция вдоль границ. При решении уравнения Пуассона для давления ставятся условия второго рода (граничные условия Неймана), т. е. на границе задается $\partial P(x, y)/\partial n$, где $n$ — нормаль к границе. Величина градиента давления находится из уравнения (3.509).

*Упражнение.* Записать конечно-разностное представление для составляющих градиента давления $\delta P/\delta x$ и $\delta P/\delta y$ через функцию тока $\psi$.

*Упражнение.* Показать, что для стенки с условием прилипания (Пирсон [1965a])

$$\frac{\delta P}{\delta n} = -\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\delta\zeta}{\delta s}, \tag{3.527}$$

где $n$ и $s$ — нормаль и касательная к стенке.

Производная по касательной к стенке $\delta\zeta/\delta s$ в уравнении (3.527) легко вычисляется с помощью центральных разностей. Заметим, что здесь при расчете можно брать *любой метод*, поскольку при решении уравнения Пуассона градиент не пересчитывается, а отсутствие обратной связи исключает возможность появления неустойчивости. Однако предпочтение отдается схемам с центральными разностями, согласующимися со вторым порядком точности $O(\Delta^2)$ метода в целом. Для нестационарных решений в уравнениях (3.509) часто пренебрегают членами $\partial u/\partial t$ и $\partial v/\partial t$ и используют простейшее приближение $\partial P/\partial n \approx \approx 0$[1]).

Эти приближенные допущения не обязательны, и следует решать уравнения (3.509) точнее. Заметим, что наличие члена с коэффициентом $1/\mathrm{Re}$ отнюдь не означает, что в течениях с большими Re этим членом можно пренебрегать. Для пограничного слоя, толщина которого $\delta$ мала, известно, что $\partial P/\partial n = = O(\delta)$, но в более общем случае величина $\partial P/\partial n$ может оказаться большой. (На линии симметрии, конечно, ставится условие $\delta P/\delta n = 0$.) В окрестности угловой точки $C$ (рис. 3.22) постановка граничных условий Неймана может привести к двузначности давления в этой точке. Такую двузначность, как и двузначность функции $\zeta_c$ в способе 1 (рис. 3.30), рекомендуется сохранить, хотя это не физично. Ошибка же в «однозначности» $P_a - P_b$ может являться мерой ошибки аппроксимации вблизи угловой точки.

### 3.5.4. Итерационные методы решения

Граничные условия Неймана выдвигают два специальных требования при решении задачи. Первое требование заключается во введении градиентного условия в уравнения метода последовательной верхней релаксации. Очевидный способ решения здесь таков: вычисляются новые значения на $(k+1)$-й итерации во всех внутренних точках сетки, а затем по известной величине $\delta P/\delta n$ и вновь вычисленным значениям в точках, смежных с границей, рассчитываются значения функции на этой границе. Для точки $(i, jc)$ границы B 2 (рис. 3.22), используя в соответствии с формулой (3.380) метод последовательной верхней релаксации, получаем следующие уравнения:

---

[1]) Это приближение известно из теории пограничного слоя (см., например, Шлихтинг [1968]). Фактически в рассматриваемом случае приближение будет более точным, поскольку постоянство $P$ предполагается не поперек всего пограничного слоя, а лишь в его части, ближайшей к стенке.

для расчета внутренних точек

$$P^{k+1}_{i,\,jc+1} = \frac{\omega}{2(1+\beta^2)}\left[P^{k}_{i+1,\,jc+1} + P^{k+1}_{i-1,\,jc+1} + \beta^2 P^{k}_{i,\,jc+2} + \beta^2 P^{k}_{i,\,jc} - \right.$$
$$\left. - \Delta x^2 S_{i,\,jc+1} - 2(1+\beta^2) P^{k}_{i,\,jc+1}\right] + P^{k}_{i,\,jc+1} \qquad (3.528а)$$

(здесь $P^{k}_{i,\,jc}$ — значение на границе, взятое с $k$-й итерации);

для определения значений функции на границе

$$P^{k+1}_{i,\,jc} = P^{k+1}_{i,\,jc+1} - \frac{\delta P}{\delta n}\Delta y. \qquad (3.528б)$$

Однако такой правдоподобный способ не сходится. Решение «ползет» медленно, но неограниченно долго. Это является причиной того, что вплоть до конца шестидесятых годов большинство опубликованных работ не содержало расчетов давления, а приводившиеся в остальных работах распределения давления оказывались неверными, хотя они и удовлетворяли какому-либо «критерию сходимости», подобному условию (3.501).

Метеоролог Миякода [1962] рекомендует подставлять градиентные граничные условия непосредственно в разностную схему метода последовательной верхней релаксации при расчете внутренних точек, смежных с границами[1]). Таким образом, уравнение в виде (3.528а) берется только во внутренних точках, отстоящих от границ более чем на одну ячейку. В точках, смежных с границей, уравнение (3.528а) заменяется следующим:

$$P^{k+1}_{i,\,jc+1} = \frac{\omega}{2(1+\beta^2)}\left[P^{k}_{i+1,\,jc+1} + P^{k+1}_{i-1,\,jc+1} + \beta^2 P^{k}_{i,\,jc+2} + \right.$$
$$+ \beta^2\left(P^{k+1}_{i,\,jc+1} - \left.\frac{\delta P}{\delta n}\right|_{i,\,jc}\Delta y\right) - \Delta x^2 S_{i,\,jc+1} -$$
$$\left. - 2(1+\beta^2) P^{k}_{i,\,jc+1}\right] + P^{k}_{i,\,jc+1}, \qquad (3.529)$$

которое разрешается алгебраически относительно члена $P^{k+1}_{i,\,jc+1}$, входящего в обе части равенства. После того как сходимость достигнута, окончательные значения функции на границе можно найти по уравнению (3.528б).

Уравнение (3.529) отличается от (3.528а) и (3.528б) только номером слоя по времени в члене $\beta^2\left(P^{k+1}_{i,\,jc+1} - \delta P/\delta n\,|_{i,\,jc}\,\Delta y\right)$.

Второе требование, связанное с постановкой условия Неймана, заключается в том, что градиент давления на границе должен согласовываться с источниковым членом в уравнении Пуассона. По теореме Грина для существования решения диф-

[1]) Автор весьма признателен д-ру С. Пиачеку, который указал ему эту ценную работу.

ференциального уравнения (3.525) в области $R$ необходимо выполнение условия $E = \int\limits_R S\,dR - \int\limits_{\partial R} (\partial P/\partial n)\,dl = 0$ (относительно одномерного случая см. приложение А). Из-за ошибок аппроксимации значения функции на границе обычно не удовлетворяют этому условию, что приводит к медленной расходимости метода последовательной верхней релаксации. Миякода [1962] рекомендует задавать $\delta P/\delta n$ так, чтобы это условие выполнялось. Способ, предложенный Брили [1974], а также Гхиа и Гхиа (личное сообщение), заключается в нахождении дискретизированной величины $E$ и последующем решении видоизмененного уравнения $\nabla^2 P = S - E/R$, где $R$ — площадь рассчитываемой области. Если интегрирование для величины $E$ выполнено надлежащим способом (Гхиа и Гхиа; см., например, ниже уравнения (3.533) и (3.534)), то итерационная сходимость как в методе последовательной верхней релаксации, так и в неявной схеме метода чередующихся направлений существенно улучшится. Отметим, что градиентное граничное условие второго рода может потребовать специального подхода, чтобы избежать неопределенности в методе прогонки, применяемом в неявной схеме метода чередующихся направлений (см. приложение А). Если $\delta P/\delta n$ определяется со вторым порядком точности, то и весь метод в целом будет иметь второй порядок точности. Расчеты Миякоды [1962] показали, что в случае постановки условий Неймана оптимальное значение параметра релаксации $\omega_0$ увеличивается.

Если $P_{i,j}$ является решением уравнения для давления, то решением будет и $P_{i,j} + C$, где $C$ — некоторая постоянная. Частное решение определяется заданием $P$ в одной точке. Если некоторую точку, принадлежащую границе, можно рассматривать как точку, отвечающую невозмущенному потоку, то в этой точке рекомендуется положить $P = 0$; это даст возможность легко установить связь между $P$ и коэффициентом давления $C_P$, общепринятым в технике, а именно $P = 2C_p$. Эта точка может не участвовать в итерационном процессе.

### 3.5.5. Характерная величина для отсчета давления

При публикации результатов часто опускается важная деталь, связанная с проведенным выше обсуждением. Для задачи, в которой рассматривается невозмущенный поток, можно произвольно положить, что для такого потока $P = 0$. Без ограничения общности можно также для невозмущенного потока полагать $P$ равным любому другому постоянному значению; например, часто выбирают $P = 1$. В задаче о течении в

ограниченной области, например в классической задаче о течении внутри замкнутой прямоугольной области с одной подвижной стенкой (Кавагути [1961], Бургграф [1966], Пан и Акривос [1967], Донован [1970]), начальное приближение для давления в нестационарном случае также можно выбирать произвольным образом. Например, Донован [1970] полагает $P = 1$ в центре стенки, противоположной движущейся «крышке», и выбирает его в качестве характерного давления $P_r = 1$. Подчеркнем, что здесь только в начальный момент времени $P_r = 1$, а в последующие моменты времени значение характерного давления в этой точке определяется физикой задачи.

Для того чтобы определить $P_r$ в последующие моменты времени и таким образом получить характерную величину для отсчета давления во всех точках поля, необходимо обратиться к расчету термодинамических параметров при помощи уравнения состояния. Для любого газа или жидкости выполняется некоторое уравнение состояния, которое в размерных термодинамических переменных записывается так:

$$\bar{P} = f(\bar{\rho}, \bar{T}). \tag{3.530}$$

(Например, для совершенного газа $\bar{P} = \bar{\rho}\bar{R}_g\bar{T}$, где $\bar{R}_g$ — газовая постоянная.) Предположим, что начальные условия соответствуют состоянию покоя. Тогда при $n = 0$ начальные условия для размерной величины давления будут $\bar{P}_{i,j} = \text{const}$ во всей области; назовем эту постоянную величину характерным давлением $\bar{P}_r^0$. В процессе нестационарного решения вычисляется также температура (см. разд. 3.6), а по ней характерное давление. Эти расчеты могут проводиться вместе или по отдельности [1]). Температура может повыситься либо за счет неадиабатичности стенок, либо за счет диссипации (см. разд. 3.6). Последняя особенно важна при расчетах до больших моментов времени; однако в качестве иллюстрации мы рассмотрим случай, когда стенки являются адиабатическими, а диссипацией пренебрегают. Проинтегрировав уравнение состояния (3.530) по всей рассчитываемой области, получим

$$\int_{\bar{R}} \bar{P}\, d\bar{R} = \int_{\bar{R}} f(\bar{\rho}, \bar{T})\, d\bar{R}, \tag{3.531}$$

где $\bar{R}$ — площадь замкнутой области, внутри которой происходит течение. Предположим, что среда несжимаема и $\bar{T} = \text{const}$; тогда уравнение (3.531) дает

$$\int_{\bar{R}} \bar{P}\, d\bar{R} = \bar{R}\bar{P}_r^0. \tag{3.532}$$

[1]) Если температура растет, то для газа число Рейнольдса будет уменьшаться, поскольку при этом увеличивается коэффициент вязкости $\mu$.

Если ввести безразмерное давление, относя его к характерному давлению $\overline{P}_r^0$, т. е. положить $P = \overline{P}/\overline{P}_r^0$, то это уравнение примет вид

$$\int_R P\, dR = R. \tag{3.533}$$

Этот интеграл можно легко записать в конечно-разностной форме в виде суммы, связывая при этом $P$ с площадью ячейки, взвешенной с учетом применяемого конечно-разностного метода. Для методов второго порядка соответствующая взвешенная площадь имеет величину $\Delta x\, \Delta y$. Для точки, лежащей на стенке, как, например, точка $(1, j)$ (в случае сетки первого типа при расчете течения внутри замкнутой прямоугольной области), соответствующая площадь ячейки равна $\Delta x\, \Delta y/2$. Для угловой точки, такой, как точка $(1, 1)$, площадь равна $\Delta x\, \Delta y/4$. Вводя обозначения $X = (I-1)\Delta x$ и $Y = (J-1)\Delta y$, сумму можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i=2}^{I-1}\sum_{j=2}^{J-1} P_{i,j}\Delta x\,\Delta y + \sum_{j=2}^{J-1} P_{1,j}\Delta x\,\Delta y/2 + \sum_{j=2}^{J-1} P_{I,j}\Delta x\,\Delta y/2 + \\ + \sum_{i=2}^{I-1} P_{i,1}\Delta x\,\Delta y/2 + \sum_{i=2}^{I-1} P_{i,J}\Delta x\,\Delta y/2 + \\ + (P_{1,1} + P_{1,J} + P_{I,1} + P_{I,J})\Delta x\,\Delta y/4 = XY. \tag{3.534}$$

Разделив обе части этого равенства на $\Delta x \Delta y$ и учтя, что $XY/(\Delta x\,\Delta y) = (I-1)(J-1)$, получим

$$\sum_{i=2}^{I-1}\sum_{j=2}^{J-1} P_{i,j} + \sum_{j=2}^{J-1}(P_{1,j} + P_{I,j})/2 + \sum_{i=2}^{I-1}(P_{i,1} + P_{i,J})/2 + \\ + (P_{1,1} + P_{1,J} + P_{I,1} + P_{I,J})/4 = (I-1)(J-1). \tag{3.535}$$

После того как получено решение уравнения Пуассона для $P_{i,j}$ с принятым $P_r^n = 1$ (или какой-либо другой константой), вообще говоря, равенство (3.535) не будет выполняться. Тогда находится сумма, которая стоит в левой части равенства (3.535) и которую мы обозначим через $S$, и давление подправляется так, как указано ниже.

*Упражнение.* Показать, что давление $P_{i,j}$, полученное при решении уравнения Пуассона, следует заменить на $P_{i,j} - S/L$, где $S$ — сумма, стоящая в левой части равенства (3.535), а $L = (I-1)(J-1)$.

Поскольку физическое давление нельзя определить, не решая термодинамической задачи, опубликованные решения для давления, в которых принималось $P_r^n = P_r^0 = 1$, будут неполными, но их нельзя считать неправильными. Мы считаем, что

решение, в котором стенки адиабатические и диссипация отсутствует и которое удовлетворяет уравнению (3.535), является более обоснованным эталонным решением, чем решение, полученное при $P_r^n = 1$.

## 3.6. Расчет температуры и концентрации

Для несжимаемой жидкости с постоянными физическими свойствами при отсутствии внешних сил динамика течения не зависит от его термодинамики. Как только установлена кинематика течения (через поля функции тока $\psi$ и вихря $\zeta$), можно найти распределение температуры при различных граничных условиях. Аналогично можно решить и многие задачи о концентрации.

### 3.6.1. Основные уравнения

Для нестационарного течения несжимаемой жидкости с постоянными свойствами и при отсутствии источников уравнение энергии приводится к следующему виду (Шлихтинг [1968]):

$$\rho C_p \frac{D\bar{T}}{D\bar{t}} = k\bar{\nabla}^2\bar{T} + \mu\bar{\Phi}, \tag{3.536}$$

где все переменные являются размерными величинами, а $\bar{\Phi}$ — диссипативная функция, определяемая равенством

$$\bar{\Phi} = 2\left[\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right)^2. \tag{3.537}$$

Как и в разд. 2.2, запишем эти уравнения в безразмерных переменных, введя характерную скорость $\bar{u}_0$, характерную длину $\bar{L}$ и характерное время конвекции $(\bar{L}/\bar{u}_0)$. Помимо этого введем характерную положительную разность температур $\bar{T}_1 - \bar{T}_0$. (Например, если решается задача об обтекании изображенного на рис. 3.22 обратного уступа, основание которого нагрето, то в качестве $\bar{T}_1$ можно взять температуру основания уступа, а в качестве $\bar{T}_0$ — температуру невозмущенного потока на входной границе.) Тогда уравнение (3.536) примет вид

$$\rho C_p \left(\frac{\bar{u}_0}{\bar{L}}\right)(\bar{T}_1 - \bar{T}_0)\frac{DT}{Dt} = k\frac{1}{\bar{L}^2}(\bar{T}_1 - \bar{T}_0)\nabla^2 T + \mu\left(\frac{\bar{u}_0}{\bar{L}}\right)^2\bar{\Phi}. \tag{3.538}$$

Разделив на $\rho C_p(\bar{u}_0/\bar{L})(\bar{T}_1 - \bar{T}_0)$, получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathbf{V}\cdot(\nabla T) + \frac{k}{\rho C_p \bar{u}_0 \bar{L}}\nabla^2 T + \frac{\mu\bar{u}_0}{\rho C_p \bar{L}(\bar{T}_1 - \bar{T}_0)}\bar{\Phi}. \tag{3.539}$$

Далее,

$$\frac{k}{\rho C_p \bar{u}_0 \bar{L}} = \frac{k}{C_p\mu}\frac{\mu}{\rho\bar{u}_0\bar{L}} = \frac{1}{\mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Re}} = \frac{1}{\mathrm{Pe}}, \tag{3.540}$$

где Pr — число Прандтля, а Pe — число Пекле. Кроме того,

$$\frac{\mu \bar{u}_0}{\rho C_p \bar{L}(\bar{T}_1 - \bar{T}_0)} = \frac{\bar{u}_0^2/C_p}{\bar{T}_1 - \bar{T}_0} \frac{\mu}{\rho \bar{u}_0 \bar{L}} = \frac{E}{Re}, \tag{3.541}$$

где E — число Эккерта. Учитывая уравнение неразрывности $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, получаем

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}T) = \mathbf{V} \cdot \nabla T + T \nabla \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \nabla T. \tag{3.542}$$

Подстановка этих результатов в уравнение (3.539) дает уравнение энергии в безразмерных переменных

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{V}T) + \frac{1}{Pe} \nabla^2 T + \frac{E}{Re} \Phi, \tag{3.543}$$

где

$$\Phi = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \tag{3.544}$$

Если в уравнении (3.543) заменить $T$ на $\xi$, а Pe на Re и исключить из рассмотрения диссипативный член, то получится уравнение переноса вихря. Следовательно, все конечно-разностные методы, рассмотренные в этой главе, применимы и для решения уравнения энергии. Поскольку функция $\Phi$, описывающая диссипацию, не зависит от переменной $T$ (т. е. обратная связь отсутствует), она не влияет на исследование устойчивости. Действительно, так как поле скорости теперь фиксировано, анализ устойчивости линеаризованного уравнения в данном случае более приемлем, чем для уравнения переноса вихря.

Для газов число Прандтля $Pr = O(1)$, поэтому $Pe = O(Re)$ и для решения уравнения энергии можно применять те же методы, что и для уравнения переноса вихря. Для нефти $Pr \gg 1$, а для жидких металлов $Pr \ll 1$. В этих случаях числа Пекле и Рейнольдса сильно отличаются и для решения каждого из двух этих уравнений могут подходить различные методы. Более того, для описания нестационарного поведения каждого из этих уравнений могут потребоваться разные масштабы времени. Исходя из этого, Браун [1966] предлагает выбирать различные шаги по времени $\Delta t$ для двух этих уравнений.

Заметим, что поскольку уравнение энергии отщеплено от уравнений движения, то по одному известному решению для поля течения можно найти распределение температур, соответствующих различным числам Pe и E и различным граничным условиям (см., например, Роуч и Мюллер [1970]). Заметим также, что поскольку уравнение для $T$ линейно, для его решения при различных $\Phi$ можно не обращать каждый раз заново оператор Лапласа, что позволяет проводить расчет многих разнообразных вариантов распределения температуры. Кроме того,

стационарное поле температур можно получить при помощи прямых неитеративных методов, например при помощи метода расчета распространения вектора ошибки (разд. 3.2.8). Уравнение, аналогичное уравнению (3.543) без диссипативного члена Ф, можно использовать также для решения простейшей задачи о диффузии двухкомпонентной смеси, описываемой элементарным законом Фика; см., например, Берд с соавторами [1960]. В этом случае $T$ заменяется концентрацией, а число Пекле Pe числом Шмидта.

### 3.6.2. Учет диссипации

В уравнении энергии, соответствующем течению несжимаемой жидкости, часто пренебрегают диссипативным членом, поскольку $E \to 0$, когда число Маха $M \to 0$ в случае фиксированной разности характерных температур. Однако даже при малых числах Маха член Ф может играть важную роль, если разность $\bar{T}_1 - \bar{T}_0$ мала.

По определению

$$E = \frac{\bar{u}_0^2}{C_p(\bar{T}_1 - \bar{T}_0)}, \tag{3.545}$$

$$\frac{1}{E} = \frac{C_p \bar{T}_0}{\bar{u}_0^2}\left(\frac{\bar{T}_1}{\bar{T}_0} - 1\right). \tag{3.546}$$

Но

$$\frac{C_p \bar{T}_0}{\bar{u}_0^2} = \frac{C_p(\gamma R_g \bar{T}_0)}{\bar{u}_0^2 \gamma R_g} = \frac{C_p}{\gamma R_g}\left(\frac{\bar{a}}{\bar{u}_0}\right)^2, \tag{3.547}$$

где $\bar{a}$ — скорость звука, $R_g$ — газовая постоянная и $\gamma = C_p/C_v$. Далее,

$$\frac{C_p \bar{T}_0}{\bar{u}_0^2} = \frac{C_p}{\gamma R_g}\left(\frac{\bar{a}}{\bar{u}_0}\right)^2 = \frac{C_p}{\gamma R_g}\left(\frac{1}{M_0^2}\right) = \frac{C_p}{\gamma(C_p - C_v)}\frac{1}{M_0^2} = \frac{1}{(\gamma - 1)M_0^2}, \tag{3.548}$$

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{(\gamma - 1)M_0^2}\left(\frac{\bar{T}_1}{\bar{T}_0} - 1\right), \tag{3.549}$$

или

$$E = \frac{(\gamma - 1)M_0^2}{(\bar{T}_1/\bar{T}_0 - 1)}, \tag{3.550}$$

Следовательно, $E \to 0$ при $M_0 \to 0$ для $\bar{T}_1/\bar{T}_0 > 1$. Но если разность температур, которую можно записать в виде $\bar{T}_1/\bar{T}_0 - 1$, настолько мала, что E будет велико при любом малом, но

отличном от нуля $M_0$ и $\gamma > 1$, то роль диссипативного члена будет велика.

Заметим, что при $E = 0$ в уравнении (3.543) можно $T$ заменить на $-T$, а это означает, что решения для убывающей температуры аналогичны решениям для повышающейся температуры. Однако при $E > 0$ такие решения будут различаться из-за положительно определенной диссипативной функции.

### 3.6.3. Конечно-разностное представление диссипативной функции

Поскольку $u = \partial\psi/\partial y$ и $v = -\partial\psi/\partial x$, уравнение (3.544) можно переписать в виде

$$\Phi = 2\left[\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)^2, \quad (3.551)$$

или

$$\Phi = 4\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)^2. \quad (3.552)$$

Применяя обычные конечно-разностные формулы с центральными разностями по пространственным переменным (разд. 3.1.1), определим $\Phi$ со вторым порядком точности $O(\Delta x^2, \Delta y^2)$:

$$\Phi_{i,j} = \frac{1}{4}\left[\frac{\psi_{i+1,\,j+1} - \psi_{i+1,\,j-1} - \psi_{i-1,\,j+1} + \psi_{i-1,\,j-1}}{\Delta x\,\Delta y}\right]^2 +$$
$$+ \left[\frac{\psi_{i,\,j+1} + \psi_{i,\,j-1} - 2\psi_{i,\,j}}{\Delta y^2} - \frac{\psi_{i+1,\,j} + \psi_{i-1,\,j} - 2\psi_{i,\,j}}{\Delta x^2}\right]^2. \quad (3.553)$$

Поскольку $\Phi$ вычисляется только во внутренних точках и никогда не вычисляется на границах, нет необходимости применять где-либо односторонние разности. Выражение (3.553) сохраняет положительную определенность диссипативной функции.

Легко показать, что имеет место следующее интересное соотношение:

$$\Phi = \zeta^2 + S, \quad (3.554)$$

где $S$ — источниковый член в уравнении Пуассона для давления (3.525). Это точное соотношение было бы удобным при уже вычисленных $\zeta$ и $S$, но получаемая таким образом функция $\Phi$ не всегда может оказаться положительно определенной. Ошибки аппроксимации могут привести к появлению отрицательных значений функции $\zeta^2 + S$. Такие ошибки, как правило, малы, но появление отрицательных значений $\Phi$ может смутить и ввести в заблуждение. Однако при вычислении функции $\Phi$ на стенках с условием прилипания это соотношение может быть полезным

при построении графиков на ЭВМ. Поскольку на стенке при условии прилипания $S = 0$, мы имеем

$$\Phi_w = \xi_w^2, \tag{3.555}$$

т. е. здесь $\Phi$ — опять положительно определенная функция.

### 3.6.4. Граничные условия для температуры и концентрации

Граничные условия для температуры аналогичны граничным условиям для вихря, за исключением условий на стенках, где они проще. Вернемся к обозначениям, принятым на рис. 3.22. Температуры стенок могут быть фиксированы, например равны характерным температурам. Так, можно положить, что в задаче с подогреваемым основанием уступа

$$T(\mathrm{B}\,5) = 1, \quad T(\mathrm{B}\,2) = 0, \tag{3.556}$$

а в задаче с охлаждаемым основанием уступа

$$T(\mathrm{B}\,5) = 0, \quad T(\mathrm{B}\,2) = 1. \tag{3.557}$$

Возможны, конечно, любые другие распределения температур вдоль стенок, например вдоль границы B 5 можно задать $T(ic, j) = f(y)$.

Граничные условия для температуры на стенке можно задать в виде условия Неймана, т. е. задать градиент $\partial T/\partial n$. В безразмерных переменных $\partial T/\partial n = \mathrm{Nu}$, где Nu — число Нуссельта, которое соответствует безразмерной интенсивности теплопередачи. Наиболее обычным видом граничного условия является случай адиабатической стенки, когда $\mathrm{Nu} = 0$. Если же число Nu не задано, то его интересно вычислить в процессе решения. На сетке первого типа разложение в ряд Тейлора дает

$$T_{w+1} = T_w + \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_w \Delta n + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 T}{\partial n^2}\right|_w \Delta n^2 + O(\Delta n^3), \tag{3.558}$$

или

$$\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right| \equiv \mathrm{Nu} = (T_{w+1} - T_w)/\Delta n + O(\Delta n). \tag{3.559}$$

Чтобы поставить условие адиабатичности на стенке, положим $\mathrm{Nu} = 0$, или

$$T_w = T_{w+1}. \tag{3.560}$$

Если для решения уравнения (3.543) применяются явные схемы, то это условие просто используется после вычисления $T_{w+1}^{n+1}$ во внутренних точках, т. е. принимается, что $T_w^{n+1} = T_{w+1}^{n+1}$. Если же применяются неявные схемы, то условие (3.560) необходимо ввести в схему для расчета внутренних точек так же, как это

сделано в схеме Миякоды (3.529) при решении уравнения для давления.

При вычислении градиента на стенке особенно важно, чтобы его конечно-разностное представление было согласовано с конечно-разностной схемой, используемой во внутренних точках. Если вычисленные значения температур во внутренних точках рассматривать просто как известные величины, то в случае адиабатической стенки для обеспечения условия $\partial T/\partial n = 0$ можно брать экстраполяцию высокого порядка точности. Один из возможных вариантов формулы для определения температуры на адиабатической стенке имеет следующий вид:

$$T_w = 4T_{w+1} - 3T_{w+2}. \tag{3.561}$$

Однако такое представление не является *численно* адиабатическим. Для определенности рассмотрим стенку, параллельную оси $x$ при $j = 1$. Тогда в точке $(i, w+1)$ градиент потока тепла дается членом $\nabla^2 T|_{i,2}$, который определяется равенством

$$\nabla^2 T|_{i,2} = \left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{i,2} + \left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{i,2}. \tag{3.562}$$

По схеме с центральными разностями получаем

$$\left.\frac{\delta^2 T}{\delta y^2}\right|_{i,2} = \frac{T_{i,3} + T_{i,1} - 2T_{i,2}}{\Delta y^2} = \frac{(T_{i,3} - T_{i,2})/\Delta y - (T_{i,2} - T_{i,1})/\Delta y}{\Delta y} = \frac{\dot{q}_{23} - \dot{q}_{12}}{\Delta y}. \tag{3.563}$$

Такая запись дает возможность понять смысл члена $\partial^2 T/\partial y^2$, являющегося градиентом потока тепла в точке $(i, 2)$. Используя терминологию, принятую в методе контрольного объема (разд. 3.1.2), можно сказать, что $\dot{q}_{12}$ представляет собой поток тепла, вытекающий из узла 1 (на стенке) и втекающий в узел 2. Таким образом, для того чтобы стенка была *численно* адиабатической, $\dot{q}_{12}$ должно быть равно нулю, что приводит к условию $T_{i,1} = T_{i,2}$. Значит, если не выполнено условие $T_w = T_{w+1}$, то в вычислительном алгоритме возникает передача энергии между стенкой и жидкостью. Экстраполяции высокого порядка для условия $\partial T/\partial y|_w = 0$ будут численно соответствовать адиабатической стенке только тогда, когда они согласованы с разностным аналогом высокого порядка, принятым для $\partial^2 T/\partial y^2$ в точке $(i, w+1)$.

При интерпретации формального порядка величины ошибок аппроксимации этих выражений имеет место широко распространенное заблуждение. Из уравнения (3.559), казалось бы, следует, что число Нуссельта находится только с первым порядком точности. Но это заблуждение. Если, как указано выше, во

внутренних точках используются соответствующие конечно-разностные представления, то уравнение (3.559) будет давать алгебраически правильную интенсивность теплопередачи в безразмерных переменных, которая фактически получается в результате решения при заданной температуре стенки.

Однако если на стенке ставится условие адиабатичности (3.560), то стенка будет численно адиабатической, т. е. будет отсутствовать передача энергии от стенки к жидкости. В этом случае число Нуссельта определяется точно и является задаваемым параметром задачи, подобно числу Рейнольдса. Тогда вопрос о формальной ошибке аппроксимации будет состоять не в том, насколько точно определяется число Нуссельта, а в том, насколько точно рассчитана температура на стенке при заданном числе Нуссельта. Занисывая равенство (3.559) в виде

$$T_{w+1} = T_w + \mathrm{Nu}\,\Delta n + O(\Delta n^2), \tag{3.564}$$

убеждаемся, что температура на стенке определяется со вторым порядком точности.

Для нахождения поля температур с граничными условиями Неймана можно было бы брать и сетку второго типа, изображенпую на рис. 3.24. Задание числа Нуссельта на стенке дает возможность определить температуру $T_{ja-1}$ в узле, находящемся внутри стенки, нри помощи формулы

$$T_{ja-1} = T_{ja} - \mathrm{Nu}\,\Delta n. \tag{3.565}$$

Тогда численно условие адиабатичности удовлетворяется постановкой условия $T_{ja-1} = T_{ja}$. Но если рассматривается случай, когда на стенке задается температура $T_w$, то линейная интерполяция дает

$$T_{ja-1} = 2T_w - T_{ja}; \tag{3.566}$$

полученный при этом результат будет иметь первый порядок точности, и здесь возможно появление ошибки, связанной с нарушением ограниченности решения (см. обсуждение граничного условия на стенке для вихря в разд. 3.3.2).

Распределение темнературы на входной границе В 4 потока (рис. 3.22) должно быть задано. Форма этого распределения, конечно, произвольна, но особенно простым и разумным является распределение, соответствующее автомодельному решению в пограничном слое на входной границе (Шлихтинг [1968]).

Для горячей или холодной стенки В 2, расположенной выше по потоку от уступа, удобное распределение температуры, соответствующее автомодельному решению в пограничном слое, существует лишь при $E = 0$ и $\mathrm{Pr} = 1$. В этих случаях профиль

температуры (приращение температуры) и профиль скорости идентичны.

Если в качестве характерного приращения температуры для уравнения (3.543) выбирается разность между температурой в невозмущенном потоке на входной границе В 4 (рис. 3.22) вне пограничного слоя и температурой на стенке В 2, то распределение температуры, соответствующее автомодельному решению в пограничном слое, будет иметь следующий вид:

$$T_w = 0, \quad T(\text{В } 4) = u(\text{В } 4), \qquad \text{если В 2 — холодная стенка;} \tag{3.567а}$$

$$T_w = 1, \quad T(\text{В } 4) = 1 - u(\text{В } 4), \qquad \text{если В 2 — горячая стенка.} \tag{3.567б}$$

В обоих этих случаях (при $E = 0$) безразмерная температура меняется в интервале от 0 до $+1$.

Заметим, что если расчет температуры проводится на гибридной сетке с шахматным расположением узлов (рис. 3.24), то профиль температуры на входной границе должен задаваться на линии, отстоящей на расстояние $\Delta x/2$ от линии, на которой задается профиль скорости, что приводит к несогласованности.

Условия для температуры на других границах можно ставить так же, как и условия для вихря в разд. 3.3. Условия для температуры и для вихря должны быть согласованы; в частности, на границе В 3 в случае условия стенки со скольжением эта стенка должна быть адиабатической. Если в уравнениях, аналогичных уравнениям (3.484) или (3.485), на выходной границе В 6 необходимо учитывать диссипативную функцию Ф, то (поскольку Ф фиксирована в течение всего времени и поэтому исключается возможность приводящего к неустойчивости обратного влияния) эту функцию можно определять при помощи экстраполяции с любым порядком точности или при помощи односторонних разностей. Рекомендуется экстраполяция

$$\Phi_{I,\,J} = {}^3/_2\,\Phi_{I-1,\,J} - {}^1/_2\,\Phi_{I-2,\,J}, \tag{3.568}$$

имеющая второй порядок точности.

Аналогичные замечания применимы и для простого уравнения, описывающего диффузию для концентрации компонент. Если стенка представляет собой проницаемую мембрану, то на ней ставится условие Неймана.

Обсуждение критериев сходимости и начальных условий, проведенное в разд. 3.4, применимо также и к уравнениям для температуры и для концентраций компонент.

### 3.6.5. Источниковые члены и жесткие уравнения

Уравнения для температуры и для концентрации вида (3.543) могут содержать дополнительный член типа $+aT$. Этот источниковый ($a < 0$) или стоковый ($a > 0$) член может описывать, например, выделение и поглощение внутренней энергии при химической реакции, когда скорость реакции зависит от температуры, или уменьшение растворенного кислорода в крови, когда молекулы кислорода захватываются красными кровяными тельцами. Возможны и другие формы этого члена, например $a(T - T^*)$ или $aT^p$.

Добавление такого члена в уравнение (3.543) кажется достаточно безобидным, поскольку при этом не требуется дополнительной дискретизации по пространственной переменной. В действительности же при исследовании устойчивости этот член, который делает уравнение «жестким» (Кертис и Гиршфельдер [1952][1])), может оказаться доминирующим по сравнению с другими членами.

Для простоты рассмотрим уравнение с одним только источниковым членом. В этом случае задача описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$dT/dt = aT, \tag{3.569}$$

которое имеет точное решение

$$T(t) = T_1 e^{at}, \tag{3.570}$$

где $T_1$ — начальная температура. При $a > 0$ это точное решение соответствует экспоненциально растущей температуре. Очевидно, «устойчивое» конечно-разностное решение уравнения (3.569) было бы ошибочным, поскольку его точное решение «неустойчиво». Для таких решений условие устойчивости фон Неймана необходимо модифицировать и записать так:

$$|G| \leqslant 1 + O(\Delta t). \tag{3.571}$$

Но больший смысл имеет критерий относительной устойчивости, предложенный Хеммингом [1962]. Идея этого критерия заключается в требовании, чтобы экспоненциально растущая ошибка $E(t)$ не «забивала» точное экспоненциальное решение; тогда, если $E(t) = E_1 e^{bt}$, то для относительной устойчивости требуется выполнение неравенства $b < a$.

Но даже в случае экспоненциально убывающего решения ($a < 0$) такой член в правой части уравнения важен для устой-

[1]) Кертис и Гиршфельдер [1952] ввели понятие «жесткого» уравнения для конечно-разностных уравнений, относя его к случаю, когда $|1/(a\Delta t)| \ll 1$. Они также рассмотрели обыкновенное дифференциальное уравнение более общего вида, чем уравнение (3.569).

чивости. Рассмотрим схему «чехарда» для уравнения (3.569):

$$\frac{T^{n+1}-T^{n-1}}{2\,\Delta t}=aT^n, \tag{3.572}$$

$$T^{n+1}=(2a\,\Delta t)\,T^n+(1)\,T^{n-1}, \tag{3.573а}$$

$$T^n=(1)\,T^n+(0)\,T^{n-1}, \tag{3.573б}$$

$$G=\begin{bmatrix}2a\,\Delta t & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}. \tag{3.574}$$

Собственные значения $\lambda$ определяются следующим образом:

$$\begin{vmatrix}2a\,\Delta t-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=0, \tag{3.575}$$

$$\lambda^2-2a\,\Delta t\lambda-1=0, \tag{3.576}$$

$$\lambda_{\pm}=\frac{2a\,\Delta t\pm\sqrt{4a^2\,\Delta t^2+4}}{2}=a\,\Delta t\pm\sqrt{1+a^2\,\Delta t^2}. \tag{3.577}$$

Рассмотрим малые значения $\Delta t$, такие, что $a^2\Delta t^2\ll 1$; тогда

$$\sqrt{1+a^2\,\Delta t^2}\approx 1+{}^1/_2a^2\,\Delta t^2 \tag{3.578}$$

и отсюда

$$\lambda_+=1+a\,\Delta t+{}^1/_2a^2\,\Delta t^2, \tag{3.579а}$$

$$\lambda_-=-1+a\,\Delta t-{}^1/_2a^2\,\Delta t^2. \tag{3.579б}$$

При $a>0$ будет $|\lambda_+|>1$, что соответствует точному экспоненциально растущему решению, но при $a<0$ получаются $|\lambda_-|>1$. Несмотря на то что точное решение экспоненциально затухает и имеет соответствующий конечно-разностный аналог, отвечающий значению $\lambda_+$, дискретизация приводит к появлению второго решения, которое растет экспоненциально и «забивает» точное решение.

*Упражнение.* Показать, что для конечно-разностной схемы с разностями вперед по времени и с центральными разностями по пространственным переменным, соответствующей уравнению (3.569), при $a<0$ условие статической устойчивости имеет вид $\Delta t\leqslant 2/|a|$, а условие динамической устойчивости — вид $\Delta t\leqslant 1/|a|$.

Обзор численных методов решения «жестких» уравнений можно найти в работе Зейнфельда с соавторами [1970], применение этих методов к решению гидродинамических задач рассматривал Блоттнер [1970]. В общем случае «жесткие» (источниковые) члены в уравнении рекомендуется вычислять на $(n+1)$-м слое по времени, однако при таком «неявном»

представлении этих членов не требуется применения неявных схем для решения всей системы уравнений на $(n+1)$-м слое, поскольку при этом в узловой точке $i$ используется только значение $\zeta^{n+1}$. Полностью неявная формулировка задачи в случае жестких уравнений при $a < 0$ обеспечивает безусловную статическую устойчивость решения, а также его динамическую устойчивость (см. задачу 3.33).

## 3.7. Методы решения уравнений для простейших физических переменных

Уравнения Навье — Стокса для физических переменных $u$, $v$ и $P$ в безразмерном виде приведены в разд. 3.5 (см. уравнения (3.509) и (3.510)). Постановка задачи, описываемой этими уравнениями, совершенно аналогична постановке задачи, описываемой системой уравнений для $\psi$ и $\zeta$, за исключением некоторых дополнительных аспектов. Здесь будут обсуждаться преимущества и недостатки $(u, v, P)$-систем по сравнению с $(\psi, \zeta)$-системой.

### 3.7.1. Общие замечания

Для того чтобы отразить эллиптический тип исходных дифференциальных уравнений, давление в $(u, v, P)$-системе необходимо определять, решая уравнение Пуассона так же, как это делалось в разд. 3.5. Методы, разработанные для анализа устойчивости решения $(\psi, \zeta)$-системы, можно непосредственно применять и для исследования устойчивости решения $(u, v, P)$-системы. При линеаризации уравнений (3.509) члены с градиентом давления исчезают, а члены типа $u(\partial u/\partial x)$ приводятся к виду $\tilde{u}(\partial u/\partial x)$, где $\tilde{u}$ — постоянный коэффициент. Тогда линеаризированное уравнение количества движения будет совпадать по виду с линеаризированным уравнением переноса вихря, и, следовательно, для исследования их устойчивости можно использовать одни и те же методы, получая при этом одни и те же условия устойчивости. Решать уравнение Пуассона для давления можно любым из методов, рассмотренных в разд. 3.1 и справедливых также в рассматриваемом случае по крайней мере с точки зрения линейного анализа устойчивости. Уравнениям количества движения можно придать простую консервативную форму, если, как и в случае уравнения переноса вихря, член $\mathbf{V}\cdot\nabla u$ заменить на $\nabla\cdot(u\mathbf{V})$. Но применение идеи консервативности в отношении сохранения массы в этом случае осложняется. При решении уравнения Пуассона потребуется отказаться от консервативной формы уравнения неразрывности, в чем мы сейчас и убедимся.

### 3.7.2. Основные уравнения

Уравнения количества движения в консервативной форме можно записать так:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (u^2)}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad (3.580а)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}+\frac{\partial (v^2)}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right). \qquad (3.580б)$$

Эти уравнения «консервативны» для количества движения так же, как и уравнение (2.10) «консервативно» для вихря. Продифференцировав уравнения (3.580а) и (3.580б) и сложив результаты, получим уравнение Пуассона для давления, аналогичное ранее выведенному уравнению (3.525):

$$\Delta^2 P=-\frac{\partial^2 (u^2)}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 (uv)}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 (v^2)}{\partial y^2}-\frac{\partial D}{\partial t}+$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right)\equiv S_p, \qquad (3.581а)$$

где $D$ — дивергенция скорости, т. е.

$$D=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (3.581б)$$

Очевидно, что член $S_p$ в уравнении (3.581) равен члену $S$ в дифференциальном уравнении (3.525).

Приведенное уравнение Пуассона обладает замечательным свойством, которое впервые было рассмотрено в Лос-Аламосской лаборатории (Харлоу и Уэлч [1965], Уэлч с соавторами [1966]) при разработке известного метода маркеров и ячеек (метод MAC). Это свойство состоит в том, что в уравнении Пуассона (3.581) нужно рассчитывать члены, содержащие $D$, хотя уравнение неразрывности (3.509в) дает $D=0$. Из-за несовместимости граничных условий или из-за недостаточной степени точности итерационного решения уравнения Пуассона конечно-разностный аналог $D$, как правило, не равен нулю, т. е. $D_{i,j}\neq 0$. Члены уравнения (3.581), содержащие $D$, можно было бы приравнять нулю, не меняя при этом порядка величины ошибки аппроксимации, однако поскольку уравнение Пуассона решается итерационными методами, ошибка будет накапливаться. В результате в уравнениях количества движения появляются не только ошибки, но и возможно возникновение неустойчивости, связанной с нелинейностью. Надлежащий расчет членов, содержащих $D$, может устранить эту неустойчивость. Производная по времени $\partial D/\partial t$ должна быть определена с помощью разностной формулы, в которой принимается $D^{n+1}=0$

независимо от того, какие конечно-разностные выражения взяты для $\partial u/\partial t$ и $\partial v/\partial t$. (Тогда в случае применения разностей вперед по времени получается $\partial D/\partial t = -D^n_{i,j}/\Delta t$.)

Неустойчивость, связанная с нелинейностью, и средства ее устранения впервые были рассмотрены Харлоу и Уэлчем [1965]. Аналогичное поведение отмечали и другие авторы, применявшие метод маркеров и ячеек, например Паньяни [1968], Гоэйн и Притчетт [1966], Слотта с соавторами [1969], а также Чен с соавторами [1969], пользовавшиеся модифицированным методом маркеров и ячеек. В более общем случае неустойчивость, связанную с нелинейностью, для других нестационарных решений исследовали Хёрт и Харлоу [1967] (мы рекомендуем читателю ознакомиться с их работой). Донован [1968, 1970] и Путре [1970], которые брали несколько отличные уравнения и такую же, как в методе маркеров и ячеек, структуру разностной сетки, обнаружили аналогичное поведение решения (см. разд. 3.7.4). Уравнения, которые решали последние авторы, получаются преобразованием при помощи уравнения неразрывности (3.509в) следующих производных, входящих в уравнения (3.380):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}, \tag{3.582а}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}. \tag{3.582б}$$

Кроме того, эти авторы полагали также в уравнении (3.581) $D = 0$ в членах, содержащих пространственные производные от $D$. В результате они получили систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right), \tag{3.583а}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (uv)}{\partial x} + \frac{\partial (v^2)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right), \tag{3.583б}$$

$$\nabla^2 P = -\frac{\partial^2 (u^2)}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 (uv)}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 (v^2)}{\partial y^2} - \frac{\partial D}{\partial t}. \tag{3.584}$$

Если исходить из указанных выше работ, то могло бы показаться, что в уравнении (3.581а) член $\nabla^2 D$ не столь важен, как член $\partial D/\partial t$. Однако поскольку в конечно-разностной форме уравнение неразрывности не выполняется точно, не будут выполняться точно и конечно-разностные аналоги соотношений (3.582). Таким образом, в уравнениях (3.583а) и (3.583б) соответствующие диффузионные члены не будут консервативны. Уильямс [1969] также сохранял член $\partial D/\partial t$, применяя схему «чехарда» для производной по времени совместно со схемой Аракавы (разд. 3.1.21). Так как он использовал прямой метод решения уравнения Пуассона, ошибка, связанная с итерационными мето-

дами, для уравнения (3.581а), записанного в цилиндрических координатах, была равна нулю.

Можно построить методы, в которых условие $D = 0$ выполняется тождественно, т. е. в которых сохраняется масса (объем); см. Пиачек и Уильямс [1970].

### 3.7.3. Граничные условия для простейших физических переменных

Граничные условия вдоль стенки с прилипанием имеют следующий простой вид: $u_w = 0$ и $v_w = 0$ для всех моментов времени. Это, очевидно, дает большое преимущество при использовании неявных схем, поскольку для граничных условий не требуется дополнительного итерационного процесса. Однако успешное применение неявных схем при решении уравнений, записанных для физических переменных, сталкивается с некоторыми трудностями, связанными с нелинейной неустойчивостью уравнения для давления (Азиз [1966], Азиз и Хеллумс [1967]), которую можно устранить, сохраняя член $\partial D/\partial t$ в уравнении (3.581а) или в уравнении (3.584). Заметим, что в случае прилипания скорость в угловой точке при обтекании выпуклого угла будет однозначна. Условие скольжения можно ставить вдоль верхней границы или вдоль стенок со скольжением. Для параллельной оси $x$ стенки со скольжением $v_w = 0$ и (вероятно) $\partial u/\partial y|_w = 0$. Для узла, принадлежащего стенке, из последнего условия (в случае пространственных разностей со вторым порядком точности) получаем $u_w = u_{w+1}$. В вершине выпуклого угла при условии скольжения значение скорости будет многозначным.

На входной границе (см. рис. 3.22) составляющая скорости $u$ часто задается в виде $u(y) = U_0$. Составляющая скорости $v$ часто полагается равной нулю или для нее ставятся более «мягкие» условия $\partial v/\partial x = 0$ или $v_{1,j} = v_{2,j}$, как это делает Слотта с соавторами [1969]. Аналогичное условие для $v$ на выходной границе (Слотта с соавторами [1969]) дает

$$v_I = v_{I-1}, \tag{3.585}$$

откуда следует, что

$$\left.\frac{\delta v}{\delta y}\right|_I = \left.\frac{\delta v}{\delta y}\right|_{I-1} = \left.\frac{\delta v}{\delta y}\right|_{I-1/2}. \tag{3.586}$$

Значит, эту величину можно вычислить по ее известному значению во внутренней точке $I - 1$. Применяя уравнение неразрывности в точке $I - {}^1/_2$, определяем

$$\left.\frac{\delta u}{\delta x}\right|_{I-1/2,\,j} = -\left.\frac{\delta v}{\delta y}\right|_{I-1/2,\,j} = -\left.\frac{\delta v}{\delta y}\right|_{I-1,\,j}. \tag{3.587}$$

С учетом равенств (3.587) по известным значениям во внутренних точках находится с точностью второго порядка значение $u$ на выходной границе:

$$u_{I,\,j} = u_{I-1,\,j} - \frac{\Delta x}{2\Delta y}(v_{I-1,\,j+1} - v_{I-1,\,j-1}). \qquad (3.588)$$

Из-за выбора сетки в методе маркеров и ячеек индексы в уравнении (3.588) часто оказываются иными. В более общем случае, применимом к обоим типам сеток, формулу (3.588) можно переписать в следующем виде:

$$u_{I,\,j} = u_{I-1,\,j} - \frac{\Delta x}{\Delta y}(v_{I-1,\,j+1/2} - v_{I-1,\,j-1/2}). \qquad (3.589)$$

Для давления, как и в разд. 3.5, ставится условие Неймана. Путре [1970] полагал $P = \text{const}$ на входной и выходной границах и задавал перепад давления $P_{\text{вх}} - P_{\text{вых}}$. В рассматриваемой им задаче о гидродинамическом подпятнике это было оправдано. Для составляющей скорости $u$ на входной и выходной границах ставилось условие $\partial u/\partial x = 0$. С учетом уравнения неразрывности это означает, что $\partial v/\partial y = 0$, и из условия $v_w = 0$ следует, что $v_{\text{вх}} = v_{\text{вых}} = 0$. Не ясно, будет ли решение сходиться при таких условиях, наложенных на составляющие скорости, если для давления ставятся менее жесткие условия.

### 3.7.4. Метод маркеров и ячеек

Методу маркеров и ячеек (метод MAC), предложенному в работах Харлоу и Уэлча [1965] и Уэлча с соавторами [1966], присущи следующие четыре отличительные черты: применение уравнений для простейших физических переменных (составляющие скорости и давление), специфическая конечно-разностная схема, специфическая структура ячейки, введение частиц-маркеров.

Такая форма уравнений и их смысл уже обсуждались в связи с уравнениями (3.580)—(3.581). Разностная схема для уравнений количества движения основана на разностях вперед по времени и центральных разностях по пространственным переменным. Подобная схема была рассмотрена в разд. 3.1.1 и последующих разделах; ее устойчивость обсуждалась в разд. 3.1.5 и последующих разделах. Эта схема безусловно неустойчива для течений невязкой жидкости. Однако разностные уравнения в методе MAC несколько отличаются из-за структуры ячейки.

Структура ячейки в методе MAC показана на рис. 3.33. Давление определяется в центре ячейки, как, например, $P_{i,\,j}$ или $P_{i+1,\,j}$. Составляющая скорости $u$ определяется в середине левой и правой сторон ячейки как $u_{i+1/2,\,j}$ и $u_{i-1/2,\,j}$. Составляющая ско-

рости $v$ определяется в середине верхней и нижней сторон ячейки как $v_{i,\,j+1/2}$ и $v_{i,\,j-1/2}$. Во всех точках, где это возможно, конечно-разностные аналоги производных по пространственным переменным находятся при помощи центральных разностей на одном

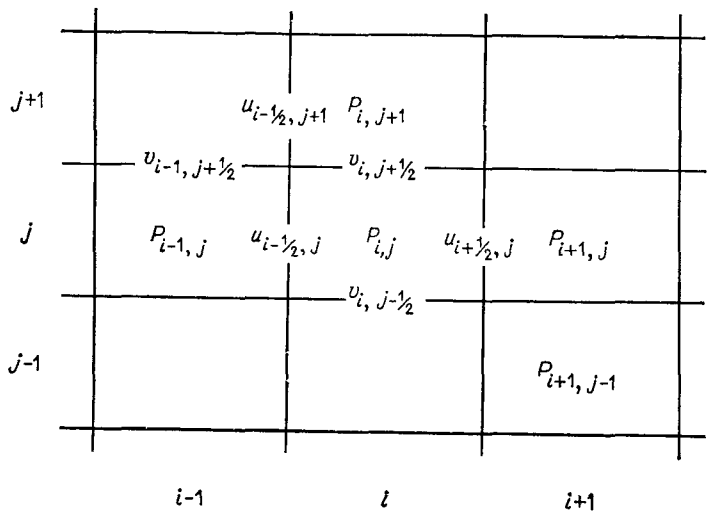



Рис. 3.33. Система ячеек и позиции для расчета в методе маркеров и ячеек.

шаге пространственной сетки. Например, при расчете производной по времени

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{i+1/2,\,j} \approx \left.\frac{\delta u}{\delta t}\right|_{i+1/2,\,j} = \frac{u^{n+1}_{i+1/2,\,j} - u^{n}_{i+1/2,\,j}}{\Delta t} \tag{3.590}$$

член $\partial P/\partial x\,|^{n}_{i+1/2,\,j}$ вычисляется следующим образом:

$$\left.\frac{\delta P}{\delta x}\right|^{n}_{i+1/2,j} = \frac{P^{n}_{i+1,\,j} - P^{n}_{i,\,j}}{\Delta x}, \tag{3.591}$$

а члены вида $\partial^2 u/\partial x^2\,|^{n}_{i+1/2,\,j}$ находятся так:

$$\left.\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}\right|^{n}_{i+1/2,\,j} = \frac{u_{i+3/2,\,j} - 2u_{i+1/2,\,j} + u_{i-1/2,\,j}}{\Delta x^2} \tag{3.592}$$

(в правой части формулы верхний индекс $n$ опущен). При расчете производной

$$\left.\frac{\delta\,(u^2)}{\delta x}\right|^{n}_{i+1/2,\,j} = \frac{u^2_{i+1,\,j} - u^2_{i,\,j}}{\Delta x} \tag{3.593}$$

необходимо определить $u$ в центре ячейки. Это можно сделать при помощи осреднения:

$$u_{i+1,\,j} = {}^1/_2\,(u_{i+3/2,\,j} + u_{i+1/2,\,j}). \tag{3.594}$$

Произведения, например $uv$, вычисляются как произведение средних величин, но не как среднее произведений:

$$(uv)_{i+1/2,\,j+1/2} = {}^1/_2\,(u_{i+1/2,\,j} + u_{i+1/2,\,j+1}) \cdot {}^1/_2\,(v_{i+1,\,j+1/2} + v_{i,\,j+1/2}). \tag{3.595}$$

Тогда конечно-разностные аналоги уравнений (3.580) будут иметь вид

$$u^{n+1}_{i+1/2,\,j} = u_{i+1/2,\,j} + \Delta t\left\{-\frac{u^2_{i+1,\,j} - u^2_{i,\,j}}{\Delta x} - \right.$$
$$- \frac{(uv)_{i+1/2,\,j+1/2} - (uv)_{i+1/2,\,j-1/2}}{\Delta y} - \frac{P_{i+1,\,j} - P_{i,\,j}}{\Delta x} +$$
$$+ \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{u_{i+3/2,\,j} - 2u_{i+1/2,\,j} + u_{i-1/2,\,j}}{\Delta x^2} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{u_{i+1/2,\,j+1} - 2u_{i+1/2,\,j} - u_{i+1/2,\,j-1}}{\Delta y^2}\right)\right\}, \tag{3.596а}$$

$$v^{n+1}_{i,\,j+1/2} = v_{i,\,j+1/2} + \Delta t\left\{-\frac{v^2_{i,\,j+1} - v^2_{i,\,j}}{\Delta y} - \right.$$
$$- \frac{(uv)_{i+1/2,\,j+1/2} - (uv)_{i-1/2,\,j+1/2}}{\Delta x} - \frac{P_{i,\,j+1} - P_{i,\,j}}{\Delta y} +$$
$$+ \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{v_{i,\,j+3/2} - 2v_{i,\,j+1/2} + v_{i,\,j-1/2}}{\Delta y^2} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{v_{i+1,\,j+1/2} - 2v_{i,\,j+1/2} + v_{i-1,\,j+1/2}}{\Delta x^2}\right)\right\} \tag{3.596б}$$

(индекс $n$ в правой части уравнений опущен для простоты записи). Член $S_p$, входящий в уравнение (3.581а), находится при помощи аналогичных разностей и следующего разностного представления:

$$\left.\frac{\partial D}{\partial t}\right|^n_{i,\,j} = \left.\frac{D^{n+1} - D^n}{\Delta t}\right|_{i,\,j} = -\frac{D^n_{i,\,j}}{\Delta t}. \tag{3.597}$$

(Эта формула *ставит* условие $D^{n+1} = 0$.) В результате получаем

$$-S_p|_{i,\,j} = \frac{u^2_{i+1,\,j} - 2u^2_{i,\,j} + u^2_{i-1,\,j}}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta x\,\Delta y}\left[(uv)_{i+1/2,\,j+1/2} - \right.$$
$$- (uv)_{i+1/2,\,j-1/2} - (uv)_{i-1/2,\,j+1/2} + \left.(uv)_{i-1/2,\,j-1/2}\right] +$$
$$+ \frac{v^2_{i,\,j+1} - 2v^2_{i,\,j} + v^2_{i,\,j-1}}{\Delta y^2} - \frac{D_{i,\,j}}{\Delta t} -$$
$$- \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{D_{i+1,\,j} - 2D_{i,\,j} + D_{i-1,\,j}}{\Delta x^2} + \frac{D_{i,\,j+1} - 2D_{i,\,j} + D_{i,\,j-1}}{\Delta y^2}\right), \tag{3.598а}$$

где

$$D_{i,\,j} = \frac{u_{i+1/2,\,j} - u_{i-1/2,\,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,\,j+1/2} - v_{i,\,j-1/2}}{\Delta y}. \qquad (3.598б)$$

Граничные условия для $u$ и $v$ находятся в соответствии с определениями, введенными на рис. 3.33. Например, при условии прилипания на стенке, вдоль которой $j = w$, имеем

$$u_w = 0, \quad u_{i+1/2,\,w} = 0, \quad u_{i-1/2,\,w} = 0, \qquad (3.599)$$

$$v_w = 0, \quad v_{i,\,w} = {}^1/_2\,(v_{i,\,w+1/2} + v_{i,\,w-1/2}), \qquad (3.600)$$

или

$$v_{i,\,w-1/2} = -\,v_{i,\,w+1/2}. \qquad (3.601)$$

Если в ближайших внутренних точках $(i,\ w+1)$ и $(i,\ w+{}^1/_2)$ берутся разности второго порядка $O(\Delta y^2)$, то соотношение (3.601) при определении значения $v_{i,\,w-1/2}$ в фиктивном узле, расположенном внутри стенки, приводит к условию $v_{i,\,w} = 0$. В разд. 3.3.2 (см. также задачи 3.24—3.26), было отмечено, что условия, аналогичные условию (3.600), при определении значения скорости на стенке приводят к ошибкам в членах, описывающих диффузию вихря. Однако в методе MAC переменные определены таким образом, что влияние этих условий сказывается только на конвективных членах, которые при таком способе трактуются верно. Поскольку диффузионный член с составляющей скорости $v$ не входит в уравнение количества движения в направлении $x$, ошибки не возникает.

Возможная постановка граничных условий для стенки со скольжением такова:

$$u_{i+1/2,\,w} = u_{i+1/2,\,w+1}, \qquad (3.602а)$$

$$v_{i,\,w-1/2} = -\,v_{i,\,w+1/2}. \qquad (3.602б)$$

Граничные условия на остальных границах, очевидно, аналогичны ранее приведенным условиям для сетки первого типа.

В методе MAC рассматриваются частицы-маркеры, которые не обладают массой и переносятся со скоростью конвекции. Они непосредственно не участвуют в вычислениях. Во внутренних точках нет обратного влияния маркеров, и поэтому вопрос о связанной с ними устойчивости не возникает. Прослеживая и графически изображая положения частиц-маркеров, можно получить картину линий отмеченных частиц, аналогичную дымовой картине в аэродинамической трубе или фотографии, полученной при визуализации потока за счет введения красящего вещества.

Положения, или лагранжевы координаты $(x_p^n, y_p^n)$, каждой частицы-маркера находятся при помощи численного интегрирования от некоторого начального положения $(x_p^0, y_p^0)$, занимаемого частицей в момент времени $t = 0$:

$$x_p^n = x_p^0 + \int_0^t u_p \, dt, \tag{3.603а}$$

$$y_p^n = y_p^0 + \int_0^t v_p \, dt, \tag{3.603б}$$

где $u_p$ и $v_p$ — составляющие скорости на эйлеровой сетке в той точке, где находится частица в данный момент времени. Используя разности вперед по времени (как это обычно делается в методе MAC), из уравнений (3.603) последовательно находим

$$x_p^{n+1} = x_p^n + u_p \Delta t, \tag{3.604а}$$

$$y_p^{n+1} = y_p^n + v_p \Delta t. \tag{3.604б}$$

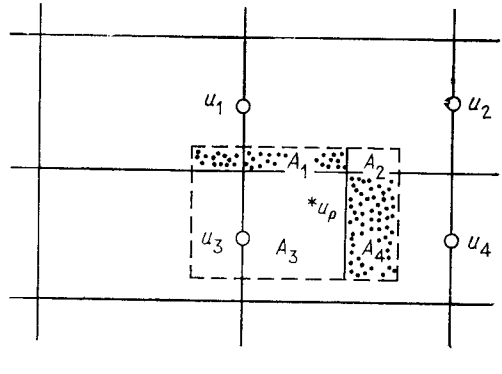
В методе MAC скорости частиц-маркеров находятся при помощи линейной интерполяции по двум иеременным, например

$$u_p = \frac{A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3 + A_4 u_4}{\Delta x \, \Delta y}, \tag{3.605}$$

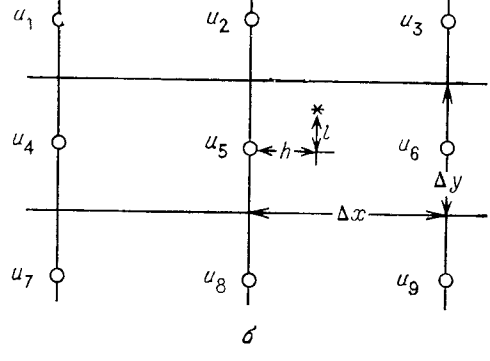
где площади $A_1$, $A_2$, $A_3$ и $A_4$ определяются положением точки $(x_p^n, y_p^n)$ в ячейке, как показано на рис. 3.34, *а*. Чен с соавторами [1969] применяли аппроксимацию второго порядка точности, указанную в подписи к рис. 3.34, *б*, что позволило увеличить точность вблизи экстремальных значений скорости. Большинство расчетов с помощью методов, подобных методу MAC, проводилось с четырьмя-пятью (в среднем) маркерами на ячейку.

Проведение расчетов линий отмеченных частиц присуще не только методу MAC и даже не только методам решения уравнений для физических переменных (см., например, Томан и Шевчик [1966]). Здесь такой расчет рассматривается на примере метода MAC, существенной частью которого он является и который интенсивно применялся для решения задач *со свободной поверхностью*, например задачи формирования поверхностной волны. Форма свободной поверхности не известна априори; она определяется в процессе решения по положению маркеров. (Ссылки на литературу по задачам со свободной поверхностью будут приведены в гл. 6.)

Здесь мы лишь отметим, что граничные условия на свободной поверхности заключаются в том, что касательные напряжения должны быть равными нулю, а нормальные напряжения




*а*




*б*

Рис. 3.34. Нахождение скоростей частиц-маркеров в методе маркеров и ячеек.
*а* — двумерная линейная интерполяция для $u_p$:

$$u_p = \frac{A_1u_1 + A_2u_2 + A_3u_3 + A_4u_4}{\Delta x\,\Delta y};$$

*б* — интерполяция второго порядка точности для $u_p$ (Чен с соавторами [1969]):

$$u_p = \frac{a}{2}(u_6 - u_4) + \frac{b}{2}(u_2 - u_8) + \frac{1}{2}\Big[a^2(u_6 + u_4 - 2u_5) + b^2(u_2 + u_8 - 2u_5) + \frac{ab}{2}(u_3 + u_7 - u_1 - u_9)\Big], \quad a = h/\Delta x, \quad b = l/\Delta y.$$

должны уравновешиваться приложенными извне нормальными напряжениями. Для постановки этих условий необходимо знать не только положение свободной поверхности в ячейке сетки, но также ее наклон и кривизну. В таком случае форма поверхности оказывает влияние на динамику течения за счет эффектов поверхностного натяжения и введения «дробных ячеек», которые

нужны для уравнения. Таким образом, расчет положения частиц *оказывает обратное влияние* на расчет динамики течения. При этом возможно появление таких аномалий, как возникновение неустойчивости, связанной с нелинейностью, и эффекты численного *поверхностного натяжения.*

Существенное усовершенствование метода MAC, связанное с введением дробных ячеек и вычислением положений маркеров, предложили Чен с соавторами [1969, 1970] и Николс [1970]. Паньяни [1968] решал методом MAC задачу о естественной конвекции. Дали [1969а, 1969б] предложил вариант метода MAC для изучения течения двух жидкостей в цилиндрической системе координат, включая детальный расчет поверхностного натяжения. Дали и Прахт [1969] также применили метод MAC в случае течения двух жидкостей и переноса раствора для изучения волн плотности. Используя приемы, разработанные для расчета свободной поверхности, Вьечелли [1969] в рамках метода MAC предложил остроумный способ рассмотрения заданных криволинейных поверхностей на прямоугольной сетке. На каждом шаге по времени задается такое внешнее давление, которое заставляет «свободную поверхность» принимать форму, соответствующую требуемой форме границы. Метод MAC применяли также Хуан [1968], Гоэйн и Притчетт [1968], Слотта с соавторами [1969], Донован [1968, 1970], Кроули [1970а], Путре [1970], Митчелл [1970] и Истон [1969].

В упрощенном методе маркеров и ячеек (метод SMAC; см. Амсден и Харлоу [1970а, 1970в]) давление не рассчитывается, но уравнение неразрывности для скоростей удовлетворяется непосредственно. Здесь используются некоторые приемы, характерные для методов решения системы уравнений для переменных $\psi$ и $\zeta$, и упрощается постановка некоторых граничных условий. В методе маркеров и ячеек для малых чисел Рейнольдса (метод MACRL), предложенном Прахтом [1971], для членов, описывающих диффузию и содержащих градиент давления, используется неявный итерационный подход. Уравнения, записанные в неявной форме, разрешаются итерационным методом, включая уравнение Пуассона и граничные условия. В методе маркеров и частиц, модифицированном в Станфордском университете (метод SUMMAC; см. Чен и Стрит [1970], Чен с соавторами [1971]), усовершенствован расчет граничных условий на свободной поверхности.

### 3.7.5. Другие методы решения уравнений для простейших физических переменных

Своеобразный метод нахождения стационарного решения уравнений для физических переменных предложил Чорин [1968] (см. также Чу [1968]); впоследствии этот метод применял Плоус

[1968]. Решенне задачи о течении несжимаемой жидкости находится как предел решения нестационарных уравнений, содержащих член, соответствующий *искусственной сжимаемости* и стремящийся к нулю по мере приближения к стационарному состоянию. Аналогичную идею использовали в методе дробных шагов Владимирова, Кузнецов и Яненко [1966]. Заметим здесь вкратце, что в общем случае для расчета течения несжимаемой жидкости не следует брать нолные уравнения для сжимаемой жидкости и просто полагать в них число Маха малым (более подробно этот вопрос будет освещен в разд. 5.1). Не рекомендуется также применять следующее уравнение для давления:

$$\frac{DP}{Dt} \equiv \frac{\partial P}{\partial t} + u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial (uP)}{\partial x} + \frac{\partial (vP)}{\partial y} \quad (3.606)$$

(см. Шлихтинг [1968]). Это уравнение основано на уравнении энергии для малых значений числа Маха. Из-за такой связи с уравнением энергии уравнение (3.606) является гиперболическим [1]) в отличие от эллиптического уравнения Пуассона для давления. Хотя это уравнение гиперболического типа правильно, оно позволяет распространяться волнам, которые оказываются доминирующими при исследовании устойчивости. Здесь следовало бы проводить решение при помощи неявных схем, но точность будет ограничена из-за этих нежелательных решений, соответствующих волновым течениям жидкости. Известно (Чарни с соавторами [1950]), что уравнение Пуассона предпочтительнее, поскольку при его решении такие волны подавляются.

Метод Колленса [1970] дает возможность получить решения, справедливые только для стационарного случая. Ошибка аппроксимации этого метода имеет порядок $O(\Delta x, \Delta y)$. Несмотря на то что в этом методе учитываются все члены в полных уравнениях Навье — Стокса, он приемлем только в том случае, когда выполняются условия, требуемые для приемлемости приближения пограничного слоя (см. разд. 6.4).

Рассмотренные в разд. 3.1.8—3.1.11 схемы с разностями против потока можно применять и в случае уравнений для физических переменных, что сделал, например, Жаме с соавторами [1970]. Аналогично обстоит дело и со схемной вязкостью, как показывает следующее упражнение.

*Упражнение.* При помощи линеаризации привести левую часть уравнения (3.580а) к виду

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \tilde{u}\frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

[1]) В данном случае влияние передается только вперед как по времени, так и по пространственным переменным. В случае одной пространственной переменной линеаризованное уравнение имеет вид $\partial P/\partial t = -\tilde{u}\partial P/\partial x$ и влияние вперед от точки $(x, t)$ распространяется вдоль характеристики, проходящей через точку $(x, t)$ и имеющей наклон $1/\tilde{u}$.

Используя схему с разностями против потока, показать, что схемная вязкость в случае уравнений для простейших физических переменных та же, что и в случае уравнения переноса вихря. (См. уравнения (3.176) — (3.179) из разд. 3.1.8.)

### 3.7.6. Сравнительные достоинства систем уравнений для переменных $(\psi, \zeta)$ и для переменных $(u, v, P)$

Сравнительные достоинства $(\psi, \zeta)$-системы и $(u, v, P)$-системы зависят от решаемой задачи. Главную роль всегда играет опыт предшествующих расчетов, но при выборе системы уравнений мы увидим, что в большинстве случаев (за исключением задач со свободной поверхностью или других задач о движении жидкостей с поверхностями раздела) целесообразно брать $(\psi, \zeta)$-систему.

В качестве эталонной задачи для сравнения этих двух систем рассмотрим сначала задачу о плоском течении жидкости при отсутствии свободной поверхности, предполагая, что при этом уравнение Пуассона решается при помощи итерационных методов.

Если *не требуется* находить нестационарное решение для давления, то в $(\psi, \zeta)$-системе приходится решать одно уравнение переноса вихря параболического типа и одно уравнение для функции тока эллиптического типа $\nabla^2\psi = \zeta$ с условиями Дирихле на некоторых (возможно, на всех) границах. (Стационарное решение эллиптического уравнения для давления находится только на последнем слое по времени, и поэтому выбор метода решения этого уравнения не имеет особого значения.) В $(u, v, P)$-системе надо решать два уравнения переноса количества движения, имеющих параболический тип, и одно уравнение эллиптического типа для давления $\nabla^2 P = S_p$ с граничными условиями Неймана на всех границах. При решении уравнения переноса вихря $\zeta$ необходимо дополнительно выполнить две операции дифференцирования функции тока $\psi$ для нахождения составляющих скорости, но уравнения переноса количества движения усложняются из-за членов с дивергенцией $D_{i,j}$ (в методе MAC эти члены значительно сложнее) и из-за специальных приемов, которые здесь требуются для обеспечения сохранения массы (объема). Решать уравнение переноса вихря $\zeta$ можно по неявным схемам, хотя при этом может потребоваться дополнительный итерационный процесс для неявного вычисления значений $\zeta_w^{n+1}$ на стенках при условии прилипания. В случае же $(u, v, P)$-системы значения $u_w^{n+1}$ и $v_w^{n+1}$ известны точно в течение всего времени, но здесь существует трудность, связанная с неустойчивостью из-за нелинейности (см. разд. 3.7.2). Достижение итерационной сходимости при решении уравнения $\nabla^2 P = S_p$ эллиптического типа требует значительно больше времени,

чем при решении эллиптического уравнения $\nabla^2\psi = \zeta$. Это объясняется различием граничных условий.

Если же *требуется* получить также нестационарное решение для давления, то и в $(\psi, \zeta)$-системе необходимо решать уравнение Пуассона $\nabla^2 P = S$ с граничными условиями Неймана. В случае когда нриненяются неявные схемы и требуется вычислять поле давления на каждом шаге по времени $\Delta t$, результаты можно получить быстрее решением $(u, v, P)$-системы. Однако заметим, что при решении $(\psi, \zeta)$-системы при помощи явных схем (которые, как сложилось исторически, чаще применяются для решения $(u, v, P)$-системы) шаг по времени $\Delta t$ настолько мал, что значение давления можно не рассчитывать на *каждом* шаге по времени, а находить только время от времени. (Во всяком случае, обычно оказывается затруднительным разумно использовать все это множество значений давления.) Если поле давления рассчитывается один раз за каждые десять шагов по времени или реже, то снова рекомендуется применять $(\psi, \zeta)$-систему.

Сравним эти две системы и в том случае, когда нужно получить нестационарную картину линий тока. В случае $(\psi, \zeta)$-системы линии тока $\psi = \text{const}$ строятся с помощью простой интерполяции. В случае же $(u, v, P)$-системы они определяются интегрированием, причем наиболее точный способ состоит в решении *уравнения Пуассона* $\nabla^2\psi = \delta u/\delta y - \delta v/\delta x$.

Теперь рассмотрим случай, когда в исходной тестовой задаче для решения уравнения Пуассона используются *прямые методы*. Здесь важную роль играет время разработки программы (оно, конечно, зависит от предшествующего опыта), и если надо вычислять поле давления, то время разработки программы для решения $(\psi, \zeta)$-системы будет больше, так как при этом необходимо при помощи прямых методов решать два уравнения Пуассона с различными граничными условиями. Если же поле давления вычислять не надо, то время разработки программы для решения $(\psi, \zeta)$-системы будет несколько меньше, поскольку в большинстве прямых методов поставить условия Дирихле проще, чем условия Неймана. (Метод расчета распространения вектора ошибки из разд. 3.2.8 является исключением.) В этих случаях для решения уравнения Пуассона требуется меньше времени, чем для решения параболического уравнения переноса. Поскольку время решения одного уравнения переноса вихря $\zeta$ меньше, чем время решения каждого из двух уравнений количества движения, и в этом случае $(\psi, \zeta)$-система оказывается предпочтительнее.

Учет внешних сил в уравнениях не влияет на обсуждавшиеся выше сравнительные достоинства двух рассматриваемых систем уравнений. Также не оказывает влияния выбор системы

координат (цилиндрической, сферической или какой-либо иной ортогональной системы) или учет переменных свойств среды. Здесь может несколько измениться выражение, дающее определение для вихря $\zeta$ (можно использовать члены, аналогичные $\zeta$), но можно вывести аналогичные уравнения. Например, если жидкость имеет переменную вязкость, то уравнение количества движения можно переписать так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{2\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]\right\}, \qquad (3.607)$$

где

$$\mathrm{Re} = \bar{\rho}\bar{U}_0\bar{L}/\bar{\mu}_0, \qquad \mu = \bar{\mu}/\bar{\mu}_0 = \mu(x, y), \qquad (3.608)$$

а $\bar{\mu}_0$ — характерная вязкость (скажем, вязкость в невозмущенном потоке). Соответствующее уравнение переноса вихря можно вывести (см. задачу 3.34) в следующем виде [1]):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla\cdot(\mathbf{V}\zeta) +$$

$$+ \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\nabla^2\mu\zeta - 2\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\mu}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\right]. \qquad (3.609)$$

При помощи $(\psi, \zeta)$-системы можно исследовать и гораздо более сложные задачи; Шавит и Лаван [1971] решали уравнение переноса вихря в цилиндрической системе координат для течения двух жидкостей с переменными свойствами.

Еще раз повторим, что определить положения маркеров в случае $(\psi, \zeta)$-системы ничуть не сложнее, чем в методе MAC для $(u, v, P)$-системы, и поэтому возможность получать картину линий отмеченных частиц в методе MAC не является преимуществом $(u, v, P)$-системы перед $(\psi, \zeta)$-системой. Картину же линий тока, несомненно, проще строить при решении $(\psi, \zeta)$-системы.

Однако исторически сложилось так, что при решении задач со свободной поверхностью или задач с поверхностями раздела жидкостей рекомендуется брать $(u, v, P)$-систему, поскольку именно таким образом чаще удавалось получить хорошие результаты. В случае же $(\psi, \zeta)$-системы возникает трудность с постановкой граничных условий на свободной поверхности, особенно для нестационарного течения со свободной поверхностью, как, например, в задаче о плескании топлива в баке (см. ссылки в разд. 6.4).

[1]) Личное сообщение Д. Рида и проф. В. Оберкампфа, Техасский университет Остин.

Отметим также, что *возможно* обобщение $(\psi, \zeta)$-системы на случай трехмерных течений (хотя многие авторы утверждают противоположное) и эта система ио-прежнему будет обладать некоторыми преимуществами по сравнению с системой уравнений для физических переменных (составляющих скорости и давления; см. следующий раздел).

## 3.8. Трехмерные течения

Современные вычислительные машины дают возможность рассчитывать некоторые трехмерные течения жидкости. В случае пространственного течения несжимаемой вязкой жидкости уравнения Навье — Стокса, соответствующие уравнениям (3.509) — (3.510), имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 u, \qquad (3.610\text{а})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (uv)}{\partial x} + \frac{\partial (v^2)}{\partial y} + \frac{\partial (vw)}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 v, \qquad (3.610\text{б})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial (uw)}{\partial x} + \frac{\partial (vw)}{\partial y} + \frac{\partial (w^2)}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 w, \qquad (3.610\text{в})$$

$$D \equiv \nabla \cdot \mathbf{V} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad (3.611)$$

где

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad f = u, \ v, \ w. \qquad (3.612)$$

Эти уравнения для физических переменных (составляющих вектора скорости и давления) можно решать теми же методами, что и уравнения в случае плоских течений. Некоторые обобщения на случай пространственных течений уже рассматривались в разд. 3.1. Например, ограничение на числа Куранта для явных схем (при отсутствии расщепления по времени) записывается так:

$$\mathrm{C}_x + \mathrm{C}_y + \mathrm{C}_z \leqslant 1, \qquad (3.613)$$

или

$$\frac{u\,\Delta t}{\Delta x} + \frac{v\,\Delta t}{\Delta y} + \frac{w\,\Delta t}{\Delta z} \leqslant 1. \qquad (3.614)$$

Можно вывести и уравнение Пуассона для давления

$$\nabla^2 P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = S_p; \qquad (3.615)$$

в правую часть этого уравнения по-прежнему входит член $\partial D/\partial t$ (Уильямс [1969]).

На разностной сетке в методе маркеров и ячеек составляющая скорости $w$ определяется в точке $(i, j, k \pm {}^1/_2)$ и т. д. Для трехмерного уравнения Пуассона также ставятся граничные условия Неймана; введение дополнительной пространственной переменной существенно снижает скорость сходимости, и в связи с этим желательно рассчитывать решение при помощи прямых методов. Даже в этом случае время, необходимое для решения задачи, очень велико. Здесь большое значение приобретают контрольные и пробные расчеты на грубой сетке. Например, Уильямс [1969] для конвективных членов применял схему Аракавы (разд. 3.1.21) и прямой метод для решения уравнения Пуассона, что позволило сократить время решения этого уравнения до 25% от общего времени решения всей задачи. На машине UNIVAC 1108 для расчета одного слоя по времени потребовалось 2 секунды на сетке $14 \times 14 \times 14$ и 96 секунд на сетке $60 \times 32 \times 34$.

Как показали Азиз и Хеллумс [1967], задачу о пространственном течении несжимаемой вязкой жидкости можно поставить и решить, взяв систему уравнений, аналогичную $(\psi, \zeta)$-системе (см. также Хирасаки [1967]). Обычно вектор вихря определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{\zeta} = \nabla \times \mathbf{V}, \tag{3.616}$$

или (в покомпонентной записи через орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) в виде

$$\boldsymbol{\zeta} = \zeta_x \mathbf{i} + \zeta_y \mathbf{j} + \zeta_z \mathbf{k}, \tag{3.6.17а}$$

$$\zeta_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \tag{3.617б}$$

$$\zeta_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \tag{3.617в}$$

$$\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{3.617г}$$

Если течение происходит в плоскости $(x, y)$, то $\zeta_x = \zeta_y = 0$, а $\zeta_z = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$, что отличается знаком от ранее принятого нами определения вихря $\zeta$. (Определение $\zeta = -\zeta_z$ в случае плоского течения наиболее распространено, но не универсально.) Соответствующее уравнение переноса вихря представляет собой векторное уравнение, три его составляющих записываются так:

$$\frac{\partial \zeta_x}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{V}\zeta_x) + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \zeta_x + \boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla u, \tag{3.618а}$$

$$\frac{\partial \zeta_y}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{V}\zeta_y) + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \zeta_y + \boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla v, \tag{3.618б}$$

$$\frac{\partial \zeta_z}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{V}\zeta_z) + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \zeta_z + \boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla w \tag{3.618в}$$

(см., например, классическую книгу Ламба [1945][1])). Все методы расчета, разработанные для плоских течений, пригодны и в трехмерном случае. В этом случае (в отличие от плоских течений) в уравнениях появляются члены вида $\zeta \cdot \nabla u$, описывающие усиление вихря за счет растяжения вихревых нитей. В разностной форме эти члены можно или брать с предыдущего слоя по времени, или итерировать в неявных схемах подобно тому, как это делается с нелинейными конвективными членами, содержащими скорость.

В общем случае для пространственного течения функции тока $\psi$ как таковой не существует, т. е. не существует такой функции $\psi$, что изолиния $\psi = \text{const}$ представляет собой линию тока. Но для соленоидального векторного поля (т. е. поля, которое удовлетворяет уравнению неразрывности в трехмерном случае $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$) существует так называемый векторный потенциал $\boldsymbol{\psi} = \psi_x \mathbf{i} + \psi_y \mathbf{j} + \psi_z \mathbf{k}$, такой, что скорость будет равна $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{\psi}$. (Не надо путать векторный потенциал с потенциалом скорости в двумерном течении невязкой жидкости, который вводится условием, что $\zeta = 0$ во всех точках течения.) Таким образом,

$$\mathbf{V} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}, \tag{3.619а}$$

$$u = \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z}, \tag{3.619б}$$

$$v = \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x}, \tag{3.619в}$$

$$w = \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y}. \tag{3.619г}$$

Для плоского течения $\boldsymbol{\psi} = (0, 0, \psi_z)$ и $\psi = \psi_z$, что приводит к обычным в этом случае формулам для $u$ и $v$.

Из уравнений (3.619а) и (3.616) следует, что

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{\zeta}. \tag{3.620}$$

При определении $\boldsymbol{\psi}$ возникает дополнительная степень произвола. Можно потребовать, чтобы вектор $\boldsymbol{\psi}$ был соленоидальным, т. е. чтобы

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0. \tag{3.621}$$

Можно показать, что это дает возможность записать уравнение (3.620) в виде векторного уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\zeta}. \tag{3.622}$$

[1]) См. также работу сотрудников Эймсского исследовательского центра НАСА Мартина и Болдуина [1972]. Д-р Мартин указал автору на ошибку, допущенную в первом издании настоящей книги, где в уравнениях (3.618) не было последних слагаемых.

Следовательно, на каждом шаге по времени необходимо решить три трехмерных уравнения Пуассона.

В трехмерном случае граничные условия на стенке с прилипанием уже не столь просты, как для плоского течения. Здесь уже *не* все составляющие вектора $\psi$ равны нулю; равны нулю только касательные к стенке составляющие и производная нормальной составляющей по нормали к стенке. Например, для стенки $x = x_a$, параллельной плоскости $(y, z)$, имеем

$$\partial\psi_x/\partial x = 0, \quad \psi_y = \psi_z = 0. \tag{3.623}$$

Составляющие вектора вихря на стенке с прилипанием можно выразить через составляющие скорости по формулам (3.617). Опять на примере стенки $x = x_a$, параллельной плоскости $(y, z)$, будем иметь

$$\zeta_x = 0, \quad \zeta_y = -\partial w/\partial x, \quad \zeta_z = \partial v/\partial x. \tag{3.624}$$

Азиз и Хеллумс [1967] предлагают находить составляющие вихря на стенке непосредственно из условия (3.624); на стенке при $i = ia$ это дает

$$\zeta_y(ia,\ j,\ k) = -\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{ia,\ j,\ k} = -\left[\frac{4w\,(ia+1,\ j,\ k) - w\,(ia+2,\ j,\ k)}{2\,\Delta x}\right] + \\ + O(\Delta x^2). \tag{3.625}$$

Аппроксимация второго порядка точности не нашла успешного применения, и данный подход не использовался для решения каких-либо задач со вдувом. Очевидно, вычислительные граничные условия для таких задач, рассмотренные в разд. 3.3, нужно сначала переписать в составляющих вектора скорости $(u, v)$, а уже затем применять с должной осторожностью для $(\psi, \zeta)$-системы.

При обсуждении сравнительных достоинств $(\mathbf{V}, P)$-системы и $(\psi, \zeta)$-системы произойдут некоторые изменения. Теперь для *обеих* систем необходимо решать три уравнения переноса параболического типа; уравнения $(\mathbf{V}, P)$-системы все еще остаются сложнее из-за наличия членов $D_{i,\ j,\ k}$, а неявные методы все еще не нашли успешного применения для решения $(\mathbf{V}, P)$-систем. Для решения $(\psi, \zeta)$-системы Азиз и Хеллумс с успехом применили неявную схему метода чередующихся направлений.

В $(\mathbf{V}, P)$-системе необходимо решить одно трехмерное уравнение Пуассона $\nabla^2 P = S_p$ с граничными условиями Неймана на всех границах, тогда как в $(\psi, \zeta)$-системе необходимо решить три трехмерных уравнения Пуассона $\nabla^2\psi = -\zeta$. Однако в задаче о естественной конвекции, которую рассматривали Азиз и Хеллумс [1967], для каждого из этих трех уравнений Пуассона вдоль двух границ ставятся условия Дирихле, а вдоль третьей —

сравнительно простое условие равенства градиента нулю. Если уравнение Пуассона решается при помощи итерационных методов (как в работе Азиза и Хеллумса [1967]), то, как показывает опыт расчетов в плоском случае, для решения трех уравнений $\nabla^2\psi = -\zeta$ с некоторыми условиями Дирихле потребуется меньше времени, чем для решения одного уравнения $\nabla^2 P = S_p$ с условиями Неймана на всех границах. Если же применяются прямые методы (что более вероятно), то для написания программы для $(\psi, \zeta)$-системы потребуется меньше времени, поскольку граничные условия в этом случае проще, но время решения уравнений Пуассона в случае $(\mathbf{V}, P)$-системы будет по-видимому, меньше. Кроме того, в памяти ЭВМ необходимо хранить только четыре трехмерных массива в случае $(\mathbf{V}, P)$-системы и шесть таких массивов в случае $(\psi, \zeta)$-системы.

Значит, если для решения уравнения Пуассона в трехмерном случае применяются прямые методы, то предпочтение следует отдать $(\mathbf{V}, P)$-системе. Преимущество $(\mathbf{V}, P)$-системы еще больше увеличилось бы, если бы для ее решения удалось разработать неявные методы. В то же время Азиз и Хеллумс [1967] продемонстрировали возможности $(\psi, \zeta)$-системы в случае пространственных течений, рассчитав довольно большую задачу $(11 \times 11 \times 11)$ на вычислительной машине средней мощности.

Вместо решения трех уравнений Пуассона для векторного потенциала $\psi$ можно решать три уравнения Пуассона для составляющих скорости. Эти уравнения легко вывести из уравнения неразрывности $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ с учетом определения вихря $\zeta = \nabla \times \mathbf{V}$. Уравнение можно записать в векторной форме

$$\nabla^2 \mathbf{V} = \nabla \times \zeta \tag{3.626а}$$

или в скалярной форме

$$\nabla^2 u = \frac{\partial \zeta_z}{\partial y} - \frac{\partial \zeta_y}{\partial z}, \tag{3.626б}$$

$$\nabla^2 v = \frac{\partial \zeta_x}{\partial z} - \frac{\partial \zeta_z}{\partial x}, \tag{3.626в}$$

$$\nabla^2 w = \frac{\partial \zeta_y}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_x}{\partial y}. \tag{3.626г}$$

Фасел [1975] использовал систему (3.626) для исследования устойчивости течения в пограничном слое в плоском случае; оказалось, что для системы двух уравнений Пуассона для скоростей $u$ и $v$, которая имеет более высокий порядок, чем дифференциальное уравнение для функции тока, можно ставить менее жесткие вычислительные граничные условия. В случае пространственного течения граничные условия для составляющих скорости ставятся непосредственно (в отличие от уравнений (3.623) для составляющих векторной функции $\psi$).

Известно, что сохранение массы (объема) может нарушаться даже в плоском случае. При решении уравнения $\nabla^2\psi = \zeta$ гарантируется, что уравнение неразрывности для составляющих скорости в дискретной форме будет выполняться тождественно (см. упражнение ниже), в то время как при решении системы уравнений (3.626) такой гарантии нет.

*Упражнение.* Показать, что в плоском случае при определении составляющих скорости $u$ и $v$ через функцию тока $\psi$ при помощи центральных разностей гарантируется тождественное выполнение уравнения

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} = 0 \tag{3.627}$$

независимо от точности решения для $\psi$.

# Глава 4

# УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Эта глава начинается с краткого обсуждения вычислительных проблем, присущих течениям сжимаемой жидкости. Затем даются основные уравнения движения в их традиционном виде и их вывод в консервативной форме, а также дополнительные соотношения (уравнение состояния и т. д.). Полученные в консервативной форме уравнения приводятся к безразмерному виду; обсуждаются различные варианты выбора безразмерных переменных. Выписывается общеупотребительная сокращенная «векторная» форма уравнений. В конце главы с математической и физической точек зрения обсуждается существование ударных волн.

## 4.1. Основные трудности

В задаче о двумерном течении совершенного газа имеется четыре зависимые переменные: две составляющие скорости и две термодинамические величины. В случае несжимаемой жидкости при решении уравнения количества движения и уравнения неразрывности не требуется привлекать уравнения энергии для исключения одной термодинамической величины — температуры. Здесь давление можно исключить перекрестным дифференцированием и ввести вихрь. Затем обе составляющие скорости исключаются за счет введения функции тока, и в итоге остаются два уравнения (параболическое и эллиптическое) для двух искомых функций — вихря и функции тока. В случае же течения сжимаемой жидкости уравнение энергии необходимо для решения остальных уравнений, а функция тока в нестационарном случае не определяется. Здесь приходится иметь дело с системой четырех дифференциальных уравнений в частных производных [1]).

[1]) Если предположить, что коэффициенты переноса и удельные теплоемкости постоянны, то уравнения удобно записать через вихрь и энтропию, как это сделано в работе Цянь Сюэ-сеня [1958]. Далее, для более ограниченного класса задач (без учета вязкости или теплопроводности и при отсутствии ударных волн) можно считать энтропию постоянной, что ведет к исключению одной искомой функции. Однако этот подход не использовался широко при численном решении задач газовой динамики. Согласно другому подходу, развитому в работе Гольдина с соавторами [1969], уравнение энергии, включающее члены с теплопроводностью, заменяют уравнением переноса энтропии и таким образом жертвуют сохранением энергии для *сохранения энтропии*.

Уравнения для сверхзвукового течения невязкого газа имеют гиперболический тип. Конечно-разностные уравнения должны в определенной мере учитывать область зависимости исходных дифференциальных уравнений, что приводит к знаменитому условию устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви.

Наиболее серьезные вычислительные трудности, присущие расчету сверхзвуковых потоков, связаны с наличием *ударных волн*. В пределе при больших числах Рейнольдса ударные волны являются *разрывами* в решении. Наибольшие усилия специалистов в этой области были направлены на то, чтобы научиться «размазывать» эти разрывы, сохраняя при этом точность расчета на некотором расстоянии от разрывов. Мы рассмотрим также некоторые методы с выделением скачков, где эти разрывы сохраняются.

## 4.2. Традиционная форма уравнений

Уравнения неразрывности и количества движения для плоского течения мы приведем в их традиционном размерном виде (см. Шлихтинг [1968]), а уравнение энергии запишем так, как это сделано в книге Овчарека [1964] [1]) (см. также любой обычный курс газовой динамики, например Шапиро [1953], Липман и Рошко [1957], Чепмен и Уолкер [1971]). Мы рассматриваем совершенный газ, т. е. считаем, что внутренняя энергия $\bar{e}$ является только функцией температуры $\bar{T}$, но свойства газа могут быть переменными (черточками сверху, как и ранее, обозначаются размерные величины). Предполагается, что объемные силы отсутствуют, а объемная вязкость $\bar{\varkappa}$ учитывается (до некоторых пор) в коэффициенте $\bar{\lambda} = \bar{\varkappa} - {}^2/_3\bar{\mu}$. Итак, указанные уравнения будут такими:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho}\bar{\mathbf{V}}) = 0, \tag{4.1}$$

$$\bar{\rho}\frac{D\bar{u}}{D\bar{t}} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left[2\bar{\mu}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{\lambda}\bar{D}\right] + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left[\bar{\mu}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}\right)\right], \tag{4.2}$$

$$\bar{\rho}\frac{D\bar{v}}{D\bar{t}} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left[\bar{\mu}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left[2\bar{\mu}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{\lambda}\bar{D}\right], \tag{4.3}$$

$$\bar{\rho}\frac{D\bar{e}_s}{D\bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{q}} - \bar{\nabla} \cdot (\bar{\mathbf{T}} \cdot \bar{\mathbf{V}}) = 0. \tag{4.4}$$

[1]) Вместо малоизвестной у нас книги Овчарека [1964], на которую неоднократно ссылается автор, читатель может каждый раз обращаться к отечественным источникам, например к следующим книгам: Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. В 2-х частях. — 6-е изд., исправл. и доп. — М.: Физматгиз, 1963; Седов Л. И. Механика сплошной среды. В 2-х томах. — 3-е изд., перераб. — М.: Наука, 1976. — *Прим. ред.*

Здесь [1]) $D/D\bar{t} = \partial/\partial\bar{t} + \bar{u}\partial/\partial\bar{x} + \bar{v}\partial/\partial\bar{y}$ — субстанциональная производная, $\bar{D} = \bar{\nabla}\cdot\bar{\mathbf{V}}$ — дивергенция скорости, $\bar{e}_s = \bar{e} + \bar{V}^2/2$ — внутренняя энергия торможения [2]) на единицу массы, $\bar{\mathbf{q}}$ — вектор потока тепла, $\bar{\mathbf{T}}$ — тензор полных напряжений. Для определения этих величин необходимы дополнительные соотношения. В компоненты тензора $\bar{\mathbf{T}}$ входят как давление, так и вязкие напряжения. Гравитационная постоянная, используемая Шлихтингом [1968], в приведенную систему не введена явно, но неявно она включается в принятую здесь систему единиц.

## 4.3. Консервативная форма уравнений

Уравнения движения невязкой сжимаемой жидкости в консервативной форме были выведены Курантом и Фридрихсом [1948], однако практически их впервые использовал Лакс [1954] для построения консервативной разностной схемы.

Если традиционные дифференциальные уравнения преобразованы таким образом, что основными искомыми переменными становятся консервативные величины $\rho$, $\rho u$, $\rho v$ и $E_s$ (величина, которая будет определена ниже), то применение к таким уравнениям консервативных конечно-разностных схем обеспечивает сохранение массы, количества движения и энергии. Соотношения Рэнкина — Гюгонио для прямого скачка [3]) основаны только на этих законах сохранения и не зависят от деталей внутренней структуры скачка. Отсюда следует, что *все* устойчивые аппроксимирующие консервативные разностные схемы, примененные

---

[1]) Некоторые расчеты (Кенцер [1970б]) были проведены с заменой уравнения (4.4) уравнением для давления

$$\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{t}} = -\left[\bar{u}\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{y}} + \gamma\bar{P}\bar{D}\right], \tag{4.5}$$

где $\gamma = \bar{C}_p/\bar{C}_v$ — отношение удельных теплоемкостей. При выводе этого уравнения использовалось уравнение состояния совершенного газа

$$\bar{P} = \bar{\rho}\bar{R}\bar{T}. \tag{4.6}$$

Уравнение (4.4) является более общим и более употребительным, так что мы в этой книге будем иметь дело только с ним.

[2]) Значением торможения или полным значением называется то значение какой-либо газодинамической величины, которое получилось бы при переходе течения обратимым образом в состояние покоя.

[3]) См., например, Овчарек [1964] или любой другой курс газовой динамики.

к уравнениям в консервативной форме, удовлетворяют соотношениям Рэнкина — Гюгонио и, следовательно, дают правильные условия на разрыве [1]).

В работе Лонгли [1960] были опробованы четыре различные разностные схемы, и при этом оказалось, что из-за использования уравнений в консервативной форме все они дают правильные значения скорости скачка. Гари [1964] показал, что применение схемы Лакса — Вендроффа к уравнениям в неконсервативной форме приводит к значительным погрешностям в величине скорости скачка (хотя волна разрежения рассчитывается несколько точнее).

Многие последующие расчеты подтвердили, что применение уравнений в консервативной форме дает более точные результаты при расчете течений со скачками (не считая схем с выделением скачков, которые будут обсуждаться ниже). Это легко понять, рассматривая стационарный прямой скачок. Ошибка аппроксимации конечно-разностных уравнений зависит от величины отброшенных высших производных при разложении в ряды Тейлора. В переменных $\rho$, $u$, $v$, $T$ наличие скачка вызывает разрыв в решении, в то время как в консервативных переменных решение непрерывно (однако на движущихся и косых скачках и консервативные переменные также могут претерпевать разрыв).

Еще одним преимуществом использования уравнений в консервативной форме является то, что в этом случае конечно-разностные уравнения можно интерпретировать как интегральные законы сохранения для контрольного объема, равного ячейке разностной сетки, как это обсуждалось в гл. 3 (разд. 3.1.3). При такой интерпретации нет необходимости в каких-либо предположениях о непрерывности функций. Поэтому интегральные формы предпочтительнее, и многие полагают, что *все* физические законы следует записывать в интегральной форме. Конечно-разностные аналоги уравнений Навье — Стокса в интегральной форме выведены в работах Аллена [1968] и Рубина и Прейзера [1968, 1970].

Для устранения громоздкости опустим черточки над размерными величинами и в уравнениях, связывающих размерные величины, будем ставить над знаком равенства букву р.

Уравнение неразрывности (4.1) уже записано в консервативной форме. Консервативную форму других уравнений можно получить путем преобразований, подобных следующим. Рассмот-

---

[1]) Отметим, что использование исходных уравнений в консервативной форме само по себе не обеспечивает сохранение массы, количества движения и энергии; необходимо также, чтобы сам конечно-разностный метод был консервативным.

рим следующие члены уравнения количества движения в направлении $x$:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u v)}{\partial y}\overset{\text{p}}{=}$$

$$\overset{\text{p}}{=}u\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+u\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}\overset{\text{p}}{=}$$

$$\overset{\text{p}}{=}u\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]+\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right]\overset{\text{p}}{=}$$

$$\overset{\text{p}}{=}u\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{V})\right]+\rho\frac{Du}{Dt}. \qquad (4.7)$$

Выражение в квадратных скобках равно нулю в силу уравнения неразрывности (4.1); поэтому

$$\rho\frac{Du}{Dt}\overset{\text{p}}{=}\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u v)}{\partial y}\overset{\text{p}}{=}\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\nabla\cdot[(\rho u)\,\mathbf{V}]. \qquad (4.8)$$

Подставляя (4.8) в (4.2), получаем уравнение количества движения в направлении $x$ в консервативной форме:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}\overset{\text{p}}{=}-\frac{\partial P}{\partial x}-\nabla\cdot[(\rho u)\,\mathbf{V}]+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda D\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right], \qquad (4.9а)$$

или сокращенно

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}\overset{\text{p}}{=}-\frac{\partial P}{\partial x}-\nabla\cdot[(\rho u)\,\mathbf{V}]+D_1+D_2. \qquad (4.9б)$$

Уравнение количества движения в консервативной форме в направлении $y$ выводится аналогично:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}\overset{\text{p}}{=}-\frac{\partial P}{\partial y}-\nabla\cdot[(\rho v)\,\mathbf{V}]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda D\right], \qquad (4.10а)$$

или сокращенно

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}\overset{\text{p}}{=}-\frac{\partial P}{\partial y}-\nabla\cdot[(\rho v)\,\mathbf{V}]+D_3+D_4. \qquad (4.10б)$$

В уравнениях (4.9) и (4.10) переменные $u$ и $v$ заменены консервативными переменными $\rho u$ и $\rho v$. Теперь в уравнении количества движения в направлении $x$ основной переменной является количество движения $\rho u$. Чтобы подчеркнуть это, перепишем уравнение (4.9б), введя обозначение $f=\rho u$:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\nabla\cdot(f\mathbf{V})\overset{\text{p}}{=}S_f, \qquad (4.11)$$

где член $S_f$ состоит из компонент градиентов давления и вязких напряжений, стоящих в правой части уравнения (4.9б). Теперь

совершенно ясно, что уравнение для переменной $f$ представляет собой уравнение переноса. Это уравнение аналогично уравнению (2.10) для вихря, и на него можно распространить все рассуждения разд. 3.1.3 о свойстве консервативности.

Мы получили консервативную форму, содержащую $\partial(\rho u)/\partial t$ из неконсервативной формы, содержащей $\partial u/\partial t$, так как последняя чаще употребляется в литературе. В действительности же основной является именно консервативная форма, а неконсервативная просто следует из нее. Достаточно вспомнить, что второй закон Ньютона записывается в консервативной форме, т. е. через производную $\partial(\rho u)/\partial t$, и только будучи скомбинированным с законом сохранения массы (с уравнением неразрывности), приводится к неконсервативной форме и записывается через $\partial u/\partial t$. Все эти замечания справедливы и для уравнения энергии, к рассмотрению которого мы сейчас переходим.

В уравнении энергии в консервативной форме консервативной величиной будет являться *удельная* (т. е. отнесенная к единице объема) *внутренняя энергия торможения*

$$E_s \overset{\text{p}}{=} \rho e_s \overset{\text{p}}{=} \rho\,[e + {}^1/_2\,(u^2 + v^2)]. \tag{4.12}$$

Если читатель незнаком с тензорными обозначениями или ему малоинтересны такие детали, как условия применимости гипотезы Стокса и т. п., то он может перейти сразу к уравнению (4.36).

С введением величины $E_s$ уравнение энергии (4.4) принимает вид

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} \overset{\text{p}}{=} -\nabla\cdot(\mathbf{V}E_s) - \nabla\cdot\mathbf{q} + \nabla\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{V}). \tag{4.13}$$

Представим тензор полных напряжений как сумму тензора гидростатического давления и тензора вязких напряжений $\mathbf{\Pi}$:

$$\mathbf{T} \overset{\text{p}}{=} -P\mathbf{I} + \mathbf{\Pi}, \tag{4.14}$$

где по определению $P$ — гидростатическое давление, а $\mathbf{I}$ — единичный диагональный тензор; тогда

$$\nabla\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{V}) \overset{\text{p}}{=} -\nabla\cdot(P\mathbf{I}\cdot\mathbf{V} + \mathbf{\Pi}\cdot\mathbf{V}). \tag{4.15}$$

Так как $\nabla\cdot(P\mathbf{I}\cdot\mathbf{V}) \overset{\text{p}}{=} \nabla\cdot(\mathbf{V}P)$[1]), формула (4.15) принимает вид

$$\nabla\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{V}) \overset{\text{p}}{=} -\nabla\cdot(\mathbf{V}P) + \nabla\cdot(\mathbf{\Pi}\cdot\mathbf{V}). \tag{4.16}$$

---

[1]) $\nabla\cdot(P\mathbf{I}\cdot\mathbf{V}) \overset{\text{p}}{=} \nabla\cdot[P\,(\mathbf{ii}+\mathbf{jj})\cdot(u\mathbf{i}+v\mathbf{j})] \overset{\text{p}}{=} \nabla\cdot[P\,(\mathbf{i}u+\mathbf{j}v)] \overset{\text{p}}{=}$

$$\overset{\text{p}}{=} \frac{\partial(uP)}{\partial x} + \frac{\partial(vP)}{\partial y} \overset{\text{p}}{=} \nabla\cdot(\mathbf{V}P).$$

Подстановка выражения (4.16) в уравнение (4.13) дает

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} \overset{\text{р}}{=} -\nabla\cdot(\mathbf{V}E_s) - \nabla\cdot\mathbf{q} - \nabla\cdot(\mathbf{V}P) + \nabla\cdot(\mathbf{\Pi}\cdot\mathbf{V}), \qquad (4.17)$$

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} \overset{\text{р}}{=} -\nabla\cdot[\mathbf{V}(E_s + P)] - \nabla\cdot\mathbf{q} + \nabla\cdot(\mathbf{\Pi}\cdot\mathbf{V}). \qquad (4.18)$$

Таким образом, получено *уравнение энергии в консервативной форме*. Заметим, что здесь *консервативной* величиной является удельная внутренняя энергия торможения $E_s = \rho(e + V^2/2)$, а *переносимой* величиной — удельная *энтальпия* торможения $E_s + P$. Член $\mathbf{V}P$ характеризует работу сил давления.

Заметим также, что консервативная форма уравнения неразрывности может быть получена из обычной (см., например, Берд с соавторами [1960]) простой заменой субстанциональной производной $D\rho/Dt$ на $\partial\rho/\partial t + \nabla\cdot(\rho\mathbf{V})$. То же самое справедливо и для уравнений количества движения, так как вязкие члены при таком преобразовании не затрагиваются. Но для уравнения энергии это несправедливо. Приведение уравнения энергии к консервативной форме изменяет вид вязких членов. Введение консервативной переменной $E_s = \rho(e + V^2/2)$ ведет к появлению члена $\partial(^1/_2\rho V^2)/\partial t$. Этот член может быть найден из «уравнения механической энергии» (см. Берд с соавторами [1960]) и зависит от вязких членов. Таким образом, при введении консервативной переменной $E_s$ вид вязких членов в уравнении энергии меняется.

Уравнения (4.1), (4.9), (4.10) и (4.18) являются системой уравнений в размерном виде для искомых консервативных переменных $\rho$, $\rho u$, $\rho v$, $E_s$, описывающей течение сжимаемой жидкости. Однако для ее решения необходимы дополнительные соотношения.

## 4.4. Дополнительные соотношения

Для решения приведенной выше системы необходимы дополнительные соотношения, именно: уравнение состояния для определения $P$ через консервативные переменные, а также соотношения для определения теплопроводности и вязких напряжений. В этой главе мы рассмотрим только простейший случай. Предположения, которые будут приняты, пригодны для простых газов при умеренных температурах и давлениях. (Воздух часто можно считать простым однокомпонентным газом, так как основные его компоненты $N_2$ и $O_2$ являются двухатомными и имеют сходные термодинамические свойства.)

Уравнение состояния для совершенного газа имеет вид

$$\bar{P} = \bar{\rho}\bar{R}_g\bar{T}, \qquad (4.19)$$

где $\bar{R}_g$ — газовая постоянная. Постоянная $\bar{R}_g$ связана с удельными теплоемкостями при постоянном давлении $\bar{C}_p$ и постоянном объеме $\bar{C}_v$ следующим образом [1]):

$$\bar{R}_g = \bar{C}_p - \bar{C}_v. \tag{4.20}$$

Далее, будем считать газ калорически совершенным, т. е. будем полагать, что его внутренняя энергия $\bar{e}$ имеет вид

$$\bar{e} = \bar{C}_v \bar{T}, \tag{4.21}$$

где удельная теплоемкость $\bar{C}_v$ постоянна. Подстановка (4.20) и (4.21) в (4.19) дает

$$\bar{P} = \bar{\rho}\,\frac{\bar{C}_p - \bar{C}_v}{\bar{C}_v}\,\bar{e} = \bar{\rho}\bar{e}\,(\gamma - 1), \tag{4.22}$$

где $\gamma = \bar{C}_p/\bar{C}_v$ — отношение удельных теплоемкостей. Приблизительный диапазон изменения $\gamma$ от $5/3 \approx 1.67$ для одноатомных газов (например, гелия), $7/5 = 1.4$ для двухатомных газов (воздуха), $9/7 \approx 1.28$ для трехатомных газов (двуокись углерода) до 1.1 для сложных выхлопных газов реактивного двигателя [2]). Предположение (4.21) лучше всего выполняется для одноатомных газов и значительно хуже — для трехатомных газов. Все калорически совершенные газы имеют уравнение состояния (4.22), и их часто называют газами с постоянным показателем адиабаты. С учетом соотношения (4.12) давление $\bar{P}$ выражается через консервативные переменные следующим образом:

$$\bar{P} = [\bar{E}_s - {}^1/_2\bar{\rho}\,(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)]\,(\gamma - 1). \tag{4.23}$$

В работе Даля [1969] приведена программа расчета термодинамических величин реальных газовых смесей, составленная на Фортране.

Скоростной напор $\bar{\rho}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)/2$ выражается через консервативные переменные $\bar{\rho}$, $\bar{\rho}\bar{u}$ и $\bar{\rho}\bar{v}$ следующим очевидным образом:

$$\frac{1}{2}\,\bar{\rho}\,(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) = \frac{1}{2}\,\frac{(\bar{\rho}\bar{u})^2 + (\bar{\rho}\bar{v})^2}{\bar{\rho}}\,. \tag{4.24}$$

Выразим теперь через основные переменные член $\bar{\nabla}\cdot\bar{\mathbf{q}}$ (поток тепла) и член с тензором вязких напряжений $\bar{\nabla}\cdot(\bar{\boldsymbol{\Pi}}\cdot\mathbf{V})$, применив закон Фурье к первому из этих членов и гипотезу Стокса к второму.

---

[1]) Раньше равенство (4.20) часто писали в следующем виде: $R_g = (C_p - C_v)J$, где $J$ — тепловой эквивалент механической работы. Равенство (4.20) предполагает использование соответствующей системы единиц.

[2]) В пределе для несжимаемой жидкости $\gamma = 1$, но переход к этому пределу необходимо производить осторожно во избежание получения неправильных уравнений.

Закон теплопроводности Фурье для среды, предполагаемой изотропной, гласит

$$\bar{\mathbf{q}} = -\bar{\bar{k}}\bar{\nabla}T, \tag{4.25}$$

что дает

$$-\nabla\cdot\mathbf{q} = \nabla\cdot k\nabla T \overset{\text{p}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right). \tag{4.26}$$

Для определения члена, содержащего вязкие напряжения, можно записать (см. Овчарек [1964]):

$$\mathbf{\Pi} \overset{\text{p}}{=} \pi_{11}\mathbf{ii} + \pi_{12}\mathbf{ij} + \pi_{21}\mathbf{ji} + \pi_{22}\mathbf{jj}, \tag{4.27}$$

$$\mathbf{V} \overset{\text{p}}{=} u\mathbf{i} + v\mathbf{j}; \tag{4.28}$$

тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}\cdot\mathbf{V} &\overset{\text{p}}{=} (\pi_{11}\mathbf{ii} + \pi_{12}\mathbf{ij} + \pi_{21}\mathbf{ji} + \pi_{22}\mathbf{jj})\cdot(u\mathbf{i} + v\mathbf{j}) \overset{\text{p}}{=} \\ &\overset{\text{p}}{=} \pi_{11}u\mathbf{i} + \pi_{12}v\mathbf{i} + \pi_{21}u\mathbf{j} + \pi_{22}v\mathbf{j} \overset{\text{p}}{=} \\ &\overset{\text{p}}{=} \mathbf{i}(\pi_{11}u + \pi_{12}v) + \mathbf{j}(\pi_{21}u + \pi_{22}v).\end{aligned} \tag{4.29}$$

Для любого вектора

$$\mathbf{a} \overset{\text{p}}{=} a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} \tag{4.30}$$

имеем

$$\nabla\cdot\mathbf{a} \overset{\text{p}}{=} \frac{\partial}{\partial x}(a_1) + \frac{\partial}{\partial y}(a_2) \tag{4.31}$$

и поэтому

$$\nabla\cdot(\mathbf{\Pi}\cdot\mathbf{V}) \overset{\text{p}}{=} \frac{\partial}{\partial x}(\pi_{11}u + \pi_{12}v) + \frac{\partial}{\partial y}(\pi_{21}u + \pi_{22}v). \tag{4.32}$$

Компоненты тензора напряжений выпишем из книги Овчарека ([1964], формула (10.17)):

$$\begin{aligned}\pi_{11} &\overset{\text{p}}{=} \lambda D + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \pi_{12} \overset{\text{p}}{=} \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \\ \pi_{21} &\overset{\text{p}}{=} \pi_{12}, \quad \pi_{22} \overset{\text{p}}{=} \lambda D + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned} \tag{4.33}$$

С учетом этих соотношений равенство (4.32) принимает вид

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathbf{\Pi}\cdot\mathbf{V}) \overset{\text{p}}{=} &\frac{\partial}{\partial x}\left[u\lambda D + \mu u\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[v\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left[u\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[v\lambda D + 2\mu v\frac{\partial v}{\partial y}\right].\end{aligned} \tag{4.34}$$

Для удобства конечно-разностного представления желательно привести члены к виду $\partial[f\partial g/\partial y]/\partial x$, $\partial[f\partial g/\partial x]/\partial x$ и т. п. Введем величины $\lambda \overset{\text{p}}{=} \varkappa - {}^2/_3\mu$, $\eta \overset{\text{p}}{=} \varkappa + {}^4/_3\mu$. После подстановки этих величин в (4.34) и перегруппировки членов получим

$$\nabla\cdot(\Pi\cdot V) \overset{\text{p}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[(\eta u)\frac{\partial u}{\partial x} + (\mu v)\frac{\partial v}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[(\lambda u)\frac{\partial v}{\partial y} + (\mu v)\frac{\partial u}{\partial y}\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\eta v)\frac{\partial v}{\partial y} + (\mu u)\frac{\partial u}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\lambda v)\frac{\partial u}{\partial x} + (\mu u)\frac{\partial v}{\partial x}\right]. \quad (4.35)$$

Для определения $\bar{\mu}$ и $\bar{k}$ также необходимы дополнительные соотношения. Предположение о постоянстве $\bar{\mu}$ и $\bar{k}$ может упростить вязкие члены и поэтому оказаться полезным для проведения тестовых расчетов. Однако предположение о постоянстве $\bar{\mu}$ плохо выполняется для газов даже при умеренных сверхзвуковых числах Маха и поэтому может быть рекомендовано лишь для тестовых задач. Предположение о постоянстве $\bar{k}$ более реалистично, однако для общности мы будем считать переменной и эту величину. Существуют несколько соотношений для определения коэффициентов переноса $\bar{\mu}$ и $\bar{k}$. Эти соотношения удобно обсудить в следующем разделе.

