Х. РАУЗ

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ

Сокращенный перевод с английского
д-ра техн. наук А. П. Юфина

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛИТЕРАТУРЫ ПО СТРОИТЕЛЬСТВУ
Москва 1967

УДК 532.51

ADVANCED MECHANICS of FLUIDS

By

D. W. Appel, P. G. Hubbard, L. Landweber,
E. M. Laursen, J. S. McNown, H. Rouse,
T. T. Siao, A. Toch and C. S. Yih

Under the editorship of

HUNTER ROUSE

Iowa Institute of Hydraulic Research
State University of Iowa
Iowa City

NEW YORK: JOHN WILEY & SONS, INC.
LONDON: CHAPMAN & HALL, LIMITED

Эта книга посвящена исследованиям различных форм течения жидкости, а также изложению теории пограничного слоя и механики свободного турбулентного потока. В ней рассмотрены вопросы применения теории аналитических функций и дано описание безвихревых течений жидкости. В целом книга представляет собой курс по механике жидкости и посвящена в основном развитию методов теоретического исследования в гидродинамике.

Предлагаемая книга представляет большой интерес для научных работников, инженеров проектных и строительных организаций, а также студентов различных высших учебных заведений.

3—2—11
153—67

Вниманию советского читателя предлагается перевод книги Рауза «Механика жидкости» (Advanced Mechanics of fluids, Hunter Rouse), изданной Айовским институтом гидравлических исследований в 1959 г. Автор книги Х. Рауз, являющийся руководителем этого института, — крупнейший специалист в области механики жидкости, хорошо известный в Советском Союзе по его прекрасным трудам «История гидравлики», «Механика жидкости для инженеров-гидротехников», «Элементарный курс механики жидкости» и др.

Все книги Х. Рауза характерны строгой направленностью. Книга по истории гидравлики знакомит читателя с развитием гидравлических машин, дает представления о гидравлических законах, о первых ирригационных и гидротехнических сооружениях, причем при составлении этой книги были использованы библиотеки многих стран мира. Книга «Элементарный курс механики жидкости» дает основные представления о жидкости как о физическом континууме и последовательно развивает основные идеи науки о жидкости. Эта книга готовит читателя к чтению и восприятию последующих книг и особенно той, что является предметом предлагаемого перевода, а также до некоторой степени книги «Механика жидкости для инженеров-гидротехников», имеющей по замыслу автора прикладной характер.

Переводимая нами книга представляет собой повышенный курс механики жидкости со строгим математическим изложением основных принципов механики жидкого тела при постоянном обращении к физическому смыслу описываемых математически явлений. Этот курс является в основном теоретическим, но одновременно развивает у читателя умение применять теоретические концепции к решению практических инженерных задач.

Настоящая книга особенно полезна научным работникам, занятым исследованиями в области гидродинамики и гидротехни-

ки, аспирантам гидротехнических факультетов, аспирантам и студентам соответствующих факультетов университетов, преподавателям гидравлических дисциплин и многим практическим работникам и студентам различных специальностей, желающим глубоко изучить и практически использовать принципы теоретической гидродинамики.

В подготовке перевода настоящей книги приняли участие: канд. техн. наук Н. В. Данильченко, С. В. Модзелевская и инж. Г. С. Нечаева.

А. Юфин

Глава I

ВВЕДЕНИЕ В ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

А. Математический анализ и экспериментальные измерения

1. Современное состояние науки. Основные научные принципы сделались настолько обычными в инженерной практике, что трудно представить время, когда ни один из них еще не был сформулирован. Поскольку основной целью науки являлось создание всеобъемлющей теории, которая должна была заменить ремесленническое использование известных фактов, ясно, что без исследований, проведенных в прошлом, современная наука не существовала бы как таковая. Столетия назад исследование было, конечно, в значительной степени неорганизованной попыткой, и многие из основных законов естествознания обязаны своим открытием наблюдениям и размышлениям нескольких выдающихся людей. К счастью, открытия такого рода будут всегда продолжаться. Однако по мере накопления сведений, получаемых путем детальных исследований, необходимы все более точные наблюдения и все более исчерпывающие теории для их объяснения.

Подтверждением вышесказанного может служить механика жидкости. Движение жидкости — далеко не простое явление, и современное понимание его характеристик, как оно ни ограниченно, было достигнуто только благодаря столетиям усердных попыток теоретиков и экспериментаторов многих профессий во многих странах. Прослеживая теперь историческое развитие этой науки, удивляешься обилию материала, когда-то неизвестного, и той медлительности, с которой совершалось каждое новое открытие. То, что еще остается открыть, по абсолютному значению, вероятно, мало отличается от того, что оставалось сто лет назад. Однако положение изменилось в том отношении, что теперь имеется значительно большая необходимость в знаниях и существуют улучшенные методы, благодаря которым эта необходимость постепенно удовлетворяется.

Медлительность, с которой развивалось в прошлом понимание поведения жидкости, в значительной мере объясняется тем, что исследователи в разных областях работали независимо друг от друга. Теоретики презирали неразумность экспериментаторов, экспериментаторы смеялись над непрактичностью теоретиков, так что по существу никакого обмена знаниями между ними не было. Одним из значительных достижений нашего столетия явилось признание необходимости объединения научных усилий. В отношении жидкости, кроме того, было признано, что анализ и эксперимент должны быть соединены как обязательные взаимодополняющие инструменты исследования, а все существующие знания о движении жидкости должны быть положены в основу науки и использованы во всех смежных областях.

2. Ограничения математического анализа. Идеальная научная теория состоит из минимального количества аксиом (основных принципов и понятий), из которых решение любой задачи может быть получено формальной логикой, т. е. математически. Сейчас такая всеобъемлющая теория движения жидкости воплощена в уравнении неразрывности и общих уравнениях движения. К сожалению, сложность большинства явлений течения и пределы аналитических способностей человека ограничивают строгое применение этой теории только несколькими простыми случаями. Например, можно найти распределение давления в жидком теле, которое целиком вращается или испытывает ускорение иным способом; пределом в этом случае будет гидростатическое распределение. Могут быть точно рассчитаны сопротивление ламинарного потока в однородной трубе или установившаяся скорость падения малого шара. Точно выражается и частота волн малой амплитуды под действием силы тяжести, капиллярности или упругости. Более сложные состояния потока могут быть подвергнуты теоретическому анализу лишь при игнорировании некоторыми не поддающимися описанию сторонами движения. В ряде случаев результаты имеют достаточную для инженерной практики точность. Однако часто, особенно для случая турбулентного движения, математические трудности становятся настолько значительными, что решение может быть получено только после чрезвычайного упрощения.

Подобные трудности аналитического порядка при всевозможных сложных течениях привели несколько столетий назад к созданию понятия о так называемой «совершенной или идеальной жидкости», которая считается однородной, несжимаемой и невязкой. На этой идеализации жидкого вещества была построена вся классическая гидродинамика — математически строгое продолжение теоретической механики, которое оказалось ценным во многих отношениях, но тем не менее бесполезным в решении того, что было тогда (и остается сейчас) главной задачей инженера-гидравлика: сопротивление жидкостей. Доказывать математически, что погруженное в воображаемую жидкость тело

может двигаться в ней, не встречая сопротивления, или что насос может качать такую жидкость без потерь энергии, когда ежедневный опыт противоречит этому, совершенно бесполезно. В наши дни, безусловно, классическая гидродинамика найдет применение даже при решении задач о сопротивлении. Хотя такая возможность предположительно предсказывалась теоретически, остается фактом, что это зависит от анализа тех свойств реальной жидкости, которые игнорировались при создании идеальной модели.

Правильность теории может быть проверена лишь на опыте. При пользовании математическим анализом практически должна быть до некоторой степени упрощена любая задача о движении жидкости, но только опытным путем можно установить предельные теоретические допущения, которые обосновываются физически, а не только удобны математически. Для задач, не очень отличающихся от уже решенных, часто достаточно прежнего опыта. С другой стороны, совсем новые задачи требуют новых опытов, так как неоправданные упрощения могут привести к физически невозможным заключениям. Иными словами, математический анализ должен быть не только ограничен реальными гипотезами, но и обязательно подвергнут экспериментальной проверке.

3. Ограничения ненаправленного эксперимента. Если слепая вера в математический анализ приводит к таким ошибочным заключениям, тогда возникает вопрос, высказанный инженерами прошлых столетий: зачем тратить время на теорию, раз неизбежно требуется экспериментальное подтверждение? Эти инженеры невольно сами ответили на свой вопрос, накапливая натурные и лабораторные данные, но не осмысливая их научно. До тех пор, пока задачей является определение одной независимой величины, одно точное измерение дает ее неизменное постоянное значение; но если имеются две взаимозависимые величины, то для установления их функционального соотношения требуется уже по крайней мере четыре или пять хорошо обдуманных измерений; при трех величинах для получения функции недостаточно двадцати и даже более измерений из-за свойственной человеку неспособности систематизировать измерения без теоретического руководства. С увеличением числа переменных трудность экспериментального определения растет очень резко и лишь немногие задачи движения жидкости могут быть сведены к трем, четырем или даже пяти подходящим переменным без чрезмерного упрощения.

Наглядной иллюстрацией потери времени на чистое экспериментирование является задача нахождения сопротивления в трубах. Эта основная инженерная задача включает по крайней мере шесть переменных: диаметр и шероховатость трубы, скорость течения, плотность и вязкость жидкости и градиент давления. В течение многих лет все попытки определения закона

сопротивления как повторными испытаниями, так и корреляцией имеющихся данных приводили просто к лабиринту несвязных кривых. Только с помощью теоретического руководства, разумеется, не математической гидродинамики, а прикладной физики, знакомой с размерностными сторонами задачи, в экспериментальные результаты была внесена наконец некоторая система. И только когда последующие эксперименты стали выполняться в соответствии с анализом, было достигнуто приблизительное представление этого явления.

Так же как теория целиком зависит от направляющего экспериментального контроля, так и эксперимент для того, чтобы быть эффективным, никогда не может обойтись без аналитического руководства.

4. Метод представления. Руководство, служащее для обучения современной технике аналитического исследования движения жидкости, очевидно, не может отказаться ни от мощного математического аппарата классической гидродинамики, ни от условия его успешного применения — проверки экспериментом. В следующих главах книги будет уделено должное внимание общей теории движения жидкости, ее строгим приложениям и подтверждению в некоторых простых случаях, а затем методам приближенного приложения и экспериментального упрощения в более сложных случаях. В связи с сомнительностью того факта, что читатель когда-нибудь встретится с новой проблемой, поддающейся точному решению, его следует подготовить к приближенным и функциональным соотношениям, которые он может получить комбинацией аналитических и экспериментальных средств.

Чтобы обладать физическим смыслом, такие соотношения должны удовлетворять определенным размерностным и числовым требованиям. Для строгого теоретического решения необходима размерная однородность. Однако в совершенно эмпирическом методе проведения эксперимента нет ничего, что подтверждало бы размерную правильность полученного соотношения, и это также ограничивает эффективность чистого эмпирического эксперимента. Так как эта книга имеет дело с комбинацией математического и экспериментального анализа, то прежде всего необходимо рассмотреть размерные характеристики правильного физического соотношения. Поэтому в оставшейся части настоящей главы разбирается с различных сторон размерный анализ, а его приложение иллюстрируется разными задачами, наиболее часто встречающимися в обычных исследованиях (некоторые из них решены позже, а некоторые до сих пор не поддаются решению).

В соответствии с этим вступлением в главе II даются основные представления о потоке, о принципе неразрывности, освещаются кинематические и динамические стороны общих уравнений движения. Указывается их решение для простейших усло-

вий течения. Главы III и IV вводят допущения классической гидродинамики — однородность, несжимаемость, отсутствие вязкости, а также математическую технику, применяемую при решении трех- и двухмерных движений.

Вязкий поток подвергается строгому рассмотрению в начале главы V и там же дается техника точных решений для частных граничных условий. В конце этой главы приводятся различные методы приближений, на которые даются ссылки в той или другой форме в остальной части книги. Глава VI поясняет упрощения, допускаемые при анализе турбулентности жидкости, в главе VII приводится то же самое для пограничного слоя, а в главе VIII — для следов и подобных им типов потоков. Во всех главах основное внимание уделяется методам рассмотрения новых задач, а не повторению известных решений.

Б. Соображения о размерности

5. Размерная однородность. Все физические величины измеряются путем сравнения с единицами той или иной размерной категории. Выбор этих категорий, так же как и самих единиц, совершенно произволен. Можно не только выбирать между английскими или метрическими (или любыми другими) единицами, но и, кроме того, такие величины, как скорость можно выражать либо через комбинацию единиц длины и времени, либо специальными скоростными единицами, такими, как морские узлы или Бюфортовская сила. С целью упрощения рекомендуется уменьшение если не числа самих единиц, то числа категорий — в механике все величины обычно выражаются той или иной комбинацией длины, времени, силы и массы.

Так как каждая физическая величина имеет свойственные ей значение и размеры, любое алгебраическое выражение физического соотношения между двумя или бóльшим количеством величин подразумевает эквивалентность их размеров так же, как и равноценность значений. Таким образом, уравнение $V=\sqrt{2gh}$ указывает не только на то, что скорость свободного падения равна корню квадратному из удвоенного произведения ускорения на высоту падения, но также и на эквивалентность их размерностей. Сопоставление ряда наблюдений позволяет записать это соотношение также в удобной форме $V=C\sqrt{h}$. Именно в такой форме этот закон был открыт и затем использовался более 100 лет. Конечно, коэффициент C здесь должен обладать как соответствующей размерностью (корень квадратный из ускорения), так и величиной. Иными словами, для физической точности необходимо, чтобы обе стороны равенства не только были равны в числовом выражении, но и уравновешивались по размерностям, т. е. члены уравнения должны быть размерностно однородными. Форма любого уравнения, удовлетворяющего

этому требованию и соответствующего описываемому явлению, совершенно не зависит от выбора единиц измерения.

Второй закон движения, на котором базируется вся ньютоновская механика, гласит: действие силы на тело создает ускорение, прямо пропорциональное силе и обратно пропорциональное массе тела; результирующее алгебраическое выражение этого закона может быть записано в виде

$$a = C\frac{F}{M}.$$

Здесь C — размерная постоянная, величина которой зависит от выбранных единиц для измерения длины, времени, силы и массы; размерность ее $\left[\frac{\text{масса} \cdot \text{длина}}{\text{сила} \cdot \text{время}^2}\right]$. Всеобщим соглашением давно принято, что величина этой постоянной равна единице, поэтому любые три размерные единицы определяют величину четвертой, и любая величина размерной категории может быть выражена через три остальные. Длина, время и масса приняты всеми в качестве трех основных категорий, но для удобства можно считать, что

$$\left[\frac{FT^2}{ML}\right] = 1,$$

где или F, T, L, или M может рассматриваться как зависимая величина. Например, интенсивность давления наиболее удобно измерять в единицах силы на единицу площади $[F/L^2]$, но запись в единицах массы, длины и времени $[M/LT^2]$ также совершенно верна; аналогичным образом, хотя наиболее удобной размерностной записью для плотности представляется масса на единицу объема $[M/L^3]$, ее также можно выразить через длину, время и силу $[FT^2/L^4]$. Какие бы категории не были выбраны в качестве основных, размерность любой величины в механике может быть выражена как произведение $[L]^{\alpha}[T]^{\beta}[M]^{\gamma}$, где α, β и γ являются отвлеченными числами.

Так как любая полученная размерность зависит от трех основных категорий, то все механические соотношения можно свести к безразмерной форме. Одно безразмерное отношение совершенно очевидно, это F/Ma — отвлеченное число, равное единице, так же как и $V/\sqrt{2gh}$. Параметр потока для истечения из отверстий $Q/A\sqrt{2\Delta p/\rho}$ также безразмерен, хотя величина, которую он выражает (коэффициент расхода), не всегда равна единице, значительно изменяясь в зависимости от размеров отверстия и его очертания.

Размерное корректное соотношение всегда можно свести к безразмерной форме, разделив каждый его член на соответствующее количество с надлежащей размерностью. Например, если каждый член уравнения связи давления и скорости для уста-

новившегося безвихревого потока при постоянном расстоянии от плоскости отсчета $p-p_0=\rho(V_0^2-V^2)/2$ разделить на $\rho V_0^2/2$, получится безразмерная форма $(p-p_0)/(\rho V_0^2/2)=1-(V/V_0)^2$. Не только эта форма записи для заданного очертания границ будет численно независимой от использованной системы размерностей, но даже график безразмерного соотношения будет пригоден для любых масштабов и любых значений отдельных переменных. Однако обычно при отсутствии под рукой соответствующих размерных уравнений способ группировки переменных в ряды связанных безразмерных членов не легко установить. Но именно тогда такая группировка особенно желательна, так как безразмерные переменные всегда малочисленнее размерных, из которых они составлены. Поэтому полезен метод, с помощью которого такая группировка может быть получена автоматически.

6. П-теорема. Безразмерное произведение n размерных величин в общем случае может быть представлено в виде

$$\Pi = A_1^{x_1} A_2^{x_2} A_3^{x_3} \ldots A_n^{x_n}.$$

Здесь показатели степени — отвлеченные числа такой величины, что степень каждой из m участвующих размерных категорий равна нулю. Это удобно проиллюстрировать на пяти переменных ($n=5$), входящих в задачу о сопротивлении гладких труб (диаметр D, средняя скорость V, плотность ρ, градиент давления dp/dx и вязкость μ). В данном случае

$$\Pi = D^{x_1} V^{x_2} \rho^{x_3} \left(\frac{dp}{dx}\right)^{x_4} \mu^{x_5}.$$

После введения трех размерных категорий ($m=3$) получаем

$$[\Pi] = [L]^{x_1} \left[LT^{-1}\right]^{x_2} \left[ML^{-3}\right]^{x_3} \left[ML^{-2}T^{-2}\right]^{x_4} \left[ML^{-1}T^{-1}\right]^{x_5}$$

или

$$[\Pi] = \left[L^{x_1+x_2-3x_3-2x_4-x_5} T^{-x_2-2x_4-x_5} M^{x_3+x_4+x_5}\right].$$

Условия, при которых показатели степеней L, T и M будут равны нулю, представлены независимыми совместными уравнениями

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 &= 0; \\ -x_2 \qquad\quad - 2x_4 - x_5 &= 0; \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Так как число неизвестных здесь превышает число уравнений, единственное решение, очевидно, невозможно — иными словами, существует не одна безразмерная комбинация этих пяти величин. Действительно, уравнения могут быть решены совместно для любых трех переменных при произвольном значении двух остальных, что указывает на бесконечное число возможных ком-

бинаций. Однако из теории линейных уравнений известно, что только ограниченное число комбинаций (в данном случае две) может быть независимым.

Вообще если коэффициенты любой системы линейных уравнений образуют матрицу, в которой число столбцов n больше числа рядов m, то ранг r этой матрицы является максимальным порядком неисчезающих определителей, которые могут быть образованы из m рядов и n столбцов. Алгебраическая теория утверждает, что (это будет показано ниже) существует единственное решение уравнений из любых r членов при условии, что детерминант, составленный из коэффициентов, не является нулем; любой подбор делается для оставшихся членов, неравных нулю. Далее теория утверждает, что здесь имеется только $n-r$ линейных независимых решений; это значит, что любой другой подбор оставшихся членов будет просто давать полученные ранее комбинации. Поэтому в общем случае число линейно независимых решений линейных уравнений для степеней размерных величин дает также определенное число безразмерных произведений в целой системе.

Размерная матрица, составленная из коэффициентов в задаче движения жидкости по трубам, будет иметь следующий вид:

	D	V	ρ	$\frac{dp}{dx}$	μ
L	1	1	—3	—2	—1
T	0	—1	0	—2	—1
M	0	0	1	1	1

Очевидно, что эта матрица содержит по крайней мере один детерминант третьего порядка, неравный нулю (например, с правого или левого края), следовательно, это — матрица третьего порядка, и соответствующее число независимых безразмерных произведений равно двум. Они вычислены путем приписывания любым двум показателям степени, например x_4 и x_5 в обоих случаях, размерных величин подходящих значений, кроме двух нулей — например 1 и 0 для первого решения и 0 и 1 для второго. Тогда уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2 &= 0; \\ -x_2 \qquad\quad - 2 &= 0; \\ x_3 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 - 1 &= 0; \\ -x_2 \qquad\quad - 1 &= 0; \\ x_3 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Последовательное решение каждого из уравнений дает величины, сведенные для удобства в следующую форму:

	D	V	ρ	$\frac{dp}{dx}$	μ
Π_1	1	—2	—1	1	0
Π_2	—1	—1	—1	0	1

Соответствующие П-члены выглядят так:

$$\Pi_1 = \frac{Ddp/dx}{\rho V^2} \quad \text{и} \quad \Pi_2 = \frac{\mu}{DV\rho}.$$

Широко используемый принцип соотношения этих членов, известный как П-теорема, может быть сформулирован следующим образом: если для описания какого-нибудь физического явления необходимо n величин и если эти величины влекут за собой m размерных категорий, соотношение может быть сведено к такому, которое содержит $n-r$ безразмерных произведений, причем $r \leqslant m$ является рангом $n \times m$ размерной матрицы.

Таким образом, если

$$f(A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n) = 0, \tag{1}$$

то П-теорема гласит, что эти n размерных переменных могут быть объединены в равноценное выражение, включающее на r меньше членов:

$$F(\Pi_1,\ \Pi_2,\ldots,\ \Pi_{n-r}) = 0. \tag{2}$$

Каждая из этих безразмерных переменных состоит из $r+1$ первоначальных единиц. П-теорема подчиняется строгому доказательству, основанному в значительной степени на уже указанном требовании, чтобы математическое выражение физического закона не зависело от единиц измерения; доказательству может быть придана следующая форма. При рассмотрении задачи о движении жидкости по трубам ясно, что

$$f\left(D,\ V,\ \rho,\ \frac{dp}{dx},\ \mu\right) = 0.$$

Это выражение может быть записано и как

$$f\left(D, V, \rho, \frac{\rho V^2}{D}\Pi_1, \rho V D \Pi_2\right) = 0.$$

D, V и ρ без ущерба для общего значения могут быть приняты равными единице:

$$f(1, 1, 1, \Pi_1, \Pi_2) = 0.$$

Отсюда

$$F(\Pi_1, \Pi_2) = 0.$$

Произведения, полученные для задачи о движении жидкости по трубам, известны как коэффициент сопротивления и число Рейнольдса (фактически обратные им величины; противоположные формы получились бы при введении отрицательных, а не положительных показателей степени). Хорошо известно, что первое из них является функцией второго. Однако различный выбор переменных, которым приписываются произвольные показатели степени, дает различные группы членов. Хотя П-теорема ясно доказывает, что выбранные решения не независимы и, следовательно, ни одно из них не может содержать ничего, что не имелось бы в других, вопрос о том, какую из различных форм предпочесть, остается открытым.

Путем правильного выбора переменных, получающих произвольные показатели степени, можно управлять появлением величины именно в одном или более чем в одном произведении. Какие величины должны быть выбраны для появления в каждом произведении и какие только в одном, зависит в большой степени от ожидаемых результатов. Если переменная легко контролируется экспериментально, желательно присутствие ее только в одном произведении, чтобы ее независимое изменение воздействовало непосредственно на это произведение. Переменная, выбранная для исследования в качестве зависимой величины, конечно, всегда должна быть ограничена одним произведением. С другой стороны, числа Фруда, Рейнольдса и им подобные, приобретшие большое физическое значение, будут в большинстве случаев получаться как произведения, только если длина, скорость и плотность выбраны как повторяющиеся переменные. Если скорость представляет легко и независимо изменяющуюся величину, эти два критерия будут, очевидно, разными. Как правило, не существует определенного пути для применения понятий размерности при анализе какого-нибудь явления, опыт здесь необходим в такой же степени, как и в любой другой области науки. Поэтому в следующих частях будут детально рассмотрены трудности скорее физического, чем алгебраического порядка.

7. Безразмерные соотношения и их значение. Как видно, П-теорема дает результаты, которые обладают по крайней мере

тремя преимуществами по сравнению с размерными соотношениями. Во-первых, соотношение, выведенное таким образом, не зависит как в числовом значении, так и с точки зрения размерности от системы единиц, использованной при выражении самих переменных. Во-вторых, число членов обычно сводится к числу входящих размерных категорий (т. е. r только в редких случаях меньше, чем m). В-третьих, переменные группируются таким образом, что облегчают дальнейшее изучение их функциональных взаимоотношений. Иногда считается, что П-теорема также дает ключ к пониманию самой функции. Но за исключением одного случая, который будет сейчас рассмотрен, это не так, ибо П-теорема только упрощает выражение информации, полученной первоначальным подбором переменных.

Когда в задаче задано, что $n-r=1$, результат имеет очень простой вид:

$$F(\Pi_1) = 0.$$

Так как здесь содержится только один П-член, очевидно он должен быть постоянной величиной. Именно такой случай будет, например, если предположить (как сделал Осборн Рейнольдс), что переход от ламинарного потока к турбулентному зависит лишь от диаметра трубы, средней скорости, плотности и вязкости жидкости:

$$F\left(\frac{DV\rho}{\mu}\right) = 0 \text{ и } \frac{VD\rho}{\mu} = C.$$

Только с помощью размерных значений можно показать, как это подразумевает первоначальное предположение, что произведение диаметра, скорости и плотности будет изменяться прямо пропорционально вязкости. Постоянная пропорциональности вычисляется иными средствами. Могут быть найдены и другие многочисленные примеры постоянства групп переменных с одним параметром. На границе между реками и быстрыми потоками отношение $V/\sqrt{gy}$ равно единице. При гидростатическом распределении давления величина $-\delta p/\gamma\delta z$ тоже равна единице. При медленном движении малых шарообразных частиц в вязкой жидкости величина $F/\mu VD$ равна 3π. А для волн с минимальной скоростью на поверхности жидкости величина $\lambda\sqrt{\gamma/\sigma}$ равна 2π. Так как первые две из указанных величин обычно называют числами Рейнольдса и Фруда, логически и остальные могут быть названы числами Архимеда, Стокса и др.