Уравнения (4.35) и (4.26) вместе с уравнением состояния (4.23) и соотношениями для коэффициентов переноса $\bar{\mu}$ и $\bar{k}$ замыкают уравнение энергии в консервативной форме для основных переменных, удобной для перехода к конечно-разностному представлению. Но прежде чем перейти к численному решению уравнений, следует записать их в безразмерном виде.

## 4.5. Безразмерный вид консервативных уравнений

Для того чтобы можно было независимо менять характерные параметры задачи, гораздо выгоднее вести расчеты для уравнений в безразмерном виде.

Приведение к безразмерному виду уравнений для сжимаемой жидкости охватывает гораздо большее число переменных, чем для несжимаемой жидкости в особенности в том случае, когда жидкость имеет переменные свойства, как это принято здесь[1]). Различный выбор характерных величин, к которым относятся соответствующие размерные величины, приводит к различному безразмерному виду уравнений. Так, например, Крокко [1965] все величины относит к параметрам торможения. Скоглунд и Коул [1966] и некоторые другие авторы в качестве характерной скорости берут скорость звука в набегающем

[1]) Это усложнение не столь неприятно при консервативной записи уравнений, как при традиционной.

потоке. В работе Моретти [1969a] скорости отнесены к $\sqrt{\bar{P}_s/\bar{\rho}_s}$, где индекс $s$ означает соответствующие параметры торможения. Мы будем относить все величины к их значениям в невозмущенном потоке вне пограничного слоя. Вернемся к обозначению размерных величин черточками над буквами и введем безразмерные величины следующим образом:

$$u = \bar{u}/\bar{u}_0, \quad v = \bar{v}/\bar{u}_0, \quad x = \bar{x}/\bar{L}, \quad y = \bar{y}/\bar{L}, \quad t = \bar{t}/(\bar{L}/\bar{u}_0),$$

$$\rho = \bar{\rho}/\bar{\rho}_0, \quad T = \bar{T}/\bar{T}_0, \quad P = \bar{P}/(\bar{\rho}_0\bar{u}_0^2), \quad \mu = \bar{\mu}/\bar{\mu}_0, \quad \varkappa = \bar{\varkappa}/\bar{\mu}_0,$$

$$k = \bar{k}/\bar{k}_0, \quad e = \bar{e}/\bar{u}_0^2, \quad E_s = \bar{E}_s/(\bar{\rho}_0\bar{u}_0^2). \tag{4.36}$$

Отмегим, что обе составляющие скорости $\bar{u}$ и $\bar{v}$ отнесены к $\bar{u}_0$, а оба коэффициента $\bar{\mu}$ и $\bar{\varkappa}$ к $\bar{\mu}_0$ [1]). Внутренняя энергия $e$ отнесена к $\bar{u}_0^2$, и, таким образом, при приведении к безразмерной форме член в уравнении энергии, содержащий $\bar{E}_s + P$, не меняет вида.

Определим число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{\bar{\rho}_0\bar{u}_0\bar{L}}{\bar{\mu}_0}, \tag{4.37}$$

число Прандтля

$$\mathrm{Pr} = \bar{C}_p\bar{\mu}_0/\bar{k}_0 \tag{4.38}$$

и характерное число Маха

$$M_0 = \bar{u}_0/\bar{a}_0, \tag{4.39}$$

где $\bar{a}_0$ — изэнтропическая скорость звука в невозмущенном потоке. В случае рассматриваемого нами совершенного газа она дается элементарным газодинамическим соотношением (см., например, Овчарек [1964])

$$\bar{a}_0 = \sqrt{\gamma\bar{R}_g\bar{T}_0}. \tag{4.40}$$

Заметим, что числа Re и $M_0$ построены только по одной составляющей скорости $\bar{u}_0$. Истинное число Маха невозмущенного потока дается выражением

$$M_\infty = \frac{\sqrt{\bar{u}_0^2 + \bar{v}_0^2}}{\bar{a}_0^2} = M_0\sqrt{1 + v_0^2}. \tag{4.41}$$

Далее приводится безразмерная форма уравнений неразрывности, количества движения и энергии (соответствующие пре-

[1]) Для газов объемную вязкость $\bar{\varkappa}_0$ практически всегда полагают равной нулю.

образования предлагается выполнить в качестве упражнения; см. задачу 4.1):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}), \tag{4.42а}$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \nabla \cdot [(\rho u)\,\mathbf{V}] + (D_1 + D_2)/\mathrm{Re}, \tag{4.42б}$$

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial y} - \nabla \cdot [(\rho v)\,\mathbf{V}] + (D_3 + D_4)/\mathrm{Re}, \tag{4.42в}$$

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} = -\nabla \cdot [\mathbf{V}\,(E_s + P)] + \frac{1}{\mathrm{N}} \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla \cdot (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{V}). \tag{4.42г}$$

В уравнениях (4.42) использованы следующие обозначения:

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda D\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu \left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \quad \text{при } \varkappa = 0, \tag{4.43а}$$

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right], \tag{4.43б}$$

$$D_3 = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right], \tag{4.43в}$$

$$D_4 = \frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda D\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu \left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] \quad \text{при } \varkappa = 0, \tag{4.43г}$$

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{4.44а}$$

$$\mathrm{N} = \mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{M}_0^2(\gamma - 1), \tag{4.44б}$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla \cdot k \nabla T = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right), \tag{4.45}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{V}) = \frac{\partial \pi_1}{\partial x} + \frac{\partial \pi_2}{\partial y}, \tag{4.46а}$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\eta u \frac{\partial u}{\partial x} + \mu v \frac{\partial v}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda u \frac{\partial v}{\partial y} + \mu v \frac{\partial u}{\partial y}\right], \tag{4.46б}$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\eta v \frac{\partial v}{\partial y} + \mu u \frac{\partial u}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda v \frac{\partial u}{\partial x} + \mu u \frac{\partial v}{\partial x}\right], \tag{4.46в}$$

$$\eta = \varkappa + {}^4/_3\,\mu, \quad \lambda = \varkappa - {}^2/_3\,\mu. \tag{4.47}$$

Местная безразмерная скорость звука будет иметь вид

$$a^2 = T/\mathrm{M}_0^2, \tag{4.48}$$

а местное число Маха — вид

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}_0 \sqrt{(u^2 + v^2)/T}. \tag{4.49}$$

Уравнение состояния (4.19) записывается так:

$$P = \rho T/(\gamma \mathrm{M}_0^2) \tag{4.50}$$

или, как следует из (4.22), для газов с постоянным показателем адиабаты так:

$$P = \rho e (\gamma - 1). \tag{4.51}$$

Таким образом, при приведении к безразмерному виду вид уравнения состояния газа с постоянным показателем адиабаты не меняется.

Внутренняя энергия $e$ получается в следующем виде:

$$e = T/[\gamma (\gamma - 1) M_0^2]. \tag{4.52}$$

Это равенство с учетом соотношения

$$e = C_v T \tag{4.53}$$

можно трактовать как определение безразмерной удельной теплоемкости $C_v$:

$$C_v = \frac{1}{\gamma (\gamma - 1) M_0^2}. \tag{4.54}$$

Безразмерная температура $T$ может быть определена следующим образом:

$$T = \frac{1}{C_v}\left[\frac{E_s}{\rho} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2)\right]. \tag{4.55}$$

Комбинируя формулы (4.51)—(4.54), можно получить уравнение состояния в виде

$$P = (\gamma - 1)[E_s - {}^1/_2 \rho (u^2 + v^2)]. \tag{4.56}$$

*Упражнение.* Показать, что в безразмерных переменных уравнение состояния может быть записано в виде $P = R_g \rho T$, где безразмерная газовая постоянная $R_g = C_v (\gamma - 1) = 1/(\gamma M_0^2)$.

Аналогично можно вывести безразмерное уравнение для энтропии. Во избежание путаницы с другими обозначениями обозначим энтропию символом $E_y$.

*Упражнение.* Показать, что размерное уравнение для энтропии совершенного газа

$$\bar{E}_y - \bar{E}_{y_1} = \bar{C}_p \ln (\bar{T}/\bar{T}_1) - \ln (\bar{P}/\bar{P}_1), \tag{4.57а}$$

где индекс 1 означает произвольное начальное состояние газа, можно записать в следующем безразмерном виде:

$$\Delta E_y = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln T - \ln \frac{P}{P_0}, \tag{4.57б}$$

где $P_0 = \bar{P}_0/(\bar{\rho}_0 \bar{u}_0^2)$ — характерное безразмерное давление, а безразмерная энтропия определена как

$$E_y = \bar{E}_y/\bar{R}_g. \tag{4.58}$$

Для определения $\mu$ и $k$ также необходимы соответствующие соотношения. Формула Сазерленда для вязкости (см. Шлихтинг [1968]) дает вполне хорошие результаты для воздуха и других газов в том интервале температур, в котором газ можно достаточно точно считать калорически совершенным. По этой формуле

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{T_0 + S_1}{T + S_1}, \tag{4.59}$$

или в безразмерном виде

$$\mu = T^{3/2} \frac{1 + S_1}{T + S_1}, \tag{4.60}$$

где

$$S_1 = \bar{S}_1/\bar{T}_0 \tag{4.61}$$

и $S_1 = 110\,\mathrm{K}$ для воздуха. Заметим, что при использовании формулы Сазерленда в решение добавляется еще один характерный параметр $S_1 = \bar{S}_1/\bar{T}_0$. Практически это приводит к необходимости задаваться некоторым характерным *размерным* значением температуры в задаче. То же самое имеет место, если $\bar{k}$ берется как линейная функция от $\bar{T}$, $\bar{k} = \bar{a} + \bar{b}\bar{T}$, причем $\bar{a} \neq 0$.

В качестве аппроксимации формулы Сазерленда часто применяется степенная зависимость

$$\mu = T^{\omega}, \tag{4.62}$$

где $\omega$ выбирается между 1/2 и 1. В этом случае $\omega$ является дополнительным характерным параметром, однако зависимость от него может быть очень слабой, и для многих газов можно удовлетворяться значением $\omega = 1$. При расчетах течений с большими числами M выбор различных зависимостей вязкости от температуры может привести к существенно различным результатам (см. Батлер [1967]).

При использовании формулы Сазерленда необходимо проявлять предусмотрительность при составлении программы во избежание чрезмерного возрастания машинного времени, необходимого для расчета (см. гл. 7).

Таким образом, уравнения, описывающие течения газа (4.42) и необходимые дополнительные соотношения, такие, как уравнение состояния (4.50), содержат четыре характерных безразмерных параметра: $M_0$, Re, Pr и $\gamma$ или $M_0$, Re, N и $\gamma$ в том случае, когда коэффициенты переноса $\mu$ и $k$ предполагаются постоянными. При переменных $\mu$ и $k$ можно дополнительно ввести характерную размерную температуру.

## 4.6. Сокращенная запись уравнений

Уравнения, описывающие течения сжимаемой жидкости, очевидно, сложнее уравнений, описывающих течения несжимаемой жидкости. Поэтому для изложения и оценки численных схем часто применяются различные формы сокращенной записи этих уравнений.

Широко распространено представление уравнений (4.42) в «векторной» форме. Здесь «векторы» $U$, $F$, $G$ представляют собой упорядоченные наборы комбинаций основных переменных. При $\varkappa = 0$ эта сокращенная запись уравнений выглядит так:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0, \tag{4.63а}$$

где

$$U = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_s \end{Bmatrix}, \tag{4.63б}$$

$$F = \begin{Bmatrix} \rho u \\ P + \rho u^2 - \frac{\mu}{\mathrm{Re}}\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ \rho u v - \frac{\mu}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ u(E_s + P) - \frac{k}{\mathrm{N}}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\pi_1}{\mathrm{Re}} \end{Bmatrix}, \tag{4.63в}$$

$$G = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho u v - \frac{\mu}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ P + \rho v^2 - \frac{\mu}{\mathrm{Re}}\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ v(E_s + P) - \frac{k}{\mathrm{N}}\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\pi_2}{\mathrm{Re}} \end{Bmatrix}. \tag{4.63г}$$

Например, уравнение неразрывности (4.42а) получается из (4.63) при подстановке первых элементов $U$, $F$, $G$:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y} = 0, \tag{4.64}$$

т. е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0. \tag{4.65}$$

Уравнения для случая течения невязкого нетеплопроводного газа [1]) получаются из приведенных выше уравнений при $1/\mathrm{Re} = 0$ и $1/\mathrm{N} = 0$. Уравнения для одномерного течения невязкого газа получаются в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \tag{4.66а}$$

$$U = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E_s \end{Bmatrix}, \tag{4.66б}$$

$$F = \begin{Bmatrix} \rho u \\ P + \rho u^2 \\ u\,(E_s + P) \end{Bmatrix}. \tag{4.66в}$$

Число арифметических операций, требующихся для решения уравнения (4.63) в конечно-разностной форме, можно значительно уменьшить, считая коэффициенты $\bar{\mu}$ и $\bar{k}$ постоянными, что приведет к $\mu = 1$, $k = 1$ в уравнении (4.63). Однако, как было указано в разд. 4.4, для достижения большей точности необходимы более общие предположения.

## 4.7. Физические и математические особенности, связанные с наличием ударных волн

С физической точки зрения ударная волна представляет собой разрыв в течении [2]). Она отличается от контактного разрыва тем, что газ движется *через* ударную волну, в то время как при контактном разрыве газ движется *вдоль* разрыва.

Ударная волна — замечательное физическое явление. Здесь на расстоянии порядка $10^{-4}$ см могут возникать замедления порядка 1000 м/с$^2$, а ускорения в лагранжевой системе измеряются миллиардами $g$. Ударные волны возникают при обтекании потоком угла, сопровождающемся сжатием, а также при внезапном повышении давления по какой-либо другой причине. Существуют только скачки уплотнения; разрежение протекает непрерывным образом. Гидравлические прыжки и боры (уступообразные волны) представляют собой явления, подобные скачкам.

---

[1]) Из рассмотрения на молекулярном уровне и из аналогии Рейнольдса (см. Шлихтинг [1968]) следует, что предположение об отсутствии вязкости соответственно подразумевает предположение об адиабатичности.

[2]) Ударная волна представляет собой математический разрыв только в предельном случае невязкого газа; вязкость и теплопроводность сглаживают разрыв. Практически при нормальных условиях толщина ударной волны является величиной порядка средней длины свободного пробега молекул.

С математической точки зрения ударная волна — *существенно* нелинейное явление. В одномерном случае реальные ударные волны в газе (так же, как и турбулентность) моделируются уравнением Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4.67}$$

Если коэффициент $\alpha$ при диссипативном члене $\partial^2 u/\partial x^2$ тождественно равен нулю (что соответствует случаю $\mathrm{Re} = \infty$), то уравнение (4.67) сводится к следующему:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{4.68}$$

Решение этого уравнения не обязательно непрерывно во все моменты времени. Оно имеет аналитическое решение, которое при специальном выборе начальных данных претерпевает скачок (математический разрыв). Следуя Беллману с соавторами [1958], запишем аналитическое решение уравнения (4.68) в виде

$$u(x, t) = f(Z), \quad Z = x - u(x, t)t, \tag{4.69}$$

где функция $f$ задает начальное условие при $t = 0$:

$$u(x, 0) = f(x). \tag{4.70}$$

Дифференцируя это решение, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t) = \frac{f'(Z)}{1 + tf'(Z)}. \tag{4.71}$$

Если начальное условие $f(x)$ таково, что $1 + tf'(Z) \to 0$ при некотором $t \to t_1$, то

$$\partial u/\partial x\,|_{t\to t_1} \to \infty \tag{4.72}$$

и получается скачок [1]).

В задачах более высокой размерности при решении методом характеристик зарождающийся математический скачок проявляется как пересечение характеристик одного и того же семейства (см., например, Томас [1954]).

Если в уравнении (4.67) коэффициент $\alpha$ не равен нулю, но очень мал, то разрыв все еще может возникнуть. Для несколько бо́льших $\alpha$ разрыв может не появиться, зато могут иметь место большие градиенты $\partial u/\partial x$. Именно это происходит в реальных

[1]) Другое описание возникновения скачка при решении уравнения Бюргерса см. в работе Лакса [1969]. Такие недифференцируемые решения уравнений в частных производных называют «слабыми» решениями в отличие от гладких решений. Скачок связывает две области гладких решений.

газах при больших числах Рейнольдса. Производные типа $\partial u/\partial x$ могут быть столь велики, что толщина скачка станет величиной порядка длины свободного пробега молекул. При практических вычислениях в этом случае можно вводить разрыв.

Фой [1964] показал, что переход к случаю нулевой вязкости при $\alpha \to 0$ происходит гладко. Он доказал, что для двух любых состояний, которые для гиперболической системы ($\alpha \to 0$) могут быть связаны достаточно слабым скачком, существует непрерывное решение соответствующей системы с вязкими членами. Когда коэффициент вязкости стремится к нулю, это решение стремится к разрывному обобщенному решению гиперболической системы (см. обсуждение этого вопроса и ссылки в работе Лакса [1957]).

Для численного исследования возникновения скачков Ван Леер [1969] и Лакс [1969] пользовались уравнением Бюргерса в консервативной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0, \tag{4.73}$$

однако между этим уравнением и полной системой (4.63) существуют различия; см. работу Лакса [1969].

# Глава 5

# ОСНОВНЫЕ СХЕМЫ РАСЧЕТА ДВИЖЕНИЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В этой главе обсуждаются основные численные методы расчета плоских течений сжимаемой жидкости в прямоугольных координатах. Большинство из этих методов построено на основе методов и рассуждений, уже приведенных в гл. 3 для случая течений несжимаемой жидкости, поэтому содержание главы 3 существенно для понимания материала настоящей главы.

Уже после выхода в свет первого издания настоящей книги (1972 г.) была опубликована прекрасная работа Пейре и Вивиана [1975], посвященная расчетам течений сжимаемого газа. Эту работу можно рекомендовать по всем аспектам вычислительных задач, обсуждаемых в настоящей главе.

## 5.1. Предварительные соображения

Перед тем как перейти к основному содержанию настоящей главы, рассмотрим три вопроса, чтобы не возвращаться к ним при изложении остального материала. Это следующие вопросы:

1) методы расчета течений без ударных волн и методы с выделением ударных волн,
2) исследование устойчивости,
3) использование неявных схем.

### 5.1.1. Методы расчета течений без ударных волн и методы с выделением ударных волн

Хотя в течении сжимаемой жидкости могут возникать ударные волны, известный интерес представляют и решения без скачков. Рассмотрим кратко некоторые численные методы, пригодные только для расчета течений без скачков; эти методы не являются основным предметом настоящей главы.

Не все течения сжимаемой жидкости являются сверхзвуковыми; очевидно, что в задачах с чисто дозвуковым течением ударные волны не возникают. Например, Трулио с соавторами [1966] использовал уравнения движения сжимаемого газа для расчета дозвукового течения (см., однако, разд. 5.9).

Для сверхзвуковых течений невязкого газа, когда уравнения являются чисто гиперболическими, естественным численным методом расчета является метод характеристик (Курант и Фридрихс [1948]; Овчарек [1964]). В этом широко известном методе расчетная сетка не прямоугольная и не известна заранее, а выстраивается вместе с продвижением решения в процессе расчета. Этот метод дает наиболее точные результаты, так как расчет проводится по узловым точкам, лежащим на характеристиках, поперек которых производные могут претерпевать разрыв. (Дальнейшее описание и ссылки относительно двух- и трехмерного метода характеристик приведены в разд. 6.4.) Основным ограничением метода характеристик является невозможность включения в него вязких эффектов, если не обращаться к концепции пограничного слоя.

Бойнтон и Томсон [1969] разработали метод расчета с продвижением решения по пространственной координате, который является пространственным аналогом нестационарных лагранжевых методов. В этом методе допускается диффузия по нормали к координате, связанной с линией тока, а скачки, как и в методе характеристик, выделяются.

Необычный графический метод для расчета сверхзвуковых течений без скачков был предложен Ринглебом [1963] и развит Чау и Мортимером [1966]. Применение этого метода ограничивалось течением между двумя фиксированными линиями тока наподобие течения внутри сопла. Чау и Мортимер [1966] обобщили метод Ринглеба для учета вязких эффектов.

Для численного решения гиперболических уравнений без ударных волн было разработано несколько нестационарных методов, например метод Бабенко и Воскресенского [1961] и метод Гурли и Морриса [1968].

Эти и другие методы расчета течений без скачков могут применяться в сочетании с различными схемами выделения ударных волн, в которых эти волны рассматриваются как разрывы и при переходе через них используются соотношения Рэнкина — Гюгонио (см. Овчарек [1964]). Возможно приложение такого подхода к одномерным задачам на эйлеровой фиксированной сетке (Рихтмайер [1957]), однако представляется, что выделение скачков на фиксированных прямоугольных сетках в двумерных задачах трудноосуществимо (Скоглунд и Коул [1966]). Методы выделения скачка на криволинейных сетках с преобразованием скачков очень трудоемки, но дают большую точность (см. разд. 4.3).

Другой подход к расчету течений со скачками заключается в изменении вычислительной процедуры для продолжения решения через скачок. Для этой цели Томас [1954] использовал одномерную полиномиальную интерполяцию высокого порядка

и измельченную сетку в окрестности скачка. Т. Д. Тейлор [1964] также предложил локальную схему интегрирования при переходе через скачок. Беллман с соавторами [1958] разработал схему перехода через скачок при расчете по методу характеристик; при этом начальные данные для расчета по характеристикам в плоскости $(x, t)$ находятся с помощью шеститочечной интерполяции Лагранжа по узловым точкам прямоугольной расчетной сетки в плоскости $(x, t)$. При этом выяснилось, что хорошие параметры на скачке и безусловная устойчивость расчета достигались только для уравнения Бюргерса, а для более общих гиперболических уравнений расчет оказывался неустойчивым. Представляется, что эти старые методы неудобны для расчета на ЭВМ и плохо приспособлены к решению двумерных и нестационарных задач.

В некоторых случаях слабый скачок внутри течения невязкого газа можно рассчитывать при помощи метода характеристик как почти линейную волну сжатия. Метод неизэнтропических характеристик Вейнбаума [1966], например, достаточно точно дает местоположение начальной точки скачка и прирост давления на нем; см. также работу Баума и Оренбергера [1971]. Метод характеристик может быть использован также в сочетании с методом выделения скачка; при этом появление скачка обнаруживается по пересечению характеристик одного семейства. Распространение скачков в решении, проводимом по методу характеристик, описано Томасом [1954]. Ксерикос [1968], пользуясь цилиндрическими координатами, детально изложил метод выделения головного скачка и скачка, вызванного изломом образующей тела. Д. Б. Тейлор [1968] разработал метод выделения скачка при решении методом характеристик, позволяющий прослеживать большое число слабых косых скачков.

В нестационарном методе Моретти (Моретти и Аббетт [1966], Моретти и Блейх [1967], Моретти [1968а]) расчет движущейся ударной волны проводится методом характеристик, а все остальные вычисления осуществляются на четырехугольной сетке, не являющейся характеристической. В отличие от других методов выделения скачков данный метод успешно применялся для расчета обтекания затупленных тел. Использованная здесь четырехугольная сетка не является прямоугольной и не фиксирована в пространстве, а определяется неортогональным преобразованием координат, зависящим от времени так, что в каждый момент времени контур тела и отошедшая ударная волна представляют собой координатные линии.

Этому методу присущи некоторые недостатки. Алгоритм метода, уравнения и программирование очень сложны, в особенности при учете эффектов вязкости и при распространении

метода на трехмерные течения. При создании программы на ЭВМ необходимо заранее знать двумерную структуру скачков; например, незапланированное появление маховского отражения (Овчарек [1964]), вероятно, приведет к невозможности продолжения расчета. Кроме того, до настоящего времени не было предложено методов для расчета скачка, формирующегося при постепенном слиянии слабых волн сжатия, как это происходит в постепенно сужающемся канале или при образовании ударной волны в ближнем следе за телом. В тех случаях, когда применение метода Моретти возможно, он дает очень точные результаты и требует мало машинного времени. Дальнейшее обсуждение этого метода см. в разд. 6.2.

Частным методом выделения стационарного скачка является обратный метод Ван-Дайка для задачи обтекания затупленного тела с отошедшей ударной волной (Ван-Дайк [1958], Гарабедян и Либерштейн [1958]). Здесь опять решение строится не на фиксированной эйлеровой сетке, а на сетке, меняющейся от итерации к итерации. Задается форма отошедшей головной ударной волны, и уравнения дозвукового течения интегрируются от ударной волны до тела, т. е. по заданной форме ударной волны отыскивается форма обтекающего тела. В принципе, варьируя форму ударной волны, можно найти желаемую форму тела, однако при нахождении формы тел с резко меняющейся кривизной возникают значительные трудности.

Слабой стороной этого метода является то, что для эллиптических уравнений дозвукового течения решается не краевая задача, а задача с начальными данными, которая оказывается неустойчивой (см. разд. 3.2.8). Успешность применения этого метода определяется применением одиннадцатиточечной интерполяции для сглаживания производных от начальных данных вдоль ударной волны. Если между ударной волной и телом брать более семи точек, то может наступить неустойчивость. Однако для гладких тел при больших числах Маха метод дает быструю сходимость и применяется для расчетов.

Укажем некоторые работы по другим методам и алгоритмам, предложенным для решения обратных задач. Уэбб с соавторами [1967] проводил расчеты на ЭВМ с удвоенной точностью для уменьшения ошибок округления и был вынужден сглаживать начальные данные для обеспечения устойчивости. Их схему нельзя считать удовлетворительной, так как неясно, чем определяется полученное решение: физикой явления или сглаживанием начальных данных. При помощи обратного метода Бриггс [1960] решал задачу об обтекании эллиптического конуса под углом атаки. Много вопросов, связанных с обратным методом, затронуто в работе Пауэрса с соавторами [1967]. Джонс [1968] разработал обратный метод для конических тел,

в котором вместо итераций по отклонениям в форме тела (на поверхности которого нормальная составляющая скорости обращается в нуль) рассматриваются невязки этой составляющей скорости в точках желаемого положения тела. При этом Джонс исходил из точного решения Тейлора — Макколла (см. Овчарек [1964]) для обтекания конического тела при нулевом угле атаки, вводя малые возмущения угла атаки или формы обтекаемого тела. Обтекание затупленного тела под углом атаки рассчитывали обратным методом Махин и Сягаев [1966]. Кайрис [1970] разработал метод, в котором объединены конечно-разностная схема на смешанной лагранжево-эйлеровой сетке для расчета течения без скачков и обратный метод для расчета скачка. Много алгоритмов обратного метода и метода характеристик используется в промышленности (см. работу Морено [1967], содержащую также библиографию по этой теме). Морено [1967] отмечает, что при некоторых заданных начальных формах ударной волны могут возникать особенности в решении, вызывающие расходимость итераций. Необходимо еще отметить, что при гиперзвуковом обтекании даже простой конфигурации — конуса со сферическим затуплением — кривизна ударной волны не всегда монотонна (Уилсон [1967]), а может иметь точку перегиба, что, разумеется, может привести к прекращению расчета.

В настоящей книге основное место отводится методам расчета нестационарных течений на эйлеровых сетках, которые допускают образование скачков в течении, но не требуют какого-либо специального алгоритма для этих скачков и даже просто его обнаружения. Такие методы носят название методов «размазывания» скачка (shock-smearing) или методов «улавливания» скачка (shock-capturing) в англоязычной литературе и методов сквозного счета в литературе на русском языке (см., например, Годунов и Семендяев [1962]). Если нас интересует только стационарное решение задачи, то можно проводить нестационарные расчеты и выйти на стационарное решение (если оно существует) при больших значениях времени (так же, как в гл. 3). В литературе на русском языке этот подход называется методом установления (Брайловская с соавторами [1968]) или методом асимптотического стационирования.

Конечно, если нестационарное решение не представляет интереса, то при вышеуказанном подходе появляется дополнительная гибкость, связанная с отсутствием необходимости моделировать реальные физические нестационарные процессы. При таком подходе, например, можно использовать схемы первого и меньшего порядка точности по времени. Крокко [1965] предложил схему, в которой конечно-разностные уравнения фактически

аппроксимируют исходную систему уравнений в частных производных лишь в стационарном случае, и эта схема обладает хорошей сходимостью. Симуни (см. Браиловская с соавторами [1968]) разработал метод установления с рассмотрением зависящих от времени граничных условий, стремящихся к граничным условиям исходной задачи только при достижении стационарного решения. Фройдигер с соавторами [1967] также рассматривал нестационарный расчет лишь как итерационную процедуру и указал на возможность изменения $\Delta t$ по пространству для ускорения сходимости. Поскольку ни одна из этих идей не была развита в систематический метод, они не будут обсуждаться в настоящей книге, однако их следует иметь в виду для дальнейшего развития метода установления.

### 5.1.2. Исследование устойчивости

Замечания, сделанные в разд. 3.1.5.г по поводу критериев устойчивости и методов ее исследования, остаются в силе и здесь. Дополнительные сведения, касающиеся, в частности, устойчивости в гиперболических системах, можно найти в работах Куранта, Фридрихса и Леви [1928], Лакса [1954, 1957, 1958, 1961], Лакса и Рихтмайера [1956], Лакса и Вендроффа [1960], Крейса [1964], Стренга [1964], Лакса и Ниренберга [1966], Парлетта [1966] и Браиловской с соавторами [1970].

Определения и условия, рассматриваемые в этих работах, конечно, не всегда справедливы для нелинейных задач, в особенности при наличии скачков.

Исследовать устойчивость системы уравнений, подобной (4.55), труднее, чем в случае течения несжимаемой жидкости. В системе уравнений с переменными $\psi$, $\zeta$ исследовалось на устойчивость независимо одно параболическое уравнение, а влияние $\psi$ устранялось с помощью линеаризации. Аналогично связь между записанными для простейших физических переменных уравнениями, обусловленную наличием конвективных членов и членов с градиентом давления, можно было устранить путем линеаризации. Однако это невозможно проделать для уравнений, описывающих течение сжимаемой жидкости. Хотя конвективные члены типа $\partial(\rho uv)/\partial y$ можно линеаризацией свести к виду $\tilde{v}\partial(\rho u)/\partial y$, с членами, содержащими градиент давления, этого сделать не удается, и они влияют на поведение даже линеаризованной системы. Поэтому модельное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\tilde{u}\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{5.1}$$

на котором часто изучается устойчивость уравнений, описывающих течение несжимаемой жидкости, не моделирует поведение

уравнения количества движения сжимаемой жидкости (4.42б) даже в случае одного измерения, так как в нем нет членов с градиентом давления [1]). Для исследования устойчивости полной линеаризованной системы уравнений нужно воспользоваться матричными методами исследования устойчивости (см. Эймс [1969], Митчелл [1969]), что выходит за рамки настоящей книги.

Используем, однако, прием, который позволит сделать некоторые выводы об устойчивости уравнений для сжимаемого газа на основании простого модельного уравнения (5.1). Как мы видели в гл. 3, типичным условием устойчивости для уравнения (5.1) является ограничение на число Куранта

$$C = |\tilde{u}|\Delta t/\Delta x \leqslant 1. \tag{5.2}$$

Это неравенство следует из рассмотрения невязких членов в уравнении (5.1), т. е. при $\alpha = 0$. В уравнении (5.1) при $\alpha = 0$ информация переносится с конвективной скоростью непрерывной среды. На каждом расчетном шаге по времени возмущение в $i$-й точке влияет на новое значение в $(i+1)$-й точке. Это означает, что за каждый шаг по времени $\Delta t$ информация переносится на расстояние $\Delta x$ и, таким образом, *вычислительная* скорость распространения информации равна $\Delta x/\Delta t$. Неравенство (5.2) означает, что скорость распространения информации в непрерывной среде не должна превышать вычислительной скорости распространения информации, т. е.

$$|\tilde{u}| \leqslant \Delta x/\Delta t. \tag{5.3}$$

В течениях сжимаемой жидкости члены с градиентом давления меняют скорость распространения информации в среде; она уже не равна $\tilde{u}$, а несколько больше. Рихтмайер и Мортон [1967] словесно описали путь получения зависимости скорости распространения информации в среде от давления. Мы же здесь просто ограничимся элементарными газодинамическими соотношениями. Малое возмущение давления распространяется с местной скоростью звука $a$ относительно газа, который сам движется со скоростью $\tilde{u}$. Возмущения давления распространяются во всех направлениях, и необходимо рассматривать только $a > 0$. Таким образом, скорость распространения информации в сжимаемой жидкости равна $|\tilde{u}| + a$, и тогда ограничение на число Куранта записывается в виде

$$C = \frac{(|\tilde{u}| + a)\,\Delta t}{\Delta x} \leqslant 1. \tag{5.4а}$$

[1]) К счастью, однако, вязкие члены уравнений для сжимаемой жидкости, содержащие смешанные производные, здесь не существенны, и в этом отношении уравнение (5.1) моделирует уравнение (4.42б); см. разд. 5.6.

Это и есть условие устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви [1928], или КФЛ-условие. Переформулированное в других терминах, оно констатирует, что область влияния конечно-разностных уравнений должна быть по меньшей мере столь же велика, как область влияния исходных дифференциальных уравнений (см. разд. 3.1.5.д). Физически оно означает, что за один шаг по времени звуковая волна не должна проходить расстояние, большее размера ячейки.

Таким образом, условия устойчивости для расчета течений сжимаемой жидкости часто получаются при помощи анализа модельного уравнения (5.1) с заменой числа Куранта для течения несжимаемой жидкости $C = |u|\Delta t/\Delta x$ числом Куранта для течения сжимаемой жидкости $C = (|u| + a)\ \Delta t/\Delta x$. Эта аналогия распространяется и на случай больших возмущений давления, причем скорость звука заменяется *скоростью ударной волны* (см. разд. 5.4.1).

Этот метод исследования устойчивости часто приводит к тем же результатам, что и строгий матричный метод исследования устойчивости, и дает по крайней мере необходимое условие устойчивости. Более ограничительные условия необходимы, например, в случае использования конечных разностей против потока (см. разд. 5.5.1), и это понятно, поскольку в таком случае конечно-разностные аналоги конвективных членов и членов с градиентом давления получаются по различным схемам. Примененный выше прием не проходит также для неявных схем (см. следующий раздел). В случае течения сжимаемой жидкости размерность задачи влияет на условие устойчивости. При $\Delta x = \Delta y = \Delta$ применение одномерного метода одновременно для всех измерений обычно меняет условие (5.4а) следующим образом:

$$C \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{или} \quad C \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{5.4б}$$

соответственно для двух или трех пространственных координат [1]). Использование схемы расщепления по времени Марчука [1965] с раздельным расчетом вкладов от каждого измерения приводит обычно к одномерному условию (5.4а); см. также работы Гурли и Митчелла [1969б], а также Мак-Кормака [1971].

В литературе приводилось еще одно дополнительное ограничение на шаги расчетной сетки. Гудрич [1969], пользовавшийся нестационарной схемой Русанова (разд. 5.4.3) и полными урав-

[1]) В более общих случаях имеем

$$C \leqslant \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \quad \text{или} \quad C \leqslant \frac{\Delta y \Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 \Delta y^2 + \Delta y^2 \Delta z^2 + \Delta z^2 \Delta x^2}}. \tag{5.4в}$$

нениями течения вязкого газа, рассчитал ламинарные течения газа около плоских пластин и пластин с уступами. Он нашел, что для обеспечения сходимости ошибок аппроксимации и для точности стационарного решения должно выполняться ограничение, наложенное на шаги пространственной сетки. Для потока, приблизительно параллельного оси $x$, он требовал, чтобы

$$\Delta y/\Delta x \leqslant \operatorname{tg} \mu_M, \tag{5.5а}$$

где $\mu_M$ — угол Маха,

$$\mu_M = \arcsin (1/M), \tag{5.5б}$$

или (что эквивалентно) чтобы

$$\Delta x/\Delta y \geqslant \sqrt{M^2 - 1}. \tag{5.5в}$$

Если этот критерий нарушается, то около входной границы потока возникают нереально высокие давления (частное сообщение).

В случае решения гиперболической системы уравнений для невязкого газа методом характеристического типа, в котором решение продвигается по слоям на фиксированной сетке, это условие является, конечно, не чем иным, как условием Куранта — Фридрихса — Леви (см. Курант, Фридрихс и Леви [1928]). Однако в литературе описаны устойчивые и достаточно точные решения, в которых этот критерий не выполняется. Известно также, что подобное условие возникает для более простых уравнений из-за постановки специальных граничных условий (Чорин, частное сообщение).

К настоящему времени точный статус этого критерия не установлен. Представляется, что опыт Гудрича может иметь отношение и к граничным задачам, но это не обязательно.

### 5.1.3. Использование неявных схем

Почти все расчеты практически важных многомерных задач о течениях сжимаемой жидкости, опубликованные к настоящему времени, проводились при помощи явных схем. Некоторые из многошаговых схем (разд. 5.5.7 и 5.6.3) можно интерпретировать как итерационные приближения к неявным схемам, однако в действительности оказывается, что проведение лишь одной итерации дает лучшие результаты, чем проведение нескольких итераций. Построению неявных схем для гиперболических систем уравнений посвящены ранние работы Вендроффа [1960], Анучиной [1964] и Гари [1964]. В работе Брайловской с соавторами [1970] отмечена причина пессимизма относительно использования неявных схем: многие неявные схемы, безусловно устойчивые в применении к модельному уравнению (5.1), *не*

*являются* таковыми в применении к системе уравнений, описывающих течение сжимаемой жидкости. Это подтверждается опытом Шрёдера и Томсена [1969]; они построили неявную схему для многомерных гиперболических уравнений, которая попрежнему требовала ограничения $C \leqslant 1$. Полежаев [1966, 1967] рассчитал течения сжимаемого газа при помощи метода чередующихся направлений, при котором устранялось ограничение на шаг по времени, связанное с диффузией, но явная аппроксимация членов с градиентом давления приводила к сохранению условия $C \leqslant 1$.

Гурли и Митчелл также рассматривали метод чередующихся направлений [1966а] и впоследствии [1966б] для двумерных гиперболических уравнений разработали безусловно устойчивую схему метода чередующихся направлений, основанную на девятиточечном шаблоне, применяемом на обоих слоях по времени. Однако эта схема не была опробована на нелинейных задачах и на реальных газодинамических расчетах. Сварц и Вендрофф [1969] при помощи нелинейно неявной схемы, используя итерации на каждом шаге по времени, рассчитали одномерную задачу о распространении ударной волны. Представляется, что эту схему трудно обобщить на случай двух или трех пространственных переменных.

Хотя в будущем неявные схемы расчета течений сжимаемой жидкости могут приобрести важное значение, однако в настоящей книге мы будем рассматривать только проверенные явные схемы.

## 5.2. Методы численного расчета ударных волн

Вместо того чтобы следить за ударной волной и пытаться решить, когда из волн сжатия сформируется ударная волна, предпочтительнее просто «включить» уравнения и предоставить ударным волнам развиваться естественным образом. Трудность заключается в том, что толщина прямого скачка $\delta_s$ в реальных вязких газах при фиксированном числе Прандтля Pr меняется как $1/\mathrm{Re}$, и для течений с большими числами Рейнольдса может случиться, что $\delta_s < \Delta x$. При этом за скачком развиваются осцилляции, как показано на рис. 5.1, *а*.

Эти осцилляции на конечной эйлеровой сетке отражают физический процесс, посредством которого кинетическая энергия упорядоченного движения теряется при уменьшении скорости при переходе через скачок и диссипирует во внутреннюю энергию благодаря столкновению молекул (Рихтмайер и Мортон [1967]). Но в расчетной модели узловые точки сетки, в некотором смысле являющиеся «вычислительными молекулами», расположены слишком редко. Если $1/\mathrm{Re} = 0$ и если в конечно-

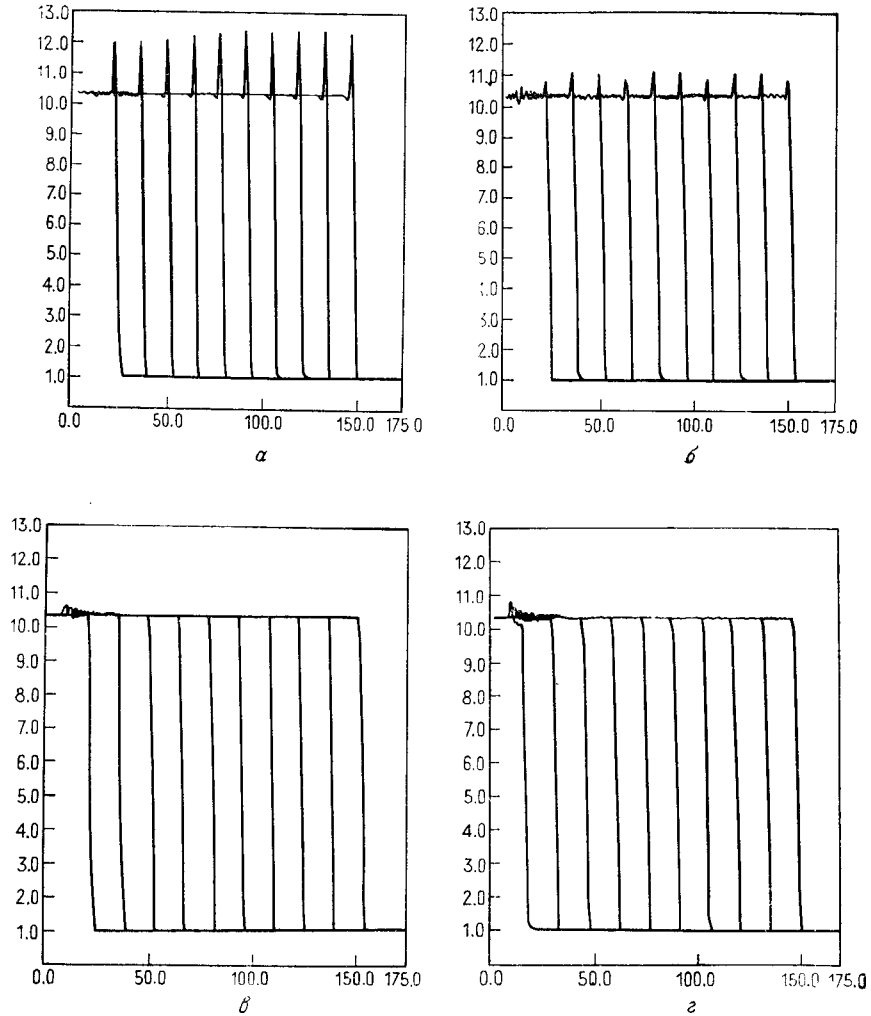



Рис. 5.1. Расчет распространения ударной волны при $M = 3$ на эйлеровой сетке при помощи двухшаговых схем Лакса — Вендроффа с максимальным числом Куранта 0.95. По оси абсцисс отложено расстояние, по оси ординат — давление. Ударная волна распространяется слева направо. Показаны распределения давления через равные промежутки времени. (Заимствовано из работы Тайлера [1970].) *а* — двухшаговая схема Рихтмайера, $b_1 = 0$; *б* — модифицированная схема Мак-Кормака, $b_1 = 0$; *в* — двухшаговая схема Рихтмайера, $b_1 = 0.15$; *г* — модифицированная схема Мак-Кормака, $b_1 = 0.325$.

разностной схеме нет искусственной вязкости, то не будет и механизма диссипации, посредством которого кинетическая энергия могла бы превратиться во внутреннюю, и поэтому возникают осцилляции. При $1/\mathrm{Re} \neq 0$ в некоторых случаях они могут затухать, но для большинства практических расчетов метод оказывается неудовлетворительным. Заметим, что усреднение осцилляций *не дает* правильной величины скорости ударной волны (Рихтмайер [1957]).

Только в случае течений с малыми числами Рейнольдса расчет скачков не представляет собой особой проблемы. При $\delta_s = 2\Delta x$ для прямого скачка Крокко [1965] обнаружил лишь незначительные осцилляции. Скала и Гордон [1967] не встречали никаких трудностей при расчете скачка с $\mathrm{Re} \leqslant 40$ на мелкой сетке с двадцатью узловыми точками, расположенными в пределах скачка. Проблема расчета скачков облегчается также в случае косых скачков (более слабых, чем прямые) и при наличии твердых стенок с условиями прилипания на них.

В эйлеровых переменных невозможно брать особенно мелкую сетку вблизи скачка, так как его положение заранее неизвестно. В лагранжевых переменных с перестройкой ячеек развивающийся скачок может быть рассчитан на мелкой сетке. Этот подход плодотворен в случае одномерных задач (Рихтмайер [1957]), таких, как распространение плоской или сферической ударной волны, но трудноосуществим для многомерных задач (Год [1960]). Макнамара [1966, 1967] разработал метод выделения разрывов в подвижной эйлеровой сетке, которая периодически подстраивается для слежения за контактными разрывами и скачками. Будучи в целом успешным, метод с подвижной сеткой приводит к некоторым ошибкам.

Трудности, связанные с методами выделения скачков, уже обсуждались выше. В случае фиксированных эйлеровых сеток эти методы не являются успешными. Использование их в преобразованной системе координат будет обсуждаться в гл. 6.

В общем случае наиболее эффективным методом расчета скачков является их искусственное размазывание, так чтобы их толщина $\delta_s$ составляла от $3\Delta x$ до $5\Delta x$. При этом утрачиваются детали течения внутри скачка, но выполняются законы сохранения при переходе через скачок.

## 5.3. Размазывание скачков при помощи искусственной диссипации

Идея введения в уравнения члена с искусственной диссипацией для размазывания скачков была впервые высказана фон Нейманом [1944] и опубликована в открытой печати фон Ней-

маном и Рихтмайером [1950]. В их методе и в других, выдвинутых позже, к уравнениям добавляется *явный* член с искусственной вязкостью. Он выбирается таким образом, чтобы искусственная вязкость была существенна только в областях сильного сжатия потока, т. е. в местах формирования скачков. Вне области скачка влияние искусственной вязкости пренебрежимо мало, что отличает этот метод от метода с использованием больших значений $\mu$ (малых значений Re) в уравнениях для вязкого газа, как это делали Ладфорд, Полячек и Зегер [1953].

Альтернативным подходом является разработка таких конечно-разностных схем, в которых размазывание скачков осуществляется автоматически, без явного введения в уравнения членов с вязкостью. Такие методы будем называть методами с *неявной* искусственной вязкостью или методами с неявным демпфированием. В некоторых из этих методов для стабилизации сильных разрывов может потребоваться введение также *явной* искусственной вязкости. Первые расчеты скачков с введением неявной искусственной вязкости были выполнены Ладлоффом и Фридманом [1954]. Как при явном, так и при неявном введении искусственной вязкости схема должна быть «диссипативной» в математическом смысле (Рихтмайер и Мортон [1967]), должна подавлять коротковолновые возмущения в большей мере, чем длинноволновые. Это свойство является необходимым условием того, чтобы конечно-разностная схема удовлетворяла условию роста энтропии при переходе через скачок уплотнения, автоматически запрещая существование скачков разрежения (см., например, Овчарек [1964]). К счастью, это условие легко (даже непроизвольно) удовлетворяется.

## 5.4. Схемы с явной искусственной вязкостью

### 5.4.1. Схема фон Неймана — Рихтмайера

В 1950 г. была опубликована классическая работа фон Неймана и Рихтмайера, в которой была выдвинута идея явного введения искусственной вязкости. Для стабилизации расчета одномерного распространения ударной волны в невязком газе при использовании неконсервативной формы уравнений в лагранжевых переменных эти авторы ввели искусственную добавку в давление. Однако понять этот метод проще, если интерпретировать этот добавочный член как член с вязкостью; интерпретируя этот член как член с *объемной* вязкостью $\bar{\varkappa}_0$, получаем очевидное обобщение на многомерный случай.

В эйлеровых переменных рассматриваемый подход излагается следующим образом. Возьмем одномерные уравнения,

получающиеся из системы (4.42)—(4.47) при $\bar{\mu}=0$, но $\bar{\varkappa}>0$. Заметим, что

$$\frac{\lambda}{\mathrm{Re}}=\frac{\bar{\lambda}/\bar{\mu}_0}{\bar{\rho}_0\bar{u}_0\bar{L}/\bar{\mu}_0}=\frac{\bar{\varkappa}_0}{\bar{\rho}_0\bar{u}_0\bar{L}}=\alpha_B. \tag{5.6}$$

Коэффициент $\alpha_B$ представляет собой коэффициент диффузии, равный величине, обратной числу Рейнольдса, построенному не по коэффициенту вязкости $\bar{\mu}_0$, а по коэффициенту объемной вязкости $\bar{\varkappa}_0$. Тогда из системы (4.42)—(4.47) будем иметь

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}=0, \tag{5.7а}$$

$$U=\left\{\begin{array}{c}\rho\\ \rho u\\ E_s\end{array}\right\}, \tag{5.7б}$$

$$F=\left\{\begin{array}{c}\rho u\\ P+\rho u^2-\alpha_B\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ u(E_s+P)-\alpha_B u\dfrac{\partial u}{\partial x}\end{array}\right\}. \tag{5.7в}$$

Фон Нейман и Рихтмайер предложили для $\alpha_B$ выражение

$$\alpha_B=\rho(b_1\Delta x)^2|\,\partial u/\partial x\,|, \tag{5.8}$$

где $b_1$ — подбираемая постоянная порядка единицы [1]). В уравнения добавлялся член

$$q_1=-\alpha_B\,\partial u/\partial x, \tag{5.9}$$

который, как видно из уравнений (5.7), эквивалентен дополнительному искусственному давлению.

Идея этого подхода следующая. Мы никоим образом не стремимся рассчитывать сколь-нибудь точно течение внутри ударной волны, а интересуемся только существенно невязким течением по каждую сторону этой волны. Если значение коэффициента искусственной диффузии выбрано просто постоянным и достаточно большим, чтобы подавить осцилляции за скачком, то «скачок» в численном решении может размазаться на 50 или 100 ячеек сетки. В то же время соотношения Рэнкина — Гюгонио *поперек* скачка будут выполнены безотносительно к деталям диссипативного процесса, протекающего внутри скачка (см. любой курс газовой динамики). (Например, соотношения Рэнкина — Гюгонио могут быть записаны для сложной модели взаимодействия скачка с пограничным слоем в сверхзвуковом

[1]) Постоянная $b_1$ играет роль, аналогичную роли длины пути перемешивания в модели Прандтля турбулентного пограничного слоя (Шлихтинг [1968]).

диффузоре, причем размер области этого взаимодействия может быть равен нескольким футам.) Преимущество задания $\alpha_B$ в виде (5.8) состоит в том, что диффузионный процесс при этом определяется величиной $\partial[(\partial u/\partial x)^2]/\partial x$ вместо величины $\partial(\partial u/\partial x)/\partial x$. Соответственно диссипация имеет место на более коротких расстояниях. Конечно, в области течения вне скачка возникает ошибка, однако если градиенты в этой области малы, то ошибка невелика.

Значение коэффициента $(b_1\Delta x)^2$ в уравнении (5.8) выбирается таким образом, чтобы независимо от интенсивности ударной волны (скачка давления) она имела бы постоянную толщину, измеряемую в размерах ячейки сетки. При таком выборе коэффициента искусственной диффузии толщина скачка получается от $3\Delta x$ до $5\Delta x$ (см. рис. 5.1, *б*). Толщина скачка $\delta_s$ определяется, конечно, приблизительно (как и толщина пограничного слоя). Если определение толщины скачка проводить по величине его наклона, то $\delta_s \approx 3\Delta x$. Для обеспечения устойчивости требуется небольшое усиление условия Куранта $C \leqslant 1$. Розенблют показал (см. Рихтмайер и Мортон [1967]), что размывание волн разрежения не обязательно, и поэтому большинство исследователей использует формулу (5.8) только при $u(\delta u/\delta x) < 0$ и полагает $\alpha_B = 0$ при $u(\delta u/\delta x) > 0$. Конкретное значение $b_1$ выбирается после проведения опытных расчетов в результате компромисса между двумя желательными свойствами: минимальной толщиной скачка и минимальной амплитудой осцилляций за скачком, которые не могут быть полностью устранены.

Различные схемы, обсуждаемые в последующих разделах, имеют своей целью достижение этих желательных свойств, причем некоторые схемы имеют определенные преимущества. В этой связи важно отметить пять основных моментов.

(1) Если берутся одномерные уравнения в консервативной форме и в них в каком-либо виде имеется диссипация, то при переходе через скачок соотношения Рэнкина — Гюгонио будут удовлетворяться, так как они основаны на законах сохранения массы, количества движения и энергии. Поэтому независимо от использованной схемы в результате расчета получается правильное значение скорости скачка [1]). Это было численно подтверждено Лонгли [1960].

(2) В многомерных задачах в случае скачка, располагающегося под углом к линиям расчетной сетки, условия Рэнкина —

[1]) Это идеализация. На самом же деле пока конечная толщина скачка не станет постоянной при стационарном режиме, скорость скачка определяется нестрого, что особенно заметно для методов первого порядка точности по $\Delta x$.

Гюгонио *не* обязательно точно выполняются. При размазывании скачка градиент нормального потока количества движения может распространяться в направлении, касательном к скачку. Это нарушает основное газодинамическое предположение, которое необходимо для вывода соотношений Рэнкина — Гюгонио для косого скачка из соотношений Рэнкина — Гюгонио для прямого скачка (см. любой курс газовой динамики). Поэтому скорость косого скачка будет неточной и на косых скачках в стационарном решении не будут выполняться условия при переходе через скачок.

(3) Осцилляции за скачком присущи явным схемам с использованием аппроксимаций второго порядка по пространственной переменной; эти осцилляции возникают из-за нарушения характеристических свойств уравнений сверхзвукового течения (см. обсуждение данного вопроса в разд. 5.5.2).

(4) Можно видеть, что на эйлеровых сетках толщина скачка $\delta_s$, определенная по выходу на параметры течения вверх и вниз от скачка, должна превосходить размер одной ячейки расчетной сетки. Если параметры течения меняются на участке от $i$ до $i+1$, то положение скачка $x_s$ не может быть определено точнее, чем с ошибкой $\pm\Delta x/2$. С вычислительной точки зрения невозможно различить два скачка, если оба они расположены между $i$-й и $(i+1)$-й точками. При $C<1$ скачок за один шаг по времени перемещается на расстояние меньшее, чем $\Delta x$, а $C$ могло бы быть выбрано так, что скачок при этом останется между точками $i$ и $i+1$. Но тогда скачок вообще не будет перемещаться. Единственно возможными скоростями движения скачка в случае $\delta_s<\Delta x$ являются либо $V_s=0$, либо $V_s=\Delta x/\Delta t$. Отсюда следует, что в случае $\delta_s<\Delta x$ получить правильную величину скорости скачка невозможно.

(5) Большинство опубликованных сравнений различных схем проведено на основе схемы с разностями вперед по времени, в которую может быть введена искусственная вязкость $\alpha_B$ для обеспечения линейной устойчивости. Однако члены с искусственной вязкостью могут вводиться и в другие схемы, и тогда относительные достоинства схем могут измениться.

Схема фон Неймана — Рихтмайера по-прежнему широко употребляется и часто успешно конкурирует с более новыми схемами. Шварц [1967] применил ее для расчета в сферических координатах задачи релятивистской газодинамики о гравитационном коллапсе звезды. Хикс и Пелцл [1968] обнаружили, что при расчете сильных скачков и волн разрежения она дает лучшие результаты, чем схема Лакса — Вендроффа (разд. 5.5.5, 5.5.6; см. также сравнения в разд. 5.4.4). Лаваль [1969] при помощи схемы фон Неймана — Рихтмайера исследовал процесс

запуска сопла. Гофман и Ро [1968], а также Уилкинс [1969] использовали ее в двумерных задачах с лагранжевым описанием, причем последний применил также перестройку лагранжевой сетки для нейтрализации ее больших деформаций. Уилкинс [1970] рассчитывал разнообразные двумерные задачи — от задач теории упругости до газодинамических задач. Изменяющийся вид коэффициента $\alpha_B$ брал Ван Леер [1969] для расчета распространения ударной волны в лагранжевых координатах с переменным шагом сетки. Для сравнения различных схем Тайлер и Эллис [1970] применяли эйлерову форму (5.8) коэффициента $\alpha_B$. Плустер [1970] с успехом использовал ее для расчета задач взрыва в цилиндрических координатах.

### 5.4.2. Схемы Ландсхофа и Лонгли

Ландсхоф [1955] экспериментировал с уравнениями в лагранжевой форме с членом $q$, зависящим от градиента скорости не квадратично, а линейно:

$$q_2 = -\tfrac{1}{2}\rho_0(\Delta x)\,|\partial u/\partial x|, \tag{5.10}$$

что эквивалентно введению искусственной вязкости с коэффициентом

$$\alpha_B = \rho_0 \Delta x/2. \tag{5.11}$$

Он обнаружил, что член $q_1$ фон Неймана — Рихтмайера приводит к большему начальному всплеску, но и к большему затуханию осцилляций, чем это имеет место при члене $q_2$. Он рекомендовал выбирать $q$ в виде линейной комбинации $q = q_1 + q_2$ при $b_1 = \tfrac{1}{2}$ в формуле (5.8), что ведет к приемлемому компромиссу. Эмери [1968] указывает, что выбор $q_2$ согласно (5.10) дает большие колебания плотности.

Лонгли [1960] экспериментировал на эйлеровой сетке с четырьмя различными выражениями для искусственной вязкости. Кроме члена $q_1$ фон Неймана — Рихтмайера и члена $q_2$ Ландсхофа он рассматривал члены

$$q_3 = -\tfrac{1}{2} b_1 \rho \Delta x\,|u|\,|\partial u/\partial x|, \tag{5.12}$$

что является явным аналогом неявной вязкости при использовании конечных разностей против потока в методе частиц в ячейках (см. разд. 5.5.1, 5.5.3); в этом случае

$$\alpha_B = b_1 \rho u \Delta x/2. \tag{5.13}$$

Лонгли также предложил свою форму

$$q_4 = -\tfrac{1}{2} b_1 \Delta x \frac{\rho a}{P}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \tag{5.14}$$

что дает

$$\alpha_B = \frac{1}{2} b_1 \frac{\rho a}{P} \Delta x = \frac{1}{2} b_1 \sqrt{\gamma \rho / P}\, \Delta x, \tag{5.15}$$

где $a$ — скорость звука. Последние две формы искусственной вязкости особенно эффективны в областях торможения при отражениях скачков, в которые другие схемы не работают. При всех четырех формах $q$ в конечно-разностных схемах получаются правильные скорости движения скачков (из-за применения уравнений в консервативном виде).

### 5.4.3. Схема Русанова

Для расчета двумерных течений особенно эффективной схемой с введением явной искусственной вязкости является схема Русанова [1961]. В основе схемы Русанова лежит введение членов с искусственной диффузией общего вида $\partial(\alpha_B \partial U/\partial x)/\partial x$ в конечно-разностные недиссипативные уравнения для $\partial U/\partial t$ (где $U = \rho,\ \rho u,\ \rho v,\ E_s$), причем берутся разности вперед по времени и центральные разности по пространственным переменным. Таким образом, в схему вводится не только искусственная вязкость, но и искусственная теплопроводность и искусственная диффузия массы [1]). Коэффициент искусственной диффузии пропорционален $|V| + a$ и некоторому эмпирически подбираемому параметру $\omega$. Форма $\partial(\alpha_B \partial U/\partial x)/\partial x$ позволяет получить более точные решения со скачками, чем более простая форма $\alpha_B \partial^2 U/\partial x^2$ (Ван Леер [1969]).

Схема Русанова в ее исходном виде содержит ряд тонкостей; в частности, большое внимание уделяется более сложному случаю неравных шагов $\Delta x \neq \Delta y$, имеющему важное практическое значение. Эту схему и присущие ей условия устойчивости, удобно описать с помощью введения двумерного числа Куранта

$$C_{2D} = (V + a)\, \Delta t\, \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x \Delta y}, \tag{5.16}$$

где $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ — абсолютная величина местной скорости, $a$ — местная скорость звука. Тогда с использованием принятых обозначений в рассматриваемой схеме уравнение (4.63а) запишется в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(F + \alpha_{Bx} U) + \frac{\partial}{\partial y}(G + \alpha_{By} U) = 0, \tag{5.17}$$

[1]) В этом отношении схема Русанова аналогична схеме Лакса (см. разд. 5.5.4).

причем

$$\beta = \Delta x/\Delta y \tag{5.18}$$

и

$$a_{Bx} = \frac{\omega}{\beta^2+1} C_{2D},\quad a_{By} = \omega\frac{\beta^2}{\beta^2+1} C_{2D}. \tag{5.19}$$

Для устойчивости требуется выполнение во всем поле течения обычного условия

$$C_{2D} \leqslant 1, \tag{5.20}$$

а также еще одного условия, связанного с введением членов с искусственной диффузией,

$$C_{2D} \leqslant \omega \leqslant \frac{1}{C_{2D}}. \tag{5.21}$$

(Ван Леер [1969] показал, что такой вид достаточного условия устойчивости является общим для подобного класса численных схем.)

Скоглунд и Коул [1966] опробовали все комбинации из семи различных значений $\sigma$ (где $\sigma = \max_{i,\,j} C_{2D}$) и шести различных значений $\omega$ для расчета ударной волны и нашли, что наилучшие результаты достигаются при $\sigma < 0{,}9$ и $\omega = 0.6$. Они также заменили в числе Куранта абсолютную величину $V + a$ выражением $\sqrt{V^2 + a^2}$ и благодаря этому значительно увеличили точность расчета пограничного слоя [1]). Скоглунд и Коул применили схему Русанова для расчета взаимодействия ударной волны и пограничного слоя с учетом ламинарной молекулярной вязкости. Цумвальт с сотрудниками успешно использовали схему Русанова для решения различных задач, в том числе для задач с турбулентной вихревой вязкостью (см. Тайлер [1965], Итон и Цумвальт [1967], Руо [1967], Уолкер с соавторами [1966], Бауэр с соавторами [1968], Прентис [1971]).

При помощи этой схемы двумерные течения рассчитывали также Кесслер [1968] и Эмери [1968]. Русанов и Любимов [1968] и Русанов [1969] обобщили данную схему на трехмерные задачи [2]). Гудрич [1969] с помощью рассматриваемой схемы решил двумерные задачи с учетом ламинарной вязкости. Эмери и Ашёрст [1971] применяли схему в сферической системе координат.

---

[1]) При нестационарном анализе модификацию, предложенную Скоглундом и Коулом, можно также рассматривать в свете исследований Ван Леера [1969]. В этой модификации величина искусственной вязкости берется как нечто среднее между значением, принятым в исходном методе Русанова, и минимальным значением, необходимым для линейной устойчивости.

[2]) В этих работах проведено обобщение на трехмерный случай не данной схемы В. В. Русанова, а другой схемы, предложенной К. И. Бабенко и Г. П. Воскресенским [1961]. — *Прим. ред.*

Схему Русанова часто сравнивают с другими схемами, и она обычно успешно выдерживает эти сравнения, за исключением таких задач, когда производные по времени изменяются быстро; в этих случаях предпочтительнее схемы второго порядка точности по времени (Эмери [1968]). При расчете нестационарных течений введение явной искусственной вязкости дает не столь плохие результаты, как это могло бы показаться на первый взгляд. Как и в схеме Лейта (разд. 3.1.13), применяемой для уравнений невязкого течения, в схеме с разностями вперед по времени дополнительный диффузионный член при надлежащей комбинации параметров фактически может аппроксимировать вклад от второй производной по времени. Для модельного уравнения (5.1), рассматриваемого в случае несжимаемой жидкости, искусственная диффузия равна нулю при $\omega = C$ [1]), а при $\omega = 1$ и $C = 1$ получается точное нестационарное решение (Тайлер и Эллис [1970]). В стационарных решениях ошибки, вызванные введением искусственной вязкости, сохраняются (см. разд. 3.1.8).

К несчастью, комбинация параметров $\sigma$ и $\omega$, оптимальная по минимуму толщины скачка и по минимуму диффузионных ошибок, оказывается зависящей от рассматриваемой задачи. Примечательно, что в рассматриваемой схеме введение искусственной вязкости *необходимо* не только для размазывания разрывов, но и для обеспечения линейной устойчивости. Несмотря на эти недостатки схема Русанова по справедливости считается *наилучшей* из всех схем с явной искусственной вязкостью, разработанных для расчета многомерных задач на эйлеровых сетках (см., например, Эмери [1968] и Ван Леер [1969]).

### 5.4.4. Ошибки, возникающие при введении искусственной вязкости

Введение искусственной вязкости часто неизбежно, и оно может быть приемлемо. Однако при введении явной искусственной вязкости могут возникать некоторые странные ошибки, не считая очевидных ошибок, возникающих и при расчетах течений несжимаемой жидкости (см. разд. 3.1.8). Шульц [1964] отметил, что простое применение члена с искусственной вязкостью фон Неймана — Рихтмайера $q_1$ в цилиндрических или сферических координатах вызывает диффузию радиальной составляющей количества движения. Он предложил тензорную форму $q_1$, которая обеспечивает точное сохранение радиальной составляющей количества движения.

Камерон [1966] показал, что введение явной искусственной вязкости приводит к совершенно неожиданным ошибкам при

[1]) Здесь $C = \hat{a}\Delta t/\Delta x$ — число Куранта для уравнения (5.1).

расчете распространения ударных волн через границы раздела сред или через линии, где меняется шаг сетки $\Delta x$. Член с искусственной вязкостью фон Неймана — Рихтмайера $q_1$ вызывает ложные флуктуации энтропии и плотности при пересечении ударной волной границы раздела сред. При изменении пространственного шага сетки $\Delta x$ возникает также ложная ударная волна, отраженная от линии, где происходит изменение шага, а скорость действительной ударной волны при этом меняется. Камерон обнаружил, что введение члена с искусственной вязкостью Ландсхоффа $q_2$ не оказывает вредного влияния на скорость ударной волны в месте изменения шага сетки, однако вязкость Ландсхоффа менее удобна, чем вязкость фон Неймана — Рихтмайера, поскольку приводит к резкому изменению толщины ударной волны в месте изменения шага сетки. Камерон вводил оба члена $q_1$ и $q_2$, чтобы ошибки от их введения частично компенсировали друг друга. Он добился также правильной скорости распространения ударной волны через границу раздела сред, меняя шаг сетки $\Delta x$ при переходе через эту границу, однако при этом по-прежнему возникала ложная отраженная ударная волна.

Хигби и Плустер [1968], рассчитывая распространение ударной волны в лагранжевых переменных, изменяли искусственную вязкость фон Неймана — Рихтмайера таким образом, чтобы при непрерывном изменении шага сетки толщина скачка, выраженная в единицах длины шага, оставалась постоянной. Этот прием приводил к исчезновению флуктуаций в решении.

## 5.5. Схемы с неявной искусственной вязкостью

Вместо явного введения в уравнения членов с искусственной вязкостью типа $q_1$ искусственное затухание может вноситься неявным образом просто за счет выбора конечно-разностной схемы. Схема привносит в одних случаях искусственную схемную вязкость в виде ненулевого коэффициента при вторых производных по пространственным переменным, а в других — искусственное схемное затухание, когда все собственные значения соответствующей матрицы перехода становятся по модулю меньше единицы. В обоих случаях для стабилизации расчета сильных ударных волн в этих схемах может потребоваться и введение *дополнительной явной* искусственной вязкости.

### 5.5.1. Схемы с разностями против потока

Вторая схема Куранта, Изаксона и Риса [1952], описанная в разд. 3.1.8, является схемой с разностями против потока или схемой с односторонними разностями. Для уравнений в лагран-

жевых переменных она была также предложена Лелевье (см. Рихтмайер [1957]) и поэтому часто называется схемой Лелевье (см., например, Крокко [1965], Робертс и Вейс [1966], Курцрок и Мейтс [1966]).

В уравнении (4.63) для каждой из переносимых величин $U$, входящих также в $F$ и $G$, конечные разности составляются согласно знаку скорости конвекции $u$ или $v$ соответственно. Однако в уравнениях количества движения члены с градиентом давления *не должны* представляться разностями против потока, как это будет обсуждаться в следующем разделе. В случае уравнений (4.66) для одномерного движения невязкого газа первая схема с разностями против потока приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{\rho_i^{n+1}-\rho_i^n}{\Delta t} = -\frac{(\rho u)_i^n-(\rho u)_{i-1}^n}{\Delta x} \quad \text{при} \quad u_i>0, \tag{5.22а}$$

$$= -\frac{(\rho u)_{i+1}^n-(\rho u)_i^n}{\Delta x} \quad \text{при} \quad u_i<0; \tag{5.22б}$$

$$\frac{(\rho u)_i^{n+1}-(\rho u)_i^n}{\Delta t} = -\frac{P_{i+1}^n-P_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{(\rho u^2)_i^n-(\rho u^2)_{i-1}^n}{\Delta x} \tag{5.23а}$$

$$\text{при} \quad u_i>0,$$

$$= -\frac{P_{i+1}^n-P_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{(\rho u^2)_{i+1}^n-(\rho u^2)_i^n}{\Delta x} \tag{5.23б}$$

$$\text{при} \quad u_i<0;$$

$$\frac{(E_s)_i^{n+1}-(E_s)_i^n}{\Delta t} = -\frac{[u(E_s+P)]_i^n-[u(E_s+P)]_{i-1}^n}{\Delta x} \tag{5.24а}$$

$$\text{при} \quad u_i>0,$$

$$= -\frac{[u(E_s+P)]_{i+1}^n-[u(E_s+P)]_i^n}{\Delta x} \tag{5.24б}$$

$$\text{при} \quad u_i<0.$$

Эта схема очевидным образом обобщается на двумерный случай. Исследование Курцрока [1966] показало, что устойчивость здесь ограничена не только величиной числа Куранта, но и следующим условием:

$$\Delta t \leqslant \frac{|u|/\Delta x+|v|/\Delta y}{[|u|/\Delta x+|v|/\Delta y+(a/\Delta x)\sqrt{1+\beta^2}]^2}, \tag{5.25а}$$

или при $\Delta x=\Delta y=\Delta$ (т. е. при $\beta=1$) — условием

$$\Delta t \leqslant \frac{(|u|+|v|)\Delta}{(|u|+|v|+a\sqrt{2})^2}. \tag{5.25б}$$

В области торможения потока и в областях возвратных течений, т. е. там, где $u \to 0$, $v \to 0$, последнее ограничение является доминирующим (см. также разд. 5.5.3).

Модификации первой схемы с разностями против потока, необходимые для достижения строгой консервативности в областях изменения знака скорости, проводятся так, как описано в разд. 3.1.10. Более точная вторая схема с разностями против потока строится так, как описано в разд. 3.1.11.

В схемах с разностями против потока эффективная искусственная схемная вязкость вводится через ошибки аппроксимации односторонними конечными разностями. Такая схема добавляет в уравнения (4.63) члены с искусственной схемной диффузией для величин $U = (\rho, \rho u, \rho v, E_s)$. Согласно рассуждениям, проведенным в разд. 3.1.8, коэффициенты схемной диффузии в направлениях $x$ и $y$ в нестационарном случае имеют вид

$$\alpha_{ex} = {}^1/_2 u\,\Delta x\,(1 - u\Delta t/\Delta x), \quad \alpha_{ey} = {}^1/_2 v\,\Delta y\,(1 - v\,\Delta t/\Delta y), \quad (5.26а)$$

а в стационарном случае — вид

$$\alpha_{ex} = {}^1/_2 u\,\Delta x, \quad \alpha_{ey} = {}^1/_2 v\,\Delta y. \quad (5.26б)$$

Заметим, что эти вязкостные эффекты не эквивалентны физической вязкости, так как коэффициенты схемной вязкости зависят от направления и от составляющих скорости.

*Упражнение.* Для течения, параллельного оси $x$, при $\partial U/\partial x = 0$ и при произвольном распределении плотности в направлении $y$ рассмотреть различия в поведении искусственной вязкости, вводимой в схеме Русанова, и искусственной вязкости, вводимой в схеме с разностями против потока.

Неявной схемной искусственной вязкости обычно недостаточно для того, чтобы стабилизировать решение при появлении в невязком течении сильных скачков (Рихтмайер [1957]), однако Курцрок и Мейтс [1966], Скала и Гордон [1967], Роуч и Мюллер [1970] успешно применяли подобные схемы для расчета течений с малыми (сеточными) числами Рейнольдса [1]). Этот подход лежит также в основе метода частиц в ячейках и метода жидкости в ячейках, которые будут кратко описаны ниже.

Схемы с конечными разностями против потока обладают свойством транспортивности (см. разд. 3.1.9, 3.1.10), которое существенно как для дозвуковых, так и для сверхзвуковых течений. Имеющая при этом место утрата второго порядка точности аппроксимации по пространственным переменным играет значительно меньшую роль в сверхзвуковых течениях, чем в дозвуковых; мы сейчас переходим к обсуждению этого вопроса.

[1]) Скала и Гордон [1967] представляли конвективные члены конечными разностями против потока, но в более сложном алгоритме, как в методе Шелдона для решения уравнения Пуассона (см. разд. 3.2.7).

### 5.5.2. Область влияния и ошибки аппроксимации

В этом разделе мы сопоставим области влияния уравнений в частных производных и соответствующих конечно-разностных уравнений. Нашей целью будет показать, как при помощи конечных разностей против потока удается сохранить некоторое подобие правильного поведения характеристик дифференциальных уравнений. Отметим также, что в этом случае ошибки аппроксимации по пространственной переменной не столь сильно возрастают по сравнению со схемами с центральными разностями.

Рассмотрим сначала уравнения для несжимаемой жидкости:

$$\nabla^2\psi = \zeta, \tag{5.27}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\nabla\cdot(\mathbf{V}\zeta) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\zeta. \tag{5.28}$$

Уравнение переноса вихря (5.28) является параболическим, и для него ставится задача с начальными данными с ограниченной пространственной областью влияния в предельном случае течения невязкой жидкости $1/\mathrm{Re} = 0$ (если рассматривать это уравнение изолированно). Однако уравнение (5.27) является эллиптическим, и для него ставится краевая задача. Поэтому даже в случае $1/\mathrm{Re} = 0$ возмущение $\zeta$ в какой-либо точке поля течения немедленно передается во все другие точки через нелинейный член, содержащий скорость $\mathbf{V}$, зависящую от $\psi$, а, следовательно, в силу уравнения (5.27) и от $\zeta$. Это свойство наследуется и соответствующими конечно-разностными уравнениями. Можно сказать, что для системы (5.27)—(5.28) и соответствующей системы конечно-разностных уравнений скорость распространения возмущений *бесконечно велика.*

Все уравнения течения сжимаемой невязкой жидкости являются уравнениями переноса типа уравнения (5.28), и поэтому для них ставится задача с начальными данными. Скорость распространения возмущения здесь *конечна*; малые линейные возмущения распространяются с изэнтропической скоростью звука $a$ относительно газа и со скоростью $V + a$ относительно неподвижной эйлеровой сетки. Следовательно, при $V > a$, т. е. при $M > 1$, возмущения не распространяются вверх по потоку. Эти свойства сразу приводят к широко известному понятию конуса Маха, т. е. к принципу отсутствия влияния вверх по потоку.

Рассмотрим теперь распространение возмущений в случае конечно-разностного уравнения. При использовании центральных конечных разностей любое возмущение, имеющее место в узле $(i, j)$ сетки в $n$-й момент времени, распространится в узлы $(i \pm 1,\ j \pm 1)$ сетки в $(n+1)$-й момент времени неза-

висимо от величины шага $\Delta t$. Значит, расстояния, на которые распространяются возмущения, будут все время одни и те же, $\Delta x$ и $\Delta y$; и, следовательно, скорости распространения возмущений будут $\Delta x/\Delta t$ и $\Delta y/\Delta t$. Необходимое условие устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви [1928] требует, чтобы область влияния конечно-разностных уравнений по меньшей мере включала в себя область влияния исходных уравнений в частных производных, т .е. чтобы выполнялось неравенство $\Delta x/\Delta t \geqslant \geqslant V + a$, или неравенство

$$C = \frac{(V + a)\,\Delta t}{\Delta x} \leqslant 1, \tag{5.29}$$

где C — число Куранта. В задачах с сильными ударными волнами, где предположение о малости возмущений неверно, замена скорости звука $a$ нелинейной скоростью распространения скачка $a_s > a$ приводит к условию фон Неймана — Рихтмайера [1950].

Курант с соавторами [1928] не требовали ничего другого от конечно-разностных уравнений, так как их целью было только доказательство существования решения. Однако очевидно, что было бы желательно сохранить в системе конечно-разностных уравнений некоторое подобие ограничения области влияния вверх по потоку, которым обладает исходная система уравнений в частных производных. Самое большее, что можно сделать, работая на прямоугольной сетке, это ограничить распространение возмущений в положительном или отрицательном направлении в соответствии с $u$ и $v$. Данные соображения побудили Куранта, Изаксона и Риса [1952] составлять на прямоугольной сетке конечные разности против потока.

Эти соображения снова приводят к понятию транспортивных конечных разностей для конвективных членов, обсуждавшемуся в разд. 3.1.8—3.1.10. Однако здесь необходимо разрешить возможность нелинейного распространения возмущений вверх по потоку в случае $a_s > V$. Поэтому в уравнениях количества движения приходится применять центральные по пространственным переменным разности для члена с градиентом давления, поскольку влияние градиента давления передается вверх по потоку [1]).

[1]) Курцрок [1966] опробовал разности против потока, разности по потоку и центральные разности для градиента давления. Этот эксперимент и соответствующий анализ устойчивости показали, что в случае расчета течения в пограничном слое центральные разности предпочтительнее.

Отметим физический абсурд, который возник бы при аппроксимации конечными разностями против потока градиента давления наряду со всеми конвективными величинами. В этом случае в задаче о квазиодномерном течении в канале, описанной в разд. 3.3.9, любые возмущения в выходном ($i = I$) сечении потока никогда не будут ощущаться выше по течению и

Отметим, что $P$ не является переносимой величиной в выражениях $\partial P/\partial x$ и $\partial P/\partial y$, но является переносимой величиной в уравнении энергии в члене $\nabla\cdot(\mathbf{V}P)$, характеризующем работу сил давления; соответственно для конечно-разностного представления этого члена можно применять разности против потока.

Основное различие свойств систем уравнений для сжимаемой и для несжимаемой жидкости состоит в том, что в первой системе не содержится эллиптических уравнений типа уравнения (5.27), и, таким образом, система уравнений для невязкой сжимаемой жидкости является чисто гиперболической.

Конечно, по-прежнему было бы весьма желательно сохранить второй порядок точности аппроксимации, присущий схемам с центральными разностями по пространственным переменным, как это было в случае несжимаемой жидкости. Однако в случае сверхзвуковых течений для достижения свойства транспортивности приходится жертвовать немногим. Оценка точности аппроксимации центральными разностями, проведенная в разд. 3.1.1, основана на разложении функций, описывающих течение, в ряды Тейлора в предположении непрерывности этих функций и их производных. Однако в случае сверхзвуковых течений невязкого газа производные, входящие в уравнения, не обязательно будут непрерывными. Действительно, характеристики определяются как линии, при переходе через которые производные могут претерпевать разрыв (Курант и Фридрихс [1948], Шапиро [1953])[1]). Значит, разложения в ряды Тейлора здесь не всегда пригодны, и в случае сверхзвуковых течений снижение точности аппроксимации не столь важно[2]).

В течениях вязкого газа характеристик не существует и приведенные выше соображения теряют силу. Тем не менее при выборе разностных аппроксимаций для конвективных членов кажется разумным руководствоваться свойствами уравнений течений невязкого газа. Теоретически такой подход не обоснован, однако он подтверждается успешным применением метода характеристик для расчета реальных течений с малыми эффектами вязкости.

Лакс [1969] показал, что схема с разностями против потока дает очень хорошие результаты при расчете скачка в случае уравнения Бюргерса при отсутствии вязкости, но терпит неуда-

ударная волна не сможет распространяться вверх по потоку. Поэтому при численном моделировании было бы невозможно отключить приток воздуха в сверхзвуковую аэродинамическую трубу!

[1]) Именно это свойство обеспечивает широкое применение метода характеристик; оно позволяет сращивать различные области течения вдоль характеристик.

[2]) Макнамара [1967] ссылается на Трулио [1964], показавшего, что для схем с продвижением решения по времени при разрывных производных ошибка аппроксимации стремится к нулю не быстрее чем $(\Delta x)^{3/2}$.

чу в случае полной системы уравнений для сжимаемой жидкости, а также (что весьма удивительно) в случае линеаризованного уравнения Бюргерса при отсутствии вязкости. Таким образом, расчеты по нелинейному уравнению более точны, нежели по линейному уравнению.

### 5.5.3. Метод частиц в ячейках и метод жидкости в ячейках

Широко известен метод частиц в ячейках (метод PIC), первоначально предложенный Харлоу и Эванс [1957]. Происхождение этого метода отличается от происхождения других методов тем, что при его развитии основное внимание обращалось не столько на моделирование решений дифференциальных уравнений в частных производных, сколько на моделирование основных физических процессов при помощи рассмотрения дискретных частиц. Этот метод определению можно назвать методом численного моделирования. Расчеты по этому методу проводятся на каждом слое по времени в несколько этапов, причем сначала по вкладам давления вычисляются некоторые промежуточные величины, относящиеся к ячейке расчетной сетки, а затем проводится расчет конвективных эффектов.

Метод частиц в ячейках слишком сложен для того, чтобы описывать его здесь во всех подробностях. Самая уникальная его особенность состоит в том, что здесь моделируется не движение сплошной среды, а рассматривается набор конечного числа дискретных частиц; их перемещение через ячейки расчетной эйлеровой сетки рассчитывается при помощи лагранжевых уравнений, позволяющих определить их координаты и скорости. Эти частицы не являются просто маркерами, как это имеет место в методе маркеров и ячеек (см. разд. 3.7.4), а действительно входят в расчеты даже при отсутствии свободных поверхностей и поверхностей раздела сред. Осредненные по ячейке значения термодинамических функций определяются числом частиц в ячейке. При использовании всего лишь шести частиц на одну ячейку в среднем и трех частиц на одну ячейку локально были обнаружены высокочастотные осцилляции величин плотности и давления в ячейках, как и следовало ожидать.

Из метода частиц в ячейках развился метод моделирования движения сплошной среды, известный под названием метода жидкости в ячейках (метод FLIC). Алгоритм этого метода был разработан Джентри, Мартином и Дали [1966] на основе более ранней работы Рича [1963] [1]). Они упразднили рассмотрение

[1]) О. М. Белоцерковский и Ю. М. Давыдов в статье «Расчет трансзвуковых течений методом «крупных частиц»» (Численные методы механики сплошной среды, 1970, т. 1, № 3) разработали численный метод крупных

дискретных частиц метода частиц в ячейках, но сохранили большинство других его аспектов.

Метод жидкости в ячейках является двухшаговым. На первой стадии его первого шага вычисляются предварительные значения $\overline{u^{n+1}}$, $\overline{v^{n+1}}$ только при учете вкладов от членов с градиентом давления и членов с явной искусственной вязкостью, если таковая вводится. (Обычно используется член с искусственной вязкостью вида (5.10).) Уравнения записываются в неконсервативной форме. Затем вычисляется предварительное значение внутренней энергии $\overline{e^{n+1}}$ по уравнению энергии, в котором учитывается только член с давлением:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\mathbf{V}\cdot\nabla e - P\nabla\cdot\mathbf{V}\,, \tag{5.30}$$

а также члены с искусственной вязкостью. Дивергенция скорости $\nabla\cdot\mathbf{V}$ находится по средним значениям скорости, которая, например, для составляющей $u$ рассчитывается как $\tilde{u}_{i,j} = {}^1/_2\,(u^n_{i,j} + \overline{u^{n+1}_{i,j}})$, причем предварительное значение $\overline{u^{n+1}}$ уже определено; аналогично находится среднее значение и для составляющей $v$.

На втором шаге производится только учет вклада от конвективных членов. При помощи схемы с донорными ячейками (вторая схема с разностями против потока, см. разд. 3.1.11) по предварительным значениям составляющих скорости $\overline{u^{n+1}}$ и $\overline{v^{n+1}}$ вычисляется поток массы через каждую из сторон ячейки. По потоку массы находится новое значение плотности $\rho^{n+1}$, а далее конвективные вклады в значения $u$, $v$ и $e_s = E_s/\rho$. Заметим, что эти окончательные конвективные вклады надо прибавлять к предварительным значениям $\overline{u^{n+1}}$ и т. п., а не к первоначальным значениям $u^n$ и т. п.

Вычисления по методу частиц в ячейках проводятся аналогично, за исключением того, что поток массы находится по конечному числу частиц, притекающих из донорной ячейки. Частицы не располагаются в центре ячейки, а каждая частица $p$ имеет свои лагранжевы координаты $x_p$ и $y_p$. Частицы перемещаются с осредненной скоростью, которая определяется по такой же формуле, что и в методе маркеров и ячеек (см. формулу (3.605) разд. 3.7.4). Если частица пересекает сторону ячейки, то за счет ее массы, количества движения и внутренней энергии меняются соответствующие средние величины в новой ячейке и по этим величинам вычисляется давление в этой ячейке. Как было отмечено выше, возникающие мгновенные сгущения и разрежения частиц в ячейках вызывают хаотические высокочастот-

частиц; его разностная схема, отличающаяся от схем PIC и FLIC, консервативна и устойчива без введения явной искусственной вязкости, а схемная вязкость позволяет вести сквозной расчет ударных волн. — *Прим. ред.*

ные осцилляции величин в ячейках. Эти осцилляции моделируют поведение молекул газа, но при очень малом количестве «вычислительных молекул».

В обоих рассмотренных методах для аппроксимации конвективных членов используется схема с донорными ячейками (вторая схема с разностями против потока) и, следовательно, в обоих методах имеется схемная искусственная вязкость (см. разд. 5.5.1, 5.5.2). Джентри, Мартин и Дали [1966] указали, что наличие в обоих методах искусственной вязкости $q \sim |u|$ означает неинвариантность искусственной вязкости относительно преобразования Галилея, т. е. невозможность использования в этих методах преобразования, состоящего в обращении потока [1]). Кроме того, как отметили Эванс и Харлоу [1958, 1959], а также Лонгли [1960], без введения явной искусственной вязкости метод будет локально неустойчив в точках торможения потока, так как здесь схемная вязкость $q \sim |u|$ стремится к нулю; см. также формулу (5.25) и далее. В исходных работах оба метода были записаны как в декартовых, так и в цилиндрических координатах.

Метод частиц в ячейках становится наиболее эффективным при решении задач с поверхностями раздела (свободные поверхности и многокомпонентные среды), поскольку отдельным частицам можно приписать различные массы, удельные теплоемкости и т. д. в целях моделирования двухжидкостной среды, свободной поверхности жидкости и даже границы жидкости с деформируемым телом. За годы успешных приложений этого метода постепенно разрешались вопросы, связанные с пустыми ячейками, граничными условиями, деталями процедуры осреднения параметров частиц (Эванс и Харлоу [1957, 1958, 1959], Эванс с соавторами [1962], Харлоу [1963, 1964]). Обзор этих методов был сделан Амсденом [1966].

Мадер [1964] в разработанном им методе взрыва в ячейках (метод EIC) обобщил данный подход, рассмотрев течение с химическими реакциями, Хёрт [1965] также по методу частиц в ячейках проводил расчеты детонационной ударной волны при взрыве. Дикмен с соавторами [1969], а также Морс и Нилсон [1971] при помощи метода частиц в ячейках рассчитывали неустойчивость плазмы. Армстронг и Нилсон [1970], рассматривавшие нелинейное развитие сильной двухпотоковой неустойчивости в плазме, продемонстрировали хорошее согласование результатов нестационарного расчета по методу частиц в ячейках и расчета по методу интегральных преобразований. Точность рассматриваемого подхода была также продемонстрирована с

[1]) Это справедливо также для любого метода, в котором применяется схема с конечными разностями против потока.

помощью некоторых алгоритмов типа метода частиц в ячейках для многокомпонентных сред, разработанных в Physics International Company (Бакингем и др. [1970], Уотсон и Годфри [1967], Уотсон [1969]).

Амсден и Харлоу [1965] рассчитали крупномасштабные характеристики сверхзвукового турбулентного течения в донной области. Крейн [1968] пытался точно рассчитать гиперзвуковое течение о ближнем следе за телом, применяя метод частиц в ячейках к уравнениям для невязкого газа; однако этот метод не подходит к подобной задаче, и поэтому расчет окончился неудачей. Точность метода жидкости в ячейках независимо подтвердили Гурурая и Деккер [1970] на расчетах сложных двумерных задач о распространении ударных волн и Сатофука [1971] на расчетах двумерных плоских и осесимметричных задач о течении в ударной трубе.

Алгоритм типа метода FLIC под названием TOIL был разработан Джонсоном [1967]; см. также работы Хилла и Ларсена [1970] и Рейнольдса [1970]. Ссылки на другие работы с расчетами по методам PIC и FLIC, выполненными в Лос-Аламосской лаборатории, можно найти в работе Харлоу и Амсдена [1970а].

Батлер [1967] включил в алгоритмы методов PIC и FLIC учет вязкости и теплопроводности и обнаружил, что при этом оба метода дают сопоставимые результаты.

### 5.5.4. Схема Лакса

Эта схема [1]) была опубликована Лаксом [1954] в его фундаментальной работе, посвященной консервативным уравнениям. Лакс в первую очередь интересовался законами сохранения и лишь во вторую очередь — конечно-разностными схемами. Для устойчивости расчета одномерного течения невязкого газа по уравнениям (4.66) при помощи схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным типа

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \Delta t \frac{\delta F}{\delta x}\Big|_i^n \tag{5.31}$$

он заменил (в правой части этого уравнения) величину $U_i^n$ ее средним по пространственной переменной значением на $n$-м слое по времени:

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n) - \Delta t \frac{\delta F}{\delta x}\Big|_i^n. \tag{5.32}$$

[1]) Обычно эта схема называется схемой Лакса. Впервые она была опубликована в открытой литературе в работе Куранта с соавторами [1952] (в подстрочном примечании) и названа там схемой Келлера и Лакса. Рихтмайер [1963] в связи с этой схемой упоминает также Фридрихса.

Эта простая и исторически важная схема обладает рядом поучительных свойств. Производные по пространственным переменным аппроксимируются здесь центральными разностями, что обеспечивает второй порядок точности, однако схема обладает диффузией (Рихтмайер [1963] называет ее диффузионной). Рассмотрим модельное уравнение (5.1) при $\alpha = 0$; для него схема Лакса дает

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \tilde{u}\frac{\delta u}{\delta x}\Big|_i^n \Delta t. \tag{5.33}$$

Исследуем схему на устойчивость по методу Хёрта (см. разд. 3.1.5.в), проводя разложения в ряды Тейлора:

$$u_i^n + \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Delta t^2 + O(\Delta t^3) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[u_i^n + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Delta x^3 + O(\Delta x^4)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[u_i^n - \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x^2 - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Delta x^3 + O(\Delta x^4)\right] -$$
$$- \tilde{u}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_i^n + O(\Delta x^2), \tag{5.34}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\tilde{u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta x^2). \tag{5.35}$$

С учетом соотношения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\tilde{u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\tilde{u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \tilde{u}^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.36}$$

получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\tilde{u}\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} - \frac{\Delta t}{2}\tilde{u}^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2). \tag{5.37}$$

Из этого нестационарного анализа видно, что в схеме Лакса вводится эффективный коэффициент искусственной диффузии

$$\alpha_e = \left(\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} - \frac{\Delta t}{2}\tilde{u}^2\right) = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}\left[1 - \frac{u^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\right], \tag{5.38}$$

или

$$\alpha_e = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}[1 - C^2]. \tag{5.39}$$

Как обычно, для устойчивости расчета по модельному уравнению требуется, чтобы $\alpha_e \geqslant 0$ или $C \leqslant 1$. При $C = 1$ получается точное решение модельного уравнения. Поскольку схема применяется ко всем переменным $U = (\rho, \rho u, E_s)$, искусственная

диффузия вводится не только в виде искусственной вязкости, но и в виде искусственных диффузии массы и теплопроводности [1]).

Из равенства (5.37) следует, что ошибка аппроксимации в этой схеме является величиной

$$E = O(\Delta x^2, \Delta t, \Delta x^2/\Delta t). \tag{5.40}$$

Такое выражение показывает, что ошибка аппроксимации неограниченно возрастает при фиксированном $\Delta x$ и $\Delta t \to 0$. Этот факт имеет большое значение. Именно он привел в сильнейшее замешательство автора настоящей книги, когда он случайно запустил программу расчета распространения ударной волны с шагом $\Delta t = 0$ и при этом обнаружил, что ударная волна все же распространяется (рассмотрите выражение (5.32) при $\Delta t = 0$). В действительности в этом случае возмущение не распространяется вместе с фронтом волны при его движении, а диффундирует от начального разрыва при $t = 0$.

Очевидно, что при достаточно малых $\Delta t$ в схеме Лакса получается большой коэффициент $\alpha_e$, достаточный для стабилизации расчетов течений с сильными ударными волнами. При $C=1$ демпфирование исчезает и схему нельзя применять для расчета течений с ударными волнами.

Схема Лакса очень просто обобщается на случай двух или трех пространственных измерений, а именно

$$U^{n+1}_{i,j} = \frac{1}{4}[U^n_{i+1,j} + U^n_{i-1,j} + U^n_{i,j+1} + U^n_{i,j-1}] + \Delta t \frac{\delta U^n}{\delta t}, \tag{5.41}$$

$$U^{n+1}_{i,j,k} = \frac{1}{6}[U^n_{i+1,j,k} + U^n_{i-1,j,k} + U^n_{i,j+1,k} + U^n_{i,j-1,k} + U^n_{i,j,k+1} + U^n_{i,j,k-1}] + \Delta t \frac{\delta U^n}{\delta t}. \tag{5.42}$$

При этом соответствующие условия устойчивости имеют вид

$$C_{2D} = (V + a)\Delta t \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x \Delta y} \leqslant 1, \tag{5.43}$$

$$C_{3D} = (V + a)\Delta t \frac{\sqrt{\Delta x^2 \Delta y^2 + \Delta y^2 \Delta z^2 + \Delta z^2 \Delta x^2}}{\Delta x \Delta y \Delta z} \leqslant 1. \tag{5.44}$$

Таким образом, в трехмерном случае при $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ максимально возможный шаг по времени уменьшается в $\sqrt{3}$ раз.

*Упражнение.* Получить выражения для $\alpha_e$ в случае двух или трех пространственных переменных.

[1]) Диффузионная схема дважды нарушает свойство транспортивности. Если, например, схема «чехарда» (см. разд. 3.1.6) переносит возмущения вверх по потоку против направления скорости, то диффузионная схема переносит их, кроме того, и в направлениях, перпендикулярных скорости.

*Упражнение.* Определить условия, при которых схема Русанова сводится к схеме Лакса.

Моретти и Аббетт [1966а] применяли двумерный вариант схемы Лакса в сочетании с методом характеристик и выделением скачков для попытки расчета течения в донной области. Они обнаружили явление, названное ими «stalling» и состоящее в следующем. При наличии градиента по пространственным переменным, такого, что

$$U_i^n \neq \hat{U}_i^n \equiv {}^1/_4 \left(U_{i+1,\,j}^n + U_{i-1,\,j}^n + U_{i,\,j+1}^n + U_{i,\,j-1}^n\right), \qquad (5.45)$$

зависящее от времени решение определяется уравнением

$$U_i^n - \hat{U}_i^n = \left(\delta U_i^n/\delta t\right) \Delta t, \qquad (5.46)$$

так что $U_i^{n+1} \neq U_i^n$ для всех $n$. Положение дел может измениться при изменении $\Delta t$. Конечно, схема Лакса не предназначена для расчета дозвуковых безударных течений, однако этот пример демонстрирует еще один недостаток схемы.

Несмотря на свои недостатки, схема Лакса имеет важное преимущество — простоту. Она также легко приспосабливается к цилиндрическим и сферическим координатам, а также к трехмерным задачам. По-видимому, эти обстоятельства и явились основной причиной того, что ее применяли Богачевский и Рубин [1966], Богачевский и Мейтс [1966], Богачевский и Костофф [1971], Барнуэлл [1967], Ксерикос [1968], Эмери и Ашёрст [1971]. Кенцер [1970б] исследовал схему Лакса и схему «чехарда» (см. разд. 3.1.6) в различных комбинациях и при различных шагах по времени применительно к двумерной задаче, в которой ударная волна принималась за границу расчетной области.

Из-за простоты программирования и надежности схема Лакса может применяться на ранних стадиях разработки алгоритма решения задачи с тем, чтобы впоследствии заменить ее более сложной схемой.

*Упражнение.* Показать, что в модельном уравнении представление конвективного члена по схеме Лакса, а диффузионного члена центральными разностями приводит к безусловно неустойчивой схеме. *Указание.* Использовать исследование схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной, заменив $\alpha$ на $\alpha + \alpha_e$.

*Упражнение.* Показать, что в схеме Лакса для стационарного уравнения получается величина $\alpha_e = \Delta x^2/(2\Delta t)$.

## 5.5.5. Схема Лакса — Вендроффа

Лакс и Вендрофф [1960, 1964] разработали класс схем, который позволил достигнуть значительного прогресса в теоретическом изучении разностных методов и привел к разработке

класса двухшаговых схем (см. следующий раздел), являющихся в настоящее время наиболее популярными для расчета течений сжимаемой жидкости. Как и схема Лейта (см. разд. 3.1.13), все они основаны на разложениях в ряд Тейлора по времени до членов второго порядка включительно и все они эквивалентны схеме Лейта для модельного уравнения с постоянным коэффициентом.

По сравнению со схемой Лейта для расчета течений несжимаемой жидкости применение разложений по времени здесь значительно усложняется, поскольку вместо одного уравнения имеется *система* уравнений. Для модельного уравнения при отсутствии вязкости

$$\partial u/\partial t + \tilde{u}\,\partial u/\partial x = 0 \tag{5.47}$$

разложение в ряд Тейлора по времени дает

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^3)\,. \tag{5.48}$$

Член $\partial u/\partial t$ в выражении (5.48) дается уравнением (5.47), а вторая производная $\partial^2 u/\partial t^2$ находится дифференцированием уравнения (5.47):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\tilde{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -\tilde{u}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\tilde{u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \tilde{u}^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,. \tag{5.49}$$

Рассмотрим теперь одномерные уравнения (4.66а) для течения невязкого газа

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \tag{5.50}$$

где $U$ и $F$ — векторы, определенные формулами (4.66б) и (4.66в). Разложение в ряд Тейлора по времени будет иметь тот же вид

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta t^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + O(\Delta t^3), \tag{5.51}$$

и производные $\partial U/\partial t$ даются уравнением (5.50). Однако вторые производные

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial t}\right] \tag{5.52}$$

теперь нельзя найти непосредственно из уравнения (5.50).

Поэтому разложение уравнения (5.50) необходимо дополнить записью его в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \tag{5.53}$$

где $A$ — матрица размером $3\times 3$, что в развернутом виде будет выглядеть так:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t}+A_{11}\frac{\partial U_1}{\partial x}+A_{12}\frac{\partial U_2}{\partial x}+A_{13}\frac{\partial U_3}{\partial x}=0, \tag{5.54а}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t}+A_{21}\frac{\partial U_1}{\partial x}+A_{22}\frac{\partial U_2}{\partial x}+A_{23}\frac{\partial U_3}{\partial x}=0, \tag{5.54б}$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial t}+A_{31}\frac{\partial U_1}{\partial x}+A_{32}\frac{\partial U_2}{\partial x}+A_{33}\frac{\partial U_3}{\partial x}=0. \tag{5.54в}$$

Элементы $A_{lm}$ этой матрицы определяются как элементы матрицы Якоби

$$A_{lm}=\partial F_l/\partial U_m. \tag{5.55}$$

Из уравнений (4.66б) и (4.66в) имеем

$$\begin{Bmatrix} U_1\\ U_2\\ U_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\rho\\ \rho u\\ E_s\end{Bmatrix}, \tag{5.56}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1\\ F_2\\ F_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\rho u\\ P+\rho u^2\\ u(E_s+P)\end{Bmatrix}. \tag{5.57}$$

Тогда уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0 \tag{5.58}$$

получается из уравнения (5.54а) при

$$A_{11}=0,\quad A_{12}=1,\quad A_{13}=0. \tag{5.59}$$

Эту строку матрицы $A$ определить просто; сложнее определить две другие строки, так как вид членов, содержащих $P$ и входящих в $F_2$ и $F_3$, зависит от принятого уравнения состояния. Дальнейшее рассмотрение проведем для совершенного газа, описываемого уравнением (4.56):

$$P=(\gamma-1)\,[E_s-{}^1/_2\,\rho u^2]. \tag{5.60}$$

Введем обозначение $m=\rho u$ и перепишем это уравнение состояния в виде

$$P=(\gamma-1)\,[E_s-{}^1/_2 m^2/\rho], \tag{5.61}$$

а выражения (5.56) и (5.57) в консервативных переменных $\rho$, $m$ и $E_s$:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho \\ m \\ E_s \end{Bmatrix}, \tag{5.62}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m \\ (\gamma-1)E_s + \dfrac{3-\gamma}{2}\dfrac{m^2}{\rho} \\ \gamma m E_s/\rho - \dfrac{\gamma-1}{2}\dfrac{m^3}{\rho^2} \end{Bmatrix}. \tag{5.63}$$

При помощи этих формул можно определить элементы матрицы Якоби $A_{lm} = \partial F_l/\partial U_m$. В результате получаем

$$A_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial U_1} = \frac{\partial m}{\partial \rho} = 0, \tag{5.64а}$$

$$A_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial U_2} = \frac{\partial m}{\partial m} = 1, \tag{5.64б}$$

$$A_{13} = \frac{\partial F_1}{\partial U_3} = \frac{\partial m}{\partial E_s} = 0, \tag{5.64в}$$

$$A_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial U_1} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left[(\gamma-1)E_s + \frac{3-\gamma}{2}\frac{m^2}{\rho}\right] = -\frac{3-\gamma}{2}\frac{m^2}{\rho^2}, \tag{5.65а}$$

$$A_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial U_2} = \frac{\partial}{\partial m}\left[(\gamma-1)E_s + \frac{3-\gamma}{2}\frac{m^2}{\rho}\right] = (3-\gamma)\frac{m}{\rho}, \tag{5.65б}$$

$$A_{23} = \frac{\partial F_2}{\partial U_3} = \frac{\partial}{\partial E_s}\left[(\gamma-1)E_s + \frac{3-\gamma}{2}\frac{m^2}{\rho}\right] = \gamma - 1, \tag{5.65в}$$

$$A_{31} = \frac{\partial F_3}{\partial U_1} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\frac{\gamma m E_s}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}\frac{m^3}{\rho^2}\right] = -\frac{\gamma m E_s}{\rho^2} + \frac{(\gamma-1)m^3}{\rho^3}, \tag{5.66а}$$

$$A_{32} = \frac{\partial F_3}{\partial U_2} = \frac{\partial}{\partial m}\left[\frac{\gamma m E_s}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}\frac{m^3}{\rho^2}\right] = \frac{\gamma E_s}{\rho} - \frac{3}{2}(\gamma-1)\frac{m^2}{\rho^2}, \tag{5.66б}$$

$$A_{33} = \frac{\partial F_3}{\partial U_3} = \frac{\partial}{\partial E_s}\left[\frac{\gamma m E_s}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}\frac{m^3}{\rho^2}\right] = \frac{\gamma m}{\rho}. \tag{5.66в}$$

Таким образом, матрица $A$ будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -[(3-\gamma)/2]\,m^2/\rho^2 & (3-\gamma)\,m/\rho & \gamma-1 \\ -\gamma m E_s/\rho^2 + (\gamma-1)m^3/\rho^3 & \gamma E_s/\rho - {}^3/_2(\gamma-1)\,m^2/\rho^2 & \gamma m/\rho \end{bmatrix}. \tag{5.67}$$

Теперь можно обратиться к разложению Тейлора по времени (5.51), причем вторые производные здесь определяются следующим образом. Для $l$-й компоненты $U$ имеем

$$-\frac{\partial U_l}{\partial t}=A_{l1}\frac{\partial U_1}{\partial x}+A_{l2}\frac{\partial U_2}{\partial x}+A_{l3}\frac{\partial U_3}{\partial x}=$$

$$=\frac{\partial F_l}{\partial U_1}\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial F_l}{\partial U_2}\frac{\partial U_2}{\partial x}+\frac{\partial F_l}{\partial U_3}\frac{\partial U_3}{\partial x}=\frac{\partial F_l}{\partial x}, \qquad (5.68)$$

$$-\frac{\partial^2 U_l}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 F_l}{\partial t\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F_l}{\partial t}\right]. \qquad (5.69)$$

Но

$$\frac{\partial F_l}{\partial t}=\frac{\partial F_l}{\partial U_1}\frac{\partial U_1}{\partial t}+\frac{\partial F_l}{\partial U_2}\frac{\partial U_2}{\partial t}+\frac{\partial F_l}{\partial U_3}\frac{\partial U_3}{\partial t}=$$

$$=-A_{l1}\frac{\partial F_1}{\partial x}-A_{l2}\frac{\partial F_2}{\partial x}-A_{l3}\frac{\partial F_3}{\partial x}, \qquad (5.70)$$

и поэтому

$$\frac{\partial^2 U_l}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[A_{l1}\frac{\partial F_1}{\partial x}+A_{l2}\frac{\partial F_2}{\partial x}+A_{l3}\frac{\partial F_3}{\partial x}\right]. \qquad (5.71)$$

Теперь для $l$-й компоненты $U$ разложение (5.51) можно записать так:

$$U_l^{n+1}=U_l^n-\Delta t\frac{\partial F_l}{\partial x}+\frac{1}{2}\Delta t^2\frac{\partial}{\partial x}\left[A_{l1}\frac{\partial F_1}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+A_{l2}\frac{\partial F_2}{\partial x}+A_{l3}\frac{\partial F_3}{\partial x}\right]+O(\Delta t^3),$$

$$l=1,2,3, \qquad (5.72а)$$

или, более компактно, так:

$$U^{n+1}=U^n-\Delta t\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{1}{2}\Delta t^2\frac{\partial}{\partial x}\left[A\frac{\partial F}{\partial x}\right]. \qquad (5.72б)$$

Схема Лакса — Вендроффа состоит в применении центральных разностей по пространственным переменным в разложении (5.72). Опуская для простоты индекс $l$, будем иметь в $i$-й узловой точке

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_i=\frac{F_{i+1}-F_{i-1}}{2\Delta x}+O(\Delta x^2) \qquad (5.73)$$

и для членов типа $\partial[A_{l1}\partial F_1/\partial x]/\partial x$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[A\frac{\partial F_1}{\partial x}\right]_i=\frac{A_{i+1/2}(F_{i+1}-F_i)/\Delta x-A_{i-1/2}(F_i-F_{i-1})/\Delta x}{\Delta x}+$$

$$+O(\Delta x^2)=\frac{1}{2\Delta x^2}[(A_{i+1}+A_i)(F_{i+1}-F_i)-(A_i+A_{i-1})(F_i-$$

$$-F_{i-1})]+O(\Delta x^2). \qquad (5.74)$$

Дополнительное осреднение, проведенное следующим образом [1]):

$$A_{i\pm1/2} = A\left(U^n_{i\pm1/2}\right) = A\left[\left(U^n_i + U^n_{i\pm1}\right)/2\right], \tag{5.75}$$

не снижает порядка ошибки аппроксимации, равного $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$. Второй порядок аппроксимации по времени важен для расчета некоторых нестационарных задач (см. Эмери [1968]).

*Упражнение.* Показать, что для одного уравнения (5.47) с $\tilde{u} = A = \text{const}$ схема Лакса — Вендроффа (уравнения (5.72) — (5.74)) сводится к схеме Лейта (разд. 3.1.13).

Как и в схеме Лейта (разд. 3.1.13), в схеме Лакса — Вендроффа в нестационарном случае отсутствует искусственная диффузия, однако из-за наличия ненулевых коэффициентов при производных $\partial^3 U/\partial x^3$ и $\partial^4 U/\partial x^4$ имеются дисперсионные ошибки третьего порядка и ошибки, обусловленные затуханием, четвертого порядка (Рихтмайер и Мортон [1967]). Для стационарных решений анализ, аналогичный проведенному в разд. 3.1.13, показывает, что стационарное решение зависит от $\Delta t$.

Данная схема дает гораздо более резкие скачки (т. е. меньшие толщины скачков), чем другие схемы, однако дает и больший всплеск за скачком. Лакс и Вендрофф [1964] объясняют это тем, что все схемы высокого порядка аппроксимации по времени должны давать осцилляции за скачком; см. также по этому поводу работу Фрёгденхила [1969], посвященную решению линейного модельного уравнения (5.47). (Представляется, что для многошаговых неявных схем это не имеет места; см. разд. 5.5.7.) Для уменьшения всплеска и для получения удовлетворительных результатов при наличии в течении сильных скачков необходимо ввести явную искусственную вязкость в какой-либо форме (Лакс и Вендрофф [1960, 1964], Рихтмайер и Мортон [1967]).

Рассматриваемую схему можно распространить на случай большего числа пространственных переменных; например, в двумерном случае она будет иметь вид

$$U^{n+1} = U^n - \Delta t \frac{\partial F}{\partial x} - \Delta t \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{1}{2}\Delta t^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[A \frac{\partial F}{\partial x}\right] + \\ + \frac{1}{2}\Delta t^2 \frac{\partial}{\partial y}\left[B \frac{\partial G}{\partial y}\right], \tag{5.76}$$

[1]) Можно было бы провести осреднение иначе, а именно положив

$$A_{i\pm1/2} = (A_i + A_{i\pm1})/2 = \left[A\left(U^n_i\right) + A\left(U^n_{i\pm1}\right)\right]/2.$$

Оба способа обеспечивают нужную аппроксимацию, однако Абарбанель и Цвас [1969] указали на предпочтительность выражения (5.75) из соображений консервативности; кроме того, в этом выражении требуется меньше арифметических действий.

где $A$ и $B$ — надлежащим образом определенные матрицы размером $4 \times 4$. При этом, однако, схема становится весьма громоздкой и неэкономичной; Эмери [1968] отмечает, что в этом случае схема Лакса — Вендроффа требует вчетверо больше машинного времени на один шаг по времени, чем схема Лакса. Кроме того, в этой схеме проявляется неустойчивость, обусловленная нелинейностью. Линейный анализ устойчивости (основанный на предположении о постоянстве элементов матрицы $A$; см., например, Парлетт [1966], Бёрстейн [1965, 1966]) показывает, что схема безразлично устойчива в точках торможения потока ($u = v = 0$) и в звуковых точках ($V = a$, или $M = 1$). Бёрстейн [1965, 1966] и Томмен [1966, 1967] установили, что нелинейные эффекты вызывают переход этой безразличной устойчивости в неустойчивость.

В проведенных Бёрстейном расчетах стационарного положения отошедшей ударной волны перед затупленным телом неустойчивость зарождалась в области точки торможения и в области резкого изменения кривизны затупления, где располагается звуковая точка. Этот автор обнаружил, что введение предложенного Лаксом и Вендроффом [1964] явного затухания четвертого порядка не дает эффекта, однако введение явной искусственной вязкости второго порядка типа Русанова (см. разд. 5.4.3) стабилизирует расчет, а также уменьшает или исключает всплеск за скачком. Платой за это является уменьшение порядка ошибки аппроксимации. Бёрстейн аналитически показал, что достаточным условием устойчивости в случае дозвукового течения является выполнение неравенства

$$C \leqslant 1/(2\sqrt{2}), \tag{5.77}$$

что вдвое отличается от обычного условия $C \leqslant 1/\sqrt{2}$. Однако опыт расчетов показывает, что достаточно обычного условия и что даже оно может быть превышено на 10%; см. также Эмери [1968].

Гари [1964] впервые применил схему Лакса — Вендроффа к уравнениям в неконсервативной форме и нашел, что волны разрежения рассчитываются при этом более точно. Моретти рассмотрел двумерный вариант схемы в неконсервативных переменных (см. разд. 6.2). В этом случае не было необходимости вычислять элементы матрицы $A$, а вторые производные находились нерекрестным дифференцированием (так же, как для линейных модельных уравнений). Моретти сочетал методику выделения скачков с этой схемой продвижения решения по времени (см. разд. 6.2). Уоткинс [1970] показал, что методику выделения скачков можно также легко сочетать со схемой Лакса — Вендроффа в неконсервативных переменных, по крайней

мере для одномерных задач. Метод Моретти использовался и для расчета трехмерных задач, причем были получены достаточно точные результаты (Итон [1970]). Аналогичное разностное представление по времени применяли Бастианон [1969] и для квазиодномерных задач Андерсон [1969а, 1969б].

Армитеджу [1967] не удалось осуществить по схеме Лакса — Вендроффа устойчивый расчет осесимметричных вихревых течений в криволинейной системе координат, связанной с контуром стенки произвольного сопла; вероятно, эта неудача была обусловлена неустойчивостью, аналогичной неустойчивости, описанной Бёрстейном [1965, 1966]. Отметим, однако, что при помощи схемы Лакса — Вендроффа Сондерс [1966] рассчитал трансзвуковое течение внутри сопла, несмотря на теоретические указания (Парлетт [1966]) о непригодности этой схемы для расчета трансзвуковых течений. Саймент [1968] рассмотрел влияние изменения шага сетки $\Delta x$ на устойчивость схемы Лакса — Вендроффа.

Схема Лакса — Вендроффа может применяться и в лагранжевых переменных; в этом случае она является единственной схемой, не приводящей к размазыванию скачка (Лакс и Вендрофф [1964], Рихтмайер и Мортон [1967], Ван Леер [1969]).

Скоглунд и Гей [1969] видоизменили двумерный вариант схемы Лакса — Вендроффа, представив члены в уравнении (5.76) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[A\frac{\partial F}{\partial x}\right] = A\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}, \tag{5.78а}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[B\frac{\partial G}{\partial y}\right] = B\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y}. \tag{5.78б}$$

Производные $\partial F/\partial x$ и $\partial G/\partial y$ уже определялись в схеме при рассмотрении первой производной по времени, а другие члены можно сгруппировать. Такой вариант схемы приводит к значительному сокращению числа арифметических действий, но при этом теряется принципиальная простота и строгая консервативность схемы. При помощи этого варианта схемы удалось рассчитать сложную задачу о взаимодействии ударной волны с пограничным слоем.