Если в задаче задано, что $n-r=2$, тогда

$$F(\Pi_1, \Pi_2) = 0,$$

так же как при сопротивлении в гладких трубах. Ни тот, ни другой из П-членов здесь не может быть постоянной величиной, поскольку каждый должен определенным образом изменяться в зависимости от второго. С другой стороны, каким было бы пяти-

мерное представление, если бы экспериментальные данные, упрощенные сейчас до одной кривой на двухмерном графике, изображались бы графически в соответствии с первоначальным числом переменных. Не следует забывать, однако, что r переменных в задаче о движении жидкости по трубам, выбранные для двух групп, не представляют собой единственно возможный выбор. Действительно, так как каждая группа может отличаться от других только одной переменной, следовательно, существует пять различных групп, которые могут быть образованы из этих пяти переменных, и в каждой из них опущена одна переменная величина:

$$\Pi_1 = \frac{Ddp/dx}{\rho V^2}; \quad \Pi_2 = \frac{DV\rho}{\mu};$$

$$\Pi_3 = \frac{D^2 dp/dx}{\mu V}; \quad \Pi_4 = \frac{\rho D^3 dp/dx}{\mu^2};$$

$$\Pi_5 = \frac{\mu\, dp/dx}{\rho^2 V^3}.$$

Первые два выражения известны как числа Эйлера и Рейнольдса — Eu и Re. Третье может быть названо по имени Пуазейля числом P (постоянное для ламинарного потока), следующее часто называют числом Кармана K. Последнее обозначают буквой D из-за того, что диаметр является той величиной, которую оно не содержит. Между этими пятью величинами возможны десять простых функциональных комбинаций (не считая многочисленных комбинаций производных):

$$F_1(\mathrm{Eu}, \mathrm{Re}) = 0; \; F_4(\mathrm{Eu}, \mathrm{D}) = 0; \; F_8(\mathrm{P}, \mathrm{K}) = 0;$$
$$F_2(\mathrm{Eu}, \mathrm{P}) = 0; \; F_5(\mathrm{Re}, \mathrm{P}) = 0; \; F_9(\mathrm{P}, \mathrm{D}) = 0;$$
$$F_3(\mathrm{Eu}, \mathrm{K}) = 0; \; F_6(\mathrm{Re}, \mathrm{K}) = 0; \; F_{10}(\mathrm{K}, \mathrm{D}) = 0.$$
$$F_7(\mathrm{Re}, \mathrm{D}) = 0;$$

Каждое из этих соотношений в равной степени обоснованно и не содержит иных параметров, чем другие. Однако одно или более могут иметь особое значение в части области над относительно простой кривой; так, уравнение Пуазейля, уравнение Блазиуса и уравнение Кармана — Прандтля для особых частей функции наилучшим образом соответствуют различным комбинациям этих параметров.

Продолжая в том же духе, найдем, что если $n-r=3$, то получающиеся три безразмерные комплекса переменных будут представлять криволинейную поверхность в трехмерном пространстве. Хотя это может быть представлено на одной плоскости в виде серии линий, имеющих третий комплекс в качестве параметра, что обычно делается, например, при изучении сопротивления трубы с относительной шероховатостью в качестве третьего параметра, но из-за увеличения таким образом n на единицу

число возможных комбинаций становится еще больше, так что широта возможностей в составлении комбинаций остается такой же. Аналогично, если $n-r=4$, число возможностей, так же как и трудностей представления, еще более увеличивается и становится сомнительным, может ли даже использование П-теоремы помочь произвести более чем очень грубый анализ задачи.

Во всяком случае некоторые обстоятельства к этому моменту должны стать очевидными. Благодаря пространственным представлениям трудности анализа в значительной мере упрощаются, но не в коей мере не исключаются. Безразмерные параметры, полученные при помощи П-теоремы, не ограничиваются несколькими обычно поименованными числами, а представляют собой различные изменения формы, и так как число этих форм увеличивается, с их функциональными комбинациями происходит то же самое. Таким образом, хотя применение самой П-теоремы является чисто автоматическим и осуществляется после того как сами переменные уже подобраны, успех анализа целиком зависит от выбора переменных. Следовательно, этой важнейшей стороне вопроса должно быть уделено большое внимание.

Пример 1. Тарировочная кривая для определения типа расходомера характеризуется следующим эмпирическим уравнением: $Q=1{,}15h^{0{,}53}$. Рассмотреть это соотношение как с точки зрения размерности, так и с физической точки зрения.

Опыт показывает, что для расходомера данного типа

$$Q=f(D, \rho, \mu, \Delta p).$$

Объединение этих переменных при помощи П-теоремы дает

$$F\left(\frac{Q}{D^2\sqrt{\Delta p/\rho}}, \frac{D\sqrt{\rho\Delta p}}{\mu}\right)=0.$$

Введение γh вместо Δp и принятие степенной функции позволяет записать это выражение в такой форме:

$$Q=CD^2\sqrt{g}\ h^{0{,}5}\left(\frac{D}{\nu}\sqrt{gh}\right)^n.$$

Очевидно, что числовой множитель 1,15 включает не только влияние геометрии расходомера, но также величину и размерность $D^2\sqrt{g}$. Эффект изменения числа Рейнольдса отражен в последнем члене, для которого $n=0{,}06$ (т. е. $h^{n/2}=h^{0{,}03}$) — но только для данной жидкости, принятого размера расходомера и пределов испытанных расходов; вне этих пределов функция может иметь даже нестепенную форму.

В. Порядок проведения исследования

8. Выбор первичных переменных. Согласно уравнению (1), каждая переменная величина рассматривается как зависимая от других. Однако обычно положение таково, что все переменные, за исключением одной, можно легко контролировать независимо, и только эта переменная является действительно зависимой. Утверждение, что зависимая переменная должна

всегда находиться среди величин, выбранных для исследования, кажется почти бесспорным, но иногда случается, что все выбранные для изучения переменные оказываются независимыми друг от друга, так что дальнейшее исследование их соотношений становится бесполезным, ибо таких соотношений не существует. Следует отметить, что пренебрежение относящейся к задаче независимой переменной так же опасно, как и пропуск зависимой переменной, так как уравнение (1) не делает различия между ними. Тот факт, что относящаяся к задаче величина не является истинно переменной в условиях, при которых она будет изучаться (например, ускорение силы тяжести g), недостаточная причина для пренебрежения ею, ибо гораздо важнее ее относительная величина в безразмерной группе, чем ее абсолютная величина.

Включение более одной зависимой переменной почти такая же серьезная ошибка, как и пропуск ее, так как это влечет за собой избыток групп, и результат снова становится бессмысленным. С другой стороны, введение переменных, которые не имеют отношения к задаче, не является непоправимой ошибкой, так как (если они не являются составной частью каждого члена) они просто приведут к образованию безразмерных групп, которые в дальнейшем будут признаны излишними. При выборе переменных, относящихся к определенной задаче, мы оказываемся между двух огней: при недостаточном числе переменных функция не будет полной; при избыточном числе переменных функция или невозможна, или непригодна для исследования. Обе опасности реальны и обе должны быть преодолены. Однако первая из них более серьезна, и ее необходимо обнаруживать до применения П-теоремы, тогда как последняя может быть учтена после.

Все переменные в механике жидкостей относятся к одному из трех классов: те, которые определяют геометрию границ, те, которые определяют сам поток, и те, которые определяют жидкость. Геометрические переменные могут иметь форму длин, площадей, объемов или даже тригонометрических функций. Переменные потока могут включать время, скорости, ускорения, уровни потока, интенсивность сил или их градиенты, или их интегралы по поверхности и моменты, а также другие динамические единицы, такие, как количество движения, энергия и сила. Переменными жидкости являются плотность, удельный вес, динамическая вязкость, поверхностное натяжение, упругость и давление пара.

Конечно, можно доказать, что все эти переменные включает каждое явление потока. Однако при более близком рассмотрении обнаруживается, что почти каждая характеристика потока может относиться только к одному классу зависимых переменных. Очень вероятно, что только два или самое большее три свойства жидкости играют существенную роль. Из геометричес-

ких переменных достаточно одной, чтобы определить линейный масштаб, и не нужно включать никаких других, если только они не изменяются по отношению к ней.

Как правило, следует добиваться упрощения, а не усложнения. Например, из трех независимых переменных: длины, скорости и расхода потока длина и скорость были бы лучшим выбором, чем скорость и расход потока. Включение всех трех переменных было бы излишним, а принятие одной из них — неполным, даже если она кажется объединяющей в себе две других (например, $Q=VL^2$). Что-то в этом же роде получается и с ускорением силы тяжести g, равным отношению удельного веса к плотности: $g=\gamma/\rho$. Если рассматриваются только динамические переменные γ и ρ (те, что включают силу или массу), задача может быть отнесена к более простым, скорее кинематическим, чем динамическим, при g — единственном «свойстве» жидкости; то же самое будет, если ввести только μ и ρ, тогда единственным свойством жидкости явится кинематическая вязкость $\nu=\mu/\rho$. Но если должны приниматься во внимание другие динамические переменные (например, p), будет более систематично и, следовательно, проще выразить все свойства жидкости, включая гравитационные, в динамической форме.

9. Выбор параметров. При выборе m переменных, которые встречаются в каждой из безразмерных групп, следует удовлетворять два условия: первое — повторяющиеся переменные должны вместе включать все m размерных категорий; второе — они не должны сами по себе образовывать безразмерные группы. Если первое требование не будет выполнено, будет невозможно объединить эти переменные с теми, которые действительно содержат недостающие размеры. С другой стороны, если повторяющиеся переменные могут быть объединены между собой (например, скорость, интенсивность давления и плотность, которые дают безразмерное соотношение $\rho V^2/p$), тогда они не смогут объединиться с другими переменными, не подходящими к ним по размерам.

Какие из величин, удовлетворяющих данным требованиям, должны быть выбраны, целиком зависит от желаемых результатов. Вообще говоря, выбор длины, скорости и плотности будет приводить к ряду геометрических соотношений, к параметру потока, такому, как число Эйлера, и к одному или более общих параметров, таких, как числа Фруда и Рейнольдса. Однако, как уже было показано, иной выбор приводит к более выразительным (хотя не более правильным) объединениям — особенно если среди них имеются такие, у которых скорость заменена размерно-эквивалентным значением $\sqrt{p/\rho}$. Обычно такой произвольный контроль над первоначальным подбором П-членов идет по одному из двух направлений: или какая-нибудь переменная преднамеренно исключается из всех членов, кроме одного, или она преднамеренно включается в каждый член. Так, как прави-

ло, желательно иметь плотность во всех группах; с другой стороны, одного члена, содержащего вязкость, обычно достаточно.

Хотя прямое применение П-теоремы приводит к обязательному появлению одних и тех же m переменных в каждом члене, это не единственно возможное для них функциональное объединение. Если, например, $F_1(X, Y, Z)=0$, будет также справедливо равенство $F_2(XY, YZ, ZX)=0$. Иными словами, различные П-члены, получаемые при применении этой теоремы, можно произвольно объединять друг с другом при соблюдении условия, чтобы количество независимых безразмерных групп после объединения не изменялось. Вследствие этого процесса переменные, общие для двух объединенных групп, будут взаимно уничтожаться (для чего обычно и проводится объединение), в результате чего одна или более из первоначальных повторяющихся переменных исчезнут из данной группы. При дальнейшем исследовании движения жидкости по трубам будет обнаружено, что десять различных функциональных групп могут быть представлены или путем последовательного различного подбора повторяющихся переменных, или путем последовательного перекрестного перемножения первых двух групп параметров (т. е. $K=\mathrm{Re}^2E$ и т. д.); при большом числе переменных, однако, указанный процесс должен рассматриваться как шаг назад.

Допуская, что эти разнообразные комбинации возможны и часто очень удобны, нельзя забывать тот факт, что обычно никто не может сказать заранее, какую комбинацию следует выбрать. Это, так же как и форма самой функции, обнаруживается с помощью анализа или эксперимента. Иногда полезно использовать прошлый опыт родственных проблем, последующие задачи при этом проясняются сами в процессе исследования. В любом случае понятия размерности приближают исследователя к намеченной цели, даже если окончательная и наилучшая группировка переменных еще должна быть установлена.

10. Проведение исследования. Размерный анализ любой задачи, проведенный перед ее аналитическим или экспериментальным исследованием, не только уменьшает число входящих независимых членов, но и позволяет систематизировать группировку размерных переменных наиболее удобным образом для дальнейшего изучения. Последнее, несомненно, является неоценимым преимуществом, так как по крайней мере при экспериментальном изучении исследователи имеют дело с размерными переменными.

Если в задаче получается только один П-член, единственная аналитическая или экспериментальная оценка каждой размерной переменной для определенного случая потока будет представлять идеальный минимум, необходимый для вычисления ее постоянного числового значения. Разумеется, при экспериментальной оценке измерения следует повторять достаточное количество раз, чтобы удостовериться в их точности. После этого для

проверки (с помощью постоянства числового фактора) обоснованности первоначального предположения, что только выбранные переменные контролируют данное явление, каждая из независимых величин должна быть поставлена в такие условия, чтобы она изменялась, превышая определенный уровень.

Если в задаче получаются два П-члена, то предшествующая процедура должна быть повторена столько раз, сколько требуется точек для построения кривой. Если переменные выбраны правильно, эта кривая будет единственной, поэтому не имеет большого значения, какие переменные будут систематически меняться, так как каждая охватывает достаточную область, чтобы отразить это влияние. Однако, как и ранее, для доказательства правильности сделанного выбора необходимо изменять переменные. Обычно для иллюстрации данного случая рассматривается сопротивление в гладких трубах.

Когда путем учета размерности получены три П-члена, систематизация исследований действительно приобретает большое значение, так как для получения последовательных кривых для определения трехмерной поверхности путем указанной выше процедуры требуется много времени. Здесь желательно определить форму такого семейства кривых путем изучения воздействия одного П-члена на другой, так как третий представлен рядом постоянных величин. Это, очевидно, требует расстановки размерных переменных в несколько групп таким образом, чтобы было удобно осуществлять независимый экспериментальный контроль за двумя из них. Безупречным примером этого случая является задача о сопротивлении шероховатых труб, когда эти два независимых П-члена представлены числом Рейнольдса (или Кармана) и относительной шероховатостью. Было бы конечно идеально, если бы вязкость и шероховатость были независимыми размерными переменными, так как каждая из них встречается только в одном или другом члене. Практически число Рейнольдса легко меняется в зависимости от скорости и, так как граничные условия остаются неизменными, необходимо увеличение диаметра, соответствующее изменению относительной шероховатости. Однако изменения плотности и вязкости (например, от воздуха к воде) и одного изменения абсолютной шероховатости, причем форма элементов должна поддерживаться постоянной (нелегкая задача), должно быть достаточно для проверки правильности сделанной группировки переменных.

При получении четырех П-членов задача не может быть решена силами одного исследователя, и положительный результат достигается только при организации работы многих исследователей в близко соприкасающихся областях. Простейшей иллюстрацией такого положения является изучение сопротивления шероховатых труб с различными поперечными сечениями. Это приводит к образованию ряда семейств кривых, причем каждое, подобно предыдущему, относится к определенному сечению. Не-

прерывность представления будет существовать, конечно, только в том случае, если сечение изменяется систематически — скажем, постепенно от круга к квадрату или через ряд эллипсов с различным отношением осей.

11. Анализ результатов. Если размерному анализу, предшествующему экспериментальным исследованиям задачи, уделить должное внимание, то не только проведение экспериментов потребует минимальной затраты энергии, но и результаты их будут распределены так, что определят графически специфическую форму функции, описывающей изучаемый вопрос в интересующей исследователя области. При благоприятных условиях эта функция может иметь очень выразительную форму. Но независимо от того, выразительна функция или нет, она будет содержать все необходимые для ее аналитического исследования сведения и не потребует обращения к дополнительным экспериментам.

Последующая процедура будет определяться характером рассматриваемой задачи. Если не имеется руководящей аналитической основы, то обработка опытного материала заключается в нанесении на график экспериментальных данных в их простейшей и наиболее полезной форме — предпочтительнее арифметические, степенные и показательные выражения, если невозможно получить функции непосредственно в строгой математической форме. Однако даже если окажется, что данные опыта могут быть представлены простым алгебраическим уравнением, необходимо помнить, что этот результат является чисто эмпирическим. При таких обстоятельствах экспериментальные ограничения почти так же важны, как и форма уже определенных функций, и экстраполирующий выход за их пределы является далеко не безопасной (хотя и очень обычной) практикой; степенная формула Блазиуса для гладких труб наглядный пример тому.

При некоторых условиях очевидная общность экспериментальных результатов, нанесенных на график в безразмерной форме, будет подсказывать по крайней мере приблизительный аналитический подход к решению проблемы; результаты экспериментов в этом случае служат как руководством для дальнейших анализов, так и окончательной проверкой их. Таким путем появилась формула сопротивления Кармана — Прандтля для гладких труб; вследствие ее частично аналитического обоснования она считается более надежной для экстраполяции, чем формула Блазиуса.

Пример редкой формы анализа без обращения к измерениям за исключением проверочных находим в исследованиях сопротивления потока в ламинарном пограничном слое, проведенных Блазиусом. Хотя этому примеру нужно следовать во всех возможных случаях, большинство проблем в настоящее время еще нуждается в полуаналитическом или целиком эмпирическом исследовании.

Пример 2. Установлено, что вода проникает по капиллярам через песчаный фильтр толщиной 6 дюймов за 15 *сек*. Сколько времени потребуется для прохождения воды, если уменьшить величину зерен песка на 75%?

Если допустить, что ни сила тяжести, ни инерция не вовлечены в это явление, обычный прием приведет к соотношению $f(d, L, t, \sigma, \mu)=0$, которое поочередно даст два П-члена. При этих условиях получить решение с помощью известных средств невозможно. С другой стороны, если признать, что сопротивление вязкости потоку при прохождении его через щели характеризуется постоянной величиной числа Пуазейля $(d^2dp/dx)/\mu V$, а через капилляры — постоянной величиной параметра $d\Delta p/\sigma$, то эти две величины можно объединить путем исключения давления:

$$\frac{\sigma d}{L\mu V}=C.$$

Поскольку по размерностным соображениям скоростные и временные характеристики обратно пропорциональны, следовательно, при уменьшении зерен песка в 4 раза время увеличится вчетверо.

Г. Разбор типичных исследований

12. Задачи, содержащие ускорение массы. Явление неравномерного или неустановившегося течения, в котором плотность является единственным свойством жидкости, подлежащим учету, может быть отнесено к категории задач, рассматривающих ускорение массы. К ней относятся потоки, которые можно считать безвихревыми, как с разделением течения, так и без него. Безвихревой поток с пренебрежимым разделением может рассматриваться аналитически без обращения к экспериментам, и струйная теория потока с успехом применяется для решения задач разделения. В любом случае самый элементарный размерный анализ таких задач может привести лишь к одному или более геометрическим отношениям и к числу Эйлера, если поток установившийся, плюс некоторая форма параметра ускорения, если поток изменяется во времени. Особое преимущество анализа размерности очевидно в случае вихревого потока, так как основные уравнения движения для таких задач очень редко имеют точные решения.

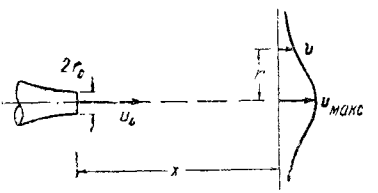


Рис. 1. Распространение затопленной струи

Наиболее простым примером явления неравномерного вихревого потока, в котором свойства жидкости не имеют большого значения, является турбулентная диффузия затопленной струи умеренных размеров с умеренно высокой начальной скоростью Элементы результативного течения в их простейшем виде будут зависеть от положения частиц жидкости относительно сечения, проходящего через выпускное отверстие, размеров выпускного отверстия и скорости истечения. Зависимые переменные, используемые для определения вида течения (рис. 1), состоят из ком-

понентов средней скорости, компонентов интенсивности турбулентных образований и масштаба турбулентности или коэффициента диффузии. Каждая из этих переменных приводит к различным функциональным соотношениям следующего вида:

$$u = f(x, r, r_0, u_0).$$

Тот факт, что плотность здесь ни с чем не может быть объединена, подтверждает первоначальное предположение, что элементы формы потока были бы одинаковыми для любой жидкости, если бы влиянием других свойств жидкости можно было пренебречь.

В дополнение к этим элементам существует несколько характеристик потока, относящихся к целым сечениям, перпендикулярным к оси струи. Такие характеристики подобно скорости на самой оси не зависят от радиального расстояния. К ним относятся объем потока, количество движения потока и энергия потока; две последние характеристики делят на плотность, чтобы исключить из них размерность массы:

$$Q = 2\pi \int urdr; \quad \frac{M}{\rho} = 2\pi \int u^2 rdr; \quad \frac{E}{\rho} = \pi \int u^3 rdr.$$

Все три характеристики зависят только от x, r_0 и u_0.

Эксперименты по установлению различных характеристик среднего потока ограничиваются одним только продольным компонентом скорости, определяемым с целью построения эпюры распределения скоростей u/u_0 в зависимости от r/r_0 для последовательных величин x/r_0 в соответствии с безразмерной функцией

$$\frac{u}{u_0} = F_1\left(\frac{r}{r_0}, \frac{x}{r_0}\right).$$

По результатам экспериментов легко могут быть подсчитаны вспомогательные соотношения u_m/u_0, $Q/\pi r_0^2 u_0$, $M/\rho\pi r_0^2 u_0^2$ и $E/\rho(\pi r_0^2 u_0^3/2)$. К настоящему времени экспериментаторами обнаружено несколько интересных положений: на определенном расстоянии от выпускного отверстия эпюра распределения скорости приобретает постоянную обычную форму, изменяясь затем только в относительных пропорциях; в то время как по мере роста расстояния от выпускного отверстия относительный объем потока непрерывно увеличивается, а относительная энергия потока непрерывно уменьшается, относительное количество движения его остается постоянным. По крайней мере последнее из этих условий может быть выведено из элементарных физических представлений, так как количество движения могло бы измениться только в случае, если продольная сила воздействовала бы на струю в целом в направлении течения.

За исключением непосредственной близости от насадка, абсолютная величина диаметра выпускного отверстия и скорость

истечения большого значения не имеют при том условии, что определенное количество движения потока на единицу плотности M/ρ создается в некоторой начальной точке. Так как кривые распределения скорости в последовательных сечениях подобны, общая функция теперь сводится к виду

$$u = f(x, r, M/\rho)$$

или

$$\frac{u}{\sqrt{M/\rho x^2}} = F_2\left(\frac{r}{x}\right),$$

и, в частности, выражения для скорости по оси, расхода и энергии потока (как функции M, ρ и x) ограничиваются выбранными членами:

$$F_3\left(\frac{u_m}{\sqrt{M/\rho x^2}}\right) = 0;\ F_4\left(\frac{Q}{x\sqrt{M/\rho}}\right) = 0;$$

$$F_5\left(\frac{E}{M^{3/2}/x\rho^{1/2}}\right) = 0.$$

Иными словами, каждая из этих величин должна быть постоянной и, следовательно, экспериментальная оценка любой из них потребует (при идеальных условиях) лишь одного измерения. Действительно, если функция распределения является приблизительным алгебраическим выражением(таким, как функция вероятности Гаусса), одной экспериментальной постоянной вполне достаточно для оценки любой характеристики среднего потока. Таким образом, размерные и физические понятия служат руководством при исследованиях до тех пор, пока аналитический подход может дать приблизительное решение без детального обращения к экспериментальным данным.

13. Явление гравитации. Любой поток жидкости со свободной поверхностью подвергается воздействию гравитации, выражающемуся в перемещении ее поверхности в зависимости от времени или расстояния. Многие задачи, как гидравлические, так и судостроительные, относятся к этой категории, а изучение движения волн практически представляет целую науку. В случае, когда размеры и скорости не слишком малы, влиянием вязкости и капиллярности часто можно пренебречь, тогда применение размерного анализа дает одно или большее число геометрических отношений: числа Фруда и Эйлера и (если поток является неустановившимся и неравномерным) некоторую форму параметра времени или ускорения.

Не всегда принимается во внимание, что явление гравитации не ограничивается только жидкостями при контакте их с атмосферой или даже жидкостями как классом; любая поверхность разрыва плотности как внутри жидкости, так и внутри газа является такой же свободной поверхностью, какой обычно считают

поверхность воды, соприкасающуюся с воздухом. Действительно, по существу все явления свободной поверхности, известные гидравликам, могут быть обнаружены на границе между двумя слоями воздуха с различной температурой или между двумя слоями воды различной солености. Кроме того, там должен существовать постепенный переход от одного края жидкости, соприкасающегося с газом, к другому краю, где разность в плотности приближается к нулю. Для иллюстрации этого положения рассмотрим следующую задачу.

Предположим, что пространство между двумя горизонтальными поверхностями разделено подвижной вертикальной перегородкой, и жидкости по обеим сторонам ее имеют различные плотности ρ_1 и ρ_2. В тот момент, когда перегородка устраняется, жидкость с большей плотностью начинает подтекать под жидкость с меньшей плотностью, последняя в это же время начинает разливаться по поверхности более плотной жидкости. Требуется исследовать изменение формы поверхности раздела жидкостей (рис. 2) как функции времени. Очевидно, что основными переменными являются координаты криволинейной поверхности, расстояние между границами, период времени после начала движения, две плотности и какая-нибудь мера гравитационного воздействия. Последней может быть удельный вес одной из данных жидкостей (но не обеих) или ускорение силы тяжести. Однако более ценно для таких задач использовать разницу удельных весов, так как она представляет истинный вес единицы объема любой жидкости, погруженной в другую. Это количество в сущности должно включать уменьшенную величину g, т. е. $g' = \Delta\gamma/\rho$

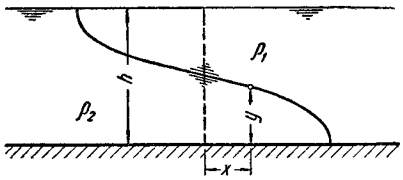


Рис. 2. Смещение поверхности раздела жидкостей с разной плотностью

Таким образом, функция приобретает вид

$$f(x, y, h, t, \rho_1, \rho_2, \Delta\gamma) = 0,$$

что может быть записано в безразмерной форме следующим образом:

$$F_1\left(\frac{x}{h}, \frac{y}{h}, \frac{\rho_1}{\rho_2}, \frac{t^2\,\Delta\gamma/\rho_2}{h}\right) = 0.$$

Размерный анализ позволяет объединять переменные в форму, удобную для экспериментального изучения, хотя и не дает решения для самой функции. Очевидно, для этого нужно выбрать данное отношение плотностей и записать координаты поверхности через последовательные промежутки времени, а затем повторить этот процесс с другим отношением плотностей. С физической точки зрения можно предположить, что малейшие изме-

нения относительной плотности будут оказывать заметное воздействие на гравитационные стороны задачи, как это показано последним членом, и незначительно воздействовать на инерционные стороны, как показано предпоследним членом. Экспериментальные результаты подтвердили бы тот факт, что ρ_1/ρ_2 может рассматриваться как постоянная даже при изменениях порядка 3—4%. Также экспериментально можно было бы обнаружить (как было показано аналитически Сен-Венаном более 100 лет назад для воды под воздухом), что при $\rho_1/\rho_2 = C$ оставшиеся три члена могут быть сведены путем перекрестного умножения к двум:

$$F_2\left(\frac{y}{h}, \frac{x}{t\sqrt{h\,\Delta\gamma/\rho}}\right) = 0.$$

Обобщенная форма профиля, представленная этой функцией, могла бы быть найдена экспериментально умеренным изменением ρ_1/ρ_2 от нуля до единицы — безразмерная скорость фронта волны, выраженная вторым параметром при нулевом значении первого, при этом изменяется от 0,9 до 0,47.

14. Потоки с вязкостным сопротивлением. Так как каждая жидкость обладает вязкостью, абсолютная величина которой больше нуля, заявление, что ее обычно можно считать равной нулю, лишь относительно верно. Иными словами, любое явление потока, для которого влиянием вязкости можно пренебречь при определенной величине числа Рейнольдса, может подвергаться значительному воздействию вязкости при более низких числах Рейнольдса. Так, известно, что рассмотренные в п. 12 характеристики струи подвергаются возрастающему воздействию вязкости при уменьшении Re, когда поток становится полностью ламинарным. Волны, разбиравшиеся в предыдущем пункте, также подвержены вязкостному замедлению, когда масштаб и скорость становятся малыми или когда длина волны становится очень большой; в действительности пренебрежение вязкостью при всяком анализе волнового движения правомерно, поскольку энергия любой волны в конечном счете диссипируется вязкостным сопротивлением. С другой стороны, конечно, существует очень много примеров практического направления, в которых роль вязкости является первостепенной и пренебречь ею невозможно.