Первоначальный вариант схемы Лакса — Вендроффа до сих пор представляет теоретический интерес и стимулирует развитие других схем (Фишер [1965а, 1965б], Касахара [1965], Касахара с соавторами [1965], Цвас и Абарбанель [1970]). Двумерные задачи по этой схеме решали Бёрстейн [1965, 1966], а также Скоглунд и Гей [1969]. Однако для многомерных задач она была вытеснена двухшаговой схемой, к рассмотрению которой мы сейчас переходим.

## 5.5.6. Двухшаговая схема Лакса — Вэндроффа

Двухшаговый вариант схемы Лакса — Вендроффа, гораздо более простой, чем первоначальная схема, в особенности для многомерных задач, был предложен Рихтмайером [1963] [1]). Здесь первый шаг проводится по схеме Лакса (см. разд. 5.5.4), а на втором шаге применяется схема «чехарда» (см. разд. 3.1.6). Для векторного уравнения (4.66а) данная схема записывается следующим образом:

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left[U_{i+1}^n + U_{i-1}^n\right] - \Delta t\,\frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2\Delta x}, \tag{5.79а}$$

$$U_i^{n+2} = U_i^n - 2\Delta t\,\frac{F_{i+1}^{n+1} - F_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}. \tag{5.79б}$$

Значения $F_{i\pm1}^{n+1}$ на втором шаге вычисляются по значениям $U_{i\pm1}^{n+1}$, полученным на первом шаге. Первый шаг можно рассматривать как предварительный, а смысл имеют только результаты второго шага в каждом цикле. Хотя эта схема по виду не похожа на первоначальную схему Лакса — Вендроффа (уравнения (5.72)—(5.74)), однако подстановка (5.79а) в (5.79б) показывает, что в случае линеаризованной системы уравнений с постоянными коэффициентами эти схемы эквивалентны.

*Упражнение.* Показать, что для уравнений с постоянными коэффициентами двухшаговая схема Рихтмайера и схема Лакса — Вендроффа эквивалентны.

Распространение схемы на многомерный случай очевидно и проводится просто. Для двумерного уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right) \tag{5.80}$$

имеем

$$U_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}\left[U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n + U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n\right] - \\ - \Delta t\left[\frac{F_{i+1,j}^n - F_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{G_{i,j+1}^n - G_{i,j-1}^n}{2\Delta y}\right], \tag{5.81а}$$

$$U_{i,j}^{n+2} = U_{i,j}^{n+1} - 2\Delta t\left[\frac{F_{i+1,j}^{n+1} - F_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{G_{i,j+1}^{n+1} - G_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y}\right]. \tag{5.81б}$$

Эта двумерная схема требует около четверти машинного времени, необходимого для первоначального варианта схемы Лакса —

[1]) Бёрстейн [1966] утверждает, что одномерный вариант этой схемы был впервые предложен Вендроффом; см. также схему Чудова, описанную в работе Браиловской с соавторами [1968].

Вендроффа (Эмери [1968]) и дает меньшие всплески за скачком (см., например, Рубин и Бёрстейн [1967]). Лапидус [1967] применил эту схему в случае общего преобразования координат, а Хафтон с соавторами [1966] — к геофизическим задачам с учетом кориолисова ускорения и с введением дополнительной искусственной диффузии, согласно закону Фика (см. разд. 3.1.2). Синха с соавторами [1970] рассчитал истечение недорасширенной струи, включая маховский дискообразный скачок. Хотя первый шаг в схеме содержит диффузионные ошибки аппроксимации, вся схема в целом их не содержит, по крайней мере для нестационарного случая. Что касается стационарного случая, то в схеме имеет место искусственная вязкость, зависящая от $\Delta t$ (см. разд. 3.1.13).

Следуя Рихтмайеру [1963], стало традицией любую схему, которую можно интерпретировать как разложение в ряд Тейлора до членов второго порядка по времени включительно, называть двухшаговой схемой Лакса — Вендроффа или схемой типа Лакса — Вендроффа и т. д. Представляется, что это слишком широкая и несколько неточная классификация: она объединяет, например, как схемы Адамса — Бэшфорта (разд. 3.1.12) и Хойна (разд. 3.1.15), разработанные ранее схемы Лакса — Вендроффа, так и схемы Лейта (разд. 3.1.13) и Мак-Кормака (которая будет обсуждаться ниже). Мы сознаем, что отдельные схемы должны классифицироваться конкретнее, но, следуя традиции, приводим их все в настоящем разделе.

Бёрстейн [1965, 1967], а затем Рубин и Бёрстейн [1967] модифицировали схему Рихтмайера (5.79), введя расчет на полушагах по пространству $\Delta x/2$ и по времени $\Delta t/2$. Тогда формула для первого полушага принимает вид

$$U_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}[U_{i+1}^n + U_i^n] - \frac{\Delta t}{2}\frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{\Delta x} \tag{5.82а}$$

и

$$U_{i-1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}[U_i^n + U_{i-1}^n] - \frac{\Delta t}{2}\frac{F_i^n - F_{i-1}^n}{\Delta x}. \tag{5.82б}$$

На втором полушаге расчет проводится по формуле

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \Delta t\frac{F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x}. \tag{5.82в}$$

Бёрстейн [1965, 1966] применял данную схему также в цилиндрических координатах.

Эта схема не полностью эквивалентна схеме Рихтмайера, причем последняя предпочтительнее по соображениям реализации граничных условий. Граничные условия должны использоваться после каждого из двух шагов, причем определение гра-

ничных значений по формулам (5.82а) и (5.82б) при смещенном положении узлов сетки типа $i + {}^1/_2$ приводит к неудовлетворительным результатам [1]) (см. разд. 5.7.1 и 5.7.2). Гурли и Моррис [1968б] записали двухшаговую схему типа Лакса — Вендроффа в следующем виде:

$$U_i^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(U_{i+1/2}^n + U_{i-1/2}^n\right) - \frac{\Delta t}{2}\,\frac{F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n}{\Delta x}, \qquad (5.83а)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \Delta t\,\frac{F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x}. \qquad (5.83б)$$

Эта схема принципиально аналогична схеме Рихтмайера (5.79), но полностью не идентична ни ей, ни даже схеме Бёрстейна (5.82). Заметим, что при переходе от формулы первого полушага (5.83а) к формуле по схеме Лакса будем иметь

$$\frac{1}{2}\left[U_{i+1/2}^n + U_{i-1/2}^n\right] = \frac{1}{4}U_{i+1}^n + \frac{1}{2}U_i^n + \frac{1}{4}U_{i-1}^n, \qquad (5.84)$$

что отличается от шаблона схемы Лакса в $i$-й и $(i \pm 1)$-й узловых точках. Фактически схема (5.83) полностью не определена, поскольку величины F в уравнении (5.83б) могут быть представлены одним из двух возможных способов: либо как

$$F_{i\pm 1/2}^{n+1/2} = F\left(U_{i\pm 1/2}^{n+1/2}\right) = F\left[\left(U_i^{n+1/2} + U_{i\pm 1}^{n+1/2}\right)/2\right], \qquad (5.85)$$

либо как

$$F_{i\pm 1/2}^{n+1/2} = \left[F\left(U_i^{n+1/2}\right) + F\left(U_{i\pm 1}^{n+1/2}\right)\right]/2, \qquad (5.86)$$

что не эквивалентно в случае, когда $U$ не постоянно. Этой схеме присущи те же трудности, связанные с граничными условиями, что и схеме Бёрстейна (5.82).

Другая схема Рубина и Бёрстейна [1967] состоит в изменении подхода к центрированию по времени. Предварительные значения в точках с полуцелыми по пространству индексами $i \pm {}^1/_2$ вычисляются в точках с целыми по времени индексами:

$$\overline{U_{i+1/2}^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(U_i^n + U_{i+1}^n\right) - \Delta t\,\frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{\Delta x}, \qquad (5.87а)$$

$$\overline{U_{i-1/2}^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(U_i^n + U_{i-1}^n\right) - \Delta t\,\frac{F_i^n - F_{i-1}^n}{\Delta x}. \qquad (5.87б)$$

Тогда при центрировании по времени второй шаг имеет вид

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{1}{2}\Delta t\left[\frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2\,\Delta x} + \frac{\overline{F_{i+1/2}^{n+1}} - \overline{F_{i-1/2}^{n+1}}}{\Delta x}\right], \qquad (5.87в)$$

[1]) Более приемлемые результаты получаются при обычном тестовом расчете одномерного распространения ударной волны.

где $F^{\overline{n+1}}$, очевидно, представляет собой величину

$$F^{\overline{n+1}}_{i\pm 1/2} = F\left(U^{\overline{n+1}}_{i\pm 1/2}\right). \tag{5.88}$$

Для больших чисел Куранта последняя схема дает даже меньшие всплеск за скачком, чем схема (5.82), однако здесь снова возникают трудности, связанные с граничными условиями на стенке. Рубин [1970] рассчитывал по этой схеме одномерные течения вязкого газа с химическими реакциями и излучением.

Исследуя устойчивость, Рубин и Прейзер [1968] установили, что для всех перечисленных выше схем обычное ограничение по числу Куранта (5.4а) является необходимым и достаточным для устойчивости [1]).

Синглтон [1968] ввел в двухшаговую схему Лакса — Вендроффа расщепление по времени, вычисляя предварительные значения в точках $(i \pm {}^1/_2, j)$ по одномерной схеме Лакса в направлении $x$ и предварительные значения в точках $(i, j \pm {}^1/_2)$ по одномерной схеме Лакса в направлении $y$. Первый шаг для уравнения (5.80) будет при этом иметь вид

$$U^{n+1/2}_{i+1/2,\,j} = \frac{1}{2}\left(U^n_{i,\,j} + U^n_{i+1,\,j}\right) - \frac{\Delta t}{2}\left[\frac{F^n_{i+1,\,j} - F^n_{i,\,j}}{\Delta x} + \frac{G^n_{i+1/2,\,j+1} - G^n_{i+1/2,\,j-1}}{2\,\Delta y}\right] \tag{5.89а}$$

и

$$U^{n+1/2}_{i,\,j+1/2} = \frac{1}{2}\left(U^n_{i,\,j} + U^n_{i,\,j+1}\right) - \frac{\Delta t}{2}\left[\frac{F^n_{i+1,\,j+1/2} - F^n_{i-1,\,j+1/2}}{2\,\Delta x} + \frac{G^n_{i,\,j+1} - G^n_{i,\,j}}{\Delta y}\right]. \tag{5.89б}$$

Второй шаг выполняется по обычной схеме «чехарда»

$$U^{n+1}_{i,\,j} = U^n_{i,\,j} - \Delta t\left\{\frac{F^{n+1/2}_{i+1/2,\,j} - F^{n+1/2}_{i-1/2,\,j}}{\Delta x} + \frac{G^{n+1/2}_{i,\,j+1/2} - G^{n+1/2}_{i,\,j-1/2}}{\Delta y}\right\}. \tag{5.89в}$$

Синглтон находит значения в точках с полуцелыми индексами $i \pm {}^1/_2$, $j \pm {}^1/_2$ в выражениях (5.89а) и (5.89б) по формуле (5.86), а не по формуле (5.85). На втором шаге (5.89в) значения в точках с полуцелыми индексами определяются согласно (5.88). Условия устойчивости для этой схемы получены не были.

Очень интересная двухшаговая схема была разработана Мак-Кормаком [1969, 1970]. В ней на двух последовательных шагах по времени попеременно используются конечные разности вперед и назад по пространственным переменным. Для

[1]) Условие, полученное в этой работе, заменило полученное ранее вдвое более жесткое достаточное условие устойчивости Бёрстейна [1965, 1966].

одномерного случая эту схему можно записать в следующем виде:

$$\overline{U_i^{n+1}} = U_i^n - \Delta t \frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{\Delta x}, \tag{5.90а}$$

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left\{U_i^n + \overline{U_i^{n+1}} - \Delta t \frac{\overline{F_i^{n+1}} - \overline{F_{i-1}^{n+1}}}{\Delta x}\right\}. \tag{5.90б}$$

Модификация схемы получается чередованием конечных разностей вперед и назад на последовательных (полных) шагах по времени. В двумерном случае конечные разности вперед и назад могут браться различно в направлениях $x$ и $y$ и циклически чередоваться на двух или четырех последовательных шагах по времени. Кроме того, эта схема может использоваться вместе с методом Марчука расщепления по времени (разд. 3.1.13). Детали этой схемы можно найти в работах Мак-Кормака [1971], а также Катлера и Ломекса [1971]. Мак-Кормак и Полли [1972] рассматривали различные аспекты расщепления по времени применительно к данной схеме, а также аппроксимации для смешанных производных в членах уравнений, включающих вязкость.

Не совсем очевидно, что эта схема является схемой типа Лакса — Вендроффа, не очевидно даже, что схема аппроксимирует исходные уравнения в частных производных, однако полученные при ее помощи замечательные результаты (Мак-Кормак [1969, 1970], Катлер [1969], Ломекс с соавторами [1970], Катлер и Ломекс [1971]) поддерживают уверенность в этом. Поскольку в схеме не требуются значения $F_{i\pm1/2}$ в точках с полуцелыми по пространству индексами, здесь не возникает трудностей с применением граничных условий (за исключением вариантов схемы с использованием расщепления по времени).

Данную схему опробовали Тайлер и Эллис [1970] при расчете сильных одномерных ударных волн по уравнениям при отсутствии вязкости, Катлер и Ломекс [1971] при расчете висячих скачков внутри поля трехмерного течения и Андерсон [1970б] при расчете квазиодномерных течений с неравновесными химическими реакциями. Ли [1971] использовал эту схему в сочетании с методикой выделения скачков для расчета осесимметричных течений с химическими реакциями. Томас с соавторами [1971] применили схему (также в совокупности с методикой выделения скачков) для численного решения трехмерных задач, продвигая решение по осевой координате, в данном случае игравшей роль времени.

В настоящее время схема Мак-Кормака весьма широко применяется для расчетов аэродинамических задач. Однако Таркел [1974] отметил, что эта схема может быть неустойчивой при

расчете некоторых двумерных течений невязкого газа, а Тейлор с соавторами [1972] обнаружил ее неустойчивость при расчете одномерных волн разрежения в невязком газе. В этих двух статьях, а также в статье Андерсона [1974] проведено сравнительное изучение различных схем.

*Упражнение.* Показать, что в приложении к одномерному модельному уравнению (5.1) при $C \equiv \bar{u}\Delta t/\Delta x = 0$ схема Мак-Кормака дает точное решение $u_i^{n+1} = u_{i-1}^n$. Показать, что схема Мак-Кормака аппроксимирует уравнение (5.1) в неконсервативной форме. Описать схему с центрированием по времени.

Рассмотрим другие двухшаговые схемы типа Лакса — Вендроффа и их приложения. Рубин с соавторами [1967] брал схему Бёрстейна (5.82) для расчета одномерного течения излучающего газа. Уоткинс [1970] разработал новую двухшаговую схему решения «жестких» уравнений (см. разд. 3.6.5), описывающих течения, в которых происходят химические реакции. Кенцер [1970б] экспериментировал, проводя расчеты течения без скачков при помощи различных весовых комбинаций и различных чередований схемы Лакса и схемы «чехарда» подобно тому, как это сделано в схеме Рихтмайера (5.79).

Стренг [1963] описал схему, аналогичную первоначальной схеме Лакса — Вендроффа (5.72)—(5.74), а впоследствии Гурли и Моррис [1968б] дали ее многошаговый вариант с расщеплением по времени Марчука (разд. 3.1.13). Фройдигер с соавторами [1967] разработал схему «с перекидыванием», для условной устойчивости которой необходимо наличие в уравнениях физических вязких членов (при малых числах Рейнольдса). Гурли и Моррис [1971] рассчитывали одномерные ударные волны, вводя разностные представления из двухшаговой схемы Лакса — Вендроффа в схему «классики» (см. разд. 3.1.18, а также Эймс [1969]). Боули и Принс [1971] обобщили двухшаговую схему Лакса — Вендроффа для применения на расчетной сетке с трапециевидными ячейками.

Как и в первоначальной схеме Лакса — Вендроффа, во всех этих вариантах двухшаговой схемы для затухания осцилляций за сильными скачками может понадобиться дополнительное введение явной искусственной вязкости. Лапидус [1967], а также Эрдош и Заккаи [1969] добавляли члены с искусственной вязкостью типа Русанова (см. разд. 5.4.3). В работе Тайлера и Эллиса [1970] проводится сравнение этих способов и способа Тайлера обеспечения добавочного демпфирования. В случае одномерного модельного уравнения (5.1) Тайлер заметил связь, существующую между различными схемами; при значении входящего в схему Русанова параметра $\omega = 1/C$ она сводится к схеме Лакса, а при $\omega = C$ — к схеме Лакса — Вендроф-

фа, которая в этом случае эквивалентна схемам Лейта, Мак-Кормака и другим двухшаговым схемам.

При отношении давлений на скачке порядка десяти схема Рихтмайера (5.79) дает толщину скачка около $3\Delta x$ и максимальный всплеск за скачком около 20%; модифицированная схема Мак-Кормака (5.90) дает толщину скачка около $6\Delta x$ при определении ее по выходу на почти равномерный поток или около $3\Delta x$ при определении ее по положению фронта максимального всплеска; при этом максимальный всплеск составляет около 8%. В упомянутой выше статье можно найти и сравнения других схем, но самое важное в ней состоит в том, что Тайлер показал, каких замечательных результатов можно добиться добавлением в уравнения количества движения и энергии членов с явной искусственной вязкостью (объемной) типа фон Неймана — Рихтмайера по аналогии со схемой Лонгли (разд. 5.4.2). Тайлер добавляет член с искусственной вязкостью вида

$$q = -b_1 \Delta x \rho (|u| + a) \partial u/\partial x, \tag{5.91а}$$

т. е. полагает

$$\alpha_B = b_1 \Delta x \rho (|u| + a). \tag{5.91б}$$

Члены с искусственной вязкостью представляются разностями вперед по времени. Из-за неявного сглаживания, присущего двухшаговым схемам, приемлемы малые значения $b_1$. При этом толщина скачка при расчетах по двухшаговой схеме Рихтмайера составляет от $2\Delta x$ до $3\Delta x$, а по модифицированной схеме Мак-Кормака — от $3\Delta x$ до $4\Delta x$; максимальный всплеск за скачком был лишь 0.18% для обеих схем при $b_1 = 0.15$ и $b_1 = 0.325$ соответственно (см. рис. 5.1). Тайлер и Эллис [1970] проверяли схемы также на расчете течений с волнами разрежения и скачками.

Ввиду успешности этих численных экспериментов и легкости обобщения на многомерные задачи искусственную вязкость Тайлера (5.91) можно рекомендовать для класса двухшаговых схем Лакса — Вендроффа.

## 5.5.7. Схема Абарбанеля и Цваса

Абарбанель и Цвас [1969] исследовали класс схем, основанных на многократном применении первоначальной схемы Лакса — Вендроффа (5.72)—(5.74). Обозначим схему Лакса — Вендроффа (5.72а) оператором $L$ и запишем

$$U^{n+1} = U^n + L\{U^n\}. \tag{5.92}$$

Абарбанель и Цвас предложили общую итерационную формулу

$$U^{(n+1)k+1} = U^n + \Gamma \cdot L\{U^{(n+1)k}\} + (1 - \Gamma) \cdot L\{U^n\}. \tag{5.93}$$

Максимальное значение $k$ и коэффициент $\Gamma$, выбор которого приводит к явной или неявной схеме, могут изменяться. При $\max k \to \infty$ и $\Gamma = 1$ схема превращается в полностью неявную схему Лакса — Вендроффа

$$U^{n+1} = U^n + L\{\overline{U^{n+1}}\}, \tag{5.94}$$

а при $\Gamma = 0$ сводится к своей первоначальной явной форме (5.92). Наилучшие результаты были получены для простейшей формы схемы (5.93) при $\Gamma = 1$ и одной итерации; в этом частном случае двухшаговая схема принимает вид

$$\overline{U^{n+1}} = U^n + L\{U^n\}, \tag{5.95}$$

$$U^{n+1} = U^n + L\{\overline{U^{n+1}}\}. \tag{5.96}$$

Абарбанель и Цвас применяли данную схему для расчета одномерного распространения ударной волны в лагранжевых переменных. Они нашли, что проведение итераций более эффективно, чем введение явной искусственной вязкости, предложенное Лаксом и Вендроффом [1960]. Наиболее суровыми условиями проверки схемы являются большие перепады давлений на скачках и малые значения показателя адиабаты $\gamma$. Для отношения давлений на скачке, равного 4, и для $\gamma = 1.2$ схема (5.95), (5.96) давала толщину скачка $\delta_s$ от $6\Delta x$ до $8\Delta x$ и, что важнее всего, отсутствие осцилляций давления (монотонные профили давления).

Эта схема еще не применялась в эйлеровых переменных, однако представляется, что здесь она была бы перспективной. Абарбанель и Гольдберг [1971] рассчитывали по ней распространение цилиндрической ударной волны. Как было указано выше (разд. 5.5.5), в многомерных задачах оператор Лакса — Вендроффа $L$ существенно усложняется. Поэтому очевидным развитием схемы Абарбанеля и Цваса была бы замена оператора $L$ в выражениях (5.95) и (5.96) одним из двухшаговых операторов, описанных в предыдущем разделе. В случае двух измерений подобная четырехшаговая схема требовала бы только около четверти машинного времени, требуемого схемой (5.95), (5.96), и около половины машинного времени, требуемого первоначальной схемой Лакса — Вендроффа. Однако не было попыток осуществить такое очевидное развитие данной схемы.

Очевидно, что эта схема дает для стационарного решения ту же искусственную вязкость, что и схема Лакса — Вендроффа.

### 5.5.8. Другие схемы; алгоритм Бориса переноса с коррекцией потоков

Различные схемы для расчета скачков в лагранжевых переменных можно найти в книге Рихтмайера и Мортона [1967].

Схема Годунова [1959] (см. также Годунов с соавторами [1961]) является двухшаговой схемой первого порядка и дает размытые скачки. Как и в двухшаговой схеме Рихтмайера и других схемах, описанных в разд. 5.5.6, второй шаг в ней проводится по схеме «чехарда». Однако проведение первого предварительного шага осуществляется очень интересно. В лагранжевых переменных необходимо вычисление предварительных значений $u^{\overline{n+1}}$ и $P^{\overline{n+1}}$ на $(n+1)$-м шаге по времени (рассчитывать $E$ не обязательно). Эти предварительные значения определяются при помощи решения задачи Римана о распаде разрыва (см., например, Овчарек [1964]) на границе расчетной ячейки. Данная схема довольно сложна, однако любые разрывы в течении (включая и контактные разрывы) трактуются в ней более физично, чем в схемах с искусственной вязкостью. Двумерный вариант схемы применяли Годунов с соавторами [1961] и Мессон с соавторами [1969]. Мессон [1968] численно решал по этой схеме пространственные задачи по упрощенным уравнениям (в предположении малости поперечных потоков).

Макнамара [1966, 1967] применял модифицированный метод Годунова. Первый предварительный шаг осуществлялся здесь при помощи линеаризованного решения задачи о распаде разрыва (слабого) на подвижной двумерной эйлеровой сетке, периодически подстраиваемой под перемещение контактного разрыва. Макнамара указывает, что неточность формы скачка, состоящая в появлении у него точки возврата вблизи проходящей через точку торможения линии тока, вызвана несогласованностью при расчете движения сетки.

Гурли и Моррис [1971] брали для расчета одномерных ударных волн схемы «классики» (см. разд. 3.1.18) первого и второго порядков точности. Русанов [1970], а также Бёрстейн и Мирин [1970, 1971] рассматривали схемы третьего порядка для течений с ударными волнами. Лакс [1969] описал схему Глимма для решения уравнения Бюргерса, интересную с методической точки зрения.

Алгоритм переноса с коррекцией потоков (алгоритм FCT), первоначально разработанный Борисом [1971], был затем улучшен и обобщен (Бук, Борис и Хейн [1975]) и в результате превратился в мощный метод расчета скачков и других областей с большими градиентами. На первой его стадии используются различные схемы, например схема Лакса — Вендроффа, схема с донорными ячейками, схема «чехарда», в которые включена явная или неявная искусственная вязкость. На второй стадии, называемой антидиффузионным шагом, диффузионные ошибки частично уничтожаются (и почти полностью уничтожаются в областях вне скачка в улучшенном варианте алгоритма). Главной особенностью этого алгоритма является ограничение

величины антидиффузионных поправок, так чтобы они не вносили новых экстремумов в решение. Применение алгоритма к сложным задачам, например к расчету магнитогидродинамических ударных волн или к задаче о развитии неустойчивости на границе раздела двух жидкостей, привело к впечатляющему успеху. Представляется, что в будущем эта ныне совершенствующаяся методика найдет широкое применение.

Как было отмечено ранее, любая из схем расчета течений несжимаемой жидкости, описанных в разд. 3.1 и 3.7, пригодна и для исследования течений сжимаемой жидкости. Если в схеме имеется некоторая искусственная вязкость, зависящая от времени, то схему можно ирименять и для расчета течений сжимаемого газа при условии, что ударные волны слабы и/или что имеется достаточная физическая вязкость (малые числа Рейнольдса). Особо отметим здесь двухшаговую схему Браиловской (разд. 3.1.15) и схему Крокко (разд. 3.1.12), которые будут обсуждаться в следующем разделе, посвященном аппроксимации вязких членов.

## 5.6. Члены с вязкостью в уравнениях течения сжимаемой жидкости

В этом разделе мы рассмотрим способы аппроксимации описывающих физическую вязкость и теплопроводность членов уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости. Эти же способы пригодны и для аппроксимации членов с явной искусственной вязкостью, обсуждавшихся в разд. 5.4. Из-за большого числа различных вязких членов такие способы практически приводятся на примерах простых модельных членов, чтобы продемонстрировать основные идеи, не путаясь в многочисленных верхних и нижних индексах.

### 5.6.1. Аппроксимации производных по пространственным переменным

Все вязкие члены в уравнениях (4.63) составлены из производных вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f\frac{\partial g}{\partial x}\right], \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[f\frac{\partial g}{\partial y}\right] \tag{5.97}$$

или аналогичных производных, в которых $x$ заменены на $y$ и $y$ на $x$, причем $f$ и $g$ — различные комбинации безразмерных коэффициентов вязкости и теплопроводности, составляющих скорости и некоторых констант. В простейшем случае на одном

шаге по времени для производных можно взять аппроксимации

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f\frac{\partial g}{\partial y}\right]_{i,j}=\frac{[f\,\partial g/\partial y]_{i+1,\,j}-[f\,\partial g/\partial y]_{i-1,\,j}}{2\,\Delta x}=$$

$$=\frac{f_{i+1,\,j}(g_{i-1,\,j+1}-g_{i+1,\,j-1})-f_{i-1,\,j}(g_{i-1,\,j+1}-g_{i-1,\,j-1})}{4\,\Delta x\,\Delta y}+$$

$$+O(\Delta x^2,\ \Delta y^2) \qquad (5.98)$$

и аналогичную формулу для $\partial[f\partial g/\partial x]/\partial y$, а также

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f\frac{\partial g}{\partial x}\right]_{i,j}=\frac{[f\,\partial g/\partial x]_{i+1/2,\,j}-[f\,\partial g/\partial x]_{i-1/2,\,j}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{f_{i+1/2,\,j}(g_{i+1,\,j}-g_{i,\,j})/\Delta x-f_{i-1/2,\,j}(g_{i,\,j}-g_{i-1,\,j})/\Delta x}{\Delta x}=$$

$$=\frac{f_{i+1/2,\,j}(g_{i+1,\,j}-g_{i,\,j})-f_{i-1/2,\,j}(g_{i,\,j}-g_{i-1,\,j})}{\Delta x^2}+O(\Delta x^2). \qquad (5.99)$$

Если $f$ постоянно по пространству, то (5.98) сводится к (3.12), а (5.99) — к (3.14). Если $f$ переменно, то члены вида $f_{i\pm1/2,\,j}$ в (5.99) могут быть вычислены одним из двух обычных способов. Например, если $f=\mu$ и зависит от температуры, то можно считать либо

$$f_{i\pm1/2,\,j}=[f(T_{i,\,j})+f(T_{i\pm1,\,j})]/2, \qquad (5.100)$$

либо

$$f_{i\pm1/2,\,j}=f[(T_{i,\,j}+T_{i\pm1,\,j})/2]. \qquad (5.101)$$

Обе эти формулы дают второй порядок точности и обе консервативны для диффузионной величины $g$. Если принят линейный закон зависимости вязкости от температуры, т. е. в уравнении (4.62) $\omega=1$ и, значит, $f=T$, то обе формулы будут алгебраически эквивалентны. Однако при использовании закона Сазерленда (4.60) или уравнения (4.62) при $\omega\neq1$ применение формулы (5.100) при хранении $f_{i,\,j}$ в одном массиве может сэкономить значительное количество машинного времени (см. обсуждение этого вопроса в разд. 7.1).

## 5.6.2. Общие соображения

Полный линейный анализ устойчивости конвективных и диффузионных членов в уравнениях Навье — Стокса очень сложен, и подобные попытки предпринимались только в одной или двух работах и только для простейших разностных схем. Поскольку в данном случае наши интересы сосредоточены на задачах с сильными ударными волнами, которые в основном определяются невязкими членами, в настоящее время принято проводить

анализ устойчивости только для уравнений течения невязкого газа и надеяться, что влияние добавленных вязких членов будет мало. Эта тенденция интересна тем, что она повторяет тенденцию, существовавшую десять или двадцать лет назад. Тогда интересовались задачами распространения тепла и полагали, что добавление конвективных членов не влияет на устойчивость (см., например, Рихтмайер [1957])[1]). В действительности важны как невязкие, так и вязкие члены, однако обычно анализ устойчивости слишком сложен.

Опыт исследования простого модельного уравнения (2.18) показывает (см. гл. 3), что не всегда можно анализировать вязкие и невязкие члены по отдельности, а затем просто брать наиболее ограничительное из полученных условий устойчивости. Добавление вязких членов может превратить неустойчивую схему (например, схему с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным из разд. 3.1.4, 3.1.5) в устойчивую, и наоборот (схема «чехарда» из разд. 3.1.6). Однако раздельное проведение анализа устойчивости может дать некоторые наводящие соображения для дальнейшего численного экспериментирования. Кроме того, опыт расчетов Чена [1968], Аллена [1968], Аллена и Чена [1970] показал, что анализ устойчивости модельного уравнения (2.18) может дать ценные сведения об устойчивости расчета по полным уравнениям Навье — Стокса, по крайней мере в случае применения явных схем.

Есть также указания на то, что при анализе устойчивости можно пренебречь членами со смешанными производными типа (5.98). Кенцер [1970] показал, что члены со смешанными производными не оказывают влияния на устойчивость, по крайней мере в пределе при $\Delta x \to 0$. В отличие от подобного вывода, сделанного выше для конвективных членов, представляется, что данный результат вытекает из опыта расчетов при конечных $\Delta x > 0$. По крайней мере такой опыт показывает, что если члены со смешанными производными и порождают какие-либо ограничения, связанные с устойчивостью, то они перекрываются другими условиями для устойчивости. Конечно, это может оказаться неверным для всех схем, которые могут быть созданы в будущем[2]), однако сейчас это позволяет нам значительно упростить изложение, уделяя внимание только аппроксимациям модельных членов вида $\partial [f(\partial g/\partial x)]/\partial x$ и $f(\partial^2 g/\partial x^2)$.

---

[1]) Как мы видели в гл. 3, в действительности это верно в том случае, когда устойчивость определяется только в пределе при $\Delta x \to 0$, а не для реальных $\Delta x > 0$.

[2]) В этом отношении интересна схема метода чередующихся направлений Мак-Ки и Митчелла [1970] для членов, содержащих смешанные производные.

### 5.6.3. Схемы для аппроксимации членов с вязкостью

В разд. 3.1.14 мы установили практическое правило для модельного уравнения, согласно которому явная по времени конечно-разностная схема, пригодная для уравнений при отсутствии вязкости, в общем случае не будет успешна для расчета только одних вязких членов. Представляется, что это правило остается верным и для уравнений течения сжимаемого газа. Например, применение двухшаговой схемы Лакса — Вендроффа к вязким членам приводит к неустойчивости (Рубин и Бёрстейн [1967], Фройдигер и др. [1967]). Томмен [1966] предложил простую схему с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным для диффузионного члена на обоих шагах по времени [1]). Эта условно устойчивая схема имеет очень жесткое ограничение на шаг по времени при малых значениях сеточного числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_c$ (см. задачу 5.7). Результаты исследования устойчивости в одномерном случае графически представили Рубин и Бёрстейн [1967]. Мак-Кормак применил двумерный вариант своей схемы (5.90) как к вязким, так и к невязким членам, используя условие устойчивости при отсутствии вязкости при расчете течений с большими числами Рейнольдса (Мак-Кормак [1970]) и дополнительное условие в виде $\Delta t < b\,\mathrm{Re}\,\Delta x^2$ при расчете течений с большей вязкостью (Мак-Кормак [1969] [2])). Если вязкие члены не аппроксимируются надлежащим образом, то при этом теряется второй порядок точности схемы (см. приложение Б).

Павлов [1968б] применил простую схему с разностями вперед по времени и с центральными разностями по пространственным переменным к полным уравнениям Навье — Стокса и получил решения для малых чисел Рейнольдса ($\mathrm{Re} = 50$). Батлер [1967] также брал эту схему для представления вязких членов в методах PIC и FLIC. Скала и Гордон [1967] рассчитали течения при еще меньших числах Рейнольдса по схеме «классики» (разд. 3.1.18, 3.2.7) в преобразованной системе координат, применяя для конвективных членов разности против потока, а для диффузионных членов разности вперед по времени и центральные разности по пространственным переменным. Необходимо отметить, что, хотя перечисленные работы имеют значительную ценность, сочетание большого числа Маха с малым

[1]) В схеме Чудова (Браиловская с соавторами [1968]) на первом предварительном шаге по времени вклад вязкости не учитывается. Эту схему затем применяли многие авторы.

[2]) Подробности расчета вязких членов в схеме Мак-Кормака и соответствующие условия устойчивости изложены в работе Мак-Кормака и Болдуина [1975].

числом Рейнольдса может привести к тому, что физическое течение будет выходить за пределы справедливости гипотезы о сплошности среды, а тем самым и за пределы справедливости уравнений Навье — Стокса.

Для расчета течений вязкого газа без скачков Брайловская [1965] применяла двухшаговую схему (3.286). В приложении к уравнениям (4.63) течения сжимаемой жидкости эту схему можно кратко описать следующим образом. Обозначим индексами $I$ и $V$ соответственно невязкие и вязкие члены функций $F$ и $G$; тогда

$$\overline{U^{n+1}} = U^n - \Delta t\left[\delta F^n/\delta x + \delta G^n/\delta y\right], \tag{5.102а}$$

$$U^{n+1} = U^n - \Delta t\left[\frac{\delta \overline{F_I^{n+1}}}{\delta x} + \frac{\delta F_V^n}{\delta x} + \frac{\delta \overline{G_I^{n+1}}}{\delta y} + \frac{\delta G_V^n}{\delta y}\right], \tag{5.102б}$$

где $\delta/\delta x$ и $\delta/\delta y$ представляются центральными разностями, а $\overline{F_I^{n+1}} = F_I\left(\overline{U^{n+1}}\right)$ и т. д. Для двумерного случая Брайловской [1965] было найдено достаточное условие линейной устойчивости

$$\Delta t \leqslant \min\left(\frac{\Delta^2 \mathrm{Re}}{8},\ \frac{\Delta}{|u|+|v|+a\sqrt{2}}\right), \tag{5.103}$$

где $\Delta$ — размер ячейки, $\Delta x = \Delta y = \Delta$ или $\Delta = \sqrt{\Delta x\,\Delta y}$ при $\Delta x \neq \Delta y$ (предположительно). Второе неравенство в условии (5.103) представляет собой обычное ограничение по числу Куранта, $C \leqslant 1$, а первое, которое можно переписать в виде

$$d \equiv \frac{\Delta t}{\Delta^2 \mathrm{Re}} \leqslant \frac{1}{8}, \tag{5.104}$$

оказывается *вдвое* более жестким, чем обычное диффузионное ограничение на шаг по времени для одношаговых схем. Эти условия были достаточными для обеспечения устойчивости в расчетах Брайловской [1965], однако рассмотрение уравнения энергии (4.42г) и уравнений (4.44б) и (4.45) вводит дополнительное диффузионное условие устойчивости

$$d_2 \equiv \frac{\Delta t}{\Delta^2 \mathrm{N}} \leqslant \frac{1}{8}, \tag{5.105}$$

где

$$\mathrm{N} = \mathrm{Pr} \cdot \mathrm{Re} \cdot M_0^2(\gamma - 1). \tag{5.106}$$

Так как Брайловская проводила свои расчеты при $M_0 \leqslant 1$, $\mathrm{Pr} \leqslant 1$ и, конечно, $\gamma < 2$, то при выполнении условия (5.103) условие (5.105) автоматически выполнялось, поскольку $\mathrm{N} < \mathrm{Re}$. (Для воздуха $\mathrm{N} > \mathrm{Re}$ только при $M_0 > 1.89$.)

Аллен и Чен [1970] изменили аппроксимацию диффузионных членов в схеме Брайловской и добились полного устране-

ния ограничения на диффузионную устойчивость для уравнений с постоянными $\bar{\mu}$ и $\bar{k}$ (т. е. с $\mu = k = 1$). Такая схема для модельного уравнения течения несжимаемой жидкости уже была описана в гл. 3 (см. формулы (3.303)). Для течений сжимаемой жидкости градиенты давления в уравнениях количества движения представлялись конечными разностями так же, как конвективные члены в схеме (3.303). Если схему Чена — Аллена применять для уравнений с переменными коэффициентами переноса, содержащих члены типа $\partial[f(\partial g/\partial x)]/\partial x$, то для соответствующей аппроксимации члены типа $f_{i\pm1/2,\,j}$ в формуле (5.100) на первом предварительном шаге необходимо рассчитывать так:

$$f_{i\pm1/2,\,j} = {}^1/_2\{f(T^{n+1}_{i,j}) + f(T^{n}_{i\pm1,\,j})\}, \tag{5.107а}$$

а на втором шаге так:

$$f_{i\pm1/2,\,j} = {}^1/_2\{f(T^{n+1}_{i,j}) + f(T^{\overline{n+1}}_{i\pm1,\,j})\}. \tag{5.107б}$$

К сожалению, это приводит к неявной системе конечно-разностных уравнений. Для сохранения явности схемы $f$ следует вычислять на первом шаге так:

$$f_{i\pm1/2,\,j} = {}^1/_2\{f(T^{n}_{i,j}) + f(T^{n}_{i\pm1,\,j})\}, \tag{5.108а}$$

а на втором шаге либо опять по формуле (5.108а), либо так:

$$f_{i\pm1/2,\,j} = {}^1/_2\{f(T^{n+1}_{i,j}) + f(T^{\overline{n+1}}_{i\pm1,\,j})\}. \tag{5.108б}$$

Можно предполагать, что если $f = \mu(T)$ и $f = k(T)$ существенно меняются при изменении $T$, то для этой схемы также надо рассматривать диффузионное условие устойчивости на шаг по времени [1]), и здесь можно отдать предпочтение схеме Браиловской за ее сравнительную простоту.

При помощи данной схемы Аллен и Чен (Аллен [1968], Аллен и Чен [1970] и Чен [1970]) успешно рассчитывали сверхзвуковое течение в донной области со слабыми ударными волнами. Очень существенным достоинством двухшаговых схем Браиловской и Чена — Аллена является то, что в них оба шага имеют один и тот же вид в отличие от всех двухшаговых схем типа Лакса — Вендроффа (разд. 5.5.6). Для стационарных решений рассмотренные схемы не имеют искусственной вязкости (однако в нестационарном случае искусственная вязкость в этих схемах имеет место). Таким образом, для стационарных течений со слабыми ударными волнами схемы Браиловской и

[1]) В двухшаговой схеме Роуча и Мюллера [1968] использовались формулы типа (5.107). Дальнейшие исследования показали, однако, что в этой схеме диффузионное условие устойчивости, к сожалению, не исключается, а только ослабляется.

Чена — Аллена предпочтительнее схем типа Лакса — Вендроффа.

Схема Крокко [1965] для аппроксимации конвективных членов уже была изложена в разд. 3.1.12. Для полного модельного уравнения (5.1) эту трехслойную схему можно записать в виде

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n + \Delta t \left[ -(1+\Gamma) \frac{\delta (\tilde{u}\zeta)^n}{\delta x} - \Gamma \frac{\delta (\tilde{u}\zeta)^n}{\delta x} + \right.$$
$$\left. + \alpha \frac{\zeta_{i+1}^n - 2\zeta_i^n + \zeta_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right]. \qquad (5.109)$$

При помощи своей схемы Крокко рассчитывал течение сжимаемого газа с ударными волнами по квазиодномерным уравнениям с постоянными коэффициентами переноса. Градиент давления аппроксимировался так же, как конвективные члены в схеме (5.109). Условия устойчивости были представлены в графическом виде (Крокко [1965]). Виктория и Стейгер [1970] рассчитали по этой схеме двумерные плоские и осесимметричные течения со слабыми ударными волнами, а также учли эффекты осесимметричности при исследовании устойчивости. Как и в схеме Чена — Аллена, переменные коэффициенты переноса в (5.107) приводят к неявности рассмотренной схемы.

Брили и Макдональд [1975], а также Баум и Ндефо [1973] с успехом применяли неявную схему метода чередующихся направлений (см. разд. 3.1.16) для расчета сверхзвуковых течений вязкого газа. Их схемы различались способами линеаризации, при неудачном проведении которой можно сильно испортить устойчивость, достигнутую за счет неявности.

Малоизвестная схема расчета полной системы уравнений течения сжимаемой жидкости была разработана Нагелем [1967]. (Поскольку эта схема не применялась для расчета течений невязкого газа, она обсуждается лишь в настоящем разделе.) Нагель строил эту схему только для уравнений, описывающих возмущения (см. разд. 6.4) неконсервативных переменных $\rho$, $u$, $v$ и $H$, где $H$ — полная энтальпия. Представляется, что эта схема пригодна и в случае консервативных переменных, и мы будем ее описывать именно так. Запишем в виде

$$\frac{\delta (\rho u)^{n+1}}{\delta t} = \frac{\delta (\rho u)}{\delta t} (\rho^{n+1}, (\rho u)^{n+1}, (\rho v)^{n+1}, E_s^{n+1}) \qquad (5.110)$$

разностный аналог члена $\partial(\rho u)/\partial t$, полученный из уравнения (4.63) при помощи центральных разностей по пространственным переменным для всех производных и по значениям в момент времени, соответствующий индексу $n+1$ в этом выражении. Аналогичные выражения имеют место и для других переменных. Тогда схема Нагеля представляет собой последо-

вательность 12 этапов, каждый из которых выполняется во всех узлах сетки $(i, j)$.

В результате предыдущего двенадцатиэтапного расчетного цикла известны величины

$$\rho^n,\ E_s^n,\quad \frac{\delta\rho^{n-1/2}}{\delta t},\quad \frac{\delta E_s^{n-1/2}}{\delta t},\quad (\rho u)^{n+1/2},\quad (\rho v)^{n+1/2},\quad \frac{\delta(\rho u)^n}{\delta t},\quad \frac{\delta(\rho v)^n}{\delta t}.$$

Отдельные этапы расчетного цикла проводятся в следующем порядке:

$$1.\quad \rho^{n+1/2} = \rho^n + \frac{\Delta t}{2}\frac{\delta\rho^{n-1/2}}{\delta t};$$

$$2.\quad E_s^{n+1/2} = E_s^n + \frac{\Delta t}{2}\frac{\delta E^{n-1/2}}{\delta t};$$

$$3.\quad \frac{\delta\rho^{n+1/2}}{\delta t} = \frac{\delta\rho}{\delta t}\left[(\rho u)^{n+1/2},\ (\rho v)^{n+1/2}\right];$$

$$4.\quad \frac{\delta E_s^{n+1/2}}{\delta t} = \frac{\delta E_s}{\delta t}\left[\rho^{n+1/2},\ E_s^{n+1/2},\ (\rho u)^{n+1/2},\ (\rho v)^{n+1/2}\right];$$

$$5.\quad \rho^{n+1} = \rho^n + \Delta t\frac{\delta\rho^{n+1/2}}{\delta t};$$

$$6.\quad E_s^{n+1} = E_s^n + \Delta t\frac{\delta E_s^{n+1/2}}{\delta t};$$

$$7.\quad (\rho u)^{n+1} = (\rho u)^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\delta(\rho u)^n}{\delta t};$$

$$8.\quad (\rho v)^{n+1} = (\rho v)^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\delta(\rho v)^n}{\delta t};$$

$$9.\quad \frac{\delta(\rho u)^{n+1}}{\delta t} = \frac{\delta(\rho u)}{\delta t}\left[\rho^{n+1},\ E_s^{n+1},\ (\rho u)^{n+1},\ (\rho v)^{n+1}\right];$$

$$10.\quad \frac{\delta(\rho v)^{n+1}}{\delta t} = \frac{\delta(\rho v)}{\delta t}\left[\rho^{n+1},\ E_s^{n+1},\ (\rho u)^{n+1},\ (\rho v)^{n+1}\right];$$

$$11.\quad (\rho u)^{n+3/2} = (\rho u)^{n+1/2} + \Delta t\frac{\delta(\rho u)^n}{\delta t};$$

$$12.\quad (\rho v)^{n+3/2} = (\rho v)^{n+1/2} + \Delta t\frac{\delta(\rho v)^n}{\delta t}. \qquad (5.111)$$

Аналогичная схема была рассмотрена Рождественским и Яненко [1968]. Нагель пользовался следующими условиями устойчивости:

$$\Delta t < 1.5\,\Delta x/a, \qquad (5.112а)$$

$$\Delta t < \Delta x/\sqrt{2\,|u|}, \qquad (5.112б)$$

$$\Delta t < \Delta x^2\,\mathrm{Re}/2, \qquad (5.112в)$$

$$\Delta t < \gamma\,\Delta x/[(\gamma-1)\,|u|]. \qquad (5.112г)$$

Хотя Нагель проверял эти условия в экспериментальных расчетах течения в пограничном слое, было бы разумно заменить

первые два условия обычным условием по числу Куранта, а в условии (5.112в) коэффициент $^1/_2$ заменить на $^1/_4$ для более общего класса течений.

Сакураи и Ивасаки [1970] применили явную схему метода чередующихся направлений Саульева (см. разд. 3.1.17) для представления диффузионных членов при расчете одномерных задач, однако влияние конвективных членов на устойчивость при этом осталось невыясненным.

Заметим, что многие исследователи гиперзвуковых течений вязкого газа предпочитают неконсервативную форму уравнения энергии (с переменной $T$ вместо переменной $E_s$) для того, чтобы при вычислении температуры и затем давления избежать появления разности двух больших чисел (полная энергия минус кинематическая энергия).

## 5.7. Граничные условия для течений сжимаемой жидкости

Замечания, сделанные в разд. 3.3.1 по поводу особой важности численных граничных условий, относятся равным образом и к течениям сжимаемой жидкости. Рассуждения здесь будут основываться на некоторых основных положениях, полученных в разд. 3.3 для течений несжимаемой жидкости, однако некоторые аспекты будут присущи лишь течениям сжимаемой жидкости. Наиболее сложной границей является, как это ни странно, простая стенка.

### 5.7.1. Стенка с условием скольжения

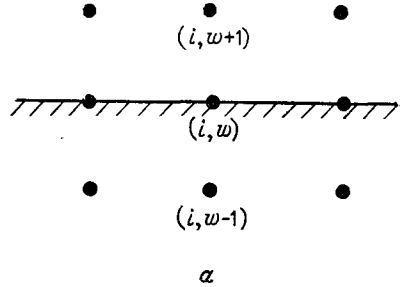
Сначала рассмотрим уравнения течения невязкого газа и соответствующие им условия скольжения [1]. Граничные условия на стенке для сплошной среды требуют, чтобы поток был параллелен стенке, т. е. чтобы нормальная скорость здесь равнялась нулю. Другие переменные не задаются в качестве граничных условий. Например, было бы неправильным задавать $T_w$ в случае уравнений течения невязкого газа [2].

---

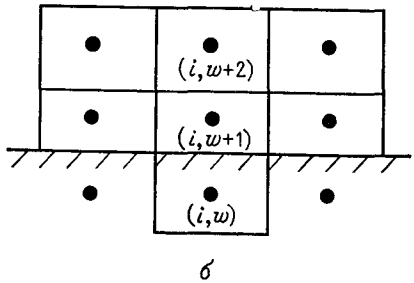
[1]) Условия скольжения соответствуют отсутствию вязких членов в дифференциальных уравнениях, описывающих течения сплошной среды. Этот же термин употребляется также в случае вязких течений, когда поток вблизи стенки перестает удовлетворять гипотезе о сплошности среды. Уайтхед и Дэвис [1969] разработали аналитическую формулировку граничных условий для подобных течений со скольжением, включая перенос массы (вдув) через стенку.

[2]) Нельзя также задавать $\partial T/\partial y$. Как известно, предположение об адиабатичности стенки согласуется с уравнениями течения невязкого газа. Однако стенка адиабатична и поток тепла $Q_w = k(\partial T/\partial y)|_w = 0$ не потому, что $\partial T/\partial y = 0$, а потому, что $k = 0$.

Было бы полезно моделировать условия скольжения на стенке при помощи уравнений вязкого течения. Это соответствует учету вклада от вязких членов в ячейках, отстоящих от стенки более чем на один ряд, и предположению, что толщина пограничного слоя меньше $\Delta y$. Представляется, что наложение дополнительных условий о равенстве нулю градиентов $U$ и $T$ было бы достаточно для определения решения и это решение моделировало бы в некотором смысле стенку со скольжением, однако в настоящее время справедливость подобного подхода не ясна (см. обсуждение данного вопроса в разд. 3.3.2).




*а*




*б*

Рис. 5.2. Стенки в различных расчетных сетках. *а* — стенка в расчетной сетке первого типа, *б* — стенка в расчетной сетке второго типа.

### 5.7.1. а. Стенка со скольжением в расчетной сетке первого типа

В расчетной сетке первого типа узловые точки лежат на поверхности стенки, как это изображено на рис. 5.2, *а*. Для конкретности будем предполагать, что стенка расположена на прямой $y = \text{const}$ так же, как граница В 2 на рис. 3.22.

Наиболее распространенным способом постановки граничных условий является так называемый способ отражения. Здесь вводится дополнительный ряд фиктивных точек для $j = w - 1$, расположенный внутри стенки, как это показано на рис. 5.2, *а*. Затем в этих точках рассматриваются фиктивные значения переменных при помощи антисимметричного отражения $v$ и симметричного отражения других переменных, а именно

$$v_{w-1} = -v_{w+1}; \quad f_{w-1} = +f_{w+1}, \quad f = \rho,\ u,\ E_s \text{ или } T. \tag{5.113}$$

Дополнительно налагается условие $v_w = 0$ при $j = w$. Новые зависящие от времени значения $f_w$ вычисляются при помощи стандартных конечно-разностных аппроксимаций, используемых во внутренних узловых точках $(i, w)$.

Выражения (5.113) являются условиями *симметрии* и, очевидно, справедливы для линии симметрии В 1 на рис. 3.22.

Однако в общем случае стенка *не является* линией симметрии. Моретти [1968а, 1968б] настаивал на том, что граничные условия с отражением ошибочны. В его интерпретации эти условия вводят дополнительные граничные условия вида $\partial f/\partial y = 0$ для $f = \rho$, $u$ и $E_s$, фактически переопределяющие задачу. Однако значения в узловых точках $w-1$ можно интерпретировать как чисто фиктивные, введенные лишь для удобства, чтобы в граничных точках $w$ использовать стандартные аппроксимации, применяемые во внутренних точках. Для ответа на вопрос о том, правильны ли условия отражения (5.113) и каков характер возникающих при этом ошибок, надо проанализировать их с учетом используемых здесь уравнений.

Во-первых, условие $v_w = 0$, конечно, правильно. Далее, рассмотрим для невязкого газа неконсервативную форму уравнения количества движения (4.3) в проекции на ось $y$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{5.114}$$

Так как $v(x)|_w = 0$, то $\partial v/\partial x|_w = 0$ вдоль прямолинейной стенки, и уравнение (5.144) сводится к равенству

$$\partial P/\partial y|_w = 0. \tag{5.115}$$

Способ отражения (5.113) дает $P_{w-1} = P_{w+1}$ и, следовательно, $\delta P/\delta y|_w = 0$, что точно согласуется с уравнениями течения невязкого газа.

Возьмем далее уравнение количества движения в проекции на ось $x$. Из неконсервативной формы уравнения (4.2) для невязкого газа будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}. \tag{5.116}$$

На стенке $v_w = 0$ и, следовательно, второй член уравнения (5.116) должен быть равен нулю. Рассмотрим результат применения способа отражения (5.113) к соответствующему члену консервативного уравнения (4.55), а именно к члену $\partial(\rho uv)/\partial y$. На стенке

$$\left.\frac{\delta(\rho uv)}{\delta y}\right|_w = \frac{(\rho uv)_{w+1} - (\rho uv)_{w-1}}{2\Delta y} = \frac{\rho_{w+1}u_{w+1}v_{w+1} - \rho_{w+1}u_{w+1}(-v_{w+1})}{2\Delta y} =$$

$$= \frac{(\rho uv)_{w+1}}{\Delta y} \neq 0 \quad \text{в общем случае.} \tag{5.117а}$$

Величина $v_{w+1} \to 0$ при уменьшении $\Delta y$ и может показаться, что применение способа отражения согласуется с уравнением

(5.116), однако более тщательное рассмотрение показывает, что

$$\left.\frac{\delta(\rho uv)}{\delta y}\right|_w = \frac{(\rho uv)_{w+1}}{\Delta y} = \frac{(\rho u)_{w+1}\left[v_w + \partial v/\partial y\,|_w \Delta y + O(\Delta y^2)\right]}{\Delta y} =$$

$$= (\rho u)_{w+1}\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_w + O(\Delta y). \quad (5.117б)$$

На стенке со скольжением $\partial v/\partial y|_w \neq 0$, если только стенка не является линией симметрии. Таким образом, из уравнения (5.117б) следует, что возникающая здесь ошибка сохраняется и при $\Delta y \to 0$, и поэтому способ отражения, применяемый на стенке и на расчетной сетке первого типа, математически не согласуется с исходной системой дифференциальных уравнений в частных производных. Сравнительные расчеты, проведенные Моретти [1968а, 1968б] показали, что, как и следовало ожидать, применение более грубой сетки ведет к большему росту граничной ошибки.

Решение системы конечно-разностных уравнений с ошибочными граничными условиями может давать приближение к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных в некотором полезном смысле, однако в математическом смысле в этом случае аппроксимация отсутствует: при $\Delta x \to 0$ решение системы конечно-разностных уравнений не стремится к решению исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных. Любопытно, что математики не обращали внимания на применение таких ошибочных граничных условий. Только сравнительно недавно появились статьи о глобальном влиянии подобных переопределенных граничных условий, см. Крейс и Лундквист [1968] и Ошер [1969б]. Удобный способ отражения можно до некоторой степени спасти, применяя его к уравнениям неразрывности и энергии и принимая специальные меры для обращения в нуль члена $\partial(\rho uv)/\partial y$ в уравнении количества движения в проекции на ось $x$. Это даст непротиворечивые граничные условия на прямой стенке.

Важная и интересная проблема аппроксимации граничных условий возникает при использовании способа отражения на криволинейной стенке, которая представляется ломаной из прямолинейных отрезков длины $\Delta s$. Способ отражения снова дает $\delta P/\delta n = 0$, однако правильное значение градиента давления на стенке для стационарного потока со скольжением должно быть

$$\partial P/\partial n\,|_w = (u^2 + v^2)/r, \quad (5.118)$$

где $r$ — местный радиус кривизны. Таким образом, хотя конечно-разностные уравнения во внутренних точках аппроксимируют исходные уравнения в частных производных и ломаная стенка аппроксимирует криволинейную стенку при $\Delta x \to 0$, граничные

условия, полученные по способу отражения, не аппроксимируют точных граничных условий и, следовательно, аппроксимация решения исходных уравнений в целом не будет иметь места. Результаты Катлера и Ломекса [1971] показывают увеличение расхождений экспериментальных и расчетных данных при увеличении кривизны стенки, очевидно, из-за того, что на стенке берется нулевой градиент давления вместо значения, требуемого формулой (5.118).

Кенцер [1970а] определял $P_w$ по выражению (5.118) (в котором легко узнать равенство центробежной и центростремительной сил), представляя его односторонними конечными разностями. С учетом условия постоянства энтропии $S$ (в невязком газе) вдоль линии тока, совпадающей со стенкой, оно дает возможность найти плотность $\rho_w = \rho(P, x)$ (может быть, этот способ можно применить и к случаю падения ударной волны на стенку, когда энтропия вдоль стенки не постоянна).

Кенцер дополнительно рассматривал характеристическое соотношение, как это ранее делали Моретти [1968а] и Бастианон [1969] (см. также Кокли и Портер [1969]). Хотя такой способ правилен, он не приспособлен к расчету течений вязкого газа, не является консервативным [1]) и довольно сложен в применении.

Другой способ заключается в представлении односторонними разностями членов с потоком в направлении $y$ во всех уравнениях. Например, для уравнения непрерывности будем иметь

$$\left.\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right|_w = \frac{(\rho v)_{w+1} - (\rho v)_w}{\Delta y} + O(\Delta y) = \frac{(\rho v)_{w+1}}{\Delta y} + O(\Delta y). \qquad (5.119)$$

Если $v_{w+1} > 0$, то, согласно формуле (5.119), потоковые величины в направлении $y$ на стенке представляются конечными разностями против потока. Однако при $v_{w+1} < 0$ будем иметь конечную разность *по потоку*, что физически абсурдно и приводит к неустойчивости (см. разд. 3.1.8). Хотя при помощи этого способа и были получены некоторые сходящиеся решения, в общем случае его рекомендовать нельзя.

Лапидус [1967] разработал конечно-разностную формулировку граничных условий в узловых точках на стенке, дающую конечно-разностную задачу, аппроксимирующую исходную. Однако его способ не является строго консервативным (хотя и основывается на концепции консервативности) из-за вынужденной перестройки и перекрытия границ пристеночных ячеек, что не согласуется (в обычном смысле слова) с подходом, применяемым во внутренних узловых точках. Кроме того, этот способ также довольно сложен.

[1]) Ни Моретти, ни Кенцер не применяли консервативных уравнений и, таким образом, совсем не рассматривали их в своих работах.

Богачевский и Костофф [1971], а также Эмери и Ашёрст [1971] в случае течения невязкого газа сформулировали дискретные граничные условия на стенке при наличии вдува, используя расчетную сетку первого типа.

В общем случае для стенки со скольжением мы рекомендуем расчетную сетку второго типа.

### 5.7.1. б. Стенка со скольжением в расчетной сетке второго типа

Граничные условия на стенке со скольжением проще поставить на расчетной сетке второго типа, которая изображена на рис. 5.2, *б*. Здесь со стенкой совмещаются не узловые точки сетки (центры ячеек), а *стороны* ячеек. Поэтому ближайшая к стенке узловая точка $w+1$ удалена от стенки на расстояние $\Delta y/2$. Внутри стенки можно ввести фиктивную узловую точку $w$.

Джентри, Мартин и Дали [1966] рассмотрели в этой расчетной сетке второго типа граничные условия на стенке со скольжением. Единственным условием, которое здесь необходимо соблюсти, является условие равенства нулю потоков через стенку всех переносимых газодинамических функций. Это условие можно поставить, либо записав специальные уравнения, выражающие равенство этих потоков нулю для пристеночных ячеек с центром в точке $w+1$, либо применив к некоторым из этих членов способ отражения. Введя фиктивную ячейку с центром в точке $w$ внутри стенки, положим

$$v_w = -v_{w+1}, \tag{5.120а}$$

$$f_w = +f_{w+1}, \quad \text{где } f = \rho,\ u,\ E_s \text{ или } T. \tag{5.120б}$$

Применение способа отражения в расчетных сетках первого и второго типов дает совершенно различные результаты [1]). При использовании в точке $w+1$ аппроксимации второго порядка, принятой для стандартных внутренних точек, потоки всех величин $f$ на стенке $(w+1/2)$ обращаются в нуль. Это легко показать при помощи метода контрольного объема, примененного для уравнений с центральными разностями (см. разд. 3.1.1). Значения потоков величин на стенке $(vf)_{w+1/2}$ определяются следующим образом:

$$(vf)_{w+1/2} = 1/2\left[(vf)_w + (vf)_{w+1}\right] = 1/2\left[-(vf)_{w+1} + (vf)_{w+1}\right] = 0. \tag{5.121}$$

Здесь значения $f$ на стенке при $w+1/2$ отвечают линейной интерполяции; однако необходимо подчеркнуть, что линейная интерполяция используется не для простоты, а потому, что

[1]) Моретти [1969а, 1969б] рассматривал способ отражения только для сеток первого типа.

только она согласуется со вторым порядком аппроксимации первых производных во внутренних точках.

*Упражнение.* Показать, что в способе отражения на расчетной сетке второго типа масса сохраняется и что он согласуется с выводом, основанным на рассмотрении баланса массы вблизи поверхности стенки по методу контрольного объема.

Способ отражения дает правильное значение $\delta P/\delta y|_w = 0$ на прямой стенке с условием скольжения. Как отмечалось выше, это не справедливо для искривленной стенки (см. равенство (5.118)). Кроме того, этот способ дает на этот раз ошибку в величине потока по нормали к стенке составляющей количества движения в направлении $y$

$$[v(\rho v)]_{\text{ст}} = {}^1/_2[(\rho v^2)_{w+1} + (\rho v^2)_w] = (\rho v^2)_{w+1} \neq 0. \quad (5.122)$$

Однако в данном случае эта ошибка не столь серьезна, и способ отражения дает здесь математически согласованную аппроксимацию. Действительно,

$$\frac{\delta}{\delta y}(\rho v^2)_{w+1} = \frac{\rho v^2|_{w+3/2} - \rho v^2|_{\text{ст}}}{\Delta y} = \frac{\rho v^2|_{w+3/2} - \rho v^2|_{w+1}}{\Delta y} =$$

$$= \frac{\rho v^2|_{w+3/2} - \rho_{w+1}\left[v_{\text{ст}} + (\Delta y/2)\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{\text{ст}} + O(\Delta y^2)\right]^2}{\Delta y} =$$

$$= \frac{\rho v^2|_{w+3/2} - \rho_{w+1}(\Delta y/2)^2\left(\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{\text{ст}}\right)^2 + O(\Delta y^3)}{\Delta y} =$$

$$= \frac{\rho v^2|_{w+3/2}}{\Delta y} - \left\{\rho_{w+1}\left(\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{\text{ст}}\right)^2 \frac{\Delta y}{4} + O(\Delta y^2)\right\}. \quad (5.123)$$

В последней части равенства в фигурных скобках стоит ошибка в величине потока по нормали к стенке составляющей количества движения в направлении $y$. Она является просто ошибкой аппроксимации и стремится к нулю при $\Delta y \to 0$. Таким образом, способ отражения для стенки со скольжением в расчетной сетке второго типа обеспечивает математически согласованную аппроксимацию граничных условий.

Однако эту ошибку аппроксимации легко устранить, если при записи уравнения для количества движения в направлении $y$ в примыкающих к стенке ячейках $w+1$ соответствующий член с потоком просто положить равным нулю. Аналогично, определение градиента давления на искривленной стенке можно подправить или в соответствии с равенством (5.118), или за счет использования односторонних конечных разностей для $\delta P/\delta y$; при этом имеет место первый порядок точности.

Покажем, что точки внутри стенки являются на самом деле фиктивными. Соотношения

$$v_w = -v_{w+1}, \tag{5.124}$$

$$f_w = +f_{w+1} \tag{5.125}$$

обеспечивают нулевые потоки величин $f$ по нормали через стенку при $w + {}^1/_2$. Однако если за $f$ принимать одновременно и $\rho$, и $\rho v$, то возникает алгебраическое противоречие. Поэтому для получения нулевых потоков через стенку необходимо брать соотношение (5.125) для всех величин $f = \rho$, $\rho u$, $\rho v$, $E_s + P$, игнорируя алгебраические связи между ними.

Следует подчеркнуть, что способ отражения должен быть модифицирован для применения к любой искривленной стенке путем использования либо равенства (5.118), либо односторонних конечных разностей для $\delta P/\delta y|_w$.

Таким образом, удобный способ отражения после небольшой модификации может давать граничные условия на стенке со скольжением на расчетной сетке второго типа.

Эвристические граничные условия на молекулярном уровне для течения около стенки со скольжением на расчетной сетке второго типа разработал Батлер [1967] с использованием уравнений сплошной среды на некотором расстоянии от стенки.

## 5.7.2. Стенка с прилипанием

В постановке граничных условий на стенках с прилипанием в течениях вязкого газа к настоящему времени нет полной ясности. Уравнение неразрывности здесь не изменяется по сравнению со случаем течения невязкого газа, и плотность лучше рассчитывается в расчетной сетке второго типа, однако другие переменные точнее аппроксимируются в расчетной сетке первого типа. Поэтому невольно напрашивается применение гибридной сетки, и оно, действительно, оказывается успешным. Однако несколько более простым выходом является расчет значений $\rho$ около стенки так, как если бы использовалась расчетная сетка второго типа, но найденные значения $\rho$ приписываются узлам расчетной сетки первого типа. Хотя в ближайшем будущем могут появиться более эффективные способы, однако представляется, что в настоящее время последний способ является наилучшим.

Для того чтобы показать преимущества предлагаемого способа, необходимо рассмотреть более или менее подробно и другие возможности.

### 5.7.2.а. Стенка с прилипанием в расчетной сетке первого типа

Для течения вязкого газа в расчетной сетке первого типа три из четырех необходимых граничных условий поставить легко. Составляющие скорости просто равны нулю,

$$u_w = 0, \quad v_w = 0. \tag{5.126}$$

В случае заданной температуры стенки $T_{ст}$

$$T_w = T_{ст}. \tag{5.127}$$

В случае же заданного на стенке числа Нуссельта (безразмерного потока тепла) мы имеем [1])

$$\mathrm{Nu}_w = \frac{T_{w+1} - T_w}{\Delta y}, \tag{5.128}$$

или

$$T_w = T_{w+1} - \mathrm{Nu}_w \Delta y. \tag{5.129}$$

Если при рассмотрении во внутренних точках $w+1$ членов второго порядка, описывающих теплопроводность, надо обеспечить адиабатичность в вычислительном смысле (см. разд. 3.6.4), то следует брать формулу (5.128).

Трудность заключается в формулировке граничного условия для плотности. Здесь, как и в случае невязкого газа, уравнение неразрывности можно аппроксимировать при помощи односторонних конечных разностей. Если величина $v_{w+1}$ достаточно мала и если в схеме имеется *достаточное искусственное затухание*, то можно получить устойчивое и сходящееся решение. Так, Скоглунд и Коул [1966] решили задачу о взаимодействии ударной волны с пограничным слоем, используя схему Русанова (разд 5.4.3) [2]) и односторонние конечные разности для $\partial\rho/\partial t|_w$. Однако когда интенсивность скачка была достаточна для того, чтобы вызвать отрыв пограничного слоя, схема переставала работать. Этот факт подтверждается также работами Роуча и Мюллера [1970] и Аллена и Чена [1970], посвященными расчету обтекания обратного уступа. Причину отказа схемы легко объяснить.

---

[1]) Заметим, что число Нуссельта не содержит никакой ошибки аппроксимации и задается как параметр задачи наподобие чисел M или Re (см. разд. 3.6.4). Если на стенке задан ненулевой поток тепла, то необходимо обратить внимание на правильное определение числа Нуссельта на стенке; если размерный коэффициент теплопроводности $\bar{k}$ не является постоянным, то при расчете числа Нуссельта на стенке надо учитывать, что при нормировании в качестве характерной величины берется значение $\bar{k}$ в невозмущенном потоке.

[2]) При применении односторонних конечных разностей они сохраняли члены с явной искусственной диффузией. С другой стороны, при расчете течения с условием скольжения на стенке Кесслер [1968] использовал способ отражения и положил этот член равным нулю.

Рассмотрим картину линий тока отрывного течения, представленную на рис. 5.3. При любом сколь угодно малом $\Delta y$ ясно, что $v_{i,\,w+1} > 0$. Из условий прилипания для уравнения неразрывности в точке $(i, w)$ имеем

$$\left.\frac{\delta\rho}{\delta t}\right|_{i,\,w} = \begin{cases} -\dfrac{\delta(\rho u)}{\delta x} - \dfrac{\delta(\rho v)}{\delta y}, & \text{(5.130а)} \\ -\dfrac{(\rho v)_{w+1}}{\Delta y}. & \text{(5.130б)} \end{cases}$$

Если стационарное состояние когда-нибудь будет достигнуто, то $\delta\rho/\delta t = 0$, а из уравнения (5.130б) следует, что $v_{w+1} = 0$. Это согласуется с граничными условиями прилипания на стенке,

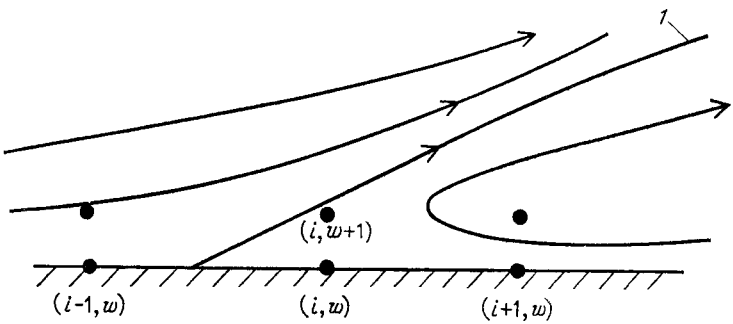



Рис. 5.3. Область отрыва в расчетной сетке первого типа. *1* — линия тока, ограничивающая область отрыва.

следующими из дифференциального уравнения неразрывности и имеющими вид $\partial v/\partial y|_w = 0$ и $v_w = 0$. Действительно, с точностью первого порядка из условия $\partial v/\partial y|_w = 0$ следует, что $v_{w+1} = 0$. Однако из рис. 5.3 интуитивно ясно, что подобное условие не может быть достигнуто при расчете; в результате решение расходится [1]). Ситуация еще более усложняется при расчете течения вдоль уступа (граница В 5 на рис. 3.22).

Основной причиной неудач схемы с односторонними разностями вблизи точки отрыва потока является отсутствие переноса массы вдоль стенки, поскольку всегда $\delta(\rho u)/\delta x|_w = 0$. В то же время применение метода контрольного объема показывает, что ячейка с центром $(i, w)$ на рис. 5.3 может терять или приобретать массу только через границу $w + {}^1/_2$. Эту ситуацию можно

[1]) В подобной ситуации сходимость может быть достигнута за счет введения члена с искусственной диффузией массы, как в схеме Русанова (разд. 5.4.3). Тогда конвективный поток массы, уносимый из узловой точки на стенке, при отрыве может быть сбалансирован притоком ее в эту узловую точку за счет искусственной диффузии. Но точность такого способа и даже его аппроксимирующие свойства сомнительны.

изменить, переопределив поток массы, параллельный стенке, для прилежащих к стенке ячеек. В обозначениях, указанных на

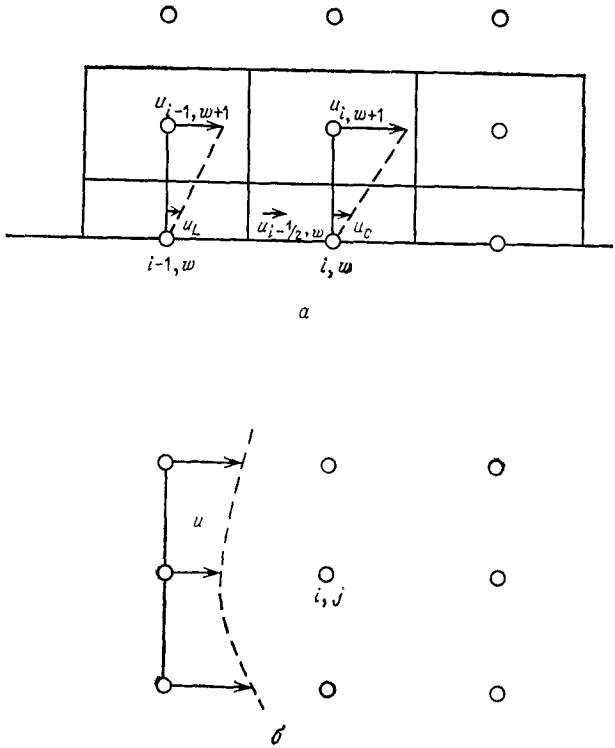



Рис. 5.4. Возможная интерпретация скоростей у стенки с условием прилипания в расчетной сетке первого типа. *а* — стенка, *б* — внутренняя точка.

рис. 5.4, *а*, получим (с применением центральных разностей) следующее значение потока массы на границе между ячейками:

$$(\rho u)_{i-1/2,\,w} = \rho_{i-1/2,\,w} u_{i-1/2,\,w} = {}^1/_2 (\rho_{i,\,w} + \rho_{i-1,\,w})\, u_{i-1/2,\,w}, \qquad (5.131)$$

где

$$u_{i-1/2,\,w} = {}^1/_2 (u_L + u_C) = {}^1/_2 ({}^1/_4 u_{i-1,\,w+1} + {}^1/_4 u_{i,\,w+1}). \qquad (5.132)$$

Аналогичная формула имеет место и для $u_{i+1/2,\,w}$. Этот способ является аппроксимирующим, устойчивым и консервативным даже в случае отрывных течений (Роуч и Мюллер [1968, 1970], Скоглунд и Гей [1969]). Однако вычисления во внутренних и в пристеночных ячейках проводятся здесь не единообразно. Такой расчет потоков в пристеночных ячейках был бы согласован

с расчетом потоков во внутренних ячейках (рис. 5.4, *б*) при применении следующей формулы:

$$u_L = {}^1/_2\{{}^1/_4(u_{i-1,\,j+1} + 2u_{i-1,\,j} + u_{i-1,\,j-1}) + \\ + {}^1/_4(u_{i,\,j+1} + 2u_{i,\,j} + u_{i,\,j-1})\}. \quad (5.133)$$

Но подобный способ расчета для внутренних точек приводит к тому, что поле скоростей получается неточным и сглаженным.

Устойчивые решения дают другие аппроксимации. В частности, широкое распространение получила аппроксимация условия $\partial P/\partial y|_w = 0$ равенством

$$P_w = P_{w+1}. \quad (5.134)$$

Тогда $\rho_w$ находится через $T_w$ из уравнения состояния (4.51). Может показаться, что эта аппроксимация основана на приближении теории пограничного слоя, где поперек пограничного слоя принимается $\partial P/\partial y \approx 0$ (см. Шлихтинг [1968]). В действительности же это гораздо менее жесткое условие, так как постоянство $P$ предполагается не поперек всего пограничного слоя, а только поперек прилегающего к стенке подслоя толщиной $\Delta y$. Этот способ дает возможность получать устойчивое численное решение как для течения в безотрывном пограничном слое (Курцрок и Мейтс [1966]), так и для течения с отрывом потока, вызванным взаимодействием ударной волны с пограничным слоем (Мак-Кормак [1971]). Впоследствии Мак-Кормак повторил свои расчеты при более точных граничных условиях и фактически не обнаружил различия в результатах (личное сообщение).

Хотя этот способ привлекает своей простотой и в некоторых случаях дает достаточную точность, в общем случае его рекомендовать нельзя. Во-первых, он не консервативен. Во-вторых — и это более существенно — он дает аппроксимацию решения исходных дифференциальных уравнений в частных производных в некотором смысле, но не аппроксимацию в строго математическом смысле, т. е. решение конечно-разностных уравнений при $\Delta x \to 0$ не стремится к решению исходных дифференциальных уравнений с точными граничными условиями. Более того, при взаимодействии сильной ударной волны с пограничным слоем, при малых числах Рейнольдса, при возникновении отрыва и при наличии сильно искривленных стенок может теряться всякое соответствие между решением конечно-разностных уравнений и исходных уравнений в частных производных. Нет необходимости применять этот способ, поскольку имеются другие, хотя и несколько более сложные, способы, обеспечивающие аппроксимацию задачи.

Очевидно, что такие искусственные приемы, как произвольная экстраполяция значений $\rho$ или $P$ на стенку, не обоснованные физически даже в качестве приближенного приема, не обеспечивают консервативность и аппроксимацию. Кроме того, в общем случае они неустойчивы при расчете отрывных течений.

Мы рекомендуем проводить расчет $\rho$ около стенки в расчетной сетке *второго* типа, а затем значения $\rho$, полученные на стенке, использовать для нахождения градиента давления около стенки в расчетной сетке *первого* типа. Полностью эта методика будет изложена в разд. 5.7.2.в.

### 5.7.2. б. Стенка с прилипанием в расчетной сетке второго типа

Условия прилипания на стенке для скорости могут быть поставлены и в расчетной сетке второго типа, но с ухудшением точности. Практически удобно частично использовать способ отражения. Непосредственное применение способа отражения приводит здесь к серьезным ошибкам, однако из способа отражения мы будем брать лишь методику, которая позволит удобно ставить некоторые из точных граничных условий; другие же граничные условия будут ставиться явно, не соответствуя способу отражения. Таким образом, способ отражения здесь будет играть роль лишь некоторого приема программирования, и мы согласны с Моретти [1968а, 1968б] в том, что этот способ не заслуживает названия «принцип».

Определим сначала по способу отражения функции в фиктивных точках внутри границы и исследуем влияние такого определения на члены уравнений сохранения. Это исследование покажет, для каких членов способ отражения дает неправильный результат и, следовательно, какие члены должны быть рассмотрены отдельно.

Согласно способу отражения для стенки с прилипанием, показанной на рис. 5.2, *б* при $w + {}^1/_2$, имеем

$$\rho_w = \rho_{w+1}, \tag{5.135}$$

$$u_w = u_{w+1}, \tag{5.136а}$$

$$v_w = -v_{w+1}. \tag{5.136б}$$

Линейная интерполяция по значениям (5.136) дает $u_{ст} = 0$ и $v_{ст} = 0$.

Если задана температура стенки $T_{ст}$, то в соответствии с принятой линейной интерполяцией имеем

$$T_{ст} = {}^1/_2 (T_{w+1} + T_w), \tag{5.137}$$

откуда

$$T_w = 2T_{ст} - T_{w+1}. \tag{5.138}$$

Если же задано число Нуссельта

$$\mathrm{Nu} = (T_{w+1} - T_w)/\Delta y, \tag{5.139}$$

то получим

$$T_w = T_{w+1} - \Delta y \cdot \mathrm{Nu}. \tag{5.140}$$

Комбинация соотношений (5.135) и (5.136б) дает нулевой поток массы в направлении $y$ при $w + {}^1/_2$ для случая стенки со скольжением. Но в случае стенки с прилипанием потоки в направлении $y$ составляющих количества движения в направлении $x$ и в направлении $y$ будут получаться с ошибкой. Следуя выводу выражения (5.123), получаем

$$\frac{\delta}{\delta y}(\rho uv)_{w+1} = \frac{\rho uv\,|_{w+3/2}}{\Delta y} - \left[\rho_{w+1}\left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)^2\Big|_{\text{ст}}\frac{\Delta y}{4} + O(\Delta y^2)\right], \tag{5.141}$$

что опять является аппроксимацией точных граничных условий, так как член в квадратных скобках стремится к нулю при $\Delta y \to 0$. Ошибка аппроксимации для составляющей количества движения в направлении $y$ может даже быть меньше; действительно, в стационарном случае уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \tag{5.142а}$$

для стенки с прилипанием сводится к условию

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\Big|_{\text{ст}} = 0. \tag{5.142б}$$

Далее,

$$\rho\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{\text{ст}} + v\frac{\partial \rho}{\partial y}\Big|_{\text{ст}} = 0, \tag{5.143}$$

или (поскольку $v_{\text{ст}} = 0$)

$$\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{\text{ст}} = 0. \tag{5.144}$$

Таким образом, ошибка аппроксимации первого порядка в выражении (5.123) в стационарном случае будет равна нулю. Можно показать, что ошибка аппроксимации в стационарном случае имеет вид

$$\frac{\delta}{\delta y}(\rho v^2)_{w+1} = \frac{\rho v^2\,|_{w+3/2}}{\Delta y} - \left\{\rho_{w+1}\frac{\Delta y^3}{64}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^2\Big|_{\text{ст}} + O(\Delta y^5)\right\}, \tag{5.145}$$

где в фигурных скобках стоит ошибка в величине потока по нормали к стенке составляющей количества движения в направлении $y$.

Хотя ошибки в определении потоков количества движения, даваемые выражениями (5.141) и (5.123) или (5.145), являются

приемлемыми, их можно избежать. Можно рекомендовать изменить выражения в точке $w+1$, явно положив соответствующие потоки равными нулю. Как показывает следующее ниже упражнение, аналогичное положение справедливо и для уравнения энергии.

*Упражнение.* Рассматривая уравнение энергии, показать, что способ отражения дает правильное нулевое значение потока величины $E_s + P$ в направлении $y$ на стенке только в частном случае адиабатической стенки ($\mathrm{Nu} = 0$). (Для более общего вида температурных условий на стенке этот поток следует явно полагать нулевым.)

Применение стандартных конечных разностей с отраженными значениями функций не дает также правильной величины градиента давления $\partial P/\partial y|_{w+1}$. В случае расчетной сетки второго типа рекомендуется обратиться к односторонним конечным разностям для $\partial P/\partial y$, что, к сожалению, дает аппроксимацию градиента давления лишь первого порядка:

$$\left.\frac{\delta P}{\delta y}\right|_{w+1} = \frac{P_{w+2} - P_{w+1}}{\Delta y} + O(\Delta y). \qquad (5.146)$$

Была показана устойчивость этого способа даже при отрывных течениях (Аллен [1968], Аллен и Чен [1970], Роуч и Мюллер [1968, 1970]). Аллен [1968], Скоглунд и Гей [1968] предложили рассчитывать градиент давления по уравнению составляющей количества движения в направлении $y$, записывая его через односторонние конечные разности; однако не представляется, что этот способ быстро ведет к цели.

Аллен [1968] применил улучшенный способ расчета конвективных потоков около стенки с прилипанием в расчетной сетке второго типа. Он обнаружил, что в задаче обтекания обратного уступа, показанного на рис. 3.22, на верхней части уступа (граница В 5) иногда могут возникать отрицательные значения плотности. Эта тенденция усиливается при уменьшении числа Рейнольдса и при измельчении сетки[1]). Аллен объясняет это неточностью расчета по линейной интерполяции потока массы в примыкающей к стенке ячейке (ячейка $w + {}^3/_2$ на рис. 5.2, *б*). Величина $(\rho v)|_{\text{ст}} = 0$; кроме того, в стационарном случае из уравнения неразрывности следует, что $\partial(\rho v)/\partial y|_{\text{ст}} = 0$. Отсюда видно, что вблизи стенки $\rho v$ изменяется по квадратичному, а не по линейному закону. Поэтому Аллен ввел квадратичную интерполяцию для $\rho v$, выбирая не значения в трех узлах сетки, а значение в двух узлах сетки $w+1$, $w+2$ и известное значение $\rho v$ на стенке $w + {}^1/_2$, т. е. положил

$$(\rho v)_{w+3/2} = {}^1/_3\left[(\rho v)_{w+2} + 3(\rho v)_{w+1} - (\rho v)_{w+1/2}\right], \qquad (5.147)$$

[1]) Роуч и Мюллер [1970] не обнаружили отрицательных значений плотности, возможно, из-за грубости расчетной сетки.

где $(\rho v)_{w+1/2} = 0$ на стенке с прилипанием. Аналогичные формулы применялись и для потоков величин $\rho uv$, $\rho v^2$ и $v(E_s + P)$. Консервативность сохранялась, поскольку для расчета в обеих ячейках $w + 1$ и $w + 2$ на границе $w + {}^3/_2$ брался поток (5.147). Будучи несколько сложнее для программирования, этот способ обеспечивает отсутствие отрицательных значений плотности на уступе.

Способ отражения на расчетной сетке второго типа привлекателен прежде всего удобством аппроксимации вязких членов, приводящем, однако, к понижению порядка точности. При помощи способа отражения требуемые значения $\rho$, $u$, $v$ и $T$ на стенке устанавливаются автоматически, отвечая линейной интерполяции. Хотя на первый взгляд этот подход представляется разумным, в действительности он понижает порядок аппроксимации членов со вторыми производными (описывающих вязкие напряжения и теплопроводность) до первого и может быть причиной ошибок, связанных с нарушением ограниченности решения (см. обсуждение способов определения величины вихря на стенке в разд. 3.3.2). Следовательно, применение расчетной сетки второго типа хотя и удобно, но приводит к ухудшению точности и поэтому в общем случае не может быть рекомендовано.

Необходимо отметить, однако, что Аллен и Чен (Аллен [1968], Аллен и Чен [1970]) модифицировали расчет вязких членов в первом от стенки узле расчетной сетки второго типа. Они определяли величины производных типа $\partial U/\partial y|_{\text{ст}}$, входящие в вязкие члены в точке $w + 1$, при помощи экстраполяции второго порядка по внутренним точкам:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{\text{ст}} = \frac{-8U_{\text{ст}} + 9U_{w+1} - U_{w+2}}{3\,\Delta y} + O(\Delta y^2). \qquad (5.148)$$

Если $U = u$ или $U = v$, то $U_{\text{ст}} = 0$ и формула (5.148) упрощается. Проведенные Алленом [1968] расчеты для уравнения Бюргерса показали, что при больших числах Рейнольдса здесь формула первого порядка несколько предпочтительнее. По мнению автора, в настоящее время точность этого способа для многомерных задач полностью не выяснена.

### 5.7.2. в. Расчет плотности на гибридной сетке

Ясно, что для стенок с прилипанием граничные условия для величин $u$, $v$, $T$ удобнее и точнее ставятся на расчетной сетке первого типа, узлы которой лежат на стенке. Плотность же, наоборот, удобнее и точнее вычисляется на расчетной сетке второго типа, узлы которой расположены на расстоянии $\Delta y/2$ от стенки. Эти соображения подсказывают введение гибридной сетки с шахматным расположением узлов.

Геометрия гибридной сетки показана на рис. 5.5, *а*. Переменные $u$, $v$, $T$ определены в узлах сетки, обозначенных темными кружками, а плотность $\rho$ — в узлах, обозначенных крестиками. (Эта сетка отличается от сетки, используемой в методе частиц в ячейках в разд. 5.5.3, где в одних узлах определены плотность и энергия, а в других — составляющие скорости.)

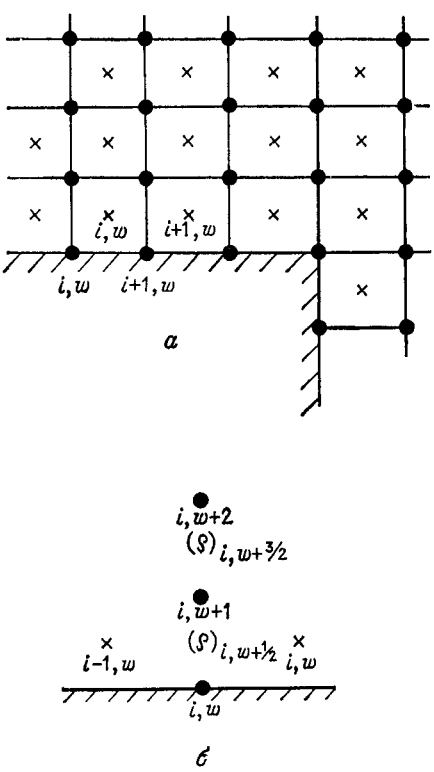



Рис. 5.5. Гибридная расчетная сетка. Значения $u$, $v$ и $T$ определяются в точках, отмеченных темными кружками, значения $\rho$ — в точках, отмеченных крестиками.

Используя контрольный объем, легко вывести уравнение неразрывности во внутренней узловой точке $\times$-сетки. Например, поток в ячейку с центром в точке $(i, j)_\times$ через левую сторону равен

$$\rho u\,\Delta y = {}^1/_2\left(\rho^\times_{i-1,\,j} + \rho^\times_{i,\,j}\right)\cdot {}^1/_2\left(u_{i,\,j} + u_{i,\,j+1}\right)\Delta y, \tag{5.149}$$

где верхний индекс $\times$ означает, что соответствующая величина определена на $\times$-сетке. Значения $\rho$ в равенстве (5.149) определены в соответствии с аппроксимациями центральными разностями второго порядка точности. Для второй схемы с конечными разностями против потока мы имели бы

$$\rho u\,\Delta y = \rho^\times_{i-1,\,j}\cdot {}^1/_2\left(u_{i,\,j} + u_{i,\,j+1}\right)\Delta y. \tag{5.150}$$

Полное уравнение неразрывности в представлении по схеме с конечными разностями против потока в предположении $u > 0$ и $v > 0$ принимает следующий вид (индекс $n$ в правой части опущен):

$$\rho^{\times,\,n+1}_{i,\,j} = \rho^\times_{i,\,j} - \left[{}^1/_2\left(u_{i+1,\,j} + u_{i+1,\,j+1}\right)\rho^\times_{i,\,j} - {}^1/_2\left(u_{i,\,j} + u_{i,\,j+1}\right)\rho^\times_{i-1,\,j}\right]/\Delta x - \left[{}^1/_2\left(v_{i+1,\,j+1} + v_{i,\,j+1}\right)\rho^\times_{i,\,j} - {}^1/_2\left(v_{i+1,\,j} + v_{i,\,j}\right)\rho^\times_{i,\,j-1}\right]/\Delta y. \tag{5.151}$$

Так же легко записать конечно-разностную форму уравнения неразрывности на гибридной сетке с использованием других конечно-разностных схем.

*Упражнение.* Записать на гибридной сетке конечно-разностную форму уравнения неразрывности по схеме Лакса (разд. 5.5.4).

Если возникает необходимость определить значения плотности $\rho$ на ●-сетке, то их можно найти осреднением:

$$\rho_{i,\,j} = {}^1/_4 (\rho^{\times}_{i,\,j} + \rho^{\times}_{i-1,\,j} + \rho^{\times}_{i,\,j-1} + \rho^{\times}_{i-1,\,j-1}). \qquad (5.152)$$

Значения плотности $\rho^{\times}$ около границ определяются просто. На правой, левой и верхней сторонах ячейки с центром в точке $(i, w)_{\times}$, изображенной на рис. 5.5, *а*, плотность находится так же, как и во внутренних ячейках, а поток через нижнюю сторону равен нулю, поскольку $(u_{i,\,w} + u_{i+1,\,w})/2 = 0$. Если ввести фиктивный узел $(i, w-1)_{\times}$ и приписать ему некоторое произвольное конечное значение плотности $\rho^{\times}_{i,\,w-1}$, то в узле $(i, w)_{\times}$ можно применять те же конечно-разностные представления, что и во внутренней области [1]).

Мы еще не рассмотрели вопроса об определении значения $\rho$ *на* стенке в ●-сетке. Его можно, конечно, экстраполировать по значениям плотности во внутренних ×-узлах, однако существует другой простой и более удобный способ. Действительно, при условии прилипания плотность на стенке необходима лишь для определения градиента давления $\delta P/\delta y|_{i,\,w+1}$. *Простейшим* способом аппроксимации градиента давления является представление его односторонними разностями, что приводит к первому порядку точности. Мы предлагаем определять градиент давления из найденных величин; при этом значения $\rho_{i,\,w}$ на ●-сетке знать не нужно. Вместо аппроксимации

$$\left.\frac{\delta P}{\delta y}\right|_{i,\,w+1} = \frac{P_{i,\,w+2} - P_{i,\,w}}{2\,\Delta y} \qquad (5.153)$$

возьмем первую конечно-разностную формулу, записанную для точек с полуцелыми индексами (см. рис. 5.5, *б*) и соответствующую величину градиента $P$ будем обозначать тильдой сверху:

$$\left.\frac{\tilde{\delta} P}{\delta y}\right|_{i,\,w+1} = \frac{P_{i,\,w+3/2} - P_{i,\,w+1/2}}{\Delta y} \qquad (5.154)$$

Значение давления в верхней точке вычисляется по формуле

$$P_{i,\,w+3/2} = {}^1/_2 (P_{i,\,w+2} + P_{i,\,w+1}). \qquad (5.155)$$

Значение давления в нижней точке вычисляется при помощи интерполированных значений $\rho$ и $T$ в соответствующих расчет-

[1]) В схеме Лакса можно положить $\rho_{i,\,w-1} = \rho_{i,\,w}$.

ных сетках с использованием безразмерной газовой постоянной $R_g$:

$$P_{i,\,w+1/2} = R_g \cdot {}^1/_2 \left(\rho^{\times}_{i-1,\,w} + \rho^{\times}_{i,\,w}\right) \cdot {}^1/_2 \left(T_{i,\,w} + T_{i,\,w+1}\right). \quad (5.156)$$

Таким образом легко вычислить градиент давления у стенки, не находя значений $\rho_{i,\,w}$ на ●-сетке.

Применение гибридной сетки достаточно эффективно, хотя и имеет некоторые недостатки (см. разд. 3.3.2). Так, например, значения $\rho$ на входной границе потока приходится определять на линии, отстоящей на $\Delta x/2$ от линии, на которой определяются значения $u$, $v$ и $T$.

Рассмотрим теперь способ, также основанный на идее гибридной сетки, но алгебраически отличный от описанного выше.

Для построения графиков распределения плотности вдоль стенки могут потребоваться значения $\rho_{i,\,w}$ на ●-сетке. Здесь допустима любая экстраполяция, однако больший смысл имеет определение $\rho_{i,\,w}$ при помощи равенства (5.154). При таком подходе можно упразднить ×-сетку и для вычисления значений $\rho$ во внутренних точках на ●-сетке использовать стандартные конечно-разностные представления. Однако около границ вводится *местная* ×-сетка, на которой рассчитываются значения $\rho$.

Определим

$$\begin{aligned}
\rho^{\times,\,n}_{i-1,\,w} &= {}^1/_4 \left(\rho^n_{i,\,w} + \rho^n_{i,\,w+1} + \rho^n_{i-1,\,w} + \rho^n_{i-1,\,w+1}\right),\\
\rho^{\times,\,n}_{i,\,w} &= {}^1/_4 \left(\rho^n_{i+1,\,w} + \rho^n_{i+1,\,w+1} + \rho^n_{i,\,w} + \rho^n_{i,\,w+1}\right),\\
\rho^{\times,\,n}_{i+1,\,w} &= {}^1/_4 \left(\rho^n_{i+2,\,w} + \rho^n_{i+2,\,w+1} + \rho^n_{i+1,\,w} + \rho^n_{i+1,\,w+1}\right),\\
\rho^{\times,\,n}_{i,\,w+1} &= {}^1/_4 \left(\rho^n_{i+1,\,w+1} + \rho^n_{i+1,\,w+2} + \rho^n_{i,\,w+1} + \rho^n_{i,\,w+2}\right).
\end{aligned} \quad (5.157)$$

Теперь для вычисления $\rho^{\times,\,n+1}_{i,\,w}$ вблизи стенки можно воспользоваться конечно-разностным представлением уравнения неразрывности типа (5.151). После того как из уравнения энергии найдены новые значения температуры, по формуле (5.154) можно вычислить $\tilde{\delta}P^{n+1}/\delta y\big|_{i,\,w+1}$ и затем найти значение $\rho^{n+1}_{i,\,w}$ на ●-сетке из требования, чтобы градиенты давлений, определяемые по формулам (5.153) и (5.154), были равны:

$$\tilde{\delta}P/\delta y\big|_{i,\,w+1} = \delta P/\delta y\big|_{i,\,w+1}. \quad (5.158)$$

Это дает новое значение давления (на $(n+1)$-м слое)

$$P_{i,\,w} = -P_{i,\,w+1} + {}^1/_2 R_g \left(\rho^{\times}_{i-1,\,w} + \rho^{\times}_{i,\,w}\right)\left(T_{i,\,w+1} + T_{i,\,w}\right) \quad (5.159)$$

и, наконец,

$$\rho_{i,\,w} = P_{i,\,w}/(R_g T_{i,\,w}). \quad (5.160)$$

Повторим вкратце основные этапы данного способа: старые значения $\rho^{\times}$ около стенки определяются через значения $\rho$ в $\bullet$-сетке по формулам типа (5.157). Затем вычисляются новые значения $\rho^{\times}$ или при помощи конечно-разностного представления уравнения неразрывности на гибридной сетке типа уравнения (5.151) или при помощи какого-либо конечно-разностного представления, согласованного с конечно-разностным представлением уравнений во внутренних точках. Наконец, по формулам (5.159) и (5.160) вычисляются новые значения давления и плотности на $\bullet$-сетке.

Хотя этот способ более трудоемок, чем использование простых условий типа $P_w = P_{w+1}$, он обеспечивает второй порядок точности (см. задачу 5.13), надежен и его можно рекомендовать.

## 5.7.3. Угловые точки

Как и в случае описания течения несжимаемой жидкости в переменных $\psi$, $\zeta$, некоторые переменные в угловых точках могут быть двузначными.

В угловой точке в расчетной сетке первого типа, изображенной на рис. 5.6, *а*, при условии прилипания составляющие скорости $u_{ic,\,jc}$ и $v_{ic,\,jc}$ равны нулю. Задаваемая в угловой точке температура может быть (а может и не быть) однозначной. Если на стенках В 2 и В 5 поддерживается одна и та же температура $T_w$, то, очевидно, $T_{ic,\,jc} = T_w$. Однако если на стенках В 2 и В 5 поддерживаются различные температуры, то $T_{ic,\,jc}$ необходимо рассматривать как многозначную величину, принимая соответственно $T_{ic,\,jc} = T_a \equiv T(\text{В 2})$ при проведении расчетов во внутренней узловой точке $(ic, jc + 1)$ и $T_{ic,\,jc} = T_b \equiv T(\text{В 5})$ при проведении расчетов во внутренней узловой точке $(ic+1, jc)$. Использование девятиточечного шаблона для члена уравнения энергии, описывающего теплопроводность, или для вязкого члена со смешанными производными при наличии зависимости вязкости от температуры, вызывает необходимость задания третьего значения $T_c = (T_a + T_b)/2$ при проведении расчета в узле $(ic + 1, jc + 1)$.

Многозначность $T_{ic,\,jc}$ очевидна также в том случае, когда стенка является адиабатической (нетеплопроводной). При расчете не будет достигнута адиабатичность стенки В 2, если не будет выполнено условие $T_{ic,\,jc} = T_{ic,\,jc+1}$, и не будет достигнута адиабатичность стенки В 5, если не будет иметь места равенство $T_{ic,\,jc} = T_{ic+1,\,jc}$. Очевидно, что одного значения $T_{ic,\,jc}$ здесь не достаточно. Аналогично, для получения правильных значений конечно-разностных аппроксимаций градиента давления $\delta P/\delta y|_{ic,\,jc+1}$ и $\delta P/\delta x|_{ic+1,\,jc}$ необходима двузначность величины $\rho_{ic,\,jc}$. При программировании задачи в угловых точках требуются некоторые ухищрения.

Рассмотрим способы расчета течения около угловой точки стенки со скольжением. Введение членов с явной искусственной вязкостью может вызвать затруднения, поскольку при наличии таких членов желательно ставить условия прилипания. Кесслер [1968] полагал члены с искусственной вязкостью Русанова равными нулю на стенке (на расчетной сетке первого типа), что, однако, не всегда приводило к устойчивости расчета. Отметим, что из наличия в уравнениях членов с объемной вязкостью, физической или искусственной, не следует условие прилипания, поскольку объемная вязкость входит в эти члены лишь вместе с дивергенцией скорости.

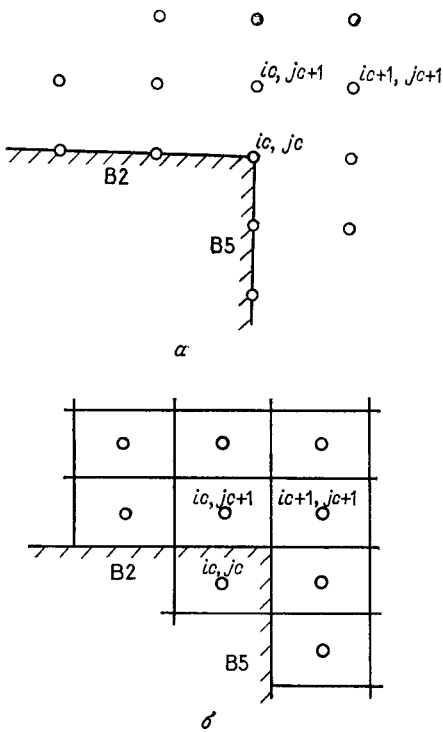



Рис. 5.6. Расчетные сетки вблизи угловой точки. *а* — расчетная сетка первого типа, *б* — расчетная сетка второго типа.

Расположение угловой точки в удобной для описания течений невязкого газа расчетной сетке второго типа показано на рис. 5.6, *б*.

При вычислении новых значений величин в узлах $(ic+1, jc)$ и $(ic, jc+1)$ потоки консервативных величин $\rho u$, $\rho v$ и $E_s + P$ через стороны ячейки $(ic, jc+1/2)$ и $(ic+1/2, jc)$ полагаются, как и для всех других точек стенки, равными нулю. Если для получения нулевого потока массы через эти стороны угловой ячейки используется способ отражения, то значения в фиктивном узле $(ic, jc)$ должны быть двузначными (поскольку эти чисто фиктивные значения определяются лишь для удобства программирования, то двузначность в данном случае не имеет никакого физического смысла). По аналогии с рассмотрением двух значений вихря в угловой точке (см. разд. 3.3.12.а) положим

$$\rho_a = \rho(ic, jc+1), \tag{5.161а}$$
$$\rho_b = \rho(ic+1, jc), \tag{5.161б}$$
$$v_a = -v(ic, jc+1), \tag{5.161в}$$
$$u_b = -u(ic+1, jc). \tag{5.161г}$$

При проведении расчетов в узле $(ic, jc+1)$ временно полагаем, что

$$\rho_{ic,\ jc} = \rho_a \quad \text{и} \quad v_{ic,\ jc} = v_a. \tag{5.162а}$$

Аналогично, при проведении расчетов в узле $(ic+1, jc)$ временно полагаем, что

$$\rho_{ic,\ jc} = \rho_b \quad \text{и} \quad u_{ic,\ jc} = u_b, \tag{5.162б}$$

и в узлах $(ic+1, jc)$ и $(ic, jc+1)$ пользуемся стандартными конечно-разностными представлениями для внутренних точек. Этого приема достаточно для расчета течения невязкого газа вблизи угловой точки.

Как было указано выше, для расчета течений вязкого газа не рекомендуется пользоваться расчетной сеткой второго типа. Однако если она все же применена, то опять требуется двоякий подход к расчету членов типа $\partial[f(\partial g/\partial x)]/\partial x$ в узлах $(ic, jc+1)$ и $(ic+1, jc)$. Если здесь $f = \mu(T)$, то выбирается одно из двух значений $T(ic, jc)$, как это было описано выше. Градиент давления можно по-прежнему вычислять при помощи односторонних конечных разностей.

При вычислении новых значений в узле $(ic+1, jc+1)$ для аппроксимации членов со смешанными производными требуются третьи значения для величин $f = u, v$. В этом случае значение $f_{ic,\ jc}$ можно выбрать таким образом, чтобы в угловой точке $(ic+{}^1/_2,\ jc+{}^1/_2)$ величина

$$f_{ic+1/2,\ jc+1/2} = (f_{ic,\ jc} + f_{ic+1,\ jc} + f_{ic,\ jc+1} + f_{ic+1,\ jc+1})/4 \tag{5.163}$$

была равна своему точному физическому значению. Соотношение (5.163) можно разрешить относительно $f_{ic,\ jc}$:

$$f_{ic,\ jc} = 4f_{ic+1/2,\ jc+1/2} - f_{ic+1,\ jc} - f_{ic,\ jc+1} - f_{ic+1,\ jc+1}. \tag{5.164}$$

На стенке с прилипанием $u_{ic+1/2,\ jc+1/2} = 0$, $v_{ic+1/2,\ jc+1/2} = 0$ [1]). Поэтому определим третьи значения составляющих скорости следующим образом:

$$u_c = -u_{ic+1,\ jc} - u_{ic,\ jc+1} - u_{ic+1,\ jc+1}, \tag{5.165а}$$

$$v_c = -v_{ic+1,\ jc} - v_{ic,\ jc+1} - v_{ic+1,\ jc+1} \tag{5.165б}$$

и при расчете новых значений в узле $(ic+1, jc+1)$ будем полагать $u_{ic,\ jc} = u_c$, $v_{ic,\ jc} = v_c$. Такой расчет соответствует линейной интерполяции значений на стенку; как было показано выше, он снижает точность аппроксимации вязких членов до первого порядка.

---

[1]) Если рассматривать течение вязкого газа с условиями скольжения вверх по потоку от угловой точки, когда $u_w = u_{w+1}$, то, по-видимому, можно ограничиться единственным значением $u_{ic,\ jc}$, положив $u_{ic,\ jc} = u_{ic,\ jc+1}$.

Как было показано в разд. 3.3.12 для случая течения несжимаемой жидкости, можно добиться высокой точности расчета вблизи острого угла, введя локальную полярную систему координат с центром в угловой точке.

### 5.7.4. Линии симметрии

На линиях симметрии, таких, как граница В 1 на рис. 3.22, очевидно, необходимо ставить условия симметрии потока. Если ряд узловых точек $j = s$ лежит на линии симметрии, то способ отражения дает

$$v_{s-1} = -v_{s+1}, \quad v_s = 0, \quad f_{s-1} = f_{s+1}, \quad \text{где } f = \rho,\ u,\ E_s \text{ или } T. \tag{5.166}$$

Если ряд узлов сетки отстоит от линии симметрии $j = s + {}^1/_2$ на расстоянии $\Delta y/2$, то условия симметрии имеют вид

$$v_s = -v_{s+1}, \quad f_s = f_{s+1}, \text{ где } f = \rho,\ u,\ E_s \text{ или } T. \tag{5.167}$$

### 5.7.5. Входная граница

Входной границей является граница В 4 на рис. 3.22. Во всех опубликованных работах, посвященных расчету двумерных течений, параметры потока на входной границе принимались равными их значениям либо в невозмущенном течении, либо в пограничном слое, причем последнее лучше соответствует задаче об обтекании обратного уступа, изображенного на рис. 3.22. Опыт расчетов показывает (Скоглунд с соавторами [1967], Аллен [1968], Аллен и Чен [1970], Роуч и Мюллер [1968], Скоглунд и Гей [1969]), что течение вниз по потоку может весьма существенно зависеть от условий на входе и от совместности входных значений параметров. В частности, составляющая скорости $v$ должна быть найдена из распределения составляющей $u$ (хотя при очень больших числах Рейнольдса можно ограничиться условием $v = 0$); кроме того, должны быть совместными энергетические интегралы в пограничном слое (см. Шлихтинг [1968], Стюартсон [1964], Коэн и Решотко [1956] — в этих работах даны решения уравнений пограничного слоя в сжимаемой жидкости). Скоглунд и Гей [1969] дали способ определения совместных значений параметров на входе по экспериментально найденному распределению скорости на входе, а Аллен [1968] указал такой способ при полиномиальном задании составляющей скорости $u(y)$ на входе.

Все эти методы основаны на автомодельных решениях с использованием либо интегрального соотношения Крокко, либо интегрального соотношения Буземана. Во всех этих автомодель-

ных решениях принято условие $\mathrm{Pr} = 1$, однако отклонение решений при отклонении числа Прандтля от единицы (для воздуха $\mathrm{Pr} \approx 0.74$) часто считается незначительным.

Необычную постановку условий на входе применил Андерсон [1969], проводивший расчет по схеме типа Лакса — Вендроффа квазнодномерных уравнений внутри сопла с учетом колебательной и химической неравновесности. Индекс $i = 1$ приписывали значениям параметров «в резервуаре» (см. любой курс газовой динамики), где площадь примерно в 10 раз больше площади горловины сопла. Тогда значения $T_1$ и $\rho_1$ принимались равными соответствующим значениям в резервуаре. Однако составляющая скорости $u_1$ получалась из решения задачи линейной экстраполяцией против потока

$$u_1 = 2u_2 - u_3. \tag{5.168}$$

При этом решение определялось условием запирания потока в горловине и при приближении к стационарному состоянию величина $u_1$ принимала значение, соответствующее расходу через горловину.

Заданные на входе условия могут оказаться принципиально несовместными с температурными условиями на стенке. Точным условием адиабатичности стенки является равенство $\partial T/\partial n = 0$, однако если в дискретных узловых точках рассмотреть точное решение уравнений пограничного слоя, то численное условие адиабатичности $T_w = T_{w+1}$ не получится. Конечно, это условие достигается в пределе $\Delta y \to 0$, однако для практически применяемых конечных ячеек расхождение будет значительным. Поэтому существуют две возможности: либо положить температуру на стенке равной ее значению в точном решении уравнений пограничного слоя для адиабатической стенки, что приведет к невыполнению численного условия адиабатичности на стенке, либо использовать значение температуры на стенке, удовлетворяющее вычислительному условию адиабатичности, но при этом температура на стенке не будет равна температуре, полученной из точного решения уравнений пограничного слоя. Предпочтительной представляется вторая возможность (в основном из соображений консервативности).

### 5.7.6. Выходная граница

Для течений сжимаемой жидкости существует несколько приемлемых способов постановки граничных условий на выходной границе, скажем границе B6 на рис. 3.22. Можно попытаться распространить на этот случай все способы постановки граничных условий для вихря в течениях несжимаемой жидкости,

изложенные в разд. 3.3.7. Они включают линейную экстраполяцию либо консервативных переменных

$$U_I = 2U_{I-1} - U_{I-2}, \quad \text{где } U = \rho,\ \rho u,\ \rho v,\ (E_s + P), \tag{5.169}$$

либо неконсервативных переменных

$$f_I = 2f_{I-1} - f_{I-2}, \quad \text{где } f = \rho,\ u,\ v,\ T. \tag{5.170}$$

Эти два способа не эквивалентны.

Опишем вкратце другие способы постановки граничных условий на выходе (здесь важно подчеркнуть, что к постановке граничных условий на выходе нельзя подходить легкомысленно). Как было установлено в разд. 3.3.9 по поводу парадокса на выходе для квазиодномерных уравнений, граничные условия на выходе играют бо́льшую роль в случае сверхзвукового течения на входе, чем в случае дозвукового течения на входе. Вычислительные эксперименты Крокко [1965], а также проведенные автором расчеты двумерных задач показали, что именно граничные условия на выходе определяют положение скачка [1]).

Еще более важен следующий факт. Рассмотрим часто повторяемое утверждение: в случае сверхзвуковых скоростей на выходе граничные условия на выходе не существенны. Это утверждение неверно. Как мы видели в разд. 3.3.9, если бы не было влияния этой границы, то было бы невозможно «выключить» аэродинамическую трубу со сверхзвуковым течением на входе. Более того, это утверждение неверно даже в смысле малости ошибок. Аллен [1968] обнаружил, что при расчете течения вязкого газа около обратного уступа использование простого граничного условия на выходе

$$U_I = U_{I-1}, \tag{5.171а}$$

или, что эквивалентно,

$$f_I = f_{I-1}, \tag{5.171б}$$

приводит к монотонной расходимости решения даже при полностью сверхзвуковом потоке на выходе. Руо [1967], наоборот,

[1]) Для задачи об обтекании обратного уступа приемлема линейная экстраполяция (5.170). Однако на очень грубой сетке в том случае, когда расстояние выходной границы от уступа было вчетверо больше его высоты, а за уступом продолжалась прямая стенка с условиями прилипания, решение «разваливалось». Хотя граница расчетной области находилась вне области вторичного сжатия потока, ошибка от граничного условия на выходе вызывала появление сильной ударной волны с осцилляциями, распространявшейся от выходной границы и разрушавшей замкнутую застойную область. Осцилляции ударной волны сохранялись, но в общем она устанавливалась около угла уступа; при этом застойная область возвратного течения становилась открытой с $u < 0$ везде до выходной границы. Такое поведение согласуется с экспериментально наблюдаемым явлением, называемым *диффузорным срывом* и возникающим при повышении противодавления. Описанное выше явление дает еще один пример неединственности решения задач вычислительной газодинамики.

нашел, что для задач о дозвуковых течениях этот способ дает сходящиеся решения, и даже утверждал, что он ведет к ускорению сходимости по сравнению с другими способами. Итон и Цумвальт [1967], а также Кесслер [1968] обнаружили, что этот способ дает хорошие результаты в том случае, когда скачок проходит через границу. (В последних трех работах применялась схема Русанова, описанная в разд. 5.4.3.) Причины различных отзывов о способе постановки на выходе этих условий неизвестны. Итон и Цумвальт [1967] нашли, что в случае пересечения ударной волной выходной границы применение линейной экстраполяции (5.170) приводит к неустойчивости даже в том случае, когда первоначально поток был сверхзвуковым. Ясно также, что в случае пересечения хвостовой волной выходной границы В 6 использование на ней линейной экстраполяции может привести к серьезным ошибкам, если не к возникновению неустойчивости.

Если отвлечься от случая выхода ударной волны на границу В 6, то способ линейной экстраполяции (5.170) оказывается, вообще говоря, приемлемым; его использовали Сондерс [1966], Лапидус [1967], Итон и Цумвальт [1967], Скоглунд и Коул [1967], Руо [1967], Аллен [1968], Роуч и Мюллер [1968], Скоглунд и Гей [1968], Аллен и Чен [1970].

Аллен [1968] экспериментировал также с квадратичными и кубическими экстраполяциями вида

$$f_I = 3f_{I-1} - 3f_{I-2} + f_{I-3}, \tag{5.172}$$

$$f_I = 4f_{I-1} - 6f_{I-2} + 4f_{I-3} - f_{I-4}. \tag{5.173}$$

В своих последних расчетах (Аллен и Чен [1970]) он пользовался соотношением (5.172), но обнаружил, что разница между способами (5.172), (5.173) и (5.170) незначительна. Аллен [1968] также менял положение выходной границы и не обнаружил значительной разницы в двух полученных решениях — одном частично дозвуковом (около границы В 1 на рис. 3.22) и другом полностью сверхзвуковом на выходной границе, — разрешив таким образом вопрос о необходимости сверхзвукового потока на выходе (см. также численные эксперименты с выходной границей Росса и Чена [1971]). Выяснилось, что условие сверхзвукового потока на выходе не является ни необходимым, ни достаточным условием для обеспечения устойчивости и точности.

Руо [1967] экспериментировал с осреднением граничных условий (5.171б) и (5.170) и с введением сдвига по времени [1]):

$$f_I^{n+1} = f_{I-1}^n; \tag{5.174}$$

[1]) Для модельного уравнения (5.1) способ (5.174) при числе Куранта $C = 1$, конечно, дает точное решение.

он обнаружил, что лучше использовать условие (5.171б), как это было указано ранее.

Эрдош и Заккаи [1969], а также Шихна с соавторами [1970] применяли квадратичную экстраполяцию, причем полиномы строились по значениям в последних пяти узлах сетки по методу наименьших квадратов. Представляется, что этот способ дает не бо́льшую точность, чем менее сложные экстраполяции [1]). При пересечении границы ударной волной здесь также развивалась неустойчивость.

В расчетах невязких течений по схеме Русанова (разд. 5.4.3) Итон и Цумвальт [1967] вернулись к схеме с разностями против потока в направлении $x$, причем вторые производные, входящие в члены с искусственной диффузией, на выходной границе полагались равными соответствующим производным в узлах, лежащих на расстоянии одного шага от границы:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{ex}\frac{\partial U}{\partial x}\right)\Big|_I = \frac{\delta}{\delta x}\left(a_{ex}\frac{\delta U}{\delta x}\right)\Big|_{I-1}. \qquad (5.175)$$

Производные по $y$ в точках выходной границы вычислялись при помощи стандартных аппроксимаций, принятых во внутренних точках расчетной области. Как и экстраполяция (5.171б), этот способ давал хорошие результаты даже в случае пересечения выходной границы ударной волной.

Роуч и Мюллер [1968] рассмотрели сходный способ постановки граничных условий на выходе, аналогичный их способу для течений несжимаемой жидкости (разд. 3.3.7). Конвективные члены уравнения количества движения в направлении $x$ аппроксимировались по схеме с разностями против потока. Диффузионные члены с производными по $x$, члены со смешанными производными и составляющая градиента давления по $x$ вычислялись в точках $I-1$; сама по себе эта процедура порождает тенденцию к дестабилизации расчета, которая подавляется за счет сдвига по времени. Как и в случае расчета течений несжимаемой жидкости, члены с производными по $y$ могут вычисляться на входной границе при помощи стандартных аппроксимаций, принятых во внутренних узлах. Например, уравнение количества движения в направлении $x$ (4.42б) может иметь следующий конечно-разностный аналог:

$$(\rho u)_{I,j}^{n+1} = (\rho u)_{I,j}^{n} - \Delta t\left\{\frac{\delta P}{\delta x}\Big|_{I-1,j}^{n-1} + \frac{(\rho u^2)_I^n - (\rho u^2)_{I-1}^n}{\Delta x} + \frac{\Delta(\rho u v)}{\Delta y}\Big|_{I,j}^{n} + \right.$$
$$\left. + \frac{\Delta t}{\mathrm{Re}}\left\{D_1\Big|_{I-1,j}^{n-1} + \frac{\delta}{\delta y}\left(\mu\frac{\delta u}{\delta y}\right)\Big|_I^n + \frac{\delta}{\delta y}\left(\mu\frac{\delta v}{\delta x}\right)_{I-1}^{n-1}\right\}, \qquad (5.176)$$

[1]) Как отметил Чен [1970], любые экстраполяции основаны на значениях, полученных в результате расчета, а не на точных значениях и, следовательно, их точность ограничена.

где $\delta/\delta x$ и $\delta/\delta y$ означают центральные конечные разности, а $\Delta(\rho uv)/\Delta y$ — вклад в $\partial(\rho u)/\partial t$ от потока в направлении $y$, вычисленный по схеме, принятой во внутренних узлах расчетной области (этот способ может применяться только в сочетании со схемой с разностями против потока во внутренних точках). В цитированной выше работе во избежание усложнения программирования все вязкие члены, включая $\delta[\mu(\delta u/\delta y)]/\delta y$, вычислялись при $I-1$ и $n-1$.

Представляется, что этот способ должен давать хорошую точность, однако численные эксперименты Аллена [1968] продемонстрировали незначительную разницу между различными способами экстраполяции, обеспечивающими устойчивость. В соответствии с этим для расчета течений сжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса можно рекомендовать более простой способ (5.170) при условии, что выходную границу В 6 не пересекает сильная ударная волна.

При больших значениях составляющей скорости $v$ на выходной границе точность расчета можно было улучшить, применяя в сверхзвуковой области приближение простой волны (см. следующий раздел), однако до настоящего времени такие расчеты не проводились.

## 5.7.7. Верхняя граница

Как и в случае течения несжимаемой жидкости, верхнюю границу (В 3 на рис. 3.22) можно трактовать как простую стенку с прилипанием или (еще лучше) как стенку аэродинамической трубы без трения. Однако в этих случаях можно ожидать нежелательного влияния отраженных от границы волн (см., например, Уилкинс [1969]). Гораздо лучшим способом является воссоздание условий «свободного полета», что возможно в случае сверхзвуковых течений. Этот способ не запрещает втекание через верхнюю границу и является физически осмысленным.

Предположим, что течение около верхней границы представляет собой простую волну. Предположим далее, что рассматриваются характеристики одного семейства и что на расстояниях $\Delta y$ их можно принимать за прямые линии. С физической точки зрения мы рассматриваем поток через верхнюю границу как невязкое стационарное гомоэнтропическое течение, сформировавшееся при расширении первоначально однородного потока около искривленной поверхности, т. е. течение Прандтля — Майера (см., например, Овчарек [1964]).

Соответствующая геометрия показана на рис. 5.7. Точка $p$ и узловая точка верхней границы $(i, J)$ лежат на одной и той же характеристике, или линии Маха. Эта линия определяется углом

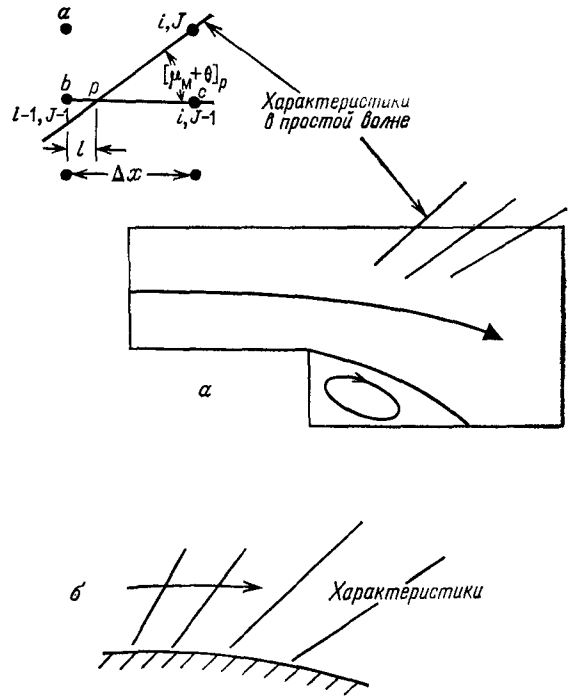



Рис. 5.7. Постановка условия на верхней границе при помощи приближения простой волны. *а* — приближение простой волны для течения вблизи верхней границы; $f_{i,\,J}=f_p$, $f_p=f_{i-1,\,J-1}+(l/\Delta x)(f_{i,\,J-1}-f_{i-1,\,J-1})$; *б* — действительное течение типа простой волны.

$(\mu_M+\theta)_p$ с направлением оси $x$, причем $\mu_M=\arcsin(1/M)$ — угол Маха [1]) и $\theta=\operatorname{arctg}(v/u)$ — угол наклона вектора скорости к оси $x$. Величины углов $\mu_M$ и $\theta$ в точке $p$, а также значения всех других параметров течения в этой точке $f_p=\rho_p,\ u_p,\ v_p,\ T_p$ вычисляются линейной интерполяцией по их значениям в узлах $(i-1, J-1)$ и $(i, J-1)$.

В простой волне параметры течения постоянны вдоль характеристики. Поэтому, если положение точки $p$ определено, то условие на верхней границе запишется в виде

$$f_{i,J}=f_p=f_b+\frac{l}{\Delta x}(f_c-f_b),\quad \text{где}\quad f=\rho,\ u,\ v,\ T. \tag{5.177}$$

Положение точки $p$ можно определить следующим образом. В узле $b\equiv(i-1, J-1)$ вычисляется величина $\omega=\operatorname{tg}(\mu_M+\theta)$.

[1]) Очевидно, что $\mu_M$ не существует при $M<1$.

Если $\omega_b > \Delta y/\Delta x$, то точка $p$ находится между точками $b$ и $c$, как это показано на рис. 5.7. В точках $b$ и $c$ вычисляется величина $\omega' = \operatorname{tg}[\pi/2 - (\mu_M + \theta)]$, а затем расстояние $l$ находится из соотношения

$$l = \frac{\Delta x/\Delta y - \omega_b'}{(\omega_c' - \omega_b')/\Delta x + 1/\Delta y}. \tag{5.178а}$$

Если $\omega_b < \Delta y/\Delta x$, то точка $p$ лежит выше точки $(i-1, J-1)$ и отстоит от нее на расстояние $l$, причем

$$l = \frac{\Delta y/\Delta x - \omega_b}{(\omega_a - \omega_b)/\Delta y + 1/\Delta x}. \tag{5.178б}$$

Здесь величина $\omega_a$ вычисляется в предыдущей точке верхней границы, причем процесс построения граничного условия осуществляется последовательными шагами слева направо. Первая точка верхней границы $(1, J)$ берется на входной границе.

В случае пересечения границы В 3 ударной волной или менее сильной волной сжатия в точке $(i, J)$ могут пересечься две характеристики одного семейства; тогда можно предпочесть методы выделения скачков, однако и более простая процедура, описанная выше, обеспечивает однозначное задание граничного условия.

Эту процедуру применяли Аллен [1968], Аллен и Чен [1970], Роуч и Мюллер [1968], а также Гудрич [1969]. В сочетании с тремя различными конечно-разностными схемами во внутренних точках она давала устойчивые и реалистические результаты. Существенно, однако, чтобы граница В 3 не лежала внутри пограничного слоя, иначе можно получить абсурдные результаты.

При расчете обтекания затупленного тела Лапидус [1967] применил линейные экстраполяции вдоль диагоналей сетки, положив

$$f_{i,J} = 2f_{i-1,J-1} - f_{i-2,J-2}, \tag{5.179}$$

что равнозначно приближению простой волны в случае совпадения характеристик с диагоналями расчетной сетки. На ранних стадиях вычислений метод (5.179) приводил к неустойчивости и был заменен следующим:

$$f_{i,J} = f_{i-1,J-1} + r(f_{i-1,J-1} - f_{i-2,J-2}). \tag{5.180}$$

Для обеспечения устойчивости Лапидус в течение первых 500 шагов по времени медленно менял $r$ от $r = 0.5$ до $r = 1$ (что дает формулу (5.179)). Итон и Цумвальт [1967] обнаружили, что квадратичная экстраполяция типа (5.172) приводит к неустойчивости при пересечении границы В 3 ударной волной и

с успехом использовали на этой границе свои условия на выходе (см. предыдущий раздел). Эрдош и Заккаи [1969] также применяли на верхней границе свои условия для выходной границы, предполагая, что на ней нет скачков.

## 5.8. Критерии сходимости и начальные условия

Многие из замечаний разд. 3.4 и в особенности то обстоятельство, что не существует объективных удовлетворительных критериев ни итерационной, ни аппроксимационной сходимости, относятся и к течениям сжимаемой жидкости. Вопрос об итерационной сходимости (об установлении решения по времени) в случае течения сжимаемой жидкости дополнительно усложняется наличием большего числа искомых функций (например, давление устанавливается медленнее, чем плотность) и появлением нового характерного времени — времени прохождения волны давления через расчетную область. Росс и Чен [1970] отметили, что в сверхзвуковых течениях вязкого газа можно ожидать очень долгого затухания нестационарных процессов, а это делает суждение об установлении еще более затруднительным. В этой связи можно было бы рекомендовать сравнение окончательных стационарных решений, полученных при различных начальных условиях (хотя бы для некоторого контрольного варианта задачи).

К несчастью, представляется, что для сверхзвуковых течений задача с начальными условиями будет более критической в смысле устойчивости, чем для течений несжимаемой жидкости. В литературе приводится много примеров неустойчивости при одних начальных условиях и устойчивости при других. Эта неустойчивость по определению обусловлена нелинейностью, однако, как отметил Моретти [1968а, 1968б], в некоторых случаях источником такой неустойчивости может являться и неправильная постановка граничных условий. Верно, однако, и то, что подобные неустойчивости по крайней мере усугубляются, а быть может, и полностью порождаются распространением ложных ударных волн, связанных с неправильными начальными условиями.

В том случае, когда интерес представляет только стационарное решение, существуют три способа уменьшить влияние начальных условий. (1) Расчет можно начинать с малыми значениями $\Delta t$. Этот способ часто приводит к большим затратам машинного времени. (2) Расчет можно начинать с искусственно заниженным значением числа Рейнольдса, постепенно доводя его в процессе расчета до желаемого значения. (3) Расчет можно начинать по другой схеме, обладающей бо́льшим искусственным демпфированием. Это легко осуществимо для схем с явной

искусственной вязкостью. Аналогично, для схемы Рихтмайера (т. е. для двухшаговой схемы Лакса — Вендроффа, см. разд. 5.5.6), в которой первый шаг делается по схеме Лакса, а второй — по схеме «чехарда», первые несколько сот шагов можно реализовать только по схеме Лакса и лишь затем пользоваться полной двухшаговой схемой (Лапидус [1967]). При $C \ll 1$ схема Лакса обладает большой диффузией и поэтому даст сглаженное решение.

Поскольку при проведении отладочных расчетов нелинейные неустойчивости могут разрушить решение, на ранних стадиях следует вести решение короткими этапами, попеременно записывая результаты чередующихся этапов на две магнитные ленты. При возникновении неустойчивости можно вернуться к результатам расчета на предыдущем этапе с меньшей величиной $\Delta t$, с большим демпфированием и т. д.

Тайлер и Цумвальт [1965], а также Тайлер и Эллис [1970] показали, что в задаче об одномерном распространении скачка можно получить более плавные профили скачков, распространяя начальный разрыв на две расчетные ячейки. Вместо скачка величин от значений перед ударной волной ($a$) до значений за ударной волной ($b$) в пределах одной расчетной ячейки

$$P_i = P_a, \quad P_{i+1} = P_b \tag{5.181}$$

они определяли в промежуточной узловой точке среднее значение

$$P_i = P_a, \quad P_{i+1} = (P_a + P_b)/2, \quad P_{i+2} = P_b \tag{5.182}$$

(подробности см. в указанных выше работах). Уоткинс [1970] обнаружил особую важность совместности начальных условий в связи с использованным им преобразованием координат. По опыту автора, а также Л. Д. Тайлера (частное сообщение) обычные двухшаговые методы дают незатухающие колебания примерно в трех узловых точках около начального положения скачка. До настоящего времени не найдено удовлетворительного объяснения этого явления и способов его устранения.

Гурли и Моррис [1968в], Вернер [1968], а также Смит и Мак-Колл [1970] для улучшения аппроксимационной сходимости гиперболических систем применяли методы экстраполяции.

## 5.9. Замечания о расчете дозвуковых и сверхзвуковых течений

Часто возникает мысль о том, что не стоит пользоваться уравнениями течения несжимаемой жидкости, а достаточно разработать лишь программу для расчета течений сжимаемой жидкости, и тогда соответствующее течение несжимаемой жидкости

можно рассчитать по этой программе, считая число $M_0$ малым, скажем положив $M_0 = 0.1$. Поэтому, казалось бы, программа расчета течений сжимаемой жидкости обладает большей гибкостью.

В общем случае, однако, подобный метод будет и весьма неэффективным, и весьма неточным.

Уменьшение эффективности обусловлено очевидным усложнением вида вязких членов (см. гл. 4) и усилением условия на размер шага по времени $\Delta t$. Значение $\Delta t$ при расчете течения сжимаемого газа ограничено условием по числу Куранта

$$C = \frac{(|u| + a)\,\Delta t}{\Delta x} < 1. \tag{5.183}$$

При $M_0 \approx 0.1$ мы имеем $a \approx 10|u|$, и по условию (5.183) $\Delta t$ ограничено в основном скоростью звука, что уменьшает максимально допустимые значения $\Delta t$ в десять раз по сравнению со случаем применения уравнений для несжимаемой жидкости. Более того, паразитные звуковые волны на сетке приведут к возрастанию ошибки, связанной с неразличимостью, и (что, быть может, наиболее важно) ухудшат итерационную сходимость. Черни с соавторами [1950] указал на желательность эффективного отфильтровывания этих паразитных волн и применения поэтому уравнений течения несжимаемой жидкости.

Ухудшение точности проистекает из неопределенности при $M \to 0$. Даже при поверхностном знакомстве с газовой динамикой ясно, что для сверхзвуковых течений используются *отношения* давлений, например отношение давлений в донной области $P_r = \bar{P}_B/\bar{P}_\infty$, в то время как для течений несжимаемой жидкости используются *разности* давлений [1]), например коэффициент давления в данной области $C_{PB} = (\bar{P}_B - \bar{P}_\infty)/\bar{q}_\infty$, где $\bar{q}_\infty$ — скоростной напор в невозмущенном потоке, т. е.

$$\bar{q}_\infty = \frac{1}{2}\bar{\rho}_\infty \bar{V}_\infty^2 = \frac{\gamma}{2}\bar{P}_\infty M_\infty^2. \tag{5.184}$$

Выражая при помощи этого равенства коэффициент давления через отношение давлений, получаем

$$C_{PB} = \frac{P_r - 1}{(\gamma/2)\,M_\infty^2}, \tag{5.185}$$

что после дифференцирования дает

$$r \equiv \frac{d(C_{PB})}{d(P_r)} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2}. \tag{5.186}$$

[1]) Заметим, что при $M \to 0$ уравнение энергии отделяется от уравнений неразрывности и количества движения.

При $\gamma = 1.4$ и $M_\infty = 0.1$ получаем отношение относительных ошибок $r = 0.007$. Это означает, что при вычислении $P_r$ по уравнениям течения сжимаемой жидкости с погрешностью менее 1% получаем значение $C_{PB}$ с погрешностью 100%.

Для смешанных течений, т. е. для сверхзвуковых течений с областями дозвукового течения, отношения давлений еще имеют смысл и можно пользоваться уравнениями сжимаемой жидкости. Однако задачи с большим интервалом изменения числа Маха по времени очень трудны для расчета. Примерами таких задач являются разгон тела из состояния покоя до сверхзвуковой скорости и расчет взрыва от его начала до поздних стадий.

Харлоу и Амсден [1968] разработали неявный эйлеров метод расчета движений сплошной среды (метод ICE), дающий хорошие результаты от $M = 0$ до $M \gg 1$. Метод ICE основан на расчете уравнения неразрывности по неявной схеме, что придает системе уравнений эллиптический характер (см. Фромм [1963] и Руо [1967]). В нем нет ограничения на размер шага по времени, связанного со скоростью звука. Дальнейшие усовершенствования метода ICE и его приложения указаны в работах Харлоу и Амсдена [1970], а также Харлоу с соавторами [1971].

## 5.10. Схемы высокого порядка аппроксимации

Замечания разд. 3.1.10 по поводу ограничений на схемы высокого порядка аппроксимации еще в большей мере относятся к течениям сжимаемой жидкости. Как уже было указано в разд. 5.5.2, в сверхзвуковых течениях при больших числах Рейнольдса искомые функции не обязательно непрерывны по пространственным переменным и в этих случаях ряды Тейлора, применяемые для оценки ошибок аппроксимации, непригодны.

Бёрстейн и Мирин [1970, 1971] разработали схему расщепления для уравнений течения невязкого газа третьего порядка точности по пространственным переменным и времени. Схема третьего порядка точности в приложении к задаче о расчете обтекания затупленного тела с отошедшей ударной волной дала более точные значения давления, но менее точные значения плотности в точке торможения и потребовала втрое больше машинного времени, чем схема второго порядка точности. Другая схема третьего порядка точности приводится в работе Русанова [1970].

# Глава 6

# ДРУГИЕ РАСЧЕТНЫЕ СЕТКИ, СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Выше мы познакомились с основными понятиями и методами вычислительной гидродинамики на примере простейших задач, используя некоторые формы уравнений Навье — Стокса в декартовых координатах и представляя их в виде уравнений в конечных разностях на равномерных расчетных сетках с постоянными $\Delta x$ и $\Delta y$. В настоящей главе мы очень кратко рассмотрим некоторые особенности других систем координат и расчетных сеток, а также уравнения движения жидкости, отличающиеся от уравнений Навье — Стокса. Мы не будем углубляться в изучение этих вопросов из-за недостатка места и времени (а иногда и из-за того, что они не слишком интересуют автора и он недостаточно в них компетентен). Единственная цель настоящей главы состоит в том, чтобы разъяснить некоторые понятия и указать дополнительную литературу по этим вопросам. При этом мы предполагаем, что читатель уже знаком с предметом изложения.

Основная идея настоящей главы, несомненно, заключается в том, что обсуждение систем координат, расчетных сеток и уравнений, описывающих течение жидкости, является очень важным. (Например, переход от декартовых координат к сферическим далеко не тривиален.) Как и при аналитическом решении задачи, разумный выбор системы координат и возможных упрощений уравнений часто предопределяет успех.

## 6.1. Специальные расчетные сетки

Самое простое видоизменение прямоугольной расчетной сетки получается при изменении шага сетки в одном направлении в определенной узловой точке. Как правило, это делается для получения более высокой разрешающей способности сетки (и по возможности более точного решения) в той области, где градиенты параметров потока изменяются быстрее, например в пограничном слое.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим простейший способ перехода от шага $\Delta x_1$ между узлами сетки к шагу $\Delta x_2$ в некотором узле $i = m$ (рис. 6.1, *а*).

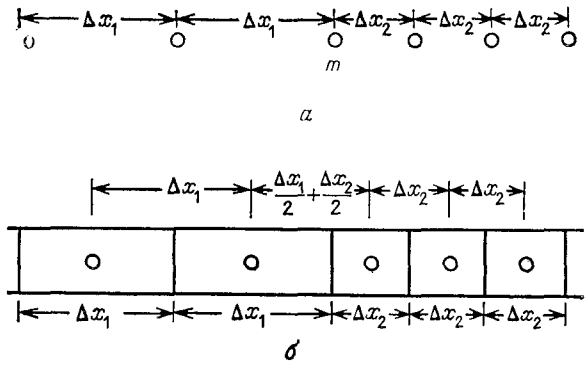



Рис. 6.1. Изменение шага сетки по пространству. *а* — однократное изменение расстояния между узлами сетки, *б* — однократное изменение размера ячейки.

Представим функцию $f$ в окрестности точки $i = m$ рядами Тейлора:

$$f_{m+1} = f_m + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_m \Delta x_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_m \Delta x_2^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_m \Delta x_2^3 + O(\Delta x_2^4), \tag{6.1}$$

$$f_{m-1} = f_m - \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_m \Delta x_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_m \Delta x_1^2 - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_m \Delta x_1^3 + O(\Delta x_1^4). \tag{6.2}$$

Выражение для $\partial f/\partial x|_m$ можно получить вычитанием равенства (6.2) из равенства (6.1):

$$f_{m+1} - f_{m-1} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_m (\Delta x_2 + \Delta x_1) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_m (\Delta x_2^2 - \Delta x_1^2) + O(\Delta x^3), \tag{6.3}$$

где $O(\Delta x^3)$ — наибольшая из величин $O(\Delta x_1^3)$ и $O(\Delta x_2^3)$. Разрешив последнее уравнение относительно $\partial f/\partial x|_m$, получим

$$\frac{\delta f}{\delta x}\Big|_m = \frac{f_{m+1} - f_{m-1}}{\Delta x_2 + \Delta x_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_m \frac{\Delta x_2^2 - \Delta x_1^2}{\Delta x_2 + \Delta x} + O(\Lambda x^2). \tag{6.4}$$

Это равенство показывает, что член

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_m = \frac{f_{m+1} - f_{m-1}}{\Delta x_2 + \Delta x_1} \tag{6.5а}$$

имеет второй порядок точности лишь в том случае, когда

$$O\left(\frac{\Delta x_2^2 - \Delta x_1^2}{\Delta x_2 + \Delta x_1}\right) \leqslant O(\Delta x_1^2). \tag{6.5б}$$

Заметим, что если величина $\Delta x_2/\Delta x_1 \ll 1$, то точности представления в точке $m$ ухудшается до первого порядка малости относительно $\Delta x_1$ (см., например, Блоттнер и Роуч [1971]).

Выражение для второй производной получается умножением равенства (6.2) на $s^2 = (\Delta x_2/\Delta x_1)^2$ и сложения полученного результата с равенством (6.1):

$$f_{m+1} - (1+s^2) f_m + s^2 f_{m-1} = \\ = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_m \Delta x_2 (1-s) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_m \Delta x_2^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_m \Delta x_2^2 (\Delta x_2 - \Delta x_1) + \\ + O(\Delta x^4), \quad (6.6)$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\Big|_m = \frac{f_{m+1} - (1+s^2) f_m + s^2 f_{m-1}}{\Delta x_2^2} - \frac{\delta f}{\delta x}\Big|_m \frac{1-s}{\Delta x_2} + O[(\Delta x_2 - \\ - \Delta x_1), \Delta x^2]. \quad (6.7)$$

Для того чтобы последнее выражение имело первый порядок точности в точке $i = m$, должно выполняться равенство $s = \\ = O(1 - \Delta x_1^2)$.

Сальвадори и Барон [1961] провели через точки $m$, $m+1$ и $m-1$ параболу и получили следующее выражение в конечных разностях:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\Big|_m = \frac{2}{s(s+1)} \frac{s f_{m+1} - (1+s) f_m + f_{m-1}}{\Delta x_2^2}. \quad (6.8)$$

Соответствующее выражение для первой производной дается формулой (6.5).

Причину более высокого порядка ошибки аппроксимации этих формул легко объяснить при помощи рассмотрения контрольного объема, как это требуется сделать в следующем упражнении.

*Упражнение.* Проведя границы ячеек между узловыми точками рис. 6.1, *а*, показать, что при $s \ll 1$ точка $m$ удалена от центра ячейки. При $s \to 0$ точка $m$ приближается к правой границе ячейки.

Можно несколько улучшить физическую интерпретацию, однократно меняя не шаг сетки $\Delta x$, а размер ячеек $\Delta x$, как показано на рис. 6.1, *б*. При этом нужны выражения для производных как в точке $m$, так и в точке $(m+1) = n$. Эти выражения аналогичны уже полученным.

*Упражнение.* Показать, что полученные выше формулы для $\delta f/\delta x$ и $\delta^2 f/\delta x^2$ консервативны.

Из приведенных выше выражений следует, что при быстром изменении шага сетки формальный порядок ошибки аппрокси-

мации на самом деле не улучшается, а ухудшается [1]). Так, Краудер и Дальтон [1969] провели численный эксперимент с пятью различными сетками с локально меняющимся шагом и пришли к выводу, что для рассматриваемой ими частной задачи наиболее точные результаты дает расчетная сетка с постоянным шагом (см., однако, Блоттнер и Роуч [1971]). Напомним также о явлении отражения волн от места изменения шага сетки, упоминавшемся в разд. 5.4.4. Однако при расчетах было обнаружено, что потеря точности всего решения, особенно при изолированном изменении шага сетки, не столь велика, как это следует из формулы для ошибки аппроксимации (см., например, Мак-Кормак [1971], Шаве и Ричардс [1970], Магнус и Иосихара [1970]). Хотя вопрос окончательно не исследован, но уже ясно, что обычно предпочтительный метод повышения локальной разрешающей способности сетки заключается в *преобразовании координат*, которое будет рассматриваться в разд. 6.2. Но прежде мы рассмотрим еще ряд вопросов, связанных с расчетными сетками.

Геометрические схемы для одновременного изменения величин обоих шагов $\Delta x$ и $\Delta y$ рассматривались в работах Синнота [1960], Ранчела с соавторами [1969], Гиллиса и Лирона [1969], Кейкера и Уайтло [1970], Даусона и Маркуса [1970]. Бахвалов [1959] использовал мелкую сетку с формулами второго порядка у границ, стыкующуюся с грубой сеткой с формулами более высокого порядка во внутренних точках. Преимущества однократного изменения размера ячеек по сравнению с непрерывным изменением обсуждались в работе Робертса [1971]. Проблемы стыковки сеток для схемы Лакса — Вендроффа (разд. 5.5.5) рассматривал Саймент [1968]. Спеньер [1967] рассматривал методы чередующихся направлений (разд. 3.1.16 и 3.2.6) на сетках с меняющимся шагом. Бёрдсли [1971] применял полярную сетку с постоянным шагом по углу и с параболическим изменением шага по радиусу; в случае невязкой жидкости для решения уравнения вихря около точки $r = 0$ здесь потребовались некоторые модификации.

Изменение пространственной сетки для решения, развивающегося во времени, часто оказывается желательным для более подробного описания областей с резко меняющимися в пространстве градиентами. Преобразование решения уравнений из

[1]) Схемы конечно-разностного представления конвективных членов, которые имеют первый порядок точности на равномерных расчетных сетках (конечные разности против потока), не ухудшаются при изменении шага сетки, в то время как схемы представления диффузионных членов ухудшаются. Для получения второго порядка точности требуются четырехточечные формулы (см. Саусвелл [1946]). Пирсон [1968] использовал трехточечные формулы на сетках с автоматически изменяющимся шагом для квазиодномерного расчета распространения ударной волны.

одной сетки в другую называется перестройкой ячеек. Перестройка ячеек сама по себе может изменить решение, внося, например, сглаживающий эффект (в некотором роде искусственная диффузия) или ошибки, связанные с нарушением консервативности. Разработка машинных программ, осуществляющих перестройку ячеек в зависимости от развития во времени решения, является важной и интересной проблемой (см. в этой связи работы Месона и Торна [1970], Батлера [1971] и Кроули [1971]).

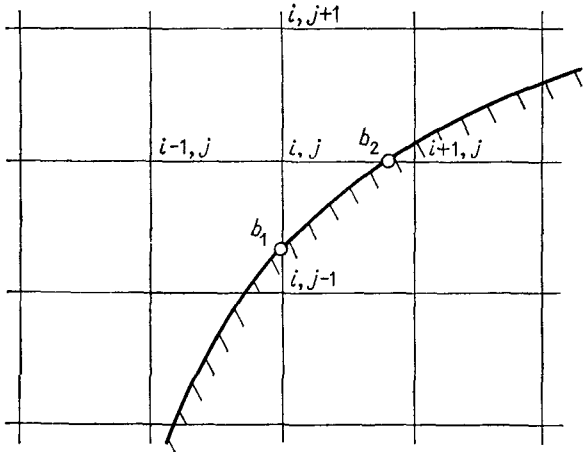



Рис. 6.2. Точки нерегулярной границы на прямоугольной сетке.

Приведенные выше формулы, применимые в случае переменных $\Delta x$ и $\Delta y$, использовались также для описания нерегулярных границ на прямоугольной сетке. Как показывает рис. 6.2, для того чтобы значения в смежной с границей точке $(i, j)$ согласовывались с значениями в точках $b_1$ и $b_2$, требуются формулы с меняющимися величинами $\Delta x$ и $\Delta y$. Эта процедура предложена давно и иногда дает, по-видимому, вполне удовлетворительные результаты (см., например, работы Сальвадори и Барона [1961], Томана и Шевчика [1966], Синглтона [1968], Техейры [1966] и Даусона и Маркуса [1970] для сеток в декартовых координатах, а также работу Лизена [1964] для цилиндрической функции тока при нерегулярной границе). Однако мы настойчиво рекомендуем воздерживаться от этой процедуры по следующим причинам.

(1) Формальный порядок ошибки аппроксимации, как показано выше, увеличивается. Заметим, что для произвольной искривленной границы типа крылового профиля (Синглтон [1968]) в общем случае в равномерной сетке может обнаружиться не-

которая внутренняя узловая точка, расположенная очень близко к границе; при этом величины $\Delta x_2/\Delta x_1$ и $\Delta y_2/\Delta y_1$ становятся весьма малыми и, следовательно, формальный порядок ошибки аппроксимации существенно возрастает.

(2) Скорость сходимости уменьшается (Техейра [1966]), и часто бывает трудно определить оптимальные релаксационные параметры (разд. 3.2.4, 3.2.6, 3.2.7).

(3) Условия устойчивости могут стать весьма жесткими. Заметим, что обычное ограничение по числу Куранта дает неравенство $\Delta t \leqslant \Delta x/u$ (или его двумерный аналог). Если уменьшать величину $\Delta x$ возле границы, то максимум величины $\Delta t$ может быть ограничен этим локальным условием. Если имеются границы с условиями прилипания, то ограничение, накладываемое на конвективные члены, может и не быть чрезмерным, так как величина $u$ также локально мала; однако для вязких членов и для границ со скольжением эти локальные условия, по-видимому, будут играть решающую роль.

(4) Программа становится более сложной, и поэтому увеличивается как затрачиваемое на ее составление время, так и вероятность появления ошибок.

Проблемы аппроксимационной сходимости решений эллиптических уравнений при нерегулярных границах на прямоугольных сетках обсуждались в работах Турайсами [1969а, 1969б]. Сходимость итеративного процесса решения эллиптических уравнений с градиентными граничными условиями на искривленной поверхности рассматривалась в работе Метина [1968]. Всем, кто применяет этот подход, можно рекомендовать ознакомиться с приведенным в работе Чена с соавторами [1969] подробным описанием проблем, возникающих при использовании прямоугольных сеток в расчетных областях с границами в виде искривленных свободных поверхностей.

Другим методом описания нерегулярных границ является метод локальной привязки к данной границе криволинейной четырехугольной сетки. Заманчив метод, в котором используется автоматическое построение сеток посредством разбиения области эквипотенциальными линиями (Уинсло [1963], Сакетт и Хили [1969]), причем положение узлов сетки находится из решения эллиптического уравнения на равномерной сетке. Годунов и Прокопов [1968] рассмотрели локальные криволинейные неортогональные сетки для решения обобщенного уравнения Лапласа (с переменными коэффициентами).

Как и в случае методов для получения высокой локальной разрешающей способности, наиболее предпочтительным методом рассмотрения непрямоугольных границ является метод выбора непрямоугольной системы координат (или преобразования

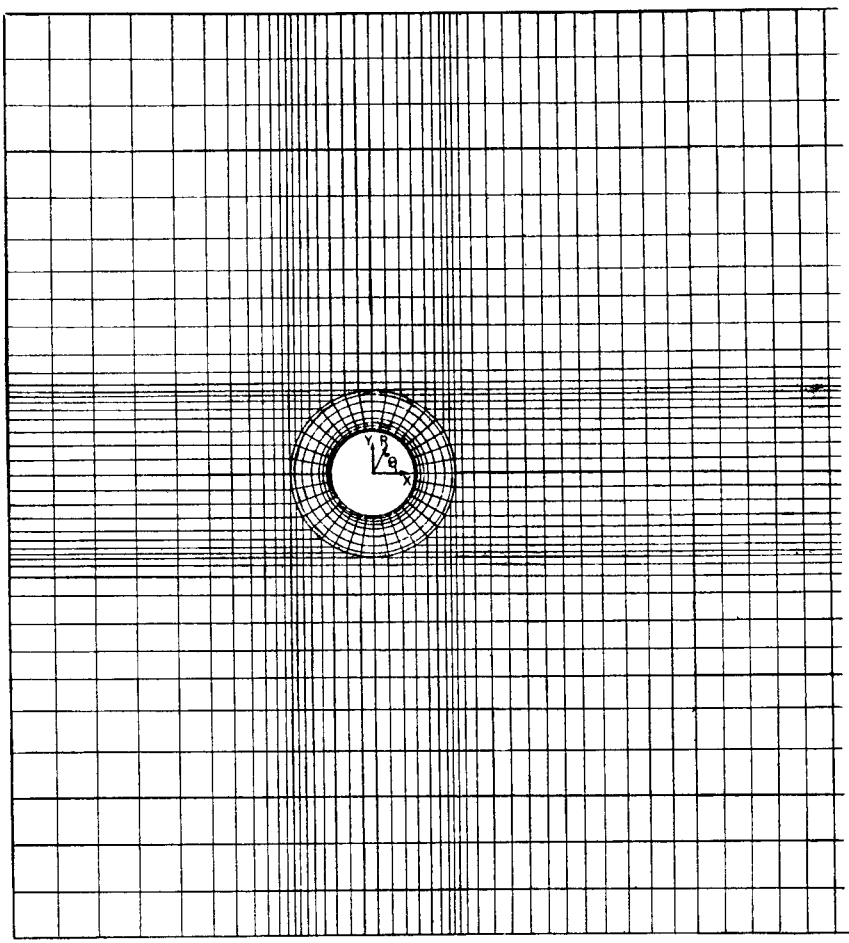



Рис. 6.3а. Структура гибридной расчетной сетки, использованной в работах Томана и Шевчика [1966, 1969].

координат), координатные линии которой совпадают с границами.

При стыковке с границами нерегулярной формы весьма удобен треугольный элемент расчетной сетки. На треугольной сетке удобно аппроксимировать эллиптическое уравнение Пуассона, что и делается в методе конечных элементов при расчете строительных конструкций. Уинсло [1966] проводил решение квазилинейного уравнения Пуассона на неоднородной треугольной сетке. Уильямсон [1969] рассматривал решения двух- и че-

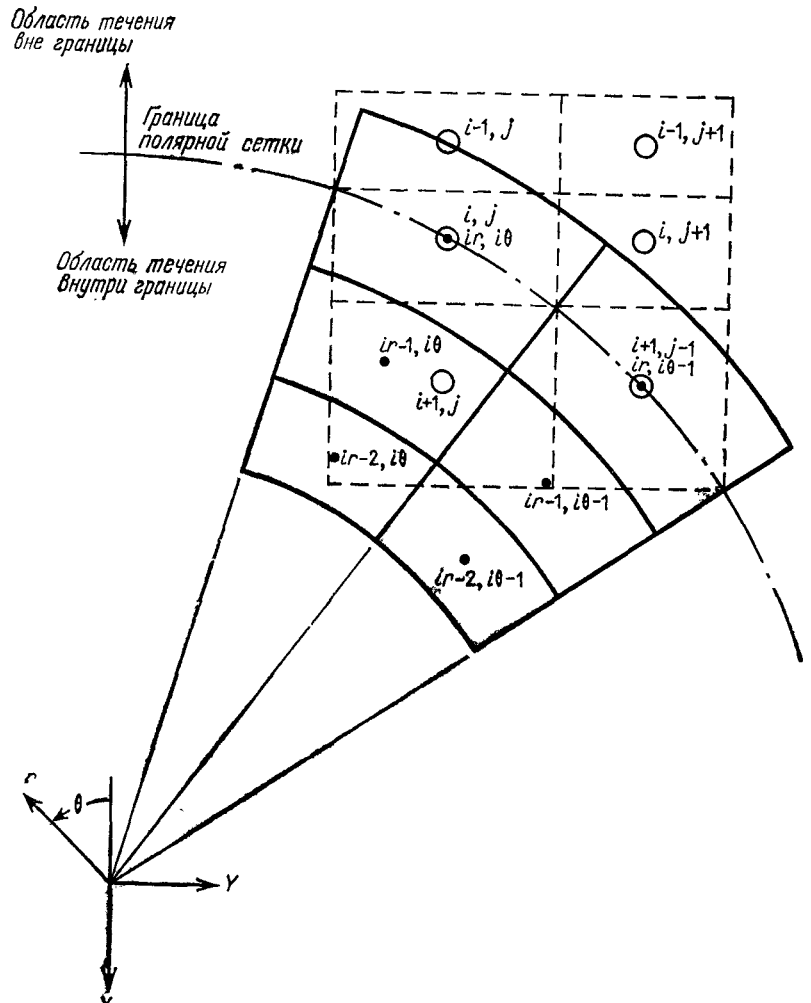



Рис. 6.3б. Двойственное определение ячеек гибридной расчетной сетки, использованной в работах Томана и Шевчика [1966, 1969], вблизи линии раздела. Точки означают центры ячеек полярной сетки, кружки — центры ячеек прямоугольной сетки, кружки с точками внутри — общие центры ячеек полярной и прямоугольной сеток.

Типы ячеек: тип A — ячейки $(i-1, j)$, $(i-1, j+1)$, $(i, j+1)$; тип B — ячейки $(ir-2, i\theta)$, $(ir-2, i\theta-1)$, $(ir-1, i\theta)$, $(ir-1, i\theta-1)$; тип C — ячейки $(i, j)$, $(i+1, j+1)$; тип $D$ — ячейки $(ir, i\theta)$, $(ir, i\theta-1)$; тип $E$ — ячейка $(i+1, j)$.

тырехмерных аналогов уравнений переноса вихря в невязкой жидкости на произвольных треугольных сетках. Он разработал ряд схем, сохраняющих массу, количество движения и энергию. Биззел с соавторами [1970] решал задачи потенциальных течений со свободными поверхностями на нерегулярных треугольных сетках. Садурни и Морел [1969] рассматривали применение гексагональных сеток для сферической поверхности (для поверхности Земли) и разработали метод, сохраняющий массу, общее количество движения, суммарную кинетическую энергию и квадрат вихря для уравнения в недивергентной форме. Задачи с использованием квазиоднородных сеток на сферических поверхностях (например, с элементами сетки в виде сферических треугольников) рассматривали Садурни с соавторами [1968] и Уильямсон [1968, 1971]. При исследовании конвекции Брайен [1966] применял нерегулярные, в частности полиэдральные, сетки и предложил метод, сохраняющий кинетическую энергию. Для представления вязких членов конечными разностями на какой-либо из этих расчетных сеток до сих пор не существует удовлетворительных схем. Боули и Принс [1971] обобщили двухшаговую схему Лакса — Вендроффа на девятиточечные формулы, включающие вязкие члены, на трапецеидальной сетке, однако в их работе не приводится никаких подробностей.

Наконец, следует особо отметить гибридную расчетную сетку, использовавшуюся в работах Томана и Шевчика [1966, 1969] и изображенную на рис. 6.3а и 6.3б. Требуемое разрешение вблизи круговой поверхности достигнуто за счет изменения шага сетки в радиальном направлении. Шаг в прямоугольной сетке выбирается таким образом, чтобы в местах стыковки двух сеток центры ячеек полярной и прямоугольной сеток совпадали. (Простая стыковка прямоугольной и полярной систем координат применялась в работе Хёрда и Петерса [1970] для решения более простой задачи о течении жидкости в закругленном колене между двумя прямолинейными каналами).

## 6.2. Преобразования координат

Преобразование координат может проводиться как для совмещения координатных линий с физическими границами, так и для увеличения разрешения в отдельных областях течения. С первой из этих целей преобразование координат используется, например, при описании плоского обтекания цилиндра в полярных координатах $(r, \theta)$ вместо прямоугольных. Такой тип преобразований координат будет описан в разд. 6.3.

Вторая цель преобразования координат (для увеличения разрешения в отдельных областях) иногда достигается вместе с первой, как, например, в случае плоских эллиптических коорди-

нат в задаче об обтекании плоской пластины (Бао и Догерти [1969]). Чаще, однако, увеличения разрешения можно добиться при помощи какого-либо растяжения координат. Как уже было указано выше (см. также Тейлор [1969], Блоттнер и Роуч [1971]), такие преобразования координат в общем случае дают более точные результаты, чем дробление шага сетки. Одним из наиболее распространенных преобразований такого рода является экспоненциальное растяжение. Бао и Догерти [1969] преобразовывали декартовы координаты $(x, y)$ в координаты $(X, Y)$ при помощи соотношений

$$x = X, \tag{6.9а}$$

$$y = b\,(e^{aY} - 1), \tag{6.9б}$$

где $a$ и $b$ — произвольные постоянные, служащие для выбора величины растяжения соответственно областям течения. Запишем уравнения (неконсервативные) для вихря и функции тока в старых координатах $(x, y)$:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u\frac{\partial \zeta}{\partial x} - v\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\zeta, \tag{6.10}$$

$$\nabla^2\psi = \zeta, \tag{6.11}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{6.12}$$

где

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{6.13}$$

После преобразования (6.9) эти уравнения принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{e^{-aY}}{ab}\left(\frac{\partial \psi}{\partial Y}\frac{\partial \zeta}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X}\frac{\partial \zeta}{\partial Y}\right) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\tilde{\nabla}^2\zeta, \tag{6.14}$$

$$\tilde{\nabla}^2\psi = \zeta, \tag{6.15}$$

где

$$\tilde{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{e^{-2aY}}{a^2b^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial Y^2} - \frac{a\partial}{\partial Y}\right]. \tag{6.16}$$

Такое экспоненциальное растяжение впервые применил, по-видимому, Йенсен [1959] при изучении обтекания сферы несжимаемой жидкостью. Сон и Ханратти [1969], Гамилец с соавторами [1967а, 1967б] и Римон и Чен [1969] использовали его для задач об обтекании сферы несжимаемой жидкостью, Сон и Ханратти [1969] и Гамилец и Рааль [1969] — для задач об обтекании цилиндров несжимаемой жидкостью, Скоглунд с соавторами [1967] и Скоглунд и Гей [1968] — для задачи о взаимодействии ударной волны с пограничным слоем на плоской пластинке и,

наконец, Бао и Догерти [1969] — для задачи об обтекании плоской пластинки несжимаемой жидкостью.

Цель подобных преобразований растяжения та же, что и при деформации расчетных сеток, которая обсуждалась выше в разд. 6.1, — добиться увеличения разрешения в определенной области. Заметим, однако, что эти два подхода *по существу различны* [1]). Когда непреобразованные уравнения представляются уравнениями в конечных разностях на растянутой расчетной сетке, то, как мы видели выше, в результате получается ухудшение формальной точности; напротив, преобразованные уравнения могут быть представлены уравнениями в конечных разностях на равномерной расчетной сетке (например, с постоянными $\Delta X$, $\Delta Y$) без ухудшения порядка формальной точности с той лишь разницей, что порядок ошибки будет равен $O(\Delta Y^2)$, а не $O(\Delta y^2)$. Следовательно, в этом случае предпочтительнее преобразование координат. О потенциальных возможностях преобразования координат свидетельствует тот факт, что при помощи соответствующего параболического преобразования координат можно получить точное решение для течения Пуазейля на расчетной сетке, содержащей всего *одну внутреннюю точку* (Блоттнер и Роуч [1971]).

Наверное, наиболее удачным и важным конечным преобразованием координат является преобразование, примененное Моретти (Моретти и Аббетт [1966б]; Моретти и Блейх [1967, 1968]) [2]) для двумерных и трехмерных задач расчета отошедшей ударной волны перед затупленным телом в потоке невязкого газа, а также Моретти и Саласом [1969, 1970] для течений вязкого газа [3]) (см. также Моретти [1969а, 1969б]). Произвольная точка, находящаяся между поверхностью тела и ударной волной (рис. 6.4), имеет координаты $(r, \theta)$ в полярной системе координат с полюсом, лежащим внутри тела. Расчет течения ведется до некоторого луча $\theta_{max}$, выбираемого таким образом, чтобы на этом луче поток был сверхзвуковым. Затем область,

[1]) К сожалению, многие авторы употребляют термин «растянутая расчетная сетка» (что справедливо лишь в том смысле, что координаты узлов после преобразования рассматриваются в растянутой шкале) в тех случаях, когда фактически производится преобразование уравнений.

[2]) Такое преобразование координат в задаче о расчете сверхзвукового обтекания тела с отошедшей ударной волной задолго до Моретти ввел О. М. Белоцерковский; см. Белоцерковский О. М. Обтекание кругового цилиндра с отошедшей ударной волной. — ДАН СССР, 1957, т. 113, № 3, с. 509—512. В дальнейшем это преобразование неоднократно использовалось многими авторами. — *Прим. ред.*

[3]) В более ранней работе Годунов с соавторами [1959] подобным же образом исследовали ударную волну как разрыв непрерывности. Их метод тесно примыкает к хорошо разработанному методу, известному как метод Годунова (см. разд. 5.5.8) и по существу скорее является методом изменения сетки, нежели преобразованием координат.

ограниченная ударной волной, осью симметрии, поверхностью тела и линией $\theta = \theta_{max}$, преобразуется в прямоугольник в плоскости $(X, Y)$ при помощи соотношений

$$X = \frac{r - r_b(\theta)}{r_s(\theta) - r_b(\theta)}, \quad X \in [0, 1], \tag{6.17а}$$

$$Y = \pi - \theta, \quad Y \in [\pi - \theta_{max}, \pi], \tag{6.17б}$$

где $r_b(\theta)$ и $r_s(\theta)$ — значения координаты $r$ поверхности тела и ударной волны соответственно. Преобразованные уравнения записываются в конечных разностях на сетке с постоянными шагами $\Delta X$ и $\Delta Y$ при помощи метода Моретти (разд. 5.5.8), который обычно считается методом типа Лакса — Вендроффа

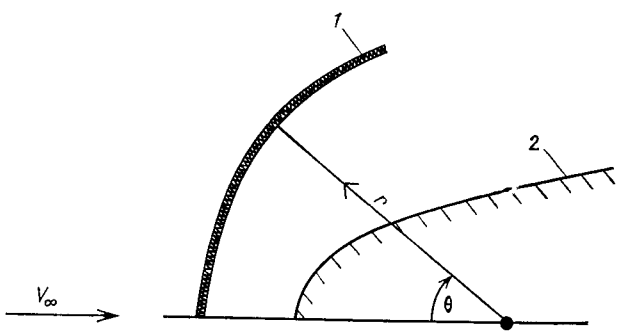



Рис. 6.4. Преобразование Моретти для расчета двумерного течения около затупленного тела с отошедшей ударной волной. *1* — ударная волна, *2* — поверхность обтекаемого тела.

(разд. 5.5.5), хотя на самом деле члены типа $\partial^2 f/\partial x\,\partial t$ получаются в нем путем дифференцирования по пространственной переменной первоначальных уравнений, как в методе Лейта (разд. 3.1.13). Решение преобразованных уравнений осложняется из-за неортогональности $X$ и $Y$.

Координата $r_s(\theta)$ ударной волны, разумеется, находится в результате решения, поэтому и само преобразование координат меняется в процессе построения решения. Зависящая от времени величина $r_s(\theta)$ находится путем расчета пространственного положения ударной волны по соотношениям Рэнкина — Гюгонио поперек скачка, начиная с некоторого предположительного начального значения. (Узловая точка $X = 1$ находится непосредственно позади ударной волны.)

Вся вычислительная процедура довольно сложна, но получающиеся результаты окупают затраченный труд. Ввиду того что ударная волна рассматривается как разрыв непрерывности, погрешности, связанные с размазыванием ударной волны (см.

разд. 5.3—5.5), отсутствуют. Кроме того, точность повышается за счет совпадения поверхности тела с координатной линией. (Значения в точках, лежащих на границе тела, вычисляются при помощи нестационарного метода характеристик.) Даже на грубых сетках достигается очень высокая точность, что приводит к вполне приемлемому времени счета. Достаточно точные результаты могут быть достигнуты даже при одной узловой точке между телом и ударной волной, что можно сопоставить с решениями, полученными с помощью однополосного метода интегральных соотношений (см. Хомич и Джордж [1970]). Де Соза с соавторами [1971] при расчете обтекания воздухозаборника двигателя применяли тороидальные координаты.

К сожалению, главные достоинства метода Моретти часто указываются неверно. Моретти не применял консервативных уравнений, и часто утверждают, что расчет течений с выделением ударной волны с помощью преобразования Моретти предпочтительнее расчета с помощью консервативных уравнений. На самом деле метод Моретти должен противопоставляться не схемам с консервативными уравнениями, а подходу с размазыванием ударных волн (разд. 5.3). Успех применения метода Моретти зависит главным образом от выбранного преобразования, связанного с выделяемой ударной волной, и от точного учета условий на поверхности тела, а не от отсутствия свойства консервативности использованных уравнений и даже не от варианта конечно-разностной схемы, принятой для расчета во внутренних точках. Так, например, Барнуэлл [1971] рассчитывал трехмерную задачу обтекания с отошедшей ударной волной, применяя и преобразование Моретти, и разновидность схемы Брайловской (разд. 5.6.3), основанную на *консервативных* уравнениях. Ксерикос [1968] в такой же трехмерной задаче применял преобразование Моретти в сочетании со схемой Лакса (разд. 5.5.4) для внутренних точек; Ли [1971] рассчитывал осесимметричное обтекание затупленных тел с химическими реакциями по схеме Мак-Кормака (разд. 5.5.6). Томас с соавторами [1971] также использовал в трехмерной задаче преобразование для ударного слоя, применяя при этом схему Мак-Кормака для продвижения решения по одной из пространственных координат.

Вместо того чтобы противопоставлять методы выделения скачка и методы размазывания скачка (сквозные методы), следует воспринять лучшее, что в них есть. Выделение скачка можно применять для повышения точности расчетов в случае относительно простой головной ударной волны, в то время как сквозные методы можно применять во внутренних точках для улавливания не предполагавшихся заранее скачков или систем висячих скачков сложной формы типа полученных в расчетах Катлера и Ломекса [1971].

Следует также заметить, что в методе Моретти для внутренних точек, как и во всех схемах Лакса — Вендроффа, при решении стационарных задач с меньшими единицы числами Куранта для потока на выходе проявляется влияние зависящей от $\Delta t$ схемной искусственной вязкости (Роуч [1971в]; см. также приложение Б).

Гониду [1967] рассматривал выделение скачков с преобразованием типа Моретти. В статье Ксерикоса [1968] приведены результаты расчетов головной ударной волны и ударной волны перед раструбом («юбкой») на теле. Эта работа рекомендуется для ознакомления с подробностями расчета положения ударной волны и расчета точек на центральной линии ($r = 0$) для несимметричных течений. Павлов [1968б] также применял преобразование ударного слоя (6.17а) при расчете течений вязкого газа с малыми числами Рейнольдса. Мигдал с соавторами [1969] использовал преобразование типа (6.17а) для отображения сопла на прямоугольную область. Лапидус [1967] рассматривал преобразование, отображающую область между произвольной входной границей и телом на прямоугольник. Он показал, что подобные преобразования сохраняют консервативность. Онже [1971] также применял метод Моретти выделения скачков.

При помощи преобразования типа (6.17) Браиловская [1967] отображала на прямоугольную область окрестность угловой точки с расширением потока, кроме того, вводилось логарифмическое сгущение (что эквивалентно экспоненциальному растяжению) для достижения большего разрешения вблизи стенки; расчет во внутренних точках осуществлялся по схеме Браиловской (разд. 5.6.3).

Аналогичную подвижную сетку в ударном слое (а не преобразование координат) в сочетании со схемой Годунова (см. разд. 5.5.8) применяли для расчета невязкого двумерного обтекания затупленных тел Годунов с соавторами [1961], Макнамара [1966, 1967], Мессон с соавторами [1969], Тейлор и Мессон [1970].

Другой подход к расчету разрывов на эйлеровой сетке продемонстрировал Макнамара [1966, 1967]. В рассмотренном им случае разрывом являлась контактная поверхность, образовавшаяся при взаимодействии двух косых скачков. Осесимметричная эйлерова сетка периодически подстраивалась для прослеживания движения этой контактной поверхности. Неточность в виде появления точки возврата у ударной волны вблизи ее пересечения с линией тока торможения имела место из-за отсутствия согласованности при расчете движения сетки. Разработка методов расчета скачков и контактных разрывов продолжает привлекать большое внимание исследователей.

Пытаясь моделировать обтекание кожи дельфина, Калугин и Панчук [1971] применяли преобразование, совмещающее координатную линию с движущейся волнообразной стенкой.

Когда параметры задачи меняются в широком интервале, разрешение может также быть улучшено преобразованием искомых функций. Моретти и Аббетт [1966б] рассчитывали течения сжимаемой жидкости, вводя новые зависимые переменные $\tilde{P} = \ln P$ и $\tilde{\rho} = \ln \rho$; аналогичные преобразования применяли Скала и Гордон [1967]. (Другие преобразования зависимых переменных будут обсуждаться в разд. 6.3.)

При проведении преобразования растяжения необходимо иметь в виду следующие моменты [1]).

(1) Преобразование оказывает влияние на устойчивость и сходимость. Например, для непреобразованного уравнения (6.10) справедливо одномерное условие устойчивости по числу Куранта $u\Delta t/\Delta x \leqslant 1$, а для преобразованного уравнения (6.14) оно принимает вид

$$\frac{e^{-aY}}{ab}\frac{\partial \psi}{\partial Y}\frac{\Delta t}{\Delta X} \leqslant 1, \tag{6.18}$$

а не вид $\frac{\partial \psi}{\partial Y}\frac{\Delta t}{\Delta X} \leqslant 1$. Кроме того, можно ожидать, что система (6.15), (6.16) будет сходиться иначе, чем система (6.11), (6.12).

(2) Граничные условия и в особенности соотношение для вихря на стенке (см. разд. 3.3.2) необходимо переформулировать в преобразованных координатах.

(3) Консервативность может быть утеряна или по меньшей мере интерпретироваться иначе.

(4) При преобразовании координат могут появиться (или, наоборот, исчезнуть) особые точки.

(5) Увеличение разрешения не всегда влечет за собой увеличение точности, что особенно существенно при наличии ошибок аппроксимации граничных условий; см. замечания в разд. 3.3.1.

(6) Волновые свойства решений могут искажаться из-за ошибок, обусловленных затуханием, фазовых ошибок и ошибок, обусловленных неразличимостью.

(7) Машинное время продвижения решения на один шаг возрастает.

(8) Преобразования типа преобразования Моретти для ударного слоя неприменимы к задачам, в которых скачки развиваются при слиянии непрерывных волн сжатия в течении вязкого газа, как это происходит в задаче о взаимодействии ударной волны с пограничным слоем. Не представляются такие преобразования целесообразными и в задачах со сложными системами отраженных и пересекающихся скачков.

[1]) Эти общие замечания применимы также и к растяжению сеток.

Итак, мы рассмотрели преобразования конечной области на конечную. Другим широко распространенным типом преобразований является отображение бесконечной области на конечную, впервые, кажется, примененное Ваном и Лонгуэллом [1964] [1]). При помощи стационарных уравнений они рассчитывали задачу о входе потока в воздухозаборник, причем система координат $(x, y)$ выбиралась так, что $x = 0$ в плоскости входа в трубу, а затем координата $x$ преобразовывалась по следующей формуле

$$X = 1 - \frac{1}{1 + cx}. \tag{6.19}$$

При $c > 0$ и $x > 0$ преобразование отображает полубесконечную область $0 \leqslant x \leqslant \infty$ на область $0 \leqslant X \leqslant 1$, а при $c < 0$ и $x < 0$ отображает полубесконечную область $-\infty \leqslant x \leqslant 0$ на область $0 \leqslant X \leqslant 1$. Пусть

$$a = \frac{dX}{dx} = \frac{c}{(1 + cx)^2}, \tag{6.20}$$

$$b = \frac{d^2X}{dx^2} = \frac{-2c^2}{(1 + cx)^3}; \tag{6.21}$$

тогда

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -a\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\tilde{\nabla}^2\zeta, \tag{6.22}$$

$$\tilde{\nabla}^2\psi = \zeta, \tag{6.23}$$

$$\tilde{\nabla}^2 = b\frac{\partial}{\partial X} + a^2\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{6.24}$$

Цель подобных преобразований состоит в том, чтобы в конечно-разностных уравнениях можно было применять аналитические граничные условия на бесконечности (см. замечания в разд. 3.3.10 и 3.3.11). Поэтому в своей задаче Ван и Лонгуэлл [1964] могли ставить условие однородного потока на входной границе и условие полностью развитого течения Пуазейля на выходной границе. Моретти [1969а, 1969б] также одобрял подобные преобразования. Силлс [1969] рассмотрел три класса отображений бесконечных областей на конечные, причем каждое из них имело удобное явное обратное отображение:

$$X_1 = \frac{ax^b}{ax^b + 1}, \qquad [0, \infty] \to [0, 1], \tag{6.25}$$

$$X_2 = 1 - e^{-ax}, \qquad [0, \infty] \to [0, 1], \tag{6.26}$$

$$X_3 = \mathrm{th}\,(ax), \qquad [-\infty, \infty] \to [-1, 1] \tag{6.27}$$

[1]) Отображение бесконечной области на конечную при помощи преобразования $t = \exp(-\xi)$, где $\xi$ — эллиптическая координата, проводилось и до этого; см., например, Чушкин П. И. Расчет обтекания профиля и тела вращения в дозвуковом потоке. — В кн.: Вычислительная математика, № 3. — М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 99—110. — *Прим. ред.*

(здесь $a$ и $b$ — произвольные положительные постоянные). Силлс [1969] обсуждал также формулы для преобразования производных и обратные преобразования; он заметил, что преобразования, основанные на функциях arc tg $x$ и erf $x$, хотя и дают нужные отображения, но не удобны для приложений. Мета и Лаван [1968] использовали преобразование

$$X = \frac{1 + \text{th}\,[a\,(x + 1/2)]}{1 + \text{th}\,(a/2)}, \tag{6.28}$$

которое отображает $[-\infty, 0]$ на $[0, 1]$ с точкой перегиба при $x = -1/2$. Лаван с соавторами [1969] отобразил $[-\infty, +\infty]$ на $[0, 1]$ при помощи преобразования

$$X = [1 + \text{th}\,(ax)]/2. \tag{6.29}$$

Мигдал с соавторами [1969] преобразовал поперечную координату сопла при помощи преобразования типа (6.17а) так, чтобы сопло отображалось на прямоугольную область; кроме того, в этой работе область от $x = 1$ (срез сопла) до $x = -\infty$ была отображена на область $X \in [0, 1]$ при помощи преобразования

$$X = \frac{1 + e^{-2x}}{1 + e^{-2x/x_0}}. \tag{6.30}$$

Тейлор [1969] рассматривал задачи для $x \in [0, \infty]$, применяя регулярную прямоугольную сетку для $x \in [0, 1]$. Для $x > 1$ область $[1, \infty]$ отображалась на конечную область одним из следующих преобразований:

$$X_1 = -1/x, \tag{6.31}$$

$$X_2 = -1/(1 + x)^2, \tag{6.32}$$

$$X_3 = -e^{-x}, \tag{6.33}$$

для каждого из которых $dX/dx > 0$. Тейлор также рассматривал задачу о стыковке двух систем координат.

Кенцер [1970а, 1970б] рассчитывал трансзвуковое обтекание цилиндра, мгновенно помещенного в равномерный поток невязкого газа. При этом формировалась и распространялась наружу ударная волна. Эта волна в дальнейшем рассматривалась как поверхность разрыва, а область между ней и телом отображалась на прямоугольную при помощи зависящего от времени неортогонального преобразования к криволинейным координатам. В пределе при $t \to \infty$ этот метод приближается к методу отображения бесконечной области на конечную, однако Кенцер

отмечает, что более простое отображение бесконечной области на конечную, не зависящее от времени, здесь непригодно, поскольку возмущение (ударная волна) достигает бесконечности за *конечное число* шагов по времени. Фиксированная конечная сетка также непригодна для этой задачи, поскольку скачок отражался бы от границы сетки. Преимущество метода Кенцера состоит в том, что при его применении задача оказывается математически корректно поставленной и при постановке граничных условий на удаленных границах не требуется каких-либо ухищрений.

В дополнение к замечаниям по поводу преобразований растяжения, приведенным выше, отметим следующие положения, существенные для отображений бесконечных областей на конечные.

(1) Аналитические условия «на бесконечности» в качестве граничных условий на выходе потока не всегда оказываются предпочтительными, как это было отмечено в разд. 3.3.7—3.3.11 и 5.7.6. (Рассмотрим, например, расчет развития пограничного слоя на плоской пластинке; если преобразуется только координата $x$, то правильным условием на бесконечности вниз по потоку будет $u = v = 0$ для *любого* конечного расстояния $y$.)

(2) Интуитивно представляется, что полученные при преобразовании условия на бесконечности менее точны, чем наилучшие из условий, приведенных в разд. 3.3.7, в тех случаях, когда течение на выходе является периодическим, типа вихревой дорожки в следе за телом. (Например, что произойдет в том случае, когда $\Delta x$ оказывается больше расстояния между вихрями в вихревой дорожке?)

(3) Отвлекаясь от вопроса об относительной точности аналитических и приближенных численных *граничных условий*, легко показать, что преобразования растяжения могут *уменьшить* точность результатов при расчетах во *внутренних точках* периодических течений, как это показывает следующее упражнение.

*Упражнение.* Рассмотрим уравнение $\partial\zeta/\partial t = -u(\partial\zeta/\partial x)$ с постоянной величиной $u$, моделирующее конвекцию в невязком газе. Если применить схему с разностями против потока, то конечно-разностное уравнение, как и уравнение в частных производных, не требует граничных условий на выходной границе и точное решение может быть получено на равномерной по $x$ сетке (см. разд. 3.1.8). Показать, что преобразования вида (6.19) — (6.22) приводят к невозможности получения точного решения для $u = \text{const}$.

В условиях этого упражнения точное решение преобразованной задачи можно получить в том случае, когда постоянна величина $u/(1+x)^2$, однако случай $u = \text{const}$ физически более реален.

Следует упомянуть некоторые другие виды преобразований. Аллен и Саусвелл [1955] рассчитывали обтекание цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью, вводя ортогональные координаты, образованные изолиниями потенциала скорости и функции тока потенциального (аналитического) решения. Том и Апельт [1961], а также Апельт [1969] применяли конформные отображения (или, как они их называли, симметроморфные фигуры) для отыскания системы криволинейных ортогональных координат при расчете обтеканий несжимаемой жидкостью. Аналогичные приемы применяли Бреннен [1969], а также Ли и Фын [1970]. Фройдигер с соавторами [1967] пользовался конформными отображениями при расчете течений сжимаемой жидкости.

При введении преобразования Крокко для уравнений пограничного слоя (см. Шлихтинг [1968]) скорость становится независимой переменной. Креншоу [1966] рассчитывал течения со свободным сдвиговым слоем при помощи приближения пограничного слоя (пренебрегая диффузией в направлении потока); он использовал координату по нормали не к линии тока, а к импульсной координате, т. е. рассматривал количество движения как независимую переменную. Поскольку количество движения является ограниченной функцией течения, конечно-разностная сетка выстраивается автоматически в процессе построения поля течения (см. также Креншоу и Хаббарт [1969]).

Ван де Вурен и Дейкстра [1970] рассчитывали обтекание плоской пластины несжимаемой жидкостью по уравнениям Навье — Стокса, сначала записав уравнения для $\zeta$ и $\psi$ в параболических координатах, а затем преобразовав их отображением на конечную прямоугольную область. При этом поперечная координата преобразовывалась при помощи автомодельного решения уравнений пограничного слоя первого порядка (решение Блазиуса), а координата вдоль потока — при помощи логарифмического соотношения, что позволяло устранить особую точку на передней кромке.

Армитедж [1967] пытался рассчитать трансзвуковое вихревое течение в координатах, связанных со стенками сопла. Уоткинс [1970] в своем исследовании отражений от закрытого конца ударной трубы отображал область между скачком и стенкой при помощи линейного преобразования; при этом между скачком и стенкой было фиксированное число расчетных ячеек. Андерсон с соавторами [1968] показал, как можно преобразовать уравнения для невязкой сжимаемой жидкости, чтобы они сохраняли консервативный (дивергентный) вид в любой криволинейной системе координат. Томпсон и др. разработали мощный метод *численного* построения систем криволинейных координат, связанных с поверхностью обтекаемого тела.

## 6.3. Другие ортогональные системы координат

В этом разделе содержатся сведения о применении ортогональных систем координат, отличающихся от декартовой системы. Для отдельных задач эти системы координат могут быть «естественными», например плоское обтекание тела параболической формы естественно рассчитывать в параболических координатах. В некоторых указанных приложениях применялись дальнейшие преобразования координат (скажем, экспоненциальное растяжение). Ниже выражение «$(\psi, \zeta)$-подход» будет означать расчет течения несжимаемой жидкости при помощи уравнений для функции тока и вихря (см. гл. 2 и 3) или их модификаций.

Плоские задачи при помощи $(\psi, \zeta)$-подхода рассчитывали в параболических координатах Ван де Вурен и Дейкстра [1970], а в эллиптических координатах — Бао и Догерти [1969] и Лил [1969]. $(\psi, \zeta)$-подход в цилиндрических координатах реализовали Кавагути [1953], Томан и Шевчик [1966, 1969] и Ричардс [1970].

$(\psi, \zeta)$-подход в сферических координатах осуществляли Йенсен [1959], Браун [1967], Римон и Чен [1969], а в цилиндрических координатах — Баракат и Кларк [1966], Майкл [1966], Торранс [1968], Шавит и Лаван [1971], Стробридж и Хупер [1968], Фридман с соавторами [1968], Фридман [1970], Ли и Фын [1970]. В последних трех работах рассматривались стационарные уравнения.

В различных работах уравнения записывались в различных формах. Эти формы, конечно, эквивалентны в случае уравнений в частных производных, но не обязательно остаются эквивалентными при переходе к конечным разностям. Торранс [1968] ввел модифицированный вихрь $\tilde{\zeta} = \zeta/r = \nabla \times \mathbf{V}/r$, и поэтому уравнения, записанные в цилиндрических координатах, не имели особой точки при $r = 0$. Заметим, что в осесимметричном случае $\zeta(r = 0) = 0$, однако $\tilde{\zeta}(r = 0) \neq 0$.

Гриффитс с соавторами [1969] использовал цилиндрические координаты для исследования задач вязкоупругости. Манкузо [1967] при помощи метода чередующихся направлений (см. разд. 3.3.6) численно решил уравнение Пуассона на сферической поверхности с граничными условиями типа Неймана. Эйзен [1967б] изучил аппроксимационную сходимость для сферически симметричного уравнения диффузии. Шульц [1964] рассматривал консервативный вид лагранжевых уравнений в цилиндрических координатах, причем искусственная вязкость имела тензорную форму. Фаччиоли и Анг [1968] разработали для сферически симметричного случая эйлерову схему, основанную на физических законах сохранения. Итон и Цумвальт [1967] в цилиндри-

ческих координатах рассчитывали взаимодействие взрывных волн.

Римон [1968], а также Римон и Люгт [1969] осуществили $(\xi, \psi)$-подход в сплюснутых сфероидальных координатах, в которых поверхность тела совпадает с эллипсоидом вращения, а ортогональными к нему координатными линиями являются гиперболы. Маслях и Эпштейн [1970] применяли как сплюснутые, так и вытянутые сфероидальные координаты. Де Соза с соавторами [1971] для расчета невязкого сжимаемого обтекания воздухозаборника двигателя ввел тороидальные координаты. Существуют и другие экзотические системы координат, применяемые в газодинамических расчетах, и мы дадим соответствующие ссылки. В книге Щелкунова [1965] приведены выражения операторов градиента, дивергенции, лапласиана и вихря в следующих системах координат: декартовой, цилиндрической, сферической, эллиптико-цилиндрической, вытянутой сфероидальной, сплюснутой сфероидальной, биполярной, тороидальной, биаксиальной, параболико-цилиндрической и параболоидальной. Ларсен [1969] обсуждал возможности применения суперэллиптической системы координат. Эта ортогональная система координат основана на кривых Ламе, определяемых уравнением

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1. \tag{6.34}$$

При различных значениях параметров $a$, $b$ и $n$ эти кривые образуют прямоугольники, эллипсы, ромбы, звезды, квадраты, круги, а также промежуточные фигуры. Крайне сложной системой координат являются рассмотренные Копалом [1969] координаты Роша, при построении которых используются эквипотенциальные поверхности вращающегося гравитационного диполя. Он предложил использовать эту систему координат при расчете газовых потоков в замкнутых бинарных системах (звездах).

Можно настойчиво рекомендовать учебник Берда с соавторами [1960], который содержит уравнения газодинамики с учетом вязкости, записанные в прямоугольной, цилиндрической и сферической системах координат, а также много другой полезной информации по газодинамике и другим процессам переноса. Цянь Сюэ-сень [1958] приводит уравнения Навье — Стокса для течения сжимаемой вязкой жидкости в ортогональных криволинейных координатах. (Однако ни в книге Берда с соавторами, ни в работе Цяня не приводится консервативная форма уравнений.) В работе Богачевского с соавторами [1965] дана консервативная форма уравнений течения невязкой сжимаемой жидкости в цилиндрических и сферических координатах. (Напомним отмеченный в гл. 4 факт, что введение консервативных

переменных влияет на вид вязких членов в уравнении энергии для сжимаемой жидкости.)

Применение различного рода систем координат, включающих в качестве координаты радиус (цилиндрической, сферической, параболоидной и др.), требует некоторых пояснений. Что касается свойства консервативности, здесь имеет место некая двусмысленность. В случае осевой симметрии уравнение неразрывности сжимаемой жидкости в цилиндрических координатах имеет вид (Берд с соавторами [1960])

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u) = 0. \tag{6.35}$$

Применяя любую из схем с разностями против потока или с центральными по пространственным переменным разностями (см. гл. 5), можно показать (задача 6.2), что это уравнение консервативно в смысле сохранения массы при протекании из одного цилиндрического контрольного объема в другой. Однако эта форма уравнения не является дивергентной формой, которая также имеет отношение к консервативности и важна с теоретической точки зрения (Лакс [1954]). Дивергентная форма уравнения неразрывности получается при введении консервативной переменной $\eta = \rho r$, как в следующем упражнении.

*Упражнение.* Показать, что уравнение (6.35) можно записать в дивергентной форме

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\eta v) + \frac{\partial}{\partial z}(\eta u) = 0, \tag{6.36}$$

где $\eta = \rho r$.

Аналогичные соотношения справедливы и для уравнений количества движения и энергии (см. Богачевский с соавторами [1965]). Заметим, что в этой дивергентной форме значение зависимой переменной на оси симметрии ($r = 0$) просто $\eta = 0$. Однако для вычисления градиента давления в узлах, отстоящих на один шаг от оси симметрии при $j = 2$, и для вычисления некоторых вязких членов необходимы значения основных переменных на оси симметрии. В осесимметричном случае наиболее *надежным* способом их получения является запись уравнений контрольного объема для конвективных членов на оси симметрии. (Заметим, что на оси симметрии, очевидно, $v = 0$.)

*Упражнение.* Показать, что уравнение неразрывности, записанное на оси симметрии ($j = 1$), имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{4(\rho v)_{3/2}}{\Delta r} = 0. \tag{6.37}$$

Такой подход обеспечивает консервативность, однако не дает возможности вычислить вязкие члены. Вопрос еще более услож-

няется при использовании цилиндрических или сферических координат при отсутствии осевой симметрии. Довольно грубым, но, очевидно, приемлемым подходом является возврат к декартовым координатам вблизи центральной линии. В настоящее время удобной методики учета особенности на центральной линии не имеется. *Ясно*, однако, что прием размещения узловых точек на расстоянии половины шага от центральной линии ($r = 0$ при $j = {}^3/_2$, например) и использования здесь тех же, что и во внутренних точках, аппроксимаций *некорректен.* Конечно-разностные уравнения *не могут быть записаны с переходом через линию* $r = 0$, потому что при $r = 0$ направление возрастания $r$ меняется на обратное. Аналогичная проблема возникает в сферических координатах при $\theta = 0$.

Машинное время и алгебраическая сложность записи вязких членов сильно возрастают для цилиндрических и в особенности для сферических координат по сравнению с декартовыми. Остается также открытым вопрос о наилучшей форме членов с явной искусственной вязкостью в непрямоугольных координатах. При помощи схемы Русанова (разд. 5.4.3) Итон (личное сообщение) рассчитывал осесимметричные вихревые течения и обнаружил, что ошибки можно значительно уменьшить, положив диффузионные члены на центральной линии равными нулю.

## 6.4. Другие системы уравнений

В настоящем разделе мы будем обсуждать следующие вопросы в порядке перечисления:

(1) Системы уравнений, являющиеся настолько сильными упрощениями системы уравнений Навье — Стокса, что при этом меняется тип уравнений.

(2) Не столь радикальные упрощения системы уравнений Навье — Стокса.

(3) Системы уравнений более сложные, чем уравнения Навье — Стокса.

(4) Различные способы выражения физических законов, лежащих в основе уравнений Навье — Стокса и других уравнений гидродинамики.

В первую очередь обсудим упрощение, связанное с предположением об *отсутствии вязкости*, что приводит к *потенциальным течениям*, к *методу характеристик* и к *теории трансзвуковых течений.*

*Потенциальность* течения в предположении об отсутствии вязкости и сжимаемости жидкости приводит к краевой задаче для линейного уравнения второго порядка. Исторически в этом случае ранее всего был получен обширный класс решений, причем большинство из них в замкнутой форме (см. любой курс

гидродинамики). Для тел сложной формы часто предпочтительнее рассчитывать потенциальное обтекание численно (см., например, Дуайер и др. [1971]). Однако для решения осесимметричных задач со свободными поверхностями численный подход действительно *необходим*. Бреннен [1969] рассчитал осесимметричное течение с каверной, Джепсон [1969] рассматривал осесимметричные течения со свободными поверхностями, Биззел с соавторами [1970] рассчитал истечение жидкости из осесимметричного бака, Константинов [1970] и Уитни [1971] рассматривали двумерные нестационарные течения со свободными поверхностями.

Другим классом задач, для которых необходимы численные методы, являются течения с завихренностью невязкой несжимаемой жидкости (как в классической задаче о подъемной силе профиля, помещенного в свободный сдвиговый слой); такие задачи рассматривал, например, Чау с соавторами [1970]. В работах Хауэлла и Спонга [1969], а также Гельдера [1971] численно решалось уравнение потенциала скорости для дозвукового течения сжимаемой жидкости; в последней работе учитывалось также влияние острых углов.

В случае сверхзвукового стационарного течения невязкой жидкости уравнения становятся гиперболическими. Задача сводится к задаче Коши для пространственных переменных, и здесь становится применимым широко известный мощный *метод характеристик*. Основная теория и численные алгоритмы метода характеристик для двумерных гомоэнтропических течений можно найти в различных учебниках; см., например, Шапиро [1953], Липман и Рошко [1957], Аббот [1966], Овчарек [1964], Чепмен и Уолкер [1971]. Представляет исторический интерес оригинальная работа Толлмина [1949]. В первоначальном варианте метода характеристик положения узловых точек сетки не известны заранее, а являются частью решения.

Существуют две разновидности метода характеристик: так называемый метод волн (или метод ячеек) и метод узлов характеристической сетки. В методе волн несколько упрощается арифметика вычислений при выполнении их вручную, и он более нагляден физически, в особенности при наличии в задаче границ с постоянным давлением. Однако метод волн требует перехода в плоскость годографа скорости, приводит к вычислительным трудностям на границе, являющейся линией симметрии, и не может быть обобщен на осесимметричные течения (поскольку основывается не на строгой математической теории характеристик). Поэтому ему следует предпочесть метод узлов характеристической сетки.

Узлы характеристической сетки определяются пересечением характеристик (линий Маха) различных семейств, т. е. линий.

составляющих с вектором скорости углы $\pm\mu$, где $\mu = \arcsin(1/M)$. В курсе Липмана и Рошко [1957] изложены также метод характеристик для осесимметричных течений и усложнения, возникающие при отсутствии гомоэнтропичности (т. е. в том случае, когда энтропия постоянна лишь вдоль линий тока, а по нормали к ним может быть переменной). Однако многие другие проблемы, связанные с получением решений по методу характеристик, не обсуждаются в имеющихся учебных руководствах. Так, в учебниках отсутствует описание наиболее современного варианта метода характеристик, согласно которому решение продвигается вниз по потоку на заданный шаг с учетом условия устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви [1928], а характеристики выпускаются вверх по потоку, причем необходимые величины определяются с помощью интерполяции.

На возникновение скачка при расчете по методу характеристик указывает пересечение характеристик (линий Маха) одного семейства. В этом случае должен быть выделен косой скачок, угол наклона которого определяется совместным решением соотношений Рэнкина — Гюгонио и характеристических соотношений за скачком. Выделение скачков в расчетах плоских задач по методу характеристик изложено в работах Хартри [1958] и Ричардсона [1964] с обсуждением вопросов программирования. Кеннеди [1956], Вейс с соавторами [1966], Морено [1967], Аббетт [1970] рассматривали выделение скачков в расчетах осесимметричных задач по методу характеристик. Метод характеристик удобен для расчета одномерных нестационарных невязких течений. Такие расчеты выполняли Шапиро [1953], Хоскин [1964], Хоскин и Лембурн [1971], причем в работе Хоскина [1964] обсуждаются также вопросы программирования. В методе характеристик не применяются консервативные схемы, и поэтому проверка консервативности может служить указателем величины ошибок аппроксимации. Пауэрс и О'Нейлл [1963] указали, что ошибки, связанные с нарушением свойства консервативности, возрастают при гиперзвуковых скоростях (при малых углах Маха и больших градиентах), и дали метод определения энтропии в узлах сетки при помощи расчета потока массы.

В случае стационарных трехмерных течений возникает определенная свобода при разработке метода характеристик, что привело к появлению пяти или шести различных вариантов трехмерного метода характеристик. Чу [1964] приводит простой вывод трехмерных характеристических соотношений. Чушкин [1968] дал обзор четырех вариантов трехмерного метода характеристик и учел влияние неравновесности. Пауэрс с соавторами [1967] разработал трехмерный метод характеристик и включил в свой алгоритм расчет пограничного слоя. Магомедов [1966] обсуждал варианты трехмерного стационарного и дву-

мерного нестационарного методов характеристик. Зауервейн и Дитхельм [1967], Рэкич [1967, 1969], Магомедов и Холодов [1967], Григорьев и Магомедов [1970], Рэкич и Клири [1970] успешно применяли разработанные ими схемы трехмерного метода характеристик. Обычно метод характеристик дает первый порядок точности (см. разд. 5.5.2); Рэнсом с соавторами [1970, 1971] обсуждали устойчивость и точность трехмерного метода характеристик второго порядка точности. В работе Рёзнера [1967] изложен трехмерный нестационарный метод характеристик.

Кроме того, с помощью метода характеристик решались следующие задачи. Присли и Хансон [1969], а также Фиккетт с соавторами [1970] рассчитывали одномерные нестационарные течения с химическими реакциями. Меттьюс [1969] рассматривал стационарное квазиодномерное течение. Хуан и Чау [1968] рассчитали точечный (сферический) взрыв с тщательным рассмотрением начальной особенности и образования вторичной ударной волны. Адамсон [1968] получил в характеристических координатах некоторые аналитические решения. Варианты численной реализации метода характеристик рассматривали Поль и Ахмад [1970]. Робертсон и Уиллис [1971] рассчитали расширение разреженного газа в вакуум. Чушкин [1970б] дал решение задачи о горении в сверхзвуковом потоке.

Файф с соавторами [1961], а также Итон [1970] провели некоторые сравнения между методом характеристик и конечно-разностными методами на равномерной сетке. Решение по методу характеристик может быть включено в алгоритм расчета в качестве части итерационной процедуры наряду с расчетом сдвигового слоя с помощью приближения пограничного слоя. Эта идея реализована в работах Вейса и Вейнбаума [1966], Вейнбаума [1966], Оренбергера и Баума [1970], Мюллера с соавторами [1970] и Бургграфа [1970].

Расчет по методу характеристик должен начинаться от некоторой линии (не являющейся характеристикой), на которой заданы все необходимые начальные данные. По методу характеристик нельзя ни получить начальные данные вверх по потоку, ни удовлетворить все физически возможные условия вниз по потоку. При расчете обтекания затупленных тел необходимо сначала рассчитать течение с отошедшей ударной волной в области, граница которой расположена за звуковой линией, а потом применять метод характеристик; см. Ван-Дайк [1958], Моретти и Блейх [1967, 1968], Морено [1967], Льюис с соавторами [1971].

При расчете по методу характеристик сверхзвукового обтекания заостренных тел необходимо отправляться в плоском случае от решения для плоского косого скачка, а в осесимметричном

случае от решения Тейлора — Макколла для конического скачка (см., например, Липман и Рошко [1957]). Для сопел исходное решение вблизи критического сечения может быть получено либо при помощи расчета трансзвуковых уравнений методами конечных разностей, либо при помощи полуэмпирической теории (см., например, Рантош [1952]). При расчете течения внутри сопла метод характеристик даст решение без скачков с давлением на выходе $P_e$. Однако если давление во внешней среде $P_b$ таково, что $P_b/P_e < P_2/P_1$, где $P_2/P_1$ — отношение давлений на прямом скачке, то внутри сопла возникает скачок. Положение этого скачка нельзя рассчитать по методу характеристик. Даже при меньших величинах отношения $P_b/P_e > 1$ внешнее давление может вызвать значительное утолщение пограничного слоя и отрыв потока вверх по течению, что также приведет к невозможности построения решения методом характеристик.

В самое последнее время достигнуты большие успехи в расчете трансзвуковых течений невязкого газа. Обзор более ранних работ можно найти в AGARD [1968]. Последние успехи в этой области изложили Липницкий и Лифшиц [1970], Мёрман и Крупп [1971], Мёрман и Коул [1971], Стеджер и Ломекс [1971а, 1971б], Макдональд [1971], Гопаларкришнан и Боццола [1971], Кан и Гарсия [1971], Гроссмен и Моретти [1970], Кенцер [1970б], Белоцерковский [1970], Магнус и Иосихара [1970], Крупп и Мёрман [1971]. Локк [1970] привел проверочные варианты для расчета трансзвуковых течений.

Если не предполагать отсутствия вязкости, то уравнения Навье — Стокса можно упростить при помощи приближения *пограничного слоя*, что означает пренебрежение диффузионными членами в направлении течения. В случае классической теории пограничного слоя первого порядка (теория Прандтля) в несжимаемой жидкости это приближение сводится к одному уравнению, параболическому по пространственной переменной и справедливому в тонкой области вблизи стенки. Давление поперек пограничного слоя и скорость на его внешней границе определяется из решения задачи об обтекании невязкой жидкостью. Таким образом, для расчета обтекания несжимаемой жидкостью остается одно параболическое уравнение, которое можно численно проинтегрировать в направлении течения. Основная теория пограничного слоя изложена, например, в книгах Шлихтинга [1968] и Розенхеда [1963].

При некоторых частных условиях на внешней границе пограничного слоя теория подобия сводит уравнение в частных производных к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению для безразмерной функции тока, для которого ставится краевая задача. Примером такого уравнения может

служить широко известное уравнение Блазиуса для пограничного слоя на плоской пластинке:

$$f''' + 2ff'' = 0, \tag{6.38а}$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1. \tag{6.38б}$$

Хотя интегрирование этого уравнения нетривиально из-за его нелинейности и наличия граничного условия на бесконечности, однако его решения легко находятся методом стрельбы. Существуют и более красивые методы решения подобных уравнений (см., например, Келлер [1968], Бейли с соавторами [1968], Чебеки и Келлер [1971]); кроме того, в некоторых случаях краевая задача может быть сведена к двум последовательным задачам Коши (см., например, Муфти [1969]). Однако в общем случае грубые методы стрельбы дают вполне удовлетворительные результаты, за исключением случаев наличия особых точек и необходимости пристрелки по большому числу параметров.

Более трудную задачу представляет собой расчет *неавтомодельных* пограничных слоев, когда уравнения в частных производных можно проинтегрировать только численно. (Автомодельные решения могут служить хорошей проверкой для численных решений уравнений в частных производных.) Существует обширная литература по этому вопросу, на которой мы не будем останавливаться. Небольшой раздел отведен этому вопросу в книге Шлихтинга [1968]. Блоттнер [1970] дал обзор ссылок по расчету ламинарного пограничного слоя в несжимаемой и сжимаемой жидкости. Ламинарные сжимаемые пограничные слои обсуждаются также в работе Смита и Клаттера [1965]. Патанкар и Сполдинг [1967б] рассмотрели тепло- и массопередачу в турбулентных пограничных слоях несжимаемой жидкости. Для получения решений *турбулентного* пограничного слоя необходимо: (1) выбрать модель турбулентности (или выбрать выражения либо для рейнольдсовых напряжений, либо для длины пути перемешивания Прандтля, либо для вихревой вязкости, или, в наиболее общем случае, записать уравнение для энергии турбулентного движения); (2) вблизи стенки применить локальное решение для течения Куэтта, что обусловлено большими изменениями величин касательных напряжений в турбулентном пограничном слое. В трудах Станфордской конференции (Клини и др. [1968]) приведен обзор работ в этой области по состоянию на 1968 г.

В выходящей в скором времени книге Чебеки и Смита будут обсуждаться вопросы, связанные с расчетом турбулентных сжимаемых пограничных слоев (см. также Лауфер [1969], Чебеки и Смит [1970], Чебеки с соавторами [1970]). Бредшоу и Феррис [1971] обобщили на течения сжимаемой жидкости свой

эффективный метод, основанный на рассмотрении уравнения энергии турбулентного движения.

Блоттнер и Флюгге-Лотц [1963] (см. также Блоттнер [1968—1970], Флюгге-Лотц [1969]) в поперечном направлении (направлении диффузии) применяли неявную схему Кранка — Никольсона и преобразование координат, основанное на автомодельных решениях уравнений пограничного слоя. Эти идеи легли в основу других современных методов. Чебеки [1969] рассчитал ламинарные и турбулентные осесимметричные течения несжимаемой жидкости. Блоттнер [1969], а также Дин и Ираслан [1971] включили в свой расчет диссоциацию и химические реакции, протекающие с конечными скоростями; Сибулкин и Диспо [1968], Пирс и Эмери [1970] рассмотрели течения с излучением; Кендалл с соавторами [1966] при расчете гиперзвукового пограничного слоя учитывал химические реакции, связанные с обгоранием абляционного покрытия стенки. Льюис [1970а, 1970б, 1971] привел полезные сравнения результатов, полученных различными методами. Келлер и Чебеки [1971а] применяли экстраполяцию Ричардсона при решении уравнений пограничного слоя.

Уравнения пограничного слоя могут применяться также при расчетах течений в следе и со свободным сдвиговым слоем. Плоткин [1968], а также Плоткин и Флюгге-Лотц [1968] рассчитали течение в следе за плоской пластинкой, обтекаемой несжимаемой жидкостью; Гхиа с соавторами [1968] рассматривал перемешивание коаксиальных ламинарных струй; Креншоу [1966] рассчитывал несжимаемые пристеночные и свободные струи, Патанкар и Сполдинг [1967а] — свободные струи; Шехгер [1967] при расчете течения в следе применил схему с аппроксимацией Паде и, наконец, Эль Ассар [1969] для расчета течения сжимаемого газа в следе применил сначала преобразование Мизеса, а затем отображение бесконечной области на конечную. При расчете трехмерных нестационарных пограничных слоев приходится сталкиваться со специфическими трудностями, не последней из которых является отыскание приемлемого решения для внешнего обтекания невязкой жидкостью. Трехмерные пограничные слои изучали Дер и Рёц [1962], Шевелев [1967], Дуайер [1968, 1971а, 1971б], Нэш [1969], Краузе [1969], Вальо-Лорен и Миллер [1971], Бёрике [1971], Краузе и Хиршел [1971], Пауэрс и др. [1967], Мур и Дежарнетт [1971]. В последних двух работах для расчета внешнего невязкого обтекания применялся трехмерный метод характеристик. Нестационарные пограничные слои рассматривали Олейник [1967], Дуайер [1968], Холл [1969], Пике [1970]; см. также материалы конференции IUTAM по нестационарным пограничным слоям, состоявшейся в сентябре 1971 г.

Существуют приближения иограничного слоя «второго порядка»[1]), в которых также пренебрегают диффузией в направлении основного течения, однако допускают наличие градиента давления поперек пограничного слоя, влияние градиента завихренности, вызванного искривленной головной ударной волной, и влияние толщины вытеснения на невязкое решение вне пограничного слоя (см. Ван-Дайк [1962а, 1962б]). Левин [1968], а также Оренбергер и Баум [1970] рассчитывали течения сжимаемой жидкости по теории пограничного слоя второго порядка. Верле и Уорном [1970] учитывали влияние членов теории пограничного слоя второго порядка в случае расчета течения несжимаемой жидкости.

Существуют и другие системы уравнений, которые не являются уравнениями пограничного слоя в точном смысле, однако напоминают их тем, что пренебрежение диффузией в направлении основного потока позволяет продвигать решение по пространственной переменной. Таковы уравнения движения газа на входе в канал (Кокрейн [1969], Бенкстон и Мак-Элигот [1969], Лок [1970], Биллиг и Гэлли [1970]), уравнения с приближением высокого порядка Плоткина [1968], а также Плоткина и Флюгге-Лотц [1968]; очень удачные уравнения для течения в ударном слое Р. Т. Дэвиса [1968, 1970а] и с учетом химических реакций (Дэвис [1970б]); параболические уравнения, рассматривавшиеся в работах Патанкара и Сполдинга [1972] и Брили [1974].

Представляют также интерес расчеты Бургграфа и Стюартсона [1971] пограничного слоя, индуцированного потенциальным вихрем, проведенные Блоттнером [1971] сравнения методов первого и второго порядков для пограничных слоев с химическими реакциями, сочетание квазилинеаризации с разложениями по полиномам Чебышева Джаффе и Томаса [1970], расчеты Стеджера и Сепри [1965] по методу прямых, определение и исследование устойчивости для класса методов, проведенное Мёрфи [1963], и, наконец, остроумный метод локальной неавтомодельности Сперроу с соавторами [1970], который позволяет рассчитывать решение в представляющей интерес точке пограничного слоя без нахождения всего решения вверх по течению.

Дуайер с соавторами [1971] дал способ сочетания произвольного метода расчета потенциального течения с методом расчета несжимаемого неавтомодельного пограничного слоя, позволяющий за очень короткое время получить полное решение задачи о вязком обтекании при больших числах Рейнольдса

[1]) Здесь выражение «второй порядок» употребляется применительно к дифференциальным уравнениям, описывающим течение, а не к конечно-разностным схемам.

(вплоть до возникновения отрыва или перехода в турбулентный режим). При условии преодоления известной инертности исследователей этот подход внесет значительный вклад и в инженерную практику, и в методику преподавания.

Существуют и другие упрощения системы уравнений Навье — Стокса, не меняющие, однако, тип системы уравнений столь радикально, как перечисленные выше. В том случае, когда вязкие члены полностью преобладают над конвективными, система уравнений в переменных $\psi$, $\zeta$ для стационарного течения несжимаемой жидкости сводится к одному линейному *бигармоническому уравнению* четвертого порядка, как это предлагается показать в следующем упражнении.

*Упражнение.* При помощи уравнений гл. 2 показать, что система уравнений в переменных $\psi, \zeta$ для стационарного течения в случае $\mathrm{Re} \to 0$ принимает вид

$$\nabla^4 \psi \equiv \nabla^2 (\nabla^2 \psi) = 0. \tag{6.39}$$

Трудность этого подхода заключается в постановке граничных условий; см. следующие работы: Том [1953], Пирсон [1964], Фейрвезер и др. [1967], Бернал и Уайтмен [1968, 1970], Дистефано [1969], Бурсье и Франсуа [1969], Дж. Смит [1970].

Другим общеупотребительным упрощением является приближение *Буссинеска*, применяемое при рассмотрении течений естественной конвекции, вызванных неравномерным нагревом. Колдер [1968] дал вывод и интерпретацию уравнений Буссинеска в декартовых координатах. Барнс [1967] рассматривал линеаризованные уравнения Буссинеска в цилиндрических координатах, Торранс и Рокетт [1969] — в декартовых и цилиндрических координатах, де Валь Дэвис [1968] и Фаста [1970] — в декартовых координатах, Браун [1967] — в сферических координатах, Уильямс [1969] — в цилиндрических координатах в трехмерном случае, Кабелли и де Валь Дэвис [1971], а также Липпс и Самервилл [1971] — в декартовых координатах в трехмерном случае. У. П. Кроули [1968б] при изучении слабой атмосферной ячеечной конвекции рассчитал по уравнениям Буссинеска среднее и возмущенное течения. В работах Дали и Прахта [1968], а также Дали [1969а, 1969б] установлены границы применимости приближения Буссинеска.

Расчет слабых волн давления можно сильно ускорить с помощью применения *линеаризованных* уравнений для течения сжимаемого газа. Этим приемом пользовались Цумвальд [1967] при расчете звукового удара и Лу [1967] при расчете излучения акустических волн в ближней зоне.

*При квазиодномерном приближении* поперечное сечение потока рассматривается как функция от одной пространственной координаты и параметры течения по всему поперечному сечению

предполагаются постоянными. Этот подход успешно применялся при расчете течений внутри сопел; см. Крокко [1965] и Андерсон [1969а, 1969б, 1970а, 1970б].

Для расчета течения в открытом канале Гунаратнам и Перкинс [1970] разработали неявные схемы высокого порядка для решения *уравнений Сен-Венана.*

Чрезвычайно важен расчет *метеорологических* и других *геофизических* задач. Численный прогноз погоды является, без сомнения, одной из наиболее насущно важных проблем, и поэтому методы, применяемые метеорологами-вычислителями, очень хорошо разработаны. Во многих отношениях различные системы уравнений, описывающих метеорологические задачи, могут быть более сложными, чем обычные уравнения, применяемые в аэродинамике, за счет наличия членов, описывающих кориолисово ускорение, перенос примесей, испарение и конденсацию, рельеф местности, излучение и т. п.

Однако здесь также применяются некоторые упрощения. Например, неоднородность атмосферы по вертикали можно учесть с помощью рассмотрения удивительно малого числа «уровней»; так, пяти-, семи- и девятиуровневые модели сложны и разработаны относительно недавно, в то время как многие особенности явлений можно получить даже при расчетах по одно- и двухуровневым моделям (см., например, Томпсон [1961], Хафтон и Изаксон [1968]). Определенные геометрические трудности, связанные с рассмотрением сферического сектора, можно преодолеть с помощью приближения β-плоскости. Члены с ламинарной вязкостью обычно отбрасывают, однако атмосферная турбулентность может привести к появлению диффузионных членов. (Эту турбулентность можно рассматривать как двумерную.)

Подход, связанный с рассмотрением вихря скорости, часто оказывается более удобным, чем решение уравнений для простейших физических переменных; одно из наиболее интересных приближений состоит в определении зависящей от времени функции тока и, следовательно, поля конвективных скоростей только по вычисленному распределению вихря. Граничные условия для расчетов в некоторой выделенной области на мелкой сетке удобно определять по результатам предыдущих расчетов на более грубой сетке. В метеорологических задачах стационарные решения обычно не представляют интереса, однако они могут представлять интерес в других геофизических задачах (например, ячеечная конвекция, вызванная солнечной радиацией). Обычно в метеорологических задачах требуется по крайней мере второй порядок аппроксимации по времени. Интересной особенностью этих задач является то, что гидростатическое давление $p$ иногда принимается за независимую переменную вместо вертикальной координаты $h$, которая представляется как $h(p)$.

Лилли [1965], Касахара [1965], Граммельтведт [1969] и Полджер [1971] привели сравнения различных конечно-разностных схем для метеорологических задач. Граммельтведт [1969], Уильямсон [1969], Полджер [1971] применяли приближение β-плоскости. Баэр и Кинг [1967], Баэр и Симонс [1968], Граммельтведт [1969] описали применение спектральных уравнений.

Особенно привлекательны расчеты метеорологических задач в глобальном масштабе. Лейт [1965] дал полное описание физической модели и конечно-разностных схем (см. разд. 3.1.13) для расчета глобального прогноза погоды, а Харди [1968] при помощи программы Лейта провел численные эксперименты, моделирующие движение атмосферных потоков. Брайен [1963] и У. П. Кроули [1970в] численно изучали движение океана под действием ветра. Брайен [1969] разработал численную модель мирового океана с учетом влияния рельефа дна океана. Лейт [1971] показал, что динамика атмосферы в глобальном масштабе подчиняется некоторым законам *двумерной* турбулентности, и дал оценки точности расчета атмосферных явлений в зависимости от точности конечно-разностных аппроксимаций и от точности и полноты начальных данных.

В следующих ссылках дан обзор последних работ в области метеорологии и океанографии. Леблан [1967] экспериментировал с численным расчетом образования слоистых облаков. Арнасон с соавторами [1968] численно моделировал грозовые тучи, включая стадию выпадения дождя. Арнасон с соавторами [1967] показал, что применение конечно-разностных схем в области особой точки для невязкого бароклинного уравнения устойчивости приводит к неточным результатам. Эсток и Бхумралкар [1969] рассчитали плоское обтекание локализованного теплового источника. Гари [1969] сравнивал две, а Силецки и Вуртеле [1970] — три конечно-разностные схемы для уравнений теории мелкой воды (течение несжимаемой невязкой жидкости со свободной поверхностью) на полусфере; Густафсон [1971] применил здесь неявную схему метода чередующихся направлений.

Хафтон и Джонс [1969] разработали численную модель линеаризованных гравитационных и акустических волн, распространяющихся вертикально в атмосфере. Касахара и Хафтон [1969] показали, что при расчете обтекания препятствия в рамках теории мелкой воды при одних и тех же начальных условиях можно получить различные решения со слабыми разрывами (неединственность) в зависимости от формы исходных уравнений в частных производных. Соби [1970] сравнивал четыре схемы при расчете длинных морских волн. Манкузо [1967] разработал методику расчета функции тока и потенциала ско-

рости по заданному распределению вихря на сферической поверхности. Мак-Крири [1967] методом конечных разностей рассчитал трехмерную ячеечную конвекцию в атмосфере.

Янович [1969] численно изучал вертикальное распространение волн в вязкой изотермической атмосфере. Ван де Хулст [1968] дал метод расчета дифракции излучения в оптически толстой атмосфере. Уильямсон [1969] рассчитывал течение без трения при помощи приближения β-плоскости и неравномерной треугольной сетки. Бао [1969а] предложил применять разностные схемы для изучения возникновения атмосферной турбулентности (неустойчивости) в устойчиво стратифицированной среде (в атмосфере или в океане). Полджер [1971] изучал влияние начальных и граничных условий и осредняющих операторов на длинноволновую нелинейную неустойчивость. В учебниках Томпсона [1961] и Ричардсона [1965] излагаются методы численного прогноза погоды, обзор Брайена и Кокса [1970] посвящен расчету океанских течений большого масштаба. Не касаясь непосредственно метеорологических приложений, Гиллис и Лирон [1969], а также Брили и Уоллс [1971] рассчитали течение в замкнутом вращающемся цилиндре, что привело к открытию *слоев Экмана*, которые очень существенны во многих геофизических задачах.

Несколько работ было посвящено *динамике грунтов*. Динс [1968] рассмотрел уравнения неньютоновской жидкости и конечно-разностные схемы, применимые для расчета динамики грунтов. Фаччиоли и Анг [1968] разработали методы расчета сферически-симметричных сжимаемых течений, пригодные для расчета распространения волн и скачков в толще Земли. Одной из интересных особенностей динамики грунтов является то, что скачки (землетрясения) здесь распространяются не при помощи механизма давления, а при помощи механизма *касательных напряжений*, что, очевидно, должно значительно изменить подход, связанный с размазыванием скачков. Другой разновидностью геофизических задач являются задачи *фильтрации*; см. по этому поводу работу Будака и Васильева в сборнике под редакцией Рослякова и Чудова [1963], а также работу Дрейка и Эллингсона [1970].

В монографиях Эймса [1969] и Рихтмайера и Мортона [1967] приведены некоторые геофизические приложения, в частности, в последней приведено описание расчета атмосферного фронта, выполненного Касахарой и др. [1965]. В книге П. Томпсона [1961] излагаются численный анализ и прогноз погодных явлений, и ее можно рекомендовать для неспециалистов в качестве введения в эту проблему. Другие ссылки на работы, посвященные геофизическим приложениям, можно найти в обзорном труде Френкила и Стюартсона [1969].

Обратимся теперь к *усложнениям* обычных уравнений Навье — Стокса.

Рассмотрим сначала усложнения, связанные с видом граничных условий, которые требуют особого подхода к решению уравнений в частных производных. Для решения задач *со свободными поверхностями* чаще всего применяется метод маркеров и ячеек (см. разд. 3.7.4) или его видоизменения. Первоначально расчеты течений со свободными поверхностями были достаточно грубыми, однако последующие улучшения позволили учесть влияние поверхностного натяжения и моделировать опрокидывание волн. Подобные расчеты выполняли Киллин [1966], Наранг [1967], Хёрт и Шеннон [1968], Дали и Прахт [1968], Дали [1969а, 1969б], Вьечелли [1969], Истон [1969], Митчелл [1970], Николс [1971], Васильев [1971], Чен с соавторами [1969, 1971]. Бреди [1967] рассчитал невязкое течение со свободной поверхностью. Бреннен [1971] рассматривал волны на свободной поверхности в лагранжевом представлении.

При расчете течений со свободными поверхностями (например, жидких струй) Плетчер и Мак-Манус [1965], а также Фагела-Албастро и Хеллумс [1967] и Заггендорф [1971] применяли приближение пограничного слоя, пренебрегая диффузией в направлении основного течения; в последней работе учитывались реологические эффекты. Двухслойные течения похожи на течения со свободными поверхностями. Изучением перемешивания двух потоков различных газов занимались Гхиа с соавторами [1968], двухслойные стратифицированные течения рассматривали Джеммел и Эпштейн [1962], а также Хуан [1968]. Оман [1967] исследовал процессы испарения и конденсации на границе жидкости с паром. Чен и Коллинз [1971] рассчитали отражение ударной волны от границы газа с жидкостью.

Ситуация, в которых *стенки приходят в движение* за счет газодинамических нагрузок, возникают в таких различных задачах, как подземные ядерные взрывы, выстрел из орудия при большой начальной скорости полета снаряда и движения пищевода при глотании. Для подобных задач Уотсон и Годфри [1967], а также Уотсон [1969] применяли метод, который аналогичен методу частиц в ячейках (см. разд. 5.5.3) со смешанным эйлерово-лагранжевым описанием, а Хёрт [1971] пользовался произвольным лагранжево-эйлеровым алгоритмом (алгоритмом ALE). В этом алгоритме узлы расчетной сетки могут перемещаться вместе с жидкостью (лагранжево описание), покоиться (эйлерово описание) и, наконец, перемещаться с другими скоростями. В частности, описание может быть эйлеровым в одном направлении и лагранжевым в другом, что удобно при расчете пульсационных течений в каналах с упругими стенками (артерии).

Широкоупотребительное усложнение уравнений Навье — Стокса для нестационарных движений состоит в применении *уравнений для возмущений* (см., например, Нагель [1967], У. П. Кроули [1968б]). Например, для изучения неустойчивости по отношению к сдвигу в несжимаемом иограничном слое переменные $\psi$, $\zeta$ можно представить в виде

$$\psi = \psi_0 + \psi', \tag{6.40а}$$

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta'. \tag{6.40б}$$

За основное решение можно взять стационарное решение $\psi_0$, $\zeta_0$, скажем решение Блазиуса (см. Шлихтинг [1968]). После этого без всяких допущений можно получить нестационарное уравнение для возмущений вихря и функции тока, что и предлагается проделать в следующем уиражнении.

*Упражнение.* Показать, что возмущения функции тока и вихря $\psi', \zeta'$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{V}_0 \zeta' - \nabla \cdot \mathbf{V}' \zeta_0 - \nabla \cdot \mathbf{V}' \zeta' + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \zeta', \tag{6.41}$$

$$\nabla^2 \psi' = \zeta', \tag{6.42}$$

$$\mathbf{V}_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial y}\,\mathbf{i} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x}\,\mathbf{j}, \tag{6.43}$$

$$\mathbf{V}' = \frac{\partial \psi'}{\partial y}\,\mathbf{i} - \frac{\partial \psi'}{\partial x}\,\mathbf{j}. \tag{6.44}$$

Поскольку при вычислении $\psi_0$ и $\zeta_0$ ошибки аппроксимации будут отсутствовать, можно ожидать, что уравнения возмущений дадут более точные результаты, чем полные уравнения. Кроме того, при вычислениях члены типа $\nabla \cdot \mathbf{V}' \zeta'$ могут избирательно «выключаться» для выделения влияния нелинейной неустойчивости; аналогично можно иоложить величины $v_0$ и $v'$ равными нулю для проверки выполнения классической теории устойчивости Орра — Зоммерфельда при плоскопараллельном течении (см., наиример, Шлихтинг [1968]). Эта гибкость и возможность проверок являются наиболее привлекательными аспектами численного изучения устойчивости течения (серьезными препятствиями здесь являются привносимые в решение ошибки, связанные с затуханием, и фазовые ошибки). Предварительные (неопубликованные) численные эксперименты автора настоящей книги показали, что для уравнений для возмущений требуется специальная постановка условий на выходной границе.

Наиболее очевидным усложнением системы уравнений Навье — Стокса является добавление членов и уравнений, описывающих *дополнительные физические факторы* типа излучения, химических реакций, магнитогидродинамических эффектов, кориолисовой силы, многокомпонентности жидкости, ионизации, релятивистских эффектов и т. п. Эти уравнения зачастую могут

радикально менять свойства решений и диктовать выбор численной схемы; учет излучения может придать уравнениям интегральный (а не дифференциальный) характер, учет химических реакций может сделать уравнения более «жесткими» (см. разд. 3.6.5), в МГД-потоках наряду с газодинамическими скачками могут возникать магнитогазодинамические скачки и т. д.

Численные аспекты уравнения *переноса излучения* в неподвижной среде изучали Костелло и Шренк [1966], Де Бар [1967], Вендрофф [1969]. Одномерные газодинамические задачи с излучением решали Жишке и Барон [1969], Рубин с соавторами [1967], Рубин [1970], Рубин и Хосла [1970], Карлсон [1970], Уоткинс [1970], причем в последних четырех работах учитывается влияние химической неравновесности и многокомпонентности (двухтемпературные модели). Снбулкин и Диспо [1968], а также Пирс и Эмери [1970] изучали влияние излучения при решении уравнений пограничного слоя. Никастро [1968] занимался поиском автомодельных решений уравнений радиационной газодинамики, каковые могут играть важную роль при проверке численных решений. Фиклеман [1968] при решении уравнений радиационной газодинамики пользовался методом характеристик. Помраннг с соавторами [1969] обсуждал основные уравнения многомерной радиационной газодинамики. Богачевский и Костофф [1971] рассчитали по схеме Лакса осесимметричное течение с учетом трехмерного излучения. Лейт [1965] при расчете атмосферных явлений учитывал лучистое нагревание от Солнца. Коллис [1968, 1969, 1970] рассчитывал влияние излучения на сверхзвуковое обтекание затупленных тел.

Печек и Хансон [1968] исследовали течения с учетом упругости.

*Химические реакции* в высокотемпературных течениях, иногда включающие рассмотрение колебательной и/или химической неравновесности, ионизации и многокомпонентности, рассматриваются в следующих работах: Богачевский и Рубин [1966], Богачевский и Мейтс [1966], AGARD [1968], Присли и Хансон [1969], Камзолов и Пирумов [1966], Андерсон [1969а, 1969б, 1970а, 1970б], Блоттнер [1969, 1971], Ломекс с соавторами [1969], Деллинджер [1969, 1970], Льюис [1970а, 1970б, 1971], Дэвис [1970б], Карлсон [1969, 1970], Кайрис [1970], Уоткинс [1970], Спарк [1970], Эванс с соавторами [1970], Шелтон [1970], Штуббе [1970], Льюис и др. [1971б], Ли [1971].

*Плазменные и магнитогидродинамические процессы* численно моделировали Вулис и Джаугаштин [1968], Апельт [1969], Даусон с соавторами [1969], Брандт и Гиллис [1969], Бёрдсолл и Фасс [1969], Шелтон [1970], Боуэн и Парк [1971]. Эндрьюс [1971] рассчитал одномерное распространение ударной волны с *фазовыми изменениями*.

Когда вычислительные методы для расчета усложненных уравнений доведены до совершенства, то помимо получения конкретных полей течений открывается привлекательная возможность *проверить* тот или иной выбор *основных уравнений*. Это численное экспериментирование с основными уравнениями особенно важно в следующих четырех областях: турбулентность, динамика грунтов, динамика неньютоновских жидкостей, динамика жидкостей, содержащих малые твердые частицы.

Предлагалось много моделей турбулентности, начиная от простейшей концепции вихревой вязкости Прандтля (см. Шлихтинг [1968]) и кончая теориями замыкания высокого порядка, включающими систему из десяти и более взаимосвязанных дифференциальных уравнений в частных производных. Недостатками концепции вихревой вязкости являются отсутствие универсальности входящих в нее коэффициентов и передача энергии только от осредненного движения к турбулентным вихрям, в то время как в экспериментах обнаружены ситуации, когда имеет место обратный процесс. К недостаткам более сложных теорий можно отнести именно то, что они *слишком сложны* и предположения, которые необходимо сделать для замыкания, весьма не очевидны. Орсаг [1970] дал обзор недостатков теории замыкания. Некоторые из наиболее интересных современных подходов настолько тесно срослись с методом конечных разностей (например, применение теории вихревой вязкости только в масштабах размера ячейки расчетной сетки), что их можно назвать вычислительными теориями турбулентности. (Орсаг даже употребляет слово «compulence», т. е. турбулентность, моделируемая вычислительными средствами.)

Существует много методов расчета *турбулентных пограничных слоев*. Их обзор и сравнение приведены в изданиях «Олимпа турбулентности», конференции, происходившей в Станфорде (Клини и др. [1968]). В книге Патанкара и Сполдинга [1967б] подробно описан, вероятно, наиболее простой из приемлемых методов расчета неавтомодельных несжимаемых турбулентных пограничных слоев, другие методы будут изложены в выходящей в скором времени книге Чебеки и Смита. Из недавних работ по этому вопросу см. Патанкар [1967], Харпер и Киндер [1967], Лауфер [1969], Плетчер [1969], Мартелуччи с соавторами [1969], Чен [1970], Чебеки и Смит [1970], Вольфштейн [1970], Кейкер и Уайтло [1970], Келлер и Чебеки [1970]. Дональдсон [1968] разработал метод расчета переходного пограничного слоя, основанный на рассмотрении изменений рейнольдсовых напряжений.

Уолкер и Цумвальт [1966], Руо [1967], Уолкер с соавторами [1968], Бауэр с соавторами [1968] проводили расчеты турбулентных течений с помощью простого подхода вихревой вяз-

кости без применения предположений теории пограничного слоя. При решении задач глобальной метеорологии Лейт [1965] применял различные вихревые вязкости в горизонтальном и вертикальном направлениях. Рассматривая сравнительно маломасштабный процесс движения облаков, Лилли [1966] пришел к выводу, что в этом случае адекватной является лишь трехмерная модель турбулентности. Леблан [1967] рассмотрел три различных способа введения коэффициентов турбулентного обмена.