Сопротивление установившемуся потоку в трубах уже рассматривалось при общем разборе П-теоремы, сопротивление равномерному движению шара в жидкости аналогично. Установление того и другого типа потока из состояния покоя в равной степени поучительно. Для изучения оседания шара в жидкости, вероятно, должны быть выбраны следующие переменные.

$$f_1(D, V, \rho, \mu, \gamma, \gamma_\tau) = 0.$$

Однако поскольку движение вызывается разницей между двумя удельными весами или действующей на шар силой, переменные γ и $\gamma_т$ могут быть заменены на $\Delta\gamma$ или F, что уменьшит число переменных до пяти. Если теперь исследовать данное явление в неустановившемся потоке, одна из двух величин: время или высота падения, необходимые для достижения шаром, скажем, 99% его конечной скорости, может рассматриваться как новая зависимая переменная. Однако из-за того, что плотность как твердых веществ, так и жидкостей играет некоторую роль при движении с ускорением, должна быть добавлена и независимая переменная. С другой стороны, одна из первоначальных переменных, определяющих конечные условия, теперь становится лишней, так как уже является функцией остальных четырех; чтобы сохранить установленное число Рейнольдса в конечной группировке членов, нужно опустить $\Delta\gamma$. Таким образом, необходимыми переменными становятся

$$h, t = f_{2,3}(D, V, \rho, \rho_т, \mu).$$

С помощью П-теоремы они могут быть сгруппированы следующим образом:

$$\frac{h}{D}, \frac{tV}{D} = F_{1,2}\left(\frac{VD\rho}{\mu}, \frac{\rho}{\rho_т}\right).$$

Такая группировка наиболее приемлема для дальнейшего изучения данного явления.

15. Транспортирование дискретных материалов. Из всех явлений потока возможно наиболее трудно поддается анализу движение дисперсных элементов в жидкости, движущейся в свою очередь относительно неподвижных границ. Существо вопроса состоит в том, что твердые частицы в жидкости или газе, капли жидкости в газе, пузырьки воздуха в жидкости или нерастворимые капли одной жидкости в другой находятся во взвешенном состоянии. Такие условия встречаются при различных видах осаждения, в высокоскоростных потоках в открытых каналах, в двухфазных потоках в трубах, в метеорологии, при очистке нефти и в химическом производстве. Практически при этих условиях число переменных настолько велико, что необходимо упростить задачу, не умаляя значения приблизительных соотношений, подлежащих определению.

В любом из этих случаев по крайней мере один линейный член L необходим для обозначения граничного масштаба и по крайней мере одна скорость V требуется для обозначения кинематики основного потока. Для определения свойств основного потока нужны хотя бы плотность ρ и вязкость μ. Для характеристики транспортируемых потоком материалов следует иметь хотя бы один линейный размер d (можно заменить стандартным отклонением от этого размера σ_d) и действительный удельный вес $\Delta\gamma$. Отбрасывание удельного веса жидкости означает, что си-

ла тяжести не влияет на основной вид потока, а это, конечно, не верно. Если отдельные характеристики дискретного материала определены при помощи самого явления, как в случае вовлечения воздуха в текущую воду, они становятся поочередно зависимыми переменными; но тогда должны быть учтены другие факторы (такие, как поверхностное натяжение на границе воздуха и воды). Если, как в случае транспортирования наносов, все указанные характеристики являются независимыми, это значит, что нужно добавить еще одну — такую, как концентрация c. В любом случае функция будет подобна следующей:

$$f(L, V, \rho, \mu, d, \sigma_d, \Delta\gamma, c) = 0.$$

Эта функция с восьмью переменными слишком сложна для изучения в целом, хотя она и представляет самый простой вид часто встречающегося движения. Конечно, можно пойти по пути упрощения этой функции, ограничивая дискретный материал однородными размерами и формой, исключая, таким образом, еще одну переменную. Однако вообще так далеко можно идти только при условии, если по счастливой случайности весь несомый материал находится полностью во взвешенном состоянии. В последнем случае, особенно если концентрация настолько низка, что соприкосновения между частицами очень редки, переменные d, ρ, μ и $\Delta\gamma$, которые вместе определяют гидравлическую крупность w, могут быть в качестве первого приближения заменены на w. Это, очевидно, преобразует предыдущее соотношение в следующую рабочую форму:

$$f(V, w, c) = 0.$$

Такое удивительно простое соотношение действительно описывает случай, имеющий практическое значение (намыв русловых осадков потоком верхнего бьефа), а использование гидравлической крупности в качестве меры относительного движения между переносимым материалом и основным потоком позволяет практически решить многие более сложные задачи. Однако решение редко бывает точным или законченным, причем погрешности увеличиваются с расширением области исследования, особенно если взвешенная фаза является просто развитым состоянием движения или зависит от различных типов движения в пограничной области. Из-за этого такие явления, как перенос осадков вдоль русла канала, почти последними изъяли из чисто эмпирической области изучения.

Глава II

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ

А. Поток сплошной среды

16. Сплошность. Необходимым условием всякого изучения движения жидкости является некоторое понимание природы самой среды. Жидкость обычно определяется как вещество, постоянно меняющее свою форму, т. е. текучее, и подчиненное касательному напряжению, как бы мало оно ни было. Таким образом, и жидкости и газы относятся к одной группе, несмотря на большую разницу в их плотности, сжимаемости и других свойствах. Законы движения жидкостей прилагаются к потокам других сред до тех пор, пока они обладают теми же свойствами. Действительно, обычно принято проводить многие типы гидравлических испытаний (особенно тех, в которых не участвует свободная поверхность) с воздухом в качестве среды; и, наоборот, возможно, хотя и не всегда так выгодно, проводить различные аэродинамические исследования с водой и другими жидкостями.

Жидкости, как и всякое вещество, обладают субмикроскопической молекулярной структурой, в которой происходит непрерывное движение элементарных частиц по относительно большим пустотам. Детали такого движения, по крайней мере в статистическом смысле, нередко имеют первостепенное значение, особенно если данная среда является газом и масштаб движения очень мал или давление очень низко. В наиболее изученных больших потоках, однако, ни молекулярная структура, ни молекулярное движение как таковые не вызывали особого интереса, поэтому при допущении, что изучаемая жидкость является сплошной средой даже при бесконечно малых пределах, получается намного упрощенная и все же очень полезная картина. При указанных условиях не только свойства жидкости, но и такие характеристики, как скорость, давление и температура, могут рассматриваться как непрерывно изменяющиеся на всем протяжении потока и могут быть определены математически в любой точке.

Массовая плотность, вероятно, наиболее важное свойство жидкости, определяется соотношением

$$\rho = \lim_{\delta W \to 0} \frac{\delta M}{\delta W},$$

где δM есть масса вещества, содержащегося в малом пространстве объемом δW, который стремится к нулю в установленной точке. Плотность вещества обусловливается местным давлением и температурой согласно уравнению состояния для данного вещества, т. е. закон для идеальных газов используется для действительных газов и жидкостей, несмотря на то что в данный момент их соответствие не может быть совершенно четко выражено. Подобно давлению и температуре плотность должна рассматриваться как функция координат точки и в большинстве случаев также как функция времени:

$$\rho = \rho(x, y, z, t).$$

Имеются области анализа, в которых такое изменение плотности играет огромную роль. Например, в метеорологии и океанографии температура и давление значительно меняются по высоте, а в баллистической и сверхзвуковой аэродинамике они изменяются значительно и быстро со временем. Тем не менее есть обширный круг проблем, занимающихся по существу однородными жидкостями, движущимися со скоростями, изменения которых малы по сравнению со скоростью звука и которые располагают периодами, длительными по отношению к времени, необходимому для достижения звуковыми волнами пределов системы. При этих обстоятельствах можно допустить, что плотность не зависит ни от места, ни от времени, т. е. является постоянной.

17. Скорость как функция времени и пространственных координат. Как и в общей механике, временное изменение положения элемента потока (жидкости или газа) является мерой его скорости. Однако поскольку основной особенностью движения жидкости является непрерывное искажение ее элементов, в механике жидкости, даже более чем в механике твердых тел, важно выразить скорость в разных характерных точках. Так, скорость V в любой точке жидкой среды может быть записана как предел, к которому стремится отношение перемещения δs элемента вдоль его пути к соответствующему приращению времени δt, когда последнее стремится к нулю:

$$V = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta s}{\delta t}.$$

С другой точки зрения — той, что особенно соответствует движению жидкостей, скорость в точке может рассматриваться как предел, к которому стремится отношение объема жидкости δQ, проходящей через перпендикулярную поверхность за единицу времени, к площади этой поверхности δA, когда последняя стремится к нулю:

$$V = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta Q}{\delta A}.$$

Так как скорость является векторным количеством, ее величина может быть выражена корнем квадратным из суммы квадра-

тов ее компонентов в трех взаимно перпендикулярных координатных направлениях:

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}\ .$$

Более того, поскольку предполагается, что величина и направление скорости должны в общем изменяться как пространственно, так и во времени, каждый из ее компонентов должен быть записан не только как предельная степень перемещения в соответствующем направлении или как предельный расход потока,

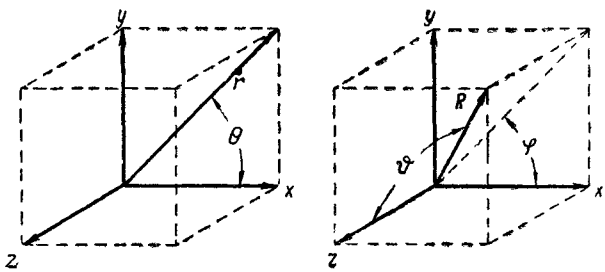


Рис. 3. Соотношение декартовых, цилиндрических и сферических координат

приходящийся на единицу площади перпендикулярной поверхности, но и как функция времени и положения координаты. Например, если выразить через u скорость по направлению оси x, через δx проекцию перемещения δs, через δA_x проекцию площади δA на плоскости, перпендикулярной x, и через δQ_x расход потока через проектируемую площадь, то

$$u = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta x}{\delta t} = \lim_{\delta A_x \to 0} \frac{\delta Q_x}{\delta A_x} = u(x, y, z, t).$$

Существуют, конечно, различные системы координат, пригодные для изучения движения жидкости, каждая из них имеет преимущества, делающие ее удобнее других при определенных обстоятельствах. Та, которую иногда называют естественной координатной системой, относится к пути элемента в точке наблюдения; в ней s обозначает расстояние по направлению движения, n — расстояние по перпендикуляру к линии пути в направлении к местному центру кривизны и m — расстояние по перпендикуляру к местной плоскости кривизны. Чаще всего благодаря симметричности используется декартовая система, хотя ее удобно применять на практике только тогда, когда некоторые из границ потока являются плоскостями. Две другие системы больше подходят к специальным случаям потока; их отношение к декартовой системе показано на рис. 3. Наиболее знакомая из них включает полярные координаты r и θ, которые находят широкое

применение при изучении двухмерного потока; очевидно, что $x=r\cos\theta$ и $y=r\sin\theta$. При добавлении линейной координаты z получается полярно-цилиндрическая система (r, θ, z), показанная на рисунке слева, очень удобная для анализа потока, осесимметричного относительно оси z.

Для осевой симметрии, особенно при шарообразных границах, подходит сферическая система, показанная на рисунке справа. Координатами ее являются R, ϑ, φ, причем ϑ и φ очень похожи на широту $(90^\circ - \vartheta)$ и долготу земли; здесь $x=R\sin\vartheta\cos\varphi$; $y=R\sin\vartheta\sin\varphi$ и $z=R\cos\vartheta$. К сожалению, невозможно разработать полностью последовательную терминологию для цилиндрических и сферических систем; так что их используют в более общих случаях.

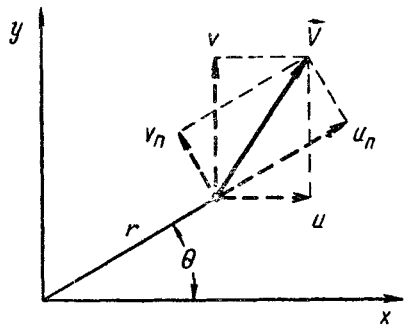


Рис. 4. Компоненты скорости в обозначениях декартовых и полярных координат

В каждой из упомянутых систем координаты точки, очевидно, определены пересечением трех взаимно перпендикулярных поверхностей. Например, в полярно-сферической системе координаты точки определятся пересечением шара радиусом R, конуса с углом при вершине ϑ и меридианной плоскости $\varphi=\text{const}$. Фактически все такие системы могут рассматриваться в унифицированной форме относительно системы общих координат, в которой элемент ограничен рядом взаимно перпендикулярных криволинейных поверхностей. Так как эта система иногда очень удобна, ее развитие и применение детально представлены в приложении.

На следующих страницах обозначение компонентов u, v и w будет использовано в таком порядке в каждой отдельной системе, так как достигаемая таким образом простота важнее неудобств, которые возникают при преобразовании уравнений одной системы в уравнения другой. Предлагается при преобразовании уравнения использовать символы, принятые для декартовой системы, и делать соответствующие надписи в получающейся системе только по ходу преобразования. Из рис. 4 видно, что преобразование, например, двухмерных (декартовых) координат в полярные очень несложно:

$$u_n = u\cos\theta + v\sin\theta;$$

$$v_n = -u\sin\theta + v\cos\theta.$$

18. Уравнения неразрывности. Закон сохранения массы образует основу того, что называют принципом неразрывности. Этот принцип гласит, что интенсивность увеличения массы

жидкости, содержащейся в данном пространстве, должна быть равна разнице между количествами жидкости, втекающими и вытекающими из этого пространства. Предполагая наличие сплошности жидкой среды, можно выразить этот принцип в дифференциальной форме. Примем для примера, что пространственный элемент имеет грани δx, δy и δz, параллельные осям x, y и z, и расположен так, что в его центре тяжести плотность равна ρ и компоненты скорости составляют u, v и w. Если учитывать изменение скорости с расстоянием (рис. 5), расход массы потока

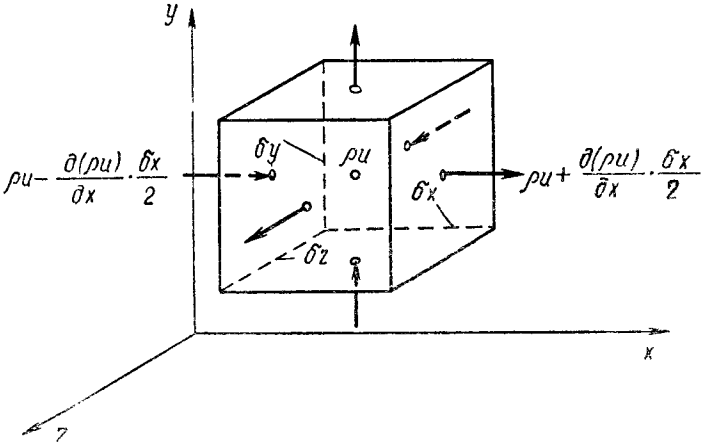


Рис. 5. Схема для вывода уравнения неразрывности

через поверхность, ближайшую к плоскости yz, может быть записан приблизительно следующим образом:

$$\left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2}\right) \delta y \, \delta z.$$

Применяя подобное рассуждение для поверхности, наиболее удаленной от плоскости yz, получим

$$\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2}\right) \delta y \delta z.$$

Чистая величина притока массы в данный элемент через его поверхности является, таким образом, разницей между двумя расходами, т. е. равна

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z.$$

Аналогичные выражения получаются для чистой величины притока через две другие пары параллельных сторон. Поэтому полный избыток массы, поступающей в данный элемент за единицу времени, представляет сумму трех выражений, которая

должна быть равна изменению массы, содержащейся в элементарном объеме, по времени

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]\delta x\delta y\delta z=\frac{\partial(\rho\delta x\delta y\delta z)}{\partial t}\,.$$

Чтобы исключить приближенные значения, полученные при допущении линейных распределений плотности и компонентов скорости, предположим теперь, что пространственный элемент сжимается по направлению к его центру тяжести. В пределе, когда $\delta W=\delta x\delta y\delta z\to 0$, для общего уравнения неразрывности в декартовых координатах получается точное выражение

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\,. \tag{3}$$

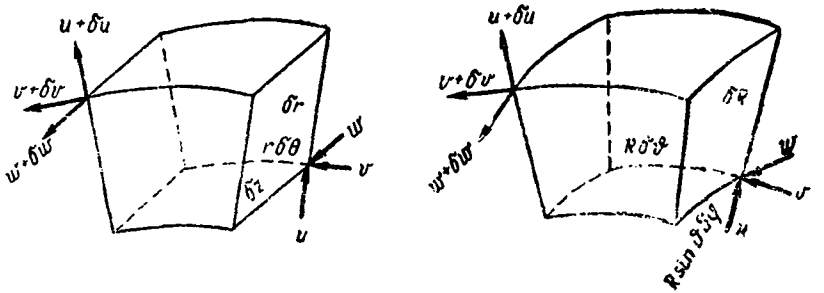


Рис. 6. Пространственные элементы в цилиндрических и сферических координатах

Величина, записанная в левой части этого уравнения, выражает дивергенцию переменных, входящих в состав задачи, в данном случае произведение плотности и вектора скорости $\vec{V}$. Для однородной несжимаемой жидкости плотность не зависит ни от времени, ни от пространства, в этих условиях дивергенция самого вектора скорости должна равняться нулю, т. е. компоненты скорости не могут одновременно увеличиваться по всем трем координатным направлениям:

$$\operatorname{div}\vec{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{4}$$

По существу этим же путем можно следовать при выводе уравнения неразрывности в полярно-цилиндрической и полярно-сферической системах; расходы потока через несколько поверхностей соответствующих элементов (рис. 6) будут выражены просто (без потерь при предельной точности) в форме скоростей в двух противоположных углах. Для цилиндрической системы общее уравнение принимает вид

$$\frac{\partial(\rho ur)}{r\partial r}+\frac{\partial(\rho v)}{r\partial\theta}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\,, \tag{5}$$

в то же время для потока несжимаемой жидкости оно сводится к следующему выражению:

$$\frac{\partial (ur)}{r\partial r} + \frac{\partial v}{r\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

Аналогично выглядит и уравнение для сферической системы

$$\frac{\partial (\rho u R^2)}{R^2 \partial R} + \frac{\partial (\rho v \sin \vartheta)}{R \sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial (\rho w)}{R \sin \vartheta \partial \varphi} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{7}$$

или для условий несжимаемости

$$\frac{\partial (uR^2)}{R^2 \partial R} + \frac{\partial (v \sin \vartheta)}{R \sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial w}{R \sin \vartheta \partial \varphi} = 0. \tag{8}$$

Прежде чем закончить разбор проблемы неразрывности, следует заметить, что уравнение (3) может быть также получено на основании принципа сохранения массы для произвольного объема с помощью математической теоремы, связанной с именами Грина и Гаусса. Эта теорема будет использоваться на страницах данной книги каждый раз, когда встретится необходимость в переводе объемных интегралов в поверхностные, или наоборот. Формулируется эта теорема следующим образом: если $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ и $\partial R/\partial z$ — неразрывные и однозначные функции в односвязной области W, ограниченной замкнутой поверхностью S, тогда

$$\int_S \left(P \frac{\partial x}{\partial n} + Q \frac{\partial y}{\partial n} + R \frac{\partial z}{\partial n} \right) dS = \int_W \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dW,$$

где n представляет расстояние по перпендикуляру наружу от поверхности; $\partial x/\partial n$, $\partial y/\partial n$ и $\partial z/\partial n$ являются направляющими косинусами (обычно обозначаемыми через l, m и n) перпендикуляра с осями координат. Если произведения плотности и компонентов скорости u, v и w заменить на P, Q и R, то будет видно, что интеграл поверхности определяет расход потока массы наружу от поверхности. Для сохранения массы он должен быть равен расходу, на который уменьшается масса, находящаяся в данном пространстве. Если обозначить массу, содержащуюся в единице объема, через ρdW, интенсивность уменьшения ее интеграла по поверхности объема W в свою очередь будет равна объемному интегралу справа:

$$\int_S \left(\rho u \frac{\partial x}{\partial n} + \rho v \frac{\partial y}{\partial n} + \rho w \frac{\partial z}{\partial n} \right) dS = -\frac{d}{dt} \int_W \rho \, dW =$$

$$= \int_W \left[\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} \right] dW.$$

Так как $\frac{d}{dt} \int_W \rho dW = \int_W \frac{d\rho}{dt} dW$ и поскольку эти результаты верны для произвольных объемов, интегралы тоже должны быть

равны, и тогда выражение сводится к интегральной форме уравнения неразрывности.

Пример 3. Определить подходящую форму уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости с переменной плотностью (плотность изменяется от точки к точке, а в результате движения потока время от времени в каждой точке). Плотность бесконечномалых элементов потока остается постоянной по времени.

За основу анализа примем общее уравнение (3). Руководствуясь равенством $xdy=d(xy)-ydx$, можем преобразовать уравнение (3):

$$-\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

Правая часть этого уравнения представляет общую производную плотности по времени (см. п. 24). Так как эта общая производная выражает изменение, испытываемое элементом с течением времени, обе стороны данного уравнения должны быть равны нулю. Следовательно, к этому случаю применимо уравнение (4), так же как к случаю с постоянной плотностью.

Б. Характеристики форм течений

19. Линии тока. Линия, касательная в каждой точке которой в данный момент представляет вектор скорости, называется линией тока. Так как вектор скорости в данной точке указывает направление движения частицы жидкости, проходящей через нее, линия тока характеризует путь всех частиц жидкости, лежащих на ней. Однако тогда как путь частицы жидкости представляет траекторию ее движения с течением времени, линия тока отражает мгновенную картину движения в различных точках. Даже когда направления траектории движения и линии тока совпадают в месте расположения частицы, можно рассчитывать, что где-нибудь они разойдутся из-за изменения скорости как функции времени и расстояния. Только если сами линии тока не изменяются по форме и положению в зависимости от времени, они представляют пути действительного следования отдельных частиц.

Как от траектории движения, так и от линии тока следует отличать так называемую линию отмеченных частиц: линию, которая соединяет все частицы, прошедшие последовательно через данную точку в пространстве. Относительные формы этих трех видов линий для плоской металлической пластинки, движущейся справа налево, показаны на рис. 7. Мгновенные линии тока соответствуют виду течения, существующему в то время, когда металлическая пластинка достигает указанного положения. Траектории движения определяют последующие направления частиц, проходящих фиксированные точки A и B; линии отмеченных частиц соединяют все частицы, которые прошли точки A и B до того, как металлическая пластинка достигла настоящего положения. Действительно, мгновенные линии тока для данного состояния движения могут быть получены путем фотографиро-

вания на пленку с короткой выдержкой хорошо освещенных частиц алюминия или другого отражающего материала, находящегося во взвешенном состоянии или плавающего на поверхности движущейся жидкости. Многочисленные штрихи, которые представляют по существу траектории движения, показывают при этом мгновенное направление движения во всех точках. Если форма течения изменяется со временем, траектория движения может фиксироваться с помощью фотографирования через промежутки времени сравнительно немногих отражающих частиц; при изучении как установившихся, так и неустановившихся речных потоков часто используются плавающие кусочки свечи (па-

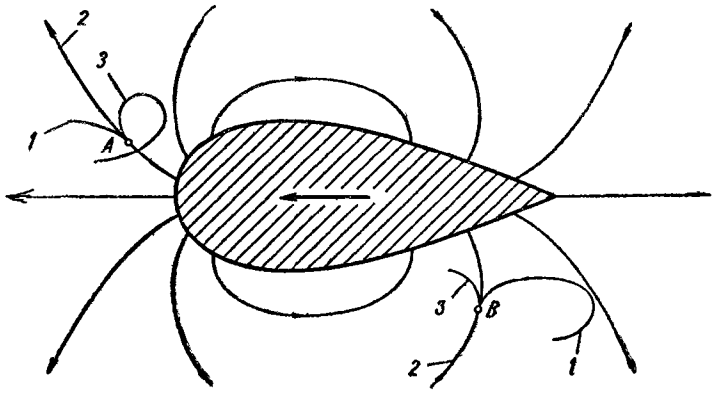


Рис. 7. Линии отмеченных частиц (*1*), линии тока (*2*) и линии траектории движения (*3*)

рафина). Линии отмеченных частиц получаются, когда в данной точке в жидкость непрерывно вводится краска или другое вещество, пригодное для трассирования. Таким образом, беспорядочная нить краски, наблюдаемая на ранних стадиях турбулентности в приборе Рейнольдса, показывает не мгновенное направление движения у всех точек вдоль нее и не направление следования отдельной частицы, а просто положение тех частиц жидкости, которые прошли точку, в которой вводится краска.

Так как перемещения частиц жидкости определяют направления линий тока, проходящих через данные точки, можно считать, что соотношение $d\vec{s} = \vec{V}dt$ включает в обозначение вектора дифференциальное уравнение данной линии тока. Полезнее записать это в форме перемещений в каждом из трех направлений декартовых координат

$$dx = udt; \quad dy = vdt; \quad dz = wdt,$$

которые позволяют выразить дифференциальное уравнение линии тока в любой момент времени t_0 в более приемлемой форме

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t_0)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t_0)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t_0)}. \qquad (9)$$

Дальнейшее изложение в этой части будет посвящено решению этих уравнений (т. е. определению формы течения) для различных условий.

Дифференциальное уравнение траектории движения, применяемое значительно реже, чем уравнение линии тока, также целесообразно использовать при исследовании хотя бы благодаря той ясности, которую оно вносит. В то время как уравнение линии тока описывает ее вид в данный момент, уравнение траектории движения обязательно включает элемент времени:

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} = dt. \qquad (10)$$

Иными словами, t здесь является переменной; начальные условия при $t=t_0$ будут следующие: $x=x_0$, $y=y_0$ и $z=z_0$, и окончательное решение имеет вид $x=x(x_0, y_0, z_0, t)$ и т. д. В сущности, эти два направления представляют два различных метода анализа движения жидкости: один заключается в исследовании явлений в выбранных точках пространства с течением времени, другой рассматривает поведение характерных частиц при движении их от точки к точке.

Несмотря на то, что оба эти метода были впервые предложены шведским математиком Эйлером 200 лет назад и затем усовершенствованы французским математиком Лагранжем четверть века спустя, первый сейчас называется методом Эйлера, а второй — методом Лагранжа.

20. Функции тока Лагранжа и Стокса. Интересно отметить, что Лагранж, с именем которого связан анализ движения частиц, первым решил дифференциальное уравнение линии тока для двухмерного течения:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}.$$

Лагранж доказал, что соответствующее уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

представляет аналитическое условие, при котором $udy=vdx$ будет точным дифференциалом, обозначенным им через $d\psi$. Воспользовавшись получившимся равенством

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = udy - vdx, \qquad (11)$$

Лагранж пришел к следующим соотношениям для компонентов скорости:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \qquad (12)$$

Эти соотношения непосредственно относятся к предыдущему определению уравнения для скорости через интенсивность потока:

$$\lim_{\delta n \to 0} \frac{\delta q}{\delta n} = V = \frac{\partial \psi}{\partial n}.$$

Так как вдоль любой линии тока $d\psi = 0$, то постоянные величины функции тока Лагранжа ψ, очевидно, соответствуют уравнениям отдельных линий тока. Систематический вид течения получается при нанесении на график ряда функций, отличающихся постоянными приращениями (рис. 8).