Машек [1968] обсуждал очевидные ограничения на размер ячейки расчетной сетки, возникающие при расчете прямыми методами турбулентных течений с большими числами Рейнольдса. Гоэйн и Притчетт [1968] численно моделировали процессы, подобные турбулентности. О'Брайен [1970], а также Гоэйн и О'Брайен [1971] провели расчеты перехода от ламинарного течения в канале к турбулентному.

Представляется, что для расчета турбулентных течений необходимы менее прямые методы. Амсден и Харлоу [1968], Харлоу и Ромеро [1969], Накаяма [1970], Хёрт [1969, 1970], Лилли [1969, 1971], Орсаг [1969], Лейт [1969, 1971], Дали и Харлоу [1970], Гоэйн и Притчетт [1970], Чорин [1971], Дирдорф [1971] пользовались «вычислительными теориями» турбулентности. Лейт [1971] отметил, что атмосферная турбулентность глобального масштаба удовлетворяет некоторым законам двумерной турбулентности; это означает, что, как уже отмечалось нами выше, атмосферная «турбулентность» на самом деле часто является более упорядоченным периодическим течением, которое с точки зрения аэродинамики не является турбулентным. Другие вычислительные и теоретические аспекты турбулентности изложены в трудах симпозиума, изданных под редакцией Бао [1969б].

Что касается *динамики грунтов*, которая включает изучение ползущих движений с малыми скоростями за времена, характерные для геологических процессов, и терradинамику (см. Колп [1968]), т. е. изучение движений с большими скоростями, то, как это ни удивительно, не существует ни грунта, ни какого-либо грунтоподобного лабораторного материала, для которого были бы известны уравнения, адекватно описывающие его движение хотя бы в одномерном случае. Батчер [1971] разработал численную методику расчета распространения одномерных скачков в пористой среде.

В области течений *неньютоновских жидкостей* Джакуинта и Хын [1968] рассчитали возвратные течения для жидкости Рейнера — Ривлина, а Заггендорф [1971] дал расчет струи вязкоупругой жидкости со свободной поверхностью. Кервен [1968] получил уравнения состояния для жидкости, содержащей

малые деформируемые частицы, например кровяные тельца в плазме.

Обсудим, наконец, усложнения уравнений Навье — Стокса, вытекающие из *различного выбора математического описания*: лагранжевы методы, методы сращивания и методы Монте-Карло.

*В лагранжевых методах* применяемые уравнения получаются на основе наблюдения за фиксированной «частицей» жидкости и прослеживания ее движения через весь поток. Эти методы противостоят принятым в настоящей книге эйлеровым методам, в которых рассматривается фиксированный объем в пространстве с протекающими через него частицами жидкости. Мы уже отмечали некоторые схемы (скажем, метод частиц в ячейках, разд. 5.5.3), в которых применяется смешанное лагранжево и эйлерово описание. Для одномерных течений лагранжев подход часто является более простым, однако для многомерных течений с большими искажениями расчетной сетки лагранжевы методы становятся неточными и чрезвычайно сложными [1]).

*В методах сращивания* предпринимаются попытки численно срастить решения в областях, в которых приняты различные предположения для упрощения системы уравнений Навье — Стокса. Например, расчет течения в ближнем следе за снарядом можно проводить по теории течения невязкой жидкости (метод характеристик) для внешнего течения, по теории пограничного слоя оторвавшегося сдвигового слоя и, возможно, по уравнениям несжимаемой жидкости в области возвратного течения. Не говоря уже об очевидном усложнении программирования, в подобных методах имеются принципиальные трудности, связанные с условиями стыковки решений, которые должны быть удовлетворены (или, наоборот, выборочно опущены) поперек границ, с итерационным положением и описанием границ между областями (например, может ли линия тока, отделяющая область возвратного течения, аппроксимироваться кривой второго порядка, начинается ли она в вершине острого угла на поверхности тела?), с устойчивостью глобальных итераций при сращивании. Несмотря на все эти трудности, было опубликовано некоторое число работ, содержащих хорошие численные решения, полученные методами сращивания.

---

[1]) Часто говорят, что лагранжево описание неприемлемо в задачах с большими деформациями. Это утверждение неточно: например, в задаче о сферическом взрыве могут возникать большие деформации, однако лагранжевы подходы применять здесь очень удобно.

Лагранжево описание неприемлемо скорее в задачах с большими искажениями (т. е. касательными деформациями) лагранжевой сетки, например в задачах о течениях в пограничном слое.

В методах *Монте-Карло* при помощи конечного числа «вычислительных частиц» моделируется статистическая природа молекулярного рассмотрения течений. При помощи этих методов были получены схемы, аппроксимирующие полное уравнение Больцмана. Расчеты проводились при числах Кнудсена порядка 0.01, что соответствует приближению к режиму течения сплошной среды.

Применение *лагранжева* подхода или *смешанного лагранжево-эйлерова* подхода можно найти[1]) в работах Шульца [1964], Ноха [1964], Франка и Лазаруса [1964], Зуева [1966], Уотсона и Годфри [1967], Уотсона [1969], Б. К. Кроули [1967], Хикса и Пелцла [1968], Хикса [1969], Уилкинса [1969], У. П. Кроули [1970а], Архангельского [1971]. Основы подходов изложены в книге Рихтмайера и Мортона [1967]. Блеветт [1970] разработал двумерный квазилагранжев метод, в котором прослеживается не масса, а энергия в ячейке расчетной сетки. *Методы сращивания* применяли Вейс с соавторами [1966], Моретти и Аббетт [1966а], Баум и др. [1964], Баум и Оренбергер [1970]. Браиловская [1967] успешно сращивала решение уравнений Навье — Стокса около излома поверхности с невязким решением вверх по течению и с решением уравнений пограничного слоя второго порядка вниз по течению. Брили [1970] обсуждал проблемы сращивания вязких и невязких решений в несжимаемой жидкости.

Методы Монте-Карло и другие методы случайного блуждания применяли Вогениц с соавторами [1968, 1970], Вогениц и Таката [1970, 1971], Берд [1969а, 1969б, 1969в, 1970а, 1970б], Бульярелло и Джексон [1967], Толли и Уитекер [1969], Мейттс [1970], Макферсон [1971]. В обзоре Йена [1969] описаны различные методы Монте-Карло и другие методы расчета течений разреженного газа, имеются также дополнительные ссылки. Обзор Халтона [1970] также посвящен методам Монте-Карло.

## 6.5. Направления будущих исследований

В этом заключительном разделе настоящей главы мы приведем некоторые соображения по поводу направлений дальнейшего исследования задач вычислительной гидродинамики и дадим некоторые ссылки (конечно, далеко не исчерпывающие) по еще не затронутым нами вопросам.

Что касается основных методов, то наиболее важной областью развития являются, вероятно, *полуаналитические* (или, что то же самое, *полудискретные*) методы расчета. Это название охватывает различные методы (метод усеченных рядов, метод

[1]) Мы не будем повторять здесь ссылок, приведенных в разд. 5.5.3.

интегральных соотношений, метод прямых, смешанные дифференциально-конечно-разностные методы и т. д.), в которых решение системы дифференциальных уравнений в частных производных сводится к решению системы обыкновенных уравнений при помощи эффективных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (метод Рунге — Кутта, метод инвариантного погружения и др.).

Этот подход находится несколько в стороне от общего подхода вычислительной гидродинамики, состоящего в моделировании течений. Важно сознавать, что свойства получающихся обыкновенных дифференциальных уравнений могут радикально отличаться от свойств соответствующих уравнений в частных производных; например, при применении метода прямых к уравнениям в частных производных для ламинарного пограничного слоя получающиеся в результате обыкновенные дифференциальные уравнения являются жесткими.

По применению полуаналитических методов можно указать следующие работы: Фридман [1956], Гершуни с соавторами [1966], Деннис с соавторами [1968], Деннис и Чен [1969, 1970], Керр и Александер [1968], Керр [1968, 1969, 1970], Веронис [1968], Лакинбилл и Чайлдс [1968], Ундервуд [1969], Ндефо [1969], Брайен и Чайлдс [1969], Мейер [1969], Таками и Келлер [1969], Глиз [1969а, 1969б], Вемури [1970], Нелсон [1970], Джаффе и Томас [1970], Пирс [1970], Клингер [1970], Истон и Кеттон [1970], Томпсон [1971], Белоцерковский с соавторами [1970], Холт и Ндефо [1970], Чушкин [1970а], Б. У. Томпсон [1971], Деннис и Станифорт [1971], Холт и Мессон [1971], Мелник и Айвз [1971].

Можно ожидать, что в будущем будут более интенсивно применяться такие методики, как *методы сращивания* (несмотря на их скромные успехи в настоящее время), *смешанные эйлерово-лагранжевы методы* и в особенности методики *самонастраивающихся преобразований координат* и *выделения скачков*. Другим из возможных путей развития является применение методов *конечных элементов*[1]) для расчета невязких дозвуковых течений; см. работу Сакетта и Хили [1969], а также обзор Зенкевича [1969]; приложения к задачам гидродинамики можно найти в работе Аргириса с соавторами [1970]. Метод конечных элементов применим также к чисто диффузным задачам, однако

[1]) Термин «метод конечных элементов» не очень отчетлив, и многие авторы ошибочно применяют его к методам типа метода частиц в ячейках и к методам, использующим уравнения, полученные рассмотрением контрольного объема (см. разд. 3.1.2). Хотя такое употребление этого термина в принципе возможно, оно не оправдано исторически. По принятой традиции методами конечных элементов называют методы, основанные на вариационном принципе.

Эмери и Карсон [1971] показали, что для нестационарных задач с переменными коэффициентами конечно-разностные методы предпочтительнее. Митчелл [1972] дал замечательный обзор работ по методу конечных элементов.

Очевидно значительное расширение возможностей вычислительной гидродинамики в будущем в связи с *увеличением возможностей* ЭВМ. Введение в строй машин с быстродействием и объемом памяти, такими, как у CDC STAR или ILLIAC IV (см., например, Злотник [1971]), несомненно расширит класс решаемых задач, включая многие трехмерные задачи. Однако в обозримом будущем не предвидится возможности расчета деталей трехмерных течений с областями больших значений вторых производных (сложных внутренних течений с системами скачков, отрывы, сопровождающиеся колебаниями, всплески турбулентности) традиционными методами на равномерных сетках. (Без разрешения деталей течения часто, но не всегда, можно получить общую картину течения.) Интересно отметить, что применение мультипроцессорного режима в ЭВМ новых поколений сделает явные схемы в некотором смысле более привлекательными, чем неявные, что, возможно, уничтожит наметившуюся в настоящее время тенденцию к применению неявных схем для расчета уравнений переноса. (Представляется, что схема «классики», разработанная Гурли [1970а], а также Гурли с соавторами [1971, 1971а, 1971б], удобна для применения на ЭВМ с мультипроцессорным режимом.) Другой возможностью, связанной с развитием мощных ЭВМ, является применение *гибридных* (т. е. аналогово-цифровых) ЭВМ. Хотя всегда считалось, что они обладают большими потенциальными возможностями, к настоящему времени они, кажется, этих надежд не оправдали. Расчеты уравнений в частных производных на гибридных ЭВМ производили Вишневецкий [1968], Финн [1968], Номура и Дитерс [1968], Унг и Поль [1968], Цубои и Итикава [1969]. Важно, однако, иметь в виду, что последовательная архитектура CDC STAR, параллельная архитектура ILLIAC IV и параллельно-последовательная архитектура гибридных ЭВМ, повышая эффективность машины, часто приводят к уменьшению эффективности алгоритмов и к усложнению программирования.

Более многообещающим, чем увеличение мощностей ЭВМ, нам представляется развитие их *математического обеспечения.* Развитие Фортрана сделало доступными методы выделения скачков, и можно ожидать, что дальнейшие разработки сделают возможным использование более сложных схем. Начало этой работе уже положено созданием библиотеки подпрограмм решения дифференциальных уравнений в частных производных на языке PL-1 (Карденас и Карплюс [1970]), аналогичной имеющимся в настоящее время во всех вычислительных центрах

библиотекам, содержащим стандартные подпрограммы для процедуры исключения Гаусса, процедур решения обыкновенных дифференциальных уравнений, процедур вычисления распространенных аналитических функций и т. д. Хотя представляется, что наличие конкретных граничных условий, определяющих различные гидродинамические задачи, не позволит свести их решение к подобным стандартным подпрограммам, однако возможно, что применение, скажем, двухшаговой схемы Лакса — Вендроффа для разностного представления в регулярной внутренней точке может быть осуществлено такой же стандартной процедурой, как обращение к вычислению синуса. Борис [1970] применяет символический вариант Алгола, позволяющий сокращать запись наподобие векторной и тензорной символики для математических уравнений. Опыт применения подобных языков (язык MIMIC) для решения обыкновенных дифференциальных уравнений показывает, что с точки зрения экономии машинного времени трансляция и расчет задач часто проходят очень неэффективно и поэтому подобные языки представляются непригодными для рабочей программы (см. следующую главу); однако последующую оптимизацию программы не обязательно проводить самому программисту — она может осуществляться при помощи системы математического обеспечения (Борис [1970]).

Кроме того, в некоторых вычислительных центрах имеются диалоговые системы для численного решения уравнений в частных производных (Тиллмен [1969]), в которых пользователь имеет возможность оперативно вмешиваться в процесс расчета задачи и менять параметры задачи в соответствии с видом решений, высвечиваемых на экране дисплея. Для совершенствования этой техники необходимо развитие *гибридных систем математического обеспечения.*

Быть может, наиболее существенным здесь является развитие возможностей математического обеспечения для осуществления основных *алгебраических* и *вычислительных операций* в диалоговом режиме (см., например, Тоби [1969]). Эти возможности позволят более интенсивно исследовать новые численные методы, как полностью дискретные, так и (что более существенно) полуаналитические. В настоящее время осуществление такого подхода заняло бы слишком много времени.

Развитие математического обеспечения в этом направлении оказало бы даже большее влияние на применение аналитических методов типа метода сращиваемых асимптотических разложений, чем на применение численных методов. Получение решений для возмущений высокого порядка при помощи ЭВМ, выполняющих алгебраические преобразования, могло бы стать вполне обычной задачей в случае «регулярных» возмущений, однако в газовой динамике много задач с *сингулярными* возму-

щениями, и поэтому, вероятно, аналитики не останутся без работы.

Существует интересная возможность использования аналитических решений высокого порядка, полученных с помощью ЭВМ, аналогичная использованию численных решений в настоящее время. Обычно желательность получения аналитического результата следует не только из быстроты проведения расчета, но и из возможности получения качественной информации из исследования функционального вида решения. Однако если «ответ» представляется выражением, записанным на сорока страницах, то его невозможно как-либо интерпретировать. Вместо этого аналитическое решение, полученное на ЭВМ, может быть машинным образом транслировано непосредственно в программу на Фортране, которая (как и конечно-разностная программа) затем используется для получения численных ответов при заданных значениях входных параметров. В этом случае «аналитику» даже не нужно *просматривать* функциональный вид полученных решений!

В дополнение к рассуждениям о вычислительных методах и ЭВМ обсудим классы задач, которые будут решены в ближайшем будущем. Большинство численных исследований в настоящее время в некотором смысле обособлено, что соответствует незрелости этой области науки. В будущем мы ожидаем появления более исчерпывающих исследований конкретных гидродинамических задач, включающих не только численное моделирование, но и аналитическое изучение, и физические эксперименты. Имеется несколько работ подобного типа: Бургграф [1966], Техейра [1966], Лил [1969], Мюллер и О'Лири [1970], Бургграф и Стюартсон [1971], Феннинг и Мюллер [1970]. Ожидается продолжение интенсивного развития *«вычислительных теорий» турбулентности* и *проверки основных уравнений* для турбулентности, динамики грунтов и плазмы. Ожидается, что возрастет количество и качество работ по моделированию *гидродинамической устойчивости*; этому вопросу посвятили свои исследования Десанто и Келлер [1961], Фромм и Харлоу [1963], Диксон и Хеллумс [1967], Нагель [1967], Пиачек [1968, 1970], Веронис [1968], У. П. Кроули [1968б], Белломо [1969], Дональдсон [1969], Лоэр [1969], Ди Прима и Роджерс [1969], Краудер и Дальтон [1971а]. Морс и Нилсон [1971] изучали магнитогидродинамическую неустойчивость.

Новые задачи перед вычислительной гидродинамикой ставит рассмотрение *специальных уравнений течения*, например уравнения $\partial u/\partial t + \partial^3 u/\partial x^3 = 0$, возникающего при изучении океанских течений вблизи экватора (Кипинг [1968]); уравнений *релятивистской* гидродинамики, играющих важную роль в астрофизических задачах (Шварц [1967]); гидродинамических эф-

фектов при *сварке взрывом* (Годунов с соавторами [1970]). Станет более распространенным *объединение* решения гидродинамических задач с исследованием других физически важных явлений. Первыми образцами подобных исследований являются объединение гидродинамики с рассмотрением трехмерной абляции, изменения формы тела и внутренней теплопроводности (Поппер с соавторами [1970]) и с продольными колебательными движениями тела (Томпсон [1968], Трулио и Уолитт [1969]), причем последняя задача осложняется неприменимостью преобразования, связанного с обращением потока (см. Лайтхилл [1954]).

Отметим, наконец, что *обработка информации* и ее использование, кратко обсуждаемые в следующей главе, сами по себе являются важной областью исследований.

# Глава 7

# РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОГРАММИРОВАНИЮ, КОНТРОЛЮ И ОБРАБОТКЕ ИНФОРМАЦИИ

В настоящей главе мы дадим некоторые рекомендации по составлению и отладке программ, по контролю вычислительных схем и по обработке полученной информации. Конечно, на практике эти операции четко не разделяются, и необходимо учитывать обратные связи. Многие из приведенных ниже рекомендаций, зачастую не связанных одна с другой, отражают персональную точку зрения автора, однако наши научные контакты с коллегами в этой области показывают, что мы не одиноки в своем мнении. Некоторые могут отвергнуть эти вопросы как праздные и тривиальные, однако мы считаем, что знакомство с ними может сыграть существенную роль в успешной организации исследований.

## 7.1. Составление программы для ЭВМ

Необходимо различать рекомендации, относящиеся к *опытной* программе и к *рабочей* программе. Для проведения многих исследований требуется только опытная программа. Можно сказать, что исследование численного метода самого по себе заканчивается тогда, когда уже можно составить рабочую программу, которая в свою очередь может служить для гидродинамических исследований и разработок. Здесь имеет место прямая аналогия с проектированием, разработкой, проверкой и калибровкой аэродинамической трубы перед проведением на ней серии экспериментов.

1. *Опытную программу составляйте сами.*

Из всех приведенных здесь рекомендаций эта, возможно, вызовет наибольшее неудовольствие, но мы настаиваем на ней. Процитируем книгу Хемминга [1962] «Глава $N + 1$. Искусство вычислений для исследователей и инженеров»: «Целью вычислений является проникновение в суть явлений, а не получение чисел» и далее: «Маловероятно, чтобы большие физические идеи зародились в мозгу профессионального программиста, который лишь тем и занимается, что программирует задачи». Опыт работы автора над многомерными задачами гидродинамики показывает, что наиболее тонкие аспекты задачи, в частности вопросы, связанные с постановкой граничных и начальных

условий в многошаговых схемах, возникают как раз на стадии программирования. По нашему мнению, в действительности трудно разделить работу по развитию численного метода и программирование само по себе, которое часто перепоручают программисту [1]).

Однако профессиональный программист (если вы можете воспользоваться его услугами) в состоянии оказать существенную помощь в вопросах ввода-вывода информации, работы с магнитными лентами, функционирования вычислительной системы, работы со стандартными подпрограммами типа обращения матрицы методом Гаусса, алгоритма прогонки и т. д. Деятельность такого рода иногда называют кодированием, противопоставляя ее более творческой работе программирования задачи.

2. *Составление рабочей программы поручайте профессиональному программисту, если имеется такая возможность.*

3. *При составлении опытной программы используйте модульное программирование.*

Модульное программирование обладает тем преимуществом, что каждая подпрограмма (например, SUBROUTINE или FUNCTION в Фортране) может отлаживаться отдельно и даже может быть составлена разными людьми.

4. *При составлении рабочей программы избегайте модульного программирования.*

Для вызова подпрограммы необходимо время. Например, вызов подпрограммы с одним параметром на CDC 6600 занимает от 7 до 8 мкс, что можно сравнить с одной микросекундой для выполнения операции умножения и с 0.4 мкс для выполнения операции сложения. Если число параметров подпрограммы больше одного, то вызов занимает еще больше времени. Однако это потеря времени не столь существенна, если программа вызывается не для каждого узла расчетной сетки. Поэтому оформление в виде подпрограммы задания начальных условий будет эффективным, а оформление в виде подпрограммы расчета максимально допустимого значения $\Delta t$ с просмотром всех узлов расчетной сетки, требующего в свою очередь вызова подпрограммы расчета скорости звука, будет неоправданной тратой машинного времени, если такая подпрограмма будет вызываться

[1]) Взаимоотношения между исследователем в области вычислительной гидродинамики и программистом напоминают взаимоотношения между авиаконструктором и чертежником, юмористически описанные К. Д. Вудом в его книге, посвященной авиационно-космическим проектам.

на каждом шаге по времени (см., однако, ниже рекомендацию 13).

В этой связи необходимо отметить преимущество функций-операторов в Фортране. Они применяются редко, по-видимому, потому, что их преимущества недостаточно широко известны. Функция-оператор отличается от SUBROUTINE и FUNCTION тем, что не требует времени на вызов. Операционная система просто подставляет этот арифметический оператор в обращение к функции. Например, рассмотрим вычисление числа Маха M в узловой точке (I, J), причем полную величину скорости в этой точке обозначим через VMAG, а температуру — через T(I, J). Функцию-оператор для вычисления скорости звука обозначим VS(K, L) = .... Тогда

```
.
.
.
VS(K, L) = C1*SQRT(T(K, L))
REAL M
.
.
.
C1 = ...
.
.
.
M = VMAG/VS(I, J)
.
.
.
```

Это «обращение» (не выполняемое) к функции-оператору VS(KL) реализуется транслятором по типу следующей программы:

```
.
.
.
REAL M
.
.
.
C1 = ...
.
.
.
M = VMAG/(C1*SQRT(T(I, J)))
```

Данная программа носит модульный характер в том смысле, что вычисление скорости звука локализовано в одном месте программы и легко может быть изменено; это безусловно удобно.

В более сложных случаях функции-операторы могут вызывать другие функции-операторы, и соответствующие перфокарты можно извлечь из колоды и отладить отдельно. Этим можно достигнуть значительной экономии усилий на программирование, перфорацию и отладку [1]).

5. *На ранних стадиях составляйте самую частную программу.*

Допустим, вы намерены экспериментировать с различными условиями на выходной границе. Составляйте первый вариант программы только с простейшим условием на выходной границе. Когда основная программа будет отлажена, добавьте переключатель для различных вариантов граничных условий. Эта рекомендация особенно важна при наличии большого числа взаимосвязанных вариантов. Часто случается, что некоторые из вариантов не реализуются.

6. *На ранних стадиях составляйте самую простую программу.*

Не будет лишним даже начать разработку программы с другой, более простой численной схемой, нежели та, которая будет применена окончательно; при этом будет легче отладить другие части программы. Сложная схема расчета во внутренних узлах сетки сильно усложняет отладку программы. (Например, по опыту автора при расчете течений сжимаемой жидкости по двухшаговой схеме грубая ошибка в вычислении плотности на первом шаге обнаруживается лишь при больших $t$ по расходимости решения для температуры.) Составление программы расчета течения сжимаемой жидкости рекомендуется начинать со случая постоянных $\mu$ и $k$; программы расчета задачи радиационной газодинамики — с программирования и отладки только ее газодинамической части; пока не отлажен расчет во внутренних точках, рекомендуется избегать усложнений, связанных с рассмотрением свободной поверхности, и т. д.

В связи с простотой программы отметим главное различие между задачами расчета течений сжимаемой и несжимаемой жидкости. Уравнения течения несжимаемой жидкости в некотором смысле более сложны, так как здесь надо решать и задачу Коши для $\zeta$, и краевую задачу для $\psi$. Однако в них меньше искомых функций, а уравнения для $\zeta$ и $\psi$ могут решаться последовательно. В случае сжимаемой жидкости в большинстве схем

[1]) В этой цепочке вызовов могут возникнуть путаница и ошибки, если число вложений больше двух и если для формальных и фактических параметров используются одни и те же идентификаторы.

все четыре уравнения должны решаться одновременно, и поэтому здесь отладка более затруднительна.

7. *При расчете течения сжимаемой жидкости не отправляйтесь от решения соответствующей задачи о течении несжимаемой жидкости.*

Казалось бы, можно сначала рассмотреть для заданной геометрии течение несжимаемой жидкости, а потом перейти к усложнениям, обусловленным сжимаемостью. Хотя при решении первой задачи и будет накоплен некоторый опыт, однако структуры решений обеих задач настолько различны, что в целом этот путь является очень неэффективным.

Это замечание относится к полным уравнениям Навье — Стокса. Структуры решений уравнений пограничного слоя для несжимаемой и сжимаемой жидкостей более близки.

8. *Разбивайте программу на блоки и снабжайте блоки контрольными выдачами.*

Как отмечает Хемминг [1962], распространенной ошибкой является путаница в последовательности проведения расчетов. С другой стороны, автор настоящей книги не слишком высоко расценивает формализованные блок-схемы программ. По нашему опыту обычно такие блок-схемы составляются после разработки самой программы на стадии подготовки отчетности по ней, а не программа составляется по блок-схемам. За исключением высших уровней организации программы, подробную блок-схему, как правило, труднее понять, чем саму программу, если последняя снабжена подробными комментариями.

Если в программе есть ошибка, то важно знать, в каком месте программы проявились ее последствия, каковы в этот момент значения параметров циклов и т. д. Для получения этой информации на стадии отладки удобно вводить в программу частые выдачи.

9. *При оценке общих сроков составления программы разбивайте всю работу на отдельные этапы.*

Оценка сроков решения вычислительной задачи не входит в число вопросов, в которых искушен автор настоящей книги, хотя он и запомнил широко известное изречение: «Это займет гораздо больше времени, чем вы думаете». Однако здесь могут помочь оценки для отдельных этапов работы: разработки первоначальной (очень частной) программы, отладки более общей программы, проведения методических расчетов и тестов, получения результатов, обработки полученной информации и т. д.

10. *Знайте свою ЭВМ.*

Глубокое понимание особенностей работы ЭВМ обычно более важно на стадии окончательной «доводки» рабочей программы. Лучше всего это сделает компетентный специалист по программированию, однако полезно, если и автор программы обладает некоторыми познаниями в этом вопросе.

Поясним сказанное на примере. Отметим различие между CDC 6600 и старой IBM 1620 в отношении арифметических действий с числами разного типа. В CDC 6600 числа различных типов преобразуются в числа с плавающей запятой, а в IBM 1620 этого не происходит. На IBM 1620 операция 2*X выполняется быстрее, чем операция 2.*X, а на CDC 6600 — наоборот. На IBM 1620 операция 2*X эквивалентна X+X, однако на CDC 6600 операция X + X выполняется быстрее, чем 2.*X, поскольку операция типа сложения занимает около 0.4 мкс, а операция умножения — около 1 мкс (заметим,что X + X + X выполняется медленнее, чем 3.*X). Время выполнения операции деления на CDC 6600 составляет приблизительно 2.9 мкс. Поэтому при расчете вклада от диффузионных членов вместо деления этих членов на число Рейнольдса значительно эффективнее подсчитать число Рейнольдса RE, один раз вычислить величину REI, обратную числу Рейнольдса, и затем все время умножать значения диффузионных членов на эту величину. Заметим, что время выполнения операций умножения и деления различно не у всех ЭВМ.

Однако на ранних стадиях разработки программы обычно не стоит жертвовать наглядностью программы во имя повышения ее эффективности. Кроме того, заметим, что новейшие операционные системы часто автоматически оптимизируют подобные операции. Приведенные выше примеры показывают, что при сравнении быстродействия различных численных схем и программ необходимо учитывать зависимость быстродействия от типа ЭВМ, операционной системы и квалификации программиста.

11. *Избегайте возведения в степень чисел с плавающей запятой.*

Потери времени от возведения в степень чисел с плавающей запятой столь велики, что их необходимо исключать уже на ранних стадиях разработки опытной программы. На CDC 6600 умножение двух чисел с плавающей запятой X*X занимает около 1 мкс, а возведение в степень X**2. занимает 94 мкс. Даже если X = 0, то X**2. занимает 12 мкс (заметим, однако, что для чисел с фиксированной запятой операция X**2 эквивалентна по

времени выполнения операции X*X). Потери времени часто можно уменьшить, используя стандартную функцию SQRT; на CDC 6600 время выполнения операции X**0.5 равно 94 мкс, а время выполнения операции SQRT(X) равно только 23 мкс.

Наиболее часто возведение в степень в газовой динамике встречается при расчете вязкости в зависимости от температуры. Формула Сазерленда записывается в виде (см., например, Шлихтинг [1968])

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S},$$

где $\mu_0 = \mu(T_0)$, а $\mu_0$, $T_0$, $S$ — величины постоянные для данного газа. В безразмерном виде она может быть записана в виде функции-оператора Фортрана

```
MU = A*(B*T)**1.5*C/(T + D)
```

где A, B, C, D — постоянные. Его же можно записать и в другом виде, алгебраически эквивалентном первому:

```
MU = A*SQRT(BB*T**3)*C/(T + D)
```

где BB — другая постоянная. На CDC 6600 расчет по первой формуле занимает 101.3 мкс, а по второй — 31.3 мкс. Однако при расчете по второй формуле для случая $T \gg 1$ (в ненормализованной форме) могут получиться большие промежуточные значения, что на ЭВМ с коротким машинным словом может привести к заметной потере точности.

В зависимости от ожидаемого интервала изменения температуры формулу Сазерленда часто можно аппроксимировать соотношением

$$\mu/\mu_0 = (T/T_0)^{\omega},$$

где $\omega$ выбирается в пределах от 0.5 до 1. Для $\omega = 0.5$ вычисление по формуле

```
MU = A*SQRT(B*T)
```

занимает около 25 мкс. В простейшем случае $\omega = 1$ вычисление по формуле

```
MU = AA*T
```

занимает только одну микросекунду. Но в случае $\mu = \text{const}$ достигается еще бо́льшая экономия времени решения всей задачи, поскольку тогда член $\partial(\mu \partial T/\partial x)/\partial x$ принимает вид $\mu \partial^2 T/\partial x^2$.

Если требуется повышенная точность, обеспечиваемая сложными зависимостями вязкости от температуры типа формулы Сазерленда, то на стадии опытной программы можно ограничиться линейной зависимостью, а требуемое более точное соотношение ввести в рабочую программу в виде подпрограммы ку-

сочно линейной или кусочно степенной (с показателем 1/2) аппроксимации на отдельных интервалах изменения температуры.

При нелинейной зависимости вязкости от температуры можно сэкономить много машинного времени, запоминая двумерный массив величин $\mu_{i,j}$ вместо вычисления новых значений $\mu$ для каждого значения $T_{i,j}$. В первом случае требуется $I \times J$ раз вычислять значения вязкости, а величины вида $\mu_{i+1/2,j}$ находятся осреднением $(\mu_{i+1,j} + \mu_{i,j})/2$. В случае же непосредственного расчета вязкости в каждом узле $(i, j)$ вычисление $\mu_{i+1/2,j}$ либо по формуле (5.100), либо по формуле (5.101) требует в пять раз больше времени из-за необходимости расчета величин $\mu_{i,j}$, $\mu_{i\pm1,j}$, $\mu_{i,j\pm1}$. При отыскании только стационарного решения дальнейшая экономия машинного времени может быть достигнута путем обновления значений массива $\mu_{i,j}$ лишь один раз примерно за 10 шагов по времени.

Аналогичные соображения применимы и к уравненню состояния сложного вида, на расчет которого может тратиться основная часть машинного времени в задачах о распространении ударных волн в твердых телах.

12. *В рабочей программе группируйте члены с одинаковыми индексами и стремитесь оперировать с одним индексом.*

Схему с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным для модельного уравнения, описывающего конвективный перенос и диффузию, можно записать в виде

$$\xi_i^{n+1} = \xi_i^n - c\,(\xi_{i+1}^n - \xi_{i-1}^n) + \alpha\,(\xi_{i+1}^n - 2\xi_i^n + \xi_{i-1}^n).$$

Соответствующий оператор на Фортране может иметь вид

```
ZP(I) = Z(I) - C*(Z(I+1) - Z(I-1)) +
                + A*(Z(I+1) - 2*Z(I) + Z(I-1))
```

Считая умножение целого числа на действительное 2*Z(I) эквивалентным сложению и операции с индексами (I+1) и (I—1) также эквивалентными сложению, получим, что оператор содержит десять операций типа сложения и два умножения, и его выполнение на CDC 6600 займет около 6 мкс. Перегруппируем теперь члены в операторе следующим образом:

```
ZP(I) = D1*Z(I) + D2*(Z(I+1)) + D3*(Z(I-1))
```

Здесь D1 = (1. — 2*A), D2 = (A — C), D3 = (A + C) найдены заранее и, следовательно, не вычисляются для каждого значения I. Оператор содержит четыре операции типа сложения и три умножения и его выполнение на CDC 6600 займет около 4.6 мкс, т. е. достигнут выигрыш по времени в 6/4.6 = 1.3 раза.

Скоглунд и Гей [1968, 1969] обнаружили, что группировка членов в схеме Лакса — Вендроффа (разд. 5.5.5) и применение линейной зависимости вязкости от температуры снижают затраты машинного времени на одну итерацию в три раза. Группировка членов существенно улучшает качество рабочей программы, однако она является делом довольно кропотливым и уменьшает наглядность программы, поэтому ее нельзя рекомендовать на ранних стадиях разработки опытной программы.

Применение переменных с одним индексом помогает избежать лишних вычислений, присущих Фортрану. Рассмотрим простой оператор присвоения

$$W = A(I, J)$$

где A описано в операторе DIMENSION как A(IL, JL). На самом же деле транслятор отводит в оперативном запоминающем устройстве под массив A одномерный массив ячеек памяти длины IL × JL. Для переменной с одним индексом типа P (IL) адрес ячейки, в которой хранится P (I), вычисляется следующим образом:

$$\text{адрес P (I)} = \text{адрес P} + I - 1$$

Для переменной с двумя индексами адрес вычисляется следующим образом:

$$\text{адрес A (I, J)} = \text{адрес A} + I - 1 + (J - 1)^* IL$$

В общем случае, когда производится много присвоений и арифметических операций со многими переменными, имеющими одни и те же индексы, значительная экономия времени может быть достигнута путем предварительного программного нахождения адресов ячеек:

$$L = I - 1 + (J - 1)^* IL$$
$$W = A(L)$$
$$X = B(L)$$
$$Y = C(L)$$
$$Z = D(L)$$

Заметим, что массивы A, B, C, D могут быть описаны в операторе DIMENSION как переменные с двумя индексами и тем не менее рассматриваться как переменные с одним индексом в программе на Фортране.

Наиболее значительные возможности экономии времени по этой методике возникают при ее применении к многократным вложениям оператора цикла DO в трехмерных задачах. Получающаяся при этом программа на Фортране менее наглядна, и поэтому такую методику нельзя рекомендовать при разработке опытной программы.

13. *В рабочей программе избегайте слишком частого вычисления максимально допустимого шага по времени.*

Следует предостеречь от вычисления максимально допустимого шага $\Delta t$ на каждой итерации по времени. Для задач, в которых параметры течения не слишком быстро меняются во времени, его достаточно находить один раз за десять итераций или что-нибудь около этого. Это соображение может существенно убыстрить расчет задачи. Для некоторых задач максимально допустимый размер шага по времени можно оценить аналитически и тем самым полностью избежать его вычисления.

## 7.2. Отладка и контроль

Программу необходимо отладить, т. е. исправить в ней ошибки программирования; программу и использованные в ней схемы необходимо проверить на устойчивость, сходимость, точность и т. д. В том случае, когда нет диагностики ошибок от транслятора и программа выдает разумные числа, эти две работы часто не разграничиваются.

14. *Отлаживайте и проверяйте программу на грубой сетке.*

Очевидно, что проверить точность схемы на грубой сетке нельзя. Однако устойчивость и сходимость решения конечно-разностных уравнений обычно можно проверить на крайне грубой сетке, лишь бы она содержала хотя бы одну стандартную внутреннюю узловую точку. Для многих задач качественно разумные результаты, пригодные для проверки устойчивости, итерационной сходимости, постановки граничных условий, выбора вариантов, процедур вывода информации и т. д., могут быть получены на сетке $4 \times 4$ всего с 9 внутренними точками. Избегайте болезненного пристрастия к десятичной системе. Не обязательно размещать в пограничном слое сакраментальные десять точек; часто для отладки достаточно даже двух или одной точки.

Если бы все пользователи в основных вычислительных центрах стали отлаживать свои задачи на максимально грубых сетках, то, возможно, высвободились бы машинные мощности, эквивалентные пуску ЭВМ следующего поколения.

15. *Помните о важности хороших отладочных процедур и малого времени прохождения программы.*

В настоящее время существует много фортранных трансляторов с различным объемом выдаваемой ими диагностики. Во многих вычислительных центрах вдобавок к основному транслятору имеются специальные отладочные программы. Еще бо-

лее важным является время прохождения программы: именно оно (а не машинное время расчета) оказывает решающее влияние на общие сроки разработки программы. Пользователь частично может управлять временем прохождения программы, поскольку в большинстве вычислительных центров предпочтение отдается программам с малым временем счета, а в режиме разделения времени — программам с меньшим объемом задействованной памяти. Обе эти возможности реализуются в первую очередь за счет отладки на грубой сетке. Иногда пользователь имеет возможность отлаживать программу или ее составные части на более старой ЭВМ или на ЭВМ с меньшим быстродействием, у которых время прохождения программы обычно меньше, чем у новейших машин того же вычислительного центра.

Что касается тех аспектов величины времени прохождения программы, которые не зависят непосредственно от пользователя, то он по крайней мере должен понуждать администрацию вычислительного центра к его сокращению. Вообще говоря, решение человека серьезно работать в области вычислительной гидродинамики или получать квалификацию в этом направлении должно в значительной степени основываться на величине времени прохождения программ и общего состояния машинного обеспечения в месте предполагаемой работы.

16. *Локализуйте ошибки в программе путем выключения членов.*

Когда итерации перестают сходиться или в результате получаются явно неверные числа и можно ожидать ошибок в программе, эти ошибки иногда могут быть локализованы с помощью «выключения» тех или иных членов уравнений. Например, для проверки поведения пограничного слоя можно в программе сначала полагать $A = 0$ и затем подкладывать перфокарту $A^*$ (диффузионные члены в направлении $y$).

Для выявления нелинейной неустойчивости можно обойти решение уравнения Пуассона для функции тока с помощью линеаризации уравнения переноса вихря. Граничные условия могут «замораживаться». В уравнениях, описывающих течение сжимаемой жидкости, любая из четырех зависимых переменных может «выключаться» или рассчитываться независимо, однако здесь надо обращать внимание на неявную зависимость их расчета через уравнение состояния и через переход от консервативных к неконсервативным переменным. Пробный расчет задачи с $\Delta t = 0$ часто выявляет ошибки, связанные с переходом от консервативных переменных к неконсервативным, однако этот способ неприменим в схемах типа схемы Лакса (разд. 5.5.4).

Заметим также, что для проверки схемы или программы можно выключить даже целое измерение. Однако, как уже было отмечено выше, иногда задачи обладают свойствами, не сохра-

няющимися при переходе к меньшему числу измерений. В частности, некоторые авторы применяли одномерные задачи для экспериментального сравнения скорости сходимости итерационных схем. Однако сходимость зависит от размерности задачи, и проверки на одномерных задачах здесь не всегда показательны. Влияние размерности можно на время исключить, если в расчете течения сжимаемой жидкости по явной схеме начать расчет с однородного потока; в этом случае влияние стенки не должно распространяться более чем на один узел от стенки за один шаг по времени для одношаговой схемы (и на $m$ узлов для $m$-шаговой схемы).

17. *Старайтесь проверить все варианты условий, заложенные в рабочей программе.*

Эта рекомендация кажется очевидной, однако на практике ее часто невозможно придерживаться из-за огромного числа возможных вариантов. Иногда не проверяются полностью даже основные варианты по отдельности, например не проверяются все варианты химических реакций, не говоря уже о сочетаниях этих вариантов со всеми вариантами граничных условий, со всеми вариантами зависимости вязкости от температуры и т. д. В этой связи следует заметить, что чрезвычайная сложность программы (или схемы) влияет на ее правильность или по крайней мере на доверие к ней, поскольку может оказаться, что все ошибки в программе практически невозможно найти. Можно даже сказать, что время отладки подобных программ бесконечно велико. В процессе использования большинство ошибок обнаруживается и исправляется, однако одновременно обычно и добавляются варианты условий, и меняются имевшиеся, что может вести к возникновению новых ошибок, которые не обнаруживаются до тех пор, пока при дальнейшей эксплуатации программы не встретится соответствующая комбинация условий. Даже без добавления новых вариантов проведенное наспех исправление одной обнаруженной ошибки может привести к внесению новых ошибок, которые нельзя сразу обнаружить. Автор настоящей книги в течение пяти лет наблюдал эксплуатацию тщательно разработанной программы со сложной логикой и с большим числом условий для расчета баллистических траекторий, в которой регулярно обнаруживались серьезные ошибки.

18. *Исследуйте устойчивость и итерационную сходимость в широком интервале изменений параметров.*

Хотя бы на грубой сетке проверьте устойчивость расчетов в интересующих вас пределах изменения величин M, Re и т. д. (хотя это не всегда возможно в случае зависимости устойчиво-

сти от размера ячейки сетки, как в условии устойчивости по сеточному числу Рейнольдса).

При проверке устойчивости расчета эволюционной задачи может быть полезен способ, предложенный Миллером [1967]. Он предлагает проводить параллельно два расчета при начальных условиях, отличающихся на величину, в некотором смысле малую, но значительно бо́льшую, чем ошибки округления. О возникновении неустойчивости можно судить по величине некоторого функционала (разности квадратов зависимых переменных) для двух таких параллельных расчетов. Заметим, однако, что этот прием не дает возможности отличить гидродинамическую неустойчивость от численной.

19. *Не списывайте все неудачи на нелинейную неустойчивость.*

Когда расчет протекает неудовлетворительно, обычно роль «козла отпущения» достается нелинейной неустойчивости. На нее списывают и ошибки программирования, и неверную постановку граничных условий, и неисследованную линейную неустойчивость. В действительности настоящая нелинейная неустойчивость встречается сравнительно редко; единственными известными ее примерами являются ограниченные осцилляции около сильной ударной волны [1]) и трудность при «комбинированном итерировании» уравнений для $\zeta$ и $\psi$ (см. разд. 3.1.22). Чаще нелинейности подавляют ошибки и действительные неустойчивости за счет механизма ограничения роста амплитуды.

Можно иногда избежать настоящей нелинейной неустойчивости (а иногда и затушевать следствия ошибок в программе), задавая лучшие начальные условия, которые могут быть получены менее точным, но более устойчивым методом. Так, Лапидус [1967] для получения хороших начальных условий применил просто первый шаг (схему Лакса) двухшаговой схемы Лакса — Вендроффа (разд. 5.5.6).

20. *Тщательно проверяйте итерационную сходимость конечно-разностных уравнений.*

Обычно это можно делать на очень грубой сетке. Как было указано в разд. 3.4 и 5.8, строгих критериев итерационной сходимости не существует. Однако на грубой сетке часто можно достигнуть полной сходимости (т. е. нулевых изменений величин) конечно-разностного решения в пределах машинной точности. (Это возможно не для всех схем, поскольку могут возникать незатухающие колебания малой амплитуды.) Если второй

[1]) Расчеты уравнения Бюргерса для невязкой жидкости, проведенные Штеттером [1970], указывают на устойчивость, обусловленную местным изменением характеристического направления в конечно-разностных уравнениях.

расчет с другими начальными условиями сошелся к тому же решению с точностью до ошибок округления, то можно утверждать (если не с абсолютной уверенностью, то хотя бы с чистой совестью), что схема обладает сходимостью.

21. *Используйте любую информацию о решении для проверки.*

Эта рекомендация дана Хеммингом [1962]. Например, заранее известные условия симметрии обычно применяются для уменьшения размеров расчетной области задачи. Однако при начальной проверке на грубой сетке развитие симметричной картины из несимметричных начальных условий может быть хорошим тестом задачи. Аналогично, для проверки аппроксимационной сходимости можно контролировать однозначность давления в угловой точке (разд. 3.5.3). Читателю могут встретиться и другие аналогичные примеры.

22. *По возможности проверяйте точность расчетов сравнением с точными решениями.*

Иногда точность схемы или программы можно проверить сравнением с точным решением. Такие точные решения не обязательно должны быть решениями реальных практически важных задач; с другой стороны, хорошее согласование полученного решения с точным еще не означает в общем случае точности схемы или отсутствия ошибок в программе.

В частности, стационарные течения вязкой жидкости с параллельными линиями тока (течение Куэтта, течение Пуазейля, течение между вращающимися концентрическими цилиндрами и т. д.) не обеспечивают особо хорошей проверки точности схемы. Приведем примеры удачного использования точных решений для проверки вычислительных схем, опубликованные в открытой литературе.

Для исследования устойчивости ири постановке граничных условий на входной и выходной границах П. Дж. Тейлор [1968] рассмотрел задачу о мгновенном начале движения бесконечной плоской пластины, так называемую задачу Релея или первую задачу Стокса (см. Шлихтинг [1968]). Решение имеет вид

$$u(y, t) = U_w \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right),$$

где erfc — дополнительный интеграл вероятности ошибки. Кроме точного решения задачи о мгновенном начале движения пластины имеется еще точное автомодельное решение при заданной непрерывной зависимости скорости от времени $U = at^b$. Это решение имеет вид $U = at^b F(\eta)$, где $\eta = y/(2\sqrt{\nu t})$, а $F(\eta)$ — ре-

шение (численное) следующего обыкновенного дифференциального уравнения:

$$F'' + 2\eta F' - 4bF = 0, \quad F(0) = 1, \quad F(\infty) = 0$$

Бёрдсли [1969] для контроля брал решение в цилиндрических координатах аналогичной задачи о мгновенной остановке цилиндрического сосуда единичного радиуса, вращавшегося ранее вместе с жидкостью как единое целое. Начальное условие для окружной составляющей скорости $v_\theta$ имеет вид $v_\theta(r, 0) = r$ для $r < 1$. Во все моменты времени $t > 0$ имеем $v_\theta(1, t) = 0$. Уравнения течения имеют вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu \nabla^2 \zeta, \quad v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

и

$$\zeta = \nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right).$$

Точное решение записывается через функции Бесселя:

$$v_\theta = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n r)}{\lambda_n J_0(\lambda_n r_0)} \exp(-\lambda_n^2 \nu t),$$

$$\psi = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n r_0)}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n r_0)} \exp(-\lambda_n^2 \nu t),$$

$$\zeta = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_0(\lambda_n r_0)} \exp(-\lambda_n^2 \nu t).$$

Для проверки можно взять решение задачи о течении около бесконечной плоской пластины, колеблющейся по закону $U_w = U_0 \cos(\omega t)$ (вторая задача Стокса; см. Шлихтинг [1968]). Решение имеет вид

$$u(y, t) = U_0 e^{-\eta} \cos(\omega t - \eta),$$

где

$$\eta = u\omega/(2\nu).$$

Недостатком этих одномерных решений является отсутствие конвективных членов в уравнениях движения. Гринспэн [1967] для изучения точности рассматривал нефизичную задачу с добавлением в уравнение неоднородных членов. При этом уравнение в частных производных, граничные и начальные условия имели вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x \cdot (\sin t + \cos t),$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

$$u(0, t) = 0 = u(\pi, t) \quad \text{для} \quad t > 0.$$

Решение задачи записывается в виде

$$u(x, t) = \sin x \cdot \sin t.$$

Настоящее нелинейное поведение решений в одномерной задаче можно изучать при помощи уравнения Бюргерса (2.19)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

которое может быть записано в консервативной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Шрёдер и Томсен [1969] рассмотрели его вариант без учета вязкости ($\alpha = 0$) с условиями

$$u(x, 0) = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad u(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Точное решение имеет вид $u = x/(1 + t)$, что означает отсутствие скачков при $t > 0$ (см. разд. 4.7). Однако это решение дает $\partial^2 u/\partial x^2 = 0$ во все моменты времени и поэтому не может обеспечить удовлетворительной проверки (например, по нему нельзя изучить влияние искусственной вязкости). Чен [1968] и Аллен [1968] изучали точность постановки условий на выходной границе и консервативность с помощью уравнения Бюргерса при $\alpha > 0$ с граничными условиями $u(0, t) = 0$, $u(-1/2, t) = 1$. Точное стационарное решение в интервале $-1/2 \leqslant x \leqslant 0$ имеет вид

$$u(x, \infty) = -2\alpha \operatorname{th}(Ax),$$

где

$$A = 2\operatorname{ar\,th}[1/(2\alpha)].$$

Тейлор с соавторами [1972] применял полученное Лайтхиллом точное решение задачи об эволюции первоначально ступенчатой функции в бесконечном пространстве (без граничных условий по пространству). Для начальных условий

$$u(x, 0) = a \quad \text{при} \quad x \leqslant 0, \quad u(x, 0) = 0 \quad \text{при} \quad x \geqslant 0$$

точное решение имеет вид

$$u(x, t) = a\left\{1 + \exp\left[\frac{a}{2\alpha}\left(x - \frac{at}{2}\right)\right] b\right\}^{-1},$$

где

$$b = \operatorname{erfc}[-x/(2\sqrt{\nu t})]/\operatorname{erfc}[(x - at)/(2\sqrt{\nu t})].$$

Гурли и Моррис [1968а] рассмотрели следующее одномерное нелинейное уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{x^2 u^2}{t}\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{2x^3 u^2}{t} - 1\right)\cos(x^2 - t)$$

с граничными условиями

$$u(x, 1) = \sin(x^2 - 1), \quad u(0, t) = -\sin t.$$

На интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ и при $1 \leqslant t$ точное решение имеет вид

$$u(x, t) = \sin(x^2 - t).$$

Гурли и Моррис [1968б] рассматривали также двумерную задачу с действительно нелинейными членами, напоминающими конвективные члены. При этом уравнение в частных производных имело вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{4}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{4}\right) = f(u, x, y),$$

где

$$f(u, x, y) = 50uxy\,[y(1 - y)(2 - 3x) + x(1 - x)(2 - 3y)].$$

Это уравнение можно записать и в неконсервативной форме, положив $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{4}\right) = \frac{u}{2}\frac{\partial u}{\partial x}$. Начальные и граничные условия выбирались в виде

$$u(x, y, 0) = 100x^2(1 - x)y^2(1 - y),$$

$$u(0, y, t) = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad u(x, 0, t) = 0 \quad \text{при} \quad t > 0.$$

Гурли и Моррис сравнивали полученные ими численные решения с точным *стационарным* решением задачи

$$u = 100x^2y^2(1 - x)(1 - y).$$

Максимальное значение $u(x, y, t)$ для всех $t$ в квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ приблизительно равно 2.2; это значение можно использовать для суждения об устойчивости.

Цзю [1970] получил точное решение для волн, движущихся в изотермической стратифицированной атмосфере, которое можно использовать для проверки многих программ расчета атмосферных течений.

У. Кроули [1968а] проверял схемы на фазовую ошибку при помощи точного решения одномерного линейного модельного уравнения с переменными коэффициентами при отсутствии вязкости, рассматриваемого в приведенном ниже упражнении.

*Упражнение.* Дано уравнение

$$\partial\zeta/\partial t = -u\,\partial\zeta/\partial x$$

с начальным условием

$$\zeta(x, 0) = f[\ln(u)]$$

где $f$ — произвольная функция, а $u = ax + b$, причем $a$ и $b$ — произвольные постоянные. Показать, что точное решение имеет вид

$$\zeta(x, t) = f(\ln u - at).$$

Гринспэн [1967] рассматривал три одномерные задачи с линейными, но переменными коэффициентами при членах, аналогичных конвективным. Для всех трех задач ставились начальные условия $u(x, 0) = x$, и они имели решения вида $u(x, t) = xe^{-t}$. Эти решения могут быть полезными, однако необходимо отметить, что они дают $\partial^2 u/\partial x^2 = 0$ во все моменты времени. Поэтому, хотя вторая производная и входит в уравнение, вклады в этот диффузный член происходят лишь от накопления ошибок округления и аппроксимации, что может сделать эти точные решения не подходящими. То же самое замечание можно сделать относительно двумерной нелинейной тестовой задачи, которую предложили Гурли и Моррис [1968а] и точное решение которой $u = (1 - x - y)e^{-t}$ дает $\partial^2 u/\partial x^2 = \partial^2 u/\partial y^2 = 0$ во все моменты времени.

Практические тестовые задачи, обладающие точными решениями для одномерных течений невязкого совершенного газа, удачно подобраны Хиксом [1968]. Он нрпвел семь тестовых задач, включающих скачки, волны разрежения и взаимодействие волн. Хикс и Пелцл [1968] применяли эти задачи для сравнения точности различных схем в лагранжевых переменных. Гордон и Скала [1969] в качестве тестовых задач использовали плоскую задачу о поршне, плоскую задачу о разлете массы и центрально-симметричную задачу о сферическом взрыве. Никастро [1968] нашел точные автомодельные решения радиационной газодинамики в сферически-симметричном случае как для взрыва, так и для схлопывания. Эти решения оказались весьма ценными для проверки столь трудных для численного решения задач, поскольку в них накладывались не слишком жесткие ограничения на начальные условия и вид закона переноса излучения. Стернберг [1970] нашел автомодельные решения для распространения плоских, цилиндрических и сферических ударных волн с учетом химических реакций.

Свой «почти лагранжев» алгоритм расчета квазиодномерных течений Б. К. Кроули [1967] проверяла на двух идеализированных задачах с источником и стоком массы. Предполагалось, что источник массы подает массу с нулевой кинетической энергией, а сток энергии обеспечивает равенство нулю общего потока энергии. В задаче со стоком массы происходит уменьшение как внутренней, так и кинетической энергии, которое компенсируется источником энергии. Хотя эти предположения и не имеют физического смысла, они позволяют получить точные решения, пригодные для проверки численного метода.

Для схем и алгоритмов расчета уравнений пограничного слоя существует много точных автомодельных решений (см. Шлихтинг [1968]). Для большинства из них требуется распределение

скорости вне пограничного слоя по степенному закону $u_e = ax^m$. (Для несжимаемой жидкости для тестовых целей можно использовать также класс решений с $u_e = ae^x$, хотя такие решения и лишены физического смысла.) В случае пограничного слоя в сжимаемой жидкости обычно вводятся дополнительные ограничения $\mathrm{Pr} = 1$, $\mu \sim T$ и $T_w = \mathrm{const}$. Для уравнений течения невязкого газа Вейс [1968] указал класс решений, которые после применения к ним преобразования Стюартсона дают требуемое степенное распределение скорости. Удобны для проверки разностных схем автомодельные решения вблизи точек торможения потока[1]) (см. Шлихтинг [1968]), хотя они пока еще не применялись для этой цели. Другими тестовыми задачами могут служить полученные Щенниковым [1969] осесимметричные автомодельные решения уравнений вязкого газа, частным случаем которых является струя вязкого газа.

Аналитические решения уравнений для потенциального течения, конечно, обеспечивают проверку многих аспектов вычислительных программ для полных уравнений Навье — Стокса; см., например, Крамер [1969].

23. *По возможности проверяйте точность расчетов сравнением с надежными приближенными решениями.*

Наиболее известным случаем приближенного решения уравнений Навье — Стокса являются решения уравнений пограничного слоя (Шлихтинг [1968]). Это могут быть аналитические решения, автомодельные решения, полученные численным интегрированием обыкновенных дифференциальных уравнений, и, наконец, неавтомодельные решения дифференциальных уравнений в частных производных. Отметим, что разница в рассмотрении уравнений пограничного слоя и полных уравнений Навье — Стокса состоит не только в пренебрежении диффузионными членами в направлении основного потока, но и в постановке граничных условий на внешней границе.

Приближение пограничного слоя обеспечивает хорошую аппроксимацию при меньших числах Рейнольдса, чем обычно предполагается. Брили [1970] утверждает, что его решение уравнений Навье — Стокса с 15 расчетными точками внутри пограничного слоя начинает отклоняться от автомодельного решения уравнений пограничного слоя при Re (рассчитанных по толщине потери импульса) от 15 до 30. Сравнения с экспериментальными данными при малых Re можно найти в работе Мюллера и О'Лири [1970].

---

[1]) Предложение д-ра Ф. Блоттнера.

24. *По возможности проверяйте точность расчетов сравнением с экспериментальными данными.*

Хотя, очевидно, это хорошая рекомендация, однако необходимо отметить, что часто точность экспериментальных значений столь же сомнительна, сколь и точность расчетных данных. В частности, отметим, что экспериментальные значения, полученные в плоскости симметрии трехмерного течения, *нельзя* принимать за значения в действительно двумерном течении. Хотя составляющая скорости по $z$ может равняться нулю, члены вида $\partial^2/\partial z^2$ могут быть отличны от нуля и, следовательно, вносить вклад в трехмерный поток количества движения. Заметим также, что замеры давления внутри пограничного слоя в сжимаемой жидкости очень трудны.

25. *По возможности проверяйте точность полученного решения глобально.*

При аналитическом исследовании точности конечно-разностных уравнений Сайрус и Фалтон [1967] обнаружили опасность, возникающую при попытках характеризовать погрешность всего численного решения проверкой точности в одном узле сетки или в небольшом числе узлов. При сравнении различных постановок граничных условий Скоглунд и Гей [1968, 1969] установили также, что при использовании неконсервативных форм местные невязки не зависят от способа постановки граничных условий и поэтому не могут служить хорошими указателями точности.

26. *При сравнении схем или программ не забывайте о программистских и машинных аспектах.*

При сравнении двух различных достаточно сложных программ можно не придавать серьезного значения небольшой разницы в их быстродействии, скажем 10 или 20%.

27. *При экспериментировании с новыми схемами сначала пользуйтесь упрощенными модельными уравнениями.*

## 7.3. Обработка информации

Начав получать хорошие решения задачи вычислительной гидродинамики, мы сталкиваемся с трудной проблемой: что нам делать со всеми этими числами.

Численное решение типичной задачи, и в особенности трехмерной нестационарной задачи, порождает огромное количество информации, и большое значение приобретает проблема систематизации и интерпретации этой информации. Как сказал Уильямс [1969]: «Видимое моделирование физически наблюдаемых характеристик еще не дает само по себе понимания течения».

Сейчас имеются ЭВМ, пригодные для расчета большинства двумерных задач, а со вступлением в строй новых ЭВМ типа ILLIAC IV или CDC Star станет возможным проводить даже расчеты трехмерных задач с высокой точностью. Однако, по мнению многих исследователей в области вычислительной гидродинамики, мы даже сейчас не можем в достаточной мере использовать получаемую нами информацию. Опыт расчетов подсказывает следующие рекомендации.

### 7.3.1. Числовые данные

28. *Выводите на печать некоторые результаты на каждой итерации и все результаты на некоторых итерациях.*

Это особенно важно на ранних стадиях разработки опытной программы. Можно выводить на печать на каждом шаге по времени значение вихря или плотности в какой-либо точке (желательно лежащей в самой чувствительной области, скажем в окрестности внешней угловой точки). Для экономии бумаги можно запомнить эти значения за 10—15 итераций и затем распечатать в строчку. В Фортране предпочтителен формат E.

На каждой сотой (или что-нибудь около этого) итерации разумно распечатывать все поле течения. Расположение величин в таблице по формату E дает наиболее полную информацию, однако оно не слишком наглядно. Для областей не слишком большого размера эффективным приемом является переход к формату I и распечатка двух или трех значащих цифр со знаком в каждой узловой точке поля течения. На рис. 7.1 дана распечатка значений функции тока, умноженной на 100, при расчете обтекания обратного уступа. Основное течение направлено вдоль распечатки сверху вниз. При помощи этой таблицы можно от руки приближенно нарисовать картину линий тока. Надлежащее округление выполнялось при помощи построения переменной целого типа LS(J), вычисляемой через функцию тока S(I, J) следующим образом:

```
      DO 3 I = 1, IMAX
      DO 1 J = 1, JMAX
    1 LS(J) = 100.*S(I, J) + SIGN(0.5, S(I, J))
      PRINT 2 LS (J), J = 1, JMAX
    2 FORMAT (27(1X14))
    3 CONTINUE
```

Здесь SIGN (0.5, S(I, J)) — библиотечная подпрограмма (или FUNCTION пользователя), образующая величину с абсолютным значением первого аргумента и со знаком второго аргумента.

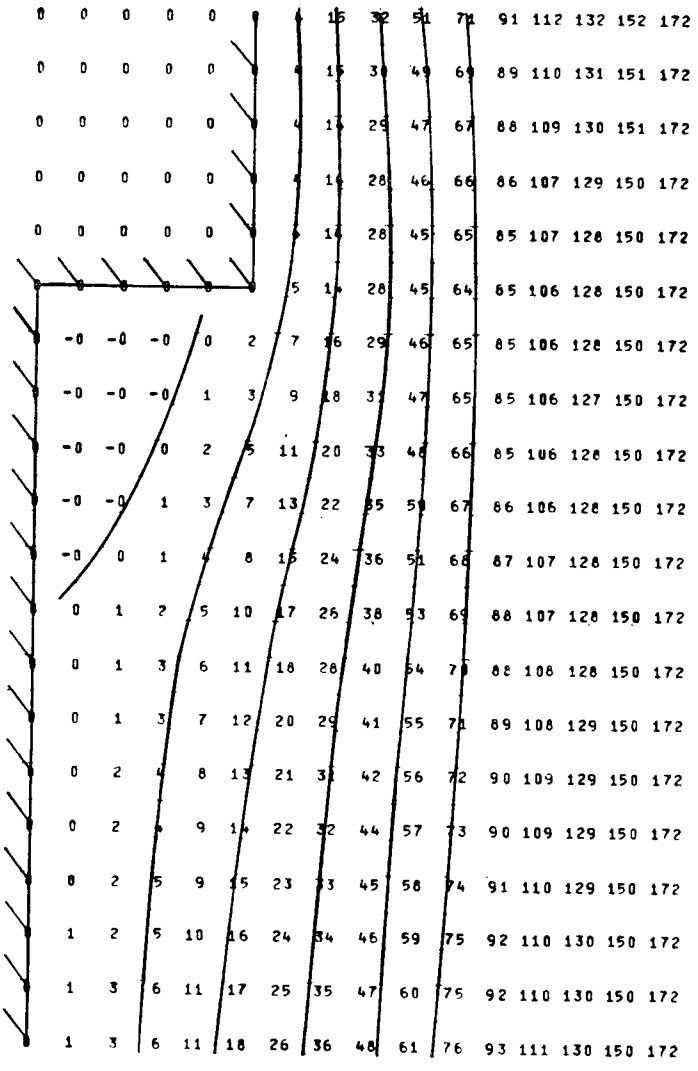



Рис. 7.1. Распечатка значений в узлах сетки при расчете обтекания обратного уступа при $Re = 10$. Печатающим устройством нанесены умноженные на 100 и округленные значения функции тока. Линии тока и контур стенки начерчены от руки.

Лучше выводить на печать все поле течения, чем его отдельные наиболее интересные области. В частном случае расчета отрывного течения над V-образной выемкой [1]) картина образования вихря внутри выемки, представленная на рис. 7.2, *а*, казалась по крайней мере правдоподобной. Однако когда было распечатано все поле течения (рис. 7.2, *б*), это правдоподобие

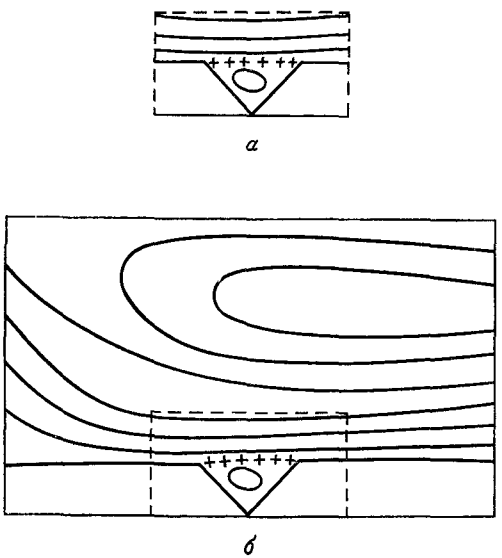


Рис. 7.2. Картина линий тока при ошибочном расчете течения над V-образной выемкой. Крестиками показана разделяющая линия тока. *а* — фрагмент поля течения, *б* — все поле течения.

исчезло. В дальнейшем здесь была обнаружена и исправлена ошибка в условиях на выходной границе.

Можно также посоветовать выводить на печать все поле течения на двух последовательных шагах по времени, скажем на сотой и сто первой итерациях; иначе можно не обнаружить неустойчивости, связанной с расщеплением решения во времени (см. разд. 3.1.6). Когда новая схема разрабатывается или изучается на одномерном модельном уравнении, то можно посоветовать печатать всю информацию на каждом шаге по времени и в особенности на нескольких первых начальных шагах. Для многошаговых схем можно даже посоветовать выводить на печать результаты на промежуточных шагах. Эта дополнитель-

[1]) Эта впечатляющая иллюстрация оказалась в нашем распоряжении благодаря любезности проф. Мюллера из университета Нотр-Дам (см. Мюллер и О'Лири [1970]).

ная информация обычно окупает добавочную нагрузку на устройство вывода ЭВМ. Конечно, по мере возрастания уверенности в схеме и программе объем информации, выводимой на печать и используемой для контроля, может сокращаться.

### 7.3.2. Графики и кинофильмы картин течений

29. *Широко используйте машинную графику при выводе информации.*

Построение графиков на ЭВМ является широко распространенным способом вывода информации. Графики могут быть двумерными, трехмерными и контурными (изолиниями). Их построение может осуществляться печатающими устройствами или линейными графопостроителями (чернильные самописцы или электронно-лучевые трубки). Для отладки программы и для представления результатов более удобны графики, построенные при помощи печатающего устройства. Правда, их разрешающая способность ограничена размером шагов печатающего устройства по горизонтали и по вертикали, зато они обычно строятся гораздо быстрее, поскольку это происходит одновременно с получением численных результатов и не требует дополнительных обращений к лентам. Линейные графопостроители дают бóльшую разрешающую способность и представляют большие возможности для нанесения на графики символов и заголовков.

Двумерные графики можно строить, например, для изображения профилей скачка при расчете одномерного распространения ударной волны, представляя, скажем, зависимость плотности от координаты в некоторый момент времени. Примеры таких графиков были приведены на рис. 5.1. Двумерными графиками можно проиллюстрировать и итерационную сходимость, строя зависимость некоторого функционала типа $\sum_{i,j} |\xi^n_{i,j}|$ от $n$. Подобные примеры были приведены на рис. 3.32. В настоящее время в большинстве вычислительных центров имеются сервисные пакеты для построения двумерных графиков как на печатающих устройствах, так и на линейных графопостроителях. Подобную программу для печатающего устройства составить нетрудно. Пусть нужно построить зависимость плотности R от координаты X = I*DX в задаче об одномерном распространении ударной волны. Положим, что на бумажной ленте печатающего устройства X растет сверху вниз, а плотность R возрастает слева направо. Тогда целое число позиций N, определяющее высоту графика, может быть найдено следующим образом:

$$N = SC^*R(I)$$

где SC — масштабный коэффициент, ставящий в соответствие интервал изменения R по числу горизонтальных позиций печатающего устройства. Если плотность приведена к безразмерному виду таким образом, что ее максимальное значение равно единице, то можно положить $SC = 100$. (Большинство печатающих устройств имеет более ста позиций, однако удобно выбрать сто. Кроме того, всплеск за скачком может привести к тому, что будет $R > 1$, и потребуется более ста позиций.) Для печати на строке $N - 1$ пробелов и символов X, 0, + или какого-либо другого символа, отмечающего значение функции, может быть сформирована холлеритовская буквенно-цифровая константа. Затем увеличивается индекс I, вычисляется новое значение $N$ и печатается следующая строка.

Трехмерные графики и картины изолиний по существу носят более качественный характер, чем двумерные графики. Примеры действия таких служебных программ, дающих возможность графически изобразить информацию в трех измерениях, приведены на рис. 7.3. Много превосходных примеров можно найти у Харлоу и Амсдена [1971], а также у Томана и Шевчика [1966].

Нетрудно составить программу построения изолиний на печатающем устройстве. Массив V(J) холлеритовского типа заполняется пробелами. Для некоторого значения $I$ (возрастающего вдоль бумажного листа сверху вниз) безразмерная функция, график которой необходимо построить, скажем $R(I, J)$, просматривается по $J$ и в массив V(J) заносятся различные буквенно-цифровые символы в зависимости от величины $R(I, J)$. Можно, например, заносить последовательность символов (A, B, C, D, E), а можно просто заносить звездочки в те места массива V(J), которые соответствуют значениям $R$, лежащим в интервалах (0., 0.1), (0.2, 0.3), (0.4, 0.5), (0.6, 0.7), (0.8, 0.9), и оставлять пробелы в местах, соответствующих значениям $R$, лежащим в интервалах (0.1, 0.2), (0.3, 0.4), (0.5, 0.6), (0.7, 0.8), (0.9, 1.0). После этого массив V(J) выводится на печать, затем снова заполняется пробелами и просматривается при следующем значении индекса $I + 1$. Этот прием применяли Томан и Шевчик [1966]. Примеры из их работы приведены на рис. 7.4.

Если отношение размеров шагов сетки $\Delta x/\Delta y$ не равно отношению размеров шагов печатающего устройства по вертикали и по горизонтали, которое обычно составляет ($^1/_6$ дюйма) : ($^1/_{10}$ дюйма) = $^5/_3$, то для получения неискаженной картины изолиний необходимо провести предварительную интерполяцию либо в направлении $I$, либо в направлении $J$.

Логика построения изолиний на линейном графопостроителе интересна сама по себе. Если функция, изолинии которой необходимо построить, монотонна по $x$ и $y$, то эта логика очень проста. Она, однако, усложняется при наличии многосвязных обла-

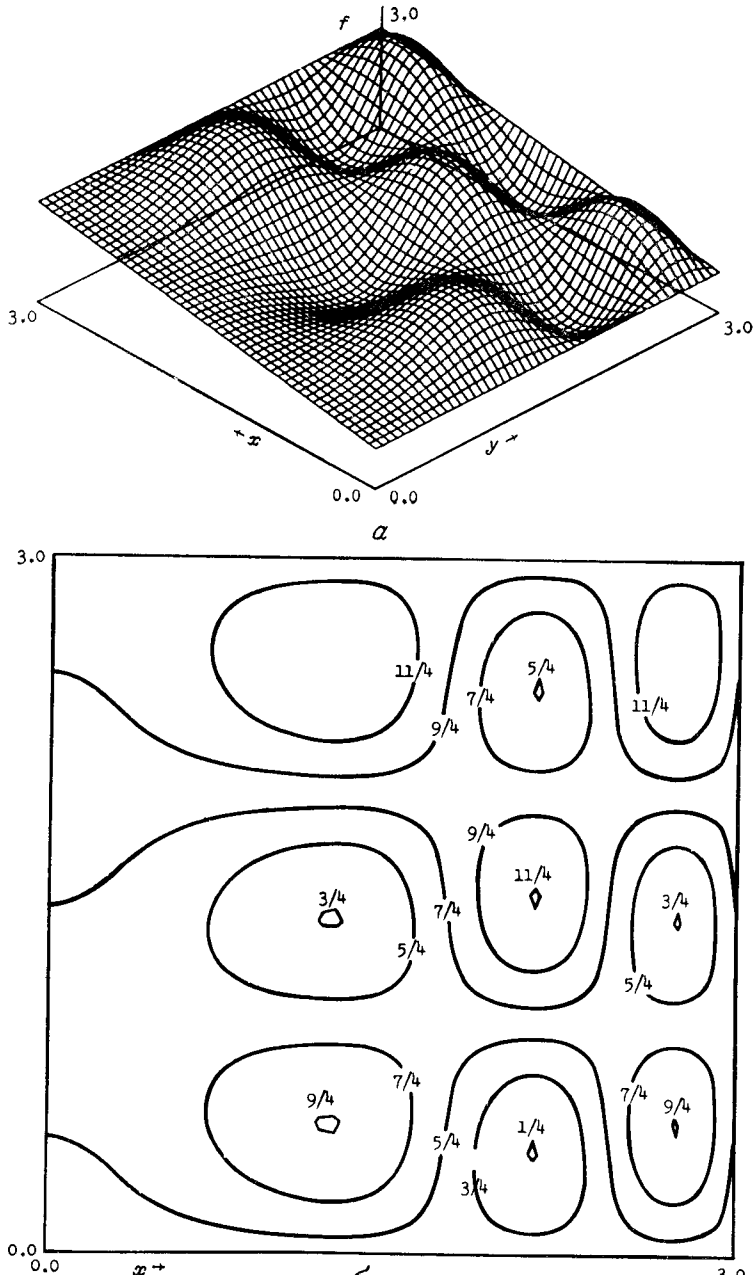



Рис. 7.3. Трехмерный график и изолинии функции $f(x, y) = 1 + y/2 + \sin(\pi x^2/3) \sin(\pi y)$, построенные на линейном графопостроителе. (Из работы Сандберга [1970].) *а* — трехмерный график $f(x, y)$, *б*—изолинии функции $f(x, y)$.

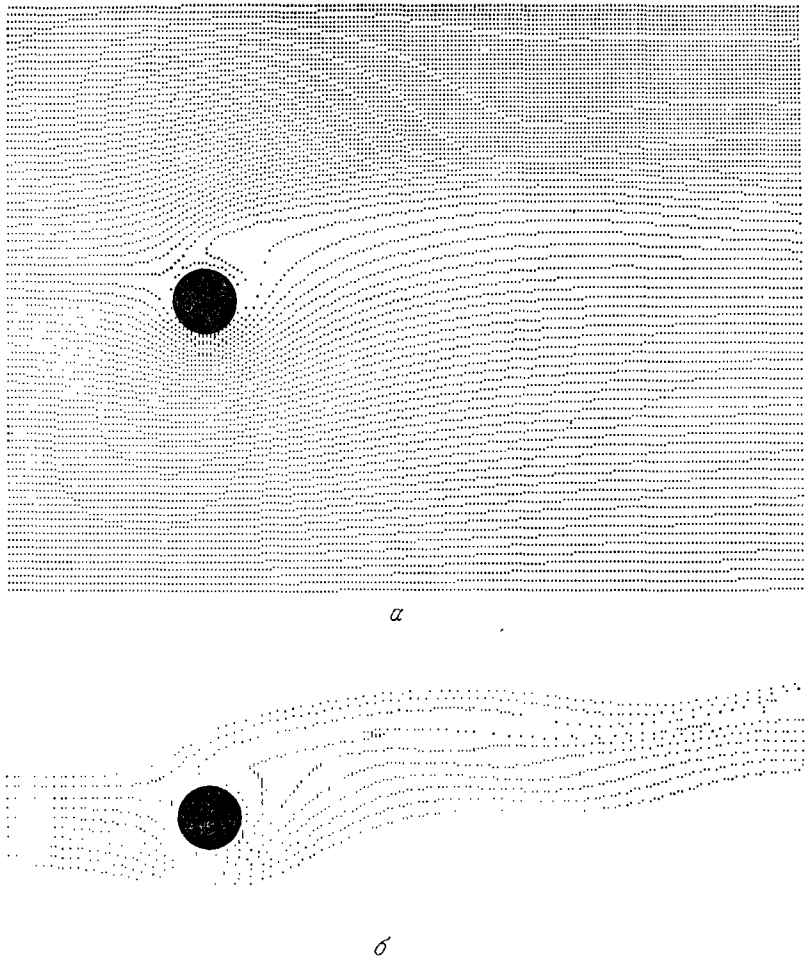


Рис. 7.4. Построенные на печатающем устройстве линии тока и линии отмеченных частиц при циркуляционном обтекании кругового цилиндра с отношением скоростей $V_{\text{танг}}/U_0 = 2$; $\mathrm{Re} = 200$, безразмерное время 21.139. (Из работы Томана и Шевчика [1966].) *а* — линии тока, $\Delta\psi = 0.000196$; *б* — линии отмеченных частиц.

стей, седловых точек и экстремумов по одному из направлений, вызывающих разветвление изолиний. Соображения, приведенные ниже, принадлежат Сандбергу [1970].

При построении некоторой изолинии в поисках требуемого значения просматривается вся расчетная сетка, причем рассматривается каждая ячейка, образованная четырьмя соседними узлами сетки. Рассмотрим изображенную на рис. 7.5, *а* ячейку,

образованную узловыми точками $(I, J)$, $(I+1, J)$, $(I, J+1)$, $(I+1, J+1)$, и обозначим ее стороны через $a$, $b$, $c$, $d$. Пусть необходимо построить изолинию $S=0$. Если крайние значения $S$ на отрезке $a$ (т. е. значения $S(I, J)$ и $S(I+1, J)$) имеют разные знаки, то $S$ обращается в нуль где-то внутри отрезка в точке, которую можно найти линейной интерполяцией. Аналогично просматриваются отрезки $b$, $c$, $d$. Затем все точки на сторонах, в которых $S$ обращается в нуль (будем обозначать их звездочками), графопостроитель соединяет прямыми, как показано на рис. 7.5, *б*, и просматривается следующая ячейка.

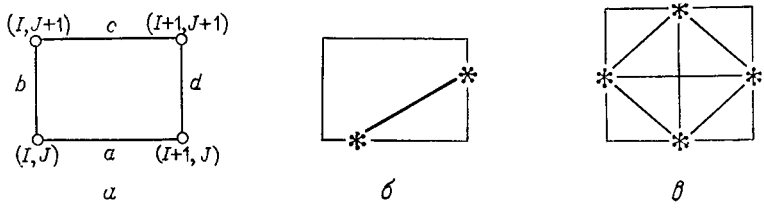



Рис. 7.5. К построению изолиний на линейном графопостроителе.

В этой простой процедуре предусматривается следующая возможность. Если изолиния должна проходить через угловую точку ячейки, скажем через точку $(I+1, J)$, то эту точку необходимо считать за две точки обращения величины $S$ в нуль — одну на стороне $a$ и другую на стороне $d$. Поскольку эти две точки слились в одну, то по логике программы они должны соединяться линией нулевой длины.

Приняв такое правило подсчета числа точек изолинии, легко показать, что на одну ячейку может приходиться либо 0, либо 2, либо 4 такие точки. Действительно, при обходе ячейки по замкнутому контуру ($a$, $b$, $c$, $d$) должно быть четное число перемен знака величины $S$, а это и означает, что число точек, в которых $S=0$, должно быть четным.

Если в ячейке обнаруживаются четыре такие точки, то они соединяются между собой всеми шестью возможными способами, как показано на рис. 7.5, *в*. На общей картине изолиний такое построение вполне приемлемо, поскольку невозможно определить форму поверхности внутри ячейки только по значениям в ее угловых точках; эта поверхность может быть гребнем, соединяющим две вершины, расположенные по диагонали ячейки; выемкой, соединяющей две впадины, расположенные по диагонали ячейки, и, наконец, поверхностью типа седла. Действительная форма поверхности в ячейке в этом случае подсказывается ее поведением в соседних ячейках, так что неопределенность, имеющая место на рис. 7.5, *в*, вполне приемлема.

Нужно особо рассмотреть случай, когда $S = 0$ (с некоторой точностью) в двух соседних узловых точках, скажем в точках $(I, J)$ и $(I + 1, J)$. Тогда $S = 0$ вдоль всей стороны $a$ и единственной точки здесь выбрать нельзя. В этом случае на такой линии вообще не выбирается точек для графопостроителя. В случае, когда область $S = 0$ простирается на много ячеек, такое рассмотрение приведет к обрисовке края, а не внутренности области, что онять вполне приемлемо.

30. *Не стройте графиков с более высоким разрешением, чем полученные численные результаты.*

Вместо линейной интерполяции можно спокойно применять и интерполяции более высокого порядка, обычно используемые при обработке экспериментальных данных, поскольку эти произвольные процедуры не оказывают обратного влияния на основной процесс расчета задачи. Однако они часто вводят в заблуждение, так как сам расчет выполняется не со столь высоким разрешением. Графики с линейной интерполяцией представляют информацию наиболее непосредственно, в то время как сглаженные кривые внешне более привлекательны. Квадратичная интерполяция соответствует схемам второго порядка точности.

Особые вопросы возникают при изображении отрывных течений. Положение точек отрыва и вторичного присоединения потока можно определить только при помощи полуаналитических методов (Ундервуд [1969]). Если такие точки нужно нанести, то надо указать, что их нашли экстраполяцией и т. п.; см. Лаван с соавторами [1969], Роуч и Мюллер [1970], Шаве и Ричардс [1970]. (Это же замечание справедливо и для определения положения точек отрыва и вторичного присоединения потока в *физическом* эксперименте.)

В настоящее время в вычислительных центрах для пользователей разрабатываются библиотеки программ построения трехмерных графиков и графиков изолиний. Выбор программ для построения графиков можно поручить профессиональному программисту, если имеется такая возможность.

Во многих вычислительных центрах имеются возможности для изготовления кинофильмов картин течений в виде трехмерных графиков или изолиний, причем каждый кадр дает картину течения в отдельный момент времени. Такие кинофильмы могут быть высокоэффективным средством для передачи динамики нестационарных процессов. Пионерами в этой области, так же как и в разработке численных схем, являются исследователи из Лос-Аламосской лаборатории. Опубликованные в отчетах кадры из таких кинофильмов помогают представить развитие течения

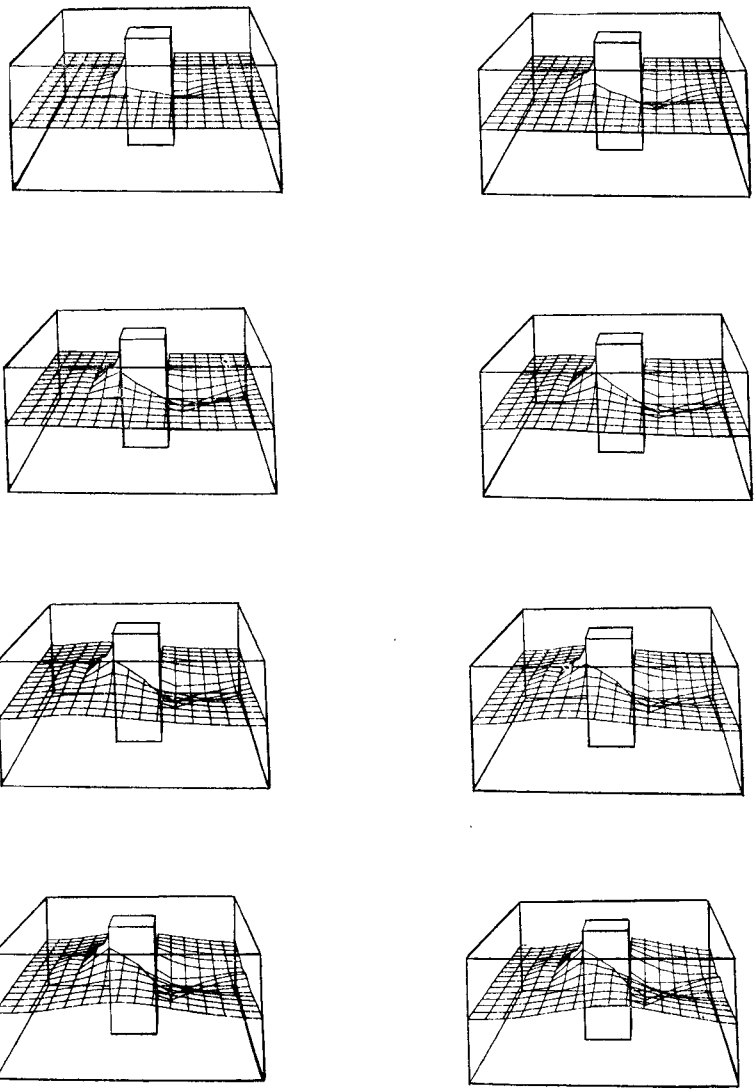


Рис. 7.6. Последовательность кадров кинофильма о нестационарном обтекании препятствия. В изометрической проекции показана поверхность воды вблизи сваи квадратного сечения. Расчет проведен в Лос-Аламосской лаборатории У. Николсом, использовавшим трехмерный алгоритм метода маркеров и ячеек (данные любезно предоставлены С. Хёртом из Лос-Аламосской лаборатории).

во времени, как это показано на рис. 7.6. Примеры можно найти в работах Хёрта [1965], Харлоу и Фромма [1965], Томана и Шевчика [1966], Донована [1968, 1970] и Фромма [1970а].

Лакс [1969] приводит пример, который демонстрирует преимущества вывода информации в виде кинофильма. Длинные волны на воде и некоторые волновые явления в физике плазмы описываются уравнением Кортевега — де Вриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Существование его решения типа уединенной волны открыли Крускал и Забуский, наблюдавшие образование уединенных волн при изучении кинофильма картины течения. Затем при более тщательных расчетах это явление было выделено и в конце концов было найдено точное аналитическое решение. Таким образом, при помощи вычислений удалось обнаружить ранее неизвестное свойство нелинейного уравнения в частных производных; это — возможность, о которой мечтал фон Нейман.

Важную роль может играть выбор переменной для изображения на графике. Обычно в задаче о течении сжимаемой жидкости представляют интерес искомые функции $\rho$, $u$, $v$, $T$. В задаче о течении несжимаемой жидкости интерес представляют переменные $\zeta$, $\psi$, $u$, $v$, $P$ (давление может быть представлено в виде коэффициента давления), причем безразлично, в каких комбинациях эти переменные использовались в вычисленнях. Из других величин представляют интерес источниковый член в уравнении Пуассона для давления, коэффициент давления торможения, который может служить неким индикатором влияния вязкости (Бургграф [1966], Макано и Хын [1967], Роуч и Мюллер [1970]), диссипативная функция, энтропия, относительная величина диффузионных и конвективных членов. Аллен [1968] строил графики величин, показывающих отклонение решения от решения уравнений пограничного слоя.

В стационарных задачах с отрывом потока линия тока $\psi=0$, так называемая разделяющая линия тока, играет особую роль, поскольку она отграничивает область возвратного течения. Чтобы подчеркнуть это, ее можно наносить специальными символами или выделять каким-либо другим способом. Даусон и Маркус [1970] выделяли линию $\psi = 0$, просто строя две линии тока $\psi = 0 \pm \varepsilon$, где $\varepsilon$ много меньше всех расстояний между линиями тока (они брали $\varepsilon = 0.001\, U_\infty L$). Поскольку скорости в области возвратного течения малы, обычно рекомендуется брать различные шаги изменения функции тока на графике $\Delta\psi$ для $\psi > 0$ и для $\psi < 0$ (Роуч и Мюллер [1968], Аллен и Чен [1970]). Направление течения может также обозначаться стрелками, нанесение которых предусмотрено на большинстве линейных графопостроителей. Можно также менять длину стрелок; поскольку

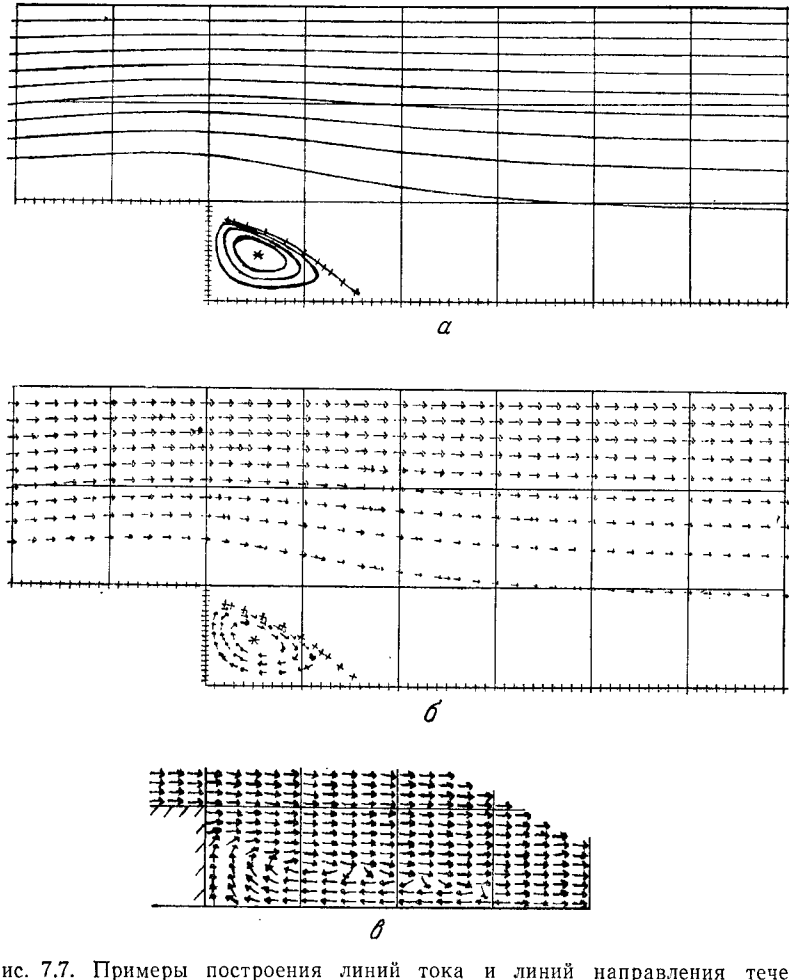



Рис. 7.7. Примеры построения линий тока и линий направления течения. На рис. *а* и *б* линия тока $\psi = 0$ отмечена крестиками, выше этой линии $\Delta\psi = 0.17$, ниже $\Delta\psi = 0.00127$. *а* — линии тока при обтекании обратного уступа несжимаемой жидкостью, $\mathrm{Re} = 10$; *б* — линии тока и направления течения несжимаемой жидкости около обратного уступа, $\mathrm{Re} = 10$; *в* — направление течения в донной области при обтекании обратного уступа сжимаемой жидкостью, $M_0 = 2.24$, $\mathrm{Re} = 300$, $\gamma = 1.4$. (Из работы Роуча и Мюллера [1968].)

такая стрелка расположена вдоль линии тока, она показывает направление течения, а ее длина показывает абсолютную величину скорости. Примеры построения линий тока приведены на рис. 7.7, *а*, *б*. Картину линий тока, полученную в результате вычислений, можно сравнить с экспериментально наблюдаемой

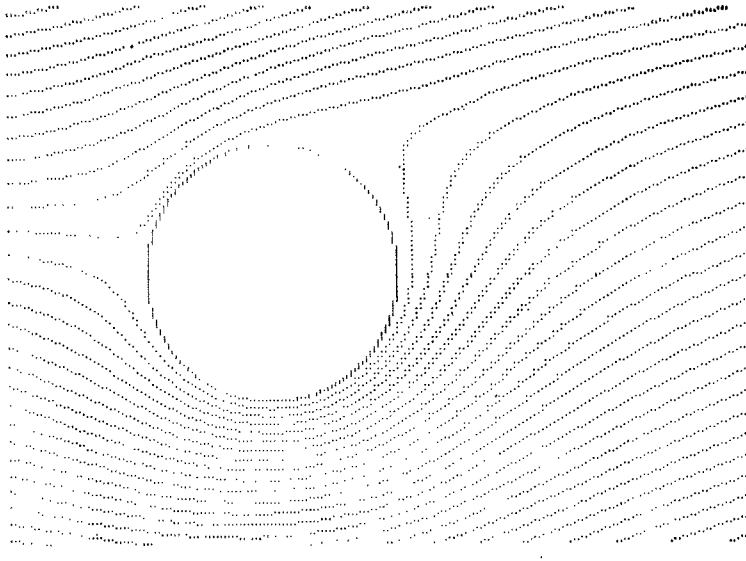


Рис. 7.8а. Линии тока при нестационарном обтекании кругового цилиндра для наблюдателя, движущегося вместе с обтекаемым телом (система координат связана со стенками аэродинамической трубы). Из работы Томана и Шевчика [1966].

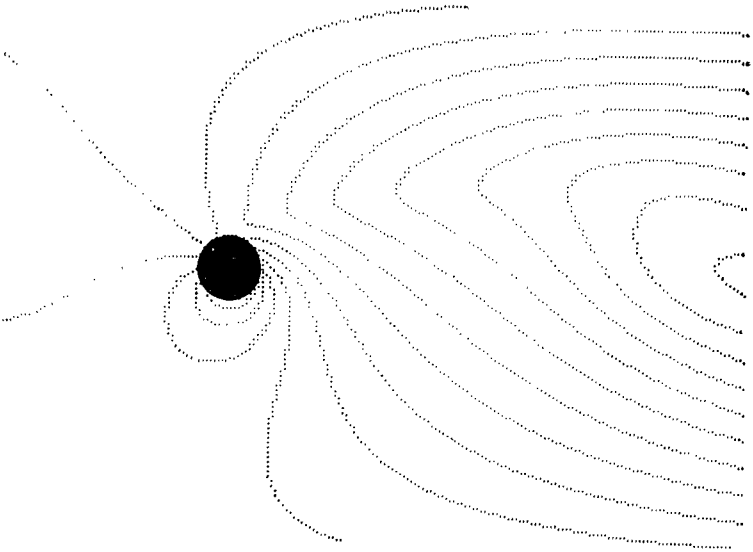


Рис. 7.8б. Линии тока при нестационарном обтекании кругового цилиндра для наблюдателя, движущегося вместе с набегающим потоком. (Из работы Томана и Шевчика [1966].)

картиной течения, которая получается по методике Прандтля с нанесением алюминиевого порошка на поверхности воды.

При использовании в расчетах физических переменных функцию тока $\psi$ можно вычислить при помощи криволинейного интеграла $\psi_a - \psi_b = \int_b^a (u\,dy - v\,dx)$, который рассчитывается по квадратурной формуле, соответствующей точности конечно-разностной схемы для определения составляющих скорости. Так,

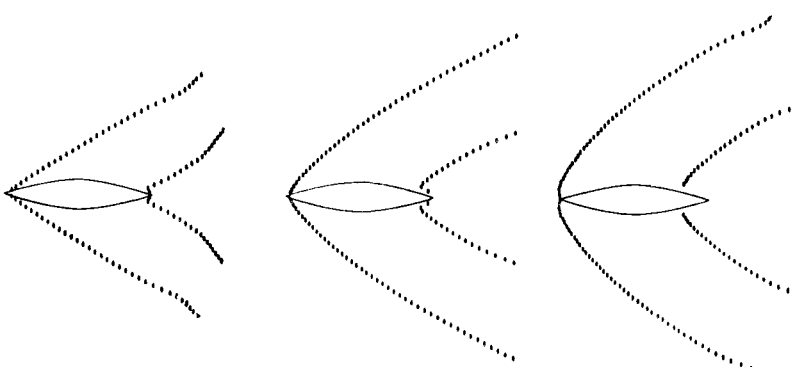


Рис. 7.9. Положения ударных волн при замедленном движении осесимметричного тела: при $t = 200$ мкс $M = 2.34$ (слева), при $t = 400$ мкс $M = 1.32$ (в центре) и при $t = 500$ мкс $M = 0.80$ (справа). (Из работы Уилкинса [1969].)

схемам второго порядка для уравнения переноса соответствует квадратурная формула Симпсона, а не формулы более высокого порядка. Из-за ошибок аппроксимации криволинейный интеграл будет зависеть от пути интегрирования, поэтому лучше усреднять его значения по нескольким путям интегрирования. Этой неопределенности можно избежать, строя вместо линий тока картину распределения векторов скорости, в которой величина и направление вектора скорости изображаются стрелками, построенными в каждой узловой точке расчетной сетки, а не вдоль линий тока (Роуч и Мюллер [1970]). Пример такого построения приведен на рис. 7.7, *в*.

На этом рисунке показаны линии тока в неподвижной эйлеровой системе координат. Было бы интересно представить картину линий тока с точки зрения наблюдателя, движущегося со скоростью невозмущенного потока. При этом составляющие скорости $(u, v)$ преобразуются в $(u - U_\infty, v)$, а значения функции тока $\psi(x, y)$ — в $[\psi(x, y) - U_\infty y]$. На рис. 7.8а и 7.8б приведен соответствующий пример из работы Томана и Шевчика [1966]; см. также Майкл [1966].

При расчете течений сжимаемой жидкости возникает специальная проблема представления положений ударных волн и

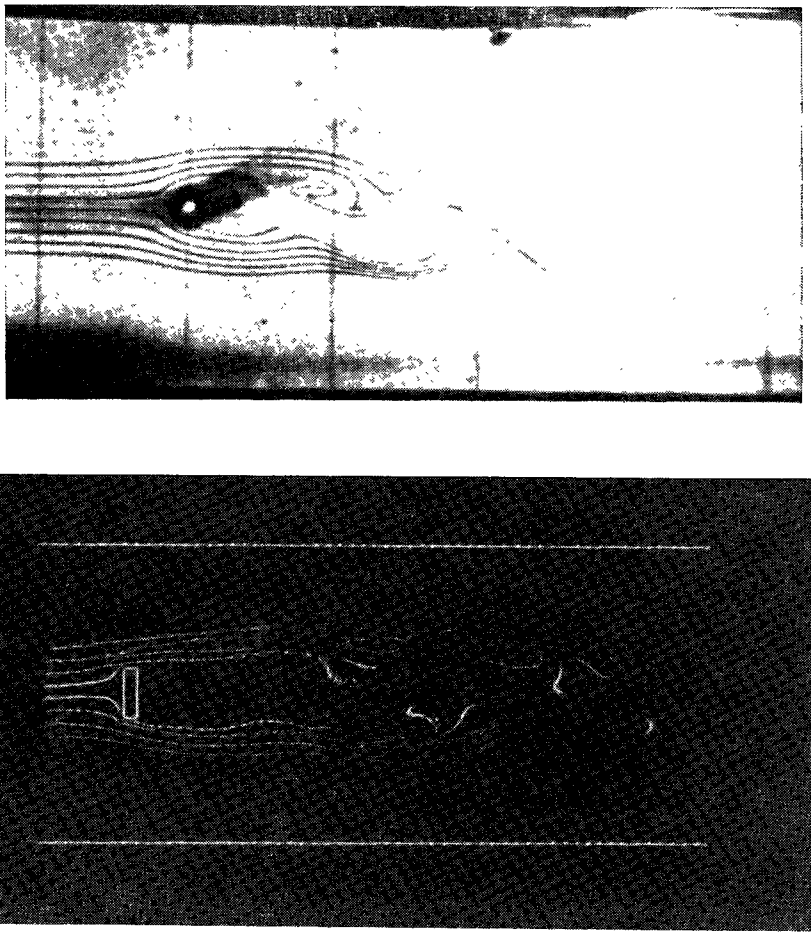


Рис. 7.10. Сравнение линий отмеченных частиц, полученных из расчета и из эксперимента. Вверху: сфотографированные А. Томом линии отмеченных частиц, полученные при введении в воду красящего вещества; внизу: линии, рассчитанные Харлоу и Фроммом [1965] по методу маркеров и ячеек.

волн разрежения. До некоторой степени этой цели могут служить изолинии любой переменной; в частности, изолинии плотности эквивалентны интерферограммам, полученным при физическом экспериментe. Даже в физическом эксперименте положение ударной волны в вязкой области обнаруживается нечетко

из-за смещения полос интерферометра. Аналогично, в вычислительном эксперименте выявление на графике ударной волны зависит от размера шага $\Delta\rho$ между изолиниями плотности; кроме того, скачок размазывается из-за ограничения разрешения размером шага сетки (за исключением методов выделения скачков).

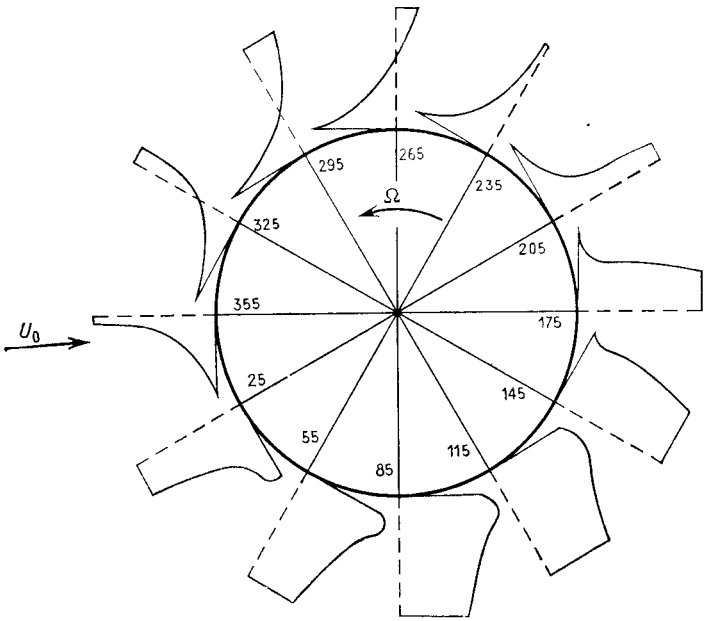



Рис. 7.11. Профили скорости в пограничном слое на вращающемся цилиндре; Re = 200, отношение скоростей $V_{\text{танг}}/U_0 = 2$. (Из работы Томана и Шевчика [1966].)

В физическом эксперименте скачки на фотографиях можно фиксировать более четко, применяя специальные оптические устройства типа шлирен-систем, воспринимающие градиенты плотности ($\partial\rho/\partial m$ в некотором направлении $m$, т. е. $|\nabla\rho|$), или пользуясь теневыми методами, воспринимающими $\nabla^2\rho$. Численные аналоги этих методов, т. е. построение изолиний $|\nabla\rho|$ или $\nabla^2\rho$, не приводят к успеху, поскольку при вычислениях эти производные искажаются. Уилкинс [1969] предложил простой способ графического построения скачков, изображенных на рис. 7.9. Его расчеты замедления осесимметричного тела выполнялись при помощи введения комбинированной квадратичной и линейной искусственной вязкости (см. разд. 5.4). В программе отыскивалось положение локального максимума искусственной вязкости и в этом месте на графике ставился кружок. Этот прием

можно применять и при отсутствии в схеме явной искусственной вязкости, определяя положение максимумов величины $\nabla^2\rho$.

Построение линий отмеченных частиц удобно при использовании метода маркеров и ячеек (разд. 3.7.4) или метода частиц в ячейках (разд. 5.5.3), поскольку в вычислениях по этим методам рассматриваются частицы-маркеры. При применении других схем можно ввести частицы-маркеры и вычислять их положение, как это делалось в разд. 3.7.4. Линии отмеченных частиц определяются как линии, по которым движутся маркеры (в стационарном течении линии отмеченных частиц и линии тока совпадают). Вычисленные линии отмеченных частиц можно сравнить с физическими линиями отмеченных частиц, полученными из эксперимента методами визуализации потока (такими, как дымовая визуализация, визуализация с помощью подкрашивания потока, запуск в поток пузырьков водорода или находящихся во взвешенном состоянии стеклянных бусинок). На рис. 7.10 приведен пример из работы Харлоу и Фромма [1965]; см. также Хёрт [1965] и Томан и Шевчик [1966].

В работе Томана и Шевчика [1966] содержатся примеры многих остроумных и эффективных способов представления полученных результатов, в частности изображение профилей скорости в пограничном слое, показанное на рис. 7.11.

### 7.3.3. Диагностические функционалы

31. *Вводите и вычисляйте диагностические функционалы, характерные для задачи.*

Интерпретация и применение полученных данных в значительной мере облегчается введением диагностических функционалов от решения. Самые простые и широко применяемые функционалы — интегральные коэффициенты типа коэффициентов подъемной силы, момента и сопротивления, которые можно разбить на вклады за счет трения, давления на передней части тела, донного давления и т. д. Можно находить распределения коэффициента трения (касательных напряжений), числа Нуссельта (теплопередачи) и коэффициента давления вдоль границ. Повторим рекомендацию выбирать квадратурные формулы для вычисления функционалов в соответствии с точностью численной схемы, принятой для решения уравнений газодинамики; например, схеме второго порядка точности должна соответствовать формула Симпсона.

Существуют и другие диагностические функционалы, все шире входящие в вычислительную практику, особенно при решении геофизических задач. Некоторые из них являются интегралами от определенных величин, а другие — просто некоторыми специфическими членами уравнений. Наиболее благоприятный выбор

функционалов меняется от задачи к задаче. Как отметил Уильямс [1969], продуманно применяя диагностические функционалы для численного решения, можно достигнуть почти такого же проникновения в физическую суть задачи, какая обычно достигается лишь аналитическим исследованием. Уильямс применял глобальные интегралы кинетической и потенциальной энергии и интегральные соотношения, полученные из уравнения в частных производных.

У. П. Кроули [1968б] при изучении гидродинамической устойчивости с помощью приближения Буссинеска вычислял кинетическую энергию возмущений и полную кинетическую энергию и выделял член $[u'v'(\partial u_0/\partial y)]$, описывающий перераспределение энергии между возмущениями (отмечены штрихом) и средним движением (с индексом нуль). Затем он строил пространственные изолинии в различные моменты развития течения. Он также выделил и построил изолинии источникового члена для полной кинетической энергии (поднимающийся вверх теплый воздух является источником кинетической энергии) и стокового члена, описывающего необратимую диссипацию энергии; был построен также график зависимости производной по времени глобальной кинетической энергии возмущений как функции от энергии, перешедшей от среднего течения к возмущениям, потенциальной энергии и кинетической энергии возмущений, диссипировавшей во внутреннюю энергию; построен график свободной потенциальной энергии, т. е. такой, которая могла бы перейти в кинетическую энергию, а также графики глобально усредненной кинетической энергии возмущений, архимедовой силы, недивергентного члена для касательных напряжений и скорости диссипации энергии как функций времени. Эта работа — замечательный пример разумного использования диагностических функционалов; см. также Смагоринский с соавторами [1965].

32. *Осуществляйте обработку полученной информации в отдельной программе.*

Моделирование турбулентности в жидкости является особо сложной задачей, которая может и не быть решена удовлетворительно в обозримом будущем. Поскольку решения носят случайный характер, рассмотрение простейших переменных типа $u(x, y, z, t)$, очевидно, бесполезно. Ситуация здесь аналогична получению данных с термоанемометра в физическом эксперименте.

Вид диагностических функционалов здесь должен быть подсказан теорией. В этом случае приемлемые функционалы должны по меньшей мере включать местные и глобальные напряжения Рейнольдса, масштаб турбулентности, глобальную диссипацию и различные корреляции типа усредненных по времени

произведений $u'v'$ и другие корреляции высших порядков. (Заметим, что статистическая теория турбулентности отдает предпочтение усреднению по ансамблю перед усреднением по времени, однако возможность проведения множества расчетов для получения усреднения по ансамблю в настоящее время представляется трудновыполнимой.)

Легко видеть, что расчет диагностических функционалов для турбулентных течений может занять больше времени, чем расчет самого течения. Поэтому рекомендуется записывать решение на магнитную ленту и обрабатывать его отдельно. Из-за ограниченного объема памяти внешних запоминающих устройств обычно представляется возможным хранить не результаты всего численного эксперимента (Гоэйн и Притчетт [1968]), а только отдельные его части за некоторые отрезки времени.

Подобный подход применялся в физическом эксперименте Коважным и Френкилом; данные с термоанемометра записывались на магнитную ленту и впоследствии анализировались и обрабатывались. Гоэйн и Притчетт [1968] соглашаются с тем, что построение решения и обработка полученной информации не должны проводиться в одной и той же программе, однако рекомендуют проводить одновременную обработку *некоторых* результатов для получения хотя бы немногочисленных статистических характеристик, необходимых для информации о состоянии турбулентности (это аналогично слежению *за* ходом физического эксперимента по экрану осциллографа, на который подается сигнал от термоанемометра). Другим преимуществом этого подхода, применимого к изучению не только турбулентности, но и других нестационарных процессов, является возможность глубже анализировать результаты по мере развития теории, не проводя расчетов заново.

## 7.4. Заключение

В настоящей главе мы привели некоторые рекомендации по составлению, отладке и проверке программ и по обработке получаемой информации. Это согласуется с целями, поставленными при написании данной книги, поскольку она посвящена проблемам, связанным с практическим получением и интерпретацией численных решений гидродинамических задач. Все эти вопросы, и в особенности вопросы обработки информации, в настоящее время образуют обширное поле исследований и не менее важны и актуальны, чем сама разработка численных методов.

# Приложение А

# МЕТОД ПРОГОНКИ

Здесь будет рассматриваться метод решения конечно-разностных уравнений, которые имеют трехдиагональную матрицу. Рихтмайер и Мортон [1967, с. 202] утверждают, что этот метод является просто специальной формой метода исключения Гаусса, но обычно его называют методом Томаса [1]). Описание и обозначения, предлагаемые ниже, частично взяты из книги Рихтмайера и Мортона, причем берутся более общие граничные условия. Следует упомянуть также и другие работы: Писмен и Ракфорд [1965], Розенберг [1969] и Эймс [1969]. Границы ошибки приведены в работе Фишера и Усмани [1969].

Конечно-разностная форма уравнений для внутренних точек сетки записывается в следующем виде:

$$-A_m W_{m+1} + B_m W_m - C_m W_{m-1} = D_m. \tag{A.1}$$

Например, для уравнения Пуассона в одномерном случае

$$\partial^2 \psi / \partial y^2 = \zeta(y) \tag{A.2}$$

получаем

$$\frac{\psi_{m+1} - 2\psi_m + \psi_{m-1}}{\Delta y^2} = \zeta_m, \tag{A.3}$$

или

$$A_m = 1, \quad B_m = 2, \quad C_m = 1, \quad D_m = -\zeta_m \Delta y^2. \tag{A.4}$$

Рихтмайер и Мортон [1967] показали, что для того, чтобы величина ошибок округления при реализации алгоритма не возрастала, достаточно выполнения неравенств

$$A_m > 0, \quad B_m > 0, \quad C_m > 0 \tag{A.5}$$

и

$$B_m > A_m + C_m. \tag{A.6}$$

---

[1]) Метод прогонки был предложен в начале пятидесятых годов независимо целым рядом авторов, в том числе советскими математиками И. М. Гельфандом и О. В. Локуциевским. Для решения разностных уравнений газовой динамики его применяли К. И. Бабенко и Г. П. Воскресенский. Другие более общие варианты метода прогонки принадлежат К. И. Бабенко и Н. Н. Ченцову (матричная прогонка), А. А. Абрамову и В. Б. Андрееву (циклическая прогонка), Л. М. Дегтяреву и А. П. Фаворскому (потоковая прогонка). — *Прим. ред.*

Будем считать, что $m$ меняется от $m=1$ до $m=M$, и исследуем различные комбинации граничных условий на каждой из границ.

Рассмотрим множество $G$ векторов $W$, которые являются решениями уравнения (А.1) с заданным на левой границе (при $m=1$) граничным условием. Это множество $G$ представляет собой однопараметрическое семейство, где роль параметра играет значение $W_2$. Например, если ставится условие Дирихле $W_1=a_1$, то при каждом значении $W_2$ уравнение (А.1) можно разрешить относнтельно $W_{m+1}$ и, таким образом, с помощью рекуррентного соотношения получаются [1]) значения $W_{m+1}$ для всех $m+1\geqslant 3$.

Постулируем существование двух векторов $E$ и $F$, таких, что для любого $W\in G$

$$W_m=E_mW_{m+1}+F_m. \tag{А.7}$$

Существование таких векторов $E$ и $F$ скоро станет очевидным. Понизим на единицу индекс $m$ в уравнении (А.7), что даст

$$W_{m-1}=E_{m-1}W_m+F_{m-1}. \tag{А.8}$$

Подставляя $W_{m-1}$ из соотношения (А.8) в уравнение (А.1) и разрешая получившееся уравнение относительно $W_m$, получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$W_m=\frac{A_m}{B_m-C_mE_{m-1}}W_{m+1}+\frac{D_m+C_mF_{m-1}}{B_m-C_mE_{m-1}}. \tag{А.9}$$

Сравнивая уравнения (А.9) и (А.7) и замечая, что оба уравнения должны выполняться для всех $W\in G$ (т. е. для всех значений $W_2$), для $E_m$ и $F_m$ при $m\geqslant 2$ будем иметь

$$E_m=\frac{A_m}{B_m-C_mE_{m-1}}, \tag{А.10а}$$

$$F_m=\frac{D_m+C_mF_{m-1}}{B_m-C_mE_{m-1}}. \tag{А.10б}$$

Из условия на левой границе определим $E_1$ и $F_1$, после чего для вычисления $E$ и $F$ во всех точках в направлении возрастания $m$ вплоть до $m=M-1$ можно воспользоваться рекуррентными соотношениями (А.10). Далее, из правого граничного условия определяется значение $W_M$, а уравнение (А.9) с известными коэффициентами $A$, $B$, $C$, $D$ и найденными значениями $E$ и $F$ служит для вычисления значения $W_m$ по $W_{m+1}$ и т. д. в направлении убывания $m$ от $m=M-1$ до $m=1$.

---

[1]) В разд. 3.2.8 мы отмечали, что такой «маршевый» подход, вообще говоря, неустойчив, поскольку ошибка округления при этом растет экспоненциально. Исключением является особый случай одномерного уравнения (А.3), для которого ошибка растет только линейно.

Условие на левой границе позволяет определить $E_1$ и $F_1$ следующим образом. Записывая уравнение (А.7) при $m=1$, получаем

$$W_1 = E_1 W_2 + F_1. \tag{А.11}$$

Для условия Дирихле $W_1 = a_1$ соотношение (А.11) должно выполняться для всех возможных значений $W_2$; таким образом,

$$E_1 = 0, \quad F_1 = a_1 \quad \text{при} \quad W_1 = a_1. \tag{А.12}$$

Для условия Неймана в виде

$$\partial\psi/\partial y = s_1 \tag{А.13}$$

имеем

$$\psi_2 - \psi_1 = s_1 \Delta y, \tag{А.14}$$

или

$$W_1 = W_2 - s_1 \Delta y. \tag{А.15}$$

Сравнивая уравнение (А.15) с уравнением (А.11), находим

$$E_1 = 1, \quad F_1 = -s_1 \Delta y \quad \text{при} \quad (\partial W/\partial y)_1 = s_1. \tag{А.16}$$

Если ставится граничное условие смешанного типа (условие Роббина) в виде

$$\psi + p_1 \frac{\partial \psi}{\partial y} = q_1, \tag{А.17}$$

то имеем

$$W_1 + p_1 \frac{W_2 - W_1}{\Delta y} = q_1, \tag{А.18}$$

или

$$W_1 = -\frac{p_1/\Delta y}{1 - p_1/\Delta y} W_2 + \frac{q_1}{1 - p_1/\Delta y}. \tag{А.19}$$

Сравнение уравнений (А.19) и (А.11) дает

$$E_1 = -\frac{p_1/\Delta y}{1 - p_1/\Delta y}, \quad F_1 = \frac{q_1}{1 - p_1/\Delta y}. \tag{А.20}$$

Очевидно, должно выполняться условие $p_1/\Delta y \neq 1$, иначе из уравнения (А.18) следовало бы, что $W_2 = q_1$, а $W_1$ неопределенно.

Условия на правой границе служат для определения значения $W_M$ следующим образом. При условии Дирихле $\psi = a_M$, очевидно,

$$W_M = a_M. \tag{А.21}$$

При условии Неймана $\partial\psi/\partial y = s_M$ имеем

$$W_{M-1} = W_M - s_M \Delta y. \tag{А.22}$$

Запишем уравнение (А.8) при $m = M$:

$$W_{M-1} = E_{M-1} W_M + F_{M-1}. \qquad (A.23)$$

Приравнивая правые части уравнений (А.22) и (А.23), получаем

$$W_M = \frac{F_{M-1} + s_M \Delta y}{1 - E_{M-1}}. \qquad (A.24)$$

Для условия смешанного типа $\psi + p_M (\partial\psi/\partial y) = q_M$ имеем

$$W_{M-1} = W_M \frac{1 + p_M/\Delta y}{p_M/\Delta y} - \frac{q_M}{p_M/\Delta y}. \qquad (A.25)$$

Приравнивание правых частей уравнений (А.25) и (А.23) дает

$$W_M = \frac{F_{M-1} + q_M/(p_M/\Delta y)}{(1 + p_M/\Delta y)/(p_M/\Delta y) - E_{M-1}} = \frac{F_{M-1} + q_M \Delta y/p_M}{1 + \Delta y/p_M - E_{M-1}}. \qquad (A.26)$$

В двух последних случаях (формулы (А.24) и (А.26)) существует возможность переполнения арифметического устройства при делении, когда знаменатель может стать малым в зависимости от начальных условий, величины $M$ и значения $p_M$. Например, если на левой границе ставится условие Неймана, то, как показано выше (см. (А.16)), имеем $E_1 = 1$. Тогда, подставляя в рекуррентное соотношение (А.10а) соответствующие коэффициенты $A$, $B$, $C$ из (А.4), для одномерного уравнения Пуассона (А.3) получаем

$$E_m = \frac{1}{2 - E_1} = 1. \qquad (A.27)$$

Это приводит к тому, что в случае задания условий Неймана на правой границе из равенства (А.24) получается $W_M = \infty$, если не будет выполняться условие $s_M \Delta y = -F_{M-1}$. Такое поведение характерно для того случая, когда на обеих границах ставятся условия Неймана; мы не можем произвольно задавать условия градиентного типа на обеих границах, так как

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y_M} = \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y_1} + \int_{y_1}^{y_M} \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\, dy = \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y_1} + \int_{y_1}^{y_M} \zeta(y)\, dy. \qquad (A.28)$$

Таким образом, градиенты функции $\psi$ при $y_1$ и $y_M$ связаны через решение задачи для вихря $\zeta(y)$ и их нельзя задавать независимо в качестве граничных условий. Если градиент $\partial\psi/\partial y|_{y_M}$ удовлетворяет равенству (А.28), то формула (А.24) приводит к неопределенности $W = 0/0$. Такая неопределенность приводит к невозможности проводить вычисления методом прогонки, но

соответствует неопределенности задачи в случае, когда на обеих границах заданы условия Неймана: действительно, если $W$ является решением, то и $W + \text{const}$ тоже будет решением.

## Резюме

Исходя из условий на левой границе и применяя формулы (А. 12), или (А. 16), или (А. 20), находим $E_1$ и $F_1$. В соответствии с рекуррентными соотношениями (А.10) по индукции в направлении возрастания $m$ до $m = M - 1$ вычисляем и запоминаем векторы $E_m$ и $F_m$. Из граничного условия на правой границе при помощи формулы (А.21), или (А.24), или (А.26) находим значение $W_M$. Наконец, используем рекуррентное соотношение (А.7) для вычисления вектора решения $W_m$ по индукции в направлении убывания $m$ от $m = M - 1$ до $m = 1$.

Ниже приведена подпрограмма для этого метода прогонки, написанная на языке Фортран-IV.

## Подпрограмма на языке Фортран-IV

Соответствие между алгебраическими символами и символами языка Фортран, используемыми в подпрограмме, дается в таблице.

| Алгебраический символ | Символ языка Фортран |
|---|---|
| A, B, C, D, E, F, W | A, B, C, D, E, F, W |
| $a_1$ | A1, если L1 = 1 |
| $a_M$ | AM, если LM = 1 |
| $m$ | M |
| $M$ | ML |
| $p_1/\Delta y$ | A1, если L1 = 3 |
| $p_M/\Delta y$ | AM, если LM = 3 |
| $q_1$ | Q1 |
| $q_M$ | QM |
| $s_1 \Delta y$ | A1, если L1 = 2 |
| $s_M \Delta y$ | AM, если LM = 2 |

Размерность векторов есть MD. Все векторы должны быть описаны в операторе DIMENSION в вызывающей программе так же, как они описаны в подпрограмме. Уравнения, описывающие задачу во внутренних точках, задаются путем запоминания коэффициентов $A$, $B$, $C$ и $D$ в соответствующих массивах подпрограммы. L1 и LM — индикаторы типа граничного условия, а A1, Q1, AM и QM — значения коэффициентов граничных условий на левой и правой границах. Индикатор L1 = 1 соответствует граничному условию первого рода (условие Дирихле)

на левой границе, L1 = 2 — условию второго рода (условие Неймана) на левой границе, L1 = 3 — условию третьего рода (смешанное условие Роббина) на левой границе; то же означают аналогичные записи для LM на правой границе. Векторы E и F являются рабочими и для них должно быть предусмотрено место в памяти, вызывающей программы. Решение засылается в массив W.

## Текст подпрограммы

```
      SUBROUTINE GTRI (A, B, C, D, MD, E, F, W, L1, A1, Q1,
                                                LM, AM, QM)
C     GENERAL TRI-DIAGONAL SOLVER
      DIMENSION A(MD), B(MD), C(MD), D(MD), E(MD),
                                                F(MD), W(MD)
      IF (L1.EQ.1)  E(1) = 0.
      IF (L1.EQ.1)  F(1) = A1
C     ABOVE OVERWRITTEN IF LM.NE.2
      IF (L1.EQ.2)  E(1) = 1.
      IF (L1.EQ.2)  F(1) = -A1
      IF (L1.EQ.3)  E(1) = A1/(A1 - 1.)
      IF (L1.EQ.3)  F(1) = Q1/(1. - A1)
      MM = MD - 1
      DO 1 M = 2, MM
      DEN = B(M) - C(M)*E(M - 1)
      E(M) = A(M)/DEN
1     F(M) = (D(M) + C(M)*F(M - 1))/DEN
      IF(LM.EQ.1)  W(MD) = AM
      IF(LM.EQ.2)  W(MD) = (F(MM) + AM)/(1. - E(MM))
      IF(LM.EQ.3)  W(MD) = (F(MM)+QM/AM)/((1.+AM)/AM-
                                                - E(MM))
      DO 2 MK = 1, MM
      M = MD - MK
2     W(M) = E(M)*W(M + 1) + F(M)
      RETURN
      END
```

# Приложение Б

# ОБ ИСКУССТВЕННОЙ СХЕМНОЙ ВЯЗКОСТИ [1])

## Введение

Искусственная вязкость представляет собой особый вид ошибок аппроксимации, проявляющихся при представлении уравнений переноса конечными разностями. Впервые этот термин появился в работе фон Неймана и Рихтмайера [1950], которые ввели в явном виде в уравнения течения невязкого газа член, аналогичный члену, описывающему вязкость, для расчета движения ударных волн; в настоящее время этот метод известен как метод «размазывания» ударных волн или метод сквозного счета. В цитированной работе член с *явной* искусственной вязкостью выбирался пропорциональным $\Delta x^2$ для обеспечения аппроксимации, т. е. по существу этот член представлял собой *ошибку аппроксимации* второго порядка.

Позже было выяснено, что аналогичное искусственной вязкости поведение может быть получено (часто неумышленно) именно из-за ошибок аппроксимации уравнений конечными разностями. Нох и Проттер [1963] впервые провели анализ *неявной* (*схемной*) искусственной вязкости в схеме с конечными разностями против потока для линейного модельного уравнения конвекции

$$\zeta_t = -u\zeta_x. \tag{Б.1}$$

При $u > 0$ схема с конечными разностями против потока, примененная к уравнению (Б.1), дает следующее конечно-разностное уравнение:

$$(\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n)/\Delta t = -u\left[(\zeta_i^n - \zeta_{i-1}^n)/\Delta x\right]. \tag{Б.2}$$

Ошибка аппроксимации имеет порядок $O(\Delta t, \Delta x)$. Переписывая уравнение (2) с введением числа Куранта $C = u\Delta t/\Delta x$, при $u = \text{const}$ получаем

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - C\left(\zeta_i^n - \zeta_{i-1}^n\right). \tag{Б.3}$$

Для $C = 1$ схема дает $\zeta_i^{n+1} = \zeta_{i-1}^n$, что является точным решением. Условие $C = 1$ является также границей устойчивости.

---

[1]) Это приложение основано на работе Роуча [1971в] с некоторыми разъяснениями Уорминга и Хьетта [1974]. Последняя работа является наиболее авторитетным источником по рассматриваемому вопросу.

При $C < 1$ схема вводит искусственное схемное затухание; при этом анализ устойчивости по фон Нейману дает, что собственные значения матрицы перехода $|\lambda| < 1$. Любая схема, для которой $|\lambda| < 1$, вводит подобное искусственное схемное затухание. Разложение в ряд Тейлора, используемое в анализе устойчивости по Хёрту [1968], показывает, что схема (Б.3) соответствует следующему уравнению в частных производных:

$$\zeta_t = -u\zeta_x + (u\,\Delta x/2)\,\zeta_{xx} - {}^1/_2\Delta t\zeta_{tt} + O(\Delta x^2, \Delta t^2). \qquad (Б.4)$$

Величина $\zeta_{tt}$, входящая в уравнение (Б.4), обычно находится при помощи уравнения (Б. 1) и для $u = \text{const}$ имеет вид [1])

$$\zeta_{tt} = -u\zeta_{xt} = -u\,(\zeta_t)_x = u^2\zeta_{xx}. \qquad (Б.5)$$

Подставляя выражение (Б.5) в уравнение (Б.4), получаем

$$\zeta_t = -u\zeta_x + \alpha_e\zeta_{xx} + O(\Delta x^2, \Delta t^2), \qquad (Б.6)$$

где

$$\alpha_e = u\,\Delta x/2 - u^2\,\Delta t/2 = {}^1/_2 u\,\Delta x\,(1 - C). \qquad (Б.7)$$

Поскóльку здесь вводится не имеющий физического смысла коэффициент $\alpha_e$ при $\partial^2\zeta/\partial x^2$, мы вправе говорить не только об искусственном затухании, но — более конкретно — об искусственной схемной, или численной, диффузии либо об схемной, или численной, вязкости схемы. (Хёрт [1968] успешно использует условие $\alpha_e > 0$ в качестве необходимого условия устойчивости). При $C = 1$ из соотношения (Б.7) следует, что $\alpha_e = 0$; этот результат согласуется с тем, что при $C = 1$ схема (Б.3) дает точное решение.

## Нестационарный и стационарный анализ схемы с конечными разностями против потока

Приведенный выше анализ применялся многими авторами для описания искусственной вязкости различных схем, и полученные при этом результаты, как широко признано, могут быть использованы в многомерных задачах и при наличии членов с физической вязкостью, и при их отсутствии. Однако в многомерных задачах о стационарных течениях вязкой жидкости интерпретация величины $\alpha_e$ не так проста, как это может показаться. Это видно уже из соотношения (Б.7), которое показывает, что $\alpha_e$ зависит от $\Delta t$ через число Куранта C. Рассмотрим

[1]) Здесь можно применять уравнение (Б. 1), не опасаясь внести ошибку в коэффициент искусственной схемной вязкости. Однако более строгим было бы повторное дифференцирование уравнения (Б. 3) в предположении, что между узловыми точками функция $\zeta$ дифференцируема нужное число раз. Как показали Уорминг и Хьетт [1974], именно такая процедура дает правильную информацию о поведении производных высшего порядка.

задачу, в которой достигается стационарное состояние, т. е. $\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n$ [1]). И сама конечно-разностная схема (Б.2), и весь опыт расчетов многомерных задач по схеме конечных разностей против потока показывают, что изменение $\Delta t$ не должно влиять на стационарное решение. Однако соотношение (Б.7) указывает, что при уменьшении $\Delta t$ величина $\alpha_e$ увеличивается (через посредство C). Если концепция схемной вязкости имеет право на существование, то решение конечно-разностного уравнения, казалось бы, должно зависеть от $\alpha_e$, однако мы знаем, что можно изменять $\alpha_e$, меняя $\Delta t$, а стационарное решение при этом не будет меняться.

Вместо приведенного выше анализа нестационарного уравнения можно изучать влияние $\alpha_e$, предполагая, что стационарное состояние существует. Полагая в уравнении (Б.2) $\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n$ и разлагая в ряд Тейлора, получаем выражение для $\alpha_e$ при стационарном анализе (которое мы обозначаем через $\alpha_{es}$):

$$\alpha_{es} = {}^1/_2 u \Delta x. \tag{Б.8}$$

При таком определении $\alpha_{es} \neq f(\Delta t)$ и независимость стационарного решения от $\Delta t$ не вызывает сомнений.

Разрешение парадокса о двух различных способах определения величины $\alpha_e$ по формулам (Б.7) и (Б.8) легко следует из того, что для модельного уравнения при отсутствии вязкости единственным возможным стационарным решением с $u = \text{const}$ является тривиальное решение $\zeta_i^n = \zeta_1^n = \text{const}$. В этом случае $\partial^2\zeta/\partial x^2 = 0$, что допускает произвольные значения величины $\alpha_e$. Однако возникает вопрос о том, какой из двух вариантов анализа (или ни один из них) применим к задачам с диффузионными членами, к многомерным задачам и к задачам с непостоянной скоростью $u$ конвекции.

На этот вопрос можно легко дать недвусмысленный ответ, добавив в уравнение (Б.1) диффузионный член с физическим коэффициентом диффузии $\alpha$:

$$\zeta_t = -u\zeta_x + \alpha\zeta_{xx}. \tag{Б.9}$$

Представляя конвективный член конечными разностями против потока, временно́й член — конечными разностями вперед по времени, а диффузионный член — центральными разностями, получаем

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - C(\zeta_i^n - \zeta_{i-1}^n) + d(\zeta_{i+1}^n - 2\zeta_i^n + \zeta_{i-1}^n), \tag{Б.10}$$

где $d = \alpha\Delta t/\Delta x^2$. Стационарный анализ уравнения (Б.9) дает

$$0 = -u\zeta_x + (\alpha + \alpha_{es})\zeta_{xx} + O(\Delta x^2), \tag{Б.11}$$

[1]) Не будем здесь усложнять изложение обсуждением критериев итерационной сходимости.

где $\alpha_{es}$ снова определяется по формуле (Б.8), результат же нестационарного анализа изменится, поскольку теперь соотношение (Б.5) должно быть заменено следующим:

$$\zeta_{tt} = (-u\zeta_x + \alpha\zeta_{xx})_t = u^2\zeta_{xx} - 2u\alpha\zeta_{xxx} + \alpha^2\zeta_{xxxx}, \quad (Б.12)$$

и тогда вместо соотношения (Б.6) будем иметь

$$\zeta_t = -u\zeta_x + (\alpha + \alpha_e)\zeta_{xx} + O(\Delta x^2, \Delta t^2) + \text{ПВП}, \quad (Б.13)$$

где через ПВП обозначены члены с производными высшего порядка

$$\text{ПВП} = \Delta t\,[u\alpha\zeta_{xxx} - (\alpha^2/2)\zeta_{xxxx}], \quad (Б.14)$$

а $\alpha_e$ опять определяется по формуле (Б.7). Хёрт [1968] отбрасывает члены ПВП и после этого успешно исследует устойчивость решения нестационарной задачи, однако поскольку нас интересует $\alpha_e$, соответствующее стационарному решению, мы вынуждены сохранить члены ПВП.

Для любого стационарного решения из уравнения (Б.9) следует

$$\zeta_{xxxx} = (u/\alpha)\zeta_{xxx} = (u/\alpha)^2\zeta_{xx} = (u/\alpha)^3\zeta_x. \quad (Б.15)$$

Применим соотношения (Б.15), справедливые для стационарного состояния, к результатам нестационарного анализа. Считая решение уравнения (Б.13) стационарным, учитывая (Б.14) и (Б.15) и подставляя в (Б.13) выражение (Б.7) для $\alpha_e$, получаем

$$0 = -u\zeta_x + \alpha\zeta_{xx} + (u\,\Delta x/2)\zeta_{xx} - (u^2\,\Delta t/2)\zeta_{xx} + \\ + \Delta t u\alpha\,(u/\alpha)\zeta_{xx} - \Delta t\,(\alpha^2/2)\,(u/\alpha)^2\zeta_{xx} + O(\Delta x^2, \Delta t^2), \quad (Б.16)$$

$$0 = -u\zeta_x + (\alpha + \alpha_{es})\zeta_{xx} + O(\Delta x^2, \Delta t^2), \quad (Б.17)$$

где $\alpha_{es}$ оиределяется по формуле (Б.8). Отсюда становится ясно, что хотя величина $\alpha_e$, даваемая выражением (Б.7), и пригодна для анализа устойчивости по Хёрту, однако определенный выражением (Б.8) коэффициент $\alpha_{es}$ соответствует достижению стационарного состояния даже при нестационарном анализе.

Можно показать, что последнее из соотношений (Б.15) можно использовать для исключения $\alpha_{es}\zeta_{xx}$ из соотношения (Б.11), что приводит к выводу о наличии в схеме не искусственной схемной вязкости, а искусственной схемной скорости конвекции $u_{es}$, именно

$$0 = -(u - u_{es})\zeta_x + \alpha\zeta_{xx} + O(\Delta x^2), \quad (Б.18)$$

где

$$u_{es} = \alpha_{es}u/\alpha = {}^1/_2 u^2\,\Delta x/\alpha. \quad (Б.19)$$

Однако член с искусственной схемной скоростью в равенстве (Б.18) все же следует интерпретировать как член, вносящий эффект искусственной вязкости, даже если член $\alpha_{es}\zeta_{xx}$ отсутствует. Стационарное решение определяется не значениями $\alpha$ и $u$ по отдельности, а их отношением $u/\alpha$ с учетом граничных условий. При соответствующем выборе характерного линейного размера задачи для приведения уравнения к безразмерному виду отношение $u/\alpha$ есть не что иное, как число Рейнольдса. Поэтому влияние искусственной схемной вязкости сводится просто к уменьшению эффективного значения числа Рейнольдса $u/\alpha$. В соотношении (Б.11) влияние схемной вязкости выражается в искусственном увеличении $\alpha$, что влечет за собой уменьшение величины $u/\alpha$ до $u/(\alpha+\alpha_{es})$. В соотношении (Б.18) влияние схемной вязкости выражается в искусственном уменьшении величины $u$, причем $u/\alpha$ уменьшается до $(u-u_{es})/\alpha$. Таким образом, и величина $\alpha_{es}$ в (Б.11), и величина $u_{es}$ в (Б.18) уменьшают эффективное значение числа Рейнольдса и, следовательно, создают эффект искусственной вязкости.

В действительности обоим этим вариантам анализа присуща некая количественная неопределенность, обусловленная применением соотношений (Б.15) к конечно-разностным уравнениям, в то время как они, строго говоря, применимы лишь к дифференциальным уравнениям. В соотношение (Б.11) входит коэффициент

$$\frac{u}{\alpha+\alpha_{es}}=\frac{u}{\alpha}\left(\frac{1}{1+{}^1/_2 u\,\Delta x/\alpha}\right), \tag{Б.20}$$

а в соотношение (Б.18) — коэффициент

$$(u-u_{es})/\alpha=(u/\alpha)(1-{}^1/_2 u\,\Delta x/\alpha). \tag{Б.21}$$

Однако поскольку $1/(1+\varepsilon)=1-\varepsilon+O(\varepsilon^2)$, коэффициенты (Б.20) и (Б.21) для оценки влияния схемной вязкости равноценны с точностью до ошибки аппроксимации $\Delta x^2$ при условии, что

$${}^1/_2 u\,\Delta x/\alpha \ll 1. \tag{Б.22}$$

Очевидно, что это условие выполняется при $\Delta x\to 0$, и в этом случае соотношения (Б.15) можно применять к конечно-разностным уравнениям. (Условие (Б.22) является известным условием обеспечения формальной точности схемы конечных разностей против потока, требующим, чтобы сеточное число Рейнольдса $u\Delta x/\alpha$ было существенно меньше 2.)

Аналогично, соотношение (Б.15) вполне законно может быть использовано в равенстве (Б.11) для представления ошибки аппроксимации первого порядка членом $\zeta_{xxx}$ с соответствующим

коэффициентом. Однако ввиду того что подобный член в исходном дифференциальном уравнении отсутствует, такая процедура сама по себе не приведет к плодотворной физической интерпретации поведения решений конечно-разностных уравнений.

Следует также отметить, что если рассматриваемые задачи имеют граничные условия вида

$$\zeta(0) = a, \quad \zeta_x(1) = b \tag{Б.23}$$

или

$$\zeta(0) = a, \quad \zeta(1) = b, \tag{Б.24}$$

то стационарное решение будет иметь вид

$$\zeta(x) = C_1 + C_2 e^{xu/\alpha}, \tag{Б.25}$$

причем $C_2 \neq 0$. Это решение дает отличные от нуля значения всех производных по пространственным переменным. В отличие от ситуации, имевшей место при рассмотрении уравнения для невязкой жидкости, в этом случае разница между величиной $\alpha_e$, определяемой выражением (Б.7), и величиной $\alpha_{es}$, определяемой выражением (Б.8), весьма существенна.

Для многомерных задач с нелинейными коэффициентами в уравнениях стационарный и нестационарный анализ проводятся уже не так просто. В обоих случаях получаются различные значения $\alpha_e$ или $\alpha_{es}$ для различных направлений (они даются выражениями, аналогичными (Б.7) или (Б.8)). Однако нестационарная форма $\alpha_e$, даваемая выражением (Б.7), получена с помощью соотношений (Б.5), неприменимых в многомерных и/или нелинейных задачах. Кроме того, из многомерного нестационарного анализа следует, что стационарное решение, полученное по схеме конечных разностей против потока, зависит от $\Delta t$, а это противоречит практике расчетов.

Таким образом, для многомерных нелинейных стационарных задач, по-видимому, применим лишь стационарный анализ.

## Нестационарный и стационарный анализ других схем

В табл. I приведены результаты стационарного и нестационарного анализа искусственной вязкости различных схем применительно к модельному уравнению (Б.1) для невязкой жидкости. Стационарные результаты для этого уравнения идентичны аналогичным результатам для уравнения (Б.9) с учетом вязкости при использовании для представления вязкого члена любой из известных схем второго порядка точности с центральными разностями, а именно: схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным

Таблица I

**Коэффициенты схемной искусственной вязкости, полученные при нестационарном и стационарном анализе различных конечно-разностных схем, примененных для уравнения $\zeta_t = -u\zeta_x$ при $C = u\,\Delta t/\Delta x$**

| Название схемы | Конечно-разностное уравнение | Нестационарный анализ, $\alpha_e$ | Стационарный анализ, $\alpha_{es}$ | Формальный порядок ошибки аппроксимации |
|---|---|---|---|---|
| 1. Конечные разности против потока | $\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - C\left(\zeta_i^n - \zeta_{i-1}^n\right)$ | $(u\,\Delta x/2)\,(1 - C)$ | $u\,\Delta x/2$ | $O\,(\Delta t, \Delta x)$ |
| 2. Разности вперед по времени и центральные разности по пространственным переменным | $\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - \frac{C}{2}\left(\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n\right)$ | $-(u^2\,\Delta t/2)$ | 0 | $O\,(\Delta t, \Delta x^2)$ |
| 3. Схема Лакса | $\zeta_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(\zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n\right) - \frac{C}{2}\left(\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n\right)$ | $(\Delta x^2/(2\,\Delta t))\,(1 - C^2)$ | $\Delta x^2/(2\,\Delta t)$ | $O\,(\Delta t, \Delta x^2, \Delta x^2/\Delta t)$ |
| 4. Схема Лейта [а] | $\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - \frac{C}{2}\left(\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n\right) + \frac{C^2}{2}\left(\zeta_{i+1}^n - 2\zeta_i^n + \zeta_{i-1}^n\right)$ | 0 | $u^2\,\Delta t/2$, или 0 | $O\,(\Delta t^2, \Delta x^2)$ |
| 5. Схема Мацуно [б] | $\overline{\zeta_i^{n+1}} = \zeta_i^n - \frac{C}{2}\left(\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n\right)$<br>$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - \frac{C}{2}\left(\overline{\zeta_{i+1}^{n+1}} - \overline{\zeta_{i-1}^{n+1}}\right)$ | $u^2\,\Delta t$ | 0 | $O\,(\Delta t, \Delta x^2)$ |

[а] Аналогичные результаты имеют место для схем Лакса—Вендроффа, Моретти, Мак-Кормака и двухшаговой схемы Лакса—Вендроффа.

[б] Аналогичные результаты имеют место для схем Брайловской и Чена—Аллена.

переменным, полностью неявной схемы, неявной схемы чередующихся направлений, схем Чена — Аллена, Крокко, Саульева, Адамса — Бэшфорта и др.

При $u = \text{const}$ схема с разностями против потока эквивалентна схеме с донорными ячейками (см. Джентри с соавторами [1966]) или второй схеме с разностями против потока, в которой на сторонах ячеек используются осредненные по ячейкам скорости переноса. И при нестационарном анализе, и при стационарном анализе при $C < 1$ в этой схеме имеется ненулевая искусственная вязкость. Схема с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным в отсутствие физических вязких членов неустойчива и соответственно при нестационарном анализе в ней $\alpha_e < 0$ (см. Хёрт [1968]). В схеме Лакса (Лакс [1954]), которая широко применяется и теперь, в случае $C < 1$ в обоих вариантах анализа также имеется ненулевая искусственная вязкость.

Очень важную роль играет схема Лейта (Лейт [1965]; см. также Нох и Проттер [1963]). Она основана на разложении уравнения (Б.1) в ряд Тейлора по времени до второго порядка включительно. Для модельного уравнения (Б.1) схема Лейта алгебраически эквивалентна другим схемам, в которых применяется разложение в ряд Тейлора по времени до второго порядка, например схемам Лакса — Вендроффа (Лакс и Вендрофф [1960]), Моретти (см. Моретти и Аббетт [1966]), Мак-Кормака (Мак-Кормак [1969, 1971]), Рихтмайера (Рихтмайер [1963]) и другим двухшаговым схемам Лакса — Вендроффа. Схема Лейта входит также в схему с нулевой средней фазовой ошибкой, предложенную Фроммом (Фромм [1968]), а при некоторых частных комбинациях параметров эквивалентна даже схеме Русанова (Русанов [1961]). Знаменательно, что в схеме Лейта равенство $\alpha_e = 0$ появляется только в нестационарном анализе. В стационарном анализе $\alpha_{es} = {}^1/_2 u^2 \Delta t$, откуда следует, что $\alpha_{es} = 0$ только при $\Delta t \to 0$. Эта схема *алгебраически* эквивалентна схеме с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным, записанной для уравнения (Б.9) с физическим коэффициентом вязкости $\alpha = {}^1/_2 u^2 \Delta t$. Однако если для этого коэффициента подсчитать «искусственное» сеточное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{ce} = u\Delta x/\alpha_{es}$, то получим $\mathrm{Re}_{ce} = 2/C$. Поскольку для устойчивости необходимо $C \leqslant 1$, при этом всегда необходимо выполняется неравенство $\mathrm{Re}_{ce} \geqslant 2$. Как показано в разд. 3.3.8, подобные решения немонотонны и поэтому не моделируют течений вязкой жидкости. Анализ показывает, что схемная вязкость вводится правильно, если к разностному уравнению без учета вязкости, записанному по схеме Лакса — Вендроффа, просто добавить физические вязкие члены и представить их конечными разностями вперед по

времени и центральными разностями по пространственным переменным. Кроме того, в противоположность схеме конечных разностей против потока, в этом случае и сами конечно-разностные уравнения и практика расчетов показывают, что стационарное решение будет зависеть от $\Delta t$.

Двухшаговая схема Мацуно (см. Лилли [1965]), используемая для конечно-разностного представления конвективных членов, применялась также Браиловской (Браиловская [1965]) для расчета течения сжимаемой жидкости с тем же самым представлением вязких членов, а также Ченом и Алленом (Чен и Аллен [1970]) с другим нредставлением вязких членов, что удачно позволило избежать добавочного ограничения на $\Delta t$, имевшегося в схеме Браиловской. На схеме Мацуно следует остановиться особо из-за дополнительной неопределенности в величине $\alpha_{es}$ при стационарном анализе. Эту двухшаговую схему для уравнения (Б.1) можно записать в виде

$$\zeta_i^{\overline{n+1}} = \zeta_i^n - (C/2)(\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n), \tag{Б.26а}$$

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - (C/2)(\zeta_{i+1}^{\overline{n+1}} - \zeta_{i-1}^{\overline{n+1}}). \tag{Б.26б}$$

Величины с индексом $\overline{n+1}$ являются предварительными или промежуточными значениями. Эту схему можно интерпретировать как итерационное приближение к полностью неявной схеме с одной итерацией. Для анализа устойчивости и искусственной вязкости (Б.26) можно переписать в виде одного уравнения

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - (C/2)(\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n) + (C^2/4)(\zeta_{i+2}^n - 2\zeta_i^n + \zeta_{i-2}^n). \tag{Б.27}$$

Схема (Б.27) эквивалентна двухшаговой схеме (Б.26) только для модельного уравнения (Б.1) во внутренних точках; наличие границ и нелинейных членов нарушает эту эквивалентность. Последний член уравнения (Б.27) можно трактовать как обычное трехточечное конечно-разностное представление $\alpha\partial^2\zeta/\partial x^2$, записанное для сетки с шагом $2\Delta x$ вместо $\Delta x$. С учетом этой интерпретации стационарный анализ дал бы для $\alpha_{es}$ следующее выражение: $\alpha_{es} = 2u^2\Delta t$. Однако на поведение решения этого уравнения неожиданным и благоприятным образом влияют члены более высокого порядка. Каждый из двух шагов (Б.26а) и (Б.26б) имеет одну и ту же операторную форму:

$$\zeta^{\overline{n+1}} = \zeta^n + L(\zeta^n), \tag{Б.28а}$$

$$\zeta^{n+1} = \zeta^n + L(\zeta^{\overline{n+1}}). \tag{Б.28б}$$

(Этим схема Мацуно отличается, например, от двухшаговой схемы Лакса — Вендроффа.) Аллен и Чен [1970] отметили тот достойный внимания факт, что при достижении стационарного состояния не только $\zeta^{n+1} = \zeta^n$, но и $\zeta^{\overline{n+1}} = \zeta^n$. С учетом этого

факта стационарный анализ для $\alpha_{es}$ может быть проведен на каждом шаге (Б.26) раздельно без привлечения уравнения (Б.27). В результате будем иметь $\alpha_{es} = 0$ (так же, как и для схемы с конечными разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным). Этот вывод был проверен в настоящем исследовании на одномерных тестовых задачах, в которых получились стационарные решения, не зависящие от $\Delta t$, в отличие от анализа уравнения (Б.27) и в отличие от схемы Лейта.

## Расчет двумерной задачи

Для проверки возможности переноса результатов, полученных для одномерного модельного уравнения (Б.1), на двумерные уравнения гидродинамики был проведен численный эксперимент с использованием программы Моретти (см. Моретти и Блейх [1968]) расчета обтекания затупленного тела невязким газом. Рассматривалось обтекание сферически затупленного конуса с полууглом раствора 6° совершенным газом с показателем адиабаты $\gamma = 1.4$ при числе Маха невозмущенного потока, равном 10. Программа осуществляет выделение ударной волны на криволинейной расчетной сетке, перестраивающейся по мере изменения решения во времени. Поскольку ударная волна в процессе расчета все время сохраняется как разрыв, представленные результаты не искажаются послескачковыми всплесками, характерными для методов сквозного счета, или размазывания скачка. Для усиления влияния величины $\alpha_{es}$ была выбрана чрезвычайно грубая сетка: она содержала только три узла (две ячейки) между поверхностью тела и ударной волной и только пять узлов вдоль тела. Целью эксперимента являлось доказательство того, что стационарное решение, полученное по схеме Моретти, зависит от выбранной величины $\Delta t$, как это следует из стационарного анализа величины $\alpha_e$. (В этом состоит отличие схемы Моретти от схемы конечных разностей против потока, обсуждавшейся ранее, а также от ряда других конечно-разностных схем.)

Наиболее чувствительной оказалась узловая точка (2, 3) в центре расчетной сетки. Величина $\Delta t$ изменялась в программе с помощью входного параметра STAB; при STAB $= 1$ величина $\Delta t$ выбиралась равной 0.94 от предельного размера шага по времени, допускаемого критерием устойчивости на квадратной сетке. Первая часть решения, показанного на рис. Б.1, была получена за 3000 шагов по времени при STAB $= 1$, что соответствовало безразмерному времени $T = 15.82$. Здесь можно видеть довольно четкое установление решения, при котором безразмерная плотность меняется всего лишь на $2.5 \cdot 10^{-6}$ % за

200 последних шагов по времени или менее чем на $2.74 \cdot 10^{-7}$% за один шаг по времени. Вторая часть решения $A$ была получена после уменьшения параметра STAB до $^1/_5$. При этом никакие другие параметры не менялись. Расчет продолжался еще на протяжении 28 000 шагов по времени, что соответствовало конечному времени $T = 46.45$. Это дало новое стационарное решение, в котором $\rho$ изменялось лишь на $4.32 \cdot 10^{-4}$% за последние 1000 шагов по времени.

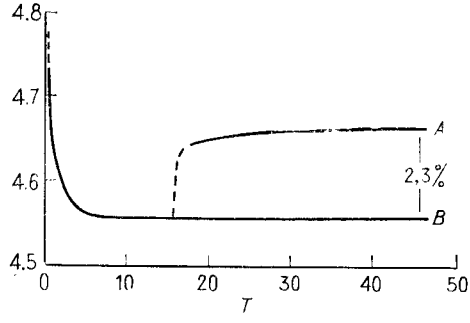



Рис. Б.1. Плотность в узловой точке (2, 3), рассчитанная по схеме Моретти. Расчет обтекания сферически затупленного конуса с полууглом раствора 6° при $M = 10$, $\gamma = 1.4$ на сетке $3 \times 5$. При $T < 15.82$ имеем $\Delta t_A = \Delta t_B \approx 0.94\,\Delta t$, где $\Delta t$ — предельный размер шага по времени, допускаемый критерием устойчивости; при $T \geqslant 15.82$ имеем $\Delta t_A = {}^1/_5\,\Delta t_B$.

Для дальнейшей проверки везде (вплоть до $T > 46.45$) просчитывалось другое решение $B$ с большей величиной $\Delta t$ (STAB = 1).

Расхождение между двумя стационарными решениями при $T = 46.45$ показано на рис. Б.1, а также представлено в табл. II.

Таблица II

**Расчет стационарного обтекания сферически затупленного конуса с полууглом раствора 6° по схеме Моретти при $M = 10$, $\gamma = 1.4$ на сетке $3 \times 5$. Приведены значения безразмерных плотности $\rho$, давления $P$ в узле сетки (2, 3) и расстояние отхода ударной волны $r_s$ при $\Delta t_A = {}^1/_5\,\Delta t_B$**

| | $\rho(2,3)$ | $P(2,3)$ | $r_s$ |
|---|---|---|---|
| Решение $A$ | 4.664 | 76.54 | 1.142 |
| Решение $B$ | 4.559 | 74.25 | 1.149 |
| Расхождение в % | 2.3 | 3.0 | 0.6 |

В наиболее чувствительном узле сетки (2, 3) для установившихся решений $A$ и $B$ безразмерные плотности отличаются на 2.3%, безразмерные давления — на 3%, безразмерные расстояния отхода ударной волны — на 0.6%.

Процентное различие между этими двумя решениями мало, поскольку в данном случае решение конечно-разностного уравнения лишь слабо зависит от $\alpha_{es}$ и $\Delta t$, а ударная волна рассматривается как разрыв. Численные решения, полученные при помощи этой и других схем с явной и неявной искусственной вязкостью, несомненно, будут разумными приближенными решениями. Весьма существенно, что двумерное стационарное решение действительно зависит от $\Delta t$, подтверждая тем самым одномерный анализ величины $\alpha_{es}$.

Дальнейшее исследование влияния величины $\Delta t$ проводилось на более мелкой сетке ($5 \times 7$). Решение со STAB $= 1$ устанавливалось по всем четырем значащим цифрам, выводимым на печать в этом расчете, в то время как в «стационарном» решении, полученном при STAB $= {}^1/_{10}$, наблюдались устойчивые осцилляции плотности $\pm 1$ во второй значащей цифре. Такое поведение снова согласуется с результатами стационарного анализа, которые показывают, что величина $\alpha_{es}$ пропорциональна $\Delta t$.

## Обсуждение других схем

Обсуждение других конечно-разностных схем применительно к модельному уравнению (Б.1) приводит к следующему. Стационарный анализ схем «чехарда со средней точкой», Крокко, Адамса — Бэшфорта, Хойна, Кранка — Николсона, полностью неявной схемы и различных неявных схем метода чередующихся направлений дает нулевую схемную вязкость, за исключением случаев применения конечных разностей против потока для конвективных членов в некоторых вариантах метода чередующихся направлений. Многошаговые схемы Стренга, Абарбанеля и Цваса, Фромма (Фромм [1968]) и Кроули дают существенно ненулевое значение $\alpha_{es}$ при стационарном анализе. К схемам, в которых как нестационарный, так и стационарный анализ дают нулевую искусственную вязкость, относятся схема «чехарда со средней точкой», схема Аракавы, схема Робертса — Вейса с производными по диагональным направлениям (Робертс и Вейс [1966]), а также те из схем метода чередующихся направлений, ошибка аппроксимации которых $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$. Конечно, каждая из перечисленных схем имеет свои недостатки.

Интересно отметить, что выражение для $\alpha_{es}$ в схеме Лейта, $\alpha_{es} = {}^1/_2 u^2 \Delta t$, не содержит явно $\Delta x$. Поэтому при $\Delta x \to 0$ величина $\alpha_{es} \to 0$ только за счет условия устойчивости Куранта, в ко-

тором требуется, чтобы $\Delta t \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Если бы была разработана схема, основанная на разложении в ряд Тейлора до второго порядка включительно, как и схема Лейта (или Лакса — Вендроффа и др.), но безусловно устойчивая, из-за фиксированного $\Delta t$ коэффициент $\alpha_{es}$ не обращался бы в нуль даже при $\Delta x \to 0$.

## Заключительные замечания

Сделаем в заключение четыре замечания по поводу интерпретации схемной вязкости.

1. Анализ ошибки аппроксимации указывает *порядок* этой ошибки, который, строго говоря, применим лишь при $\Delta x$, $\Delta t \to 0$. На практике нас обычно интересует не порядок ошибки аппроксимации, а ее *величина* при некоторых конечных значениях $\Delta x$ и $\Delta t$. Так, добавление некоторого малого вязкого члена (скажем, при $\mathrm{Re} = 10^6$ и $\Delta x = {}^1/_{10}$) *формально* увеличивает ошибку аппроксимации схемы Лакса — Вендроффа с центральными разностями до порядка $O(\Delta x)$, однако при $C = 1$ *величина* этой ошибки остается пренебрежимо малой. Заметим, что *величина* ошибки аппроксимации уменьшается постепенно при уменьшении C, в то время как ее *порядок* меняется скачком: при $C = 1$ мы имеем точное решение, а при $C < 1$ — ошибку порядка $O(\Delta x)$.

2. Для многомерных задач наиболее важным проявлением вязкости в смысле качественной разницы между решениями при отсутствии вязкости и при ее наличии обычно оказывается не наличие в уравнениях вязких членов при расчете внутренних точек, а необходимость постановки граничных условий прилипания. Так, Кенцер [1970] отметил, что при использовании граничных условий для невязкой жидкости (условий скольжения потока) можно получить очень точные приближения для решений при отсутствии вязкости даже при столь малых числах Рейнольдса, как 300, и даже на не слишком мелкой сетке. Это означает, что полученные численные решения без учета вязкости могут быть точными даже при наличии схемной вязкости, однако погрешность может быть несколько более существенна для задач с учетом вязкости. (Считая, что ошибка, связанная с наличием в конечно-разностных уравнениях коэффициента $\alpha_{es}$, влияет, например, на полученное значение коэффициента сопротивления $C_D$, не надо пытаться выявить такую малую ошибку в $C_D$, а лучше искать сдвиг по Re, которому отвечает найденное значение $C_D$. Это, очевидно, допустимо, потому что течение, как правило, слабо зависит от величины Re.)

3. В двумерных задачах коэффициенты $\alpha_{es}$ зависят от $u$ и $v$, которые определены относительно эйлеровой сетки. Это означает, что в направлениях $x$ и $y$ имеются различные величины $\alpha_{es}$, меняющиеся по пространству и стремящиеся к нулю около неподвижных стенок с условиями прилипания на них. Поэтому введение «эффективного Re» не имеет количественного смысла даже для вязких решений и вязкие решения конечно-разностных уравнений с ненулевыми $\alpha_{es}$ часто более точны, чем можно было бы ожидать при оценке $\alpha_{es}$ по условиям в невозмущенном потоке. Однако такие решения не инвариантны относительно преобразования Галилея (см. Джентри с соавторами [1966]). Кроме того, в решениях задач об обтекании вращающихся тел может наблюдаться аномальное поведение, связанное с различными значениями $\alpha_{es}$ на противоположных сторонах тел.

4. Имеется несколько способов постановки на выходных границах многомерных течений численных условий, соответствующих свободному потоку. Цель этих способов — уменьшить ошибку вверх по потоку, обусловленную тем, что для невязкой жидкости принимается $C < 1$.

# ЗАДАЧИ

Задачи, отмеченные звездочкой, предназначены для решения на ЭВМ. Для решения любой из этих задач требуется не более $5 \div 10$ минут на таких ЭВМ, как CDC 3600, UNIVAC 1107, IBM 360/50.

*Глава 2*

**2.1.** Вывести уравнение переноса вихря для случая переменного коэффициента вязкости $\bar{\mu}$. Привести уравнение к безразмерным переменным, учитывая, что $\mathrm{Re} = \bar{\rho}\bar{U}_0\bar{L}/\bar{\mu}_0$, а $\mu = \bar{\mu}/\bar{\mu}_0$.

**2.2.** Показать, что коэффициент сопротивления $C_D$ тонкой плоской пластинки длины $L$, расположенной параллельно направлению потока, можно вычислить при помощи интегрирования коэффициента поверхностного трения. В этом случае

$$C_D = \frac{\text{Сила сопротивления}}{{}^1/_2\rho V_\infty^2 \cdot (\text{Площадь пластинки})},$$

$$C_D = 2C_f, \quad C_f = (1/\mathrm{Re}) \int_0^L \zeta_w \, dx,$$

где $\zeta_w$ — безразмерная величина вихря на поверхности пластинки.

*Глава 3*

**3.1.** Вывести для производных следующие конечно-разностные выражения с точностью до $O(\Delta x^2)$:

$$\left.\frac{\delta^3\zeta}{\delta x^3}\right|_i = \frac{\zeta_{i+2} - 2\zeta_{i+1} + 2\zeta_{i-1} - \zeta_{i-2}}{2\Delta x^3},$$

$$\left.\frac{\delta^4\zeta}{\delta x^4}\right|_i = \frac{\zeta_{i+2} - 4\zeta_{i+1} + 6\zeta_i - 4\zeta_{i-1} + \zeta_{i-2}}{\Delta x^4}.$$

**3.2.** Рассмотреть уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости с массовой плотностью $\rho$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho\mathbf{V}) = -\rho\nabla\cdot\mathbf{V} - \mathbf{V}\cdot\nabla\rho,$$

в частности в одномерном случае

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = -\rho\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial\rho}{\partial x}.$$

а) Показать, что применение центральных разностей по пространственным переменным для уравнения в первой форме приводит к консервативному разностному уравнению.

б) Показать, что уравнение во второй (продифференцированной) форме также будет консервативным и соответствует ZIP-аппроксимации (см., например, Хёрт [1968]) для членов, описывающих поток через сторону ячейки, в виде

$$(\rho u)_{i+1/2} = {}^1/_2(\rho_i u_{i+1} + \rho_{i+1}u_i).$$

в) Чтобы уменьшить некоторые обусловленные нелинейностью осцилляции, возникающие при использовании уравнения во второй (продифференцированной) форме, предлагается следующая модификация. В члене $u_i(\rho_{i+1}-\rho_{i-1})/(2\Delta x)$ скорость конвекции $u_i$ заменяется средним от ее значений в двух соседних точках, так что этот член принимает вид $^1/_2(u_{i+1}+u_{i-1})(\rho_{i+1}-\rho_{i-1})/(2\Delta x)$. Показать, что такая схема также будет иметь второй порядок точности, но не будет консервативной.

3.3. Рассмотреть член со второй производной $\partial[\alpha(\partial\zeta/\partial x)]/\partial x$, описывающий диффузию. При $\zeta = ax^2$ и $\alpha = bx^2$ в результате дифференцирования имеем $\partial[\alpha(\partial\zeta/\partial x)]/\partial x = 6abx^2$. Показать, что применение разностей в консервативной форме дает

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\alpha\frac{\delta\zeta}{\delta x}\right)_i = \frac{^1/_2(\alpha_{i+1}+\alpha_i)(\zeta_{i+1}-\zeta_i) - ^1/_2(\alpha_i+\alpha_{i-1})(\zeta_i-\zeta_{i-1})}{\Delta x^2} = 7abx^2,$$

тогда как применение разностей в неконсервативной форме

$$\alpha\frac{\delta^2\zeta}{\delta x^2} + \frac{\delta\alpha}{\delta x}\frac{\delta\zeta}{\delta x}$$

дает точный результат. (Эту задачу предложил д-р Ф. Блоттнер.)

3.4. Рассмотреть член со второй производной $\partial(\alpha(\partial\zeta/\partial x))/\partial x$, описывающий диффузию. Показать, что ошибка апроксимации наименьшего порядка при применении разностей в консервативной форме (см. задачу 3.3) имеет вид

$$-\frac{1}{6}\Delta x^2\left(\frac{\partial^3\alpha}{\partial x^3}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{3}{2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}\right),$$

а при применении разностей в неконсервативной форме — вид

$$-\frac{1}{6}\Delta x^2\left(\frac{\partial^3\alpha}{\partial x^3}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3} + \frac{1}{2}\alpha\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}\right).$$

Если $\zeta$ и $\alpha$ — квадратичные полиномы:

$$\zeta = a_1 + b_1x + c_1x^2, \quad \alpha = a_2 + b_2x + c_2x^2,$$

то анализ ошибки показывает, что *неконсервативная* форма будет *более точной*, причем член порядка $O(\Delta x^2)$ равен нулю, в то время как для консервативной формы получается $O(\Delta x^2) = -c_1c_2$. (Эту задачу предложил д-р Ф. Блоттнер.)

*3.5. Составить программу для схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной в случае одномерного модельного уравнения. Рассмотреть различные виды численных условий на выходной границе как при фиксированных, так и при периодических (синусоидальная волна) значениях величины $\zeta$ на входной границе. Условия на выходной границе должны включать по крайней мере следующие: условие нулевого градиента, линейная экстраполяция и разности против потока.

3.6. Рассмотреть схему «чехарда» в применении к одномерному модельному уравнению, описывающему конвекцию в невязкой жидкости, для точек, удаленных от границ. Исследование устойчивости провести методом дискретных возмущений, полагая $\zeta_i^n = \varepsilon$ и $\zeta^n = 0$ во всех остальных точках. Показать, что для самой дальней вниз по потоку точки, испытывающей влияние точки $i$, возмущение имеет следующий вид:

$$\zeta_{i+k}^{n+k} = C^k\varepsilon,$$

где C — число Куранта. Для точек, расположенных за таким «фронтом», $\zeta_{i+k}^{n+k+1} = \zeta_{i+k+1}^{n+k} = 0$. Показать, что вверх по потоку распространяется ошибочное решение, для которого $\zeta_{i-k}^{n+k} = (-\mathrm{C})^k$. Построить графики решений при C = 1, C = $^1/_2$ и C = $^1/_{10}$.

***3.7.** Исследовать поведение схемы «чехарда» на примере одномерной задачи.

а) Изучить влияние числа Куранта C и величины шага по времени $\Delta t$ на решение задачи с начальным условием $\zeta(x, 0) = 0$, условием на входной границе $\zeta(0, t) = \sin t$ и численным условием на выходной границе $\zeta_{il}^{n+1} = \zeta_{il-1}^{n+1}$.

б) Изучить поведение решения, если $\zeta_i^1 = \zeta_i^2 = 0$ для нечетных $i$ и $\zeta_i^1 = +1$, $\zeta_i^2 = -1$ для четных $i$ и $\zeta_1^n = 0$, в зависимости от двух вариантов условий на выходной границе: 1) $\zeta_{il}^{n+1} = \zeta_{il-1}^{n+1}$ и 2) $\zeta_{il}^{n+1} = \zeta_{il-1}^{n}$. Достаточно рассмотреть сетку с десятью ячейками ($il = 11$). Предварительно читатель может ознакомиться с главой 7.

***3.8.** Для модельного уравнения, описывающего конвекцию и диффузию в одномерном случае, составить расчетную тестовую программу для исследования влияния на устойчивость переменности по пространству скорости конвекции $u$. (Эта задача, допускающая неограниченное множество решений, может охватить многие возможные комбинации конечно-разностных схем для расчета внутренних точек, начальных условий, граничных условий и т. д. Она может быть предназначена в качестве работы на досуге или в качестве темы диссертации на степень доктора философии. Задача особенно эффективна как учебная, когда студенты исследуют различные схемы.)

**3.9.** Для решения Блазиуса уравнений пограничного слоя при обтекании плоской пластинки (см. Шлихтинг [1968]) можно вывести следующее соотношение:

$$v_e/u_e = 4.302/\mathrm{Re}_\delta$$

где $v_e$ и $u_e$ — составляющие вектора скорости на границе пограничного слоя, а $\mathrm{Re}_\delta$ — число Рейнольдса, вычисленное по толщине пограничного слоя $\delta$,

$$\mathrm{Re}_\delta = u_e\delta/\nu.$$

Показать, что при использовании схемы с разностями против потока при выборе десяти расчетных точек поперек пограничного слоя можно за счет влияния схемной искусственной вязкости ожидать уменьшения эффективного числа Рейнольдса приблизительно на 20%.

**3.10.** Рассмотреть метод исследования устойчивости, основанный на дискретизации по пространственной переменной при отсутствии дискретизации по времени. Этот метод, вероятно, был бы приемлем для гибридных (аналого-цифровых) вычислительных машин, в которых текущее время задачи находится в определенном соответствии со временем вычислительной машины. Этот метод можно было бы использовать для изучения классов разностных схем, которые строятся в виде комбинации схем для одномерных обыкновенных дифференциальных уравнений; например, схема с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной принадлежит к этому классу, а схема Лейта не принадлежит.

Для модельного уравнения при отсутствии вязкости рассмотреть конечно-разностную схему, имеющую общий вид

$$\left.\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right|_i = \frac{\mathrm{C}}{2\Delta x}\left[(1+\beta)\,\zeta_{i-1} - 2\beta\zeta_i + (\beta-1)\,\zeta_{i+1}\right].$$

При $\beta = 0$ эта схема является схемой с центральными разностями по пространственной переменной, а при $\beta = 1$ — схемой с разностями против потока. Показать, что приведенная выше конечно-разностная схема дает точное решение следующего дифференциального уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -C\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{C\beta}{\Delta x}\sum_{n=2k}^{\infty}\frac{\Delta x^n}{n!}\frac{\partial^n \zeta}{\partial x^n} - \frac{C}{\Delta x}\sum_{n=2k+1}^{\infty}\frac{\Delta x^n}{n!}\frac{\partial^n \zeta}{\partial x^n}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

(Ломекс с соавторами [1970].) На примере схемы с разностями против потока показать, что при исследовании устойчивости важен учет разностей по времени в противоположность методу, в котором время не дискретизируется (см. выше).

**3.11.** Построить схему для уравнения диффузии, основанную на аппроксимации Адамса — Бэшфорта для производной по времени. Доказать по меньшей мере условную устойчивость этой схемы. Для уравнения, содержащего конвективный и диффузионный члены, доказать, что при малых $u/\alpha$ имеет место по меньшей мере условная устойчивость.

**3.12.** Для исследования устойчивости схемы Крокко при отсутствии вязкости применить метод Хёрта и показать, что $\alpha_e = u^2\Delta t(\Gamma - 1/2)$.

**3.13.** а) Используя для производной по пространственной переменной $\partial^3\zeta\partial/x^3$ выражение, приведенное в задаче 3.1, и разложение в ряды Тейлора по времени до членов третьего порядка включительно, построить схему, аналогичную схеме Лейта.

б) Исследовать полученную схему на устойчивость. Применить для исследования устойчивости метод фон Неймана и в случае необходимости принять, что $C \ll 1$.

**3.14.** Для модельного уравнения при отсутствии вязкости рассмотреть неявную схему с разностями против потока

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - C\left(\zeta_i^{n+1} - \zeta_{i-1}^{n+1}\right).$$

Исследовать схему на устойчивость. Выяснить, обладает ли данная схема свойством транспортивности.

**3.15.** Необходимое и достаточное условие устойчивости схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной для одномерного уравнения диффузии имеет вид $d \leqslant d_{\max} = 1/2$, где $d \equiv \alpha\Delta t/\Delta x^2$. Для двухшаговой схемы Мацуно — Браиловской достаточное условие будет $d \leqslant d_{\max} = 1/4$. Если итерации продолжаются неограниченно, будет ли величина шага по времени и далее продолжать оставаться ограниченной, когда $d_{\max} \to 0$, или итерации приведут к тому, что схема приблизится к полностью неявной схеме, для которой $d_{\max} = \infty$?

**3.16.** Для схемы Курихары проделать следующее.

а) Схематически изобразить на плоскости $(x, t)$ два шага. Показать, как достигается центрирование по пространственной переменной и по времени.

б) Записать схему в виде одношаговой процедуры.

в) Показать, что данная схема не будет проявлять неустойчивость, связанную с расчленением решения на временно́м шаге, свойственную схеме «чехарда», и что фурье-компонента с длиной волны $\Lambda = 2\Delta x$ является стационарной.

г) Показать, что при $C = 1$ схема не дает точного решения.

д) Провести исследование устойчивости по методу фон Неймана и показать, что $|\lambda| = 1$.

е) Исследовать влияние схемной искусственной вязкости в нестационарном и в стационарном случаях.

ж) Доказать, что ошибка аппроксимации будет $E = O(\Delta x^2, \Delta t^2)$.

**3.17.** Блоттнер (личное сообщение) предложил следующую одношаговую схему второго порядка точности:

$$\zeta^{n+1/2} = \zeta^n + \frac{\Delta t}{2} L(\zeta^{n+1/2}),$$

$$\zeta^{n+1} = \zeta^n + \Delta t L(\zeta^{n+1/2}).$$

Заметим, что первый шаг является неявным, а второй явным. При помощи метода фон Неймана исследовать схему на устойчивость в тех случаях, когда

а) $L(\zeta) = -\dfrac{(u\zeta)_{i+1} - (u\zeta)_{i-1}}{2\Delta x}$,

б) $L(\zeta) = \alpha \dfrac{\zeta_{i+1} - 2\zeta_i + \zeta_{i-1}}{\Delta x^2}$.

**3.18.** Применяя метод фон Неймана, исследовать на устойчивость схему Саульева с одним направлением обхода точек для уравнения диффузии.

**3.19.** Показать, что для того, чтобы избежать увеличения ошибок вдоль пространственной координаты в явной схеме метода чередующихся направлений с производными по диагонали для уравнения, описывающего конвекцию при отсутствии вязкости, требуется выполнение условия $|C| \leqslant 1$.

**3.20.** Показать, что коэффициент схемной искусственной вязкости в схеме Фромма в одномерном стационарном случае вдвое меньше, чем этот же коэффициент в схеме Лейта.

**3.21.** Показать, что метод последовательной верхней релаксации, иногда называемой экстраполированным методом Либмана, действительно является линейной *экстраполяцией* метода Либмана при $\omega = 1$.

***3.22.** Экспериментально определить оптимальную величину параметра релаксации $\omega_0$ для случая прямоугольной области с обратным уступом (см. рис. 3.22). Заметим, что величина $\omega_0$ будет зависеть от размеров области и величин шагов пространственной сетки $\Delta x$ и $\Delta y$.

**3.23.** Рассмотреть следующий способ вычисления вихря на стенке в точке $w$. *Внутри* твердой стенки на расстоянии $\Delta y$ от ее поверхности помещают фиктивную точку $w - 1$ и в ней полагают $\psi_{w-1} = \psi_{w+1}$. Для аппроксимации уравнения Пуассона $\nabla^2\psi_w = \zeta_w$ используются центральные разности Показать, что этот способ арифметически эквивалентен применению для вычисления $\zeta_w$ способа первого порядка точности.

**3.24.** Пусть заданы значения функции $f$ в точках сетки $f_i$, $f_{i\pm1}$, $f_{i\pm2}$ и т. д. Определим новые значения в узлах $i \pm 1/2$ и т. д. при помощи осреднения:

$$f_{i\pm1/2} = (f_i + f_{i\pm1})/2.$$

Обозначим через $\delta f/\delta x$ и $\delta^2 f/\delta x^2$ конечно-разностные выражения для производных со вторым порядком точности по значениям функции $f$ в узлах $i \pm 1$, например

$$\left.\frac{\delta f}{\delta x}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}.$$

Обозначим через $\tilde{\delta} f/\tilde{\delta} x$ и $\tilde{\delta}^2 f/\tilde{\delta} x^2$ конечно-разностные выражения для производных, также имеющие второй порядок точности, но вычисленные по значениям функции в узловых точках $i \pm 1/2$, например $\left.\dfrac{\tilde{\delta} f}{\tilde{\delta} x}\right|_i = \dfrac{f_{i+1/2} - f_{i-1/2}}{\Delta x}$; кроме того, $\left.\dfrac{\tilde{\delta} f}{\tilde{\delta} x}\right|_{i-1/2} = \dfrac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$.

Показать, что

а) $$\left.\frac{\tilde{\delta} f}{\tilde{\delta} x}\right|_i = \left.\frac{\delta f}{\delta x}\right|_i,$$

б) $$\left.\frac{\tilde{\delta}^2 f}{\tilde{\delta} x^2}\right|_i = 2\left.\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\right|_i, \qquad \left.\frac{\tilde{\delta}^2 f}{\tilde{\delta} x^2}\right|_{i \pm 1/2} = 0.$$

**3.25.** Если сеточные значения функции $f$ линейно интерполируются на сетку с вдвое меньшим размером шага, то величины первых производных $\delta f/\delta x$ в узлах новой сетки, совпадающих с узлами старой сетки, остаются прежними, а величины вторых производных $\delta^2 f/\delta x^2$ меняются (см. предыдущую задачу). Построить такую схему определения значений функции $f$ на более мелкой сетке, чтобы $\tilde{\delta}^2 f/\tilde{\delta} x^2|_i = \delta^2 f/\delta x^2|_i$. Заметим, что, вообще говоря, требуется, чтобы $\tilde{f}_i \neq f_i$ и $\tilde{\delta} f/\tilde{\delta} x|_i \neq \delta f/\delta x|_i$.

**3.26.** Рассмотреть одномерную задачу для уравнения $\delta^2 f/\delta x^2 = q$ с граничными условиями Дирихле $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Применить конечно-разностные формулы второго порядка точности, считая, что нижняя граница находится в точке $i = {}^3/_2$. Тогда первое из граничных условий $f_{3/2} = 0$ аппроксимируется равенством $f_1 = -f_2$, где $f_1$ берется в точке, расположенной «ниже» нижней границы. Взяв всего лишь 3 или 4 узла, так чтобы можно было провести вычисления, не прибегая к помощи ЭВМ, показать, что: а) применение такой сетки приводит к ошибкам, связанным с нарушением ограниченности решения; при этом $\psi_2 < 0$, что невозможно для дифференциальных уравнений; б) результат будет иметь только первый порядок точности. Используя настольную вычислительную машину или небольшую программу для ЭВМ, можно проверить, что ошибка, связанная с нарушением ограниченности решения, продолжает существовать при $\Delta x \to 0$.

**3.27.** Рассмотреть гидродинамическую задачу, в которой для уравнений, записанных через функцию тока $\psi$ и вихрь $\zeta$, на стенке ставятся граничные условия прилипания. Рассмотреть течение в замкнутой прямоугольной области с одной подвижной стенкой в том случае, когда на всех стенках ставится условие прилипания. Исходя из граничных условий $u = 0$ (или $u = 1$ на движущейся «крышке») и $v = 0$, получаем граничные условия для функции тока:

$$\psi = 0 \quad \text{(или какая-либо другая постоянная)} \qquad \text{(а)}$$

и

$$\partial\psi/\partial n = 0 \quad \text{(или 1 на «крышке»)}. \qquad \text{(б)}$$

Чтобы упростить задачу, рассмотрим случай, когда $\mathrm{Re} = 0$ (течение Стокса). Тогда для стационарной задачи уравнения сводятся к линейному бигармоническому уравнению

$$\nabla^4 \psi = 0. \qquad \text{(в)}$$

Решить бигармоническое уравнение, расщепляя его на два уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 \psi = \zeta, \qquad \text{(г)}$$

$$\nabla^2 \zeta = 0. \qquad \text{(д)}$$

Показать, что при решении уравнения (г) можно ставить условие (а), а при решении уравнения (д) — условие (б), но для уравнения (д) нельзя брать условие (а), так же как и условие (б) для решения уравнения (г). (См. разд. 3.3.2.)

**3.28.** а) Решить на ЭВМ плоскую задачу о течении в замкнутой прямоугольной области с одной подвижной границей. В качестве характерной скорости выбрать скорость «крышки». При числе Рейнольдса $\mathrm{Re} = 10$ воспользоваться грубой сеткой с размерами шагов $\Delta x = \Delta y = {}^1/_4$. Применить для уравнения переноса вихря схему с разностями вперед по времени и централь-

ными разностями по пространственным переменным, а для решения уравнения Пуассона — метод последовательной верхней релаксации. Значение вихря на стенке вычислять с первым порядком точности. Подтвердить заключение о сходимости решения.

б) Повторить решение задачи а) с граничным условием заданного постоянного «ветрового напряжения» на движущейся «крышке», т. е. при $\zeta_{\text{крыш}} = c$.

**3.29.** Рассмотреть стационарное модельное уравнение в одномерном случае. Показать, что при $u > 0$ и $\alpha > 0$ граничных условий

$$u(0) = a, \quad u^N(0) = b,$$

где $u^N$ означает производную $N$-го порядка, достаточно для определения решения. Проверить достаточность граничных условий в особых случаях, когда $u = 0$ или $\alpha = 0$.

**3.30.** На примере стационарного модельного уравнения в одномерном случае исследовать появление пилообразных осцилляций в решении, когда на выходной границе становится градиентное условие $\partial\zeta/\partial x = S \neq 0$.

**3.31.** Вывести уравнение Пуассона для давления (3.581а).

**3.32.** Вывести связь между производной от давления по касательной к стенке и производной от вихря по нормали к этой стенке (см. Пирсон [1965а])

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial \zeta}{\partial n}.$$

Заметим, что однозначность $P$ накладывает следующее условие на контурный интеграл по поверхности тела:

$$\oint (\partial\zeta/\partial n)\, ds = 0.$$

Недостаток численного решения, связанный с невозможностью удовлетворить этому условию в конечно-разностной форме, можно трактовать как ошибку, связанную с нарушением свойства консервативности при вычислении вихря на стенке, и использовать в качестве показателя сходимости аппроксимации.

**3.33.** Для жесткого уравнения $dT/dt = aT$ написать явную схему, «полностью неявную» схему и схему Кранка — Николсона. Найти условия статической и динамической устойчивости.

**3.34.** Вывести уравнение переноса вихря (3.609), разд. 3.7.6, для случая среды с переменными свойствами.

*Глава 4*

**4.1.** Проверить приведение к безразмерному виду уравнений (4.42) и (4.43).

**4.2.** Вывести уравнение (4.52).

*Глава 5*

**5.1.** Показать, что для адиабатического течения $u + a \geqslant a_0$ и что для подобных течений критическое условие устойчивости по числу Куранта имеет место при максимальной скорости.

*5.2. Запрограммировать схему Лакса для задачи об одномерном распространении ударной волны. Применить фиксированные условия на входной границе и принять условие нулевого градиента на выходной границе. При $\gamma = 1.4$ для скачка с отношением давлений 4.978 принять параметры перед скачком $\rho = 1$, $E = 2.5$, $u = 0$; тогда параметры за скачком будут $\rho = 2.812$, $E = 16.0489$, $u = 1.601$. В начальный момент времени параметры за ударной волной можно задать в точке $i = 1$, а перед ударной волной — в точках от $i = 2$ до $IL = 50$. Провести расчеты при различных значениях числа Куранта, в частности обнаружить диффузию при $\Delta t = 0$.

*5.3. Выполнить предыдущую задачу для схемы с конечными разностями против потока. Исследовать поведение осцилляций за ударной волной при изменении $\Delta t$ и отношения давлений на скачке.

*5.4. Выполнить задачу 5.2 для любой описанной в разд. 5.4 схемы с явной искусственной вязкостью. (Можно указать каждому студенту, какой именно схемой он должен заняться.)

*5.5. Выполнить задачу 5.2 для любой описанной в разд. 5.5 схемы с неявной искусственной вязкостью.

*5.6. При помощи любой из программ, разработанных для задачи 5.2, опробовать различные начальные условия, при которых в начальный момент времени ударная волна размазывается по нескольким ячейкам.

5.7. Применить схему Лакса — Вендроффа к модельному уравнению диффузии $\partial\zeta/\partial t = \alpha\partial^2\zeta/\partial x^2$. Показать, что получающаяся при этом конечно-разностная схема с пятиточечным по пространству шаблоном условно устойчива и условие устойчивости имеет вид $d \equiv \alpha\Delta t/\Delta x^2 \leqslant 1/2$. (Эту задачу предложил д-р Ф. Уорминг.)

5.8. Разработать схему для расчета одномерного распространения ударной волны, основанную на схеме Крокко для вязкого газа и введении явной искусственной вязкости.

*5.9. Опробовать схему, построенную в предыдущей задаче, на расчетах и сравнить полученные результаты с результатами по другим схемам.

*5.10. Применить одну из явных схем расчета уравнения переноса вихря в несжимаемой жидкости (например, схему Дюфорта — Франкела, схему Хойна или явную схему метода чередующихся направлений) к задаче об одномерном распространении ударной волны, вводя при этом искусственную вязкость.

5.11. Определить точность способа отражения для задания граничных условий на конце закрытой ударной трубы в одномерном течении. Рассмотреть уравнения как для вязкого, так и для невязкого газа в расчетных сетках первого и второго типов (см. Тайлер и Эллис [1970], а также Уоткинс [1970]).

5.12. Выяснить, как применение способа отражения для задания граничных условий в расчетной сетке второго типа влияет на аппроксимацию вязких членов со смешанными производными.

5.13. Показать, что вблизи стенки с прилипанием аппроксимация $\delta P/\delta x$ имеет формальный второй порядок точности при расчете плотности на гибридной сетке, как это было рекомендовано в разд. 5.7.2.в.

*5.14. Решить численно задачу о дозвуковом течении газа в замкнутой прямоугольной области с одной подвижной границей. Положить на «крышке» $M = 1$ и постоянную температуру стенки $T_0$. Применить уравнения с постоянными коэффициентами переноса и схему Брайловской или схему Чена — Аллена. Необходимо следить, чтобы сеточное число Рейнольдса было меньше 2. (Эта задача довольно трудна для программирования.)

*Глава 6*

6.1. Применить преобразование экспоненциального растяжения (6.9) к уравнению переноса вихря в консервативной форме (2.12). Будет ли полученное уравнение консервативным в каком-либо смысле?

6.2. Показать, что для уравнения неразрывности в цилиндрических координатах в осесимметричном случае

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho v)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0$$

схема с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным (которая может быть неустойчивой) «консервативна» в смысле метода контрольного объема из разд. 3.1.3. Показать, что она не консервативна в смысле дивергентности.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Вопросы, относящиеся к вычислительной гидродинамике, излагаются в следующих книгах: Вазов и Форсайт [1960], Рихтмайер [1957], Саульев [1964], Яненко [1967], Патанкар и Сполдинг [1967б], Рихтмайер и Мортон [1967], Эймс [1965, 1969], Зенкевич [1967], Митчелл [1969], Госмэн с соавторами [1969]. Читатель может обратиться также к сборнику работ советских авторов под редакцией Рослякова и Чудова [1963], Трудам двух конференций по численным методам в гидродинамике, сборнику работ AIAA под редакцией Чу [1968] и в первую очередь к продолжающейся изданием серии Methods of Computational Physics (в настоящее время вышло девять томов), выпускаемой издательством Академик Пресс под общей редакцией Б. Олдера, С. Фернбаха и М. Ротенберга.

Результаты текущих исследований можно найти в следующих журналах: Journal of Computational Physics, AIAA Journal, Journal of Fluid Mechanics, The Physics of Fluids, Numerical Methods in Engineering, AIChE Journal, ASME Journal of Heat Transfer, Mathematics of Computation, Computer and Fluids [1]).


Аальто (Aalto S. K.) [1967]. An iterative procedure for the solution of nonlinear equations in a Banach space. — MRC-TSR-774, Math. Res. Center, Madison, Wisconsin.

Абарбанель, Беннетт, Брандт, Гиллис (Abarbanel S., Bennett S., Brandt A., Gillis J.) [1970]. Velocity profiles at low Reynolds numbers. — J. Appl. Mech., v. 37, No. 1, p. 2—4. [Имеется перевод: Профили скорости потока


---

[1]) Наряду с перечисленными здесь журналами укажем следующие советские периодические издания: Журнал вычислительной математики и математической физики; Известия АН СССР, Механика жидкости и газа; Журнал прикладной механики и технической физики; Ученые записки ЦАГИ; Численные методы механики сплошной среды (Новосибирск). Вообще следует отметить, что ссылки автора на труды советских ученых носят в значительной мере случайный характер. В связи с этим мы сочли необходимым включить в настоящее издание дополнительный список литературы, содержащий, правда, только основные книги отечественных авторов.

При подготовке второго издания автор оставил почти без изменения список литературы, который практически ограничивается работами, вышедшими до 1972 г., и естественно требует уточнений. Укажем, например, что вышли Труды еще четырех конференций по численным методам в гидродинамике и что серия Methods of Computational Physics насчитывает сейчас уже шестнадцать томов (имеются переводы томов 3, 9, 10 и 16: Вычислительные методы в гидродинамике. — М.: Мир, 1967; Вычислительные методы в физике плазмы. — М.: Мир, 1974; Вычислительные методы в физике атомных молекулярных столкновений. — М.: Мир, 1974; Управляемый термоядерный синтез. Под ред. Дж. Киллина. — М.: Мир, 1979). — *Прим. ред.*

при малых числах Рейнольдса. — Прикладная механика, Мир, № 1, с. 1—3.]
Абарбанель, Гольдберг (Abarbanel S., Goldberg M.) [1971]. Numerical solution of quasi-conservative hyperbolic systems: the cylindrical shock problem. — Tel-Aviv Univ., Israel.
Абарбанель, Цвас (Abarbanel S., Zwas G.) [1969]. An iterative finite-difference method for hyperbolic system. — Math. of Comput., p. 549—565.
Аббетт (Abbett M.) [1970]. The Mach disc in underexpanded exhaust plumes. — AIAA Paper No. 70-231. AIAA 8th Aerospace Sciences Meeting, New York, January 19—21, 1970.
Абботт (Abbott M. B.) [1966]. An introduction to the method of characteristics. — New York: Americ. Elsevier Publ. Company, Inc.
Авлеева В. Х. [1970]. Экспериментальное исследование теплообмена шара и пластины в сверхзвуковом потоке разреженного газа. — Изв. АН СССР, МЖГ, № 2, с. 191—196.
AGARD [1968]. Transonic aerodynamics.
Адамсон (Adamson T. C.) [1968]. Solutions for supersonic rotational flow around a corner using a new coordinate system. — J. Fluid Mech., v. 34, Part 4, p. 735—758.
Азиз (Aziz K.) [1966]. A numerical study of cellular convection. — Ph. D. Thes., Rice Univ., Houston, Texas.
Азиз, Хеллумс (Aziz K., Hellums J. D.) [1967]. Numerical solution of the three-dimensional equations of motion for laminar natural convection. — Phys. of Fluids, v. 10, No. 2, p. 314—324.
Аккерман (Ackerman R. C.) [1971] Boundary-layer separation at a free streamline — finite difference calculations. — In: Holt [1971].
Алексидзе М. А., Пертая К. В. [1966]. Универсальные программы решения методом конечных разностей плоской внутренней задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. — Тбилиси: Мецниереба.
Аллен, Саусвелл (Allen D. N. de G., Southwell R. V.) [1955]. Relaxation methods applied to determine the motion in two dimensions of a viscous fluid past a fixed cylinder. — Quart. J. of Mech. and Appl. Math., v. 8, p. 129—145.
Аллен (Allen J. S.) [1968]. Numerical solutions of the compressible Navier — Stokes equations for the laminar near wake in supersonic flow. — Ph. D. Diss., Princeton Univ., Princeton, New Jersey.
Аллен, Чен (Allen J. S., Sheng S. I.) [1970]. Numerical solutions of the compressible Navier — Stokes equations for the laminar near wake. — Phys. of Fluids, v. 13, No. 1, p. 37—52.
Амсден, Харлоу (Amsden A. A., Harlow F. H.) [1964]. Slip instability — Phys. of Fluids, v. 7, p. 327—334.
— — [1965]. Numerical calculation of supersonic wake flow. — AIAA J., v. 3, No. 11, p. 2081—2086. [Имеется перевод: Численный расчет сверхзвукового течения в следе. — РТК, т. 3, № 11, с. 128.]
— — [1968]. Transport of turbulence in numerical fluid dynamics. — J. of Comput. Phys., v. 3, p. 94—110.
— — [1970a]. The SMAC method: A numerical technique for calculating incompressible fluid flows. — LA-4370, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico.
— — [1970б]. A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations. — J. of Comput. Phys., v. 6, p. 322—325.
Андерсон (Anderson D. A.) [1974]. A comparison of numerical solution to the inviscid equations of fluid motion. — J. of Comput. Phys. v. 15, No. 1, p. 1—20.
Андерсон (Anderson J. D., Jr.) [1969a]. A time-dependent quasi-one-dimensional analysis of populations inversions in an expanding gas. — NOLTR 69-200, United States Naval Opdnance Lab., White Oak, Maryland.

— [1969б]. A time-dependent analysis for vibrational and chemical nonequilibrium nozzle flows. — AIAA Paper No. 69-668, AIAA Fluid and Plasma Dynamics Conference, San Francisco, California, June 16—18, 1969.
— [1970а]. A time-dependent analysis for vibrational and chemical nonequilibrium nozzle flows. — AIAA J., v. 8, No. 3, p. 545—550. [Имеется перевод: Расчет течения в сопле при наличии колебательной и химической неравновесности методом установления. — РТК, т. 8, № 3, с. 201—208.]
— [1970б]. Time-dependent solutions of nonequilibrium nozzle flows — A sequel. — AIAA J., v. 8, No. 12, p. 2280—2282. [Имеется перевод: Расчет неравновесного течения в сопле методом установления (продолжение). — РТК, т. 8, № 12, с. 207—208.]
Андерсон, Прейзер, Рубин (Anderson J. L., Preiser S., Rubin E. L.) [1968]. Conservation form of the equations of hydrodynamics in curvilinear coordinate systems. — J. of Comput. Phys., v. 2, p. 279—287.
Андерсон (Anderson O. L.) [1967]. Numerical solutions of the compressible boundary layer equations for rotating axisymmetric flows. — Ph. D. Diss., Rensselaer Polytechnic Inst., Troy, New York.
Анонимное издание (Anon.) [1953]. Equations, tables and charts for compressible flow. — NACA TR-1135.
Анучина Н. Н. [1964]. Разностные схемы решения задачи Коши для гиперболических симметричных систем. — ДАН СССР, т. 154, № 2, с. 247—250.
Апелькранс (Apelkrans M. Y. T.) [1968]. On difference schemes for hyperbolic equations with discontinuous initial values. — Math. of Comput., v. 22, No. 103, p. 525—540.
Апельт (Apelt C. J.) [1969]. Hartmann flow in annular channels. Part 2. Numerical solutions for low to moderate Hartmann numbers. — J. Fluid Mech., v. 37, Part 2, p. 209—229.
Аракава (Arakawa A.) [1966]. Computational design of longterm numerical integration of the equations of fluid notion. I. Two-dimensional incompressible flow. — J. of Comput. Phys., v. 1, No. 1, p. 119—143.
Аргирис, Маречек, Шарпф (Argyris J. H., Mareczek G., Scharpf D. W.) [1970]. Two- and three-dimensional flow analysis using finite elements. — Nuclear Engineering and Design, v. 11, No. 2, p. 230—236.
Армитейдж (Armitage J. V.) [1967]. The Lax — Wendroff method applied to axial symmetric swirl flow. — In: Blanch Anniversary Volume, Aerospace Res. Lab,. United States Air Force.
Армстронг, Нилсон (Armstrong T. P., Nielson C. W.) [1970]. Initial comparison of transfer and Particle-In-Cell methods of collisionless plasma simulation. — Phys. of Fluids, v. 13, No. 7, p. 1880—1881.
Арнасон, Браун, Ньюбург (Arnason G., Brown P. S., Newburg E. A.) [1967]. A case study of the validity of finite difference approximations in solving dynamic stability problems. — J. of Atmospheric Sci., v. 24, p. 10—17.
Арнасон, Гринфилд, Ньюбург (Arnason G., Greenfield R. S., Newburg E. A.) [1968]. A numerical experiment in dry and moist convection including the rain stage. — J. of Atmospheric Sci., v. 25, No. 3, p. 404—415.
Архангельский Н. А. [1971]. Алгоритм численного решения задачи о цилиндрическом взрыве с учетом противодавления методом сеток. — ЖВМ и МФ, т. 11, № 1, с. 222—236.
Ахамед (Ahamed S. V.) [1970]. Application of the acceleration of convergence technique to numerical solution of linear and non-linear vector field problems with numerous sources. — J. of Engineering Sci., v. 8, No. 5, p. 403—413.
Бабенко К. И., Воскресенский Г. П. [1961]. Численный метод расчета пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. — ЖВМ и МФ, т. 1, № 6, с. 1051—1060.
Бабушка (Babuska I.) [1970]. The finite element method for elliptic equations with discontinuous coefficients. — Computing, v. 5, No. 3, p. 207—213.

Базби, Голуб, Нилсон (Buzbee B. L., Golub G. H., Nielson C. W.) [1969]. The method of odd/even reduction and factorization with application to Poisson's equation. — La-4141, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico. — — — [1970a]. The method of odd/even reduction and factorization with application to Poisson's equation. Part II. — LA-4288, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico.

Базби, Дорр, Джордж, Голуб (Buzbee B. L., Dorr F. W., George J. A., Golub G. H.) [1970б]. The direct solution of the discrete Poisson equation on irregular regions. — STAN-CS-71-195, Computer Sci. Dep., Stanford Univ., Stanford, California.

Базжин А. П. [1971]. Some results of calculations of flows around conical bodies at large incidence angles. — In: Holt [1971].

Бакингем, Бирнбаум, Хофман (Buckingham A. C., Birnbaum N., Hofmann R.) [1970]. VISELK 3, computational studies of transient viscous flows, Part 2: Development of planar shock wave; a shock tube starting simulation. — Rep. No. PITR-70-4, Part 2, Physics Internat. Company, San Leandro, California.

Бакингем (Buckingham R. A.) [1962]. Numerical methods. — London: Sir Isaac Pitman and Sons, Ltd.

Бао (Pao H.-P.) [1970]. A numerical computation of a confined rotating flow.— J. Appl. Mech., July, p. 480—487. [Имеется перевод: Численный расчет течений, вращающихся в замкнутом сосуде. — Прикладная механика, Мир, № 2, с. 230.]

Бао (Pao Y.-H.) [1969a]. Origin and structure of turbulence in stably stratified media. — In: Clear air turbulence and its detection. — Plenum Press.

Бао (ред.) (Pao Y.-H., ed.) [1969б]. Papers of Symposium on Turbulence, Abstracts, Seattle, Washington, June 23—27, 1969.

Бао, Догерти (Pao Y.-H., Daugherty R. J.) [1969]. Time-dependent viscous incompressible flow past a finite flat plate. — Boeing Sci. Res. Lab., D1-82-0822.

Баракат, Кларк (Barakat H. Z., Clark J. A.) [1966]. Analytical and experimental study of the transient laminar natural convection flows in partially filled liquid containers. — In: Proc. of the Third Internat. Heat Transfer Conference, Vol. II. — Chicago, Illinois, p. 152.

Барнс (Barnes S. L.) [1967]. Effects of large-scale subsidence on cellular convection in the atmosphere: a numerical experiment. — Ph. D. Diss., Univ. of Oklahoma, Norman.

Барнуэлл (Barnwell R. D.) [1967]. Numerical results for the diffraction of a normal shock wave by a sphere and for the subsequent transient flow. — NASA TR R-268.

Барнуэлл (Barnwell R. W.) [1971]. Three-dimensional flow around blunt bodies with sharp shoulders. — AIAA Paper No. 71-56, AIAA 9th Aerospace Sciences Meeting, New York, January 25—27, 1971.

Бастианон (Bastianon R. A.) [1969]. Unsteady solution of the flowfield over concave bodies. — AIAA J. v. 7, No. 3, p. 531—533. [Имеется перевод: Нестационарное решение для поля течения около вогнутых тел. — РТК, т. 7, № 3, с. 178—180.]

Батлер (Butler T. D.) [1967]. Numerical solutions of hypersonic scharp-leading-edge flows. — Phys. of Fluids, v. 10, No. 6, p. 1205—1215. [Имеется перевод: Численное решение задачи о гиперзвуковом обтекании острой передней кромки. — Механика, 1968, № 4 (110), с. 91—108.]

— [1971]. LINC method extensions. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Развитие метода LINK. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 146—155.]

Батчер (Butcher B. M.) [1971]. Numerical techniques for one-dimensional rate-dependent porous material compaction calculations. — SC-RR-710112, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico.

Баум, Кинг, Денисон (Baum E., King H. H., Denison M. R.) [1964]. Recent studies of the laminar base-flow region. — AIAA J., v. 2, p. 1527—1534. [Имеется перевод: Новые исследования ламинарного течения в донной области. — РТК, т. 2, № 9, с. 12—21.]

Баум, Ндефо (Baum E. Ndefo D. E.) [1973]. — In: Proc. AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Palm Springs, July 1973.

Бауэр, Цумвальт, Фила (Bauer P. J., Zumwalt G. W., Fila L. J.) [1968]. A numerical method and an extention of the Korst jet mixing theory for multispecie turbulent jet mixing. — AIAA Paper No. 68-112, AIAA 6th Aerospace Sciences Meeting, New York, January 22—24, 1968.

Бахвалов Н. С. [1959]. О численном решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа. — Вестник МГУ, № 5, с. 171—195.

Баэр, Кинг (Baer F., King R. L.) [1967]. A general computational form for a class of nonlinear systems incorporating both spectral and finite-difference approximations. — J. of Comput. Phys., v. 2, p. 32—60.

Баэр, Симонс (Baer F., Simons T. J.) [1968]. Computational stability and time truncation of coupled nonlinear equations with exact solutions. — Atmospheric Science Paper No. 131, Dep. of Atmospheric Sci. Colorado State Univ., Fort Collins.

Бейли (Bailey H. E.) [1969]. Numerical integration of the equations governing the one-dimensional flow of a chemically reactive gas. — Phys. of Fluids, v. 12, No. 11, p. 2292—2300.

Бейли, Шампайн, Уолтмен (Bailey P. B., Shampine L. F., Waltman P. E.) [1968]. Nonlinear two point boundary value problems. — New York: Academic Press.

Беллман, Черри, Уинг (Bellman R., Cherry I., Wing G. M.) [1958]. A note on the numerical integration of a class of non-linear hyperbolic equations. — Quart. J. Appl. Math., v. 16, p. 181—183.

Белломо (Bellomo E.) [1969]. Transverse disturbances in plane Poiseuille flow. Two examples as a check on a numerical program for finite-amplitude disturbances in parallel flows. — Meccanica, v. 4, No. 2, p. 109—121.

Белоцерковский О. М. [1970]. Numerical methods of some transsonic aerodynamics problems. — J. of Comput. Phys., v. 5, p. 587—611.

— [1971]. On the calculation of gas flows with secondary floating shocks. — In: Holt [1971].

Белоцерковский О. М., Попов Ф. Д., Толстых А. И., Фомин В. Н., Холодов А. С. [1970]. Численное решение некоторых задач газовой динамики. — ЖВМ и МФ, т. 10, № 2, с. 401—416.

Бенгтсон (Bengtsson L.) [1964]. Some numerical experiments on the effect of the variation of static stability in two-layer quasi-geostrophic models. — Tellus, v. 16, No. 3, p. 327—348.

Бенисон, Рубин (Benison G. I., Rubin E. L.) [1969]. A difference method for the solution of the unsteady quasi-one-dimensional viscous flow in a divergent duct. — PIBAL Rep. No. 69-9, Polytechn. Inst. of Brooklyn, New York.

Бенкстон, Мак-Элигот (Bankston C. A., McEligot D. M.) [1969]. A numerical method for solving the boundary layer equations for gas flow in circular tubes with transfer and property variations. — LA-4149, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico.

Берд (Bird G. A.) [1969а]. The structure of rarefied gas flows past simple aerodynamic shapes. — J. Fluid Mech., v. 36, Part 3, p. 571—576.

— [1969б]. Numerical studies in gas dynamics. — Sydney Univ., Australia, Rept. on Research Grant AF-AFOSR-915-67.

— [1969в]. The formation and reflection of shock waves. — In: Proc. of the Symposium on Problems to Rarefied Gas Dynamics, v. 1, p. 301—311.

— [1970а]. Breakdown of translational and rotational equilibrium in gaseous expansions. — AIAA J., v. 8, No. 11, p. 1993—2003. [Имеется перевод: От-

клонение поступательных и вращательных степеней свободы газа от равновесия в процессах расширения. — РТК, т. 8, № 11, с. 96—104].
— [1970б]. Direct simulation and the Boltzmann equation. — Phys. of Fluids, v. 13, No. 11, p. 2676—2681.
Берд Р. Б., Стьюарт В., Лайтфут Е. (Bird R. B., Stewart W. E., Lightfoot E. N.) [1960]. Transport phenomena. — New York: John Wiley and Sons, Inc. [Имеется перевод: Явления переноса. — М.: Химия, 1974.]
Бёрджес (Burgess W. P.) [1971]. Extrapolation techniques applied to parabolic partial differential equations. — Ph. D. Diss., Princeton Univ.
Бёрдсли (Beardsley R. C.) [1969]. Alternative finite difference approximations for the viscous generation of vorticity at a stationary fluid boundary. — Rep. GRD/69-2. Mass. Inst. of Technology.
— [1971]. Integration of the planetary vorticity equation on a parabolic circular grid. — J. of Comput. Phys., v. 7, p. 273—288.
Бёрдсолл, Фасс (Birdsall C. K., Fuss D.) [1969]. Clouds-in-clouds, clouds-in-cells physics for many-body plasma simulation. — J. of Comput. Phys., v. 3, No. 4, p. 494—511.
Бёрике (Boericke R. R.) [1971]. Laminar boundary layer on a cone at incidence in supersonic flow. — AIAA J., v. 9, No. 3, p. 462—468. [Имеется перевод: Ламинарный пограничный слой на конусе, установленном под углом атаки в сверхзвуковом потоке. — РТК, т. 9, № 3, с. 143—151.]
Бернал, Уайтмен (Bernal M. J. M., Whiteman J. R.) [1968]. Numerical treatment of biharmonic boundary value problems with re-entrant boundaries. — MRC TSR 914, Math. Res. Center, Madison, Wisconsin; Computer J., 1970, p. 87—91.
Бёрстейн (Burstein S. Z.) [1965]. Finite-difference calculations for hydrodynamic flows containing discontinuities. — NYO-1480-33, Courant Inst. of Math. Sci., New York Univ., New York.
— [1966]. Finite-difference calculations for hydrodynamic flows containing discontinuities. — J. of Comput. Phys., v. 1, No. 2, p. 198—222.
Бёрстейн, Мирин (Burstein S. Z., Mirin A. A.) [1970]. Third order difference methods for hyperbolic equations. — J. of Comput. Phys., v. 5, p. 547—571.
— — [1971] Difference methods for hyperbolic equations using space and time split difference operators of third order accuracy. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Разностные методы для гиперболических уравнений, использующие для пространственных переменных и времени разностные операторы расщепления третьего порядка точности. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 120—125.]
Биззел, Конкас, Крейн, Саттерли (Bizzell G. O., Concus P., Crane G. E., Satterlee H. M.) [1970]. Low gravity draining from hemispherically bottomed cylindrical tanks. — NASA CR-72718.
Биллиг, Гэлли (Billig L. O., Galle K. R.) [1970]. A numerical method for calculating fully developed laminar velocity profiles from temperature profiles. — J. of Heat Transfer, v. 92, No. 2, p. 245—251. [Имеется перевод: Численный метод расчета полностью развитого профиля скоростей в ламинарном потоке на основе профилей температур. — Теплопередача, № 2, с. 36—42.]
Био (Biot M. A.) [1956]. Applied mathematics: An art and a science. — J. Aeronaut. Sci., May, p. 406—410.
Биркгоф, Варга, Янг (Birkgoff G., Varga R. S., Young D.) [1962]. Alternating direction implicit methods. — In: Advances in Computers, v. 3 (Alt F. L., ed.), Academic Press.
Блеветт (Blewett P. J.) [1970]. Method of computing fluid motion in two-dimensional cartesian or cylindrical coordinates by following lagrangian energy cells. — LA-4464, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico.
Блоттнер (Blottner F. G.) [1968]. Prediction of the electron number density distribution in the laminar air boundary layer on sharp and blunt bodies. —

AIAA Paper No. 68-733, AIAA Fluid and Plasma Dynamics Conference, Los Angeles, California, June 24—26, 1968.
— [1969]. Viscous shock layer at the stagnation point with nonequilibrium air chemistry. — AIAA J., v. 7, No. 12, p. 2281—2288. [Имеется перевод: Вязкий сжатый слой воздуха в передней критической точке с учетом химической неравновесности. — РТК, т. 7, № 12, с. 115—123].
— [1970]. Finite difference methods of solution of the boundary layer equations. — AIAA J., v. 8, No. 2, p. 193—199. [Имеется перевод: Конечно-разностные методы решения уравнений пограничного слоя. — РТК, т. 8, № 2, с. 3—18.]
— [1971]. Finite-difference methods for solving the boundary layer equations with second-order accuracy. — In: Holt [1971].
Блоттнер, Роуч (Blottner F. G., Roache P. J.) [1971]. Nonuniform mesh systems. — J. of Comput. Phys., v. 8, p. 498—499.
Блоттнер, Флюгге-Лотц (Blottner F. G., Flugge-Lotz I.) [1963]. Finite-difference computation of the boundary layer with displacement thickness interaction. — J. de Mecanique, v. 22, No. 4, p. 397—423.
Богачевский, Костофф (Bohachevsky I. O., Kostoff R. N.) [1971]. Hypersonic flow over cones with attached and detached shock waves. — AIAA Paper No. 71-55, AIAA 9th Aerospace Sciences Meeting, New York, January 25—27, 1971.
Богачевский, Мейтс (Bohachevsky I. O., Mates R. E.) [1966]. A direct method for calculation of the flow about an axisymmetric blunt body at angle of attack. — AIAA J., v. 4, No. 5, p. 766. [Имеется перевод: Прямой метод расчета течения около затупленного осесимметричного тела при угле атаки. — РТК, т. 4, № 5, с. 12—19.]
Богачевский, Рубин (Bohachevsky I. O., Rubin E. L.) [1966]. A direct method for computation of nonequilibrium flows with detached shock waves. — AIAA J., v. 4, No. 4, p. 600. [Имеется перевод: Прямой метод расчета неравновесных течений с отошедшей ударной волной. — РТК, т. 4, № 4, с. 33—42.]
Богачевский, Рубин, Мейтс (Bohachevsky I. O., Rubin E. L., Mates R. E.) [1965]. A direct method for computation of nonequilibrium flows with detached shock waves. — AIAA Paper No. 65-24, AIAA 2nd Aerospace Sciences Meeting, New York, January 25—27, 1965.
Бойнтон, Томсон (Boynton F. P., Thomson A.) [1969]. Numerical computation of steady, supersonic, two-dimensional gas flow in natural coordinates. — J. of Comput. Phys., v. 3, p. 379—398.
Борис (Boris J. P.) [1970]. The solution of partial differential equations using a symbolic style of Algol. — NRL Memo. Rep. 2168, Naval Res. Lab., Washington, D. C.
— [1971]. — NRL Memorandum Report 2357, Naval Res. Lab., Washington, D. C.
Боссел (Bossel H. H.) [1971]. Study of vortex flows at high swirl by an integral method using exponentials. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Исследование течений, индуцируемых вихрем с высокой степенью закрутки, при помощи интегрального метода с экспоненциальными аппроксимациями. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 230—241.]
Босуэлл, Верле (Boswell W. C., Jr., Werle M. J.) [1971]. Numerical solutions of the Navier — Stokes equations for incompressible uniform flow past a parabola: A study of finite grid size effects. — VPI-E-71-5, Virginia Polytechn. Inst. and State Univ.
Боули, Принс (Bowley W. W., Prince J. F.) [1971]. Finite element analysis of general fluid flow problems. — AIAA Paper No. 71-602, AIAA 4th Fluid and Plasma Dynamics Conference, Palo Alto, California, June 21—23, 1971.
Боуэн, Парк (Bowen S. W., Park C.) [1971]. Computer study of nonequilibrium excitation in recombining nitrogen plasma nozzle flows. — AIAA J., v. 9,

No. 3, p. 403—409. [Имеется перевод: Численное исследование неравновесного возбуждения в течениях рекомбинирующей плазмы азота через сопло. — РТК, т. 9, № 3, с. 183—191.]
Боэрс (Boers J. E.) [1969]. Digital computer solution of Laplace's equation including dielectric surfaces. — SC-RR-69-446, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico.
Бразье-Смит, Латам (Brazier-Smith P. R., Latham J.) [1969]. Numerical computations of the dynamics of the disintegration of a drop situated in an electric field. — Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, v. 312, p. 277—289.
Браиловская И. Ю. [1965]. Метод расчета течений с сильным вязким взаимодействием. — ДАН СССР, т. 162, № 1, с. 36—39.
— [1967а]. Расчет обтекания угла потоком вязкого сжимаемого газа. — Изв. АН СССР, МЖГ, № 3, с. 82—92.
— [1967б]. Разностный метод численного решения двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа. — В кн.: Вычислительные методы и программирование, вып. 7. — М.: Изд-во МГУ, с. 3—15.
Браиловская И. Ю., Кускова Т. В., Чудов Л. А. [1968]. Разностные методы решения уравнений Навье — Стокса (обзор) — В кн.: Вычислительные методы и программирование, вып. 11. — М.: Изд-во МГУ.
— — — [1970]. Difference methods of solving the Navier — Stokes equations. — Internat. Chemical Engineering, v. 10, No. 2, p. 228—236.
Брайен (Brian P. L. T.) [1961]. A finite-difference method of high-order accuracy for the solution of three-dimensional transient heat conduction problems. — Amer. Inst. of Chem. Eng. J., v. 7, No. 3, p. 367—370.
Брайен, Чайлдс (Bryan J. L., Childs B.) [1969]. Numerical solutions of diffusion type equations. — RE 4-69, Univ. of Houston, Houston, Texas.
Брайен (Bryan K.) [1963]. A numerical investigation of a nonlinear model of a wind-driven ocean. — J. Atmospheric Sci., v. 20, p. 594—606.
— [1966]. A scheme for numerical integration of the equations of motion on an irregular grid free of nonlinear instability. — U. S. Monthly Weather Rev., v. 94, No. 7, p. 39—40.
— [1969]. A numerical method for the study of the circulation of the world ocean. — J. of Comput. Phys., v. 4, p. 347—376.
Брайен, Кокс (Bryan K., Cox M. D.) [1970]. The calculation of large-scale ocean currents. — AIAA Paper No. 70-4, AIAA 8th Aerospace Sciences Meeting, New York, January 19—21, 1970.
Брандт, Гиллис (Brandt A., Gillis J.) [1969]. Asymptotic approach to Hartmann — Poiseiulle flows. — J. of Comput. Phys., v. 3, No. 4, p. 523—538.
Браун (Brown R. J.) [1967]. Natural convection heat transfer between concentric spheres. — Ph. D. Thes., Univ. of Texas, Austin.
Бреди (Brady W. G.) [1967]. Numerical analysis of two free-boundary problems in fluid dynamics. — AIAA Paper No. 67-217, AIAA 5th Aerospace Sciences Meeting, New York, January 23—26, 1967.
Бредшоу, Феррис (Bradshaw P., Ferriss D. H.) [1971]. Calculation of boundary-layer development using the turbulent energy equation: Compressible flow on adiabatic walls. — J. Fluid Mech., v .46, Pars 1, p. 83—110.
Бремлетт (Bramlette T. T.) [1971]. Plane Poiseuille flow of rarefied gas based on the finite element method. — Phys. of Fluids, v. 14, No. 2, p. 288—293.
Бреннен (Brennen C.) [1968]. A numerical solution of axisymmetric cavity flows, Parts I and II. — Ship Report No. 114, Nat. Phys. Lab.
— [1969]. A numerical solution of axisymmetric cavity flows. — J. Fluid Mech., v. 37, Part 4, p. 671—688.
— [1971]. Some numerical solutions of unsteady free surface wave problems using the lagrangian description of the flow. — In: Holt [1971].
Бриггс (Briggs B. R.) [1960]. The numerical calculation of flow past conical bodies supporting elliptic conical shock waves at finite angles of inciden-

ce. — NASA TN D-340, National Aeronautics and Space Administration, Ames Res. Center, Moffett Field, California.
Брили (Briley W. R.) [1968]. Time-dependent rotating flow in cylindrical container. — Ph. D. Thes., Texas Univ., Austin.
— [1970]. A numerical study of laminar separation bubbles using the Navier — Stokes equations. — Rep. J110614-1, United Aircraft Res. Lab., East Hartford, Connecticut.
— [1947]. Numerical method for predicting three-dimensional steady viscous flow in ducts. — J. of Comput. Phys., v. 14, No. 1, p. 8—28.
Брили, Макдональд (Briley W. R., McDonald H.) [1975]. — In: Proc. Fourth Internat. Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics (Richtmyer R. D., ed.). — Berlin: Springer-Verlag, p. 105—110. [Имеется перевод: Неявный метод решения уравнений Навье — Стокса для трехмерных сжимаемых течений. — В кн.: Численное решение задач гидромеханики. Под ред. Р. Рихтмайера. — М.: Мир, 1977, с. 194—202.]
Брили, Уоллс (Briley W. R., Walls H. A.) [1971]. A numerical study of time-dependent rotating flow in cylindrical container at low and moderate Reynolds numbers. — In: Holt [1971].
Бужо, Суль, Темам (Boujot J., Soule J. L., Temam R.) [1971]. Traitement numerique d'un probleme de magnetohydrodynamique. — In: Holt [1971].
Бук, Борис, Хейн (Book D. L., Boris J. P., Hain K.) [1975]. Flux-corrected transport. II: Generalizations of the method. — J. of Comput. Phys., v. 18, p. 248—283.
Булеев Н. И., Тимухин Г. И. [1969]. О численном решении уравнений гидродинамики для плоского потока вязкой несжимаемой жидкости. — Изв. СО АН СССР, сер. техн. наук., вып. 1, № 3, с. 14—24.
Бульярелло, Джексон (Bugliarello G., Jackson E. D., III) [1967]. Random walk simulation of convective diffusion from instantaneous point sources in a laminar field. — In: Developments in Mechanics, v. 3, Part 2, Dynamics and Fluid Mechanics (Proc. of the Ninth Midwestern Conference held at the Univ. of Wisconsin, Madison, August 16—18, 1965), p. 461—472.
Бунеман (Buneman O.) [1967]. Time-reversible difference procedures. — J. of Comput. Phys., v. 1, p. 517—535.
— [1969]. A compact non-iterative Poisson solver. — SUIPR Rep. No. 294, Stanford Univ., Stanford, California.
Бургграф (Burggraf O. R.) [1966]. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows. — J. Fluid Mech., v. 24, Part 1, p. 113—152. [Имеется перевод: Аналитическое и численное исследование структуры установившихся срывных течений. — Механика, 1966, № 6 (100), с. 51—90.]
— [1970]. Computational study of supersonic flow over backward-facing steps at high Reynolds number. — ARL-70-0275, Aerospace Res. Lab., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio.
Бургграф, Стюартсон (Burggraf O. R., Stewartson K.) [1971]. The structure of the laminar boundary layer under a potential vortex. — In: Holt [1971].
Буро (Bourot J.) [1969]. The numerical calculation of Oseen hydrodynamic fields around a sphere. — Serie A — Sciences Mathematiques, v. 269, No. 21, p. 1017—1020.
Бурсье, Франсуа (Bourcier M., Francois C.) [1969]. Numerical integration of the Navier — Stokes equations in a square domain. — La Recherche Aerospatiale, No. 131, p. 23—33.
Бэшфорт, Адамс (Bashforth F., Adams J. C.) [1883]. An attempt to test the theories of capillary action by comparing the theoretical and measured forms of drops of fluid. — Cambridge Press.
Бюргерс (Burgers J. M.) [1948]. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. — In: Advances in Applied Mechanics, v. 1. — New York: Academic Press, p. 171—199. [Имеется перевод: Об одной математической

модели, иллюстрирующей теорию турбулентности. — В кн.: Проблемы механики. Под ред. Р. Мизеса и Т. Кармана. — М.: ИЛ, 1955, с. 422—445.]
Вазов (Wasow W.) [1957]. Asymptotic development of the solution of Dirichlet's problem at analytic corners. — Duke Math. J., v. 24, p. 47—56.
Вазов В., Форсайт Дж. (Forsythe G. E., Wasow W.) [1960]. Finite difference methods for partial differential equations. — New York: Wiley. [Имеется перевод: Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. — М.: ИЛ, 1963.]
Вальо-Лорен, Миллер (Vaglio Laurin R., Miller G.) [1971]. A heuristic approach to three-dimensional boundary layers. — In: Holt [1971].
Ван (Wang C.-H.) [1969]. A method of setting up finite-difference schemes for prediction equations. — AFCRL-69-0099, Air Force Cambridge Res. Lab., L. G. Hanscom Field, Bedford, Mass.
Ван, Лонгуэлл (Wang Y. L., Longwell P. A.) [1964]. Laminar flow in the inlet section of parallel plates. — Amer. Inst. of Chem. Eng. J, v. 10, No. 3, p. 323—329.
Ван-Дайк (Van Dyke M. D.) [1958]. The supersonic blunt body problem — review and extension. — J. of Aeronaut. Sci., v. 25, p. 485. [Имеется перевод: Проблема сверхзвукового обтекания тупоносого тела. — Механика, 1958, № 5 (51).]
— [1961]. Second order compressible boundary layer theory with application to blunt bodies in hypersonic flow. — In: Hypersonic Flow Research (Ridell F. R., ed.). — New York: Academic Press.
— [1962a]. Higher approximations in boundary-layer theory, Part 1, General analysis. — J. Fluid Mech., v. 14, p. 161—177.
— [1962б]. Higher approximations in boundary-layer theory, Part 2, Application to leading edges. — J. Fluid Mech., v. 14, p. 481—495.
Ван де Вурен, Дейкстра (van de Vooren A. L., Dijkstra D.) [1970]. The Navier — Stokes solution for laminar flow past a semi-infinite flat plate. — J. of Eng. Math., v . 4, No. 1, p. 9—27.
Ван де Хулст (van de Hulst H. C.) [1968]. Asymptotic fitting, a method for solving anisotropic transfer problems in thick layers. — J. of Comput. Phys., v. 3, p. 291—306.
Ван Леер (van Leer B.) [1969]. Stabilization of difference schemes for the equations of inviscid compressible flow by artificial diffusion. — J. of Comput. Phys., v. 3, No. 4, p. 473—485.
Варапаев В. Н. [1968]. Численное исследование периодического струйного течения вязкой несжимаемой жидкости. — Изв. АН СССР, МЖГ, № 3, с. 170—176.
— [1969]. Течение вязкой жидкости в начальном участке двумерного канала с пористыми стенками. — Изв. АН СССР, МЖГ, № 4, с. 178—181.
Варга (Varga R. S.) [1962]. Matrix iterative analysis. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
Варжанская Т. С. [1969]. Об одном способе постановки граничных условий для задач течения вязкой жидкости. — Изв. АН СССР, МЖГ, № 3, с. 142—144.
Васильев О. Ф. [1971]. Numerical solution of the non-linear problems of unsteady flows in open channels. — In: Holt [1971].
Вахпресс (Wachpress E. L.) [1966]. Iterative solution of elliptic systems. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
— [1968]. Solution of the ADI minimax problem. — KAPL-3448, Knolls Atomic Power Lab., Schenectady, New York.
Вебер (Weber M. E.) [1969]. Improving the accuracy of Crank — Nicolson numerical solutions to the heat-conduction equations. — J. of Heat Transfer, v. 91, No. 1, p. 183—191. [Имеется перевод: Повышение точности численного метода Кранка — Николсона решения уравнения теплопроводности. — Теплопередача, т. 91, № 1, с. 160.]

Вегстаф, Ли (Wagstaff R. A., Lee S. S.) [1971]. Higher order effects in laminar boundary layer theory for curved surfaces. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Эффекты высшего порядка в теории ламинарного пограничного слоя на искривленных поверхностях. — В кн.: Численные методы в механике жидкости. — М.: Мир, 1973, с. 197—206.]

Вейнбаум (Weinbaum S.) [1966]. Rapid expansion of a supersonic boundary layer and its application to the near wake. — AIAA J., v. 4, No. 2, p. 217—227. [Имеется перевод: Анализ быстрого расширения сверхзвукового пограничного слоя и его применение к проблеме ближнего следа. — РТК, т. 4, № 2, с. 35—47.]

Вейнбергер (Weinberger H. F.) [1965]. Partial differential equations. — New York: Blaisdell Publishing Co.

Вейнстейн, Стоун, Кван (Weinstein H. G., Stone H. L., Kwan T. V.) [1969]. Iterative procedure for solution of systems of parabolic and elliptic equations in three dimensions. — Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals, v. 8, p. 281—287.

Вейс (Weise D.) [1968]. On the use of similar solutions for testing laminar compressible boundary layer methods. — RM-433, Grumman Res. Department, Grumman Aircraft Engineering Corporation, Bethpage, New York.

Вейс, Вейнбаум (Weiss R. F., Weinbaum S.) [1966]. Hypersonic boundary-layer separation and the base flow problem. — AIAA J., v. 4, No. 8, p. 1321—1330. [Имеется перевод: Отрыв гиперзвукового пограничного слоя и проблема течения в донной области. — РТК, т. 4, № 8, с. 12—23.]

Вейс, Гринберг, Биондо (Weiss R. F., Greenberg R. A., Biondo P. P.) [1966]. A new theoretical solution of the laminar, hypersonic near wake, Part I, Formation of the method of solution. — BSD-TR-66-258, Avco Everett Res. Lab., Res. Rept. 256, Everett, Mass.

Вемури (Vemuri V.) [1970]. An initial value formulation of the CSDT method of solving partial differential equations. — AFIPS Conference Proc., v. 36, p. 403—407.

Вендрофф (Wendroff B.) [1960]. On centered difference equations for hyperbolic systems. — J. SIAM, v. 8, p. 549—555.

— [1961]. The structure of certain finite difference schemes. — SIAM Rev., v. 3, No. 3, p. 237—242.

— [1969]. A difference scheme for radiative transfer. — J. of Comput. Phys., v. 4, p. 211—229.

Верле, Уорном (Werle M. J., Wornom S. F.) [1970]. Longitudinal curvature and displacement speed effects on incompressible boundary layers. — VPI-E-70-24, Virginia Polytech. Inst., Blacksburg, Virginia.

Вернер (Werner W.) [1968]. Numerical solution of systems of quasilinear hyperbolic differential equations by means of the method of nebencharacteristics in combination with extrapolation methods. — Numerische Math., B. 11, S. 151—169.

Вероне (Veronis G.) [1968]. Large-amplitude Benard convection in a rotating fluid. — J. Fluid Mech., v. 31, Part 1, p. 113—139.

Видлунд (Widlund O. B.) [1967]. On difference methods for parabolic equations and alternating direction implicit methods for elliptic equations. — IBM J., March, p. 239—243.

Викторна, Стейгер (Victoria K. J., Steiger M. H.) [1970]. Solutions of the 2-D laminar near wake of a slender body in supersonic flow at high Reynolds number. — APP-0059 (S9990)-5, Aerospace Corporation, San Bernardino, California.

Виноград (Winograd S.) [1969]. Computational complexity. — IBM Watson Res. Center, Yorktown Heights, New York.

Вишневецкий (Vichnevetsky R.) [1968]. Analog/hybrid solution of partial differential equations in the nuclear industry. — Simulation, p. 269—281.

Владимирова Н. Н., Кузнецов Б. Г., Яненко Н. Н. [1966]. Численный расчет симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости. — В кн.: Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. — Новосибирск, с. 186—192.

Вогелар де (de Vogelaere R.) [1971]. The reduction of the Stefan problem to the solution of an ordinary differential equation. — In: Holt [1971].

Вогениц, Берд, Бродуэлл, Ранголдир (Vogenitz F. W., Bird G. A., Broadwell J. E., Rungaldier H.) [1968]. Theoretical and experimental study of low density supersonic flows about several simple shapes. — Paper No. 68-6, AIAA 6th Aerospace Sciences Meeting, New York, January 22—24, 1968.

Вогениц, Бродуэлл, Берд (Vogenitz F. W., Broadwell J. E., Bird G. A.) [1970]. Leading edge flow by the Monte Carlo direct simulation technique. — AIAA J., v. 8, No. 3, p. 504—510. [Имеется перевод: Моделирование течения в окрестности передней кромки по методу Монте-Карло. — РТК, т. 8, № 3, с. 150—158.]

Вогениц, Таката (Vogenitz F. W., Takata G. Y.) [1970]. Monte Carlo study of blunt body hypersonic viscous shock layers. — Seventh International Rarefied Gas Dynamics Symposium.

— — [1971]. Rarefied hypersonic flow about cones and flat plates by Monte Carlo simulation. — AIAA J., v. 9, No. 1, p. 94—100. [Имеется перевод: Моделирование обтекания конуса и плоской пластины разреженным гиперзвуковым потоком с помощью расчета по методу Монте-Карло. — РТК, т. 9, № 1, с. 113—122.]

Вольфштейн (Wolfshtein M.) [1968]. Numerical smearing in onesided difference approximations to the equations of non-viscous flow. — Imperial College of Sci. and Technology, London.

— [1970]. Some solutions of the plane turbulent impinging jet. — Paper No. 70-FE-27, Trans. ASME.

Вонка (Vonka V.) [1970]. CASES — an Algol program for solving diffusion type elliptic differential equations in a plane involving arbitrary conditions and shape. — RCN 123, Reactor Centrum Nederland, Petten.

Вуд (Wood W. L.) [1971]. Note on dynamic relaxation. — Internat. J. for Numerical Methods in Engineering, v. 3, January — March, p. 145—147.

Вудс (Woods L. C.) [1953]. The relaxation treatment of singular points in Poisson's equation. — Quart. J. Mech. and Appl. Math., v. 6, p. 163—183.

— [1954]. A note on the numerical solution of fourth order differential equations. — Aeronaut. Quart., v. 5, Part 3, p. 176.

Вудс, Данешиар (Woods W. A., Daneshyar H.) [1970]. Boundary conditions and initial value lines for unsteady homentropic flow calculations. — Aeronaut. Quart., v. 21, p. 145—162.

Вулис Л. А., Джаугаштин К. Е. [1968]. Численное решение задачи о развитии ламинарной струи в канале. — ПМТФ, № 6, с. 120—123.

Вьечелли (Viecelli J. A.) [1969]. A method for including arbitrary external boundaries in the MAC incompressible fluid computing technique. — J. of Comput. Phys., v. 4, p. 543—551.

Гайер, Тодд (Gaier D., Todd J.) [1967]. On the rate of convergence of optimal ADI processe. — Numerische Math., B. 9, S. 452—459.

Гамилец, Джонсон, Хафтон (Hamielec A. E., Johnson A. I., Houghton W. T.) [1967б]. Numerical solution of the Navier — Stokes equation for flow past spheres: Part II, Viscous flow around circulating spheres of low viscosity. — Amer. Inst. of Chem. Eng. J., v. 13, No. 2, p. 220—224.

Гамилец, Рааль (Hamielec A. E., Raal J. D.) [1969]. Numerical studies of viscous flow around circular cylinders. — Phys. of Fluids, v. 12, No. 1, p. 11—17.

Гамилец, Хоффман, Росс (Hamielec A. E., Hoffman T. W., Ross L. L.) [1967a]. Numerical solution of the Navier — Stokes equation for flow past spheres, Part 1, Viscous flow around spheres with and without radial mass efflux. — Amer. Inst. of Chem. Eng. J., v. 13, No. 2, p. 212—219.