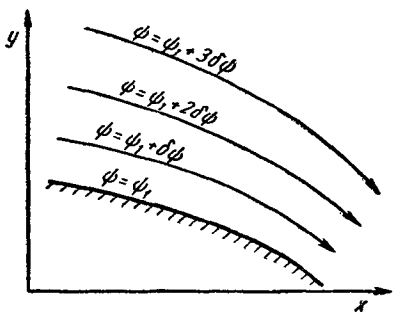


Рис. 8. График функции тока Лагранжа

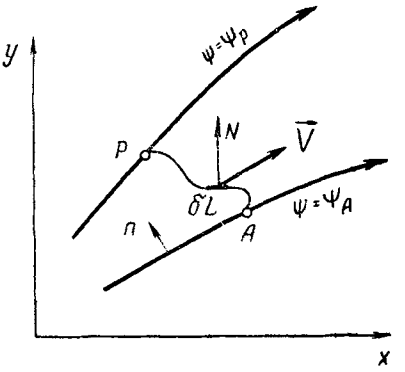


Рис. 9. Функция тока и расход потока

Дополнительное указание, что двухмерная функция тока не только имеет размерность объемного расхода потока на единицу расстояния, перпендикулярного плоскости движения, но и численно равна ему, доказывается на основании следующих соображений. В соответствии с рис. 9 двухмерный расход потока q через любую линию, соединяющую точку A на линии тока ψ_A с любой точкой P на линии тока ψ_P, может быть выражен следующим интегралом:

$$q = \int_A^P \left(u \frac{\partial x}{\partial N} + v \frac{\partial y}{\partial N} \right) dL,$$

где L — расстояние вдоль линии AP от точки A к точке P, а N — расстояние, перпендикулярное линии, откладываемое в направлении течения. Введение производных функции тока из уравнений (12) дает выражение

$$q = \int_A^P \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial N} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial N} \right) dL = \int_A^P \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial L} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial L} \right) dL,$$

из которого видно, что расход между двумя линиями тока во всех последовательных сечениях является просто разницей между соответствующими функциями тока:

$$q = \int_A^P d\psi = \psi_P - \psi_A.$$

Примерно через 60 лет после Лагранжа английский математик Стокс, следуя путем, совершенно отличным от пути Лагранжа, выразил в виде формулы функцию тока для осесимметричного потока. Стокс брал неподвижную A и переменную P точки в осевой плоскости (рис. 10), принимая, что расход через кольцевую поверхность, образованную линией, которая соединяет эти две точки, должен изменяться как функция положения точки P. Эту функцию он обозначил $2\pi\psi$. Ясно, что линии $\psi = \text{const}$ представляют линии тока в осевой плоскости. Затем Стокс выразил компоненты скорости через функции тока, предположив, что точка P передвигается на незначительное расстояние сначала в направлении оси z, а потом в радиальном направлении r. Соответствующие перемещениям δz и δr незначительные изменения расхода через кольцевую поверхность составят:

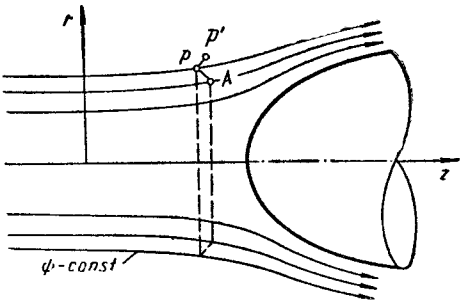


Рис. 10. Функция тока Стокса

$$2\pi r\delta z u = -2\pi\delta\psi; \quad 2\pi r\delta r w = 2\pi\delta\psi,$$

откуда получатся решения для u и w:

$$u = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}; \quad w = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{13}$$

Очевидно, что

$$d\psi = -urdz + wrdr \text{ и } Q = 2\pi(\psi_P - \psi_A). \tag{14}$$

Соответствующие части этих выражений могут применяться в сферической записи, если полярную ось сделать осью симметрии:

$$u = \frac{1}{R^2\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}; \quad v = -\frac{1}{R\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial R}; \tag{15}$$

$$d\psi = uR^2\sin\vartheta d\vartheta - vR\sin\vartheta dR. \tag{16}$$

Для вышеуказанных условий осевой симметрии функция тока Стокса имела размерность объемного расхода. Действительно, так как поверхности $\psi = \text{const}$ образуют семейство коаксиальных поверхностей вращения, увеличение расхода δQ между каждой последовательной парой будет отличаться от увеличения $\delta\psi$ только на постоянную величину 2π.

Следует отметить три самых полезных свойства функций тока Лагранжа и Стокса. Во-первых, они описывают в алгебраической форме геометрию течения. Во-вторых, их пространственные производные могут быть использованы для определения компонентов вектора скорости в любой точке. В-третьих, поскольку при сложении двух потоков вектор скорости результирующего потока является векторной суммой составляющих скоростей, соответствующие функции тока, являясь скалярными величинами, могут просто складываться алгебраически.

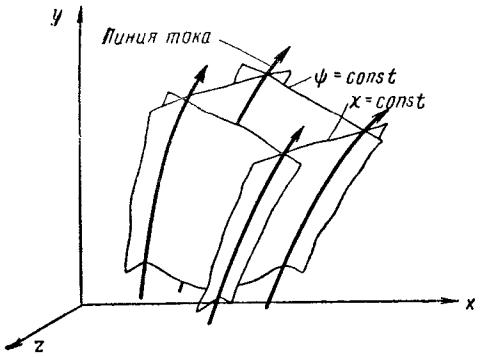


Рис. 11. Схематическое представление линий и поверхностей тока

21. Поверхности тока в трехмерном потоке. При предварительном рассмотрении движения жидкости обычно принято определять трубку тока как элементарный контур, внутри которого проходит расход δQ. Воображаемые стенки трубки обязательно имеют постоянную форму, приданную им теми линиями тока, которые они содержат; в противном случае их поперечные сечения могут иметь любую произвольную форму. В двухмерном потоке, однако, было бы логичнее представить поперечное сечение как четырехугольник, ограниченный двумя параллельными плоскостями и двумя криволинейными поверхностями, пересекающимися вдоль обычных линий тока. Подобным же образом при осесимметричном потоке трубки тока должны быть естественно сформированы элементами коаксиальных поверхностей вращения, при этом линии тока будут представлять собой линии пересечения этих поверхностей с плоскостями, проходящими через ось. Понятие можно обобщить еще более, полагая трубки тока, которые составляют поток произвольного контура, ограниченными двумя различными системами поверхностей, взаимное пересечение которых обязательно произойдет вдоль линий тока (рис. 11).

Рассмотрение так называемого дифференциального уравнения линии тока для трехмерного движения показывает, что в действительности оно представляет два самостоятельных уравнения.

Интегрирование этих уравнений для определения мгновенной геометрии линий тока приводит к двум независимым соотношениям вида:

$$\psi(x, y, z) = F;$$
$$\chi(x, y, z) = G.$$

Каждое из этих соотношений описывает ряд поверхностей, вдоль которых постоянные интегрирования F и G имеют последовательные значения и у взаимного пересечения которых, т. е. у линий тока, представляющих решение дифференциальных уравнений, обе постоянные применяются одновременно. Такие поверхности называются поверхностями тока, а обе функции, определяющие их, являются функциями тока. Поскольку поверхности необязательно имеют определенную ориентировку по отношению к наружной (или внутренней) границе потока, обычно целесообразно (при отсутствии движения границы) одну из поверхностей совмещать с ней. В этом случае границей будет поверхность тока, вдоль которой одна из функций тока ψ постоянна, а следующие друг за другом поверхности того же семейства образуют гнездовой ряд (решетку), характеризуемый различными постоянными величинами функции, последовательно нарастающими соответственно частями потока, проходящими между каждой соседней парой. Другое семейство поверхностей, которое обычно выбирается ортогональным первому, будет пересекаться как с пограничными, так и с последующими членами первичного ряда под прямым углом. Сказанное схематически изображено на рис. 12 продольным видом трубки прямоугольного сечения.

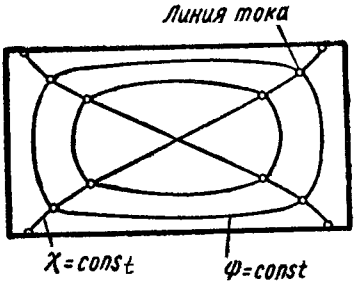


Рис. 12. Пересечение поверхностей тока плоскостью в поперечном сечении

Так как поверхность тока определена как поверхность постоянной функции тока, дифференциалы таких поверхностей могут быть выражены как

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0;$$
$$d\chi = \frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy + \frac{\partial \chi}{\partial z} dz = 0,$$

или, если $dx = u dt$, $dy = v dt$, $dz = w dt$, то можно записать:

$$u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0; \quad u \frac{\partial \chi}{\partial x} + v \frac{\partial \chi}{\partial y} + w \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0.$$

Так как эти уравнения содержат одни и те же компоненты скорости, один из них может быть исключен одновременным решением уравнений, чтобы дать

$$u:v:w = \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial y}\right):$$

$$:\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial z}\right):\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial x}\right).$$

Иначе это отношение может быть выражено как:

$$u = \lambda\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial y}\right);$$

$$v = \lambda\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial z}\right);$$

$$w = \lambda\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial x}\right),$$

где λ есть некоторая функция x, y и z. Этот коэффициент может быть представлен также как функция только ψ и χ и может быть приравнен единице, если жидкость несжимаема. Результатом является ряд соотношений в декартовых координатах между функциями тока и компонентами скорости неразрывной однородной жидкости без каких-либо других ограничений природы потока.

Для вывода очень важного заключения о соотношении между функциями тока и расходом потока через сечение конечной площади рассмотрим поверхность $x=\text{const}$, перерезающую поток, компонент скорости u которого везде перпендикулярен этой поверхности. (Использование обычного обозначения координат позволяет принять поверхность произвольной кривизны, в противном случае вывод был бы таким же.) Так как расход потока через поверхность представляет интеграл от нормального компонента скорости по площади поверхности, то имеем:

$$Q = \int_S\int\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)dy\,dz.$$

Но в теории преобразования переменных при вычислении показано, что

$$\int_S\int\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)dy\,dz = \int_S\int d\psi d\chi.$$

Отсюда

$$Q = \int_{\psi_1}^{\psi_2}\int_{\chi_1}^{\chi_2} d\psi d\chi = (\psi_2 - \psi_1)(\chi_2 - \chi_1),$$

что подтверждает очень важное свойство функций тока: произведение разности значений двух функций тока между противопо-

ложными границами поверхности равно расходу потока через эту поверхность.

Тот факт, что размеры ψ и χ изменяются при переходе от двухмерного к осесимметричному потоку (фактически при изменении ориентации ортогональных семейств поверхностей тока), заставляет интересоваться, каковы будут их размеры в настоящем трехмерном потоке. При таких обстоятельствах может быть лучше считать ψ и χ чисто числовыми функциями и для сохранения однородной размерности ввести эталонные переменные соответствующей размерности. Так, если представить, что ψ' и χ' являются безразмерными функциями координат пространства, умножение их на эталонные расходы потока (или произведение эталонной скорости и квадрата эталонной длины) позволяет записать общие уравнения следующим образом:

$$u = Q\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\cdot\frac{\partial\chi'}{\partial z} - \frac{\partial\psi'}{\partial z}\cdot\frac{\partial\chi'}{\partial y}\right) \text{ и т. д.}$$

Отнесение различных частей размерного расхода $[Q]=[L^3T^{-1}]$ к той или иной функции будет зависеть от ориентации, которая придана двум семействам поверхностей тока для удобства анализа изучаемого течения.

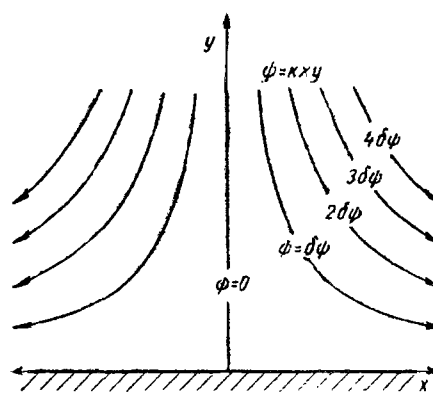
Пример 4. Двухмерный поток, направленный по нормали к границе, характеризуется нормальным компонентом скорости, изменяющимся прямо пропорционально расстоянию от границы. Определить функцию тока, которая устанавливает форму течения.

Рассматриваемое условие выражается уравнением

$$v = -ky \text{ или } \frac{\partial v}{\partial y} = -k.$$

Из уравнения неразрывности $du/dx+dv/dy=0$ путем интегрирования находим, что

$$u = -\int \frac{\partial v}{\partial y}\,dx + C = kx + C_1.$$



По-видимому, здесь имеется точка симметрии, у которой $u=0=v$. С целью упрощения можно допустить, что $x=0$, когда $u=0$, откуда $C_1=0$. Введение соответствующих величин в уравнение Лагранжа для дифференциальной функции тока дает

$$d\psi = u\,dy - v\,dx = k\,(x\,dy + y\,dx),$$

откуда

$$\psi = kxy + C_2.$$

Линии тока, очевидно, имеют форму гипербол. Если значение функции тока для линии тока у оси симметрии и вдоль границы принять равным нулю, постоянная интегрирования исчезает.

B. Кинематика потока

22. Перемещение, деформация, вращение. При компонентах u, v и w скорости $\vec{V}$ в точке (x, y, z) компоненты дифференциала скорости $\delta\vec{V}$ в точке $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$, отстоящей на бесконечно малом расстоянии от первой, составят:

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z;$$

$$\delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\delta z;$$

$$\delta w = \frac{\partial w}{\partial x}\delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\delta z.$$

Если теперь применить систему обозначений Стокса

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad b = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad c = \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$f = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad g = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad h = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y};$$

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

тогда предшествующие уравнения для скорости во второй точке относительно первой могут быть записаны как

$$\delta u = a\delta x + \frac{1}{2}h\delta y + \frac{1}{2}g\delta z + \frac{1}{2}(\eta\delta z - \zeta\delta y);$$

$$\delta v = \frac{1}{2}h\delta x + b\delta y + \frac{1}{2}f\delta z + \frac{1}{2}(\zeta\delta x - \xi\delta z);$$

$$\delta w = \frac{1}{2}g\delta x + \frac{1}{2}f\delta y + c\delta z + \frac{1}{2}(\xi\delta y - \eta\delta x).$$

Для того чтобы показать, что при движении жидкости будет происходить как перемещение, так и изменение формы элементов жидкости, интерпретируем этот результат следующим образом. Три компонента скорости при допущении, что они характеризуют условия в центре элемента (рис. 13), соответствуют скоростям линейного перемещения. Три величины $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial y$ и $\partial w/\partial z$ при умножении на соответствующие расстояния δx, δy и δz между противоположными гранями представляют скорости, при которых соответствующие пары граней расходятся. Отсюда величины a, b и c определяют скорости линейной деформации или растягивания в трех координатных направлениях. Из сравнения с уравнением неразрывности в декартовых обозначениях видно, что жидкость не может подвергаться линейной деформации одного и того же знака по всем трем направлениям, если плотность ее не изменяется в этой точке со временем.

Если в свою очередь градиенты компонентов скорости в поперечных направлениях умножить на соответствующие расстояния между противоположными гранями, например $(\partial u/\partial y)\delta y$ и т. д., результат будет представлять скорости, при которых эти грани движутся касательно по отношению друг к другу. Сами величины таким образом представляют скорости углового перемещения средних линий элемента. Следовательно, в каждой ко-

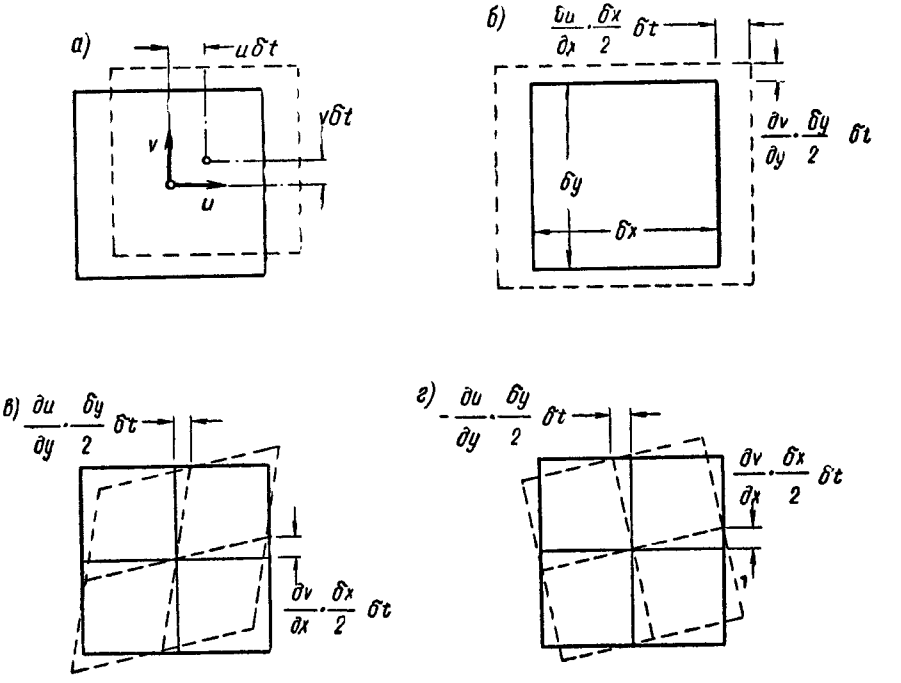


Рис. 13. Схематическое представление перемещения, деформации и вращения
а — перемещение; *б* — линейная деформация; *в* — угловая деформация; *г* — вращение

ординатной плоскости сумма скоростей углового перемещения в данной точке, тех, что выражены величинами f, g или h, соответствует скорости угловой деформации или касательного движения в соответствующей плоскости в этой точке. С другой стороны, средние скорости перемещения средних линий в определенном угловом направлении, т. е. $\xi/2$, $\eta/2$ и $\zeta/2$, представляют собой средние скорости вращения (скорее в мгновенном математическом смысле, чем в представлении о длительном вращении твердого тела) вокруг оси, перпендикулярной каждой из поверхностей. Результирующая компонентов ξ, η и ζ называется вектором завихрения ω, или, в форме векторного анализа, вихрем (или ротором) вектора скорости

$$|\mathrm{rot}\,\vec{V}| = \omega = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\,.$$

Дальнейшее рассмотрение завихрений будет приведено в следующем пункте.

Значительно более обширная картина характеристик деформации в любой точке (x, y, z), непосредственно относящаяся к последующему анализу напряжения, дается так называемой поверхностью деформаций: трехмерной поверхностью, удовлетворяющей соотношению, полученному умножением членов деформации из каждого предыдущего уравнения на соответствующие увеличенные расстояния, и приравниванием их суммы постоянной:

$$a(\delta x)^2 + b(\delta y)^2 + c(\delta z)^2 + f(\delta y \delta z) + g(\delta z \delta x) + h(\delta x \delta y) = \text{const}.$$

Поверхность такого вида перпендикулярна относительной скорости деформации $\delta\vec{V}$ в каждой соседней точке $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$, как показано эллиптическим сечением на рис. 14. (Следует отметить, что по условиям несжимаемости хотя бы одна из скоростей линейной деформации должна быть отрицательной, при таких обстоятельствах не все осевые сечения поверхности деформаций могут быть эллиптическими.) Очевидно, что расположение осей обычных поверхностей деформаций относительно координатных осей зависит от величин f, g и h и что эти две системы осей совпадают, если все измерения угловой деформации равны нулю. Иными словами, три оси поверхности деформаций являются направлениями «чистой», или линейной деформации. В любом другом направлении из заданной точки относительная скорость деформации δV будет отклоняться от линии δr между двумя данными точками и результирующая деформация будет, следовательно, как линейной, так и угловой.

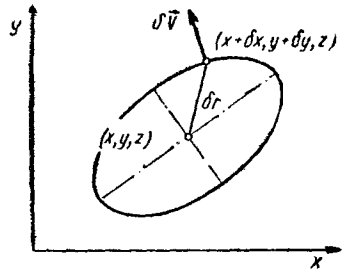


Рис. 14. Сечение поверхности деформаций

23. Завихрение и циркуляция. Математическим понятием, получившим большое применение при анализе движения жидкости, является циркуляция — линейный интеграл от касательного компонента вектора скорости, взятый по всей замкнутой кривой (рис. 15):

$$\Gamma = \oint V_L dL.$$

Положительный результат интегрирования получается при расположении поверхности, окруженной кривой, с левой стороны, как показано на рисунке, если смотреть со стороны внешней

нормали. Если dx, dy и dz представляют проекции элемента кривой dL, циркуляция может быть записана так:

$$\Gamma = \oint_L (udx + vdy + wdz). \qquad (17)$$

Замкнутый контур L должен рассматриваться как граница криволинейной поверхности произвольной формы. На рис. 16

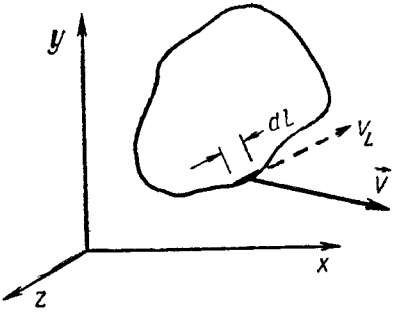


Рис. 15. Линейный интеграл

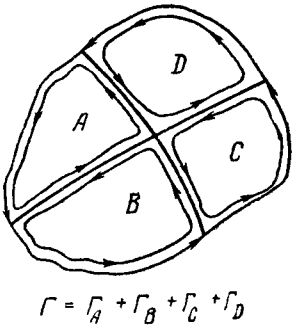


Рис. 16. Циркуляция

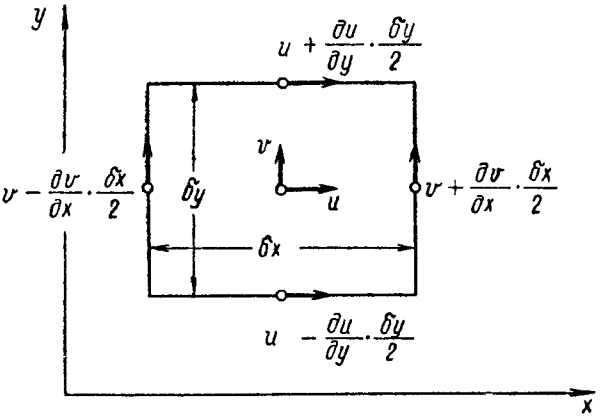


Рис. 17. Скорости на сторонах элементарного четырехугольника

показано, что какова бы ни была ее форма, циркуляция вокруг нее должна равняться сумме циркуляций вокруг элементарных поверхностей, из которых она состоит, так как линейные интегралы вокруг всех внутренних частей исчезают, оставляя только один для ограничивающей кривой.

Циркуляция вокруг элементарного четырехугольника со сторонами, параллельными осям x и y (рис. 17), может быть записана так:

$$\delta\Gamma = \left(u - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\delta y}{2}\right)\delta x + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\delta x}{2}\right)\delta y -$$
$$-\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\delta y}{2}\right)\delta x - \left(v - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\delta x}{2}\right)\delta y,$$

что упрощается до выражения

$$\delta\Gamma = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta x\delta y.$$

Если это выражение для циркуляции разделить на площадь четырехугольника, приняв ее предел стремящимся к нулю, получим

$$\lim_{\delta x\delta y\to 0}\frac{\delta\Gamma}{\delta x\delta y} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \zeta.$$

Очевидно, предельное значение циркуляции на единицу площади вокруг любой кривой должно равняться компоненту вихря вокруг оси, перпендикулярной плоскости циркуляции

$$\lim_{\delta S\to 0}\frac{\delta\Gamma}{\delta S} = \omega_n.$$

Общая математическая теорема, связанная с именами Грина и Стокса, имеет такое же отношение к ограниченной поверхности, какое имеет теорема Гаусса, использованная в связи с принципом неразрывности, к ограниченной области пространства; она выражена через те же члены однозначной функции неразрывности и их производные

$$\oint_L (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \int\int_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial n} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial n} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial n}\right] dS.$$

Левая часть этого равенства при замене P, Q и R на компоненты скорости u, v и w будет напоминать уравнение (17), представляющее циркуляцию вокруг замкнутой кривой L. Правая часть в свою очередь будет являться интегралом нормального компонента вихря по поверхности, ограниченной данной кривой. Иными словами,

$$\Gamma = \int_S \omega_n dS = \int_S \left(\xi\frac{\partial x}{\partial n} + \eta\frac{\partial y}{\partial n} + \zeta\frac{\partial z}{\partial n}\right) dS. \qquad (18)$$

Предыдущие соотношения подобны соответствующим соотношениям для скорости. Как правило, скорость и вихрь имеют много общих свойств. Прежде всего обе величины являются векторными, а из определения ξ, η и ζ видно, что существует следующее выражение, соответствующее уравнению неразрывности:

$$\operatorname{div}\bar{\omega} = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0. \qquad (19)$$

Далее, подобно тому как вектор скорости касается линии тока, можно представить, как вектор завихрения касается вихревой линии в каждой точке; дифференциальное уравнение такой вихревой линии составляет

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}. \tag{20}$$

В таком случае можно допустить, что группа вихревых линий образует вихревую трубку так же, как линии тока образуют трубку тока. Циркуляция по любому поперечному сечению вихревой трубки (рис. 18) соответствует, следовательно, расходу через трубку тока. Трубка тока (если она не имеет форму замкну-

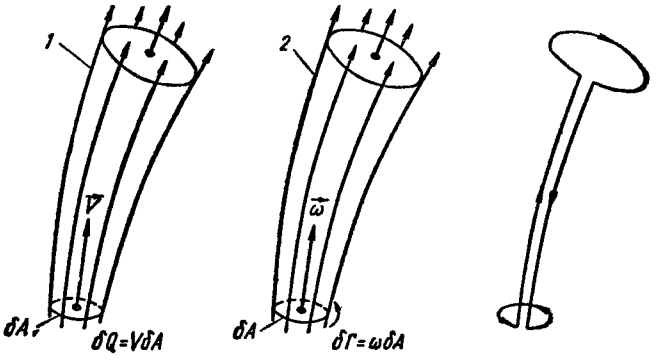


Рис. 18. Сравнение трубки тока с вихревой трубкой

1 — линия тока; *2* — вихревая линия

того кольца) может кончаться только у границы; следовательно, если жидкость несжимаема, расход должен быть одинаковым в любом поперечном сечении; иными словами, площадь поперечного сечения должна изменяться обратно пропорционально изменениям местной скорости потока. То, что вихревая трубка имеет по существу такие же свойства, видно из рис. 18. Если допустить, что замкнутая кривая, показанная справа, нарисована на стенке соседней вихревой трубки, то из определения последней очевидно, что правая часть уравнения (18) должна равняться нулю. Так как составляющие циркуляции по смежным продольным частям кривой взаимно уничтожаются, следовательно циркуляция вокруг двух последовательных поперечных сечений трубки (представленных оставшимися частями кривой) должна быть идентичной. Если, как теперь очевидно, мгновенная циркуляция не может изменяться от сечения к сечению, то не только должны быть обратно пропорциональны завихрение и площадь поперечного сечения вихревой трубки, но и сама трубка может начинаться и кончаться лишь на границе, за исключением такого случая, как кольцо дыма, где трубка вообще не имеет конца.