Гарабедян, Либерштейн (Garabedian P. R., Lieberstein H. M.) [1958]. On the numerical calculation of detached bow shock waves in hypersonic flow. — J. Aeronaut. Sci., v. 25, p. 109. [Имеется перевод: О численном расчете отошедших головных ударных волн в гиперзвуковом потоке. — Механика, 1959, № 2 (54).]

Гари (Gary J. M.) [1964]. On certain finite difference schemes for hyperbolic systems. — Math. of Computation, p. 1—18.

— [1969]. A comparison of two difference schemes used for numerical weather prediction. — J. of Comput. Phys., v. 4, p. 279—305.

Гвинн (Gwynn J. M., Jr.) [1967]. A study of six- and nine-point finite-difference analogues of the one-dimensional heat equation. — Ph. D. Thes., Univ. of North Carolina, Chapel Hill.

Гейрингер (Geiringer H.) [1959]. On the solution of systems of linear equations by certain iterative methods. — In: Reissner Anniversary Volume. — Ann Arbor, p. 365—393.

Гельдер (Gelder D.) [1971]. Solution of the compressible flow equations. — Internat. J. for Numerical Methods in Engineering, v. 3, January — March, p. 35—43.

Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. [1966]. Численное исследование конвекции жидкости, подогреваемой снизу. — Изв. АН СССР, МЖГ, № 6, с. 93—99.

Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. [1970]. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной.—В кн.: Вычислительные методы и программирование, вып. 6. — М.: ВЦ МГУ, 1967.

Гиллис, Лирон (Gillis J., Liron N.) [1969]. Numerical integration of equations of motion of a viscous fluid. — Final Rept. Contract No F61052-68-C-0053, Weizmann Inst. of Sci., Department of Appl. Math., Rehovot, Israel.

Глиз (Glese J. H.) [1969a]. A unified account of two-level methods for the one-dimensional heat equation. — Memo. Rept. No. 1956, Ballistic Res. Lab., Aberdeen Proving Ground, Maryland.

— [1969б]. A bibliography for the numerical solution of partial differential equations. — Memo. Rept. No. 1991, Ballistic Res. Lab., Aberdeen Proving Ground, Maryland.

Гловинский (Glowinski R.) [1971]. Methodes numeriques pour l'ecoulement stationnaire d'un fluide rigide visco-plastique incompressible. — In: Holt [1971].

Год (Goad W. B.) [1960]. WAT: A numerical method for two-dimensional unsteady fluid flow. — Los Alamos Sci. Lab., Rept. No. LAMS-2365, Los Alamos, New Mexico.

Годунов С. К. [1959]. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидромеханики. — Матем. сб., т. 47, вып. 3, с. 271—306.

Годунов С. К., Дерибас А. А., Забродин А. В., Козин Н. С. [1970]. Hydrodynamic effects in colliding solids. — J. of Comput. Phys., v. 5, p. 517—539.

Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. [1961]. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. — ЖВМ и МФ, т. 1, № 6, с. 1020—1050.

Годунов С. К., Прокопов Г. П. [1968]. О решении дифференциальных уравнений с использованием криволинейных разностных сеток. — ЖВМ и МФ, т. 8, № 1, с. 28—46.

Годунов С. К., Семендяев К. А. [1962]. Разностные методы численного решения задач газовой динамики. — ЖВМ и МФ, т. 2, № 1, с. 3—14.

Гольдин В. Я., Ионкин Н. И., Калиткин Н. Н. [1969]. Об энтропийной схеме расчета газодинамики. — ЖВМ и МФ, т. 9, № 6, с. 1411—1413.

Гониду (Gonidou R.) [1967]. Supersonic flows around cones at incidence. — NASA-TT-F-11473, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D. C.

Гонор А. Л., Лапыгин В. И., Остапенко Н. А. [1971]. — The conical wing in hypersonic flow. — In: Holt [1971].

Гопаларкришнан, Боццола (Gopalarkrishnan S., Bozzola R.) [1971]. A numerical technique for the calculation of transonic flows in turbomachinery cascades. — Paper 71-GT-42, Amer. Soc. of Mechanical Engineers, Gas Turbine Conference and Products Show, Houston, Texas, March 28 — April 1, 1971.

Гопалсами, Аггарвала (Gopalsamy K., Aggarwala B. D.) [1970]. Monte Carlo methods for some fourth order partial differential equations. — ZAMM, B. 50, S. 759—767.

Гордон (Gordon P.) [1968]. A note on a maximum principle for the DuFort — Frankel difference equation. — Math. of Computation, v. 22, No. 102, p. 437—440.

Гордон, Скала (Gordon P., Scala S. M.) [1969]. The calculation of the formation of discontinuities in planar and spherically-symmetric nonisentropic inviscid flows. — General Electric Company, Space Sci. Lab., Valley Forge, Pennsylvania (не опубликовано).

Госмэн А. Д., Пан В. М., Ранчел А. К., Сполдинг Д. Б., Вольфштейн М. (Gosman A. D., Pun W. M., Runchal A. K., Spalding D. B., Wolfshtein M.) [1969]. Heat and mass transfer in recirculating flows. — Academic Press. [Имеется перевод: Численные методы исследования течений вязкой жидкости. — М.: Мир, 1972.]

Госмэн, Сполдинг (Gosman A. D., Spalding D. B.) [1971]. Computation of laminar recirculating flow between shrouded rotating discs. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Расчет ламинарного течения между дисками, вращающимися в кожухе. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М., Мир, 1973, с. 260—268.]

Гоэйн, О'Брайен (Gawain T. H., O'Brien G. D., Jr.) [1971]. Numerical simulation of transition and turbulence in plane Poiseuille flow. — In: Holt [1971].

Гоэйн, Притчетт (Gawain T. H., Pritchett J. W.) [1968]. Turbulence in an unbounded, uniform-shear flow: a computer analysis. — NRDL-TR-68-86, U. S. Naval Radiological Defense Lab., San Francisco, California.

— — [1970]. A unified heuristic model of fluid turbulence. — J. of Comput. Phys., v. 5, p. 383—405.

Градовчик, Фолгера (Gradowsczyk M. N., Folguera H. C.) [1965]. Analysis of scour in open channels by means of mathematical models. — La Houille Blanche, No. 8, p. 761—768.

Граммельтведт (Grammeltvedt A.) [1969]. A survey of finite-difference schemes for the primitive equations for a barotropic fluid. — Monthly Weather Rev., v. 97, No. 5, p. 384—404.

Григорьев Е. И., Магомедов К. М. [1969]. Об одной прямой схеме метода характеристик для расчета пространственных течений газа. — ЖВМ и МФ, т. 9, № 6, с. 1413—1419.

Гринспэн (Greenspan D.) [1967]. Approximate solution of initial-boundary parabolic problems by boundary value techniques. — MRC-TSR-792, Math. Res. Center, Univ. of Wisconsin, Madison.

— [1969a]. Numerical studies of steady, viscous, incompressible flow in a channel with a step. — J. of Engineering Math., v. 3, No. 1, p. 21—28.

— [1969б]. Numerical studies of prototype cavity flow problems. — Computer J., v. 12, No. 1, p. 88—93.

Гриффитс, Джонс, Уолтерс (Griffiths D. F., Jones D. T., Walters K.) [1969]. A flow reversal due to edge effects. — J. Fluid Mech., v. 36, Part 1, p. 161—175.

Гроссмен, Моретти (Grossman B., Moretti G.) [1970]. Time dependent computation of transonic flows. — Paper 70-1322, Amer. Inst. of Aeronautics and Astronautics, Annual Meeting and Technical Display, 7th, Houston, Texas, October 19—22, 1970.

Гудрич (Goodrich W. D.) [1969]. A numerical solution for problems in laminar gas dynamics. — Ph. D. Diss., Univ. of Texas, Austin.

Гунаратнам, Перкинс (Gunaratnam D. J., Perkins F. E.) [1970]. Numerical solution of unsteady flows in open channels. — Hydrodynamics Report No. 127, School of Engineering, Mass. Inst. of Technology, Cambridge, Mass.

Гурли (Gourlay A. R.) [1970а]. Hopscotch: a fast second-order partial differential equation solver. — J. Inst. Math. Appl., v. 6, p. 375—390.

— [1970б]. Time dependent problems. — Report 0002, IBM Scientific Centre, Peterlee, County Durham, United Kingdom.

Гурли, Мак-Гир (Gourlay A. R., McGuire G. R.) [1971а]. General hopscotch algorithms for the numerical solution of partial differential equations. — IBM (United Kingdom) Ltd., Peterlee, County Durham, England.

— — [1971б]. General hopscotch algorithm for the numerical solution of partial differential equations. — J. Inst. Math. Appl., v. 7, p. 216—227.

Гурли, Мак-Ки (Gourlay A. R., McKee S.) [1971]. On a numerical comparison of hopscotch with A. D. I. and L. O D. methods for parabolic and elliptic equations in two space dimensions with a mixed derivative. — IBM (United Kingdom) Ltd., Peterlee, County Durham, England.

Гурли, Митчелл (Gourlay A. R., Mitchell A. R.) [1966а]. Alternating direction methods for hyperbolic systems. — Numerische Math., B. 8, S. 137—149.

— — [1966б]. A stable implicit difference method for hyperbolic systems in two space variables. — Numerische Math., B. 8, S. 367—375.

— — [1969а]. The equivalence of certain alternating direction and locally-one-dimensional difference methods. — SIAM J. on Numerical Analysis, v. 6, No. 1, p. 37—46.

— — [1969б]. A classification of split difference methods for hyperbolic equations in several space dimensions. — SIAM J. on Numerical Analysis, v. 6, No. 1, p. 62—71.

Гурли, Моррис (Gourlay A. R., Morris J. L.) [1968а]. Finite-difference methods for nonlinear hyperbolic systems. — Math. of Computation, v. 22, No. 101, p. 28—39.

— — [1968б]. A multistep formulation of the optimized Lax — Wendroff method for nonlinear hyperbolic systems in two space variables. — Math. of Computation, v. 22, No. 104, p. 715—720.

— — [1968в]. Deferred approach to the limit in non-linear hyperbolic systems. — Computing J., v. 2, p. 95—101.

— — [1970]. On the comparison of multistep formulations of the optimized Lax — Wendroff method for nonlinear hyperbolic systems in two space variables. — J. of Comput. Phys., v. 5, p. 229—243.

— — [1971]. Hopscotch methods for non-linear hyperbolic systems. — IBM (United Kingdom) Ltd., Peterlee, County Durham, England.

Гурурая, Деккер (Gururaja J., Deckker B. E. L.) [1970]. Numerical solutions of flows behind shock waves in non-uniform regions. — Thermodynamics and Fluid Mechanics Convention, Univ. of Glasgow, March 23—25, 1970, The Institution of Mech. Engineers, Westminster, London, SWI, p. 103—111.

Густафсон (Gustafsson B.) [1969]. On difference approximations to hyperbolic differential equations over long time intervals. — SIAM J. Numerical Analysis, v. 6, No. 3, p. 508.

— [1971]. An alternating direction implicit method for solving the shallow water equations. — J. of Comput. Phys., v. 7, p. 239—254.

Гхиа, Торда, Лаван (Ghia K. N., Torda T. P., Lavan Z.) [1968]. Laminar mixing of heterogeneous axisymmetric coaxial confined jets. — NASA CR 72480, NASA, Office of Sci. and Technical Information, Washington, D. C.

Дали (Daly B. J.) [1967]. Numerical study of two fluid Rayleigh — Taylor instability. — Phys. of Fluids, v. 10, p. 297—307.
— [1969а]. Numerical study of the effect of surface tension on interface instability. — Phys. of Fluids, v. 12, No. 7, p. 1340—1354.
— [1969б]. A technique for including surface tension effects in hydrodynamic calculations. — J. of Comput. Phys., v. 4, p. 97—117.
Дали, Прахт (Daly B. J., Pracht W. E.) [1968]. Numerical study of density-current surges. — Phys. of Fluids, v. 11, No. 1, p. 15—30.
Дали, Харлоу (Daly B. J., Harlow F. H.) [1970]. Transport equations in turbulence. — Phys. of Fluids, v. 13, No. 11, p. 2634—2649.
— — [1971]. Inclusion of turbulence effects in numerical fluid dynamics. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Учет турбулентных эффектов при численном решении газодинамических задач. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 227—228.]
Даль (Dahl G.) [1969]. Fortran program for the calculation of the variables of state of real gas mixtures with applications. — DLR Mitteilung 69-27, Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft und Raumfahrt, Brunswick, West Germany.
Даусон, Маркус (Dawson C., Marcus M.) [1970]. DMC — a computer code to simulate viscous flow about arbitrarily shaped bodies. — In: Proc. of the 1970 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, p. 323—338.
Даусон, Крупер, Борис, Оренс, Оберман (Dawson J. M., Kruer W. L., Boris J. P., Orens J. H., Oberman C.) [1969]. Numerical simulation of plasmas at Princeton. — Tech. Rept. 1 April — 13 December, 1969, Princeton Univ., Princeton, New Jersey.
Де Бар (DeBar R. B.) [1967]. Difference equations for the Legendre polynomial representation of the transport equation. — J. of Comput. Phys., v. 2, p. 197—205.
Деллинджер (Dellinger T. C.) [1969]. Computation of non-equilibrium merged stagnation shock layers by successive accelerated replacement. — AIAA Paper No. 69-655, AIAA Fluid and Plasma Dynamics Conference, San Francisco, California, June 16—18, 1969.
— [1970]. Nonequilibrium air ionization in hypersonic fully viscous shock layers. — AIAA Paper No. 70-806, AIAA 3rd Fluid and Plasma Dynamics Conference, Los Angeles, California, June 29 — July 1, 1970.
— [1971]. Computation of nonequilibrium merged stagnation shock layers by successive accelerated replacement. — AIAA J., v. 9, No. 2, p. 262—269. [Имеется перевод: Расчет неравновесных размытых ударных слоев в области торможения методом ускоренных последовательных смещений. — РТК, т. 9, № 2, с. 90—99.]
Демьянович Ю. К. [1968]. Об оценках скорости сходимости некоторых проекционных методов решения эллиптических уравнений. — ЖВМ и МФ, т. 8, № 1, с. 79—96.
Денар (Denard M. B.) [1969]. Numerical studies of effects of surface friction on large-scale atmospheric motions. — Monthly Weather Rev., v. 97, No. 12, p. 835.
Деннис, Станифорт (Dennis S. C. R., Staniforth A. N.) [1971]. A numerical method for calculating the initial flow past a cylinder in a viscous fluid. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Численный метод для расчета начальной стадии течения вязкой жидкости около цилиндра. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 242—252.]
Деннис, Хадсон, Смит (Dennis S. C. R., Hudson J. D., Smith N.) [1968]. Steady laminar forced convection from a circular cylinder at low Reynolds numbers. — Phys. of Fluids, v. 11, No. 5, p. 933—940.
Деннис, Чжен Гау-дзу (Dennis S. C. R., Chang Gau-Zu) [1969]. Numerical integration of the Navier — Stokes equations in two dimensions. — MRS Tech. Summary Rept. 859, Math. Res. Center, Univ. of Wisconsin, Madison.

— — [1970]. Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100. — J. Fluid Mech., v. 42, Part 3, p. 471—489.

Дер, Рёц (Der J., Jr., Raetz G. S.) [1962]. Solution of general three-dimensional laminar boundary-layer problems by an exact numerical method. — IAS Paper No. 62-70, IAS 30th Annual Meeting, New York, January 22—24, 1962.

Десанто, Келлер (Desanto D. F., Keller H. B.) [1961]. Numerical studies of transition from laminar to turbulent flow over a flat plate. — New York Univ.; SIAM J., 1962, v. 10, p. 569.

Де Соза, Молдер, Моретти (D'Souza N., Molder S., Moretti G.) [1971]. A time-dependent method for blunt leading edge hypersonic internal flow. — AIAA Paper No. 71-85, AIAA 9th Aerospace Sciences Meeting, New York, January 25—27, 1971.

Джакуинта, Хын (Giaquinta A. R., Hung T.-K.) [1968]. Slow non-Newtonian flow in a zone of separation. — J. of the Eng. Mech. Div., Proc. Amer. Soc. Civil Eng., December, p. 1521—1537.

Джакупов К. Б. [1969]. О двух численных методах решения стационарных уравнений Навье — Стокса вязкой сжимаемой жидкости. — Изв. СО АН СССР, сер. техн. наук, вып. 1, № 3.

Джакупов К. Б., Кузнецов Б. Г. [1969]. О численном расчете стационарных задач вязкой несжимаемой жидкости. — Изв. АН СССР, МЖГ, № 1, с. 95—99.

Джаффе, Томас (Jaffe N. A., Thomas J.) [1970]. Application of quasi-linearization and Chebyshev series to the numerical analysis of the laminar boundary-layer equations. — AIAA J., v. 8, No. 3, p. 483. [Имеется перевод: Применение квазилинеаризации и рядов Чебышева к численному исследованию уравнений ламинарного пограничного слоя. — РТК, т. 8, № 3, с. 126—134.]

Джейн (Jain P.) [1967]. Numerical study of the Navier — Stokes equations in three dimensions. — MRC-TSR-751, Math. Res. Center, Madison, Wisconsin.

Джеммел, Эпштейн (Gemmel A. R., Epstein N.) [1962]. Numerical analysis of stratified laminar flow of two immiscible Newtonian liquids in a circular pipe. — Canadian J. Chem. Engineering, p. 215—224.

Джентри, Мартин, Дали (Gentry R. A., Martin R. E., Daly B. J.) [1966]. An Eulerian differencing method for unsteady compressible flow problems. — J. of Comput. Phys. v. 1, p. 87—118.

Джеппсон (Jeppson R. W.) [1969]. Finite difference solutions to free jet and confined cavity flows past disks with preliminary analyses of the results. — PRWG-76-1, Utah State Univ., Logan.

Джон (John F.) [1952]. On the integration of parabolic equations by difference methods. — Comm. on Pure and Appl. Math., v. 5, p. 155.

— [1953]. A note on 'improper' problems in partial differential equations. — Comm. on Pure and Appl. Math., v. 8, p. 591.

Джонс (Jones D. J.) [1968]. Numerical solutions of the flow field for conical bodies in a supersonic stream. — Aeronaut. Rep. LR-507, Nat. Res. Council of Canada, Ottawa.

Джонсон (Johnson W. E.) [1967]. TOIL — a two-material version of the oil code. — GAMD-8073, General Dynamics, San Diego, California.

Джордж (George J. A.) [1970]. The use of direct methods for the solution of the discrete Poisson equation on non-rectangular regions. — STAN-CS-70-159, Computer Sci. Dep. Stanford Univ., Stanford, California.

Диас (Dias G. F.) [1970]. An investigation of a new class linear finite difference operators to be used in solution of partial differential equations. — M. S. Thes., Naval Postgraduate School, Monterey, California.

Диденко В. И., Ляшенко И. М. [1964]. О численном решении краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. — Украинск. математ. журн., т. 16, № 5, с. 681—690.

Дикман, Морс, Нилсон (Dickman D. O., Morse R. L., Nielson C. W.) [1969]. Numerical simulation of axisymmetric, collisionless, finite-β plasma. — Phys. of Fluids, v. 12, No. 8, p. 1708—1716.

Диксон, Хеллумс (Dixon T. N., Hellums J. D.) [1967]. A study on stability and incipient turbulence in Poiseuille and plane-Poiseuille flow by numerical finite-difference simulation. — Amer. Inst. of Chem. Eng. J., v. 13, No. 5, p. 866—872.

Дин, Ираслан (Dean C. F., Eraslan A. H.) [1971]. Chemically reacting viscous supersonic flow in a two-dimensional divergent plane channel. — AIAA Paper No. 71-44, AIAA 9th Aerospace Sciences Meeting, New York, January 25—27, 1971.

Динс (Dienes J. K.) [1968]. An Eulerian method for calculating strength dependent deformation, Part 1. — GAMB-8497, Gulf General Atomic, Inc., San Diego, California.

Ди Прима, Роджерс (DiPrima R. C., Rogers E. H.) [1969]. Computing problems in nonlinear hydrodynamic stability. — In: Frenkiel and Stewartson [1969].

Дирдорф (Deardorff J. W.) [1970]. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. — J. of Fluid Mech., v. 41, Part 2, p. 453—480.

— [1971]. On the magnitude of the subgrid scale Eddy coefficient. — J. of Comput. Phys., v. 7, p. 120—133.

Дистефано (Distefano G. P.) [1968]. Stability of numerical integration techniques. — Amer. Inst. of Chem. Eng. J., v. 14, No. 6, p. 946—955.

Дистефано (Distefano N.) [1969]. Dynamic programming and the solution of the biharmonic equation. — California Univ., Berkeley.

Дональдсон (Donaldson C. du P.) [1968]. A computer study of an analytical model of boundary layer transition. — AIAA Paper No. 68-38, AIAA 6th Aerospace Sciences Meeting, New York, January 22—24, 1968.

Донован (Donovan L. F.) [1968]. A numerical solution of unsteady flow in a two-dimensional square cavity. — NASA TM X-52459, Lewis Res. Center, Cleveland, Ohio.

— [1970]. A numerical solution of unsteady flow in a two-dimensional square cavity. — AIAA J., v. 8, No. 3, p. 524—529. [Имеется перевод: Численное решение задачи о неустановившемся двумерном течении в квадратной полости. — РТК, т. 8, № 3, с. 175—181.]

Дорр (Dorr F. W.) [1969a]. Remarks on the iterative solution of the Neumann problem on a rectangle by successive line over-relaxation. — Math. of Comput., v. 23, No. 105, p. 177—179.

— [1969б]. The direct solution of the discrete Poisson equation on a rectangle. — La-4132, Los Alamos Sci. Lab., Univ. of California, Los Alamos, New Mexico.

— [1970]. The direct solution of the discrete Poisson equation on a rectangle.— SIAM Rev., v. 12, No. 2, p. 248—263.

Дрейк, Эллингсон (Drake R. L., Ellingson M. B.) [1970]. The application of a local similarity concept in solving the radial flow problem. — J. of Comput. Phys., v. 6, p. 200—218.

Дуайер (Dwyer H. A.) [1968]. Calculation of three dimensional and time dependent boundary layer flows. — AIAA Paper No. 68-740, AIAA Fluid and Plasma Dynamics Conference, Los Angeles, California, June 24—26, 1968.

— [1971a]. Hypersonic boundary layer studies on a spinning sharp cone at angle of attack. — AIAA Paper 71-57, AIAA 9th Aerospace Sciences Meeting, New York, January 25—27, 1971.

— [1971б]. Boundary layer on a hypersonic sharp cone at small angle of attack. — AIAA J., v. 9, No. 2, p. 277. [Имеется перевод: Пограничный слой на конусе, обтекаемом гиперзвуковым потоком, под малым углом атаки. — РТК, т. 9, № 2, с. 108—117.]

Дуайер, Досс, Голдман (Dwyer H. A., Doss E. D., Goldman A.) [1971]. Rapid calculation of inviscid and viscous flow over arbitrary shaped bodies. — J. Aircraft, v. 8, No. 2, p. 125—127.

Дуглас (Douglas J.) [1962]. Alternating direction methods for three space variables. — Numerische Math., B. 4, S. 41—63.

Дуглас, Ганн (Douglas J., Gunn J. E.) [1964]. A general formulation of alternating direction implicit methods, Part 1, Parabolic and hiperbolic problems. — Numerische Math., B. 6, S. 428—453.

Дуглас, Ракфорд (Douglas J., Rachford H. H.) [1956]. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. — Trans. Amer. Math. Soc., v. 82, p. 421—439.

Дуглас (Douglas J., Jr.) [1955]. On the numerical integration of $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = \partial u/\partial t$ by implicit methods. — J. Society of Indust. Applied Math., v. 3, No. 1, p. 42—65.

— [1957]. A note on the alternating direction implicit method for the numerical solution of heat flow problems. — Proc. Amer. Math. Soc., v. 8, p. 409—412.

Дуглас, Дюпон (Douglas J., Jr., DuPont T.) [1968]. The numerical solution of water flooding problems in petroleum engineering by variational methods. — In: Studies in Numerical Analysis. 2. — Soc. for Indust. and Appl. Math., Philadelphia, Pennsylvania, p. 53—63.

Дьяконов Ю. Н. [1964]. Пространственное обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком совершенного газа. — Изв. АН СССР, Механ. и машиностроение, № 4, с. 150—153.

Дэвис де Валь (Davis G. de Vahl) [1968]. Laminar natural convection in an enclosed rectangular cavity. — Internat. J. Heat and Mass Transfer, v. 11, p. 1675—1693.

Дэвис, Рабинович (Davis P., Rabinowitz P.) [1960]. Advances in Computers, v. II. — Academic Press.

Дэвис (Davis R. T.) [1968]. The hypersonic fully viscous shock-layer problems. — SC-RR-68-840, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico.

— [1970a]. Numerical solution of the hypersonic viscous shock-layer equations. — AIAA J., v. 8, No. 5. [Имеется перевод: Численное решение уравнений гиперзвукового вязкого ударного слоя. — РТК, т. 8, № 5, с. 3—13.]

— [1970б]. Hypersonic flow of a chemically reacting binary mixture past a blunt body. — AIAA Paper No. 70-805, AIAA 3rd Fluid and Plasma Dynamics Conference, Los Angeles, California, June 29 — July 1, 1970.

— [1972]. Numerical solution of the Navier — Stokes equations for laminar incompressible flow past a parabola. — J. Fluid Mech., v. 51, Part 3, p. 417—433.

Дюпон, Кенделл, Ракфорд (DuPont T., Kendall R. P., Rachford H. H., Jr.) [1968]. An approximate factorization procedure for solving self-adjoint elliptic difference equations. — SIAM J. Numerical Analysis, v. 5, No. 3, p. 559—573.

Дюфорт, Франкел (DuFort E. C., Frankel S. P.) [1953]. Stability conditions in the numerical treatment of parabolic differential equations. — Math. Tables and Other Aids to Computation, v. 7, p. 135—152.

Жаме (Jamet P.) [1968]. Numerical methods and existence theorems for parabolic differential equations whose coefficients are singular on the boundary. — Math. of Computation, v. 22, No. 104, p. 721—744.

Жаме, Ласко, Равьяр (Jamet P., Lascaux P., Raviart P.-A.) [1970]. Une methode de resolution numerique des equations de Navier — Stokes. — Numerical Math., v. 16, p. 93—114.

Житко (Zitko J.) [1970]. Generalization of the minimax method for calculation of the spectral radius of a matrix. — Aplikace Mat., v. 15, No 1, p. 41—62.

Жишке, Барон (Jischke M. C., Baron J. R.) [1969]. Application of the method of parametric differentiation to radiative gasdynamics. — AIAA J., v. 7,

No. 7, p. 1326. [Имеется перевод: Применение метода дифференцирования по параметру к задачам динамики излучающего газа. — РТК, т. 7, № 7, с. 137—148.]
Заггендорф (Saggendorf F.) [1971]. — Ph. D. Diss., Mech. Eng. Dep., Univ. of Kentucky, Lexington.
Зандберген (Zandbergen P. J.) [1971]. The viscous flow around a circular cylinder. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Вязкое обтекание кругового цилиндра. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 253—259.]
Зауервейн, Дитхельм (Sauerwein H., Diethelm M.) [1967]. Improved calculations of multi-dimensional fluid flows by the method of characteristics. — Aerospace Rept. No. TR-1001 (S2816-23)-1, Aerospace Corporation, San Bernardino, California.
Зауервейн, Зусман (Sauerwein H., Sussman M.) [1964]. Numerical stability of the three-dimensional method of characteristics. — AIAA J., v. 2, No. 2, p. 387—389. [Имеется перевод: Устойчивость численных решений при применении метода характеристик. — РТК, т. 2, № 2, с. 209—211.]
Зейнфельд, Лапидус, Хуан (Seinfeld J. H., Lapidus L., Huang M.) [1970]. Review of numerical integration techniques for stiff ordinary differential equations. — Indust. Eng. Chem. Fundamentals, v. 9, No. 2, p. 266—275.
Зенкевич О. (Zienkiewicz O. C.) [1967]. The finite element method in structural and continuum mechanics. — London: McGraw-Hill. [Имеется перевод: Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошной среды. — М.: Недра, 1974.]
— [1969]. The finite element method: from intuition to generality.—Appl. Mech. Rev., p. 249—256. [Имеется перевод: Метод конечных элементов: от интуиции к общности. — Механика, 1970, № 6 (124), с. 90—103.]
Зимняк (Ziemniak S. E.) [1970]. The calculation of steady turbulent flows in two dimensions. — In: Proc. of the 1970 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford Univ. Press, Stanford, California, p. 121—134.
Злотник (Slotnick D. L.) [1971]. The fastest computer. — Scientific American, v. 224, No. 2, p. 76—87.
Зуев А. И. [1966]. О трехслойной схеме для численного интегрирования уравнений газодинамики и нелинейного уравнения теплопроводности. — В кн.: Численные методы решения задач математической физики. — М.: Наука.
Иванов К. П., Ладыженская О. А., Ривкинд В. Я. [1970]. Сеточный метод решения уравнений Навье — Стокса в цилиндрических координатах. — Вестник ЛГУ, вып. 3, № 13, с. 37—41.
Израэли (Israeli M.) [1972]. On the evaluation of iteration parameters for the boundary vorticity. — In: Studies in Applied Mathematics, v. 51, No. 1, p. 67—71.
Ингэм (Ingham D. B.) [1967]. Note on the numerical solution for unsteady viscous flow past a circular cylinder. — J. Fluid Mech., v. 31, Part 4, p. 815—818.
Иосидзава (Yoshizawa A.) [1970]. Laminar viscous flow past a semi-infinite flat plate. — J. Phys. Soc. of Japan, v. 28, No. 3, p. 776—779.
Исидзаки (Ishizaki H.) [1957]. On the numerical solutions of harmonic, biharmonic and similar equations by the difference method not through successive approximations. — Disaster Prevention Res. Institute, Kyoto Univ. Bulletins, Bulletin No. 18.
Истон (Easton C. R.) [1969]. Applications of the Marker-And-Cell numerical program. — N69-13117, QAC-63140, McDonnell — Douglas Astronautics Co., Santa Monica, California.
Истон, Кеттон (Easton C. R., Catton I.) [1970]. Initial value techniques in free-surface hydrodynamics. — MDAC Paper WD 1459, McDonnell — Douglas Astronautics Co., Santa Monica, California.

Итон (Eaton R. R.) [1970]. Three-dimensional numerical and experimental flow-field comparisons for sphere-cones. — J. Spacecraft, v. 7, No. 2, p. 203—204.
Итон, Цумвальт (Eaton R. R., Zumwalt G. W.) [1967]. A numerical solution for the flow field of a supersonic cone-cylinder entering and leaving a blast sphere diametrically. — SC-CR-67-2532, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico.
Йен (Yen S. M.) [1969]. Numerical methods for solving rarefied gas flow problems. — Appl. Mech. Rev., v. 22, No. 6, p. 557—564.
Йенсен (Jensen V. G.) [1959]. Viscous flow round a sphere at low Reynolds numbers ($< 40$). — Proc. Roy. Soc. London, Ser. A., v. 249, p. 346—366.
Йенссен, Стреде (Jenssen D., Straede J.) [1968]. The accuracy of finite difference analogues of simple differential operators. — In: Proc. of the WMO/IUGG Symposium on Numerical Weather Prediction in Tokyo, November 26 — December 4, 1968.
Йи (Yee S. Y. K.) [1969]. Noniterative solution of a boundary value problem of the Helmholtz type. — AFCRL-69-0478, Air Force Cambridge Res. Lab., L. G. Hancom Field, Bedford, Mass.
Кабелли, Дэвис (Cabelli A., Davis G. D.) [1971]. A numerical study of the Benard cell. — J. Fluid Mech., v. 45, Part 4, p. 805—829.
Кавагути (Kawaguti M.) [1953]. Numerical solution of the Navier — Stokes equations for the flow around a circular cylinder at Reynolds number 40. — J. Phys. Soc. of Japan, v. 8, p. 747—757.
— [1961]. Numerical solution of the Navier — Stokes equations for the flow in a two-dimensional cavity. — J. Phys. Soc. of Japan, v. 16, p. 2307—2315.
— [1965]. Numerical solutions of the Navier — Stokes equations for the flow in a channel with a step. — MRC TSR 574, Math. Res. Center, Madison, Wisconsin.
Кайрис (Kyriss C. L.) [1970]. A time dependent solution for the blunt body flow of a chemically reacting gas mixture. — AIAA Paper No. 70-711, AIAA 3rd Fluid and Plasma Dynamics Conference, Los Angeles, California, June 29 — July 1, 1970.
Калугин В. Н., Панчук В. И. [1970]. Течение вязкой несжимаемой жидкости вдоль ударной волны. — В кн.: Бионика. Респ. межвед. сб., вып. 4. — Киев: Наукова думка, с. 104—110.
Камерон (Cameron I. G.) [1966]. An analysis of the errors caused by using artificial viscosity terms to represent steady-state shock-waves. — J. of Comput. Phys., v. 7, No. 7, p. 1—20.
Камзолов В. Н., Пирумов У. Г. [1966]. Расчет неравновесных течений в соплах. — Изв. АН СССР, МЖГ, № 6, с. 25—33.
Кан, Гарсия (Cahn M. S., Garcia J. R.) [1971]. Transonic airfoil design. — J. Aircraft, v. 8, No. 2, p. 84—88.
Карденас, Карплюс (Cardenas A. F., Karplus W. J.) [1970]. PDEL — a language for partial differential equations. — Comm. of the ACM, v. 13, No. 3, p. 184—191.
Карлсон (Carlson L. A.) [1969]. Radiative transfer, chemical nonequilibrium and two temperature effects behind a reflected shock wave in nitrogen. — Ph. D. Diss., Ohio State Univ., Columbus.
— [1970]. Radiative-gasdynamic coupling, two-temperature, and chemical nonequilibrium effects behind reflected shock waves. — AIAA Paper No. 70-774, AIAA 3rd Fluid and Plasma Dynamics Conference, Los Angeles, California, June 29 — July 1, 1970.
Карнахан, Лазер, Уилкс (Carnahan B., Luther H. A., Wilkes J. O.) [1969]. Applied numerical methods. — New York: John Wiley and Sons.
Карплюс (Karplus W. J.) [1958]. An electric circuit theory approach to finite difference stability. — Trans. AIEE, v. 77, Part 1, p. 210—213.
Каррé (Carré B. A.) [1961]. The determination of the optimum accelerating factor for successive over-relaxation. — Computer J., v. 4, No. 1, p. 73—78.

Касахара (Kasahara A.) [1965]. On certain finite difference methods for fluid dynamics. — U. S. Monthly Weather Rev., v. 93, No. 1, p. 27—31.
Касахара, Изаксон, Стокер (Kasahara A., Isaacson E., Stoker J. J.) [1965]. Numerical studies of frontal motion in the atmosphere — I. — Tellus, v. 17, No. 3, p. 261—277.
Касахара, Хафтон (Kasahara A., Houghton D. D.) [1969]. An example of nonunique, discontinuous solutions in fluid dynamics. — J. of Comput. Phys., v. 4, p. 377—388.
Каспар (Caspar J. R.) [1968]. Applications of alternating direction methods to mildly nonlinear problems. — NASA-CR-73865, Maryland Univ., College Park, Maryland.
Катлер (Kutler P.) [1969]. Application of selected finite-difference techniques to the solution of conical flow problems. — Ph. D. Thes., Iowa State Univ., Iowa City.
Катлер, Ломекс (Kutler P., Lomax H.) [1971a]. A systematic development of the supersonic flow fields over and behind wings and wing-body configurations using a shock-capturing finite-difference approach. — AIAA Paper No. 71-99, AIAA 9th Aerospace Sciences Meeting, New York, January 25—27, 1971.
— — [1971б]. The computation of supersonic flow fields about wing-body combinations by 'shock capturing' finite difference techniques. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Расчет сверхзвуковых полей течений около комбинации крыло — тело с помощью конечно-разностного метода «улавливания скачка». — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 126—134.]
Катсанис (Katsanis T.) [1967]. A computer program for calculating velocities and streamlines for two-dimensional incompressible flow in axial blade rows. — NASA TN D-3762.
Квон, Дранчук, Аллада, Лонг (Quon D., Dranchuk P. M., Allada S. R., Leung P. K.) [1966]. Application of the alternating direction explicit procedure to two-dimensional natural gas reservoirs. — Soc. of Petroleum Eng. J., June, p. 137—142.
Квормби (Quarmby A.) [1968]. A finite difference analysis of developing slip flow. — Appl. Sci. Res., v. 19, No. 1, p. 18—33.
Кейкер, Уайтло (Kacker S. C., Whitelaw J. H.) [1970]. Prediction of wall-jet and wall-wake flows. — J. Mech. Eng. Sci., v. 12, No. 6, p. 404—420.
Келлер (Keller H. B.) [1958]. On some iterative methods for solving elliptic difference equations. — Quart. of Appl. Math., v. 16, No. 3, p. 209—226.
— [1961]. On the solution of semi-linear hyperbolic systems by unconditionally stable difference methods. — Comm. Pure and Appl. Math., v. 14, p. 447—456.
— [1968]. Numerical methods for two-point boundary-value problems. — Waltham: Ginn — Blaisdell Publishing Co.
— [1969]. Accurate difference methods for linear ordinary differential systems subject to linear constraints. — SIAM J. Numerical Analysis, v. 6, No. 1, p. 8—30.
Келлер, Чебеки (Keller H. B., Cebeci T.) [1971a]. Accurate numerical methods for boundary layer flows, II, Two-dimensional turbulent flows. — AIAA Paper No. 71-164, AIAA 9th Aerospace Sciences Meeting. New York, January 25—27, 1971.
— — [1971б]. Accurate numerical methods for boundary layer flows, I, Two-dimentional laminar flows. — In: Holt [1971].
Келлог (Kellog R. B.) [1969]. A nonlinear alternating direction method. — Math. of Computation, v. 23, No. 105, p. 23—27.
Кемпбелл, Кист (Campbell C. M., Keast P.) [1968]. The stability of difference approximations to a self-adjoint parabolic equation under derivative boundary condition. — Math. of Computation, v. 22, No. 102, p. 336—347.

Кемпбелл, Мюллер (Campbell D. R., Mueller T. J.) [1968]. A numerical and experimental investigation of incompressible laminar ramp-induced separated flow. — UNDAS TN-1068-M1, Dep. of Aero-Space Eng., Univ. of Notre Dame, Notre Dame, Indiana.

Кендолл, Бартлетт, Риндел, Мойер (Kendall R. M., Bartlett E. P., Rindal R. A., Moyer C. B.) [1966]. An analysis of the coupled chemically reacting boundary layer and charring ablator, Part I, Summary Report. — NASA CR-1060, National Aeronautics and Space Administration.

Кеннеди (Kennedy E. C.) [1956]. Calculation of the flow fields around a series of bi-conic bodies of revolution using the method of characteristics as applied to supersonic rotational flow. — OAL-CM-873. Ordnance Aerophysics Lab., Daingerfield, Texas.

Кенцер (Kentzer C. P.) [1967]. Stability of finite difference methods for time dependent Navier — Stokes equations. — Fluid Dynamics Trans., v. 4, p. 45—51.

— [1970a]. Computations of time dependent flows on an infinite domain. — AIAA Paper No. 70-45, AIAA 8th Aerospace Sciences Meeting, New York, January 19—21, 1970.

— [1970б]. Transonic flows past a circular cylinder. — J. of Comput. Phys., v. 6, p. 168—182.

— [1971]. Discretization of boundary conditions on moving discontinuities. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Дискретизация граничных условий на движущихся разрывах. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 62—72.]

Кервен (Kirwan A. D., Jr.) [1968]. Constitutive equations for a fluid containing nonrigid structures. — Phys. of Fluids, v. 11, No. 7, p. 1440—1446.

Кепр (Kerr A. D.) [1968]. An extension of the Kantorovich method. — Quart. Appl. Math., p. 219—229.

— [1969]. An extended Kantorovich method for the solution of eigenvalue problems. — Intern. J. Solids Structures, v. 5, p. 559—572.

— [1970]. A new iterative scheme for the solution of partial differential equations. — NYU-AA-70-10, New York Univ., University Heights, New York.

Кепр, Александер (Kerr A. D., Alexander H.) [1968]. An application of the extended Kantorovich method to the stress analysis of a clamped rectangular plate. — Acta Mechanica, v. 6, p. 180—196.

Кертис, Гиршфельдер (Curtiss C. F., Hirschfelder J. O.) [1952]. Integration of stiff equations. — Proc. Nat. Aeronaut. Soc., v. 38, p. 235—243.

Кесслер (Kessler T. J.) [1968]. Numerical experiments of plane shock diffraction from two-dimensional rectangular obstacles. — MM 68-5425-24, Bell Telephone Labs, Whippany, New Jersey.

Киллин (Killeen D. B.) [1966]. The numerical solution of equations describing an unsteady draining process. — Ph. D. Thes., Tulane Univ., New Orlean, Louisiana.

Кипинг (Keeping A. J.) [1968]. The numerical solution of a third order partial differential equation. — Ph. D. Thes., Stevens Inst. of Tech., Hoboken, New Jersey.

Кист, Митчелл (Keast P., Mitchell A. R.) [1967]. Finite difference solution of the third boundary problem in elliptic and parabolic equations. — Numerische Math., B. 10, S. 67—75.

Клейн (Klein D. D.) [1967]. An investigation of the accuracy of numerical solutions of the two-dimensional diffusion equation. — M. S. Thes., Air Force Inst. of Technology Air Univ., Wright — Patterson Air Force Base, Ohio.

Клингер (Klinger A.) [1970]. Generating functions, difference-differential and partial-differential equations. — In: IEEE Trans. on Education, p. 46—48.

Клини, Морковин, Соврен, Кокрелл (ред.) (Kline S. J., Morkovin M. V., Sovran G., Cockrell D. S., eds.) [1968]. Computation of turbulent boundary layers — Vol. I, II. — AFOSR-IFP-Stanford Conferences.

Кокли, Портер (Coakley J. D., Porter R. W.) [1969]. Characteristics at boundaries in numerical gas dynamics. — PDL Note 2-69, Plasmadynamics Lab., Dept. of Mech. and Aerosp. Eng., Illinois Inst. of Technol., Chicago, Illinois.

Кокрейн (Cochrane G. F., Jr.) [1969]. A numerical solution for heat transfer to non-Newtonian fluids with temperature-dependent viscosity for arbitrary conditions of heat flux and surface temperature. — Ph. D. Thes., Oregon State Univ.

Колдер (Calder K. L.) [1968]. In clarification of the equations of shallow-layer thermal convection for a compressible fluid based on the Boussinesq approximation. — Quart. J. Roy. Meteorological Soc., v. 94, p. 88—92.

Колленс (Callens E. E., Jr.) [1970]. A time-dependent approach to fluid mechanical phenomenology. — AIAA Paper No. 7-46, AIAA 8th Aerospace Sciences Meeting, New York, January 19—21, 1970.

Коллинз, Чен (Collins R., Chen H.-T.) [1970]. Propagation of a shock wave of arbitrary strength in two half planes containing a free surfaces. — J. of Computat. Phys., v. 5, p. 415—442.

— — [1971]. Motion of a shock wave through a nonuniform fluid. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Движение ударной волны через неоднородную жидкость. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 73—82.]

Коллис (Callis L. B.) [1968]. Time asymptotic solutions of blunt-body stagnation-region flows with nongray emission and absorption of radiation. — AIAA Paper No. 68-663.

— [1969]. Solutions of blunt-body stagnation-region flows with nongray emission and absorption of radiation by a time-asymptotic technique. — NASA TR R-299, Langley Res. Center, Langley Station, Hampton, Virginia.

— [1970]. Time asymptotic solutions of flow fields with coupled nongray radiation about long blunt bodies. — AIAA Fifth Thermophysics Conference, Los Angeles, California, June 29 — July 1, 1970.

Колони, Рейнольдс (Colony R., Reynolds R. R.) [1970]. An application of Hockney's method for solving Poisson's equation. — American Federation of Information Processing Societies, Spring Joint Computer Conference, Atlantic City, New Jersey, May 5—7, 1970.

Колп (Colp J. L.) [1968]. Terradynamics: A study of projectile penetration of natural earth materials. — SC-DR-68-215, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico.

Константинов Г. А., Якимов Ю. Л. [1969]. Численный метод решения нестационарных осесимметричных задач гидродинамики идеальной жидкости со свободными поверхностями. — Изв. АН СССР, МЖГ, № 4, с. 162—165.

Копал (Kopal Z.) [1969]. The Roche coordinates and their use in hydrodynamics of celestial mechanics. — Astrophysics and Space Sci., v. 5, p. 360—384.

Косс (Koss W. J.) [1969]. Note on the accumulated error in the numerical integration of a simple forecast model. — Monthly Weather Rev., v. 97, No. 12, p. 896.

Костелло, Шренк (Costello F. A., Shrenk G. L.) [1966]. Numerical solution to the heat transfer equations with combined conduction and radiation. — J. of Comput. Phys., v. 1, p. 541—543.

Косых А. П., Минайлос А. Н. [1970]. О явных схемах метода установления в задаче сверхзвукового обтекания затупленного тела. — ЖВТ и МФ, т. 10, № 2, с. 514—520.

Кофоэд-Хансен (Kofoed-Hanson O.) [1968]. Error indicators for the numerical solution of non-linear wave equations. — Riso Rept. No. 177, Danish Atomic Energy Commission Res. Establishment Riso, Roskilde.

Коэн, Решотко (Cohen C. B., Reshotko E.) [1956]. Similar solutions for the compressible laminar boundary layer with heat transfer and pressure gradient. — NACA TR 1293.

Крайер (Cryer C. W.) [1969]. Topological problems arising when solving boundary value problems for elliptic partial differential equations by the method of finite differences. — Tech. Rept. 69, Math. Dept., Wisconsin Univ., Madison.

Крамер (Kramer H.) [1969]. Some analytical and numerical calculations for a cylinder-vortex combination in incompressible flow. — NLR-TR-69057-U, Nat. Aerospace Lab.

Кранк, Николсон (Crank J., Nicolson P.) [1947]. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. — Proc. Cambridge Philos. Soc., v. 43, No. 50, p. 50—67.

Краудер, Дальтон (Crowder H. J., Dalton C.) [1969]. On the stability of Poiseuille pipe flow. — Tech. Rept. No. 1, Univ. of Houston, Dep. of Mech. Eng., Houston, Texas.

— — [1971a]. On the stability of Poiseuille flow in a pipe. — J. of Comput. Phys., v. 7, p. 12—31.

— — [1971б]. Errors in the use of nonuniform mesh systems. — J. of Comput. Phys., v. 7, p. 32—45.

Краузе (Krause E.) [1969]. Comment on 'Solution of a three-dimensional boundary-layer flow with separation'. — AIAA J., v. 7, No. 3, p. 575—576. [Имеется перевод: Замечание к статье «Решение задачи о трехмерном пограничном слое с отрывом». — РТК, т. 7, № 3, с. 222—223.]

Краузе, Хиршель (Krause E., Hirshel E. H.) [1971]. Exact numerical solutions for three-dimensional boundary layers. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Точные численные решения для трехмерных пограничных слоев. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 207—217.]

Крейн (Crane R. I.) [1968]. Numerical solutions of hypersonic near wake flow by the Particle-In-Cell method. — N69-35664, Oxford Univ.

Крейс (Kreiss H. O.) [1964]. On difference approximations of the dissipative type for hyperbolic differential equations. — Comm. Pure and Appl. Math., v. 17, p. 335—353.

— [1968]. Stability theory for difference approximations of mixed initial boundary value problems. I. — Math. of Computation, v. 22, No. 104, p. 703—714.

Крейс, Лундквист (Kreiss H. O., Lundquist E.) [1968]. On difference approximations with wrong boundary values. — Math. of Computation, v. 22, p. 1—12.

Крейс, Олиджер (Kreiss H. O., Oliger J.) [1973]. Methods of the approximate solution of time dependent problems. — GARP Publ. Series No. 10, World Meteorological Organization.

Кренделл (Crandall S. H.) [1956]. Engineering analysis a survey of numerical procedures. — New York: McGraw-Hill.

Креншоу (Crenshaw J. P.) [1966]. Two-dimensional and radial laminar free jets and wall jets. — Ph. D. Thes., Georgia Inst. of Technol.

Креншоу, Хаббарт (Crenshaw J. P., Hubbartt J. E.) [1969]. Comments on 'Transformations for infinite regions and their applications to flow problems'. — AIAA J., v. 7, No. 11, p. 2189. [Имеется перевод: Замечания к статье «Преобразование бесконечных областей и их применение к задачам использования течений». — РТК, т. 7, № 11, с. 167.]

Кридер, Фосс (Crider J. E., Foss A. S.) [1966]. Computational studies of transients in packed tubular chemical reactors. — Amer. Inst. Chem. Eng. J., v. 12, No. 3, p. 514—525.

Крокко (Crocco L.) [1965]. A suggestion for the numerical solution of the steady Navier — Stokes equations. — AIAA J. v. 3, No. 10, p. 1824—1832. [Имеется перевод: Метод численного решения уравнений Навье — Стокса для установившихся течений. — РТК, т. 3, № 10, с. 43—54.]

Кроули (Crowley B. K.) [1967]. PUFL, An 'Almost-Lagrangian' gasdynamic calculation for pipe flows with mass entrainment. — J. of Comput. Phys., v. 2, p. 61—86.

Кроули (Crowley W. P.) [1967]. Second-order numerical advection. — J. of Comput. Phys., v. 1, p. 471—484.
— [1968a]. Numerical advection experiments. — Monthly Weather Rev., v. 96, No. 1, p. 1—11.
— [1968б]. Numerical calculations of viscous incompressible stratified shear flows. — UCRL-50538, Univ. of California, Lawrence Radiation Lab., Livermore.
— [1970a]. Some numerical experiments with Rayleigh — Taylor instability for a compressible inviscid fluid. — UCRL-50845, Lawrence Radiation Lab., Livermore, California.
— [1970б]. An empirical theory for large amplitude Rayleigh — Taylor instability. — UCRL-72650, Lawrence Radiation Lab., Livermore, California.
— [1970в]. A numerical model for viscous, nondivergent, barotropic, wind-driven, ocean circulations. — J. of Comput. Phys., v. 6, p. 183—199.
— [1971]. FLAG: A Free-Lagrange method for numerically simulating hydrodynamic flows in two dimensions. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: FLAG — свободно-лагранжев метод для численного моделирования гидродинамических течений в двух измерениях. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 135—145.]
Крупп, Мёрман (Krupp J. A., Murman E. M.) [1971]. The numerical calculation of steady transonic flows past thin lifting airfoils and slender bodies. — AIAA Paper No. 71-566, AIAA 4th Fluid and Plasma Dynamics Conference, Palo Alto, California, June 21—23, 1971.
Ксерикос (Xerikos J.) [1968]. A time-dependent approach to the numerical solution of the flow field about an axisymmetric vehicle at angle of attack. — Douglas Aircraft Company, Santa Monica, California; см. также Xerikos J., Anderson W. A. — NASA CR-61982.
Кузик (Kusic G. L.) [1969]. On stability of numerical methods for systems of initial-value partial differential equations. — J. of Comput. Phys., v. 4, p. 272—275.
Кузик, Лави (Kusic G. L., Lavi A.) [1968]. Stability of difference methods for initial-value type partial differential equations. — J. of Comput. Phys., v. 3, p. 358—378.
Кузнецов Б. Г. [1969]. Numerical methods for solving some problems of viscous liquid. — Fluid dynamics transactions, v. 4. — Warszawa: RWN, p. 85—89.
Кули, Тьюки (Cooley J. W., Tukey J. W.) [1965]. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. — Math. of Computation, v. 19, p. 297.
Курант, Изаксон, Рис (Courant R., Isaacson E., Rees M.) [1952]. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. — Comput. on Pure and Appl. Math., v. V, p. 243—255.
Курант Р., Фридрихс К. (Courant R., Friedrichs K. O.) [1948]. Supersonic flow and shock waves. — New York: Interscience Publishers, Inc. [Имеется перевод: Сверхзвуковое течение и ударные волны. — М.: ИЛ, 1950.]
Курант, Фридрихс, Леви (Courant R., Friedrichs K. O., Lewy H.) [1928]. Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. — Mathematische Annalen, B. 100, S. 32—74. [Имеются переводы: О разностных уравнениях математической физики. — УМН, 1940, вып. VIII, с. 125; On the partial difference equations of mathematical physics. — IBM J., 1967, March, p. 215—234.]
Курихара (Kurihara Y.) [1965]. On the use of implicit and iterative techniques for the time integration of the wave equation. — U. S. Weather Bureau Mothly Weather Rev., v. 93, p. 33—46.
Курцрок (Kurzrock J. W.) [1966]. Exact numerical solutions of the time-dependent compressible Navier — Stokes equiations. — Ph. D. Thes., CAL Rept. No. AG-2026-W-1, Cornell Univ., Ithaca, New York.

Курцрок, Мейтс (Kurzrock J. W., Mates R. E.) [1966]. Exact numerical solutions of the time-dependent compressible Navier — Stokes equations. — AIAA Paper No. 66-30.

Кускова Т. В. [1967]. Разностный метод расчета течений вязкой несжимаемой жидкости. — В. кн.: Вычислительные методы и программирование, вып. 7.— М.: Изд-во МГУ.

Кушнер (Kushner H. J.) [1969]. Probability limit theorems and the convergence of finite difference approximation of partial differential equations. — NASA CR-107124.

Лаасонен (Laasonen P.) [1949]. Über eine Methode zur Lösung der Warmeleitungsgleichung. — Acta Math., v. 81, p. 309.

— [1958a]. On the truncation error of discrete approximations to the solutions of Dirichle problems in a domain with corners. — J. Ass. Computing Mach., v. 5, p. 32—38.

— [1958б]. On the solution of Poisson's difference equation. — J. Ass. Computing Machinery, v. 5, p. 370—382.

Лаваль (Laval P.) [1969]. Pseudo-viscosity method and starting process in a nozzle. — Recherche Aerospat., No. 131, July/August, p. 3—16.

— [1971]. Time-dependent calculation method for transonic nozzle flows. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Нестационарный метод расчета трансзвуковых течений в соплах. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей.— М.: Мир, 1973, с. 9—17.]

Лаван, Нильсен, Феджер (Lavan Z., Nielsen H., Fejer A. A.) [1969]. Separation and flow reversal in swirling flows in circular ducts. — Phys. of Fluids, v. 12, No. 9, p. 1747—1757.

Ладлофф, Фридман (Ludloff H. F., Friedman M. B.) [1955]. Aerodynamics of blasts — diffraction of blast around finite corners. — J. Aeronaut. Sci., January, p. 27—34.

Ладфорд, Полячек, Зегер (Ludford G., Polachek H., Seeger R. J.) [1953]. On unsteady flow of compressible viscous fluids. — J. Appl. Phys., v. 24, p. 490—495. [Имеется перевод: О неустановившемся течении сжимаемой вязкой жидкости. — Механика, 1954, № 1(23), с. 70—80.]

Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Физматгиз, 1961. — 2-е изд., перераб. и дополн. — М.: Наука, 1970.

Лайтхилл (Lighthill M. J.) [1954]. The response of laminar skin friction and heat transfer to fluctuations in the stream velocity. — Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, v. 224, p. 1—23.

Лакинбилл, Чайлдс (Luckinbill D. L., Childs B.) [1968]. Inverse problems in partial differential equations. — Rept. RE 1-68, Houston Univ., Houston, Texas.

Лакс (Lax P. D.) [1954]. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. — Comm. Pure and Appl. Math., v. 7, p. 159—193.

— [1957]. Hyperbolic systems of conservation laws II. — Comm. Pure and Appl. Math., v. 10, p. 537—566.

— [1958]. Differential equations, difference equations, and matrix theory. — Comm. Pure and Appl. Math., v. 11, p. 175—194.

— [1961]. On the stability of difference approximations to solutions of hyperbolic equations with variable coefficients. — Comm. Pure and Appl. Math. v. 14, p. 497—520.

— [1967]. Hyperbolic difference equations: A review of the Courant — Friedrichs — Lewy paper in the light of recent developments. — IBM J., March, p. 235—238.

— [1969]. Nonlinear partial differential equations and computing. — SIAM Rev., v. 11, No. 1, p. 7—19.

Лакс, Вендрофф (Lax P. D., Wendroff B.) [1960]. Systems of conservation laws. — Comm. Pure and Appl. Math., v. 13, p. 217—237.
— — [1964]. Difference schemes with high order of accuracy for solving hyperbolic equations. — Comm. Pure and Appl. Math., v. 17, p. 381.
Лакс, Ниренберг (Lax P. D., Nirenberg L.) [1966]. On stability for difference schemes, a sharp form of Gärding's inequality. — Comm. Pure and Appl. Math., v. 19, No. 4, p. 473—492.
Лакс, Рихтмайер (Lax P. D., Richtmyer R. D.) [1956]. Survey of the stability of linear finite difference equations. — Comm. Pure and Appl. Math., v. 9, p. 267—293.
Ламб Г. (Lamb H.) [1945]. Hydrodynamics. — 6th ed. — New York: Dover Publications. Chapter IV. [Имеется перевод: Гидродинамика. — М. — Л.: ГИТТЛ, 1947.]
Ландсхоф (Landshoff R.) [1955]. A numerical method for treating fluid flow in the presence of shocks. — LASL Rept. No. LA-1930, Los Alamos, New Mexico.
Ланкастер (Lancaster P.) [1970]. Explicit solutions of linear matrix equations. — SIAM Rev. v. 12, p. 544—566.
Лапидус (Lapidus A.) [1967]. A detached shock calculation by second-order finite differences. — J. of Comput. Phys., v. 2, p. 154—177.
Ларкин (Larkin B. K.) [1964]. Some stable explicit difference approximations to the diffusion equation. — Math. of Computation, v. 18, p. 196—202.
— [1966]. Numerical solution of the continuity equation. — Amer. Inst. Chem. Eng. J., v. 12, No. 5, p. 1027—1028.
Ларсен (Larsen T.) [1969]. Superelliptic and related coordinate systems. — Rept. No. 72, Lab. of Electromagnetic theory, Univ. of Denmark, Lyngby.
Латроп (Lathrop K. D.) [1969]. Spatial differencing of the transport equation: positivity vs. accuracy. — J. of Comput. Phys., v. 4, p. 475—598.
Лауфер (Laufer J.) [1969]. Thoughts on compressible turbulent boundary layers. — Memo RM-5946-PR, Rand Corporation, Santa Monica, California.
Лебейль (LeBail R.) [1969]. Fast reversal mapping for the solution of two-dimensional operators. — SUIPR Rep. No. 314, Inst. for Plasma Res., Stanford Univ., Stanford, California.
— [1972]. Use of fast Fourier transforms for solving partial differential equations in physics. — J. of Comput. Phys., v. 9, No. 3, p. 440—465.
Леблан (Leblanc L. L.) [1967]. A numerical experiment in predicting stratus clouds. — Ph. D. Diss., Texas A & M Univ., College Station.
Левин (Levine J. N.) [1968]. Finite difference solution of the laminar boundary layer equations including second-order effects. — AIAA Paper No. 68-739, AIAA Fluid and Plasma Dunamics Conference, Los Angeles, California, June 24—26, 1968.
Лейт (Leith C. E.) [1964]. Numerical simulation of the Earth's atmosphere. — Univ. of California, Livermore, UCRL 7986-T.
— [1971]. Two-dimensional turbulence and atmospheric predictability. — In: Computational Physics, v. 4, p. 1—28.
— [1969]. Diffusion approximation to spectral transfer in homogenous turbulence. — In: Frenkiel and Stewartson [1969].
— [1971]. Two-dimensional turbulence and atmospheric predictability. — In: Holt [1971].
Леммон, Хитон (Lemmon E. C., Heaton H. S.) [1969]. Accuracy, stability, and oscillation characteristics of finite element method for solving heat conduction equation. — ASME Paper 69-WA/HT-35.
Леслп (Leslie L. M.) [1971]. The development of concentrated vortices: a numerical study. — J. Fluid Mech., v. 48, Part 1, p. 1—21.
Лестер (Lester W. G. S.) [1961]. — Aerospace Research Committee Report Mem. (Gt. Bt) No. 3240.
Ли (Lee C. C.) [1966]. Gasdynamic structure of jets from plug nozzle. — AIAA J., v. 4, No. 6, p. 1114—1115. [Имеется перевод: Газодинамическая струк-

тура струй, истекающих из сопел с центральным телом. — РТК, т. 4, № 6, с. 195—196.]

Ли, Инмен (Lee C. C., Inman S. J.) [1964]. Numerical analysis of plug nozzles by the method of characteristics. — Brown Eng. Tech. Note R-101.

Ли, Фань (Lee E. S., Fan L. T.) [1968]. Quasilinearization technique for solution of boundary layer equations. — Canadian J. Chem. Eng., v. 46, p. 200—203.

Ли, Фын (Lee J.-S., Fung U.-C.) [1970]. Flow in locally constricted tubes at low Reynolds numbers. — J. Appl. Mech., v. 37, Ser. E, No. 1, p. 9—17. [Имеется перевод: Течение в трубах с местными сужениями при малых числах Рейнольдса. — Прикладная механика, Мир, т. 37, № 1, с. 8—16.]

Ли (Li C. P.) [1971]. Time dependent solutions of nonequilibrium airflow past a blunt body. — AIAA Paper No. 71-595, AIAA 4th Fluid and Plasma Dynamics Conference, Palo Alto, California, June 21—23, 1971.

Лизен (Lysen J. C.) [1964]. Variable mesh difference equation for the stream function in axially symmetric flow. — AIAA J., v. 2, No. 1, p. 163—165. [Имеется перевод: Разностное уравнение с переменной сеткой для функции тока в осесимметричном течении. — РТК, т. 2, № 1, с. 208—209.]

Лик (Lick D. W.) [1969]. A divergence theorem for a non-linear Dirichlet problem. — J. of Comput. Phys., v. 4, p. 142—143.

Лик, Танстолл (Lick D. W., Tunstall J. N.) [1968]. A study of non-linear Dirichlet problems. — Rept. No. K-1737, Union Carbide Corporation, Nuclear Division, Oak Ridge Gaseous Diffusion Plant, Oak Ridge, Tennessee.

Лил (Leal L. G.) [1969]. A study of steady, closed streamline flows at large Reynolds number. — Ph. D. Diss., Stanford Univ., Stanford, California.

Лилли (Lilly D. K.) [1965]. On the computational stability of numerical solutions of time-dependent non-linear geophysical fluid dynamics problems. — U. S. Weather Bureau Monthly Weather Rev., v. 93, No .1, p. 11—26.

— [1966]. Theoretical models of convection elements and ensembles. — In: Advances in numerical weather prediction, 1965—66. Seminar Series. — Hartford: Travelers Res. Center, Inc., p. 24—33.

— [1969]. Numerical simulation of two-dimensional turbulence. — In: Frenkiel and Stewartson [1969].

— [1971]. Numerical simulation of developing and decaying two-dimensional turbulence. — J. Fluid Mech., v. 45, Part 2, p. 395—415.

Линесс (Lyness J. N.) [1970]. The calculation of Fourier coefficients by the Mobius inversion of the Poisson summation formula, Part 1, Functions whose early derivatives are continuous. — Math. of Computation, v. 24, No. 109, p. 101—135.

Линч, Райс (Lynch R. E., Rice J. R.) [1968]. Convergence rates of ADI methods with smooth initial error. — Math. of Computation, v. 22, No. 102, p. 311—335.

Липман (Liepman H.) [1918]. Die angenäherter Ermittelung harmonischer Functionen und konformer Abbildungen. — Sitz. Bayer. Akad. Wiss., Math.-phys. Klasse.

Липман Г. В., Рошко А. (Liepman H. W., Roshko A.) [1957]. Elements of gas dynamics. — Wiley. [Имеется перевод: Элементы газовой динамики. — М.: ИЛ, 1960.]

Липницкий Ю. М., Лифшиц Т. Б. [1970]. О расчете обтекания тел вращения трансзвуковым потоком. — ПММ, т. 34, № 3, с. 508—513.

Липпс, Самервилл (Lipps F. B., Somerville R. C. J.) [1971]. Dynamics of variable wavelength in finite-amplitude Benard convection. — Phys. of Fluids, v. 14, No. 4, p. 759—765.

Ло (Lo C.-F.) [1969]. Numerical solutions of the unsteady heat equation. — AIAA J., v 7, No. 5, p. 973—975. Имеется перевод: Численные решения уравнения неустановившейся теплопроводности. — РТК, т. 7, № 5, с. 217.]

Лок (Loc T. P.) [1970]. Transfert thermique instationnaire en ecoulement laminaire a l'entree des tubes circulaires. — Internat. J. Heat and Mass Transfer, v. 13, p. 1767—1778.

Локк (Lock R. C.) [1970]. Test cases for numerical methods in two-dimensional transonic flows. — AGARD R-575-70, Nat. Physical Lab., Teddington, England.

Ломекс, Катлер, Фуллер (Lomax H., Kutler P., Fuller F. B.) [1970]. The numerical solution of partial differential equations governing convection. — AGARD-AG-146-70, Advisory Group for Aerospace Research and Development, Paris.

Ломекс, Райлев, Руллер (Lomax H., Railev H. E., Ruller F. B.) [1969]. On some numerical difficulties in integrating the equations for one-dimensional nonequilibrium nozzle flow. — NASA TN D-5176, National Aeronautics and Space Administration, Ames Res. Center, Moffett Field, California.

Лонгли (Longley H. J.) [1960]. Methods of differencing in Eulerian hydrodynamics. — LASL Rept. No. LAMS-2379, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico.

Лоренц (Lorenz E. N.) [1963]. Deterministic nonperiodic flow. — J. of the Atmospheric Sci., v. 20, No. 2, p. 130—141.

Лоэр (Loer S.) [1969]. Examination of the stability of disturbed boundary-layer-flow by a numerical methods. — In: Frenkiel and Strewartson [1969].

Лу (Lu Y.-P.) [1967]. Finite difference solutions of the acoustic radiation equation in the near field. — Ph. D. Thes., Univ. of Houston, Texas.

Льюис (Lewis C. H.) [1970a]. Numerical methods for nonreacting and chemically reacting laminar flows — Tests and comparisons. — AIAA Paper No. 70-808, AIAA 3rd Fluid and Plasma Dynamics Conference, Los Angeles, California, June 29 — July 1, 1970.

— [1970б]. Nonreacting and chemically reacting viscous flows over a hyperboloid at hypersonic condition. — Advisory Group for Aerospace Research and Development, Paris.

— [1971]. Numerical methods for nonreacting and chemically reacting laminar flows. — Tests and Comparisons. — J. Spacecraft, v. 8, No. 2, p. 117—122.

Льюис, Андерсон, Майнер (Lewis C. H., Anderson E. C., Miner E. W.) [1971a]. Nonreacting and equilibrium chemically reacting turbulent boundary-layer flows. — AIAA Paper No. 71-597, AIAA 4th Fluid and Plasma Dynamics Conference, Palo Alto, California, June 21-23, 1971.

Льюис, Мур, Блейк (Lewis C. H., Moore F. G., Black R.) [1971б]. Sharp and blunt cones at angle of attack in supersonic nonuniform free streams. — AIAA Paper No. 71051, AIAA 9th Aerospace Sciences Meeting, New York, January 25—27, 1971.

Лю, Хоппер, Халберт (Liu C. Y., Hopper A. T., Hulbert L. E.) [1969]. Transient heat conduiction with time dependent boundary conditions. — Batelle Memorial Institute.

Люгт, Римон (Lugt H. J., Rimon Y.) [1970]. Finite-difference approximations of the vorticity of laminar flows at solid surfaces. — Naval Ship Research and Development Center Rept. 3306, Washington, D. C.

Люгт, Хослинг (Lugt H. J., Haussling H. J.) [1971]. Laminar flows past a flat plate at various angles of attack. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Ламинарный поток за плоской пластинкой, обтекаемой под разными углами атаки. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 270—276.]

Люси, Хаусен (Lucey J. W., Housen K. F.) [1964]. A stable method of matrix factorization. — Trans. Amer. Nuclear Soc., v. 7, p. 259.

Магнус, Иосихара (Magnus R., Yoshihara H.) [1970]. Inviscid transonic flow over airfoils. — AIAA J., v. 8, No. 12, p. 2157—2162. [Имеется перевод: Невязкое сверхзвуковое обтекание профилей. — РТК, т. 8, № 12, с. 53—66.]

Магомедов К. М. [1966]. Метод характеристик для численного расчета пространственных течений газа. — ЖВМ и МФ, т. 6, № 2, с. 313—325.

Магомедов К. М., Холодов А. С. [1967]. О сверхзвуковом пространственном обтекании треугольного крыла с притупленными кромками. — Изв. АН СССР, МЖГ, № 4, с. 159—163.

Мадер (Mader C. L.) [1964]. The two dimensional hydrodynamic hot spot. — LASL Rept. LA-3077, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico.

Майкл (Michael P.) [1966]. Steady motion of a disk in a viscous fluid. — Phys. of Fluids, v. 9, No. 3, p. 466—471.

Макано (Macagno E. O.) [1965]. Some new aspects of similarity in hydraulics. — La Houille Blanche, t. 20, No. 3, p. 751—759.

Макано, Хын (Macagno E. O., Hung T. K.) [1967]. Pressure, Bernoulli sum, and momentum and energy relations in a laminar zone of separation. — Phys. of Fluids, v. 10, No. 1, p. 78—82.

Мак-Глолин, Гребер (McGlaughlin D. W., Greber I.) [1967]. Experiments on the separation of a fluid jet from a curved surface. — In: Advances in Fluidics. Fluidics Symposium, Chicago, Illinois, May 9—11, 1967 (ASME), p. 14—30.

Мак-Грат (McGrath F. J.) [1967]. Nonstationary plane flow of viscous and ideal fluids. — Arch. Rat. Mech. and Analysis, v. 27, p 329—348.

Макдональд (McDonald P. W.) [1971]. The computation of transonic flow through two-dimensional gas turbine cascades. — Paper 71-GT-89, Amer. Soc. of Mech. Eng., Gas Turbine Conference and Products Show, Houston, Texas, March 28 — April 1, 1971.

Мак-Доуэлл (McDowell L. K.) [1967]. Variable successive over-relaxation. — Ph. D. Thes., Univ. of Illinois, Urbana.

Мак-Ки, Митчелл (McKee S., Mitchell A. R.) [1970]. Alternating direction methods for parabolic equations in two space dimensions with a mixed derivative. — Computer J., v. 13, No. 1, p. 81—86.

Мак-Кормак (MacCormack R. W.) [1969]. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. — AIAA Paper No. 69-354.

— [1971]. Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer. — In: Holt [1971].

Мак-Кормак, Болдуин (MacCormack R. W., Baldwin B. S.) [1975]. — AIAA Paper 75-1.

Мак-Кормак, Полли (MacCormack R. W., Paullay A. J.) [1972]. Computational efficiency achieved by time splitting of finite dfference operators. — AIAA Paper, January, 1972.

Мак-Кормик, Хансен (McCormick W. T., Jr., Hansen K. F.) [1969]. Numerical solution of the two-dimensional time-dependent multigroup equations. — MIT 3901—1, Dept. of Nuclear Engineering, Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge.

Мак-Крири (McCreary J.) [1967]. The mathematical calculation of the dynamic behavior of a three-dimensional atmospheric convection. — Ph. D. Thes., Univ. of Kansas, Lawrence.

Макнамара (McNamara W.) [1966]. Axisymmetric interaction of a blast wave with the shock layer of a high-speed blunt body. — MIT Aeroelastic and Structures Res. Lab., ASRL TR 121-15.

— [1967]. FLAME computer code for the axisymmetric interaction of a blast wave with a shock layer on a blunt body. — J. Spacecraft and Rockets, v. 4, p. 790—795.

Макферсон (MacPherson A. K.) [1971]. The formation of shock waves in a dense gas using a molecular-dynamics type technique. — J. Fluid Mech., v. 45, Part 3, p. 601—621.

Манкузо (Mancuso R. L.) [1967]. A numerical procedure for computing fields of stream function and velocity potential. — J. of Appl. Meteorology, v. 6, p. 994—1001.

Манн, Бредшоу, Кокс (Mann W. R., Bradshaw C. L., Cox J. G.) [1957]. Improved approximations to differential equations by difference equations. — J. Math. and Phys., v. 35, No. 4, p. 408—415.

Марис, Пассман (Marris A. W., Passman S. L.) [1968]. Generalized circulation-preserving flows. — Arch. for Rat. Mech. and Analysis, v. 28, p. 245—265.

Мартелуччи, Ри, Сонтовски (Martelluci A., Rie H., Sontowski J. F.) [1969]. Evaluation of several eddy viscosity models through comparison with measurements in hypersonic flows. — AIAA Paper No. 69-688, AIAA Fluid and Plasma Dynamics Conference, San Francisco, California, June 16—18, 1969.

Мартин, Ти (Martin D. W., Tee G. J.) [1961]. Iterative methods for linear equations with symmetric positive definite matrix. — Computer J., v. 4, p. 242—254.

Мартин, Болдуин (Martin E. D., Baldwin B. S.) [1972]. — In: Convection in the tanks of a rotating spacecraft. — NASA TR R-386, p. 25.

Марчук Г. И. [1964]. Теоретическая модель прогноза погоды. — ДАН СССР, т. 155, № 5, с. 1062—1065.

Маслях, Эпштейн (Masliyah J. H., Epstein N.) [1970]. Numerical study of steady flow past spheroids. — J. Fluid Mech., v. 44, Part 3, p. 493—512.

Махин Н. А., Сягаев В. Ф. [1966]. К численному решению задачи о сверхзвуковом обтекании конических тел под углом атаки. — Изв. АН ССР, МЖГ, № 1, с. 140—141.

Машек (Mascheck H.-J.) [1968]. Comments on the numerical integration of the equations of motion for incompressible flows at large Reynolds numbers. — Wissenschaft. Zeitschrift, B. 16, No. 4, S. 1227—1228.

Мейер (Meyer K. A.) [1969]. A three-dimensional study of flow between concentric rotating cylinders. — LASL Rept. LA 4202, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico.

Мейттс (Matthes W.) [1970]. Simulation of relaxation processes by Monte Carlo. — J. of Comput. Phys., v. 6, p. 157—167.

Меладзе В. [1970]. Схемы повышенного порядка точности для систем параболических и эллиптических уравнений. — ЖВМ и МФ, т. 10, № 2, с. 482—490.

Мелник, Айвс (Melnik R. E., Ives D. C.) [1971]. Subcritical flows over two dimensional airfoils by a multistrip method of integral relations. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Расчет докритических течений около плоских крыловых профилей при помощи многополосного метода интегральных соотношений. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 26—38.]

Мёрман, Коул (Murman E. M., Cole J. D.) [1971]. Calculation of plane steady transonic flows. — AIAA J., v. 9, No. 1, p. 114—121. [Имеется перевод: Расчет плоских установившихся трансзвуковых течений. — РТК, т. 9, № 1, с. 137—147.]

Мёрман, Крупп (Murman E. M., Krupp J. A.) [1971]. Solution of the transonic potential equation using a mixed finite difference scheme. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Решение трансзвукового уравнения для потенциала с помощью смешанной системы конечно-разностных схем. В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 49—62.]

Мёрфи (Murphey W. D.) [1963]. Numerical analysis of boundary layer problems. — NYO 1480-63, Courant Inst. of Math. Sci., New York Univ., New York.

Месон, Торн (Mason D. S., Thorne B. J.) [1970]. A preliminary report describing the rezoning features of the WONDY IV program. — SC-DR-70-146, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico.

Массон, Тейлор, Фостер (Masson B. A., Taylor T. D., Foster R. M.) [1969]. Application of Godunov's method to bluntbody calculations. — AIAA J., v. 7, No. 4, p. 694—698. [Имеется перевод: Применение метода Годунова для расчета обтекания затупленных тел. — РТК, т. 7, № 4, с. 148—154.]

Массон (Masson B. S.) [1968]. A simplified angle of attack program for transient blunt body flow fields. — AMC 68-36, Picatinny Arsenal, Dover, New Jersey.

Мета, Лаван (Mehta U. B., Lavan Z.) [1968]. Flow in a two-dimensional channel with a rectangular cavity. — NASA-CR-1245.

— — [1969]. Flow in a two-dimensional channel with a rectangular cavity. — J. of Appl. Mech., v. 36, No. 4, p. 897—901. [Имеется перевод: Течение в двумерном канале при наличии впадины прямоугольной формы. — Прикладная механика, Мир, № 4, с. 256.]

Метин (Matin S. A.) [1968]. Numerical iteration of an elliptic mixed boundary-value problem in a region with curved boundary. — J. of Comput. Phys., v. 3, p. 327—330.

Меттьюс (Matthews C. W.) [1969]. A numerical analysis of the use of perforated walls to control shock location and movement in an internal compression supersonic inlet. — NASA TR-R-317, NASA Langley Res. Center, Langley Station, Virginia.

Мигдал, Клейн, Моретти (Migdal D., Klein K., Moretti G.) [1969]. Time-dependent calculations for transonic nozzle flow. — AIAA J., v. 7, No. 2, p. 372—374. [Имеется перевод: Расчеты трансзвукового течения в сопле методом установления. — РТК, т. 7, № 2, с. 235—237.]

Миллер (Miller R. H.) [1967]. An experimental method for testing numerical stability in inital-value problems. — J. of Comput. Phys., v. 2, p. 1—7.

Минц (Mintz Y.) [1965]. Very long-term global integration of the primitive equations of atmospheric motion. — WMO-IUGG Symposium on Research Development, Aspects of Long-Range Forecasting, Boulder, Colorado, 1964, WMO Tech. Note No. 66, p. 141.

Митчелл (Mitchell A. R.) [1969]. Computational methods in partial differential equations. — J. Wiley and Sons, Ltd.

— [1972]. Variational principles and the finite elements method. — J. Instit. Math. and Its Appl., v. 9, p. 378—389.

Митчелл (Mitchell T. M.) [1970]. Numerical studies of asymmetric and thermodynamic effects on cavitation bubble collapse. — Rept. UMICH 03371-5-T, Mech. Eng. Dept., Michigan Univ., Ann. Arbor.

Миякода (Miyakoda K.) [1962]. Contribution to the numerical weather prediction — Computation with finite difference. — Japanese J. of Geophysics, v. 3, p. 75—190.

Моисеенко Б. Д., Рождественский Б. Л. [1970]. Численное решение стационарных уравнений гидродинамики при наличии тангенциальных разрывов. — ЖВМ и МФ, т. 10, № 2, с. 499—504.

— — [1971]. The calculation of hydrodynamic forces with tangential discontinuities. — In: Holt [1971].

Моленкамп (Molenkamp C. R.) [1968]. Accuracy of finite difference methods applied to the advection equation. — J. of Appl. Meteorology, v. 7, p. 160—167.

Морено (Moreno J. B.) [1967]. Inverse-method and method-of-characteristics flow-field program. — SC-DR-67-652, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico.

Моретти (Moretti G.) [1968a]. Inviscid blunt body shock layers — two-dimensional symmetric and axisymmetric flows. — Brooklyn Polytechn. Inst., PIBAL Rept. No. 68-15.

— [1968б]. The importance of boundary conditions in the numerical treatment of hyperbolic equations. — Polytechn. Inst. Brooklyn, PIBAL Rept. No. 68-34; In: Frenkiel and Stewartson [1969].

— [1969a]. A critical analysis of numerical techniques: the piston-driven inviscid flow. — Polytechn. Inst. Brooklyn, PIBAL Rept. No. 69-25.

— [1969б]. The choice of a time-dependent technique in gas dynamics. — PIBAL Rept. No. 69-26, Polytechn. Inst. Brooklyn, Dep. Aerospace Eng. and Appl. Mech., Farmingdale, New York.

— [1971]. Initial conditions and imbedded shocks in the numerical analysis of transonic flows. — In: Holt [1971].
Моретти, Аббетт (Moretti G., Abbett M.) [1966a]. Numerical studies on base flow. — GASL Tech. Rept. 584.
— — [1966б]. A time-dependent computational method for blunt body flows. — AIAA J., v. 4, No. 12, p. 2136—2141. [Имеется перевод: Расчет обтекания затупленных тел методом установления. — РТК, т. 4, № 12, с. 72—79.]
Моретти, Блейх (Moretti G., Bleich G.) [1967]. Three-dimensional flow around blunt bodies. — AIAA Reprint 67-222.
— — [1968]. Three-dimensional inviscid flow about supersonic blunt cones at angle of attack. — SC-RR-68-3726, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico.
Моретти, Салас (Moretti G., Salas M. D.) [1969]. The blunt body problem for a viscous rarefied gas flow. — AIAA Paper No. 69-139, AIAA 7th Aerospace Sciences Meeting, New York, January 20—22, 1969.
— — [1970]. Numerical analysis of viscous one-dimenstional flows. — J. of Comput. Phys., v. 5, p. 487—506.
Моррис (Morris J. L.) [1971]. On the numerical solution of a heat equation associated with a thermal print head. II. — J. of Comput. Phys., v. 7, p. 102—119.
Морс, Нилсон (Morse R. L., Nielson C. W.) [1971]. Numerical simulation of the Weibel instability in one and two dimensions. — Phys. of Fluids, v. 14, No. 1, p. 830—840.
Моцкин, Вазов (Motzkin T. S., Wasow W.) [1953]. On the approximation of linear elliptic differential equations by difference equations with positive coefficients. — J. Math. and Phys., v. 31, p. 253—259.
Мур, Дежарнетт (Moore F. G., DeJarnette F. R.) [1971]. Viscous flow-field calculations on pointed bodies at angle of attack in nonuniform freestreams. — AIAA Paper No. 71-624, AIAA 4th Fluid and Plasma Dynamics Conference, Palo Alto, California, June 21—23, 1971.
Мурадоглу (Mouradoglou A. J.) [1967]. Numerical studies on the convergence of the Peaceman — Rachford alternating direction implicit method. — Interim Tech. Rept. No. 14, Computation Center, Univ. of Texas, Austin.
Муфти (Mufti I. H.) [1969]. Initial-value methods for two-point boundary-value problems. — National Research Council of Canada, NRC No. 11114, Ottawa.
Мышенков В. И. [1971]. Дозвуковое и трансзвуковое течение вязкого газа в следе плоского тела. — Изв. АН СССР, МЖГ, № 2, 73—79.
Мюллер, О'Лири (Mueller T. J., O'Leary R. A.) [1970]. Physical and numerical experiments in laminar incompressible separating and reattaching flows. — Los Angeles, California, June 29 — July 1, 1970.
Мюллер, Холл, Роуч (Mueller T. J., Hall C. R., Jr., Roache P. J.) [1970]. Influence of initial flow direction on the turbulent base pressure in supersonic axisymmetric flow. — J. Spacecraft, v. 7, No. 12, p. 1484—1488.
Нагель (Nagel A. L.) [1967]. Compressible boundary layer stability by time integration of the Navier — Stokes equation and an extension of Emmons' transition theory to hypersonic flow. — Boeing Sci. Res. Lab. Document DI-82-0655, Renton, Washington.
Накаяма (Nakayama P. I.) [1970]. Turbulence transport equations and their numerical solution. — AIAA Paper No. 70-3, AIAA 8th Aerospace Sciences Meeting, New York, January 19—21, 1970.
Наранг (Narang B. S.) [1967]. Numerical treatment of laminar free surface flows. — Ph. D Thes., Univ. of Illinois, Urbana.
Ндефо (Ndefo D. E.) [1969]. A numerical method for calculating steady unsymmetrical supersonic flow past cones. — Rept. No. AS-69-11, College of Engineering, Univ. of California, Berkeley.
фон Нейман (von Neumann J.) [1944]. Proposal and analysis of a numerical method for the treatment of hydrodynamical shock problems. — Nat. Def. and Res. Com. Rep. AM-551.

фон Нейман, Рихтмайер (von Neumann J., Richtmyer R. D.) [1950]. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. — J. Appl. Phys., v. 21, p. 232—257. [Имеется перевод: Метод численного расчета гидродинамических скачков. — Механика, 1951, № 1(5), с. 27—30.]

Нелсон (Nelson P., Jr.) [1970]. Application of invariant imbedding to the solution of partial differential equations by the continuous-space discrete time method. — Amer. Federation of Information Processing Societies, Spring Joint Computer Conference, Atlantic City, New Jersey, May 5—7, 1970.

Нигро, Вудворд, Брукс (Nigro B. J., Woodward R. A. Brucks C. R.) [1968]. A digital computer program for deriving optimum numerical integration techniques for real-time flight simulation. — Aerospace Medical Res. Lab. Rept. AMRL-TR-68-4, Air Force Systems Command, Wright — Patterson Air Force Base, Ohio.

Никастро (NiCastro J.) [1968]. Similarity studies on the radiative gas dynamic equations. — Tech. Rept. A-47, Case Inst. of Technol., Cleveland, Ohio, NASA-CR-94409.

Никел (Nickel K. L. E.) [1971]. Error bounds in boundary layer theory. — In: Holt [1971].

Николс (Nichols B. D.) [1971]. Recent extensions to the Marker-And-Cell method for incompressible fluid flows. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Дальнейшее развитие метода маркеров и ячеек для течений несжимаемой жидкости. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 165—173.]

Ниу, Хигути, Урасима (Niu K., Higuchi S., Urashima S.) [1969]. Analysis of time-dependent shock wave. — Japan Soc. for Aeronaut. and Space Sci. Transactions, v. 12, No. 21, p. 50—54.

Новак, Чен (Novack B. B., Cheng H. K.) [1971]. Numerical analysis and modelling of slip flows at very high Mach numbers. — In: Holt [1971].

Номура, Дейтерс (Nomura R., Deiters R. M.) [1968]. Improving the analog simulation of partial differential equations by hybrid computation. — Simulation, p. 73—79.

Нох (Noh W. F.) [1964]. CEL: a time-dependent, two-space-dimensional, coupled Eulerian-Lagrange code. — In: Methods in Computational Physics, v. 3, p. 117—180. [Имеется перевод: СЭЛ — совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач. — В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. Под ред. Б. Олдера и др. — М.: Мир, 1967, с. 128.]

Нох, Проттер (Noh W. F., Protter M. H.) [1963]. Difference methods and the equations of hydrodynamics. — J. of Math. and Mech., v. 12, No. 2, p. 149—191.

Нэш (Nash J. F.) [1969]. The calculation of three-dimensional turbulent boundary layers in incompressible flow. — J. Fluid Mech., v. 37, Part 4, p. 625—642.

О'Брайен (O'Brien G. D.) [1970]. A numerical investigation of finite-amplitude disturbances in a plane Poiseuille flow. — Ph. D. Diss. U. S. Naval Postgraduate School, Monterey, California.

О'Брайен, Хаймен, Каплан (O'Brien G. G., Hyman M. A. Kaplan S.) [1950]. A study of the numerical solution of partial differential equations. — J. Math. and Phys., v. 29, p. 223—251.

Овчарек (Owczarek J. A.) [1964]. Fundamentals of gas dynamics. — Scranton: International Textbook Co.

Огура (Ogura M.) [1969]. A direct solution of Poisson's equation by dimension reduction method. — J. Meteorological Soc. of Japan, Ser. II, v. 47, No. 4, p. 319—323.

Олдер Б., Фернбах С., Ротенберг М. (ред.) (Alder B., Fernbach S., Rotenberg M., eds.) [1970]. Methods in computational physics, v. 9, Plasma

Physics. [Имеется перевод: Вычислительные методы в физике плазмы. — М.: Мир, 1974.]
Олейник О. А. [1967]. О решении системы уравнений Прандтля методом конечных разностей. — ПММ, т. 31, № 1, с. 90—100.
О'Лири, Мюллер (O'Leary R. A., Mueller T. J.) [1969]. Correlation of physical and numerical experiments for incompressible laminar separated flows. — Tech. Rept. No. THEMIS-UND-69-4, Univ. of Notre Dame, College of Engineering, Notre Dame, Indiana.
Оман (Ohman G. A.) [1967]. Numerical calculation of steady convective mass transfer around a circular cylinder at small Reynolds numbers. — Acta Academiae Aboensis, v. 27, No. 1.
Онже (Aungier R. H.) [1971]. A computational method for unified solutions to the viscous flow field about blunt bodies. — Air Force Weapons Lab., Kirtland Air Force Base, New Mexico. — In: NASA-SP-252, The entry plasma sheath and its effects on space vehicle electromagnetic systems, p. 241—260.
Оренбергер, Баум (Ohrenberger J. T., Baum E.) [1970]. A theoretical model of the near wake of a slender body in supersonic flow.—AIAA Paper No. 70-792.
Орсаг (Orszag S. A.) [1969]. Numerical methods for the simulation of turbubence. — In: Frenkel and Stewartson [1969].
— [1970]. Analytical theories of turbulence. — J. of Fluid Mech., v. 41, No. 2, p. 363—386.
Орсаг, Израэли (Orszag S. A., Israeli M.) [1974]. Numerical solutions of viscous incompressible flows. — In: Annual review of fluid mechanics, v. 6. — Palo Alto: Annual Reviews, Inc.
Ошер (Osher S.) [1969a]. On systems of difference equations with wrong boundary conditions. — Math. of Comput., v. 23, No. 107, p. 567—572.
— [1969б]. Stability of difference approximations of dissipative type for mixed initial boundary value problems. 1. — Math. of Computation, v. 23, No. 106, p. 335—340.
Павлов Б. М. [1968а]. О расчете сверхзвукового обтекания затупленных тел с использованием полных уравнений Навье — Стокса. — Изв. АН СССР, МЖГ, № 3, с. 128—133.
— [1968б]. Численное решение задачи о сверхзвуковом вязком течении газа около затупленных тел. — В кн.: Вычислительная математика и программирование, вып. 11. — М.: Изд-во МГУ, с. 32—43.
Пайпс, Хованесян (Pipes L. A., Hovanessian S. A.) [1969]. Matrix-computer methods in engineering. — New York: John Wiley.
Паллер, Кейлор (Paller A. J., Kaylor R.) [1968]. Numerical studjes of penetrative convective instabilities. — Maryland Univ. Tech. Note DN-554, College Park.
Пальцев Б. В. [1970]. О сходимости метода последовательных приближений с расщеплением граничных условий при решении краевой задачи для уравнений Навье — Стокса. — ЖВМ и МФ, т. 10, 3, с. 785—788.
Паньяни (Pagnani B. R.) [1968]. An explicit finite-difference solution for natural convection in air in rectangular enclosures. — Ph. D. Thes., Oregon State Univ., Corvallis.
Парис, Уитекер (Paris J., Whitaker S.) [1965]. Confined wakes: a numerical solution of the Navier — Stokes equations. — Amer. Inst. Chem. Eng. J., v. 11, No. 6, p. 1033—1041.
Парлетт (Parlett B.) [1966]. Accuracy and dissipation in difference schemes. — Comm. in Pure and Appl. Math., v. 19, No. 1, p. 111—123.
Партер (Parter S. V.) [1967]. Elliptic equations. — IBM J., March, p. 244—247.
Пассман (Passman S. L.) [1970]. Two theorems in classical vorticity theory.— ZAMP, B. 21, No. 1, S. 130—133.
Патанкар, Сполдинг (Patankar S. V., Spalding D. B.) [1967a]. A finite-difference procedure for solving the equations of the two-dimensional boundary layer. — Internat. J. Heat Mass Transfer, v. 10, p. 1389—1411.

— — [19676]. Heat and mass transfer in boundary layers. — London: Morgan — Grampian.
— — [1972]. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. — Internat. J. Heat Mass Transfer, v. 15, No. 10, p. 1787—1806.
Пау, Керли, Каррус (Powe R. E., Carley C. T., Carruth S. L.) [1971]. A numerical solution for natural convection in cylindrical annuli. — J. of Heat Transfer, May, p. 210—220. [Имеется перевод: Численное решение задачи о свободной конвекции в цилиндрических каналах кольцевого сечения. — Теплопередача, № 4, с. 154.]
Пауэрс, Ниман, Дер (Powers S. A., Niemann A. F., Jr., Der J., Jr.) [1967]. A numerical procedure for determining the combined viscid-inviscid flow fields over generalized three-dimensional bodies. — Tech. Rept. AFFDL-TR-67-124, Vol. 1, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio.
Пауэрс, О'Нейлл (Powers S. A., O'Neill J. B.) [1963]. Determination of hypersonic flow fields by the method of characteristics. — AIAA J., v. 1, No. 7, p. 1693—1694. [Имеется перевод: Расчет гиперзвукового течения методом характеристик. — РТК, т. 1, № 7, с. 241.]
Пейн (Payne R. B.) [1958]. Calculation of unsteady viscous flow past a circular cylinder. — J. Fluid Mech., v. 4, p. 81.
Пен, Акривос (Pan F., Acrivos A.) [1967]. Steady flows in rectangular cavities. — J. Fluid Mech., v. 23, Part 4, p. 643—655.
Пейре, Вивиан (Peyret R., Viviand H.) [1975]. Computation of viscous compressible flows based on the Navier — Stokes equations. — AGARDograph No. 212.
Перейра (Pereyra V.) [1969]. Highly accurate numerical solution of quasilinear elliptic boundary value problems in $N$ dimensions. — MRC Technical summary Rep. № 1009, Math. Res. Center, Univ. of Wisconsin, Madison.
Печек, Хансон (Petschek A. G., Hanson M. E.) [1968]. Difference equations for two-dimensional elastic flow. — J. of Comput. Phys, v. 3, p. 307—321.
Пиачек (Piacsek S. A.) [1966]. The axisymmetric theory of flow in a rotating annulus: Numerical experiments. — Ph. D. Thes., MIT (1966); Sci. Rep. No. SR6, Rotating Fluids Lab., MIT.
— [1967]. Numerical experiments on convective flows in geophysical fluid systems. — DR 148, 7th Symposium Naval Hydrodynamics, Office of Naval Res., Dep. of the Navy.
— [1968]. Numerical experiments on thermal convection in geophysical fluid systems. — In: Proc. of the 7th Naval Hydrodynamics Symposium, Rome, Italy. — J. S. Government Priniting Office, p. 753.
— [1969a]. Penetrative thermohaline convection: Some numerical experiments.— Midwest Geophysical Fluid Dynamics Colloquium, Univ. of Chicago, Chicago, Illinois.
— [19696]. Numerical experiments on penetrative convection in a rotating fluid cooled uniformly from above. — Symposium on Fluid Mechanics in Natural Phenomena, Univ. of Newcastle-Upon-Tyne, England, April, 1969.
— [1960]. Three dimensional numerical experiments on penetrative convection in a rotating fluid. — Fourth Symposium on Numerical Simulation of Plasmas, Naval Res. Lab., Washington, D. C., November, 1970.
Пиачек, Уильямс (Piacsek S. A., Williams G.) [1970]. Conservation properties of convection difference schemes. — J. of Comput. Phys., v. 6, p. 393—405.
Пиачек, Хайд (Piacsek S. A., Hide R.) [1966]. The axisymmetric regime of thermal convection in a rotating annulus of liquids. — I. U. T. A. M. Symposium of Rotating Fluid Systems, LaJolla, California, April, 1966; J. Fluid Mech., 1966, v. 26, p. 393.
Пике (Piquet J.) [1970]. Resolution numerique de certaines cauches limites incompressibles instationnaires. — La Recherche Aerospatiale, No. 1970-2.

Пирс, Эмери (Pearce B. E., Emery A. F.) [1970]. Heat transfer by thermal radiation and laminar forced convection to a absorbing fluid in the entry region of a pipe. — J. of Heat Transfer, v. 92, No. 2, p. 221—230. [Имеется перевод: Теплопередача тепловым излучением и вынужденной ламинарной конвекцией к поглощающей жидкости во входном участке трубы. — Теплопередача, № 2, с. 8.]
Пирс (Pierce S.) [1970]. Partially discrete numerical solution of the generalized diffusion equation. — Ph. D. Thes., Univ. of California, Los Angeles.
Пирсон (Pearson C. E.) [1964]. A computational method for time-dipendent two-dimensional incompressible viscous flow problem. — Sperry Rand Res. Center Rep. SRRC-RR-64-17.
— [1965a]. A computational method for viscous flow problems. — J. Fluid Mech., v. 21, Part 4, p. 611—622. [Имеется перевод: Численный метод для задач вязкого потока. — Механика, 1965, № 6 (94), с. 65—77.]
— [1965б]. Numerical solutions for the time-dependent viscous flow between two rotating coaxial disks. — J. Fluid Mech., v. 21, Part 4, p. 623—633.
— [1968]. — MIT J. of Math. and Phys., v. 47, p. 351—358.
Пирсон, Каплан (Pearson J. T., Kaplan B.) [1970]. Computer time comparison of point and block successive over relaxation. — AFIT TR 70-6, Air Force Inst. of Technol., Wright — Patterson Air Force Base, Ohio.
Писмен, Ракфорд (Peaceman D. W., Rachford H. H., Jr.) [1955]. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. — J. Soc. Indust. Appl. Math., v. 3, No. 1, p. 28—41.
Плетчер (Pletcher R. H.) [1969]. On a finite-difference solution for the constant-property turbulent boundary layer. — AIAA J., v. 7, No. 2, p. 305—311. [Имеется перевод: О конечно-разностном решении уравнений турбулентного пограничного слоя при течении жидкости с постоянными свойствами. — РТК, т. 7, № 2, с. 138—146.]
Плетчер, Мак-Манус (Pletcher R. H., McManus H. N., Jr.) [1965]. The fluid dynamics of three dimensional liquid films with free surface shear: a finite difference approach. — Developments in Mechanics, v. 3, Part 2, p. 305—318.
Плоткин (Plotkin A.) [1968]. A numerical solution for the laminar wake behind a finite flat plate. — Ph. D. Thes., Stanford Univ., Stanford, California.
Плоткин, Флюгге-Лотц (Plotkin A., Flugge-Lotz I.) [1968]. A numerical solution for the laminar wake behind a finite flat plate. — Tech. Rept. No. 179, Stanford Univ., Stanford, California.
Плоус (Plows W. H.) [1968]. Some numerical results for two-dimensional steady laminar Benard convection. — Phys. of Fluids, v. 11, No. 8, p. 1593—1599.
Плустер (Plooster M. N.) [1970]. Shock waves from line sources. Numerical solutions and experimental measurements. — Phys. of Fluids, v. 13, No. 11, p. 2665—2675.
Полджер (Polger P. D.) [1971]. A study of non-linear computational instability for a two-dimensional model. — NOAA TM NWS NMC-49, U. S. Department of Commerce, National Oceanic and Atmospheric Administration, National Meteorological Center, Washington, D. C.
Полежаев В. И. [1966]. Численное решение системы одномерных стационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа. — Изв. АН СССР, МЖГ, № 6, с. 34—44.
Полежаев В. И. [1967]. Численное решение системы двумерных стационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа в замкнутой области. — Изв. АН СССР, МЖГ, № 2, с. 103—111.
Положий (Polozhii G. N.) [1965]. The method of summary representation for numerical solution of problems of mathematical physics. — New York: Pergamon Press.
Поль, Ахмад (Paul R. J. A., Ahmad A. I. S.) [1970]. Numerical solution of 2nd-order hyperbolic partial differential equations by the method of continuous characteristics. — Inst. of Electr. Eng. Proc., v. 117, June, p. 1166—1174.

Помраннинг, Уилсон, Линдли (Pomraning G. C., Wilson H., Lindley W.) [1969]. Theoretical and computational radiation hydrodynamics, v. I: Radiation-hydrodynamics, theoretical considerations. — GA 9530-Vol-1, Gulf General Atomic Inc., San Diego, California.

Попов Ю. П., Самарский А. А. [1969]. Полностью консервативные разностные схемы. — ЖВМ и МФ, т. 9, № 4, с. 953—958.

Поппер, Тунг, Саттон (Popper L. A., Toong T. Y., Sutton G. W.) [1970]. Three-dimensional ablation considering shape changes and internal heat conduction. — AIAA Paper No. 70-199, AIAA 8th Aerospace Sciences Meeting, New York, January 19—21, 1970.

Прайс, Варга, Уоррен (Price H. S., Varga R. S., Warren J. E.) [1966]. Application of oscillation matrices to diffusion-convection equations. — J. Math. and Phys., v. 45, No. 3, p. 301—311.

Прайс (Price J. F.) [1966]. Numerical analysis and related literature for scientific computer users. — Boeing Sci. Res. Lab., D1-82-0517.

Прахт (Pracht W. E.) [1971a]. A numerical method for calculating transient creep flows. — J. of Comput. Phys., v. 7, p. 46—60.

— [1971б]. Implicit solution of creeping flows, with application to continental drift. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Неявный метод расчета ползущего движения с приложением к задаче о континентальном дрейфе. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 174—182.]

Прентис (Prentice J. J.) [1971]. A numerical solution for the flow field surrounding a supersonic cone at an angle of attack. — Ph. D. Diss., Oklahoma State Univ., Stillwater.

Присли, Хансон (Presley L. L., Hanson R. K.) [1969]. Numerical solutions of reflected shock-wave flow-fields with nonequilibrium chemical reactions. — AIAA J., v. 7, No. 12, p. 2267—2274. [Имеется перевод: Численный метод расчета полей течения за отраженной ударной волной в газе с неравновесными химическими реакциями. — РТК, т. 7, № 12, с. 97—105.]

Притчетт (Pritchett J. W.) [1971]. Incompressible calculations of underwater explosion phenomena. — In: Holt [1971].

Путре (Putre H. A.) [1970]. Computer solution of unsteady Navier — Stokes equations for an infinite hydrodynamic step bearing. — NASA-TN-D-5682, NASA Lewis Res. Center, Cleveland, Ohio.

Ракфорд (Rachford H. H., Jr.) [1966]. Numerical calculation of immiscible displacement by a moving reference point method. — Soc. Petroleum Eng. J., June, p. 87—101.

Ранчел, Вольфштейн (Runchal A. K., Wolfshtein M.) [1969]. Numerical integration procedure for the steady state Navier — Stokes equations. — J. Mech. Eng. Sci., v. 11, No. 5, p. 445—453.

Ранчел, Сполдинг, Вольфштейн (Runchal A. K., Spalding D. B., Wolfshtein M.) [1969]. Numerical solution of the elliptic equations for transport of vorticity, heat and matter in two-dimensional flow. — In: Frenkiel and Stewartson [1969].

Раптош (Ruptosh) [1952]. Supersonic wind tunnels — theory, design and performance. — UTIA Rev. No. 5, Univ. of Toronto, Ontario.

Расселл (Russell D. B.) [1963]. On obtaining solutions to the Navier — Stokes equations with automatic digital computers. — A. R. C. R. & M., No. 3331, United Kingdom.

Раштон, Лейнг (Rushton K. R., Laing L. M.) [1968]. A digital computer solution of the Laplace equation using the dynamic relaxation method. — Aeronaut. Quart., November, p. 375—387.

Рёзнер (Roesner K.) [1967]. On the calculation of three-dimensional unsteady flow fields in compressible media. — Mitteil. Max-Planck-Institute für Stromungsforschung und Aerodynamischen Versuchsanstalt, No 41.

— [1971]. Numerical integration of the Euler-equations for three-dimensional unsteady flows. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Численное интегрирование уравнений Эйлера для трехмерных неустановившихся течений. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 108—114.]

Рейнольдс (Reynolds R. C.) [1970]. Spshell, Oildrop, and Spolam: three programs to solve hydrodynamics problems in two dimensions. — AFWL-TR-70-96, Air Force Weapons Lab., Kirtland Air Force Base, New Mexico.

Риглер (Rigler A. K.) [1969]. A choice of starting vectors in relaxation methods. — J. of Comput. Phys., v. 4, p. 419—423.

Рид, Хансен (Reed W. H., Hansen K. F.) [1969]. Finite difference techniques for the solution of the reactor kinetics equations — MIT-3093-2, Dep. of Nuclear Eng., Massachusetts Inst. of Technol.

Римон (Rimon Y.) [1968]. Numerical solution of the incompressible time-dependent viscous flow past a thin oblate spheroid. — AML-24-68, Appl. Math. Lab., Naval Ship Res. and Develop. Center, Washington, D. C.

Римон, Люгт (Rimon Y., Lugt H. J.) [1969]. On laminar flows past oblate spheroids of various thicknesses. — Phys. of Fluids, v. 12, No. 12, p. 2465—2472.

Римон, Чен (Rimon Y., Cheng S. I.) [1969]. Numerical solution of a uniform flow over a sphere at intermediate Reynolds numbers. — Phys. of Fluids, v. 12, No. 5, p. 949—959.

Рингleб (Ringleb F. O.) [1963]. Geometrical construction of two-dimensional and axisymmetrical flow fields. — AIAA J., v. 1, No. 10, p. 2257—2263. [Имеется перевод: Геометрическое построение полей двумерных и осесимметричных течений. — РТК, т. 1, № 10, с. 21—29.]

Рич (Rich M.) [1963]. A method for Eulerian fluid dynamics. — Rept. No. LASL-2826, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico.

Ричардс (Richards C. G.) [1970]. A numerical study of the flow in the vortex angular-rate sencor. — Paper No. 70-WA/FE-5, Amer. Soc. Mech. Eng., Winter Annual Meeting, New York, November 29 — December 3, 1970.

Ричардсон (Richardson D.) [1964]. The solution of two-dimensional hydrodynamic equations by the method of characteristics. — In: Methods in computational physics, vol. 3, p. 295—318. [Имеется перевод: Метод характеристик для решения уравнений гидродинамики двумерных неустановившихся течений. — В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. Под ред Б. Олдера и др. — М.: Мир, 1967, с. 292.]

Ричардсон (Richardson L. F.) [1910]. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. — Trans. Roy. Soc. London, Ser. A., v. 210, p. 307—357.

— [1965]. Weather prediction by numerical process. — Dover.

Рихтмайер Р. (Richtmyer R. D.) [1957]. Difference methods for initial-value problems. — New York: Interscience Publishers, Inc. [Имеется перевод: Разностные методы решения краевых задач. — М.: ИЛ, 1960.]

— [1963]. A survey of difference methods for nonsteady fluid dynamics. — NCAR Techn. Note 63-2, Boulder, Colorado.

Рихтмайер Р., Мортон К. (Richtmyer R. D., Morton K. W.) [1967]. Difference methods for initial-value problems. — Second edition. — New York: Wiley and Sons. [Имеется перевод: Разностные методы решения краевых задач. — М.: Мир, 1972.]

Роберт, Шуман, Геррити (Robert A. J., Shuman F. G., Gerrity J. P., Jr.) [1970]. On partial difference equations in mathematical physics. — U. S. Monthly Weather Rev., v. 98, No. 1, p. 1—6.

Робертс (Roberts G. O.) [1971]. Computational meshes for boundary layer problems. — In: Holt [1971].

Робертс, Вейс (Roberts K. V., Weiss W. O.) [1966]. Convective difference schemes. — Math. of Computation, v. 20, No. 94, p. 272—299.

Робертсон, Уиллис (Robertson S. J., Willis D. R.) [1971]. Method-of-characteristics solution on rarefied, monatomic gaseous jet expansion into a vacuum. — AIAA J., v. 9, No. 2, p. 291—295. [Имеется перевод: Решение методом характеристик задачи об истечении струи разреженного одноатомного газа в вакуум. — РТК, т. 9, № 2, с. 126—132.]

Роджерс (Rogers E. H.) [1967]. Stability and convergence of approximation schemes. — J. of Math. Analysis and Appl., v. 20, No. 3, p. 442—453.

Родин (Rodin E. Y.) [1970]. On some approximate and exact solutions of boundary value problems for Burgers' equation. — J. of Math. Analysis and Appl., v. 20, No. 2, p. 401—414.

Рожа, Тот (Rozsa P., Toth I.) [1970]. Eine direkte Methode zur numerischen Losung der Poissonschen Differentialgleichung mit Hilfe des 9-Punkte-Verfahrens. — ZAMM, B. 50, No. 12, S. 713—721.

Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. [1968]. Системы квазилинейных уравнений. — М.: Наука, с. 393—407.

Розенбаум (Rosenbaum H.) [1968]. Some numerical solutions of the rotational Euler equations. — AIAA J., v. 6, No. 2, p. 320—325. [Имеется перевод: Некоторые численные решения уравнений Эйлера для завихренности. — РТК, т. 6, № 2, с. 155—161.]

Розенберг (von Rosenberg D. U.) [1969]. Methods for the numerical solution of partial differential equations. — New York: American Elsevier Publ. Company.

Розенхед (ред.) (Rosenhead L., ed.) [1963]. Laminar boundary layers. — Oxford Univ. Press.

Ройал (Royal J. W.) [1969]. Numerical solution of the Rayleigh cell problem. — Ph. D. Diss., Boston Univ., Boston, Massachusetts.

Росляков Г. С., Чудов Л. А. (ред.) [1963]. Численные методы в газовой динамике. Сб. работ ВЦ МГУ, II. — М.: Изд-во МГУ.

Росс, Чун (Ross B. B., Chung S. I.) [1971]. A numerical solution of the planar supersonic near-wake with its error analysis. — In: Holt [1971].

Роуч (Roache P. J.) [1970]. Sufficiency conditions for a commonly used downstream boundary conditions on steam function. — J. of Comput. Phys., v. 6, No. 2, p. 317—321.

— [1971а]. A direct method for the discretized Poisson equation.—SC-RR-70-579, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico.

— [1971б]. A new direct method for the discretized Poisson equation. — In: Holt [1971].

— [1971в]. On artifical viscosity. — SC-RR-710301, Sandia, Albuquerque, New Mexico, July, 1971; J. of Comput. Phys., v. 10, October 1972, p. 169—184.

— [1972]. Finite difference methods for the steady-state Navier — Stokes equations. — SC-RR-72-0419, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico, December 1971; In: Proc. Third Int'l. Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Paris, France, July 3—7, 1972.

— [1975]. A review of numerical techniques. — In: Proc. First Internat. Conference on Numerical Ship Hydrodynamics. — U. S. Government Printing Office.

Роуч, Мюллер (Roache P. J., Mueller T. J.) [1968]. Numerical solutions of compressible and incompressible laminar separated flows. — AIAA Paper No. 68-741, AIAA Fluid and Plasma Dynamics Conference, Los Angeles, California, June 24—26, 1958.

— — [1970]. Numerical solutions of laminar separated flows. — AIAA J., v. 8, No. 3, p. 530—538. [Имеется перевод: Численные решения задачи об отрывных ламинарных течениях. — РТК, т. 8, № 3, с. 182—193.]

Рубин (Rubin E. L.) [1970]. Time-dependent techniques for the solution of viscous, heat conducting, chemically reacting, radiating discontinuous flows. —

Lecture Notes in Mathematics, Conference on the Numerical Solution of Differential Equations. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.

Рубин, Бёрстейн (Rubin E. L., Burstein S. Z.) [1967]. Difference methods for the inviscid and viscous equations of a compressible gas. — J. of Comput. Phys., v. 2, p. 178—196.

Рубин, Герстенблют, Хосла (Rubin E. L., Gerstenbluth C., Khosla P. K.) [1967]. One-dimensional unsteady flow of a radiating gas. — PIBAL Rept. No. 990, Polytechn. Inst. of Brooklyn, Dep. Aerospace Eng. and Appl. Mech.

Рубин, Прейзер (Rubin E. L., Preiser S.) [1968]. On the derivation of three-dimensional second order accurate hydrodynamic difference schemes. — PIBAL Rept. No. 68-24, Polytechnic Inst. of Brooklyn, Dep. of Aerospace Eng. and Appl. Mech., July, 1968.

— — [1970]. Three-dimensional second-order accurate difference schemes for discontinuous hydrodynamic flows. — Math. of Computation, v. 24, No. 109, p. 57—63.

Рубин, Хосла (Rubin E. L., Khosla P. K.) [1970]. A time-dependent method for the solution of one-dimensional radiating flow. — ZAMP, B. 21, November, S. 962—977.

— — [1975]. Higher order numerical solutions using cubic splines. — In: Proc. Second AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Hartford, Conn., June 19—20, 1975, p. 55—66.

Руо (Ruo S.-Y.) [1967]. Evaluation of the applicability of an explicit numerical method to a plane, turbulent, low velocity, partially confined jet. — Ph. D. Thes., Oklahoma State Univ., Stillwater.

Русанов В. В. [1961]. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями. — ЖВМ и МФ, т. 1, № 2, с. 267—279.

— [1969]. Three-dimensional supersonic flow over a blunt body. — JPRS 47180, Joint Publications Res. Service, Dep. of Commerce, Washington, D. C.

— [1970]. On difference schemes of third order accuracy for nonlinear hyperbolic systems. — J. of Comput. Phys., v. 5, p. 507—516.

— [1971]. Non-linear analysis of the shock profile in difference schemes. — In: Holt [1971].

Русанов В. В., Любимов А. Н. [1968]. Studies of flows around blunt bodies by numerical methods. — In: Applied mechanics, Proc. of the 12th Internat. Congress of Appl. Mech., Stanford Univ., Stanford, California, August 26—31, 1968, p. 356—363.

Рыбицки, Хуппер (Rybicki E. F., Hopper A. T.) [1970]. Higher order finite element method for transient temperature analysis of inhomogeneous materials. — ASME WA 69-WA/HT-33, Amer. Soc. Mech. Eng., United Engineering Center, New York.

Рэкич (Rakich J. V.) [1967]. Three-dimensional flow calculation by the method of characteristics. — AIAA J., v. 5, No. 10, p. 1906—1908. [Имеется перевод: Расчет трехмерных течений методом характеристик. — РТК, т. 5, № 10, с. 239—240.]

— [1969]. A method of characteristics for steady three-dimensional supersonic flow with application to inclined bodies of revolution. — NASA TN-D-5341, NASA Ames Res. Center, Moffett Field, California.

Рэкич, Клири (Rakich J. V., Cleary J. W.) [1970]. Theoretical and experimental study of supersonic steady flow around inclined bodies of revolution. — AIAA J., v. 8, No. 3, p. 511—518. [Имеется перевод: Теоретическое и экспериментальное исследование сверхзвукового стационарного обтекания тел вращения под углом атаки. — РТК, т. 8, № 3, с. 159—167.]

Рэнсом, Томпсон, Хоффман (Ransom V. H., Thompson H. D., Hoffman J. D.) [1970]. Three-dimensional supersonic nozzle flowfield calculations. — J. Spacecraft and Rockets, v. 7, p. 458—462.

— — — [1971]. Stability and accuracy studies on a second-order method of characteristics scheme for three-dimensional, steady, supersonic flow. — In:

Holt [1971]. [Имеется перевод: Исследование устойчивости и точности схемы второго порядка метода характеристик для трехмерных установившихся сверхзвуковых течений. — В. кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 94—107.]

адурни, Аракава, Минц (Sadourny R., Arakawa A., Mintz Y.) [1968]. Intergation of the non-divergent barotropic vorticity equation with an icosahedral-hexagonal grid for the sphere. — U. S. Monthly Weather Rev., v. 96, p. 351—356.

Садурни, Морел (Sadourny R., Morel P.) [1969]. A finite-difference approximation of the primitive equations for a hexagonal grid on a plane. — U. S. Monthly Weather Rev., v. 97, No. 6, p. 439—445.

Саймент (Ciment M.) [1968]. Stable difference schemes with uneven mesh spacings. — New York Univ., New York, Courant Inst. of Math. Sci., Rept. NYO 1480-100.

Сайрус, Фалтон (Cyrus N. J., Fulton R. E.) [1967]. Accuracy study of finite difference methods. — NASA TN D-4372, National Aeronautics and Space Administration, Langley Res. Center, Langley Station, Hampton, Virginia.

Сакетт, Хили (Sackett S., Healey R.). [1969]. JASON — a digital computer program for the numerical solution of the linear Poisson equation $\nabla \cdot (\eta \nabla \Phi) + \rho = 0$. — UCRL-18721, Lawrence Rad. Lab., Univ. of California, Berkeley.

Сакураи (Sakurai A.) [1971]. Foundation of approximate solutions. — In: Holt [1971].

Сакураи, Ивасаки (Sakurai A., Iwasaki M.) [1970]. Finite difference calculation of one-dimensional Navier — Stokes shock structure. — In: Proc. Japan Nat. Committee Theoret. and Appl. Mech., 18th Nat. Congress Appl. Mech., Tokyo Metropolitan Univ.

Сальвадори, Барон (Salvadori M., Baron M.) [1971]. Numerical methods in engineering. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc.

Самарский А. А. [1962]. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. — ЖВМ и МФ, т. 2, № 5, с. 787—811.

Сандберг (Sundberg W. D.) [1970]. Two computerized methods for plotting functions of two independent variables. — SC-DR-70-112, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico.

Сандквист (Sundquist H.) [1963]. A numerical forecast of fluid motion in a rotating tank and a study of how finite-difference approximations affect nonlinear interactions. — Tellus, v. 15, No. 1, p. 44—55.

Сатофука (Satofuka N.) [1970]. A numerical study of shock formation in cylindrical and two-dimensional shock tubes. — Rep. No. 451, Inst. Space and Aeronaut. Sci., Univ. of Tokyo.

Саульев В. К. [1957]. Об одном способе численного интегрирования уравнений диффузии. — ДАН, т. 115, № 6, с. 1077—1080.

— [1960]. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. — М.: Физматгиз.

Саусвелл (Southwell R. V.) [1946]. Relaxation methods in theoretical physics. — New York: Oxford Univ. Press.

Сварц, Вендрофф (Swartz B., Wendroff B.) [1969]. Generalized finite-difference scheme. — Math. of Computation, v. 23, No. 105, p. 37—49.

Свифт (Swift G. W.) [1971]. The solution of simultaneous second order coupled differential equations by the finite difference method. — VPI-E-71-3 Virginia Polytech. Inst., Blacksburg.

Сегал, Ферцигер (Segal B. M., Ferziger J. H.) [1971]. Shock wave structure by several new modeled Boltzmann equations. — In: Holt [1971].

Сибулкин, Диспо (Sibulkin M., Dispaux J.-C.) [1968]. Numerical solutions for radiating hypervelocity boundary layer flow on a flat plate. — AIAA J., v. 6, No. 6, p. 1098—1104. [Имеется перевод: Численные решения для

излучающего гиперзвукового пограничного слоя на плоской пластине. — РТК, т. 6, № 6, с. 130—138.]
Силецки, Вуртеле (Sielecki A., Wurtele M. G.) [1970]. The numerical integration of the nonlinear shallow-water equations with sloping boundaries. — J. of Comput. Phys., v. 6, p. 219—236.
Силлс (Sills J. A.) [1969]. Transformations for infinite regions and their application to flow problems. — AIAA J., v. 7, No. 1, p. 117—123. [Имеется перевод: Преобразования бесконечных областей и их приложение к задачам исследования течений. — РТК, т. 7, № 1, с. 137—144.]
Симеонов С. В. [1967]. Метод решения системы нелинейных уравнений потенциального типа. — ПММ, т. 31, № 3, с. 503—508.
Симс (Sims J. L.) [1958]. Results of the computations of supersonic flow fields aft of circular cylindrical bodies of revolution by the method of characteristics. — Army Ballistic Missile Agency Rep. DA-R-49, Redstone Arsenal, Alabama.
Симуни Л. М. [1964]. Численное решение некоторых задач движения вязкой жидкости. — Инженерный журнал. т. 4, № 3, с. 446—450.
Синглтон (Singleton R. E.) [1968]. Lax — Wendroff difference scheme applied to the transonic airfoil problem. — AGARD Conference Proc. No. 35.
Синнотт (Sinnott D. H.) [1960]. The use of interpolation in improving finite difference solutions of TEM mode structures. — Dep. of Supply Tech. Note Pad 142, Australian Defense Sci. Service, Weapons Res. Establishment, Salisbury, South Australia.
Скала, Гордон (Scala S. M., Gordon P.) [1966]. Reflection of a shock wave at a surface. — Phys. of Fluids, v. 9, June, p. 1158—1166.
— — [1967]. Solution of the time-dipendent Navier — Stokes equations for the flow around a circular cylinder. — AIAA Paper No. 67-221, AIAA 5th Aerospace Sciences Meeting, New York, January 23—26, 1967; AIAA J., 1968, v. 6, No. 5, p. 815—822. [Имеется перевод: Решение уравнений Навье — Стокса для нестационарного обтекания кругового цилиндра. — РТК, т. 6, № 5, с. 56—657.]
Скоглунд, Гей (Skoglund V. J., Gay B. D.) [1968]. Numerical analysis of gas dynamics. — Bureau of Engineering Research Progress Rep. PR-85(68)S-082, Univ. of New Mexico, Albuquerque.
— — [1969]. Improved numerical techniques and solution of a separated interaction of an oblique shock wave and a laminar boundary layer. — Bureau of Engineering Research Rep. No. ME-41(69)S-068, Univ. of New Mexico, Albuquerque.
Скоглунд, Коул (Skoglund V. J., Cole J. K.) [1966]. Numerical analysis of the interaction of an oblique shock wave and a laminar boundary layer. — Bureau of Engineering Research Rep. ME-23, Univ. of New Mexico, Albuquerque.
Скоглунд, Коул, Стаяно (Skoglund V. J., Cole J. K., Staiano E. F.) [1967]. Development and verification of two-dimensional numerical techniques for viscous compressible flows with shock waves. — SC-CR-67-2679, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico.
Скоглунд, Уоткинс (Skoglund V. J., Watkins C. B., Jr.) [1971]. Numerical solutions of non-equilibrium reflected shock waves in air with radiation. — SC-RR-71-0203, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico.
Слотта, Элвин, Мерсье, Терри (Slotta L. S., Elwin E. H., Mercier H. T., Terry M. D.) [1969]. Stratified reservoir currents. Parts I, II. — Bullentin No. 44, Engineering Experiment Station, Oregon State Univ., Corvallis.
Смагоринский, Манабе, Холлоуэй (Smagorinsky J., Manabe S., Holloway J. L.) [1965]. Numerical results from a nine-level general circulation model of the atmosphere. — U. S. Weather Bureau Monthly Weather Rev., v. 93, p. 727.
Смит, Клаттер (Smith A. M. O., Clutter D. W.) [1965]. Machine calculation of compressible laminar boundary layers. — AIAA J., v. 3, No. 4, p. 639—647

[Имеется перевод: Расчет сжимаемого ламинарного пограничного слоя на вычислительных машинах. — РТК, т. 3, № 4, с. 80—91.]
Смит (Smith J.) [1970]. The coupled equation approach to the numerical solution of the biharmonic equation by finite differences. — SIAM J. on Numerical Analysis, v. 7, p. 104—111.
Смит (Smith J. H.) [1970]. Survey of three-dimensional finite difference forms of heat equation. — SC-M-70-83, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico.
Смит, Мак-Колл (Smith R. R., McCall D.) [1970]. Systems of hyperbolic P. D. E. — Comm. ACM, v. 13, No. 9, p. 567—570.
Смола, Мак-Авой (Smola F. M., McAvoy T. J.) [1969]. The finite difference-delay technique: A new approach for solving certain first order partial differential equations. — Massachusetts Univ., Amherst.
Снедекер, Дональдсон (Snedeker R. S., Donaldson C. du P.) [1966]. Observation of a bistable flow in a hemispherical cavity. — AIAA J., v. 4, No. 4, p. 735—736. [Имеется перевод: Исследование течения с двумя устойчивыми состояниями в полусферической каверне. — РТК, т. 4, № 4, с. 227—228 ]
Соби (Sobey R. J.) [1970]. Finite difference schemes compared for wave-deformation characteristics in mathematical modeling of two-dimensional long wave propagation. — Army Coastal Eng. Res. Center, Washington, D. C.
Сон, Ханратти (Son J. S., Hanratty T. J.) [1969]. Numerical solution for the flow around a cylinder at Reynolds numbers of 40, 200 and 500. — J. Fluid Mech., v. 35, Part 2, p. 369—386.
Сондерс (Saunders L. M.) [1966]. Numerical solution of the flow field in the throat region of a nozzle. — Brown Eng. Co., Tech. Note BSVD-P-66-TN-001.
Спарк (Spurk J. H.) [1970]. Experimental and numerical nonequilibrium flow studies. — AIAA J., v. 8, No. 6, p. 1039—1045. [Имеется перевод: Экспериментальное и численное исследование неравновесного течения. — РТК, т. 8, № 6, с. 61—70.]
Спеньер (Spanier J.) [1967]. Alternating direction methods applied to heat conduction problems. — In: Mathematical methods for digital computers, Vol. II. — New York: John Wiley and Sons, Inc.
Сперроу, Куок, Бернер (Sparrow E. M., Quack H., Boerner C. I.) [1970]. Local nonsimilarity boundary layer solutions. — AIAA J., v. 8, No. 11, p. 1936—1942. [Имеется перевод: Метод решения уравнений пограничного слоя при отсутствии локальной автомодельности. — РТК, т. 8, № 11, с. 21—30.]
Спикьер (Spikjer M. N.) [1966]. Convergence and stability of step-by-step methods for the numerical solution of initial-value problems. — Numerische Math., B. 8, S. 161—177.
Сполдинг (Spalding D. B.) [1967]. A theory of turbulent boundary layer. — In: Proc. Canadian Congress of Applied Mechanics, Univ. of Laval, Quebec, May 22—26, 1967.
Стеджер, Ломекс (Steger J. L., Lomax H.) [1971]. Generalized relaxation methods applied to problems in transonic flow. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Методы обобщенной релаксации в приложении к задачам о трансзвуковом течении. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 18—25.]
Стейгер, Сепри (Steiger M. H., Sepri P.) [1965]. On the solution of initial-valued boundary layer flows. — PIBAL Rept. No. 872, Polytechn. Inst. Brooklyn, Dept. of Aerospace Eng. and Appl. Mech.
Стернберг (Sternberg H. M.) [1970]. Similarity solutions for reactive shock waves. — Quart. J. Mech. and Appl. Math., v. 23, No. 1, p. 77—99.
Стоун (Stone H. L.) [1968]. Iterative solution of implicit approximations of multi-dimensional partial differential equations. — SIAM J. of Numerical Analysis, v. 5, No. 3, p. 530—558.
Стоун, Брайен (Stone H. L., Brian P. L. T.) [1960]. Numerical solution of convective transport problems.—Amer. Inst. Chem. Eng. J., v. 9, p. 681—688.

Стрелков (Strelkoff T.) [1971]. An exact numerical solution of the solitary wave. — In: Holt [1971].
Стренг (Strang W. G.) [1963]. Accurate partial difference methods, I, Linear Cauchy problems. — Arch. Rat. Mech. Anal., v. 12, p. 392—402.
— [1964]. Accurate partial difference methods, II, Non-linear problems. — Numerische Math., B. 6, S. 37—46.
Стробридж, Хупер (Strawbridge D. R., Hooper G. T. J.) [1968]. Numerical solutions of the Navier — Stokes equations for axisymmetric flows. — J. Mech. Eng. Sci., v. 10, No. 5, p. 389—401.
Стюартсон (Stewartson K.) [1964]. Tre theory of laminar boundary layers in compressible fluids. — Oxford Math. Monographs. — Oxford: Clarendon Press.
Сэмюелс, Черчилл (Samuels M. R. Churchill S. W.) [1967]. Stability of a fluid in a rectangular region heated from below. — Amer. Inst. Eng. J., v. 13, No. 1, p. 77—86.
Тайлер (Tyler L. D.) [1965]. Numerical solutions of the flow field produced by a plane shock wave emerging into a crossflow. — Ph. D. Diss., Dept. of Mech. Eng., Oklahoma State Univ., Stillwater.
— [1968]. Numerical results of blast wave propagation in tunnel intersections. — SC-RR-68-430, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico.
— [1971]. Heuristic analysis of convective finite difference techniques. — In: Holt [1971].
Тайлер, Цумвальт (Tyler L. D., Zumwalt G. W.) [1965]. Numerical solutions of the flow field produced by a plane shock wave emerging into a crossflow. — SC-DC-65-1916, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico.
Тайлер, Эллис (Tyler L. D., Ellis M. A.) [1970]. The TSHOK code: Lax version. — SC-TM-70-153, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico.
Таками, Келлер (Takami H., Keller H. B.) [1969]. Steady two-dimensional viscous flow on an incompressible fluid past a circular cylinder. — In: Frenkiel and Stewartson [1969].
Таркел (Turkel E.) [1974]. Phase error and stability of second order methods for hyperbolic problems. I. — J. of Comput. Phys., v. 15, No. 2, p. 226—250.
Теварсон (Tewarson R. P.) [1969]. Projection methods for solving sparse linear systems. — Computer J., v. 12, No. 1, p. 77—80.
Тейлор (Taylor D. B.) [1968]. The calculation of steady plane supersonic gas flows containing an arbitrarily large number of shocks. — J. of Comput. Phys., v. 3, p. 273—290.
Тейлор (Taylor P. J.) [1968]. The stability of boundary conditions in the numerical solutions of the time-dependent Navier — Stokes equations. — ARC-30406, Aerospace Res. Comm. (England).
— [1969]. A technique for treating Dirichlet conditions at inifinity in numerical field problems. — J. of Comput Phys., v. 4, p. 138—141.
— [1970]. The stability of the DuFort — Frankel method for the diffusion equation with boundary conditions involving space derivatives. — Computer J., v. 13, No. 1, p. 93—97.
Тейлор (Taylor T. D.) [1964]. Computing transient gas flows with shock waves. — Phys. of Fluids, v. 7, No. 10, p. 1713—1715.
Тейлор, Массон (Taylor T. D., Masson B. S.) [1970]. Application of the unsteady numerical method of Godunov to computation of supersonic flows past bell-shaped bodies. — J. of Comput. Phys., v. 5, p. 443—454.
Тейлор, Ндефо (Taylor T. D., Ndefo E.) [1971]. Computation of viscous flow in a channel by the method of splitting. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Расчет течения вязкой жидкости в канале при помощи метода расщепления. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 218—229.]

Тейлор, Ндефо, Мессон (Taylor T. D., Ndefo E., Masson B. S.) [1972]. A study of numerical methods for solving viscous and inviscid problems. — J. Comp. Phys., v. 9, No. 1, p. 99—119.

Текстор (Textor R. E.) [1968]. A numerical investigation of a confined vortex problem. — Rept. No. K-1732, Union Carbide Corp., Computing Technology Center, Oak Ridge, Tennessee.

Текстор, Лик, Феррис (Textor R. E., Lick D. W., Farris G. J.) [1969]. Solution of confined vortex problems. — J. of Comput. Phys., v. 4, p. 258—269.

Темам (Temam R.) [1969]. On an approximate-solution of the Navier-Stokes equations by the method of fractional steps. Part 1. — Arch. Ras. Mech., and Analysis, v. 32, No. 2, p. 135—153.

Техейра (Tejeira E. J.) [1966]. Numerical and experimental investigation of a two-dimensional laminar flow with non-regular boundaries. — Rept. EM-66-8-1, Dep. Eng. Mech., Univ. of Tennessee, Knoxville.

Тиллмен (Tillman C. C., Jr.) [1969]. EPS: an interactive system for solving elliptic boundary-value problems with facilities for data manipulation and general-purpose computation. — MAC-TR-62, Massachusetts Inst. of Tech., Cambridge.

Тоби (Tobey R. G.) [1969]. — In: Proc. of the 1968 Summer Institute on Symbolic Mathematical Computation. — NASA-CR-116915.

Толли, Уитекер (Talley W. K., Whitaker S.) [1969]. Monte Carlo analysis of Knudsen flow. — J. of Comput. Phys., v. 4, p. 389—410.

Толлмин (Tollmien W.) [1949]. Theory of characteristics. — NACA TM 1242, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, D. C.

Том (Thom A.) [1928]. An investigation of fluid flow in two dimensions. — Aerospace Research Center, R. and M., No. 1194, United Kingdom.

— [1933]. The flow past circular cylinders at low speeds. — Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, v. 141, p. 651—666.

— [1953]. The arithmetic of field equations. — Aeronaut. Quart., v. 4, p. 205—230.

Том, Апельт (Thom A., Apelt C. J.) [1961]. Field computations in engineering and physics. — C. Van Nostrand Company, Ltd.

Том, Орр (Thom A., Orr J.) [1931]. The solution of the torsion problem for circular shafts of varying radius. — Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, v. 131, p. 30—37.

Томан, Шевчик (Thoman D. C., Szewczyk A. A.) [1966]. Numerical solutions of time dependent two dimensional flow of a viscous, incompressible fluid over stationary and rotating cylinders. — Tech. Rept. 66-14, Heat Transfer and Fluid Mech. Lab., Dept. Mech. Eng., Univ. of Notre Dame, Notre Dame, Indiana.

— — [1969]. Time dependent viscous flow over a circular cylinder. — Phys. of Fluids Supplement II, p. 76—87.

Томас (Thomas L. H.) [1954]. Computation of one-dimensional flows including shocks. — Comm. Pure and Applied Math., v. 7, p. 195—206.

Томас, Винокур, Бастианон, Конти (Thomas P. D., Vinokur M., Bastianon R., Conti R. J.) [1971]. Numerical solution for the three dimensional hypersonic flow field of a blunt delta body. — AIAA Paper No. 71-596, AIAA 4th Fluid and Plasma Dynamics Conference, Palo Alto, California, June 21—23, 1971.

Томи (Thomee V.) [1969]. Stability theory for partial difference operators. — SIAM Rev., v. 11, No. 2, p. 152—195.

Томмен (Thommen H. U.) [1966]. Numerical integration of the Navier-Stokes equations. — ZAMP, B. 17, S. 369—384.

— [1967]. Viscous flow near the leading edge of wedges and cones in supersonic freesteam. — AIAA Preprint No. 67—220.

Томмен, Д'Аттор (Thommen H. U., D'Attorre L.) [1965]. Calculation of steady, three-dimensional supersonic flow-fields by a finite difference method. —

AIAA Paper No. 65-26, AIAA 2nd Aerospace Sci. Meeting, New York, January 25—27, 1965.

Томпсон (Thompson B. W.) [1971]. Some semi-analytical methods in numerical fluid dynamics. — In: Holt [1971].

Томпсон (Thompson J. F., Jr.) [1968]. Numerical solution of the incompressible, two-dimensional, time-dependet Navier — Stokes equations for a body oscillating in pitch in a moving fluid. — R. R. No. 86, Aerophysics and Aerospace Eng. Dep., Mississippi State Univ., State College.

— [1969]. Optimized acceleration of convergence of an implicit numerical solution of the time-dependent Navier-Stokes equations. — AIAA J., v. 7, No. 11, p. 2186—2188. [Имеется перевод: Оптимизация процесса сходимости неявной численной схемы решения нестационарных уравнений Навье — Стокса. — РТК, т. 7, № 11, с. 165—167.]

Томпсон (Thompson P. D.) [1961]. Numerical weather analysis and prediction. — New York: MacMillan Company.

Торранс (Torrance K. E.) [1968]. Comparison of finite-difference computations of natural convection. — J. of Res. National Bureau of Standards, v. 72B, No. 4, p. 281—301.

Торранс, Дэвис, Эйке, Гилл, Гутман, Сю, Лионс, Зьен (Torrance K., Davis R., Eike K., Gill P., Gutman D., Hsui A., Lyons S., Zien H.) [1972]. Cavity flows driven by buoyancy and shear. — J. Fluid Mech., v. 51, Part 2, p. 221—231.

Торранс, Орлов, Рокетт (Torrance K. E., Orloff L., Rockett J. A.) [1969]. Experiments on natural convection in enclosures with localized heating from below. — J. Fluid Mech., v. 36, Part 1, p. 21—31.

Торранс, Рокетт (Torrance K. E., Rockett J. A.) [1969]. Numerical study of natural convection in an enclosure with localized heating from below — creaping flow to the onset of laminar instability. — J. Fluid Mech., v. 36, Part 1, p. 33—54.

Трулио (Trulio J. G.) [1964]. Studies of finite difference techniques for continuum mechanics. — Air Force Systems Command, Air Force Weapons Lab., Res. and Technol. Div., WL TDR-64-72, Kartland Air Force Base, Albuquerque, New Mexico.

Трулио, Карр, Найлс, Рентфроу (Trulio J. G., Carr W. E., Niles W. J., Rentfrow R. E.) [1966]. Calculation of two-dimensional turbulent flow fields. — NASA CR-530.

Трулио, Уолитт (Trulio J. G., Walitt L.) [1969]. Numerical calculation of viscous compressible fluid flow around an oscillating rigid cylinder. — Applied Theory, Santa Monica, California.

Трулио, Уолитт, Найлс (Trulio J. G., Walitt L., Niles W. J.) [1969]. Numerical calculations of viscous compressible fluid flow over a flat plate and step geometry. — NASA CR 1466, Applied Theory, Inc., Santa Monica, California.

Турайсами (Thuraisamy V.) [1967]. Discrete analogs for mixed boundary value problems of elliptic type. — Ph. D. Thes., Univ. of Maryland, College Park.

— [1969a]. Approximate solutions for mixed boundary value problems by finite-difference methods. — Math. of Comput., v. 23, No. 106, p. 373—386.

— [1969б]. Monotone type discrete analogue for the mixed boundary value problem. — Math. of Computation, v. 23, No. 106, p. 317—394.

Уайтинг (Whiting K. B.) [1968]. A treatment for singularities in finite-difference solutions of Laplace's equation. — Tech. Note WPD 77, Dep. of Supply, Australian Defence Sci. Service, Weapons Res. Establishment, Salisbury, South Australia.

Уайтмен (Whiteman J. R.) [1967]. Singularities due to re-entrant corners in harmonic boundary value problems. — MRC Tech. Summary Rept. 829, Math. Res. Center, United States Army, Univ. of Wisconsin, Madison.

Уайтхед, Дэвис (Whitehead R. E., Davis R. T.) [1969]. Surface conditions in slip-flow with mass transfer. — VPI-E-69-11, College of Eng., Virginia Polytechn. Inst., Blacksburg.

Уигли (Wigley N. M.) [1969]. On a method to subtract off a singularity at a corner for the Dirichlet or Neuman problem. — Math. of Computation, v. 23, No. 106, p. 395—401.

Уилкинс (Wilkins M. L.) [1969]. Finite difference scheme for calculating problems in two space dimensions and time. — UCRL-71724, Lawrence Radiation Lab., Univ. of California, Livermore.

— [1970]. Finite difference scheme for calculating problems in two space dimensions and times. — J. of Comput. Phys., v. 5, p. 406—414.

Уилкинс, Френч, Сорем (Wilkins M. L., French S. J., Sorem M.) [1971]. Finite difference schemes for calculating problems in three space dimensions and time. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: *Конечно-разностная схема для решения задач, зависящих от трех пространственных координат и времени.* — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 115—119.]

Уилкс, Черчилл (Wilkes J. O., Churchill S. W.) [1966]. The finite-difference computation of natural convection in a rectangular enclosure. — Amer. Inst. of Chem. Eng. J., v. 12, No. 7, p. 161—166.

Уилсон (Wilson L. N.) [1967]. Inflections in bow shock shape at hypersonic speeds. — AIAA J., v. 5, No. 8, p. 1532—1533. [Имеется перевод: Искривление головной ударной волны при гиперзвуковых скоростях. — РТК, т. 5, № 8, с. 213—215.]

Уильямс (Williams G. P.) [1969]. Numerical integration of the three-dimensional Navier — Stokes equtions for incompressible flow. — J. Fluid Mech., v. 37, Part 4, p. 727—750.

Уильямсон (Williamson D. L.) [1968]. Integration of the barotropic vorticity equation on a spherical geodesic grid. — Tellus, v. 20, p. 642—653.

— [1969]. Numerical integration of fluid flow over triangular grids. — Monthly Weather Rev., v. 97, No. 12, p. 885—895.

— [1971]. A comparison of first- and second-order difference approximations over a spherical geodesic grid. — J. of Comput. Phys., v. 7, p. 301—309.

Уинсло (Winslow A. M.) [1963]. 'Equipotential' zoning of two-dimensional meshes. — UCRL-7312, Lawrence Radiation Lab., Univ. of California, Livermore.

— [1966]. Numerical solution of the quasilinear Poisson equation in a non-uniform triangle mesh. — J. of Comput. Phys., v. 1, No. 2, p. 149.

Уитни (Whitney A. K.) [1971]. The numerical solution of unsteady free surface flows by conformal mapping. — In: Holt [1971].

Унг, Поль (Ung M. T., Paul J. F.) [1968]. Solving a partial differential equation by serial methods. — LACC E. & T. Memo № 3, Electronic Associates, Inc., Los Angeles Comput. Center, Education & Training Group, Los Angeles, California.

Ундервуд (Underwood R. L.) [1969]. Calculation of incompressible flow past a circular cylinder at moderate Reynolds numbers. — J. Fluid Mech., v. 37, Part 1, p. 95—114.

Уолден (Walden D. C.) [1967]. The Givens — Householder method for finding eigenvalue and eigenvectors of real symmetric matrices. — CFSTI, AD 66 1 277, MIT Lincoln Labs, TN 1967-51, Lexington, Massachusetts.

Уолитт (Walitt L.) [1969]. Numerical studies of supersonic near-wakes. — Ph. D. Diss., Aeronaut. Eng. Dept., Univ. of California, Los Angeles.

Уолкер, Цумвальт (Walker W. F., Zumwalt G. W.) [1966]. A numerical solution for the interation of a moving shock wave with a turbulent mixing region. — SC-CR-67-2531, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico; ASME Paper No. 68-APM-M.

Уолтмен (Waltman P.) [1969]. Existence and uniqueness of solutions of boundary value problem for second order systems of nonlinear differential equations. — Rept. No. 6, Math. Dept., Iowa Univ., Iowa City.

Уонтленд (Wantland J. L.) [1969]. A numerical evalution of the velocity and temperature structure in laminar cellular convection between parallel rigid surfaces. — Ph. D. Thes., Univ. of Tennesse, ORNL-4458, Oak Ridge Nat. Lab., Oak Ridge.

Уорлик, Янг (Warlick C. H., Young D. M.) [1970]. A priori method for the determination of the optimum relaxation factor for the successive overrelaxation method. — Int. Tech. Rep. No. 25, Univ. of Texas at Austin, Computing Center.

Уорминг, Хьетт (Warming R. F., Hyett B. J.) [1974]. The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods. — J. of Comput. Phys., v. 14, No. 2, p. 159—179.

Уоткинс (Watkins C. B., Jr.) [1970]. Numerical solutions of nonequilibrium reflected shock waves in air with radiation. — Ph. D. Thes., Univ. of New Mexico, Abluquerque.

Уотсон (Watson J. D.) [1969]. High-velocity exposively guns. — Rep. No. PIFR-113, Phys. Internat. Company, San Leandro, California.

Уотсон, Годфри (Watson J. D., Godfrey C. S.) [1967]. An investigation of projectile integrity using computer techniques. — Rep. No. PITR-67-10, Phys. Internat. Company, San Leandro, California.

Уэбб (Webb C.) [1970]. Practical use of the fast Fourier transform (FFT) algorithm in time-series analysis. — ARL-TR-70-22, Appl. Res. Lab., Univ. of Texas at Austin.

Уэбб, Дрессер, Адлер, Уэйтер (Webb H. G., Dresser H. S., Adler B. K., Waiter S. A.) [1967]. Inverse solution of blunt-body flowfields at large angle of attack. — AIAA J., v. 5, No. 6, p. 1079—1085. [Имеется перевод: Расчет обратным методом поля скоростей около затупленного тела при больших углах атаки. — РТК, т. 5, № 6, с. 28—36.]

Уэлч, Харлоу, Шеннон, Дали (Welch J. E., Harlow F. H., Shannon J. P., Daly B. J.) [1966]. The MAC method. — LASL Rep. No. LA-3425, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico.

Уэстлейк (Westlake J. R.) [1968]. A handbook of numerical matrix inversion and solution of linear equations. — New York: J. Wiley and Sons, Inc.

Фагела-Албастро, Хеллумс (Fagela-Albastro E. B., Hellums J. D.) [1967]. Laminar gas jet impinging on an infinite liquid surface: numerical finite difference solution involving boundary and free streamline determinations. — I & EC Fundamentals, v. 6, No. 4, p. 580—587.

Файф, Энг, Янг (Fyfe I. M., Eng R. C., Young D. M.) [1961]. On the numerical solution of the hydrodynamics equations. — SIAM Rev., v. 3, No. 4, p. 298—308.

Фалфорд, Пей (Fulford G. D., Pei D. C. T.) [1969]. A unified approach to the study of transfer processes. — Indust. and Eng. Chemistry, v. 61, No. 5, p. 47—69.

Фасел (Fasel H.) [1975]. Numerical solution of the unsteady Navier—Stokes equations for the investigation of laminar boundary layer stability. — In: Proc. Fourth Internat. Conference on Numerical Methods in Fluid dynamics (Richtmyer R. D., ed.). — Berlin, Springer, p. 151—160.

Фаччиоли, Анг (Faccioli E., Ang A. H.-S.) [1968]. A discrete Eulerian model of spherically symmetric compressible media. — J. of Comput. Phys., v. 3, 226—258.

Фейрвезер (Fairweather G.) [1969]. A note on a generalization of a method of Douglas. — Math. of Comput., v. 23, No. 106, p. 407—409.

Фейрвезер, Гурли, Митчелл (Fairweather G., Gourlay A. R., Mitchell A. R.) [1967]. Some high accuracy difference schemes with a splitting operator

for equations of parabolic and elliptic type. — Numerische Math., B. 10, S. 56—66.

Феннинг, Мюллер (Fanning A. E., Mueller T. J.) [1970]. A numerical and experimental investigation of the oscillating flow in the wake of a blunt body. — UNDAS TN-1970-M2, Dept. of Aerospace and Mech. Eng., Univ of Notre Dame, Notre Dame, Indiana; AIAA Paper No. 71-603, 1971.

Феста (Festa J. F.) [1970]. A numerical model of a convective cell driven by non-uniform horizontal heating. — Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge.

Фиккетт, Джекобсон, Вуд (Fickett W., Jacobson J. D. Wood W. W.) [1970]. The method of characteristics for one-dimensional flow with chemical reaction. — LA-4269, Los Alamos Sci. Lab.

Филлер, Ладлофф (Filler L., Ludloff H. F.) [1961]. Stability analysis and integration of the viscous equations of motion. — Math. of Comput., v. 15, p. 261—274.

Филлипс, Винер (Phillips H., Wiener N.) [1923]. Nets and the Dirichlet program. — J. Math. and Phys., v. 2, p. 105—124.

Филлипс (Phillips N. A.) [1959]. An example of non-linear computational instability. — In: Atmosphere and sea in motion, Rossby Memorial Volume (B. Bolin, ed.). — New York: Rockefeller Inst. Press.

Финклеман (Finkleman D.) [1968]. A characteristics approach to radiation gasdynamics. — AIAA Paper No. 68-163, AIAA 6th Aerospace Sci. Meeting, New York, January 22—24, 1968.

Финн (Finn D. L.) [1968]. Bibliography on techniques for solving partial differential equations by hybrid computation and other methods. — NASA-CR-102218, Georgian Inst. Technol.

Фишер, Усмани (Fischer C. F., Usmani R. A.) [1969]. Properties of some tridiagonal matrices and their application to boundary value problems. — SIAM J. on Numerical Analysis, v. 6, No. 1, p. 127—142.

Фишер (Fischer G.) [1965а]. A survey of finite difference approximations to the primitive equations. — U. S. Monthly Weather Rev., v. 93, No. 1, p. 1—10.

— [1965б]. On a finite difference scheme for solving the nonlinear primitive equations for a barotropic fluid with application to the boundary current problem. — Tellus, v. 17, No. 4, p. 405—413.

Флюгге-Лотц (Flugge-Lotz I. I.) [1969]. Computation of the laminar compressible boundary layer. — Final Rept. on Contract AF49(638)-1385, Dept. of Appl. Mech., Stanford Univ., Stanford, California.

Фой (Foy L. R.) [1964]. Steady state solutions of hyperbolic systems of conservation laws with viscosity terms. — Comm. Pure and Appl. Math., v. 17, p. 177—188.

Фокс (Fox L.) [1948]. A short account of relaxation methods. — Quart. J. Mech. and Appl. Math., v. 1, p. 253—280.

Форсайт (Forsythe G. E.) [1956]. Difference methods on a digital computer for laplacian boundary value and eigenvalue problems. — Comm. Pure and Appl. Math., v. 9, p. 425—434.

— [1970]. Pitfalls in computation, or why a math book isn't enough. — Tech. Rept. No. CS-147. Computer Sci. Dept., Stanford Univ., Stanford, California.

Фортин, Пейре, Темам (Fortin M., Peyret R., Temam R.) [1971]. Calcul des ecoulements d'un fluide visqueux incompressible. — In: Holt [1971].

Франк, Лазарус (Frank R. M., Lazarus R. B.) [1964]. Mixed Eulerian-Lagrangian method. — In: Methods in computational physics, v. 3, p. 47—68. [Имеется перевод: Смешанный метод, использующий переменные Эйлера и Лагранжа. — В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. Под ред. Б. Олдера и др. — М.: Мир, 1967, с. 55.].

Франкел (Frankel S. P.) [1950]. Convergence rates of iterative treatment of partial differential equations. — Math. Tables and Other Aids to Computation, v. 4, p. 65—75.
— [1956]. Some qualitative comments on stability considerations in partial difference equations. — In: Proc. Sixth Symposia in Appl. Math., AMS, Vol. 6 — Numerical Analysis, p. 73—75.
Фрёгденхил (Vreugdenhil C. B.) [1969]. On the effect of artificial-viscosity methods in calculating shocks. — J. of Eng. Math., v. 3, No. 4, p. 285—288.
Фрёлих (Froehlich R.) [1966]. On stable methods of matrix factorization for block-tri-diagonal matrices, Parts I and II. — GA 7164, General Atomic, Division General Dynamics, San Diego, California.
Френкил, Стюартсон (ред.) (Frenkiel F. N., Stewartson K., ed.) [1969]. High-speed computing in fluid dynamics. — Physics of Fluids Supplement II. — New York: American Institute of Physics.
Фрид (Fried I.) [1969]. Some aspects of the natural coordinate system in the finite-element method. — AIAA J., v. 7, No. 7, p. 1366—1368. [Имеется перевод: Некоторые аспекты применения естественных координат в методе дискретных элементов. — РТК, т. 7, № 7, с. 187—188.]
Фридман (Friedman M.) [1970]. Flow in a circular pipe with recessed walls. — J. of Appl. Mech., v. 37, No. 1, p. 5—8. [Имеется перевод: Течение в трубе кругового сечения, в стенках которой имеются углубления. — Прикладная механика, Мир, № 1, с. 4.]
Фридман, Гиллис, Лирон (Friedmann M., Gillis J., Liron N.) [1968]. Laminar flow in a pipe at low and moderate Reynolds numbers. — Appl. Sci. Res., v. 19, p. 426—438.
Фридман (Friedman N. E.) [1956]. The truncation error in a semi-discrete analog of the heat equation. — J. Math. and Phys., v. 35, No. 3, p. 299—308.
Фройдигер, Галлахер, Томмен (Freudiger F. A., Gallaher W. H., Thommen H. U.) [1967]. Numerical calculations of the low Reynolds number flow over a blunt wedge with rearward facting step. — ARL 67-0151, Aerospace Res. Lab., United States Air Force, Wright — Patterson AFB, Ohio.
Фромм (Fromm J. E.) [1961]. Lagrangian difference approximations for fluid dynamics. — Los Alamos Sci. Lab. Rept. No. 2535, Los Alamos, New Mexico.
— [1963]. A method for computing non-steady incompressible viscous fluid flows. — Los Alamos Sci. Lab., Rept. No LA-2910, Los Alamos, New Mexico.
— [1964]. The time dependent flow of an incompressible viscous fluid. — In: Methods of computational physics, v. 3, p. 345—382. [Имеется перевод: Неустановившееся течение несжимаемой вязкой жидкости. — В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. Под ред. Б. Олдера и др. — М.: Мир, 1967, с. 343—381.]
— [1965]. Numerical solutions of the nonlinear equations for a heated fluid layer. — Phys. of Fluids, v. 8, No. 10, p. 1757—1769.
— [1967]. Finite difference methods of solution of non-linear flow processes with application to the Benard problem. — Los Alamos Sci. Lab. Rept. LA-3522, Los Alamos, New Mexico.
— [1968]. A method for reducing dispersion in convective difference schemes. — J. of Comput. Phys., v. 3, p. 176—189.
— [1969]. Practical investigation of convective difference approximations of reduced dispersion. — In: Frenkiel and Stewartson [1969].
— [1970а]. A numerical study of buoyancy driven flows in room enclosures. — IBM Res. Lab., San Jose, California.
— [1970б]. A numerical method for computing the non-linear, time-dependent, buoyant circulation of air in rooms. — RJ 732. IBM Res. Report, San Jose, California.
— [1970в]. Lectures on large scale finite difference computation of incompressible fluid flows. — In: An introduction to computer simulation in applied science. — Palo Alto Sci. Center, p. 34—94.

— [1971]. A numerical study of buoyance driven flows in room enclosures. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Численное изучение конвекции в потоках, движущихся в закрытых помещениях. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 289—299.]

Фромм, Харлоу (Fromm J. E., Harlow F. H.) [1963]. Numerical solution of the problem of vortex street development. — Phys. of Fluids, v. 6, No. 7, p. 975—982.

Фуджита, Грандосо (Fujita T., Grandoso H.) [1968]. Split of thunderstorm into anticyclonic and cyclonic storms and their motion as determined from numerical model experiments. — J. Atmospheric Sci., v. 25, p. 416—439.

Хаббард (ред.) (Hubbard B., ed.) [1971]. Numerical solution of partial differential equations. II. — Proc. of the Second Symposium on the Numerical Solution of Partial Differential Equations, Univ. of Maryland, College Park, May 11—15, 1970. — New York: Academic Press.

Хаджидимос (Hadjidimos A.) [1969]. On some high accuracy difference schemes for solving elliptic equations. — Numerical Math., v. 13, p. 396—403.

Хан (Hahn S. G.) [1958]. Stability criteria for difference schemes. — Comm. Pure and Appl. Math., v. 11, p. 243—255.

Харди (Hardy J. W.) [1968]. Tides in a numerical model of the atmosphere.— UCRL-50368, Lawrence Radiation Lab., Univ. of California, Livermore.

Харлоу (Harlow F. H.) [1963]. The Particle-In-Cell method for numerical solution of problems in fluid dynamics. — Proc. of Symposium in Appl. Math., v. 15, p. 269—288.

— [1964]. The Particle-In-Cell computing method for fluid dynamics. — In: Method in Computational Physics., v. 3, p. 319. [Имеется перевод: Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики. — В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. Под ред. Б. Олдера и др. — М.: Мир, 1967, с. 316—342.]

— [1969]. Numerical methods for fluid dynamics, an annotated bibliography. — Rept. No. LA-4281, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico.

Харлоу, Амсден (Harlow F. H., Amsden A. A.) [1968]. Numerical calculation of almost incompressible flow. — J. of Comput. Phys., v. 3, 80—93.

— — [1970a]. Fluid dynamics: an introductory text. —Rept. No. La-4100, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico.

— — [1970б]. A numerical fluid dynamics method for all flow speeds. — Los Alamos Sci. Lab., New Mexico, LADC-12190; J. of Comput. Phys., 1971, v. 8, p. 197—213.

— — [1971]. Fluid dynamics. — Rept. No. LA-4700, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico.

Харлоу, Амсден, Хёрт (Harlow F. H., Amsden A. A., Hirt C. W.) [1971]. Numerical calculation of fluid flows at arbitrary Mach number. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Численный расчет течений жидкости при произвольном числе Маха. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей.— М.: Мир, 1973, с. 189—196.]

Харлоу, Дикмен, Харрис, Мартин (Harlow F. H., Dickman D. O., Harris D. E., Martin R. E.) [1959]. Two-dimensional hydrodynamic calculations. — Rept. No. LA-2301, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico.

Харлоу, Ромеро (Harlow F. H., Romero N. C.) [1969]. Turbulence distortion in a nonuniform tunnel. — Rept. No. LA-4247, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico.

Харлоу, Уэлч (Harlow F. H., Welch J. E.) [1965]. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. — Phys. of Fluids, v. 8, No. 12, p. 2182—2189.

— — [1966]. Numerical study of large amplitude free surface motions. — Phys. of Fluids, v. 9, p. 842—851.

Харлоу, Фромм (Harlow F. H., Fromm J. E.) [1964]. Dynamics and heat transfer in the von Karman wake of a rectangular cylinder. — Phys. of Fluids, v. 7, No. 8, p. 1147—1156.
— — [1965]. Computer experiments in fluid dynamics. — Scientific American, v. 212, No. 3, p. 104—110.
Харлоу, Хёрт (Harlow F. H., Hirt C. W.) [1969]. Generalized transport theory of anisotropic turbulence. — Rept. No. LA-4086, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico.
Харпер, Киндер (Harper L. R., Kinder J.) [1967]. Second report on turbulent mixing studies. — Rept. No. A. P. 5451, Bristol Sideley Engines Ltd., United Kingdom.
Хартри (Hartree D. R.) [1958]. Numerical analysis. — 2nd Edition. — London: Oxford Univ. Press, Chapter X, p. 257—263.
Хаустон, Де Бремекер (Houston M. H., De Bremaecker J. Cl.) [1974]. ADI solution of free convection in a variable viscosity fluid. — J. of Comput. Phys., v. 16, No. 3, p. 221—239.
Хауэлл, Спонг (Howell R. H., Spong E. D.) [1969]. Numerical solution of subsonic compressible flow at two-dimensional inlets. — AIAA J., v. 7, No. 7, p. 1392—1394. [Имеется перевод: Численное решение для дозвукового сжимаемого течения в плоских диффузорах. — РТК, т. 7, № 7, с. 213—215.]
Хафтон, Джонс (Houghton D. D., Jones W. L.) [1966]. A numerical model for linearized gravity and acoustic waves. — J. of Comput. Phys., v. 3, p. 339—357.
Хафтон, Изаксон (Houghton D. D., Isaacson E.) [1968]. Mountain winds. — In: Studies in numerical analysis 2, Philadelphia: Soc. for Industr. and Appl. Math., p. 21—52.
Хафтон, Касахара, Вашингтон (Houghton D. D., Kasahara A., Washington W.) [1966]. Long-term integration of the barotropic equations by the Lax-Wendroff method. — U. S. Monthly Weather Rev., v 94, No. 3, p. 141—150.
Хей, Лей (Heie H., Leigh D. C.) [1965]. Numerical stability of hyperbolic equations in three independent variables. — AIAA J., v. 3, No. 6, p. 1099—1103. [Имеется перевод: Устойчивость численных решений гиперболических уравнений от трех независимых переменных. — РТК, т. 3, № 6, с. 146—151.]
Хейвуд (Heywood J. G.) [1970]. On stationary solutions of the Navier — Stokes equations as limits of nonstationary solutions. — Arch. for Rat. Mech. Analysis, v. 37, No. 1, p. 48—60.
Хейз (Hayes J. K.) [1970]. Four computer programs using Green's third formula to numerically solve Laplace's equation in inhomogeneous media. — Rept. No. LA-4423, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico.
Хемминг (Hamming R. W.) [1962]. Numerical methods for scientists and engineers. — New York: McGraw-Hill Book Company, Inc.
Хёрд, Петерс (Hurd A. C., Peters A. R.) [1970]. Analysis of flow separation in a confined two-dimensional channel. — J. of Basic Engineering, ASME Paper No. 70-FE-29.
Хёрт (Hirt C. W.) [1965]. Multidimensional fluid dynamics calculations with high speed computers. — AIAA Paper No. 65-3, AIAA 2nd Aerospace Sci. Meeting, New York, January 25—27, 1965.
— [1968]. Heuristic stability theory for finite-difference equations. — J. of Comput. Phys., v. 2, p. 339—355.
— [1969]. Computer studies of time-dependent turbulent flows — In: Frenkiel and Stewartson [1969].
— [1970]. Generalized turbulence transport equation. — LA-DC-10526, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico.
— [1971]. An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing technique. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Произвольный лагранжево-эйлеров численный

метод. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 156—164.]
Хёрт, Харлоу (Hirt C. W., Harlow F. H.) [1967]. A general corrective procedure for the numerical solution of initial-value problems. — J. of Comput. Phys., v. 2, p. 114—119.
Хёрт, Шеннон (Hirt C. W., Shannon J. P.) [1968]. Free-surface stress conditions for incompressible-flow calculations. — J. of Comput. Phys., v. 2, p. 403—411.
Хёрш (Hirsh R. S.) [1975]. Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing scheme. — J. of Comput. Phys., v. 19, No. 1, p. 90—109.
Хигби, Плустер (Higbie L. C., Plooster M. N.) [1968]. Variable pseudoviscosity in one-dimensional hyperbolic difference schemes. — J. of Comput. Phys., v. 3, p. 154—156.
Хикс (Hicks D. L.) [1968]. Hydrocode test problems. — AFWL-TR-67-127, Air Force Weapons Lab., Kirtland Air Force Base, New Mexico.
— [1969]. One-dimensional Lagrangian hydrodynamics and the IDLH hydrocode. — SC-RR-69-728, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico.
— [1971]. Extending Courant, Friedrichs, and Lewy's (1928) compactness result to nonlinear equations of state and non-differentiable initial data. — SC-RR-710302, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico.
Хикс, Пелцл (Hicks D. L., Pelzl R.) [1968]. Comparison between a von Neuman — Richtmyer hydrocode (AFWL's Puff) and a Lax-Wendroff hydrocode. — AFWL-TR-68-112, Air Force Weapons Lab., Kirtland Air Force Base, New Mexico.
Хилдебранд (Hildebrand F. B.) [1952]. On the convergence of numerical solutions of the heat-flow equation. — J. Math. and Phys., v. 31, No. 1, p. 35—41.
— [1968] Finite-difference equations and simulations. — Englewood Cliffs Prentice-Hall.
Хилл, Ларсен (Hill R., Larsen G. E.) [1970]. Users' manual for the TOIL code at Sandia laboratories. — SC-DR-70-61, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico.
Хирасаки (Hirasaki G. J.) [1967]. A general formulation of the boundary conditions on the vector potential in three-dimensional hydrodynamics. — Ph. D. Thes., Rice Univ., Houston, Texas.
Хирота, Токиока, Нисигути (Hirota I., Tokioka T., Nishiguchi M.) [1970]. A direct solution of Poisson's equation by generalized sweep-out method. — J. of Meteorological Soc. of Japan, Ser. II, Vol. 48, No. 2, p. 161—167.
Ходжкинс (Hodgkins W. R.) [1966]. On the relation between dynamic relaxation and semi-iterative matrix methods. — Numerische Math., B. 9, S. 446—451.
Хокни (Hockney R. W.) [1965]. A fast direct solution of Poisson's equation using Fourier analysis. — J. Association of Computing Machinery, v. 12, p. 95.
— [1971]. The potential calculation and some applications. — In: Methods in computational physics, v. 9. [Имеется перевод: Методы расчета потенциала и их приложения. В кн.: Вычислительные методы в физике плазмы. Под ред. Б. Олдера и др. — М.: Мир, 1974, с. 143—212.]
Холл (Hall M. G.) [1969]. A numerical method for calculating unsteady two-dimensional laminar boundary layers. — Ing.-Archiv., B. 38, No. 2, S. 97—106.
Холт (ред.) (Holt M., ed.) [1971]. Proceedings of the second international conference on numerical methods in fluid dynamics. — Lecture Notes in Physics, v. 8. — New York, Springer.
Холт, Массон (Holt M., Masson B. S.) [1971]. The calculation of high subsonic flow past bodies by the method of integral relations. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Расчет обтекания тел с большой дозвуковой

скоростью при помощи метода интегральных соотношений. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 39—48.]
Холт, Ндефо (Holt M., Ndefo D. E.) [1970]. A numerical method for calculating steady unsymmetrical supersonic flow past cones. — J. of Comput. Phys., v. 5, p. 463—486.
Холтон (Halton J. H.) [1970]. A retrospective and prospective survey of the Monte Carlo method. — SIAM Rev., v. 12, No. 1, p. 1—63.
Хомич, Джордж (Homicz G. F., George A. R.) [1970]. A comparison between the method of integral relations and the method of lines as applied to the blunt body problem. — J. Spacecraft, v. 7, No. 12, p. 1483—1484.
Хопер, Венструп (Hoeper P. S., Wenstrup R. S., Jr.) [1970]. Numerical solution to Laplace's equation in spherical coordinates with axial symmetry.— J. of Appl. Phys., v. 41, No. 5, p. 1879—1882.
Хопф (Hopf E.) [1950]. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. — Comm. Pure and Appl. Math., v. 3, p. 201—230.
Хоскин (Hoskin N. E.) [1964]. Solution by characteristics of the equations of one-dimensional unsteady flow. — In: Methods in computational physics, v. 3, p. 265—294. [Имеется перевод: Метод характеристик для решения уравнений одномерного неустановившегося течения. — В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. Под ред. Б. Олдера и др. — М.: Мир, 1967.]
Хоскин, Лембурн (Hoskin N. E., Lambourn B. D.) [1971]. The computation of general problems in one dimensional unsteady flow by the method of characteristics. — In: Holt [1971]. [Имеется перевод: Расчет общих одномерных нестационарных задач с помощью метода характеристик. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 83—93.]
Хофман, Рог (Hofmann R., Reaugh J.) [1968]. Shock hydrodynamic calculations in wires. — Rep. No. PIFR-104, Physics Internat. Company, San Leandro, California.
Хуан, Чау (Huang S. L., Chou P. C.) [1968]. Calculations of expanding shock waves and late-stage equivalence. — DIT Rept. 125-12, Drexel Inst. of Technol., Philadelphia, Pennsylvania.
Хуан (Hwang J. D.) [1968]. On the numerical solutions of the general Navier — Stokes equations for two-layered stratified flows. — Ph. D. Thes., Oregon State Univ., Corvallis.
Хын, Макано (Hung T.-K., Macagno E. O.) [1966]. Laminar eddies in a two-dimensional conduit expansion. — La Houille Blanche, t. 21, No. 4, p. 391—400.
Цвас, Абарбанель (Zwas G., Abarbanel S.) [1970]. Third and fourth order accurate schemes for hyperbolic equations of conservation law form. — AFOSR-TR-71-0038, Tel-Aviv Univ.
Цзао (Tsao Nai-kuan) [1970]. On direct solutions of linear algebraic systems.— Hawaii Univ., Dep. of Electr. Eng., Honolulu.
Цзю (Chiu Y. T.) [1970]. Traveling waves of arbitrary amplitude in compressible hydrodynamics under gravity: an exact solution. — Phys. of Fluids, v. 13, No. 12, p. 2950.
Цубои, Итикава (Tsuboi A., Ichikawa M.) [1969]. Error analysis on various electrical analogues solutions for one, two, and three dimensional heat conduction partial differential equations. — Memoirs of the Faculty of Engineering Nagoye Univ., v. 19, No. 2, p. 228—249.
Цумвальт (Zumwalt G. W.) [1967]. Numerical methods for computing the diffusion of disturbances on sonic boom waves. — Final Rept. on Contract NASA NGR-37-002-037, School of Mech. Eng., Oklahoma State Univ., Still water.
Цянь Сюэ-сень (Tsien H. S.) [1958]. The equations of gas dynamics. — In: High speed aerodynamics and jet propulsion, v. III. — Princeton: Princeton Univ. Press. [Имеется перевод: Уравнения газовой динамики. — В кн.: Основы газовой динамики. Под ред. Г. Эммонса. — М.: ИЛ, 1963.]

Чаленко П. И. [1970]. Engineering formulas for solving boundary value problems for the Helmholtz and Poisson equations by the method of summary representations. — NASA TT-F-13059, August, 1970.

Чарни (Charney J. G.) [1962]. Integration of the primitive and balance equations. — In: Proc. Internat. Symposium on Numerical Weather Prediction. — Tokyo, p. 131—152.

Чарни, Фьёртофт, фон Нейман (Charney J. G., Fjortoft R., von Neumann J.) [1950]. Numerical integration of the barotropic vorticity equation. — Tellus, v. 2, No. 4, p. 237—254.

Чау, Мортимер (Chou P. C., Mortimer R. W.) [1966]. Numerical integrations of flow equations along natural coordinates. — AIAA J., v. 4, No. 1, p. 26—30. [Имеется перевод: Численное интегрирование уравнений течения в естественной системе координат. — РТК, т. 4, № 1, с. 32—37.]

Чау (Chow C. L.) [1969]. Explicit heat conduction equations at thermally insulated surface. — J. of Heat Transfer, v. 91, No. 3, p. 446—447. [Имеется перевод: Явные конечно-разностные уравнения теплопроводности в случае термически изолированной поверхности. — Теплопередача, т. 91, № 3. с. 172.]

Чау, Краузе, Лю, Мао (Chow F., Krause E., Liu C. H., Mao J.) [1970]. Numerical investigations of an airfoil in a nonuniform stream. — AIAA J. of Aircraft, p. 531.

Чебеки (Cebeci T.) [1969]. Laminar and turbulent incompressible boundary layers on slender bodies of revolution in axial flow. — Trans. ASME, p. 1—6.

Чебеки, Келлер (Cebeci T., Keller H. B.) [1971]. Shooting and parallel shooting methods for solving the Falkner — Skan boundary-layer equation. — J. of Comput. Phys., v. 7, p. 289—300.

Чебеки, Смит (Cebeci T., Smith A. M. O.) [1970]. A finite-difference method for calculating compressible laminar and turbulent boundary layers.— Trans. ASME, p. 1—13.

Чебеки, Смит, Мосинскис (Cebeci T., Smith A. M. O., Mosinskis G.) [1970]. Calculation of compressible adiabatic turbulent boundary layers. — AIAA J., v. 8, No 11, p. 1974—1982. [Имеется перевод: Расчет сжимаемого адиабатического турбулентного пограничного слоя. — РТК, т. 8, № 11, с. 66—76.]

Чен, Стрит (Chan R. K.-C., Street R. L.) [1970]. A computer study of finite-amplitude water waves. — J. of Comput. Phys., v. 6, p. 68—94.

Чен, Стрит, Стрелков (Chan R. K.-C., Street R. L., Strelkoff T.) [1969]. Computer studies of finite-amplitude water waves. — Tech. Rep. No. 104, Dep. of Civil Eng., Stanford Univ., Stanford, California.

Чен, Стрит, Фромм (Chan R. K.-C., Street R. L., Fromm J. E.) [1971]. The digital simulation of water waves — An evaluation of SUMMAC. — In: Holt (1971]. [Имеется перевод: Численное моделирование волн в воде — развитие метода SUMMAC. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 183—188.]

Чен (Cheng S. I.) [1968]. Accuracy of difference formulation of Navier — Stokes equations. — A. M. S. Dep., Princeton Univ., Princeton, New Jersey. — [1970]. Numerical integration of Navier — Stokes equations. — AIAA J., v. 8, No. 12, p. 2115—2122. [Имеется перевод: Численное интегрирование уравнений Навье — Стокса. — РТК, т. 8, № 12, с. 3—13.]

Чен, Коллинз (Chen H.-T., Collins R.) [1971]. Shock wave propagation past an ocean surface. — J. of Comput. Phys., v. 7, p. 89—101.

Чепмен, Уолкер (Chapman A. J., Walker W. F.) [1971]. Introductory gas dynamics. — New York: Holt, Rinehart, and Winston.

Чепмен, Уимброу, Кестер (Chapman D. R., Wimbrow W. R., Kester R. H.) [1952]. Experimental investigation of base pressure on blunt-trailing-edge wings at supersonic velocities. — NACA TR 1109.

Чорин (Chorin A. J.) [1967]. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. — J. of Comput. Phys., v. 2, p. 12—26.
— [1968]. Numerical solution of incompressible flow problems. — In: Studies in numerical analysis 2. — Philadelphia: Soc. for Industr. and Appl. Math., p. 64—70.
— [1969]. On the convergence of discrete approximations to the Navier — Stokes equations. — Math. of Computation, v. 23, No. 106, p. 341—353.
— [1971]. Computational aspects of the turbulence problem. — In: Holt [1971].
Чу (ред.) (Chu C. K., ed.) [1968]. Computational fluid dynamics. — New York: Amer. Inst. Aeronautics and Astronautics.
Чу (Chu Chong-Wei) [1964]. A simple derivation of three-dimensional characteristic relations. — AIAA J., v. 2, No. 7, p. 1336—1337. [Имеется перевод: Простой вывод характеристических соотношений для трехмерного случая. — РТК, т. 2, № 7, с. 222—223.]
Чу (Chu W.-H.) [1970]. Development of a general finite difference approximation for a general domain, Part 3, A direct and reverse successive overrelaxation method. — Southwest Res. Inst., San Antonio, Texas.
Чушкин П. И. [1968а]. Метод характеристик для пространственных сверхзвуковых течений — М., Изд. ВЦ АН СССР, 1968.
— [1968б]. Numerical method of characteristics for three-dimensional supersonic flows. — In: Progress Aeronautical Science, vol. 9. — Oxford — London: Pergamon Press, 1968, p. 41—122.
— [1970а]. Supersonic flows about conical bodies. — J. of Comput. Phys., v. 5, p. 572—586.
— [1970б]. Numerical analysis of combustion in supersonic flows. — Paper ICAS 70-52, Internat. Council of the Aeronaut. Sci. 7th Congress, Rome, Italy, September 14—18, 1970.
Шаве, Ричардс (Chavez S. P., Richards C. G.) [1970]. A numerical study of the coanda effect. — 70-Flcs-12, Amer. Soc. of Mech. Eng., United Engineering Center, New York.
Шавит, Лаван (Shavit G., Lavan Z.) [1971]. Analytical and experimental investigation of laminar mixing of confined heterogeneous jets. — AIAA Paper No. 71-601, AIAA 4th Fluid and Plasma Dynamics Conference, Palo Alto, California, June 21—23, 1971.
Шампайн (Shampine L. F.) [1968]. Boundary value problems for ordinary differential equations. — SIAM J. Numerical Analysis, v. 5, p. 219.
Шампайн, Томпсон (Shampine L. F., Thompson R. J.) [1970]. Difference methods for nonlinear first-order hyperbolic systems of equations. — Math. of Computation, v. 24, No. 109, p. 45.
Шапиро (Shapiro A. H.) [1953]. The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow. — Vols I, II. — New York: Ronald Press.
Шапиро, О'Брайен (Shapiro M. A., O'Brien J. J.) [1970]. Boundary conditions for fine-mesh limited-area forecasts. — J. of Appl. Meteorology, v. 9, No. 3, p. 345—349.
Шварц (Schwartz R. A.) [1967]. Computation of relativistic gravitational collapse. Supernovae and Their Remnants. — New York: Gordon and Breach Sci. Publishers.
Шевелёв Ю. Д. [1967]. Численное исследование пространственного пограничного слоя в сжимаемом газе. — Изв. АН СССР, МЖГ, № 4, с. 171—177.
Шелдон (Sheldon J. W.) [1959]. On the spectral norms of several iterative processes. — J. Ass. Computing Machinery, v. 6, p. 494.
— [1962]. Iterative methods for the solution of elliptic partial differential equations. — In: Mathematical methods for digital computers. — New York: J. Wiley and Sons.
Шелтон (Shelton G. A., Jr.) [1970]. Blunt-body electrostatic probe analysis. — SC-RR-70-331, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico.

Шёнауэр (Schoenauer W.) [1970]. Solution of the three-dimensional time-dependent Navier — Stokes equations by the difference method. — Ph. D. Diss., Karlsruhe Univ., Karlsruhe.

Шенк (Shank G. D.) [1968]. Error bounds for difference approximations to initial-boundary and mixed initial-boundary value problems for parabolic equations of general domains. — Ph. D. Thes., Maryland Univ., College Park.

Шёнхерр, Черчилл (Schoenherr R. U., Churchill S. W.) [1970]. The use of extrapolation for the solution of heat transfer problems by finite-difference methods. — J. of Heat Transfer, August, p. 564—565. [Имеется перевод: Использование экстраполяции для решения задачи теплообмена конечно-разностными методами. — Теплопередача, № 3, с. 255.]

Шехтер (Schechter H.) [1967]. Application of Pade integration to the partial differential equations of the hypersonic wake. — Tech. Memo No. 165, General Appl. Sci. Lab., Westbury, Long Island, New York.

Шихна, Заккай, Эрдош (Sihna R., Zakkay V., Erdos J.) [1970]. Flow field analysis of plumes of two-dimensional underexpanded jets by a time-dependent method. — NYU-AA-70-04, New York Univ., School of Eng. and Sci., University Heights, New York.

Шлихтинг Г. (Schlichting H.) [1968]. Boundary layer theory. — 6th Edition. — New York: McGraw-Hill Book Co. [Имеется перевод: Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974.]

Шортли, Уэллер (Shortley G. H., Weller R.) [1938]. The numerical solution of Laplace's equation. — J. of Appl. Phys., v. 9, p. 334—348.

Шрёдер, Томсен (Schroeder R. C., Thomsen J. M.) [1969]. An implicit difference solution of multi-dimensional hydrodynamic flow problems. — UCR-71651, Lawrence Radiation Lab., Univ. of California, Livermore.

Штеттер (Stetter H. J.) [1970]. Discretization methods for differential equations. — AFOSR 70-2432TR, Inst. fur Numerische Math. Technische Hochschule, Vienna.

Штуббе (Stubbe P.) [1970]. Simultaneous solution of the time dependent coupled continuity equations, heat conduction equations, and equations of motion for a system consisting of a neutral gas, an electron gas, and a four component ion gas. — J. Atmospheric and Terrestrial Phys., v. 32, p. 865—903.

Шульц (Schulz W. D.) [1964]. Tensor artificial viscosity for numerical hydrodynamics. — J. of Mathematical Phys., v. 5, No. 1, p. 133—138.

Шуман (Schumann U.) [1975]. Linear stability of finite difference equations for three-dimensional flow problems. — J. of Comput. Phys., v. 18, № 4, p. 465.

Шелкунов (Schelkunoff S. A.) [1965]. Applied mathematics for engineers and scientists. — Second Edition. — Bell Telephone Lab. Series.

Щенников В. В. [1969]. Об одном классе точных решений уравнений Навье — Стокса для сжимаемого теплопроводного газа. — ПММ, т. 33, № 3, с. 570—576.

Эванс, Шнекснейдер, Хьюбер (Evans J. S., Schnexnader C. J., Huber P. W.) [1970]. Computation of ionization in reentry flowfields. — AIAA J., v. 8, No. 6, p. 1082—1089. [Имеется перевод: Расчет ионизации в полях течения при входе в плотные слои атмосферы. — РТК, т. 8, № 6, с. 115—125.]

Эванс, Харлоу (Evans M. W., Harlow F. H.) [1957]. The Particle-in-Cell method for hydrodynamic calculations. — Los Alamos Sci. Lab., Rept. No. LA-2139, Los Alamos, New Mexico.

— — [1958]. Calculation of supersonic flow past an axially symmetric cylinder. — J. Aeronaut. Sci., v. 25, p. 269—270.

— — [1959]. Calculation of unsteady supersonic flow past a circular cylinder. — Amer. Rocket Soc. J., p. 46—48.

Эванс, Харлоу, Мейкснер (Evans M. W., Harlow F. H., Meixner B. D.) [1962]. Interaction of shock or rarefraction with a bubble. — Phys. of Fluids, v. 5, No. 6, p. 651—656.
Эдвардс (Edwards A. L.) [1969]. TRUMP computer program: calculation of transient laminar fluid flow in porous media. — UCRL-50664, Lawrence Radiation Lab., Univ. of California, Livermore.
Эдди (Eddy E. P.) [1949]. Stability in the numerical solution of initial value problems in partial differential equations. — NOLM 10232, Naval Ordnance Lab., White Oak, Silver Spring, Maryland.
Эйзен (Eisen D.) [1967a]. The equivalence of stability and convergence for finite difference schemes with singular coefficients. — Numerische Math., B. 20, S. 20—29.
— [1967б]. On the numerical solution of $u_t = u_{rr} + (2/r)u_r$. — Numerische Math., B. 10, S. 397—409.
Эймс (Ames W. F.) [1965]. Nonlinear partial differential equations in engineering. — New York: Academic Press.
— [1969]. Numerical methods for partial differential equations. — New York: Barnes and Noble, Inc.
Эль Ассар (El Assar R. J.) [1969]. Compressible laminar wake of a thin flat plate. — Paper 69-WA/FE-6, American Soc. of Mech. Eng., Winter Annual Meeting, Los Angeles, California, November 16—20, 1969.
Эмери (Emery A. F.) [1968]. An evaluation of several differencing methods for inviscid fluid flow problems. — J. of Comput. Phys., v. 2, p. 306—331.
Эмери, Ашёрст (Emery A. F., Ashurst W. T.) [1971]. The numerical computation of supersonic flows about finite bodies with application to massive surface blowing. — SCL-DR-69-159, Sandia Lab., Livermore, California.
Эмери, Карсон (Emery A. F., Carson W. W.) [1971]. An evaluation of the use of the finite-element method in the computation of temperature. — J. of Heat Transfer, May, p. 136—145. [Имеется перевод: Оценка применимости метода конечных элементов при расчетах температуры. — Теплопередача, № 2, с. 6—17.]
Энджел (Angel E.) [1968a]. Discrete invariant imbedding and elliptic boundary-value problems over irregular regions. — J. of Math. Analysis and Appl., v. 23, p. 471—484.
— [1968б]. Dynamic programming and linear partial differential equations. — J. of Math. Analysis and Appl., v. 23, No. 3, p. 628—638
Энджел, Калаба (Angel E., Kalaba R.) [1970]. One sweep numerical method for vector matrix difference equations with two point boundary conditions. — Tech. Rept. No. 70-16, Electrical Eng. Dept., Univ. of Southern California, Los Angeles.
Эндрьюс (Andrews D. J.) [1971]. Calculation of mixed phases in continuum mechanics. — J. of Comput. Phys., v. 7, p. 310—326.
Эрдош, Заккаи (Erdos J., Zakkay V.) [1969]. Numerical solution of several steady wake flows of the mixed supersonic/subsonic type by a time-dependent method and comparison with experimental data. — AIAA Paper No. 69-649, AIAA Fluid and Plasma Dynamics Conference, San Francisco, California, June 16—18, 1969.
Эрлих, Гурвиц (Ehrlich R., Hurwitz H., Jr.) [1954]. Multigroup methods for neutron diffusion problems. — Nucleonics, v. 12, No. 2, p 23—30.
Эсток, Бхумралкар (Estoque M. A., Bhumralkar C. M.) [1969]. Flow over a localized heat source. — U. S. Monthly Weather Rev., v. 97, No. 12, p. 850—859.
Янг (Young D.) [1954]. Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type. — Trans. Amer. Math. Soc., v. 76, p. 92—111.
Янг, Кинкейд (Young D. M., Kincaid D. R.) [1969]. Norms of the successive overrelaxation method and related methods. — TNN-94, Univ. of Texas at Austin Computation Center.

Янг, Эйдсон (Young D. M., Eidson H. M.) [1970]. On the determination of the optimum relaxation factor for the SOR method when the eigenvalues of the Jacobi method are complex. — Int. Techn. Rept. No. 26, Univ. of Texas at Austin, Center for Numerical Analysis.

Яненко Н. Н. [1967]. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — Новосибирск.

Яненко Н. Н., Шокин Ю. И. [1971]. On the group classification of difference schemes for systems of equations in gas dynamics. — In: Holt [1971].

Янович (Yanowitch M.) [1969]. A numerical study of propagating waves in a viscous isothermal atmosphere. — J. of Comput. Phys., v. 4, p. 531—542.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. — М.: Наука, 1964.

Бахвалов Н. С. Численные методы. — М.: Наука, 1973.

Белоцерковский О. М. и др. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. Теоретическое и экспериментальное исследования. — 2-е изд. — М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1967.

Белоцерковский О. М. и др. Численное исследование современных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1974.

Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. — М.: Физматгиз, т. 1, 1959; т. 2, 1960.

Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976.

Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы (введение в теорию). — М.: Наука, 1973.

Дородницын А. А. Лекции по численным методам решения уравнений вязкой жидкости. — М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1969.

Дьяконов Е. Г. Разностные методы решения краевых задач. — М.: Изд-во МГУ, ч. I, 1971; ч. 2, 1972.

Дьяченко В. Ф. Основные понятия вычислительной математики. — 2-е изд. — М.: Наука, 1978.

Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978.

Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы. — М.: Наука, т. 1, 1976; т. 2, 1977.

Любимов А. Н., Русанов В. В. Течения газа около тупых тел. — М.: Наука, 1970.

Марчук Г. И. Численные методы в прогнозе погоды. — Л.: Гидрометиздат, 1967.

— Методы вычислительной математики. — Новосибирск: Наука, 1973.

Рябенький В. С., Филиппов А. Ф. Об устойчивости разностных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1956.

Самарский А. А. Лекции по теории разностных схем. — М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1969.

— Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1974.

— Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.

Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. — М.: Наука, 1976.

Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973.

Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.

Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. — М.: Наука, 1973.

Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — 2-е изд., доп. — М.: Физматгиз, 1963.

Численные методы решения задач механики сплошной среды. Под ред. О. М. Белоцерковского. — М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1969.

Яненко Н. Н. Введение в разностные методы математической физики. Ч. 1 и 2. — Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1968.

Прямое численное моделирование течений газа (численный эксперимент в газовой динамике). Под ред. О. М. Белоцерковского. — М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1978.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ


*Абарбанеля — Цваса* схема 379—380, 526
Автомодельные решения 13, 290, 291, 412, 413, 487, 488
*Адамса — Бэшфорта* схема 115—117, 119, 522, 526, 532
Адвекция и конвекция 31
Адиабатическая стенка 282, 288—291, 390, 404
Адиабатическое течение 535
Акустические волны 455, 456
ALE алгоритм 458
Анализ экономической эффективности методов расчета 17, 174—175, 211—212
Аналогия между стационарными итеративными и нестационарными методами 161—164, 167, 178, 188
Аппроксимации ошибки *см.* Ошибки аппроксимации
Аппроксимация дифференциального уравнения разностным аналогом 27, 79, 81, 393, 395, 401, 402
— *Паде* 452
— полиномиальная 43—45, 56, 166, 404, 426
*Аракавы* схема 57, 160—161, 296, 310, 526
*A*-устойчивости критерий 78

Бесконечная скорость распространения возмущения 131, 132, 140, 141, 151, 356
«β-плоскости» приближение 160, 455—457
Бигармоническое уравнение 166, 191, 192, 454
*Блазиуса* решение 217, 235, 442, 451, 459, 531
Блок-схемы 474
Блочно-трехдиагональная матрица 133, 175, 198, 204, 220
Блочные методы 176
*Больцмана* уравнение 464
*Бориса* алгоритм переноса с коррекцией потоков (алгоритм FGT) 380—382
Боры 330
*Брайловской* схема 135—138, 382, 386, 387, 436, 437, 521, 523, 532, 536
*Буземана* интегральное соотношение 412
*Бунемана* метод 176—177, 204
*Буссинеска* приближение 25, 101, 454, 507
Быстрое преобразование *Фурье* 176, 204
*Бюргерса* уравнение 29, 35, 56, 138, 251, 331, 332, 335, 358, 359, 381, 482, 485

Векторное поле соленоидальное 311
Векторный потенциал 311
Верхней релаксации оптимальный метод 183
— — — параметр 183, 187, 281, 533
«Ветровое напряжение» 233, 535
Взаимодействие ударной волны с пограничным слоем 351, 401, 433, 438
Взвешенных невязок метод 172
Взрыва в ячейках метод (EIC) 23, 361
Висячие скачки 296, 377
Вихрь модифицированный 443
Вихря естественная конвекция 26
Вихря переноса уравнение 21, 29—32, 34, 35, 38, 529
— — — методы решения 38—175
Внутренняя энергия 316, 317, 320, 325, 327
— — торможения 317
— — удельная 320, 321
Возвратно-циркуляционного течения зона 274
Возмущения шумовые 45
Волновое число 69, 83
— — в двумерном случае 83

Волны длина 69, 83
— — в двумерном случае 83
Времени масштаб диффузионный 33
— — конвективный 32, 34
— масштабы иные 34
Время переноса частицы через расчетную область 273
— прохождения программы 479—480
Второй закон термодинамики 76, 98
*Вудса* условие для вихря на стенке 217—218
Выпуклого угла обтекание жидкостью несжимаемой 258—264, 273, 279, 297
— — — — сжимаемой 409—412, 447
Вычисления вручную 19, 182, 215
«Вычислительные молекулы» 342, 361
Вычислительный цикл 36—38
Вычислительных схем и программ контроль 470, 479—489, 508. *См. также* Отладка.
Вязкоупругости задачи 443
Вязкость физическая 15, 25, 29, 31, 316, 317, 319—322
— эффективная 76. *См. также* Искусственная вязкость

Газ с постоянным показателем адиабаты 322, 327
— совершенный 322, 325
Газовая постоянная 321, 322, 327
*Галилея* преобразование 528
— принцип инвариантности 104, 169, 361
*Гаусса* метод исключения 176, 193, 198, 199, 207, 220
*Гаусса — Зейделя* метод 164, 180. *См. также Либмана* метод
Гексагональные сетки 432
Геофизические и метеорологические расчеты 20, 57, 101, 121, 122, 127, 216, 233, 247, 455—457, 460, 462, 486, 506
Гибридная сетка 224, 225, 266, 397, 405—409, 536
— — прямоугольно-полярная 430—432
Гидравлический прыжок 330
Гидродинамика аналитическая 13, 14, 16
— вычислительная 13—16
— экспериментальная 13, 14, 16
Гидродинамическая устойчивость 165, 188, 228, 468
Гидростатического давления тензор 320
Гидростатическое давление как независимая переменная 455
Гистерезис при срыве потока 25
Годограф множителя перехода 71
*Годунова* схема 381, 434, 437
Градиентные граничные условия *см Неймана* граничные условия
Градиентов напряжений тензор 319
Граница верхняя течения жидкости несжимаемой 229—233
— — — — сжимаемой 417—420
— входная *см.* Условия на границе входной
— выходная *см.* Условия на границе выходной
— раздела двух сред 353
— с постоянным давлением 447
Границы криволинейные 216
— нерегулярные в прямоугольной сетке 428—430
— регулярные 36
Граничные условия 20, 21, 28, 36, 83, 106, 121, 134, 142, 143, 145, 148, 150, 151, 154, 156, 157, 164, 166, 171, 173, 213—265, 269, 274, 275, 280, 281, 288—291, 297, 298, 306, 307, 374, 376, 377, 390—420, 436, 438, 439, 454, 509—514, 528
— — в гибридных сетках 224, 225, 375
— — важность численной постановки 21, 214—216
— — вычислительные и аналитические 255, 256, 439
— — для метода прогонки 281, 509—514
— — — простейших физических переменных 297—298, 301, 307
— — — схем неявных 150, 151, 269, 274
— — — — с расщеплением по времени 127, 159, 377
— — — температуры 288—291
— — — течения жидкости несжимаемой 106, 121, 134, 142, 143, 145, 148, 164, 166, 171, 173, 213—265, 288—291
— — — — — — на стенке в сетке гибридной 224, 225
— — — — — — — — — — нерегулярной 13
— — — — — — — — — — первого типа 216—224, 227, 278, 279, 533—535
— — — — — — — — — — фиктивных точках внутри стенки 226, 533

Граничные условия для течения жидкости несжимаемой на стенке движущейся 224, 230, 232, 438, 458
— — — — — — — — — для вихря трехмерного 312
— — — — — — — — — давления 278—281
— — — — — — — — — простейших физических переменных 297, 298, 301
— — — — — — — — — уравнения бигармонического 454, 534
— — — — — — — — — теплопроводности 154, 290, 291
— — — — — — — — — линейная форма 217
— — — — — — — — — на выпуклых углах 258—263
— — — — — — — — — промежуточном шаге 127
— — — — — — — — — наклонной 221, 222
— — — — — — — — — переопределенность 223
— — — — — — — — — прилипания 105, 217, 223, 225, 227, 230, 278, 297, 312
— — — — — — — — — проницаемой 216, 224
— — — — — — — — — скольжения 105, 142, 222, 229, 232, 291, 297, 301
— — — — — — — — — согласованность с формулой для скорости 219, 220
— — — — — сжимаемой 390—420, 436
— — — — — — — на стенке 344, 374, 376, 377, 390—420, 417, 429, 536
— — — — — — — — — адиабатической 390, 404, 413
— — — — — — — — — в сетке второго типа 395—397
— — — — — — — — — — — гибридной 397
— — — — — — — — — — нерегулярной 429
— — — — — — — — — — первого типа 391—395, 409—411
— — — — — — — — — — для градиента давления 393, 394, 396, 401, 404, 407—409, 411
— — — — — — — — — — плотности 398
— — — — — — — — — — схем с расщеплением по времени 377
Граничные условия для течения жидкости сжимаемой на стенке, отражения способ 391—393, 395—398, 402, 404, 405, 410, 412, 536
— — — — — — — — — прилипания 397—412, 417, 429, 536
— — — — — — — — — скольжения 390—398
— — и устойчивость 82, 83, 213, 214
— — на бесконечности 13, 231, 237, 255—258, 439, 441
— — периодические 204, 238, 239
— — — на входной и выходной границах 236—239, 241
— — симметричные 188
— — смешанного типа 154, 203, 213—214, 511, 512, 514
*Грасгофа* число 143, 219
Грубая сетка для проверки сходимости и отладки программы 269, 479—483
Грунтов динамика 457, 461, 462, 468

Давление безразмерное 275
Давления коэффициент 281, 422, 423, 500
— расчет для несжимаемой жидкости 275—284, 295, 296, 305—307
— характерная (для отсчета) величина 281—284
Движение жидкости несжимаемой, расчета методы 36—314, 333
— — — уравнения 29—33, 356
— — сжимаемой 31, 36, 53, 57, 98, 101, 127, 135, 136, 138, 151, 153, 166, 247, 243—255, 264, 275, 315—423, 455
— — — расчета методы 333—423
— — — — трудности основные 315—316
— — — уравнения 315—332
Двойные обходы узлов сетки 133, 194
Двухслойной схемы определение 85
Диагностика ошибок 479
Диагностические функционалы 506—508
Дивергентная форма уравнений 32, 55, 442. *См. также* Консервативная форма
Дивергенция скорости для жидкости несжимаемой 295, 306, 309
— — — — сжимаемой 316, 317, 410

Динамический напор 34
Динамического программирования подход 176
Динамической релаксации метод 193
*Дирихле* граничные условия 166, 175, 177, 178, 183, 184, 190, 194, 196, 198, 207, 213, 227, 278, 306, 510, 511, 513
Дискретного инвариантного вложения метод 176
Дискретных возмущений метод исследования устойчивости 62—68, 75, 77, 82, 243, 530
— — — — — и свойство транспортивности 106—110
Диссипативная функция 284—288, 291, 500
Диссипации механизм 125, 344
Диффузии коэффициент переменный 58, 530
— уравнение 62, 63, 65, 66, 83, 84, 129—132, 134, 144—148, 151, 172, 176
— — двумерное 84
— — трехмерное 84, 144
Диффузионное время безразмерное 33
— число, определение 62
— — в многомерном случае 84, 85
Диффузия 31, 49, 530, 531
Диффузорный срыв 26, 414
Длина пути перемешивания 346
Длинные морские волны 456
До- и сверхзвуковые смешанные течения 423
— — — — — условия на выходе 414, 415
Дробные шаги по времени 126, 134, 159, 376, 377. *См. также* Расщепления по времени схема
— ячейки 303—304
*Дэвиса* метод для уравнений *Навье — Стокса* 166, 167
*Дюфорта — Франкела* схема «чехарда» 21, 95—101, 116, 117, 138, 151, 160, 238, 536

Единичного заряда метод 206
Единственность решения 11, 18, 24—26, 414
*E*-оператор 154

Жесткие уравнения 11, 272, 292—294, 378, 460, 465, 535
Жидкости в ячейках метод (FLIC) 48, 102, 106, 355, 359—362, 385
Жидкости неньютоновские 15, 457, 461—463

Зависимость вязкости от температуры 328, 383, 476
Зависимых переменных преобразования 438, 445, 455
Задача о взаимодействии ударной волны с пограничным слоем 372, 398, 401
— — горении 449
— — движении транспорта на автостраде 31
— — следе 228, 362, 452
— — течении внутри замкнутой области с одной подвижной границей 12, 56, 105, 114, 271, 275, 282, 534, 536
— об обтекании затупленного тела с отошедшей ударной волной 268, 336, 423, 449
— — — обратного уступа, обозначения для границ 215
— с условиями граничными 31, 175
— — — начальными 31, 175
Задачи с поверхностями раздела 308, 361
— — свободной поверхностью 302, 304, 306, 308, 361, 447, 458
— теории упругости 349
— тестовые 483—488
Затухание искусственное (схемное) 88, 89, 102, 120, 125, 353, 398, 459, 516
Звука скорость 286, 325, 350
— — местная 326, 339, 350
Звуковые волны 340, 422
— — уравнение распространения 75

Излучение 376, 459, 460, 473, 487
Изменение размера ячеек и изменение расстояния между узлами сетки 425—426
— — — однократное и непрерывное 427
*Израэли* способ определения вихря на стенке 223
Интегральный метод построения разностных формул 45—48, 155
Интегральные формы уравнений движения 318
Интегральных соотношений метод 436
Интегро-интерполяционный метод 57

Интерполяционный многочлен Лагранжа 220
Интерполяция 118, 119, 302, 303, 534
— линейная по двум переменным 302
— на более мелкую сетку 534
Информации выдача 474
— — в виде графиков, построенных ЭВМ 493—506
— обработка 12, 469, 470, 489—508
— — в отдельной программе 507—508
— скорость распространения вычислительная 339
ICE метод (неявный эйлеров метод) 203—204, 423
Искусственная вязкость в случае нестационарном 129, 137, 139, 515—528, 531, 532
— — — — стационарном 137, 139, 370, 437, 515—528, 536
— — неявная 23, 83, 103—105, 114, 116, 120, 121, 344, 353—382, 437, 485, 505, 515—528. *См. также* Схемная вязкость
— — явная 22, 23, 344—353, 370, 379, 381, 410, 443, 446, 515, 536
— — — в тензорной форме 443
— диффузия 103, 398, 429
— — коэффициент 350
— — — эффективный 363
— — массы 350, 352, 364, 399
— сжимаемость 305
— скорость конвекции 518, 519
— теплопроводность 350, 364
Искусственное давление 346
— затухание *см.* Затухание искусственное
Искусственный источник 112
— сток 112
Испарение и конденсация 455, 458
Использование нестационарных уравнений для решения стационарных задач 31, 161—168
Источник массы 487
— энергии 487
«Источниковый» член 38, 134, 176, 178, 184, 292—294, 500
Итерации стационарные линейные 192
Итераций этапами неполными метод 180
— — полными метод 179
Итерационная сходимость 162, 264—270, 281
Итерационный коэффициент диффузии 162
*Йенсена* формула для вихря на стенке 219
*Йи* метод 176

Квазилинеаризация 306
Квазиодномерное приближение 454
— течение в канале 253—255
Квазиодномерные задачи 372
— уравнения 388, 413, 414
Квазиоднородные сетки 432
«Классики» схема (hopscotch) 151—154, 193, 378, 381, 385, 466
Классификация ошибок по свойствам 169, 170
— уравнений в частных производных 13, 32
Количества движения уравнения для жидкости несжимаемой 29—30, 294, 295
— — — — — сжимаемой 309, 315, 316, 319
«Комбинированное итерирование» 164, 167, 268, 482
Компактная разностная схема 172—174
Конвективный нелинейный член 60
— поток 49
Конвекция и адвекция 31
— естественная 34, 143, 219, 304, 312, 454
— — в замкнутом сосуде 55—56
— — устойчивость 34
— свободная *см.* Конвекция естественная
Конечно-разностные формулы основные 39—48, 529—530, 533, 534
Конечных элементов методы 172, 430, 465, 466
Конервативная форма уравнений 23, 32—35, 55—58, 105, 294, 295, 315, 317—321, 324—328, 332, 347, 362, 394, 414, 436, 437, 443—445, 448, 529, 530, 536
Консервативности свойство 36, 48, 51—58, 98, 109—111, 169, 170, 224, 273, 317—320, 355, 370, 400—402, 428, 437, 438, 443, 445, 448, 485, 529, 530, 536
— — различный смысл 441, 536
— — и ошибки на границах 224, 273, 290, 402
— — — точность схемы 56, 530
Контактный разрыв 330, 344, 381
Контрольного объема метод 48—51, 112, 113, 157, 318, 395, 396, 399, 406, 445, 536

Концентрации расчет 284, 291
Координат растяжение экспоненциальное 433—434, 438, 441, 536
Координаты параболические 262, 263, 442—445
— сферические 308, 348, 352, 365, 443—446, 454
— тороидальные 436, 444
— цилиндрические 145, 163, 207, 229, 297, 304, 308, 335, 349, 352, 361, 365, 374, 443—446, 454, 484, 536
— эллиптические 257, 432, 433, 443—445
Коротковолновый предел 123, 124. *См. также Найквиста* частота
Корректная постановка задачи 100
*Кортевега — де Вриза* уравнение 500
*Кранка — Николсона* схема 129—131, 134, 171, 452, 526, 535
— — — неустойчивость при градиентных начальных условиях 134
Критический размер шага по времени 61, 65
— — — — — вычисление на ЭВМ 479
*Крокко* интеграл 279
— преобразование 442
— схема 115—117, 382, 388, 522, 526, 532, 536
*Кроули* схема четвертого порядка точности 154, 157, 159, 526
«Кубатура» 276
*Куранта — Изаксона — Риса* метод 23, 102, 353
*Куранта — Фридрихса — Леви* условие *см.* КФЛ условие
*Куранта* число для жидкости несжимаемой 22, 66—68, 71, 72, 77, 84, 102, 104, 119, 121—124, 126, 155, 156, 162, 244, 531, 532
— — — — — аналоги двумерные 84
— — — — — итерационное 162
— — — — — как параметр интерполяции 119
— — — — — ограничение при устойчивости 68, 72, 119, 162, 244
— — — — — определение 66, 126
— — — — сжимаемой 339, 340, 350, 364, 376, 386, 535
— — — — — двумерное 350, 364
— — — — — ограничение при устойчивости 339, 340, 347, 371, 376, 386, 535
— — — — — трехмерное 364
*Курихары* схема 139, 532
КФЛ условие 22, 316, 339—341, 357, 448
Лагранжево описание движения 117, 118, 236, 349, 458, 487
Лагранжевы методы 22, 110, 334, 464
— переменные 302, 330, 344, 345, 372, 380, 487
LAD метод 167
*Лакса — Вендроффа* схемы двухшаговые 23, 27, 127, 318, 343, 348, 365—380, 385, 387, 388, 413, 421, 427, 432, 435, 437, 467, 478, 482, 521—523, 527, 536
*Лакса* схема 23, 252, 350, 362—365, 371, 373, 375, 376, 378, 407, 421, 436, 460, 480, 482, 521, 522, 535
— теорема эквивалентности 27, 79—80
*Ламе* кривые 444
*Ландсхофа* схема 349—350, 353
*Лапласа* оператор 154, 272
— — разложение по собственным функциям 180
— уравнение 42, 176, 179, 264
*Лейта* схема 117—127, 134, 154, 158, 159, 246, 352, 366, 370, 379, 435, 521—524, 526, 527, 532, 533
*Лелевье* схема 101, 354
*Лимбана* метод итерационный 17—19, 164, 165, 167, 180—183, 187, 192
— — экстраполированный 18, 182, 533. *См. также* Последовательной верхней релаксации метод
Линеаризация членов с градиентом давления 338
Линеаризованные уравнения движения сжимаемой жидкости 454
Линии отмеченных частиц 302, 308, 496, 504, 506
Линия симметрии 228, 229, 255, 391—393, 412, 447
Локализация ошибок 480
«Локально одномерные схемы» 145
*Лонгли* схема 102, 349—350, 379
*Мак-Кормака* схема 376—378, 436, 521, 522
— — модифицированная 343, 379
Маркеров и ячеек метод (MAC) 295, 296, 298—304, 359, 360, 458, 498—304, 504, 506
— — — — варианты (MACRL, SMAC, SUMMAC) 304
*Маха* конус 356
— линии 11. *См. также* характеристики
— число 15, 253, 254, 286, 305, 325
— — местное 326

Маховский скачок 374
Машинного времени выигрыш 269—270
— — затраты 65, 174, 175, 189, 212, 273
— слова длина 168, 176, 269, 476
Машинной памяти объем 174, 181, 270
*Мацуно* схема 135—138, 521, 523, 532
Мгновенно начинающиеся движения 483, 484
Мелкой воды теория 146, 456
Минимизация ошибок на границах методом наименьших квадратов 211, 416
*Миякоды* схема для определения давления 280, 289
— — — уравнения переноса вихря 117
Многокомпонентные среды 361
Многомерные аспекты искусственной вязкости 520, 527
— — метода расчета распространения вектора ошибки 203
— — методов неявных 134
— — устойчивости 65, 83, 97, 126, 340, 341, 350, 354
— задачи 83—85, 203, 252
Многослойные схемы 274
Многошаговые явные схемы 134—139, 341, 492
Модельные уравнения 29, 34, 35, 338, 366, 485—488, 530—532
— — с переменными коэффициентами 485—487, 531
Модульное программирование 471, 473
Молчания зона 74
Монте-Карло методы 192, 194, 463, 464
*Моретти* метод 57, 335, 336, 435—437, 521, 522, 524, 525
*Мотца* метод 264

***Навье — Стокса*** уравнения 24, 25, 29, 35, 214, 252, 262, 294—296, 316—330, 424, 444, 446, 474, 488
— — — упрощения 446—457
— — — усложнения 446, 458—464
*Нагеля* схема 388—390
*Найквиста* частота 251
Напряжений вязких тензор 320, 322, 323
— полных тензор 316—321
Напряжения вязкие 317, 319
Натяжение поверхностное 304, 458
Начальные условия 12, 36, 37, 100, 106, 130, 139, 164, 180, 191, 212, 263—275, 282, 420—421, 449, 450, 456, 482, 483
Неавтомодельное решение 233
Невязка 181, 182, 201, 202, 269
— определение 181
Неединственность стационарных решений 25, 26
*Неймана* граничные условия 95, 98, 134, 154, 175, 184, 186, 192, 195, 196, 202, 203, 205, 207, 212, 213, 227, 233, 252, 278—281, 288, 290, 291, 298, 306, 307, 310, 312, 313, 429, 443, 511—514, 530
*фон Неймана* анализ устойчивости 68—73
Неконсервативная форма уравнений движения жидкости несжимаемой 54, 58, 316—321, 345
— — — — — сжимаемой 360, 371, 390, 394, 401, 414
Неразрывности уравнение 29, 32, 53, 55, 112, 166, 218, 294—296, 304, 310, 313—315, 318, 319, 329, 367, 399, 403, 404, 406—409, 529, 536
Несовместность условий на входной границе и на стенке 413
Неустойчивость 42—43, 58—61, 125, 126, 213, 482
— в смысле Адамара 79
— динамическая 59, 61, 535
— и неразличимость частот 125
— монотонная 76
— связанная с нелинейностью 28, 57, 81, 143, 160, 161, 164, 274, 295—297, 304, 371, 420, 421, 457, 482
— статическая 16, 59, 61, 242, 243, 535
— фазовая 94
— численная 28, 125, 151
Нечетно-четного исключения метод 176, 177, 204
Неявные схемы *см.* Схемы неявные
Нижней релаксации параметр 164
— — схема 19, 68, 162, 163, 167, 182
Норма ошибки 192, 193
NOS метод 167
*Нуссельта* число 288—290, 398, 403
*Ньютона — Рафсона* метод 192

**Области** непрямоугольные 141, 190—191
— нерегулярной формы 201, 202, 205—207

Область влияния 74, 75, 356—359
Обмен энергией между фурье-компонентами 125
Обозначения для конечно-разностных аналогов производных 40, 41
Обратные методы 336—337
Обращение скорости невозмущенного потока 104, 169, 361, 469
Общая процедура решения полной задачи гидродинамики 36—38
Обыкновенные дифференциальные уравнения 169, 237, 240—242, 465, 467
Объемная вязкость 316, 325, 329, 345, 346, 379, 410
Ограниченность решения 77, 98
*Огуры* метод 204
Однонаправленный поток информации 106, 108
Однослойная схема 85
Одношаговая схема, определение 85
*Озеена* решение для дальнего следа 237
Оптимальная последовательность в неявной схеме метода чередующихся направлений 189—191
Опытная и рабочая программы 470, 475—479, 490
*Орра — Зоммерфельда* теория 459
Осесимметричное течение 56, 218, 219, 229, 231, 372, 377, 388, 447
Осцилляции, вызванные чрезмерно большим шагом по времени 63, 64, 68, 82, 98, 129—131, 169, 171, 188
Осцилляции за скачком 247, 342, 346—348, 374, 376, 524, 536
Отказ от сохранения энергии 315
Отладка программы 175, 470, 479—489, 508
Отношение размеров шагов сетки 42, 180, 199, 351
Отображение бесконечной области на конечную 439—441, 452
Отражение ударной волны от места изменения шага сетки 353, 427
Отражения способ *см.* Граничные условия для течения жидкости сжимаемой на стенке
— — как прием программирования 402
Отрыв и повторное присоединение потока 15, 16, 223, 224, 226, 233, 237, 261, 264, 398—402, 404, 450, 498
Отщепление уравнения энергии от уравнений движения 285
Оценка эффективности методов 168—175, 191—192, 211—212, 306—309, 312—314, 423
Ошибка аппроксимации 27, 40, 41, 44, 79, 100, 147, 153, 157, 168—170, 173, 215, 216, 231, 264—275, 279, 281, 305, 341, 356—359, 364, 396, 403, 423, 426—429, 438, 487, 515, 526, 527, 533
— — величина и порядок 98—99, 527
— дисперсионная 73, 83, 89, 123, 124, 370
— за счет эффективного смещения стенки 227
— обусловленная затуханием 88, 121, 122, 169, 170, 370, 438
— — искусственной вязкостью в расчетах скачка 352—353
— — нарушением ограниченности решения 169, 226, 290, 405, 534
— — — принципа инвариантности Галилея 169
— — — свойства консервативности 95, 111, 112, 169, 179, 273, 428, 448, 535
— — — — транспортивности 169
— — неразличимостью 117, 124, 125, 160, 169, 171, 251, 422, 438
— округления 27, 34, 55, 58, 133, 151, 166—170, 176, 194, 199, 267, 272, 336, 482, 483, 487, 509, 510
Ошибки, связанные со свойствами схемы 168, 169, 188, 251
Ошибки фазовые 93, 117, 121—124, 131, 154—161, 169—171, 438, 459, 486
— — запаздывающие и опережающие 131, 158, 159
— — проверка при помощи точного решения модельного уравнения 486

Парадокс влияния условий на выходной границе 253—255, 414
*Пекле* число 285, 286
Переменных (попеременных) направлений метод *см.* Чередующихся направлений метод
Переопределенность граничных условий 227, 229, 392, 393
Перестройка ячеек сетки 344, 349, 428
Перехода матрица 102
— множитель 70—72, 116, 121—123
— — комплексный 71
— — определение 70

Пилообразные осцилляции в решении 247—252, 535
Плазменные процессы 460
Поверхностного трения коэффициент 529
Пограничного слоя приближение и уравнения 11, 12, 20, 58, 104, 114, 163, 166, 235, 237, 238, 279, 290, 291, 305, 401, 412, 413, 441, 442, 450—454, 458—461, 463, 474, 487, 488, 500, 531
— — профили скорости 235, 506
— — толщина 15, 222, 295
— — — вытеснения 236
Пограничный слой 398, 441, 450, 451, 506
— — неавтомодельный 451
— переходный 461
— турбулентный 461
Полиэдральные сетки 432
Полуаналитические (полудискретные) методы 464, 465, 467, 498
Полярная сетка 427, 430, 431
Последовательной верхней релаксации метод (SOR) 19, 162—164, 167, 168, 182—187, 189—194, 198, 202, 220—221, 275, 279—281, 535
— — — — двухлинейной блочной 192
— — — — как линейная экстраполяция метода *Либмана* 533
— — — — полинейной и поточечной 186
Потока визуализация 503, 506
*Прандтля — Майера* течение 417
*Прандтля* число 15, 285, 325, 413
Преобразование координат 230, 256, 335, 421, 424, 427, 432—442, 452, 465, 536
— — меняющееся в процессе построения решения 435
— — неортогональные 335, 435—438, 440
— ударного слоя 436, 437
Проверка точности решения глобальная 489
— — — сравнением с решениями надежными приближенными 488
— — — — — — «точными» 483—488
— — — — — экспериментальными данными 489
Прогонки метод 173, 176, 186, 241, 247, 281, 509—514
— — матричной 509
— — потоковой 509
— — циклической 509
Программы для ЭВМ составление 470—479, 508
Продолженный подход к пределу 271
Пространственная сетка с переменным шагом 145, 252, 349, 353, 372, 424—428
Прямых метод 453, 465
*Пуассона* уравнение 22, 31, 33, 34, 38, 134, 151, 163—166, 168, 170, 175—213, 239—242, 265, 267, 269, 270, 274—280, 283, 294, 295, 304—307, 313, 355, 430, 480, 500, 509, 512, 533—535
— — векторное 311, 313
— — для давления 275—280, 283, 294, 295, 305, 500, 535
— — методы решения итерационные 178—194, 200, 279—281, 306
— — — — прямые 134, 176, 177, 194—217, 210, 212, 267, 296, 307, 308, 310, 313
— — — — — в непрямоугольных областях 205—207
— — трехмерное 309, 312, 313

Разности вперед 40, 100
— назад 101, 158
— односторонние 101, 110, 111, 396, 398, 399, 404, 407, 411
— — вблизи точки отрыва 399, 404
— — представления для первой производной 39—40
— по потоку (подветренные) 101, 109, 244
— против потока (наветренные) 101, 109, 211, 244, 245
— центральные 40—43
Разрежения волны 26, 56, 318, 345, 347, 371, 378, 379, 487
Разреженного газа течение 51, 464
Разрешающая способность графиков, построенных на ЭВМ 493, 498
Разрешающей способности сетки увеличение 427, 429, 432, 433, 438
Распечатка значений в узлах сетки 491
Расчета распространения вектора ошибки метод (EVP) 176, 177, 194—204, 207, 212, 221, 286, 307
— — — — — влияния коэффициенты 194
— — — — — — матрица 197, 198, 207

Расчетная сетка 11, 36—38, 224—228, 269, 290, 291, 344, 378, 381, 424—432, 437, 438, 479
— — автоматическое построение 429
— — грубая 11, 269, 479—483
— — криволинейная 429
— — подвижная 344, 381, 435, 437, 438
— — прямоугольная 36, 39
— — разнесенная в пространстве *см.* Гибридная сетка
— — — во времени 155, 157
— — с переменным шагом по пространственным переменным 230
— — — трапециевидными ячейками 378, 432
— — треугольная 430, 457
Расчленение решения по временны́м шагам 94, 106, 117, 151
Расщепление по времени 117
Расщепления по времени схема 126, 127, 134, 159, 340, 376, 377
*Рейнольдса* аналогия 330
— число 15, 19, 24, 28, 33, 290, 325, 475, 531
— — изменение с температурой 282
— — определение 33, 325
— — сеточное 21, 68, 72, 77, 84, 104, 106, 162, 215, 218, 245, 248, 249, 251, 252, 355, 385, 519
— — — по разным направлениям 104
— — эффективное 519, 528
Рекомендации по программированию, контролю и обработке информации 470—508
Релятивистские эффекты 348, 459, 468
Решение «сильное» 26
— «слабое» 26, 331
— типа уединенной волны 500
Решений единственность 11, 18, 24—26, 414
— существование 11, 18, 24—26, 165, 168
*Римана* задача о распаде разрыва 381
*Рихтмайера* схема двухшаговая 23, 343, 373, 421, 522
*Ричардсона* метод для уравнения параболического 18, 96, 100
— — — — эллиптического 16—17, 161, 162, 164, 178—181, 188, 193, 198
— экстраполяции 271—273, 452
*Роббина* граничные условия *см.* Граничные условия смешанного типа
*Робертса — Вейса* схема с разностями по диагонали 149—151, 155, 526
— — — четвертого порядка точности 154—157, 159, 211, 212, 224
*Роша* координаты 444
*Рунге — Кутта* схема 172
— — *Гилла* схема 172
*Русанова* схема 350—352, 355, 365, 371, 378, 399, 415, 416, 446, 522
— — третьего порядка 423
*Рэнкина — Гюгонио* соотношения 317, 318, 334, 346—348, 435, 448

*Сазерленда* формула для вязкости 328, 383, 476
*Саульева* схемы 99, 146, 147, 150, 151, 180, 390, 522, 533
*Саусвелла* метод релаксации невязки 18, 19, 181—182
Сверхзвуковые течения 22, 414, 415, 417, 422—423
«Свинарника схема» 109
Свободного полета условия 230—232, 417
Сдвиговые слои свободные 447, 452
*Сен-Венана* уравнения 455
Сеточная частота 90—92
Симметроморфные фигуры 442
*Симпсона* формула 235
Системы *N* алгебраических уравнений решение 132, 176
Скачка выделения методы 24, 316, 333—338, 344, 371, 377, 419, 436, 437, 465, 466, 505, 524
— размазывания методы 22—24, 316, 337, 344—382, 436, 457, 515, 524, 536
— улавливание 337. *См. также* Скачка размазывания методы
Сквозного счета методы 337. *См. также* Скачка размазывания методы
Сложные схемы и программы 175, 191, 192, 211, 473, 478, 481
Смешанные лагранжево-эйлеровы методы 464, 465
Смещений однородных метод 179
«Смещения» определение 182
Собственные значения матрицы 87, 192
— — — перехода 73, 87
Сопротивления коэффициент 276, 527
— — для сферы 256—258, 269, 529
Сопряженных градиентов метод 192
Спектральный радиус матрицы 87
Сплайн-функции 45, 172, 174

Сравнение различных методов вывода конечно-разностных аналогов 50—51
Сравнительные достоинства систем для $(\psi, \zeta)$ и для $(u, v, P)$ 306—309, 312—314
Сращиваемых асимптотических разложений метод 467
Стенка без трения 230
— проницаемая 216, 234, 291, 390, 395
Сток массы 487
— энергии 487
*Стокса* гипотеза 320, 322
— задачи 483, 484
— решение 209, 237
Стрельбы метод 451
*Стренга* схема 378, 526
Стыковка систем координат 430—432, 440
Суммарного представления метод 176
Схема ВВЦП (FTCS) 43, 53, 58—60, 62—76, 83—85, 96—100, 120, 121, 128—131, 138, 144, 148, 152, 158, 162, 178, 243, 293, 298, 350, 365, 384, 385, 477, 520—522, 524, 530—532, 534—536
— — определение 43
— — эквивалентность итерациям *Якоби* 161—162
— с донорными ячейками 102, 113, 360, 361, 381, 522
— — «перекидыванием» 378
— — разностями вперед по времени и с центральными разностями по пространственным переменным *см.* Схема ВВЦП
— — разностями против потока 68, 73, 77, 84, 101—105, 119, 127, 137, 141, 143, 148, 153, 157, 159, 160, 163, 212, 242—245, 251—253, 255, 259, 305, 306, 349, 353—358, 361, 385, 406, 416, 417, 427, 445, 515—517, 519—524, 526, 530—532, 536
— — — — — второго порядка 106, 114
— — — — — для простейших физических переменных 305
— — — — — — сжимаемой жидкости 349, 353—358, 361, 385, 406, 416, 417
— — — — — — членов с градиентом давления 354, 357—358
— — — — — — на выходной границе 242—245, 416
— — — — — неявная 532
— — — — — первого и второго типа 101—114, 141, 355, 522
Схема слабо неустойчивая 135
— со свойствами транспортивности и конвективности 110—113
Схемы для стационарных уравнений 161—168
— — — — устойчивость 163, 167, 168
— — — — эквивалентность некоторым схемам для нестационарных уравнений 162, 164, 167
— неявные 85, 128—134, 151—153, 293—294, 297, 304, 305, 311—314, 333, 340—342, 423, 455, 466, 522, 523, 526, 535
— — для жестких членов 293, 294
— — — решения уравнений в физических переменных 297, 304, 305
— — — сжимаемой жидкости 333, 340—342, 423
— — — трехмерного вихря и векторного потенциала 310—313
— — полностью 128, 129, 138, 140, 176, 522, 523, 526, 535
— — определение 85, 152—153
— — частично 131, 132
— порядка точности второго 41, 114, 141, 150, 159
— — — высокого 171—172, 207—211, 272, 289, 423, 455
— — — первого 40, 104
— — — четвертого 154—157, 159, 171, 172, 174, 203, 209
— явные, определение 85, 128
Схемная вязкость 23, 103, 104, 129, 136, 137, 139, 169, 252, 305, 306
Сходимости решения время 268, 273—274
— — — зависимость от размерности задачи 480—481
— критерии 12, 27, 198, 201, 264—275, 420—421
— — объективные 420
— — субъективные 266, 270
— проверка 479—483
Сходимость аппроксимационная 265, 270—274
— итерационная (итерационной схемы) 27, 28, 36—38, 79, 80, 143, 162, 164, 166, 180, 183—185, 188, 212, 264—275, 281—310, 420, 422, 429, 438, 479—483

*Тайлера* форма искусственной вязкости 379
*Тейлора — Маккола* решение 337, 450

*Тейлора* ряды 39—44, 103, 109, 120, 129, 136, 150, 169, 358
Тензорного произведения методы 176
Температуры расчет для несжимаемой жидкости 284—294
Теплопроводности уравнение 37, 148, 151, 154
Течение двух жидкостей 304
— потенциальное 163, 213, 229, 233, 237, 311, 432, 442, 446—447, 453—454, 488
— трансзвуковое 372, 446, 450
Течений без ударных волн методы расчета 333—338
Течения с химическими реакциями 109, 361, 376—378, 436, 449, 460
— трехмерные несжимаемой жидкости 309—314
*Тома* условие для вихря на стенке 217
Точность схемы 42, 43, 56, 209, 214, 225, 263—264, 436, 438, 489
— — локальная и глобальная 209, 264
Транспортивности свойство 83, 98, 106—110, 117, 169, 355, 358, 364, 532
Трехдиагональная матрица 133, 140, 153, 188, 509
Трехдиагональный алгоритм 133, 147. *См. также* Прогонки метод
Трехслойная схема 115
Турбулентность 15, 35, 125, 331, 351, 451, 455—457, 461, 462, 507, 508
— вычислительные теории 461, 462, 468
— расчет на ЭВМ 508
— статистическая теория 508

Ударная труба 536
Ударной волны распространение одномерное 535, 536
— — — с изменениями фазовыми 460
— — толщина 330, 332, 342, 344, 347, 348, 421
Ударные волны 11, 22, 23, 35, 51, 56, 315—318, 330—333, 342—344, 346, 347, 420, 421, 437—438, 448, 450, 460, 487
— — в методе характеристик 448
— — графическое построение при помощи ЭВМ 503, 505—506
— — продолжение решения через них 334—335
*Уорминга — Хьетта* метод 82
Уравнение, включающее конвективный и диффузионные члены 29, 33—34, 71, 137, 140, 151, 153, 247, 515—528
— для температуры 166, 167, 284—285
— — функции тока 30—34, 160, 175—213
— — — — как единственной переменной 165, 223. *См. также* Бигармоническое уравнение
— — химических компонент 166
— состояния 15, 282, 315—317, 321, 322, 326—328, 367, 462, 468, 477
Уравнения в безразмерных переменных 11, 29, 32—34, 69, 284, 285, 315, 324, 328
— для возмущений 459
— — простейших переменных 12, 20, 29—30, 60, 294—309, 312—314
Условия на границе входной 228, 233—236, 290—291, 297, 530
— — — — влияние на решение 237, 417
— — — — дискретизированные способы задания 235—236
— — — — для жидкости несжимаемой 233—236, 439
— — — — — — сжимаемой 408, 412—413
— — — — простейших физических переменных 297
— — — — температуры 290—291
— — — выходной для жидкости несжимаемой 95, 121, 139, 228, 236—247, 252, 297, 298, 439, 528, 530, 535
— — — — — — сжимаемой 413—417, 528
— — — — простейших физических переменных 298
— — — — достаточность 240—241, 535
Установления по времени метод 20, 188, 273, 337, 338
Устойчивости исследование для жидкости несжимаемой 62—85, 127, 179, 429, 531
— — — — — влияние неоднородного члена 178
— — — — сжимаемой 333, 338—341, 383—386
— — — уравнений с непостоянными коэффициентами 80—82
— — метод дискретных возмущений *см.* Дискретных возмущений метод

Устойчивости исследование, метод *фон Неймана см. фон Неймана* анализ устойчивости
— — — *Хёрта см. Хёрта* анализ устойчивости
— — методы матричные 339, 340
— — ограничения на шаги пространственной сетки 340, 341, 429
— критерии 27, 77—83, 292. *См. также Куранта* число
— определение 27, 28
— понятие 77—79
Устойчивость абсолютная (безусловная) 98, 99, 128, 129, 136, 140, 144, 145, 147, 153
— динамическая 63, 68
— «поточечная» 78
— «пошаговая» 78
— статическая 63, 66, 67

*Фика* закон 49, 286, 374
Фильтрации задачи 457
*Фридрихса* критерий 77, 78
*Фромма* схема с нулевой средней фазовой ошибкой 158—160, 522, 526, 533
Функции-операторы 472, 473, 476
Функция тока, определение 30
*Фурье* закон теплопроводности 322, 323
— методы прямые 21
— ряды с конечным числом членов 69, 83—84
— — использующие их методы 176, 177, 204—207
Фурье-компоненты решения 69, 122, 123
— — стационарные 93, 95, 106, 124, 139, 532

Хаотической релаксации методы 193
Характеристик метод 12, 13, 22, 58, 331, 334—335, 341, 356, 359, 394, 417—419, 436, 446—450, 460, 463
— — в трехмерном случае 448, 449, 452
— — начальные данные 449—450
Характеристики 74, 102, 356, 359, 417—419, 448, 449. *См. также* Характеристик метод
«Характеристические линии» для разностных уравнений 74, 75
Хёрта анализ устойчивости 73—78, 82, 83, 102, 116, 120, 129, 136, 363, 516, 518, 532
Химическая неравновесность 413, 460
Химические реакции 292, 452, 453, 459, 460, 481, 487
*Хойна* схема 134, 526, 536
*Хокни* метод 21—22, 204
*Хоуарта* линейно замедленное течение 233

«Цветовое уравнение» 35
Циклического исключения методы 176
ZIP-аппроксимация 529

Частиц в ячейках метод (PIC) 23, 48, 349, 355, 359—362, 385, 406, 458, 463, 504, 506
Частицы-маркеры 295, 296, 301—303, 359
*Чебышева* полуаналитический (полуитерационный) метод 162, 193
*Чена — Аллена* схема 138, 211, 212, 386—388, 521, 522, 536
Чередующихся направлений метода схема *Мак-Ки* и *Митчелла* 384
— — — схемы высшего порядка 172
— — — — для нелинейных членов 141
— — — — — непрямоугольных областей 141, 144, 190
— — — — — — сжимаемой жидкости 342, 388, 390, 536
— — — — — — уравнений параболических 20, 126, 244, 384, 427, 443
— — — — — — — эллиптических 202, 242, 247, 443
— — — — неявные (ADI) 134, 139—145, 148, 153, 172, 188—191, 219, 220, 275, 281, 312, 456, 522, 526
— — — — трехмерные 142, 144—145, 312
— — — — явные (ADE) 146—151, 156, 164, 390, 533, 536
Четырехслойная схема 117
«Чехарда со средней точкой» схема 28, 85—96, 106, 116, 117, 124, 129, 130, 138, 139, 148, 150, 155—157, 161, 238, 243, 244, 259, 293, 296, 364, 365, 373, 378, 381, 384, 421, 526, 530, 531
— схема *Дюфорта — Франкела см. Дюфорта — Франкела* схема
Численное моделирование 13, 14, 19, 21, 25, 48, 110, 359, 465

Численные эксперименты 12, 15—16, 213—215
*Чорина* метод 304
*Чудова* метод 385

**Ш**аблон девятиточечный 154, 160, 203, 208, 209, 258, 264, 409, 432
— пятиточечный 42, 154, 173, 175, 203, 207—210, 222, 258, 262, 264, 272, 536
*Шапиро* и *О'Брайена* способ определения вихря на выходной границе 246—247, 252
*Шелдона* метод 193, 355
*Шмидта* число 286
*Шортли — Уэллера* метод 18, 178, 181

*Эдди* метод 77
*Эйлера* схема 110
— — модифицированная 129, 130, 134
Эйлерово описание движения 30, 118, 156
Эйлеровы переменные 344, 345, 380
— сетки 248
*Эккерта* число 285
*Экмана* слои 435
Эксперименты в аэродинамической трубе 15, 213, 230, 237
Экстраполяция значений на стенке 216, 289, 402
— — условий на границе верхней 232, 419—420
— — — — выходной 239—242, 245, 246, 414—417, 530
Энергетические методы 77
Энстрофия 58
Энтальпия 321, 388
Энтропия 315, 327, 394, 500
— безразмерная 327
— переноса уравнение 315
— рост при переходе через скачок 345
— сохранение 315

*Якоби* итерационная схема 161
— метод 179