До сих пор на распределение скорости не накладывалось никаких ограничений (кроме необходимости удовлетворения уравнения неразрывности), распределение завихрений обладает той же степенью свободы. Справедливо, следовательно, предположить, что как скорость может изменяться непрерывно (или даже прерывисто) в потоке, так и завихренность подчинена непрерывным (или прерывистым) изменениям по всей области, занятой потоком. Иногда наоборот поступательное движение жидкости ограничено, во всяком случае местами, до относительно узкого потока; аналогично одна вихревая нить (подобно ядру смерча) может олицетворять единственную часть потока, которая заметно вращается. Так как завихренность выражается через градиенты скорости, любое внезапное изменение в распределении скорости вызывает сгущение завихренности. Так называемые вихревые прослойки образуются в зонах разрыва скоростей, т. е. при взаимодействии потоков с разными скоростями. То, что возникает случайно при существовании таких условий, зависит, конечно, от характера напряжения, соответствующего характеру деформации, и будет рассматриваться в последующих главах этой книги. В настоящий момент просто обращается внимание на очень важное доказательство Гельмгольца (который также указывал на возможность отсутствия конца у вихревой трубки), что действие завихренности системы жидкости может измениться только если деформации, сопровождающей поток, оказывают сопротивление внутренние напряжения.

24. Компоненты ускорения. Символ D/Dt был введен Стоксом для обозначения операций дифференцирования, связанных с движением элемента жидкости. Например, уравнение неразрывности может быть получено в соответствии с выражением

$$\frac{D(\rho W)}{Dt} = 0,$$

которое утверждает, что масса элемента с переменной плотностью ρ и переменным объемом δW не изменяется, как и масса элемента, перемещаемого с течением времени. С другой стороны, можно ожидать, что любое свойство элемента, являющееся функцией пространства и времени, изменяется при движении от точки к точке частично из-за изменения его положения и частично из-за течения времени. Если величина функции в момент времени t, когда элемент находится в точке (x, y, z), составляет $F(x, y, z, t)$, тогда в момент времени $t+\delta t$ при достижении им точки $(x+u\delta t, y+v\delta t, z+w\delta t)$ ее величина будет

$$F(x + u\delta t, y + v\delta t, z + w\delta t, t + \delta t) =$$

$$= F + \frac{\partial F}{\partial x} u\delta t + \frac{\partial F}{\partial y} v\delta t + \frac{\partial F}{\partial z} w\delta t + \frac{\partial F}{\partial t} \delta t.$$

Так как последняя величина может быть выражена и как $F+$ $+(DF/Dt)\,\delta t$, следовательно

$$\frac{DF}{Dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}+w\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Если предположить, что функция $F(x, y, z, t)$ представляет скорость элемента жидкости, тогда величина $D\vec{V}/Dt$ будет определять ускорение, которому он подвергается в определенной точке и в определенный момент процесса течения. Будучи векторной величиной, ускорение может быть записано как

$$\bar{a}=\frac{D\vec{V}}{Dt}$$

со следующими соотношениями для компонентов каждого из трех направлений:

$$a_x=\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z};$$

$$a_y=\frac{Dv}{Dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z};$$

$$a_z=\frac{Dw}{Dt}=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Как можно заметить, введение компонентов завихрения позволяет записать эти выражения в следующем виде:

$$a_x=\frac{\partial u}{\partial t}+w\eta-v\zeta+\frac{\partial (V^2/2)}{\partial x};$$

$$a_y=\frac{\partial v}{\partial t}+u\zeta-w\xi+\frac{\partial (V^2/2)}{\partial y};$$

$$a_z=\frac{\partial w}{\partial t}+v\xi-u\eta+\frac{\partial (V^2/2)}{\partial z}.$$

При использовании обозначений натуральной системы координат (с r радиусом кривизны линии траектории) компонентами ускорения являются

$$a_s=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial (V^2/2)}{\partial s}\quad\text{и}\quad a_n=\frac{V^2}{r}.$$

Однако если линии траектории и линии тока не идентичны, последние описываются гораздо проще. Следовательно, натуральная система координат пожалуй предпочтительнее для установления соотношений линии тока, чем линии траектории. Если предположить, что оси закреплены в определенной точке наблюдения, предыдущие выражения несколько усложняются:

$$a_s=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (V^2/2)}{\partial s};\quad a_n=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{V^2}{r};$$

$$a_m=\frac{\partial w}{\partial t}$$

В обозначениях полярно-цилиндрической системы компоненты приобретают вид:

$$a_r = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + v\frac{\partial u}{r\partial\theta} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r};$$

$$a_\theta = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + v\frac{\partial v}{r\partial\theta} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r};$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + v\frac{\partial w}{r\partial\theta} + w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Наконец, в обозначениях полярно-сферической системы они составляют:

$$a_R = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial R} + v\frac{\partial u}{R\partial\vartheta} + w\frac{\partial u}{R\sin\vartheta\partial\varphi} - \frac{v^2+w^2}{R};$$

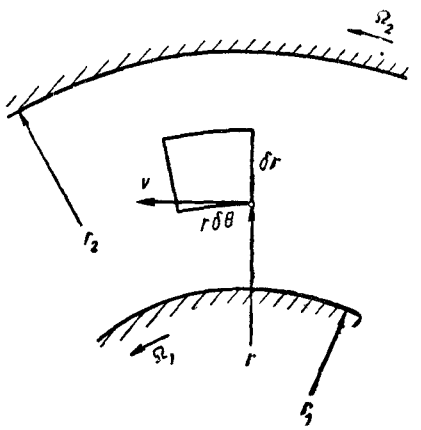
$$a_\vartheta = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial R} + v\frac{\partial v}{R\partial\vartheta} + w\frac{\partial v}{R\sin\vartheta\partial\varphi} + \frac{uv - w^2\operatorname{ctg}\vartheta}{R};$$

$$a_\varphi = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial R} + v\frac{\partial w}{R\partial\vartheta} + w\frac{\partial w}{R\sin\vartheta\partial\varphi} + \frac{wu + vw\operatorname{ctg}\vartheta}{R}.$$

Если система координат обладает скоростью перемещения с компонентами U, V, W и угловой скоростью с компонентами p, q, r, можно показать, что компонент абсолютного ускорения по оси x имеет вид

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + w_r\eta - v_r\zeta + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial V'^2}{\partial x},$$

где $V'^2 = (u-U)^2 + (v-V)^2 + (w-W)^2 + 2[u(yr-zq) + v(zp-xr) + w(xq-yp)]$; u, v и w — компоненты абсолютной скорости жидкости; u_r, v_r, w_r — компоненты скорости жидкости относительно движущейся системы координат, т. е. $u = U + u_r + zq - yr$.



Пример 5. Распределение скорости внутри жидкости, находящейся между двумя коаксиальными цилиндрами радиусом r_1 и r_2, движущимися с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2, имеет вид

$$v(r) = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2}\left[\left(\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2\right) r - r_1^2 r_2^2\left(\Omega_2 - \Omega_1\right)/r\right].$$

Определить завихренность в каждой точке. При каких условиях завихренность будет равна нулю?

В двухмерном полярном обозначении циркуляция вокруг элемента со сторонами $r\delta\theta$ и $(r+\delta r)\delta\theta$ составляет

$$\delta\Gamma = -vr\delta\theta + \left(v + \frac{\partial v}{\partial r}\delta r\right)(r+\delta r)\delta\theta.$$

Отсюда единственный компонент вихря для такого потока будет равен

$$\lim_{\delta r r\delta\theta \to 0} \frac{\delta\Gamma}{\delta r r\delta\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = \zeta.$$

Из заданного распределения скорости находим, что

$$\zeta = 2\,\frac{\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

При условии, что $\zeta = 0$,

$$\Omega_2 r_2^2 = \Omega_1 r_1^2 = C = \frac{\Gamma}{2\pi}.$$

Нулевое завихрение, очевидно, соответствует постоянной циркуляции или тангенциальной скорости, которая обратно пропорциональна радиусу.

Г. Динамика потока

25. Силы, действующие на элемент жидкости. Поскольку компоненты ускорения элемента жидкости выражаются через компоненты действующей силы, отнесенной к единице массы элемента, то в первую очередь необходимо дать ее определение. Существуют три вида силы, которые нужно учитывать: нормальные напряжения, касательные напряжения, вызываемые жидкостью, находящейся в контакте с рассматриваемым элементом, и так называемые массовые силы (в отличие от предыдущих поверхностных сил), такие, как сила тяжести. В обозначениях декартовой системы координат три компонента массовой силы на единицу массы могут быть записаны просто как X, Y и Z. Однако нормальные и касательные напряжения требуют дальнейшего обсуждения.

С этой целью выделен элемент жидкости в форме прямоугольного параллелепипеда (рис. 19) с размерами ребер δx, δy и δz. Интенсивности нормального напряжения, существующего в центре элемента, в трех координатных направлениях обозначены как σ_x, σ_y и σ_z, причем положительные величины указывают на растяжение. Так как касательные напряжения могут действовать в двух прямолинейных направлениях в каждой из трех ортогональных плоскостей, в центре параллелепипеда должны различаться шесть их интенсивностей: τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zy}, τ_{zx} и τ_{xz}. Здесь первый индекс указывает направление нормали к плоскости действия, а второй — направление действия; для согласованности с принципом уравновешенности действия и противодействия они принимаются положительными, если направления внешней нормали и действия оба положительны или оба отрицательны, и отрицательными, если одно из направлений отрицательно, а другое положительно. Теперь с помощью обычных математических действий три интенсивности напряжения в центре каждой из шести граней элемента можно выразить в первом приближении (для трех граней приведены на рисунке).

К счастью, как видно из последующих действий, шесть интенсивностей касательного напряжения могут быть сокращены до трех. Если взять моменты напряжений, ведущих к ускорению элемента под углом относительно проходящей через центр элемента оси, нормальной к плоскости xy, можно увидеть, что

$$(\tau_{xy}\,\delta y\delta z)\,\delta x - (\tau_{yx}\,\delta x\delta z)\,\delta y = \frac{d(\text{угл. мом})}{dt}\,.$$

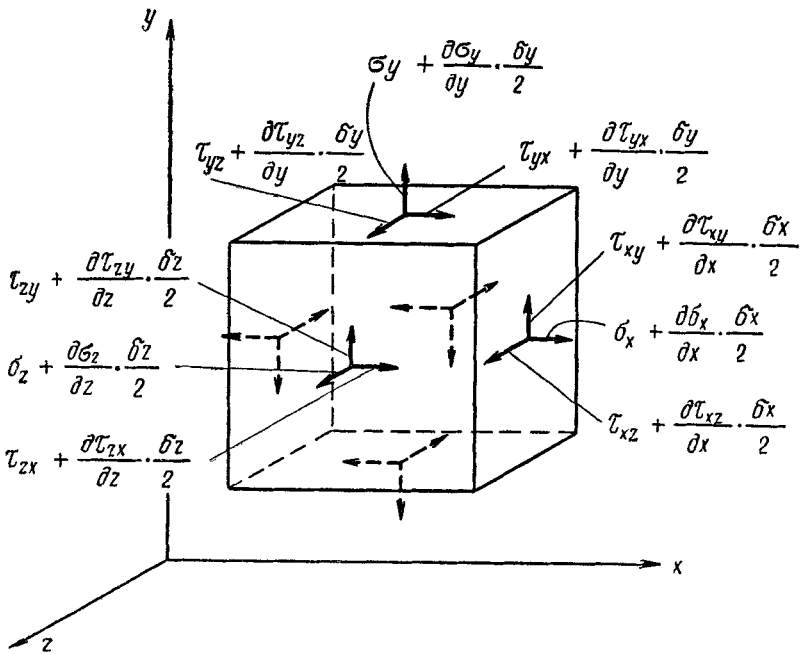


Рис. 19. Нормальные и касательные напряжения

Если стороны элемента уменьшаются, то тот факт, что угловое количество движения элемента включает не только его плотность и объем, но также квадрат радиуса вращательного движения, приводит к тому, что член правой части уравнения достигает нуля быстрее, чем два члена левой части. Следовательно, в пределе эти интенсивности сдвига становятся эквивалентными, как и соответствующие пары напряжений в других двух плоскостях. Поэтому

$$\tau_{xy} = \tau_{yx};\quad \tau_{yz} = \tau_{zy};$$
$$\tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

С другой стороны, следует полагать, что нормальное напряжение зависит частично от давления p, введенного в уравнение состоя-

ния, и частично от отклонения величины напряжения, заложенного в деформации жидкости. Таким образом, можно записать:

$$\sigma_x = -p + \sigma'_x; \quad \sigma_y = -p + \sigma'_y;$$

$$\sigma_z = -p + \sigma'_z.$$

И совсем как скорость деформации жидкости в любом направлении была представлена поверхностью деформаций, перпендикулярной относительному движению около точки, напряжения, соответствующие такой деформации, могут также быть представлены в виде поверхности, перпендикулярной равно-

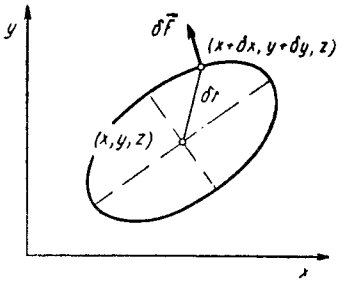


Рис. 20. Сечение поверхности напряжений

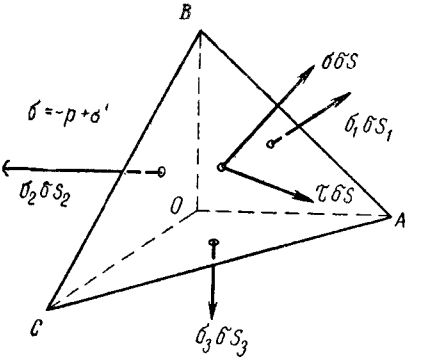


Рис. 21. Основные напряжения по граням тетраэдра

действующей напряжений на плоскости, проходящей через точку. Уравнение этой поверхности имеет вид:

$$\sigma'_x(\delta x)^2 + \sigma'_y(\delta y)^2 + \sigma'_z(\delta z)^2 + 2\tau_{xy}\delta x\delta y + 2\tau_{yz}\delta y\delta z +$$

$$+ 2\tau_{zx}\delta z\delta x = \text{const}.$$

Установлено, по крайней мере для потока однородной несжимаемой жидкости, что поверхности деформаций и напряжений для любой точки геометрически подобны. На рис. 20 показано осевое сечение поверхности напряжений, сравниваемое с сечением поверхности деформаций, изображенным на рис. 14. Видно, что результирующая напряжений на плоскости, перпендикулярной к δr, как правило, наклонена к δr, и поэтому основные оси поверхности напряжений соответствуют только направлениям чистого растяжения или сжатия. Если для большей ясности предположить, что три ортогональные поверхности элементарного тетраэдра составляют прямые углы с основными направлениями (рис. 21), то очевидно, что интенсивность полного нормального напряжения $\sigma = -p + \sigma'$ и касательное напряжение τ на наклонной поверхности элемента будут зависеть как от местного среднего давления, так и от главных напряжений, обуслов-

ленных деформацией. Если (и только в этом случае) касательное напряжение равно нулю, нормальное напряжение буде зависеть только от трех главных напряжений и давления. Действительно, простое уравнение статического равновесия показывает тогда, что все четыре величины идентичны. Поэтому при отсутствии сдвига, обусловленного деформацией, нормальное напряжение на любой плоскости, проходящей через точку должно быть равно местному давлению.

26. Уравнения движения. Если сложить вместе силы, действующие на единицу массы в каждом из координатных направлений, и суммы приравнять к соответствующим компонентам ускорения, получатся следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\\
&\qquad+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right);\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\\
&\qquad+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right);\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+\\
&\qquad+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z'}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

Как видно, эти уравнения не имеют ограничений в отношении сжимаемости, вязкого сдвига, турбулентности и других факторов. Короче говоря, они являются общими уравнениями движения жидкости. Их форма схожа с малоизвестным выводом Сен-Венана, составленным более 100 лет назад, хотя и без указания исторического значения.

Вообще состояние потока не имеет единственного определения, за исключением следующих двух групп установленных условий: 1) начальные условия или поле скоростей в какой-то момент времени t_0; 2) граничные условия или скорости (или напряжения) на всех поверхностях разрыва, твердых или жидких. Как начальные, так и граничные условия могут, очевидно, изменяться по характеру в большой степени, хотя некоторые общие установки здесь могут быть сделаны. Например, у неподвижной границы, представленной уравнением $F(x, y, z)=0$, скорость может быть только касательной, т. е.

$$u\frac{\partial x}{\partial n}+v\frac{\partial y}{\partial n}+w\frac{\partial z}{\partial n}=u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}+w\frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

Если поверхность является единственной поверхностью разрыва, характеризуемой резким изменением скорости между двумя касательными потоками, тогда

$$(u_2 - u_1)\frac{\partial F}{\partial x} + (v_2 - v_1)\frac{\partial F}{\partial y} + (w_2 - w_1)\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Каждый из них фактически является отдельным случаем общего кинематического условия, соответствующего движущейся поверхности $F(x, y, z, t) = 0$. Частицы у поверхности остаются в контакте с ней, их относительная скорость будет иметь исключительно касательное направление. Производная Стокса от F составит

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = 0. \qquad (22)$$

К сожалению, сама неопределенность уравнений движения делает их непригодными для какого-либо использования, кроме получения качественных заключений. Для количественного приложения не только силовые члены должны быть отнесены к конкретным свойствам жидкости и потока, но и многие другие переменные, которые содержатся в трех данных уравнениях, должны быть исключены из рассмотрения одним из способов упрощения. Члены, включающие нормальные и касательные напряжения, а также упрощающие допущения, обычно используемые при таком анализе, будут приведены в следующих главах, посвященных вопросам ламинарного и турбулентного потоков. Для настоящего момента достаточно рассмотреть форму, в которой впервые были выведены эти уравнения около 200 лет назад Эйлером (касательные и нормальные напряжения, сопровождающие деформацию, не учитываются):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x};\\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y};\\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Здесь полезно отметить доказательство Кельвиным теоремы Гельмгольца о постоянстве завихрений в условиях нулевого напряжения, обусловленного деформацией. Предположим, что линия, протянутая от A к P, движется со скоростью жидкости в каждой точке. Если δx, δy и δz являются проекциями элемента этой линии, тогда для каждой из них могут быть записаны соотношения следующего вида:

$$\frac{D(u\delta x)}{Dt} = \frac{Du}{Dt}\delta x + u\frac{D(\delta x)}{Dt}.$$

Полная производная слева обозначает скорость, при которой поток вдоль линии увеличивается. Полная производная Du/Dt справа соответствует левой части системы уравнений (23). Наконец, $D(\delta x)/Dt$ представляет скорость δu, при которой концы элемента расходятся, т. е. линейную деформацию. При подстановке соответственных величин, добавлении трех уравнений и допущении, что X, Y и Z могут быть выведены из потенциала Ω (потенциальная энергия на единицу массы), получим

$$\frac{D}{Dt}(u\delta x + v\delta y + w\delta z) = -\Omega - \frac{\delta p}{\rho} + u\delta u + v\delta v + w\delta w.$$

При условии, что ρ зависит только от p, можно проинтегрировать это выражение от A до P:

$$\frac{D}{Dt}\int_A^P (u\delta x + v\delta y + w\delta z) = \left[-\Omega - \int \frac{\delta p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right]_A^P.$$

Очевидно, скорость, при которой линейный интеграл в левой части увеличивается по мере того, как линия увлекается жидкостью, будет зависеть от разности числовых величин внутри скобок между двумя конечными точками. Если, следуя по замкнутой кривой, точка P совпадает с точкой A, эта разность будет равняться нулю, что дает

$$\frac{D}{Dt}\oint (u\delta x + v\delta y + w\delta z) = 0.$$

Иными словами, циркуляция вокруг любой замкнутой кривой, движущейся с жидкостью, при данных условиях всегда будет оставаться одинаковой. Отсюда следует, что при отсутствии напряжений, обусловленных деформацией, завихрение любого элемента жидкости не может изменяться со временем.

Если при тех же условиях первое из уравнений Эйлера написать в обозначениях натуральной системы координат (или если оси декартовой системы расположить так, чтобы ось x соответствовала направлению движения s), тогда u будет представлять величину вектора скорости и уравнение будет сведено к следующему виду:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Omega\right) = 0.$$

Таким образом, сумма B членов в скобках будет изменяться по длине любой линии тока только в случае, если сама скорость изменяется со временем. Если скорость не зависит от времени, а плотность является функцией только давления, то

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \Omega = f(t). \qquad (24)$$

Даже в случае установившегося течения эта сумма из трех членов должна рассматриваться как функция времени, поскольку по существу только скорость не зависит от времени, т. е. общее давление на систему течения будет все же изменяться от момента к моменту (как в водопроводном туннеле переменного давления), хотя это изменение и не будет влиять на общую картину движения. Предыдущее соотношение, называемое уравнением Даниила Бернулли, в действительности впервые было выведено Эйлером.

Уравнения Эйлера, записанные через компоненты вихря и величину вектора скорости, имеют вид:

$$w\eta - v\zeta = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Omega\right);$$

$$u\zeta - w\xi = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Omega\right);$$

$$v\xi - u\eta = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Omega\right).$$

Ввиду симметричности входящих в эти уравнения компонентов вихря и скорости ранее обоснованная возможность интегрирования их вдоль линий тока остается справедливой и для вихревых линий. Иными словами, уравнение Бернулли применимо ко всем точкам поверхности тока, составленной из двух пересекающихся семейств линий тока и вихревых линий. Однако в общем случае уравнение (24) применимо только тогда, когда все левые части вышеприведенных уравнений равны нулю. Это условие выполняется, если вихревые линии и линии тока совпадают — явление, известное под названием течения Белтрами — Громека, которое, по-видимому, реализуется только при неустановившемся течении. С другой стороны, как показал сам Эйлер, если имеем потенциальное течение, то все компоненты вихря равны нулю, что также обусловливает исчезновение левых частей уравнений. Таким образом, уравнение Бернулли применимо преимущественно к безвихревому потоку, подробное рассмотрение которого можно найти в следующей главе. Из выражения, данного в п. 24 для ускорения относительно подвижных координат, видно, что уравнение (24) также применимо в случае, если V^2 заменяется V'^2.

27. Уравнения количества движения и энергии. Если каждый член в одном из уравнений движения умножить на плотность, то в левой части уравнения получится изменение количества движения на единицу объема и в единицу времени, а в правой части уравнения — соответствующий импульс на единицу объема и единицу времени. Если переменные члены проинтегрировать затем по объему W принятой к рассмотрению движущейся жидкости, то в результате получим уравнение изменения количества движения жидкости в единицу времени и обусловли-

вающего его импульса, также отнесенного к единице времени:

$$\int_W \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)dW=\int_W \rho X dW-\int_W \frac{\partial p}{\partial x}\,dW+$$

$$+\int_W\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)dW.$$

Подынтегральное выражение в левой части может быть переписано в следующем виде:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho uw)}{\partial z}-u\frac{\partial \rho}{\partial t}-u\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}-$$

$$-u\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}-u\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}.$$

Отрицательные члены в силу уравнения неразрывности очевидно могут быть опущены. Интеграл от первой частной производной может быть записан как полная производная от объемного интеграла. Объемный интеграл от остающихся членов количества движения, равным образом интегралы от членов напряжения могут быть преобразованы в поверхностные интегралы по формуле Гаусса, введенной при выводе уравнения неразрывности. Проделав все это, получим выражение для соотношения между количеством движения и импульсом действующей силы:

$$\frac{d}{dt}\int_W \rho u dW+\int_S \rho u\left(u\frac{\partial x}{\partial n}+v\frac{\partial y}{\partial n}+w\frac{\partial z}{\partial n}\right)dS=\int_W \rho X dW-$$

$$-\int_S p\frac{\partial x}{\partial n}\,dS+\int_S\left(\sigma'_x\frac{\partial x}{\partial n}+\tau_{yx}\frac{\partial y}{\partial n}+\tau_{zx}\frac{\partial z}{\partial n}\right)dS. \qquad (25)$$

Рассмотрим некоторые особенности этого соотношения. Во-первых, это выражение относится только к одному координатному направлению; иными словами, количество движения является векторной величиной и его общее изменение представляется векторной суммой их трех компонентов. Во-вторых, полное изменение количества движения, обусловливаемое конвекцией, включенное в поверхностный интеграл в левой части, представляет чистый перенос количества движения потоком из области, первоначально занимаемой жидкостью в рассматриваемом объеме. В-третьих, суммарный импульс, обусловливаемый нормальными и касательными напряжениями, поддается выражению исключительно через напряжения, возникающие на внешней поверхности области, — внутренние напряжения на соседних элементах взаимно уничтожаются.

Для получения сопоставимого соотношения в членах работы и энергии, представляющих скалярные величины, необходимо сначала умножить каждое уравнение движения на плотность и на соответствующий компонент скорости, а затем все три сложить. (Для простоты величина $-p+\sigma'$ заменяется на σ.) После выражения суммы квадратов компонентов скорости через квадрат векторной величины интегрирование по рассматриваемому объему движущейся жидкости приводит к следующему уравнению:

$$\int_W \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial V^2}{\partial t}+u\frac{\partial V^2}{\partial x}+v\frac{\partial V^2}{\partial y}+w\frac{\partial V^2}{\partial z}\right)dW=\int_W \rho\,(uX+vY+wZ)dW+$$

$$+\int_W\left[u\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)+v\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)+\right.$$

$$\left.+w\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\right)\right]dW.$$

Первый интеграл представляет, очевидно, скорость изменения кинетической энергии

$$\frac{D}{Dt}\int_W \frac{\rho V^2}{2}\,dW.$$

Объемные силы могут быть выражены подобным же образом, если принять, что они составляют потенциал Ω и что эта величина не изменяется со временем, т. е. $\partial\Omega/\partial t=0$; таким образом, поскольку масса ρdW движущегося элемента остается постоянной, скорость изменения потенциальной энергии выражается как

$$-\int_W \rho\,(uX+vY+wZ)dW=\int_W \rho\left(u\frac{\partial\Omega}{\partial x}+v\frac{\partial\Omega}{\partial y}+w\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)dW=$$

$$=\int_W \rho\frac{D\Omega}{Dt}\,dW=\frac{D}{Dt}\int_W \rho\Omega dW.$$

Введение этих членов в предыдущее уравнение дает

$$\frac{D}{Dt}\int_W\left(\frac{\rho V^2}{2}+\rho\Omega\right)dW=\int_W\left[u\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)+\right.$$

$$\left.+v\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)+w\left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\right)\right]dW.$$

Это уравнение представляет собой принцип сохранения механической энергии, поскольку оно выражает скорость, с которой изменяется энергия рассматриваемого объема жидкости, выполняя определенную работу, соответствующую этому изменению энергии.

Здесь следует отметить, что работа, необходимая для изменения механической энергии жидкости, необязательно представляет изменение полного запаса энергии, за счет которого производится работа нормальными и касательными напряжениями. Выражение для изменения полного запаса энергии получается умножением каждого напряжения на шести гранях элемента, изображенного на рис. 19, на соответствующий компонент скорости (учитывая изменения скорости с изменением интенсивности напряжения при изменении расстояния от центра тяжести) и сложением этих произведений с учетом их знаков. Скорость изменения полного запаса энергии, отнесенного к единице объема, представится любым из следующих выражений:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_x + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{yx} + v\sigma_y + w\tau_{yz}) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}(u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\sigma_z) = u\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right) +$$
$$+ v\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right) + w\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\right) +$$
$$+ \sigma_x a + \sigma_y b + \sigma_z c + \tau_{yz} f + \tau_{zx} g + \tau_{xy} h.$$

Работа, совершаемая внутри жидкости, состоит из двух частей: одна из них затрачивается на изменение энергии жидкости, вторая требуется для выполнения линейных и угловых деформаций элементов жидкости. Первая, очевидно, является частью консервативной системы. Часть второй также может рассматриваться как консервативная, если работа давления $p=\sigma'$—σ при эластичном сжатии представляет вид потенциальной энергии. Из теории эластичности имеем:

$$\rho\frac{dE}{dt} = -p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

где E — энергия эластичности, отнесенная к единице массы.

Остающиеся члены в уравнении энергии, выражающие работу, затрачиваемую на деформацию жидкости, могут рассматриваться как диссипативные:

$$\sigma'_x a + \sigma'_y b + \sigma'_z c + \tau_{yz} f + \tau_{zx} g + \tau_{xy} h.$$

Если эти произвольно записанные количества ввести в начальное уравнение работа — энергия и преобразовать соответствующие объемные интегралы в поверхностные, то получим основное уравнение для работы — энергии

$$\frac{d}{dt}\int_W \left(\frac{\rho V^2}{2} + \rho\Omega + \rho E\right) dW + \int_S \frac{\rho V^2}{2}\left(u\frac{\partial x}{\partial n} + v\frac{\partial y}{\partial n} + w\frac{\partial z}{\partial n}\right) dS =$$
$$= \int_S \left[(u\sigma_x + v\tau_{xy} + w\tau_{xz})\frac{\partial x}{\partial n} + (u\tau_{yx} + v\sigma_y + w\tau_{yz})\frac{\partial y}{\partial n} +\right.$$

$$+(u\tau_{zx}+v\tau_{zy}+w\sigma_z)\frac{\partial z}{\partial n}\Big]dS-\int\limits_W\Big[\sigma_x'\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_y'\frac{\partial v}{\partial y}+\sigma_z'\frac{\partial w}{\partial z}+$$

$$+\tau_{yz}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\tau_{zx}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\tau_{xy}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big]dW. \quad (26)$$

Следует подчеркнуть ту особенность этого уравнения, что в него входят скалярные, а не векторные величины. Конвективный член, как и в уравнении количества движения, превращен в выражение чистого притока изучаемой субстанции — в данном случае кинетической энергии — из рассматриваемой области. Члены, выражающие напряжения, также сгруппированы в поверхностный интеграл, который представляет здесь общий запас энергии, за счет которой совершается работа в рассматриваемой области внешними напряжениями — частью на изменения кинетической и потенциальной энергии жидкости и частью на совершение неэластичных деформаций. Сопротивление последнему действию входит в состав конечного объемного интеграла, который является мерой интенсивности диссипации механической энергии, т. е. мерой интенсивности ее преобразования в тепло.

Пример 6. Масло вытекает из бака по горизонтальной трубе диаметром D с расходом Q под напором H. Поток — безвихревой при входе в трубу, при выходе из нее характеризуется параболической эпюрой скоростей. Сравнить силы, затрачиваемые на перестройку эпюры скоростей, с силами, необходимыми для преодоления трения на стенках трубы.

Соответствующие члены уравнения (25) составляют

$$\rho\int\limits_{A_2}u^2\,dA-\rho\int\limits_{A_1}u^2\,dA=\int\limits_{A_1}p dA+\int\limits_S\tau dS.$$

Отсюда во втором сечении, где $u=u_{\text{макс}}(1-4r^2/D^2)$,

$$\rho\int\limits_{A_2}u^2\,dA=2\pi\rho u_{\text{макс}}^2\int\limits_0^{D/2}(1-4r^2/D^2)^2\,rdr=\frac{\rho}{3}\,u_{\text{макс}}^2\,\frac{\pi D^2}{4}=1{,}33\,\frac{\rho Q^2}{\pi D^2/4}\,.$$

В первом сечении $\rho\int\limits_A u^2dA=\rho Q^2/(\pi D^2/4)$. На основании уравнения энергии, кроме того, можно допустить с достаточным приближением, что $\gamma H=p_1+\rho u_1^2/2$. Величина $\int\limits_S\pi dS$, представляющая полный сдвиг на стенках, определяется с помощью вычисления других величин и затем сравнивается с $0{,}33\rho Q^2/(\pi D^2/4)$—силой, затрачиваемой на перестройку эпюры скоростей.

ПРИНЦИПЫ БЕЗВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ

А. Основы потенциальной теории

28. Характеристики потенциальных полей. Во многих случаях движения жидкости форма линий тока в большой степени соответствует форме линий поля в геометрически подобных системах, рассматриваемых в разделе математики, известном под названием потенциальной теории. Когда это соответствие является достаточно точным, аналитическая техника потенциальной теории может быть использована для значительного облегчения изучения этого движения; на этой связи построена структура классической гидродинамики. Так как одним из основных требований потенциальной теории является равенство нулю величины, соответствующей вращению, то движение, удовлетворяющее этому требованию, обычно называется безвихревым.

Примерами потоков, в которых допущение потенциальности оказывается особенно полезным, являются течения, взаимодействующие с насадками, водосливами, затворами шлюзов и закруглениями трубопроводов со сжатием, а также случаи обтекания предметов, движущихся относительно потока жидкости. Замечательно, что все эти системы имеют две общие характеристики: 1) движение жидкости, начинающееся из состояния покоя или от малой скорости, так быстро ускоряется, что завихрения неощутимы, 2) число Рейнольдса обычно настолько велико, что влиянием вязкости можно пренебречь. Таким образом, потенциальность обычно связывают с отсутствием вязкости, хотя, как будет показано далее, это необязательное требование.

Однако даже при благоприятных условиях поток, связанный с твердыми границами, не может оставаться безвихревым в непосредственной близости от границы. Несмотря на допустимость пренебрежения вязкостью в основном поле потока, сдвиг между жидкостью и твердым телом вдоль их контактной поверхности невозможен. Следовательно, в пограничной зоне будут образовываться завихрения, воздействие которых на слой жидкости вызовет в зависимости от геометрии и числа Рейнольдса потока незначительное возмущение или сильное волнение, распространяющееся до тех пор, пока оно не охватит всего потока. В первом случае допущение потенциальности потока приводит к положительным результатам всюду, кроме пограничной зоны, а в последнем поток может быть проанализирован в соответствии с методами, изложенными в главе VII.

Наряду с приложением к проблемам, связанным с твердыми границами, потенциальная теория может быть использована так-

же для изучения систем со свободными поверхностями или поверхностями постоянного давления, таких, как гравитационные волны, струи свободного очертания и кавитационные потоки. Подобно вышеуказанным случаям эти системы отличаются начальным отсутствием завихрений и пренебрежимым влиянием вязкости. Как это ни парадоксально, потенциальная теория чрезвычайно полезна для анализа фильтрации жидкости через проницаемую среду при условии, что действие вязкости преобладает, т. е. что поток ламинарен. Но вообще следует быть осторожным при обосновании допустимости потенциальности для той или иной частной системы. Даже из этого неполного перечня полезных применений очевидно, что понятие безвихревого потока играет важную роль в механике жидкости.

Поскольку, как показано в главе II, завихрения пропорциональны вращению, потенциальность эквивалентна нулевому завихрению. Так как вектор исчезает только в случае, если каждый компонент его равен нулю, основное условие потенциальности может быть описано математически путем приравнивания нулю каждого компонента вектора вихря. В результате получим:

$$\frac{dw}{dy} = \frac{dv}{dz}; \quad \frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx}; \quad \frac{dv}{dx} = \frac{du}{dy}. \tag{27}$$

Эти уравнения необходимы и достаточны для установления безвихревого потока, так как все другие характеристики этого движения могут быть выведены из них.

Потенциальная теория получила свое название по скалярной функции или потенциалу $\phi(x, y, z, t)$, который служит для полного описания определенного ряда условий в пространстве и времени. Хотя потенциал является скалярной величиной, векторная функция, называемая его градиентом, может быть выведена из потенциала путем частного дифференцирования. При любой системе координат компонент градиента в любом направлении равен скорости изменения потенциала в этом направлении. Если положительный градиент потенциала ϕ представляется как скорость потока, тогда ее выражения в прямоугольной, цилиндрической и сферической системах координат имеют следующий вид:

Система	u	v	w
Прямоугольная	$\frac{\partial\phi}{\partial x}$	$\frac{\partial\phi}{\partial y}$	$\frac{\partial\phi}{\partial z}$
Цилиндрическая	$\frac{\partial\phi}{\partial r}$	$\frac{\partial\phi}{r\partial\theta}$	$\frac{\partial\phi}{\partial z}$
Сферическая	$\frac{\partial\phi}{\partial R}$	$\frac{\partial\phi}{R\partial\vartheta}$	$\frac{\partial\phi}{R\sin\vartheta\partial\varphi}$

(28)

Из этих наглядных уравнений видно, что установление потенциальности уравнениями (27) эквивалентно допущению математического существования потенциала. Так как величина сложной частной производной второго порядка зависит от пути дифференцирования, первое из уравнений (27) выглядит тождеством, если допустимо существование потенциала:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Подобные отношения существуют и между двумя остальными уравнениями.

Хотя гидродинамический потенциал определен в форме скорости, потенциалы являются в основном абстрактными математическими величинами и, следовательно, не имеют внутреннего физического смысла. Наиболее простые и полезные из остальных интерпретаций показаны на следующих примерах.

а. Функция ϕ может быть представлена как постоянный электрический потенциал E в любой точке однородного проводника проводимостью k. Отрицательный градиент здесь пропорционален потоку электрических зарядов:

$$I = -k\frac{\partial E}{\partial s}.$$

В этом случае потенциал является измеряемой величиной.

б. Если функция ϕ представлена как постоянное распределение температуры Θ в однородном термическом проводнике с теплопроводностью k, тогда отрицательный градиент пропорционален вектору H, олицетворяющему направленный тепловой поток:

$$H = -k\frac{\partial \Theta}{\partial s}.$$

Как и в предыдущем случае, потенциал представляет величину, которая может быть непосредственно измерена.

в. Градиент может быть пропорционален также вектору, представляющему собой отнесенную к единице массы силу F, действующую на какую-то точку в пространстве. Здесь ϕ есть работа, затраченная на перенесение единицы массы некоторой субстанции из бесконечности в данную точку и увеличивающая таким образом его потенциальную энергию. В этом случае потенциал Ω (введенный в п. 26) не может быть измерен непосредственно, но его форма может быть установлена по измерениям сил, оказывающих давление на вещество в данном поле (необходимо од-

но интегрирование), или по измерениям скорости или положения вещества, на которое действует поле:

$$F = -G\frac{\partial \Omega}{\partial s}.$$

Гравитационная постоянная G считается независимой от любого известного влияния.

г. Для анализа задач, рассматривающих ламинарный поток через зернистую среду при условии, что сечение в целом больше площади поперечных сечений самих зерен, удобно определять скорость как расход на единицу площади. Тогда в качестве потенциала может быть принят пьезометрический напор, и закон Дарси гласит, что скорость пропорциональна отрицательному градиенту:

$$V = -k\frac{\partial h}{\partial s}.$$

Постоянная k называется проницаемостью среды, а s, как обычно, обозначает расстояние в направлении линии тока.

Свойства, характеризующие безвихревой поток, могут быть выведены из основного определения простой заменой уравнений (27) или (28) на соответствующие уравнения из главы II. Примером может служить следующий дифференциал:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}\,dz.$$

Ввиду того, что этот дифференциал является точным, его непосредственное интегрирование может дать разность потенциалов между любыми двумя точками A и P:

$$\phi_P - \phi_A = \int_A^P \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}\,dz\right).$$

Эта разность не зависит от выбранной траектории, если функция ϕ, получающаяся при интегрировании, однозначна. Такой случай имеет место, когда область, в которой поток потенциален, односвязна, т. е. так сформирована, что все траектории, соединяющие любые две точки ее, совпадают при непрерывной деформации, не покидая ее пределов (например, внутренняя область шара односвязна, а внутренняя область тора не односвязна). Если подставить вместо градиента скорость в соответствии с определениями уравнений (28) и сделать так, чтобы точка P совпала с точкой A после завершения замкнутого пути, получающийся интеграл будет выражать ту самую циркуляцию, которая была определена в главе II:

$$\oint (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \phi_P - \phi_P = 0.$$

Таким образом, циркуляция в односвязной области безвихревого потока всегда равна нулю.

Если допустить, что жидкость несжимаема, тогда подстановка компонентов скорости из уравнений (28) в уравнение неразрывности приводит к равенству, которое обычно называют уравнением Лапласа. Для обозначения действий, представленных уравнением Лапласа, удобно использовать символ ∇^2, который принимает следующий вид соответственно в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат:

$$\left.\begin{aligned}
\nabla^2\varphi &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0;\\
\nabla^2\varphi &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{dz^2} = 0;\\
\nabla^2\varphi &= \frac{1}{R^2}\cdot\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right) +\\
&\quad + \frac{1}{R^2\sin^2\vartheta}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi^2} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Решения уравнения Лапласа известны как гармонические функции; любое решение, очевидно, представляет потенциал потока. Если потенциал гармоничен всюду, кроме некоторых точек, последние называются особыми точками.

Изменяя порядок дифференцирования в случае производной третьего порядка, можно показать, что если функция гармонична в данной точке, тогда все ее производные относительно декартовой системы координат также гармоничны в этой точке. Например, рассмотрим производную $\partial\varphi/\partial x$, когда φ гармонична. Подставляя эту производную в левую часть уравнения Лапласа, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) = 0.$$

Следовательно, все частные производные также являются гармоническими.

Существует несколько функций, которые легко проявляют свою гармоничность: 1, x, yz, $x^2 - y^2$ и $1/R$. Кроме того, если φ_1 и φ_2 гармонические функции, тогда гармоническими являются также $C\varphi_1$, $\varphi_1+\varphi_2$ и $C+\varphi_1$, где C — постоянная. В дополнение к этим функциям могут быть найдены подобные им путем решения уравнения Лапласа в любой из его разнообразных форм с использованием методов дифференциальных уравнений в частных производных.

Поскольку все гармонические функции неразрывны, в пространстве могут быть проведены поверхности равного потенциа-

ла. Если какая-нибудь линия является касательной к одной из этих поверхностей, тогда компонент градиента вдоль этой линии должен равняться нулю в точке касания; вектор градента и, следовательно, скорость должны быть нормальны ко всем эквипотенциальным поверхностям. Таким образом, очевидно, что эквипотенциальные поверхности образуют в пространстве ортогональную систему с поверхностями тока, которые всюду касательны к скорости. Это предполагает возможность выведения математического выражения для функции тока в области, где форма потенциальной функции может быть определена другим путем. Как будет показано далее, это соответствует действительности, и многие способы изучения безвихревого потока основаны на использовании функций тока, установленных с помощью соответствующих потенциалов.

Интересно отметить, что в случае двухмерного безвихревого потока функция тока также удовлетворяет уравнению Лапласа; это легко можно доказать, составляя из компонентов скорости по уравнениям (12) единственное выражение для двухмерного безвихревого потока:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

Последнее равенство непосредственно говорит о том, что двухмерный гармонический потенциал также выражает функцию тока для аналогичного потока; эта мысль будет изучена более полно в следующей главе.

Подобное же уравнение может быть выведено для функции тока безвихревого аксиально симметричного потока. В случае, если поперечный компонент скорости равен нулю, кинематические соотношения могут быть объединены в форме функции тока Стокса, данной в п. 20, следующим образом:

$$u = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad v = 0; \quad w = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r};$$

$$r\left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

Сравнение со вторым уравнением из системы (29) показывает, что в осесимметричном безвихревом потоке уравнение Лапласа не удовлетворяется функцией тока, разница имеет отрицательный знак у членов первого порядка.

Как уже было указано в главе II, уравнения Эйлера для безвихревого потока могут быть легко проинтегрированы. Например, первое уравнение из системы (23) может быть преобразовано путем введения следующих определяющих уравнений потенциальной теории:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right).$$

Нет необходимости допускать, что любая частная форма уравнения неразрывности приемлема для этих уравнений, так как потенциал ϕ не обязательно будет гармоничным. Если предположить, что потенциал массовых сил Ω такой же, как в предыдущей главе, тогда преобразованное уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho} + \Omega\right).$$

С учетом подобных уравнений для других направлений окончательное интегрирование приводит к следующему выражению:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \Omega = f(t). \tag{30}$$

Если на жидкость накладывается дополнительное ограничение несжимаемости, уравнение (30) несколько изменяется:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Omega = f(t).$$

Из пп. 24 и 26 видно, что это уравнение также пригодно для движущейся системы координат, если V^2 заменить на V'^2.

Поскольку скорость в любом случае зависит только от пространственного градиента ϕ, взаимосвязь между скоростью и давлением не меняется, если в потенциальную функцию включается произвольная функция времени. Единственной важной массовой силой, действующей на поток, обычно является сила тяжести, так что $\Omega = gz$, где значение z положительно при направлении вверх. С этими подстановками данное соотношение может быть записано в форме общеизвестного уравнения Бернулли:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = -\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial t}. \tag{31}$$

Если поток установившийся и гидростатическая нагрузка не изменяется со временем, тогда произвольная функция должна быть постоянной и может быть вычислена при известных величинах V, p и z в любой точке данной системы. Важность этого вывода очевидна, если учесть, что он не ограничивается точками на линии тока, а устанавливает отношение между давлениями и скоростями по высоте во всей области безвихревого потока. Простота уравнения (31) является одним из основных достоинств идеи о безвихревом потоке.

29. Важнейшие теоремы и уравнения. Высокая ценность потенциальной теории заключается в изобилии теорем и заключений, выведенных в различных областях на ее основе. Многие из

них являются производными от теоремы Гаусса, которая была представлена в п. 18 в связи с уравнением неразрывности. Поскольку эта теорема может быть использована для вывода целого ряда в высшей степени полезных соотношений, она приводится и здесь:

$$\int_W \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dW = \int_S \left(P \frac{\partial x}{\partial n} + Q \frac{\partial y}{\partial n} + R \frac{\partial z}{\partial n} \right) dS. \qquad (32)$$

Следует напомнить, что единственными ограничениями, налагаемыми на функции P, Q и R, является то, что они и их пространственные производные должны быть неразрывны во всем объеме W. Три функции, которые удовлетворяют этим требованиям и которые приводят к важным соотношениям, могут быть определены следующим образом:

$$P = \phi \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad Q = \phi \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad R = \phi \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Их производные, которые также должны быть неразрывны, составляют:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \\ + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

При соответствующих подстановках в уравнение (32) на эту теорему часто ссылаются как на первое тождество Грина:

$$\int_W \phi \nabla^2 \psi \, dW + \int_W \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dW = \\ = \int_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, dS. \qquad (33)$$

Символ ∇^2 здесь имеет то же значение, что и в уравнении (29), а нормальная производная $\partial\psi/\partial n$ составляет, конечно,

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial n}.$$

Если поменять местами функции ϕ и ψ и получившееся выражение вычесть из уравнения (33), найдем результат, который известен как второе тождество Грина:

$$\int_W \phi \nabla^2 \psi \, dW - \int_W \psi \nabla^2 \phi dW = \int_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS. \qquad (34)$$

Наконец, если ϕ и ψ ограничены как гармонические функции, результатом будет третье соотношение, известное под названием обратной теоремы Грина:

$$\int_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \int_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS. \tag{35}$$

Пример способа использования этих уравнений находим при рассмотрении кинетической энергии K несжимаемой жидкости, движущейся потенциально в области объема W и поверхности S:

$$K = \int_W \frac{\rho V^2}{2} dW.$$

Если предположить, что функции ϕ и ψ идентичны и равны потенциалу скорости, тогда первый интеграл уравнения (33) сводится к нулю, так как ϕ гармоническая функция, интегрирование второго интеграла дает квадрат скорости V, а в результате получаем выражение, известное как теорема энергии:

$$K = \frac{\rho}{2} \int_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS. \tag{36}$$

Это уравнение применяется только к однозначным потенциалам. Перпендикулярное расстояние n измеряется в наружном направлении.

Если рассматриваемая жидкость лежит за поверхностью S, потенциал ее равен нулю в бесконечности, а скорость исчезает в бесконечности по крайней мере с быстротой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, тогда кинетическая энергия этой жидкости может быть найдена путем допущения, что на некотором расстоянии от поверхности S существует бо́льшая поверхность Σ, где скорость пренебрежимо мала. Объем, к которому применимо уравнение (33), лежит между поверхностями S и Σ, а перпендикуляр, вдоль которого измеряется расстояние, как обычно направлен наружу от объема или внутрь области, ограниченной поверхностью S. Таким образом, кинетическая энергия жидкости, лежащей за поверхностью S, представлена также уравнением (36). Если положительное значение перпендикуляра выбрано при направлении его наружу от поверхности S, необходимо изменить знак выражения для K в уравнении (36).

С помощью теоремы энергии может быть доказано несколько дополнительных соотношений, известных под названием уникальных теорем. Следует иметь в виду, что эти теоремы, так же как и теорема энергии, на которой они основаны, применяются только в случаях, когда потенциал скорости одновременно гармоничен и однозначен. Это исключает, например, вихревые системы, рассмотренные в следующем разделе. Приведем ряд уникальных теорем.

1. Безвихревое движение невозможно в односвязной области, ограниченной неподвижными стенками. *Доказательство:* во всех точках на границе $\partial\phi/\partial n = 0$, следовательно, кинетическая энергия равна нулю или система находится в покое.

2. Если границы характеризуются заданными скоростями, то безвихревое движение внутри них имеет единственно возможную форму. *Доказательство:* если два потенциала ϕ_1 и ϕ_2 относятся к данному полю, тогда их разность гармонична. Однако в каждой точке на границе $\partial\phi_1/\partial n = \partial\phi_2/\partial n$. В таком случае

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial n} - \frac{\partial\phi_2}{\partial n} = \frac{\partial(\phi_1 - \phi_2)}{\partial n} = 0,$$

т. е. разница между ϕ_1 и ϕ_2 составляет постоянную величину Добавление постоянной к потенциалу не изменяет градиентов, так что ϕ_1 и ϕ_2 представляют одно и то же поле скорости.

3. Безвихревое движение невозможно в жидкости, где скорость исчезает в бесконечности по крайней мере с быстротой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, если внутренние границы находятся в состоянии покоя. *Доказательство* по существу то же, что и для теоремы «1», за исключением того, что здесь рассматривается наружный случай.

4. Если жидкость находится в состоянии покоя в бесконечности, тогда безвихревое движение, вызванное заданным движением внутренней границы, единственно. *Доказательство* осуществляется объединением теорем «2» и «3».

5. Если жидкость движется в бесконечности с равномерной скоростью, тогда безвихревое движение, вызванное заданным движением внутренней границы, единственно. *Доказательство:* пусть данная система движется со скоростью, равной скорости жидкости в бесконечности. Это, конечно, не оказывает никакого влияния на движение жидкости. На основании этой системы получаем случай «4».

В качестве второго приложения теоремы Грина уравнение (35) применяется к наружной зоне простой замкнутой поверхности S и малой сферы S' около точки P, расположенной вне поверхности S, с функцией ϕ, которая является гармонической, исчезающей с достаточной быстротой в бесконечности, и с функцией $\psi = 1/R$, где R — расстояние от P. Тогда

$$\int_S \phi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) dS + \int_{S'} \phi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) dS' =$$

$$= \int_S \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial n}\, dS + \int_{S'} \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial n}\, dS',$$

где положительное значение перпендикуляра соответствует направлению внутрь зоны, ограниченной S и S'. Так как данный

шар очень мал и ϕ и $\partial\phi/\partial R$ непрерывны в точке P, второй и последний интегралы могут быть записаны следующим образом:

$$\int_{S'} \phi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) dS' \approx \frac{\phi(P)}{R^2} \int_{S'} dS' = 4\pi\phi(P);$$

$$\int_{S'} \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial n} dS' \approx -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial\phi}{\partial R}\right)_P \int_{S'} dS' = -4\pi R\left(\frac{\partial\phi}{\partial R}\right)_P.$$

Поскольку R приближается к нулю, последний интеграл, следовательно, исчезает и тогда получаем

$$4\pi\phi(P) = \int_S \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right] dS, \tag{37}$$

т. е. выражение для ϕ в любой точке P, представленное через величины ϕ и $\partial\phi/\partial n$ на данной поверхности. В п. 31 будет рассмотрена иная интерпретация этого результата, подсказанная формой подынтегрального выражения, заключающаяся в том, что произвольная гармоническая функция может быть выражена в форме поверхностного распределения источников напряжением $M'' = \partial\phi/\partial n$ и их диполей с осями, перпендикулярными данной поверхности, напряжением $\Delta'' = \phi$.

Если u, v и w — компоненты скорости в зоне безвихревого потока несжимаемой жидкости, а S — поверхность, окружающая гармоничную область, тогда, поскольку объем потока жидкости, проходящей через данную поверхность, равен нулю, получаем:

$$\int_S \left(u \frac{\partial x}{\partial n} + v \frac{\partial y}{\partial n} + w \frac{\partial z}{\partial n}\right) dS =$$

$$= \int_S \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial n}\right) dS = \int_S \frac{\partial\phi}{\partial n} dS = 0.$$

Это соотношение приводит к теореме среднего значения, которая может быть сформулирована следующим образом: среднее значение потенциала над поверхностью шара, окружающей гармоническую область, равно значению потенциала в центре этого шара.

Для доказательства запишем обычное определение среднеарифметической величины в форме

$$\phi_{\text{ср}} = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S \phi dS.$$

Поскольку поверхность имеет шарообразную форму, элемент dS равен $R^2 d\Phi$, где R — радиус шара, а $d\Phi$ — телесный угол,

стягиваемый дугой dS. Из только что выведенного уравнения получим

$$0 = \int \frac{\partial \phi}{\partial n}\, dS = \int \frac{\partial \phi}{\partial R}\, R^2 d\Phi = R^2 \frac{\partial}{\partial R} \int \phi d\Phi.$$

Отсюда $\int \phi d\Phi = \text{const}$ и, следовательно,

$$\phi_{\text{ср}} = \frac{1}{4\pi R^2} \int \phi dS = \frac{1}{4\pi R^2} \int \phi R^2 d\Phi = \frac{1}{4\pi} \int \phi d\Phi = \text{const}.$$

В данном случае радиус шара может уменьшаться неограниченно, пока среднее значение потенциала станет равным его значению в центре. Эта теорема подводит к нескольким выводам, которые часто используются при решении задач безвихревого потока:

а) потенциал не может иметь максимума или минимума внутри гармонической области. Доказательство основывается на том факте, что максимум или минимум представляет величину иную, чем средняя по всему шару с центром в этой точке;

б) максимальная величина скорости должна быть у границы; отсюда, по уравнению Бернулли, минимум давления должен также существовать у границы. Следует заметить, однако, что минимум скорости может находиться внутри гармоничной зоны, поскольку она равна нулю в точке застоя, как, например, в точке, расположенной на равном расстоянии между двумя одинаковыми источниками (см. п. 31). Для доказательства берем ось x в направлении предполагаемого максимума скорости и применяем вывод «а» к потенциальной функции $\partial\phi/\partial x$.

30. Классификация задач безвихревого течения. Хронологически первой граничной задачей потенциальной теории была проблема вычисления гармонического потенциала во всей зоне при заданных величинах потенциала на границе. Доказательство существования такого потенциала и выражение его для данных условий известны как проблема Дирихле. Примеры этому общеизвестны в электростатике, где наружное поле отыскивается по потенциалу на поверхности проводника. В потоке жидкости примером является установление потенциала, соответствующего определенным свободным линиям тока. Так как, согласно п. 28, функция тока для двухмерного течения удовлетворяет всем требованиям потенциала, линия тока может рассматриваться для аналитических целей как линия потенциала, и, следовательно, любой двухмерный поток с заданными границами может рассматриваться как проблема Дирихле.

Второй граничной задачей потенциальной теории была проблема вычисления потенциала, нормальные производные которого равны заданным значениям по всей границе. Она известна как проблема Неймана; поток вокруг твердых тел часто приводит к этому типу граничных условий, рассмотренных в п. 26.

Более общая проблема заданного потенциала по части тела

и заданного нормального градиента по остальной границе встречается в линеаризованной теории кавитации скользящих поверхностей гидроплана, для которых как твердое тело, так и свободная поверхность тока существуют в одной системе.

В четвертой группе задач граничные условия предстают в форме линейных отношений между ϕ и $\partial\phi/\partial n$. Типичным примером их являются гравитационные волны. В качестве первого приближения можно допустить, что свободная поверхность находится в простом гармоничном движении с периодом $2\pi/\omega$; как показано в п. 34, граничное условие при этом составляет $\omega^2\phi = g\partial\phi/\partial y$, что получило название задачи Коши.

Пример 7. Определить, является ли безвихревой система, описанная следующей функцией тока:

$$\psi = Ua^2\left(\frac{R^2\sin^2\vartheta}{a^2} - \cos\vartheta\right).$$

Если да, то найти потенциал скорости, определить положение застойной точки, если она существует, и вычислить величину застойного давления в единицах плотности жидкости. Допустить, что силами притяжения можно пренебречь и что давление стремится к нулю при больших величинах R.

Если потенциал существует, то он может быть найден путем интегрирования выражений для компонентов скорости:

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial R} = \frac{1}{R^2\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta};$$

$$v = \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} = -\frac{1}{R\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial R}.$$

После замены соответствующих производных получаются следующие результаты:

$$\phi = \int U\left(2\cos\vartheta + \frac{a^2}{R^2}\right)dR + f(\vartheta) = 2UR\cos\vartheta - \frac{Ua^2}{R} + f(\vartheta);$$

$$\phi = \int -2UR\sin\vartheta d\vartheta + f(R) = 2UR\cos\vartheta + f(R).$$

Каждая из произвольных функций зависит от одного переменного:

$$f(R) = f(\vartheta) - \frac{Ua^2}{R};$$

$$f(R) = -\frac{Ua^2}{R};$$

$$f(\vartheta) = 0.$$

Тогда потенциал составляет

$$\phi = UR\left(2\cos\vartheta - \frac{a^2}{R^2}\right).$$

Подстановка этой функции в уравнение Лапласа в сферических координатах показывает, что она представляет безвихревую систему.

Для определения положения застойной точки каждый компонент скорости нужно приравнять нулю:

$$u = U\left(2\cos\vartheta + \frac{a^2}{R^2}\right) = 0;\quad v = -2U\sin\vartheta = 0.$$

Единственным реальным решением этих уравнений будет:

$$\vartheta = \pi; \quad R = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Максимальное давление может быть вычислено из уравнения Бернулли для установившегося движения, на которое не действует сила тяжести:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C; \quad V^2 = u^2 + v^2 = 4U^2\left(1 + \frac{a^2\cos\vartheta}{R^2}\right) + U^2\frac{a^4}{R^4}.$$

Когда R велико, результирующая скорость равна $2U$ и застойное давление составляет

$$p = \frac{\rho V_0^2}{2} = 2\rho U^2.$$

Б. Типичные виды течений

31. Основные функции потенциала и тока. Для лучшего представления отношения между полем потока и уравнениями его функций потенциала и тока исследуем несколько наиболее распространенных основных форм, используемых на практике в различных сочетаниях для образования более сложных систем.

Равномерный поток. Самым простым потоком является равномерный; если l, m и n представляют направляющие косинусы любой прямой линии в пространстве, тогда уравнение в декартовой системе координат для равномерного потока со скоростью U в направлении этой линии имеет вид

$$\phi = U(lx + my + nz). \tag{38}$$

Когда равномерный поток входит в систему, для которой предпочтительнее цилиндрические или сферические координаты, наиболее удобно ориентировать оси так, чтобы поток двигался в направлении оси z или нулевой оси. Уравнения для функций потенциала и тока в цилиндрической и сферической системах координат соответственно имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \phi &= Uz; \quad \psi = \frac{1}{2}Ur^2; \\ \phi &= UR\cos\vartheta; \quad \psi = \frac{1}{2}UR^2\sin^2\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Хотя основные соотношения теории безвихревого потока применимы только к областям с гармоническим потенциалом, несколько наиболее интересных приложений их основано на присутствии в потоке некоторых отдельных точек, линий или поверхностей, в которых потенциал или возможно градиент имеет бесконечные или прерывистые значения. Функции потенциала и тока для наиболее распространенных полей потока, включающих

особые точки, должны быть изучены так, чтобы их можно было легко узнать.

Источник или сток. Потенциал

$$\phi = -M/R \tag{40}$$

представляет поток следующего характера в начале точечного источника жидкости:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial R} = \frac{1}{R^2 \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = \frac{M}{R^2}; \; v = 0 = w;$$

$$\psi = \int M \sin \vartheta d\vartheta = -M \cos \vartheta. \tag{41}$$

Скорость во всех точках направлена радиально наружу от начальной точки, а величина ее в любой точке обратно пропорциональна квадрату радиального расстояния до начальной точки. Линии тока в рассматриваемом случае представляются семейством радиальных линий. Очевидно, что R постоянна, если постоянна ϕ, так что эквипотенциальные поверхности образуют концентрические сферы с центром в точке возбуждения источника.

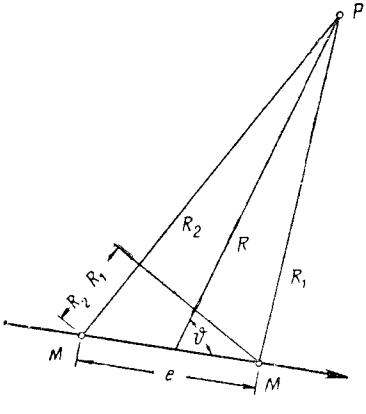


Рис. 22. Потенциал, созданный точечными источником и стоком одинакового напряжения

При изменении знака ϕ ($\phi = M/R$) поток направляется радиально внутрь и имеет характер стока. В том и другом случае постоянная M называется напряжением стока или источника: расход через любую замкнутую поверхность, окружающую точку возбуждения, составляет $Q = 4\pi M$. Это может быть подтверждено вычислением расхода через поверхность шара единичного радиуса с центром в точке возбуждения. Очевидно, при этом расходе жидкость должна исчезать в точке возбуждения в случае стока или возникать в этой точке в случае источника. Это требование, конечно, нарушает принцип неразрывности и иллюстрирует несостоятельность многих соотношений в особых точках. То, что точка возбуждения относится к особым точкам, можно увидеть из данного ранее определения, поскольку ϕ и все ее производные бесконечны при $R = 0$.

Если внутри замкнутой поверхности S содержится несколько источников и стоков напряжением $M_1, M_2, \ldots, M_n$, тогда сложение расходов из каждого источника дает

$$\int_S \left(u \frac{\partial x}{\partial n} + v \frac{\partial y}{\partial n} + w \frac{\partial z}{\partial n} \right) dS = \int_S \frac{\partial \phi}{\partial n} dS + 4\pi \sum_{i=1}^{n} M_i. \qquad (42)$$

Результат, показывающий, что поток жидкости через замкнутую поверхность пропорционален общему напряжению источников, содержащихся внутри нее, известен как теорема Гаусса.

Диполь. Если источник и сток одинакового напряжения помещены в ненарушаемую иным способом жидкость бесконечной протяженности, тогда весь расход из источника должен со временем возвратиться в сток. Если расстояние e между ними уменьшать и в то же время соответственно увеличивать их напряжение M ($Me = \text{const} = \Delta$), тогда в пределе при $e = 0$ получим диполь или пару. Заметив, что потенциалы функций тока для системы нескольких потоков получаются простым сложением соответствующих величин компонентов потоков, можно записать потенциал в любой точке P (рис. 22) как

$$\phi = -M\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = -M\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right) \approx -\frac{Me\cos\vartheta}{R_1 R_2} = -\frac{\Delta\cos\vartheta}{R_1 R_2}.$$

Когда e достигает нуля, тогда

$$\phi = -\frac{\Delta}{R^2}\cos\vartheta. \qquad (43)$$

Соответствующая функция тока может быть выведена обычным путем:

$$u = \frac{1}{R^2 \sin\vartheta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \phi}{\partial R} = \frac{2\Delta\cos\vartheta}{R^3}.$$

Тогда

$$\psi = \frac{\Delta}{R}\sin^2\vartheta + f(R),$$

где $f(R)$ — произвольная функция, так как R является постоянной интегрирования. Но

$$v = -\frac{1}{R\sin\vartheta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial R} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} = \frac{\Delta}{R^3}\sin\vartheta,$$

т. е.

$$\frac{1}{R\sin\vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{\Delta}{R}\sin^2\vartheta + f(R)\right] = \frac{\Delta}{R^3}\sin\vartheta,$$

что при упрощении дает $df/dR = 0$ и $f(R) = \text{const}$. Так как добавка постоянной несущественна, получаем

$$\psi = \frac{\Delta}{R}\sin^2\vartheta. \qquad (44)$$

В этих уравнениях Δ — напряжение диполя, R — расстояние от диполя до любой точки и ϑ — угол между линией, соединяю-

щей диполь с данной точкой, и линией направления от стока к источнику. Если направляющие косинусы последней линии l, m и n, тогда

$$\cos\vartheta = \frac{lx + my + nz}{R}$$

и потенциал для диполя составляет

$$\varphi = -\frac{\Delta}{R^3}(lx + my + nz).$$

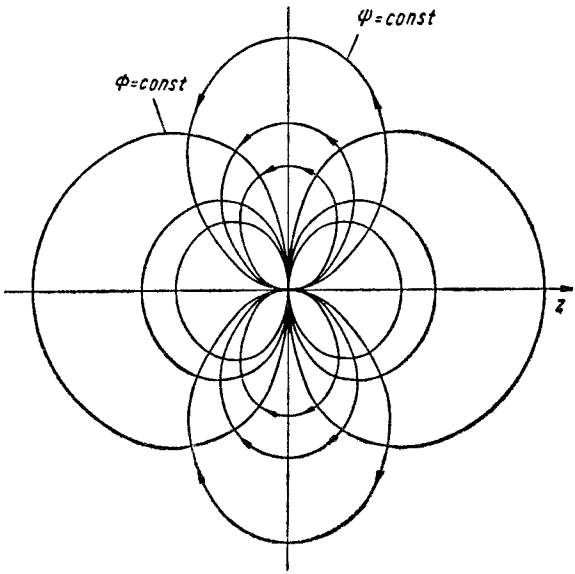


Рис. 23. Поле осесимметричного диполя

Интересно заметить, что потенциал для диполя может быть выведен из отрицательной производной потенциала для источника:

$$\varphi_1 = -\frac{M}{R} = -\frac{M}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}};$$

$$\varphi_2 = -e\left(l\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + m\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + n\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right) = -\frac{Me}{R^3}(lx + my + nz).$$

Так как $Me=\Delta$, то очевидно, что функция φ_2 идентична потенциалу, уже выведенному для диполя. Эти операции умножения на постоянные величины частного дифференцирования относительно декартовых координат и сложения производятся, конечно, в соответствии с допустимыми операциями над гармоническими потенциалами, установленными в п. 28.

Вихрь. Если в цилиндрических координатах

$$\varphi = k\theta, \tag{45}$$

тогда компоненты скорости в любой точке

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0; \quad v = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{k}{r};$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

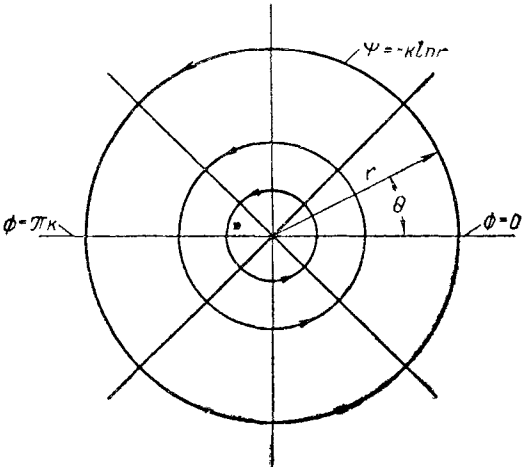


Рис. 24. Поле линейного вихря

вызывают начало вихря. Уравнение для функции тока может быть найдено интегрированием:

$$v = \frac{k}{r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad \psi = -\int \frac{k}{r}\, dr = -k \ln r. \tag{46}$$

Характер линий тока и эквипотенциалей показан на рис. 24. Поскольку как радиальные, так и осевые компоненты скорости равны нулю, линии тока должны быть концентрическими окружностями, причем скорость на каждой окружности постоянна. Кроме того, так как скорость обратно пропорциональна радиусу окружности, циркуляция Г одинакова на всех линиях тока:

$$\Gamma = \oint v ds = \int_0^{2\pi} v r d\theta = \int_0^{2\pi} k d\theta = 2\pi k.$$

Циркуляция одинакова и на любой другой простой замкнутой траектории, окружающей начальную точку, как видно из применения теоремы Стокса к кольцеобразной зоне, ограниченной этой траекторией и малой окружностью у начальной точки.

Когда n завихрений напряжением $k_1, k_2, \ldots, k_n$ окружены траекторией, то, применяя теорему Стокса к зоне, ограниченной этой траекторией и малыми окружностями у каждого завихрения, видим, что циркуляция на траектории составляет

$$\Gamma = 2\pi \sum_{i=1}^{n} k_i. \tag{47}$$

То обстоятельство, что циркуляция даже вокруг одного вихря является конечной, представляет очевидное нарушение одной из основных характеристик безвихревого потока, развитых ранее, вызванное тем, что линии тока окружают особую точку; в точке $r=0$ скорость бесконечна, в то время как все производные гармонического потенциала должны быть конечны. Следует обратить особое внимание на то, что этот поток в отличие от источника или диполя является по существу двухмерным, так что его можно рассматривать или как поток плоского типа, который будет подробно обсуждаться в главе IV, или как неразрывный прямолинейный вихрь в трех измерениях. В последнем случае мы имеем вихрь более общего типа, для которого потенциал представляет векторную функцию.

Двухмерный источник. Чередование уравнений для функций потенциала и тока преобразует концентрические окружности линий тока в эквипотенциальные линии, а радиальные линии эквипотенциалей в линии тока. Это является характерным для двухмерного источника, который, подобно вихрю, может рассматриваться или как особая плоскость, или как особая неразрывная прямая линия в трех измерениях. Если символ m использовать для обозначения напряжения, уравнения приобретут следующий вид:

$$\phi = m \ln r; \quad \psi = m\theta. \tag{48}$$

Так как напряжение M в точечном источнике или стоке было по размерности эквивалентно объемному расходу, значение m в вышеуказанных уравнениях должно иметь размерность объемного расхода на единицу длины. Если значение m отрицательно, тогда поток направлен радиально внутрь по отношению к оси z, так что он представляет двухмерный сток. Как для источника, так и для стока расход на единицу длины вычисляется следующим образом:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{m}{r}; \quad q = \int_0^{2\pi} urd\theta = 2\pi m.$$

Как и в трехмерном случае, если замкнутая кривая L включает источники и стоки напряжением $m_1, m_2, \ldots, m_n$, расход на единицу длины составляет

$$q = \oint_L \left(u \frac{\partial x}{\partial n} + v \frac{\partial y}{\partial n} \right) dL = \oint_L \frac{\partial \phi}{\partial n} dL = 2\pi \sum_{i=1}^{n} m_i. \qquad (49)$$

Это — теорема Гаусса для расхода двухмерного потока.

Двухмерный диполь (рис. 25). Напомним, что потенциал для трехмерного диполя был выведен из потенциала для источника

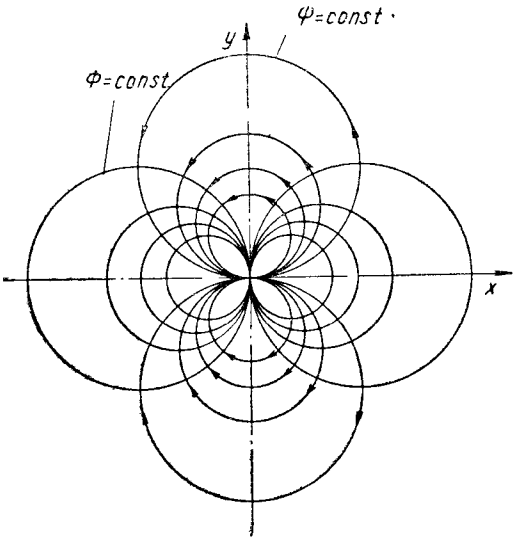


Рис. 25. Поле двухмерного диполя

путем дифференцирования. Такой же результат получается при подобных операциях в двухмерном случае:

$$\phi_1 = m \ln r = m \ln (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Если произведение me принять равным напряжению δ, то данное выражение будет представлять уравнение для двухмерного диполя произвольной ориентации. В обозначениях полярной и декартовой систем уравнение диполя принимает следующие формы:

$$\phi = -\frac{\delta}{r} \cos\theta = -\delta \frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$\psi = \frac{\delta}{r} \sin\theta = \delta \frac{y}{x^2 + y^2}. \qquad (50)$$

Распределение особенностей. При использовании особенностей для образования полей течений обычно необходимо распределять их по линиям, поверхностям или зонам в пространстве.

Этот процесс относительно прост, так как уравнения, которые удовлетворяются функциями потенциалов и токов, являются линейными; так, функции потенциалов и токов при наложении течений представляют простые суммы соответствующих величин для отдельных элементов. Для линейного распределения источников имеем следующие соотношения:

$$\varphi(x, y, z) = -\int_L \frac{M'(\alpha)}{R}\, dL; \quad \psi(x, y, z) = -\int_L M'(\alpha) \cos\vartheta\, dL, \tag{51}$$

а для линейного распределения диполей такие соотношения:

$$\varphi(x, y, z) = -\int_L \frac{\Delta'(\alpha) \cos\vartheta}{R^2}\, dL;$$
$$\psi(x, y, z) = \int_L \frac{\Delta'(\alpha) \sin^2\vartheta}{R}\, dL. \tag{52}$$

В этих уравнениях M' и Δ' являются неразрывными функциями, представляющими распределение трехмерных напряжений на единицу длины вдоль контура L, уравнениями которого являются:

$$x = x'(\alpha); \quad y = y'(\alpha); \quad z = z'(\alpha)$$

и

$$R = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}.$$

Для поверхностного распределения источников или диполей соответствующие соотношения будут иметь следующий вид:

$$\varphi = -\int_S \frac{M''(\alpha, \beta)}{R}\, dS;$$
$$\psi = -\int_S M''(\alpha, \beta) \cos\vartheta\, dS; \tag{53}$$

$$\varphi = -\int_S \frac{\Delta''(\alpha, \beta) \cos\vartheta}{R^2}\, dS;$$
$$\psi = \int_S \frac{\Delta''(\alpha, \beta) \sin^2\vartheta}{R}\, dS. \tag{54}$$

Здесь M'' и Δ'' — функции, представляющие напряжение на единицу площади на поверхности S, уравнениями которой являются

$$x = x'(\alpha, \beta); \quad y = y'(\alpha, \beta); \quad z = z'(\alpha, \beta),$$

уравнение для R остается прежним.

Уравнения для пространственных распределений могут быть записаны по прямой аналогии с вышесказанным:

$$\varphi = -\int_W \frac{M'''(x', y', z')}{R}\, dW; \qquad (55)$$

$$\psi = -\int_W M'''(x', y', z') \cos\vartheta\, dW;$$

$$\varphi = -\int_W \frac{\Delta'''(x', y', z') \cos\vartheta}{R^2}\, dW; \qquad (56)$$

$$\psi = \int_W \frac{\Delta'''(x', y', z') \sin^2\vartheta}{R}\, dW.$$

Функции M''' и Δ''' представляют, конечно, напряжения на единицу объема.

При пространственном распределении источников M''' жидкость создается во всех точках внутренней области с расходом, пропорциональным местной плотности источника. Малый шар объемом δW вокруг точки (x', y', z') содержит полное напряжение источника, равное $M'''\,\delta W$, и, следовательно, в соответствии с теоремой Гаусса полный расход из этого шара составляет $4\pi M'''\,\delta W$. Приравнивая поток через единицу объема к дивергенции скорости, находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 4\pi M'''.$$

Если теперь допустить потенциальность потока, получим уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi M''', \qquad (57)$$

специальным случаем которого, очевидно, является уравнение Лапласа. Если M''' представляет данную функцию положения, частное решение уравнения (57) дается непосредственно уравнениями (55). Полное решение уравнения Пуассона в данном случае состоит в подстановке решения уравнения Лапласа в частное решение таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия.

Поверхностное распределение особенностей имеет полезные свойства, касающиеся неразрывности потенциала или скорости на двух сторонах поверхности S. Когда какая-нибудь точка P приближается к поверхности, расстояние R до ближайшей точки на поверхности приближается к нулю, и, следовательно, интегралы, содержащие некоторую степень R в своих подынтегральных выражениях, становятся особыми. Для определения этих интегралов удобно разделить рассматриваемую поверхность на две части: одна — элемент δS_1 в непосредственной близости от точки P, а другая — вся остальная поверхность S_2.

Если источники напряжением M'' распределены по поверхности S, тогда по уравнению (53) нормальная скорость v_n в точке P может быть выражена так:

$$v_n = (v_n)_1 - \int_{S_2} M''(\alpha, \beta) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) dS_2,$$

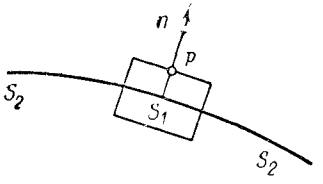


Рис. 26. Пояснительная схема для поверхностного распределения источников

где $(v_n)_1$ представляет воздействие элемента источника $M''\delta S_1$ на скорость v_n. По симметрии нормальная скорость, вызванная этим элементом с противоположной стороны, равна $(v_n)_1$ и направлена противоположно ей. Следовательно, поток жидкости через дискообразный цилиндр (рис. 26) вокруг элемента, образованный нормалями к поверхности по краям элемента и заканчивающийся параллелями к поверхности, составляет $2(v_n)_1\delta S_1$ и согласно теореме Гаусса

$$(v_n)_1 = 2\pi M''.$$

Поэтому когда точка P приближается к поверхности с той стороны, куда направлена n, или с противоположной, получаем соответственно

$$\left.\begin{aligned} v_n(+P) &= 2\pi M'' - \int_S M''(\alpha, \beta) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) dS; \\ v_n(-P) &= -2\pi M'' - \int_S M''(\alpha, \beta) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) dS. \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

Видно, что нормальная скорость повышается до $4\pi M''$ при пересечении поверхности.

Предположим далее, что распределение состоит из диполей напряжением Δ'' с осями, перпендикулярными поверхности S. Тогда по уравнению (54) потенциал у точки P вблизи поверхности может быть записан в следующем виде:

$$\phi = \phi_1 - \int_{S_2} \frac{\Delta''(\alpha, \beta)\cos\vartheta}{R^2} dS_2.$$

Здесь функция ϕ_1, обусловленная элементом диполя $\Delta''\delta S_1$, также может быть определена по уравнению (54)

$$\phi_1 = -\overline{\Delta}'' \int_{\delta S_1} \frac{\cos\vartheta}{R^2} dS = -\overline{\Delta}''\Phi,$$

где $\overline{\Delta}''$ — среднее значение Δ'' над элементом δS_1, а Φ — телесный угол, образуемый элементом у точки P. Следовательно, пре-

дельное значение ϕ_1 при приближении точки P к поверхности составляет $-2\pi\Delta''$ на положительной стороне распределения диполя и $2\pi\Delta''$ на отрицательной стороне. Таким образом, потенциалы на положительной и отрицательной стороне соответственно равны

$$\left.\begin{aligned}\phi(+P) &= -2\pi\Delta'' - \int_S \frac{\Delta''(\alpha, \beta)\cos\vartheta}{R^2}\,dS;\\ \phi(-P) &= 2\pi\Delta'' - \int_S \frac{\Delta''(\alpha, \beta)\cos\vartheta}{R^2}\,dS.\end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

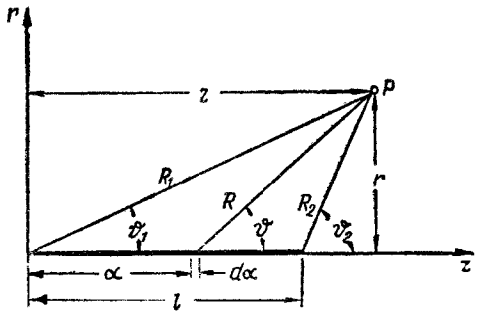


Рис. 27. Пояснительная схема для линейного распределения источников

Следовательно, поверхностное распределение нормально направленных диполей вызывает разрыв величиной $4\pi\Delta''$ в потенциале при пересечении поверхности.

В качестве примера использования данных уравнений рассмотрим неразрывное распределение источников вдоль оси z между точками $z=0$ и $z=l$. Функции потенциала и тока для таких полей составят:

$$\phi = -\int_0^l \frac{M'(\alpha)}{R}\,d\alpha;\ \psi = -\int_0^l M'(\alpha)\cos\vartheta\,d\alpha.$$

Рассматривая рис. 27, видим, что

$$\alpha = z - r\operatorname{ctg}\vartheta;\ R = r\csc\vartheta;\ d\alpha = r\csc^2\vartheta\,d\vartheta.$$

Следовательно, функции потенциала и тока в любой точке поля равны:

$$\phi = -\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} M'(\alpha)\csc\vartheta\,d\vartheta;$$

$$\psi = -r\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} M'(\alpha)\operatorname{ctg}\vartheta\csc\vartheta\,d\vartheta.$$

Как функция потенциала, так и функция тока, обусловленные линейным источником, конечно, симметричны относительно оси z. Если предположить, что интенсивность источника постоянна вдоль всей линии, тогда $M'(\alpha) = M/l$, где M — общее напряжение источника. Поэтому для любой точки P функции потенциала и тока будут равны:

$$\phi_P = -\frac{M}{l} \ln (\csc \vartheta - \operatorname{ctg} \vartheta) \Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = \frac{M}{l} \ln \left(\frac{R_1 - z}{R_2 - z + l} \right);$$

$$\psi_P = \frac{Mr}{l} (\csc \vartheta_2 - \csc \vartheta_1) = \frac{M}{l} (R_2 - R_1).$$

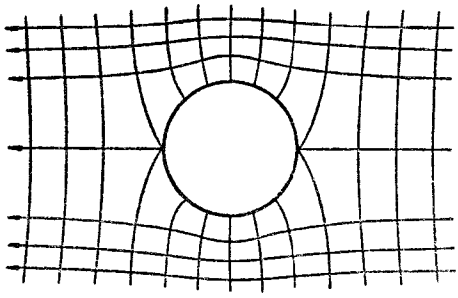


Рис. 28. Поле установившегося потока при обтекании шара

32. Сложные движения. Потенциалы скорости, соответствующие движению предметов относительно окружающей жидкости, могут быть образованы введением особенностей в поле, представляющее поток ненарушенного характера. Наиболее распространена техника введения источников, стоков, диполей и вихрей в относительно простые общие потоки. Например, обтекание шара в безграничном поле (рис. 28) может быть получено путем введения диполя в равномерный поток, причем ось диполя направляется по течению. Для равномерного потока со скоростью U в направлении положительной оси z функции потенциала и тока в обозначениях сферической системы координат составляют:

$$\phi = UR \cos \vartheta; \quad \psi = \frac{1}{2} UR^2 \sin^2 \vartheta.$$

Если их прибавить к уравнениям для диполя, повернутого в сторону отрицательной оси z, получим уравнения для обтекания шара:

$$\phi = UR \cos \vartheta - \frac{\Delta}{R^2} \cos \vartheta; \quad \psi = \frac{1}{2} UR^2 \sin^2 \vartheta + \frac{\Delta}{R} \sin^2 \vartheta.$$

Соотношения между напряжением диполя, скоростью и радиусом шара могут быть установлены при использовании того факта, что точка застоя должна находиться на шаре. Таким образом, поскольку диполь расположен в начальной точке, радиальные координаты точки с нулевой скоростью будут равны радиусу a шара:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial R} = U \cos \vartheta + \frac{2\Delta}{R^3} \cos \vartheta = 0;$$

$$a = \left(\frac{-2\Delta}{U} \right)^{1/3}.$$

Следовательно:

$$\phi = UR \cos \vartheta \left(1 + \frac{a^3}{2R^3} \right); \quad \psi = \frac{1}{2} UR^2 \sin^2 \vartheta \left(1 - \frac{a^3}{R^3} \right). \qquad (60)$$

В выводе уравнения для диполя были объединены источник и сток равного напряжения, так что чистое напряжение было равно нулю. Это условие равенства нулю чистого напряжения необходимо для сочетаний особенностей, используемых для создания замкнутых тел в поле потока.

Когда источник и сток расположены в разных точках, тогда поверхность потока, окружающая жидкость с этими особенностями, имеет скорее овальную, чем сферическую форму; эта общая группа тел известна под названием твердых тел Ренкина. Однако диапазон кривизны, которая может быть воспроизведена простыми источниками, ограничен, так что менее округленные формы должны быть образованы линейным или поверхностным распределением источников или диполей. Например, приемлемое приближение дирижабля или корпуса подводной лодки может быть получено объединением равномерного потока с точечным источником и стоками, распределенными вдоль оси непосредственно вниз по течению от источника. Для данной конфигурации хорошо подходит цилиндрическая система координат, а функция тока для объединенного потока получается путем сложения их для равномерного движения со скоростью U в направлении оси z, для источника напряжением M в точке возбуждения и для стоков равного напряжения, распределенных на расстоянии l от точки возбуждения вдоль оси x:

$$\psi = \frac{1}{2} Ur^2 + \frac{M}{l} (R_1 - R_2) - \frac{Mz}{R}.$$

Очевидно, можно удлинять тело, насколько требуется в направлении вниз по течению, увеличивая длину распределения стоков. Если нужно более умеренное заострение передней части тела, тогда часть источника может быть распределена вверх по течению. Еще большую маневренность предоставляет перемешивание источников и стоков вдоль оси. Распределение диполей даже более удобно. С другой стороны, если требуется форма с передней частью меньшей кривизны, чем у шара, тогда распределения вдоль оси уже недостаточно и должны быть использованы поверхностные распределения или кольцевые завихрения.

33. Динамические соотношения. Динамика взаимодействия погруженного предмета и жидкости может быть установлена при помощи уравнения Бернулли, которое связывает давление в лю-

бой точке с относительной скоростью и плотностью жидкости; зная распределение давления, путем интегрирования можно вычислить силы и моменты. В случае, если тело движется с постоянной скоростью через находящуюся в покое жидкость, предположение потенциальности приводит к весьма поразительному результату: сила в направлении относительного движения, т. е. торможение, всегда равна нулю. Это явное противоречие наблюдаемым явлениям, известное как парадокс Даламбера, частично было причиной того, что исследователи, имеющие дело с реальными жидкостями, неохотно обращались к схеме безвихревых течений. Однако в случае подъемной силы и момента подсчитанные значения могут отличаться от нуля. Кроме того, можно показать, что продольная сила не равна нулю, если движение тела является неустановившимся или если относительное движение жидкости становится неустановившимся под влиянием иного воздействия, чем движение тела.

Так как движение сообщается неподвижной жидкости, то, когда тело движется через нее, кинетическая энергия всей системы обязательно больше, чем энергия одного тела. Ввиду того, что работа, производящая этот излишек энергии, должна поставляться телом, усилие на тело зависит не только от скорости, но и от ускорения. Таким образом, если временное изменение кинематических соотношений включается в функцию потенциала или тока безвихревого потока, то для определения кинетической энергии жидкости можно использовать форму уравнения Бернулли для неустановившегося движения. Кирхгоф упростил эту проблему, доказав, что полное усилие может быть выражено в членах присоединенных масс или приращений действительной массы тела, пропорциональных объему и плотности вовлеченной в движение жидкости; коэффициент пропорциональности изменяется с изменением формы тела. Тэйлор увеличил ценность понятия присоединенных масс, выразив их в членах особенностей, порождаемых телом. Наконец, Легалли установил прямое соотношение между силами, действующими на тело, и особенностями. Таким образом, если распределение особенностей задано или установлено одним из методов решения уравнений течения, как это сделано в следующем разделе, тогда силы и моменты могут быть определены непосредственно без нахождения распределения давления.

(Следует заметить, что кроме термина «присоединенная масса» в литературе часто встречается термин «виртуальная масса». Но поскольку употребление последнего термина неопределенно — относится ли он к той же величине или к полной инерции тела и жидкости, то лучше использовать первый термин.)

В качестве примера соотношений присоединенных масс представим тело, движущееся произвольно-поступательно через находящуюся в покое жидкость. Если U, V и W — компоненты скорости тела, тогда граничное условие составляет

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = U\frac{\partial x}{\partial n} + V\frac{\partial y}{\partial n} + W\frac{\partial z}{\partial n},$$

где n — направление нормали наружу от данного тела. Можно предположить, что потенциал будет иметь вид

$$\phi = U\phi_1 + V\phi_2 + W\phi_3, \qquad (61)$$

где ϕ_1 представляет потенциал скорости, когда $U=1$, а $V=W=0$, аналогичные выражения характеризуют ϕ_2 и ϕ_3. Следует заметить, что так как ϕ имеет размерность $[L^2/T]$, ϕ_1, ϕ_2 и ϕ_3 имеют размерность длины. Градиент в направлении нормали составляет:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = U\frac{\partial \phi_1}{\partial n} + V\frac{\partial \phi_2}{\partial n} + W\frac{\partial \phi_3}{\partial n}.$$

Сравнивая члены в этих уравнениях, видим, что

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial n}; \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial n}; \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial n}.$$

Кинетическая энергия K жидкости, находящейся за поверхностью тела, равна (из п. 29)

$$2K = -\rho\int \phi\frac{\partial \phi}{\partial n}\,dS =$$

$$= -\rho\int (U\phi_1 + V\phi_2 + W\phi_3)\left(U\frac{\partial x}{\partial n} + V\frac{\partial y}{\partial n} + W\frac{\partial z}{\partial n}\right)dS =$$

$$= -\rho\int\left[U^2\phi_1\frac{\partial x}{\partial n} + V^2\phi_2\frac{\partial y}{\partial n} + W^2\phi_3\frac{\partial z}{\partial n} + \right.$$

$$+ VW\left(\phi_3\frac{\partial y}{\partial n} + \phi_2\frac{\partial z}{\partial n}\right) + WU\left(\phi_1\frac{\partial z}{\partial n} + \phi_3\frac{\partial x}{\partial n}\right) +$$

$$\left. + UV\left(\phi_2\frac{\partial x}{\partial n} + \phi_1\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right]dS.$$

Согласно формуле обратимости Грина

$$\int \phi_3\frac{\partial y}{\partial n}\,dS = \int \phi_3\frac{\partial \phi_2}{\partial n}\,dS = \int \phi_2\frac{\partial \phi_3}{\partial n}\,dS = \int \phi_2\frac{\partial z}{\partial n}\,dS \text{ и т. д.},$$

так что приведенное выше уравнение может быть записано так:

$$2K = AU^2 + BV^2 + CW^2 + 2DVW + 2EWU + 2FUV,$$

где $A = -\rho\int \phi_1\frac{\partial x}{\partial n}\,dS$ и т. д.

Поскольку внутренние особенности действуют на тело, их следует исключить из данной области, если функция ϕ гармоническая. Это удобнее всего сделать, окружив каждую особенность очень малой сферой. Если полная площадь поверхностей этих сфер равна S', тогда можно применить формулу обратимости

Грина к потенциальному полю, ограниченному поверхностями S и S':

$$\int\left(\phi_1\frac{\partial x}{\partial n}-x\frac{\partial\phi_1}{\partial n}\right)dS+\int\left(\phi_1\frac{\partial x}{\partial n}-x\frac{\partial\phi_1}{\partial n}\right)dS'=0,$$

или

$$\int\phi_1\frac{\partial x}{\partial n}dS=\int x\frac{\partial\phi_1}{\partial n}dS-\int\phi_1\frac{\partial x}{\partial n}dS'+\int x\frac{\partial\phi_1}{\partial n}dS'.$$

Первый интеграл в правой части может быть вычислен путем применения теоремы Гаусса, если учесть, что $\partial\phi_1/\partial n=\partial x/\partial n$:

$$\int x\frac{\partial\phi_1}{\partial n}dS=\int x\frac{\partial x}{\partial n}dS=\int\frac{\partial x}{\partial x}dW=W.$$

Интегралы за пределами S' будут вычисляться только для сфер вокруг источников и стоков. Так как вблизи источника ϕ_1 изменяется обратно пропорционально изменению R, а dS' — прямо пропорционально изменению R^2, второй интеграл, как видно, исчезает, когда радиусы сфер приближаются к нулю; в результате

$$A=-\rho W-\rho\int x\frac{\partial\phi_1}{\partial n}dS'.$$

Последний интеграл может быть вычислен путем подстановки $-R$ вместо n (n — нормаль, направленная наружу из внутренней зоны жидкости, т. е. к особенности) и выведения x из-под интеграла, так как его можно считать постоянным по радиусу очень малой сферы:

$$A+\rho W=\rho x\int\frac{\partial\phi_1}{\partial R}dS'.$$

Последний интеграл представляет сумму интегралов такого типа по всем малым внутренним сферам вокруг источников и стоков. По теореме Гаусса каждый из этих интегралов пропорционален напряжению заключенного в нем источника. Таким образом, для n источников получаем выражение

$$A+\rho W=4\pi\rho\sum_{i=1}^{n}M_ix_i+\cdots, \tag{62}$$

где недописанные добавочные члены означают, что здесь могут проявляться воздействия из других особенностей, таких, как диполи и завихрения. Остальные постоянные от B до F могут быть вычислены аналогичным способом. Эти постоянные и есть искомые присоединенные массы.

Теорема Легалли, дающая прямое соотношение сил, действующих на тело, и зарождающихся особенностей, базируется на распределении давления, установленном уравнением Бернулли

в его более общей форме. Например, компонент силы по направлению x составляет

$$F_x = -\int p \frac{\partial x}{\partial n} dS = \rho \int \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} dS + \frac{\rho}{2} \int V_r^2 \frac{\partial x}{\partial n} dS.$$

Поскольку координатные оси здесь движутся вместе с компонентами скорости U, V и W, V_r представляет скорость движения жидкости относительно начальной точки (см. п. 9):

$$V_r^2 = (U-u)^2 + (V-v)^2 + (W-w)^2.$$

Применяя способ, подобный только что использованному при выводе выражений для присоединенных масс, можно показать, что когда особенности состоят из распределенных источников и стоков напряжением M''' на единицу объема, точечных источников и стоков напряжением M, а также диполей с компонентами напряжения Δ_x, Δ_y и Δ_z, первый интеграл справа составляет:

$$\rho \int \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} dS = \rho W \frac{dU}{dt} -$$
$$- 4\pi\rho \frac{\partial}{\partial t} \left[\int M''' x dW + \sum (Mx + \Delta_x) \right],$$

где координаты x, y и z закреплены относительно движущегося тела, а U является компонентом скорости данного тела по направлению x. Предположим, что вращение тела равно нулю. Второй интеграл в правой части уравнения может быть вычислен следующим образом. Из теоремы Гаусса

$$\int_S V_r^2 \frac{\partial x}{\partial n} dS = \int_W \frac{\partial (V_r^2)}{\partial x} dW - \int_{S'} V_r^2 \frac{\partial x}{\partial n} dS'.$$

Но, поскольку поток безвихревой:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial (V_r^2)}{\partial x} = (u-U) \frac{\partial u}{\partial x} + (v-V) \frac{\partial v}{\partial x} + (w-W) \frac{\partial w}{\partial x} =$$
$$= (u-U) \frac{\partial u}{\partial x} + (v-V) \frac{\partial u}{\partial y} + (w-W) \frac{\partial u}{\partial z} =$$
$$= \frac{\partial u (u-U)}{\partial x} + \frac{\partial u (v-V)}{\partial y} + \frac{\partial u (w-W)}{\partial z} - 4\pi M''' u,$$

где последний член получен из уравнения Пуассона (57) для дивергенции скорости. Отсюда по теореме Гаусса

$$\frac{1}{2} \int_S V_r^2 \frac{\partial x}{\partial n} dS = \int_S u \left| (u-U) \frac{\partial x}{\partial n} + (v-V) \frac{\partial y}{\partial n} + \right.$$

$$+(w-W)\frac{\partial z}{\partial n}\Big]dS-4\pi\int\limits_{W_*^*}M'''udW_*+$$

$$+\int\limits_{S'}\Big[u\Big[(u-U)\frac{\partial x}{\partial n}+(v-V)\frac{\partial y}{\partial n}+(w-W)\frac{\partial z}{\partial n}\Big]-$$

$$-\frac{1}{2}V_r^2\frac{\partial x}{\partial n}\Big\}dS'.$$

Первый интеграл справа исчезает вследствие граничного условия, что нормальный компонент скорости точки твердой границы равен нормальному компоненту скорости жидкости. Таким образом, остается объемный интеграл, выраженный через напряжение источника, и поверхностный интеграл по S', который может быть упрощен до

$$\int\Big[\frac{1}{2}(u^2-v^2-w^2)\frac{\partial x}{\partial n}+uv\frac{\partial y}{\partial n}+uw\frac{\partial z}{\partial n}\Big]dS',$$

где S', как и ранее, полная площадь поверхностей, окружающих особенности. Полезно заметить, что в пределе, когда S' стремится к нулю, на интеграл могут влиять только члены с квадратами длины в знаменателе. Конечное значение интеграла будет следующим:

$$\frac{\rho}{2}\int V_r^2\frac{\partial x}{\partial n}dS=-4\pi\rho\Big[\int M'''udW+$$

$$+\sum\Big(Mu'+\Delta_x\frac{\partial u'}{\partial x}+\Delta_y\frac{\partial u'}{\partial y}+\Delta_z\frac{\partial u'}{\partial z}\Big)\Big], \qquad (63)$$

где u' — скорость (в месте нахождения особенности), обусловленная всеми внешними воздействиями. Можно показать, что при вычислении силы и момента воздействия внутренних особенностей пренебрежимы. Эти воздействия играют роль внутренних сил, которые всегда встречаются в виде равных и противоположных пар. Аналогичные результаты для моментов показывают к тому же допустимость локализации сил при данных положениях особенностей.

Пример 8. Через тонкую трубку с открытым концом, погруженную в большой резервуар, вода удаляется с расходом 4π кубических футов в 1 *сек*. Принимая безвихревое движение и используя теорему Легалли, установить усилие на шар диаметром 1 фут, который прикреплен так, что его центр находится в 3 футах от конца трубки. Сравнить результаты с точными величинами, полученными из следующей формулы:

$$F=\frac{4\pi M^2\rho a^3}{R(R^2-a^2)^2},$$

где R — расстояние от стока до центра шара, a — радиус шара и M — напряжение стока.

---

* W_* — здесь объем.

Допустим, что шар может быть заменен диполем, расположенным в его центре, с напряжением, достаточным для обеспечения шара единичного диаметра равномерным движением. Тогда

$$-2\Delta = MUa^3; \quad \phi = \frac{M}{R}; \quad U = \frac{\partial \phi}{\partial R} = -\frac{M}{R^2};$$

$$\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{2M}{R^3}.$$

Из теоремы Легалли для $M = Q/4\pi$ кубических футов в 1 *сек*

$$F = -4\pi\rho\Delta\frac{\partial U}{\partial R} = -4\pi\rho\left(\frac{a^3}{2R^2}\right)\left(\frac{2}{R^3}\right) = -\frac{4\pi\rho a^3}{R^5} = 6{,}46\cdot 10^{-3} \text{ фунта}.$$

Ошибка в этом решении составляет

$$\frac{R^5}{R(R^2-a^2)^2} - 1 = \frac{a^2(2R^2-a^2)}{(R^2-a^2)^2}.$$

Для данных условий ошибка равна примерно 5%.

B. Математическая техника решения задач

34. Разделение переменных. Кроме специальных методов, заключающихся в нахождении функции потенциала или функции тока, соответствующей данным граничным условиям, существует несколько способов, основанных на решении уравнения Лапласа как обычного дифференциального уравнения в частных производных. Вследствие широкого использования в прикладной математике это уравнение подвергалось глубокому изучению, в результате чего было разработано несколько общих методов его решения. Три из них — разделение переменных, отражение и распределение особенностей — будут рассмотрены в данном разделе.

Если уравнение Лапласа выражено в символах некоторой ортогональной системы координат α, β и γ, общие решения представляют собой произведение трех функций, каждая из которых зависит только от одного переменного, т. е. $\phi(\alpha, \beta, \gamma) = F(\alpha)G(\beta)H(\gamma)$. Ценность решений такого типа заключается в простоте их формы, а также в том, что они могут использоваться в ряду для удовлетворения общих граничных условий. Как видно, эта возможность является свойством ортогональности разделимых функций, которое будет более подробно описано в следующих пунктах. Вследствие ортогональности эти функции могут быть использованы в ряду для представления более или менее произвольных функций; наглядным примером данной операции является обычный тригонометрический ряд Фурье.

Ряд Фурье. Используя систему декартовых координат, примем решение вида

$$\phi = X(x)Y(y)Z(z).$$

Подставляя эту функцию в уравнение Лапласа, получим

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2} + ZX\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2} = 0,$$

или после деления на ϕ

$$\frac{1}{X}\cdot\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\cdot\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\cdot\frac{d^2Z}{dz^2}=0.$$

Каждый член этого уравнения зависит от различной независимой переменной и, следовательно, должен быть постоянной величиной. Если член равен нулю, соответствующее решение представляет линейную функцию, т. е. $X=\alpha x+\beta$. Если ни одна из постоянных не равна нулю, решение дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{X}\cdot\frac{d^2X}{dx^2}=-m^2;\quad\frac{1}{Y}\cdot\frac{d^2Y}{dy^2}=-n^2;$$
$$\frac{1}{Z}\cdot\frac{d^2Z}{dz^2}=m^2+n^2=l^2$$

имеет следующий вид:

$$X=a_m\cos mx+b_m\sin mx;$$
$$Y=c_n\cos ny+d_n\sin ny;$$
$$Z=Ee^{lz}+Fe^{-lz},$$

где a_m, b_m, c_n, d_n, E и F — произвольные постоянные. В соответствии с первоначально принятым решением получим окончательное решение в виде произведения

$$\phi=(a_m\cos mx+b_m\sin mx)(c_n\cos ny+d_n\sin ny)\left(Ee^{lz}+Fe^{-lz}\right).$$

Суммы решений вышеуказанного типа являются также решениями, и если бесконечный ряд однородно сходящийся, общее решение составляет

$$\phi=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(a_i\cos m_ix+b_i\sin m_ix)\times$$
$$\times(c_j\cos n_jy+d_j\sin n_jy)\left(Ee^{lz}+Fe^{-lz}\right),\qquad(64)$$

где величины m_i и n_j определяются граничными условиями, а сумму $E+F$ можно принять равной единице. Когда $z=0$, потенциал в уравнении (64), очевидно, имеет вид двойного ряда Фурье. Если значения потенциала заданы (задача Дирихле) на плоскости z как $\phi+f(x, y)$, где $f(x, y)$ является периодической функцией с периодами 2π в обоих направлениях x и y, так что m_i и n_j могут быть взяты как целые числа i и j, раскрытие $f(x)$ в ряд Фурье определяет значение неустановленных коэффициентов в уравнении (64) и таким образом дает решение. Эти коэффициенты получаются путем использования ортогональных отношений для тригонометрических функций:

$$\int_0^{2\pi} \cos rx \cos sx dx = \begin{cases} 0, r \neq s; \\ \pi, r = s \neq 0; \\ 2\pi, r = s = 0; \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos rx \sin sx dx = 0, \quad (r, s — \text{целые числа});$$

$$\int_0^{2\pi} \sin rx \sin sx dx = \begin{cases} 0, r \neq s \text{ или } r = s = 0; \\ \pi, r = s > 0. \end{cases}$$

Так, умножение уравнения (64) на $\cos ix \cos jy$ при $i, j > 0$ и интегрирование одного члена за другим относительно x и y от 0 до 2π дает

$$a_i c_j = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) \cos ix \cos jy dx dy.$$

Аналогичным образом могут быть получены произведения $a_i d_j$ и $b_i d_i$, которые завершат определение выражения для ϕ в уравнении (64).

Если вместо ряда Фурье используется интеграл Фурье, потенциал может быть выражен в интегральной форме. Для двухмерного случая, когда $\phi = \phi(x, z)$, функция потенциала представляется интегралом, подынтегральное выражение которого является произведением типа $X(x) Z(z)$:

$$\phi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (Ee^{kz} + Fe^{-kz}) dk \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos k(\xi - x) d\xi. \qquad (65)$$

Это сводится к интегралу Фурье для $f(x)$, когда $z = 0$.

Примером вышеизложенной теории можно считать случай двухмерных гравитационных волн малой амплитуды, движущихся вдоль свободной поверхности. Предполагается, что жидкость невязкая и несжимаемая, а поток безвихревой. Начало координат взято в спокойной точке на свободной поверхности, ось x горизонтальна и перпендикулярна фронту волны, ось y направлена вертикально вверх. Требуется решить двухмерное уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

с граничным условием $p = \text{const}$ на свободной поверхности.

Если $y = \eta(x, t)$ является уравнением свободной поверхности, общее граничное условие [уравнение (22)] дает

$$\frac{D}{Dt} [y - \eta(x, t)]_{y=\eta} = \left[v - u \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]_{y=\eta} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0,$$

а уравнение Бернулли дает

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2\right)_{y=\eta} + g\eta = C.$$

Принятое условие малой амплитуды волн позволяет пренебречь нелинейными членами в двух предыдущих уравнениях, так что они приобретают вид:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t}; \qquad \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{\eta} + g\eta = C,$$

отсюда путем исключения η получаем

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{\eta} = 0. \tag{66}$$

Принимая во внимание разложение Тэйлора вокруг $y=0$ из членов в скобках, видим, что данное выше уравнение отличается от

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$

более высоким порядком членов. Последняя форма граничного условия свободной поверхности имеет важное преимущество, поскольку она выражает известную и фиксированную поверхность $y=0$. Если допустить, что $\phi = T(t)\,\phi'(x, y)$, из предыдущего уравнения получим:

$$\frac{d^2T}{dt^2}\phi'(x, 0) + gT\left(\frac{\partial \phi'}{\partial y}\right)_0 = 0,$$

что при разделении переменных дает

$$T = A\cos \omega t + B \sin \omega t$$

и

$$\left(\frac{\partial \phi'}{\partial y} - \frac{\omega^2}{g}\phi'\right)_{y=0} = 0 \tag{67}$$

— граничное условие типа Коши на свободной поверхности.

Поскольку $\phi'(x, y)$ также удовлетворяет двухмерному уравнению Лапласа, разделение переменных подсказывает решение в виде

$$\phi' = (C\cos kx + D\sin kx)\,(Ee^{ky} + Fe^{-ky}).$$

При наличии твердой границы у $y=-h$ дополнительное граничное условие $\partial\phi/\partial y = 0$ при $y=-h$ дает

$$\phi' = (C\cos kx + D\sin kx)\operatorname{ch} k(y + h).$$

Подставляя ϕ' в уравнение (67), получаем

$$\omega^2 = kg \operatorname{th} kh.$$

Комбинация двух решений вышеуказанного типа

$$\phi = A(\sin kx\cos\omega t - \cos kx\sin\omega t)\operatorname{ch} k(y+h) =$$
$$= A\sin(kx-\omega t)\operatorname{ch} k(y+h) \qquad (68)$$

представляет собой очертание волны длиной $\lambda=2\pi/k$ и угловой частотой ω, продвигающейся в направлении x с фазовой скоростью $U=\omega/k$. С учетом приведенного выше уравнения для ω^2 эта скорость составляет

$$U^2 = \frac{\lambda g}{2\pi}\operatorname{th}\frac{2\pi h}{\lambda}. \qquad (69)$$

Для глубоководной зоны ($h/\lambda>0{,}5$) получаем

$$U = \sqrt{g\lambda/2\pi}^{1/2};$$

для мелководной зоны ($h/\lambda<0{,}02$) уравнение (69) приобретает вид

$$U \approx \left(\frac{\lambda g}{2\pi}\cdot\frac{2\pi h}{\lambda}\right)^{1/2} = \sqrt{gh}.$$

Профиль волны на свободной поверхности, полученный подстановкой ϕ из уравнения (68) в уравнение (66), взятое при $y=0$, имеет вид

$$\eta = a\cos(kx-\omega t).$$

Применим метод разделения переменных к уравнению Лапласа в плоскости полярных координат

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}=0,$$

полагая, что $\phi(r,\theta)=R(r)S(\theta)$. Это дает

$$\frac{r^2}{R}\cdot\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\cdot\frac{dR}{dr}+\frac{1}{S}\cdot\frac{d^2S}{d\theta^2}=0.$$

Так как первые два члена зависят только от r, а третий только от θ, каждая группа в отдельности должна быть постоянна:

$$\frac{1}{S}\cdot\frac{d^2S}{d\theta^2}=-n^2;\qquad \frac{r^2}{R}\cdot\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\cdot\frac{dR}{dr}=n^2.$$

Общие решения этих дифференциальных уравнений следующие:

$$S = a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta \text{ при } n\neq 0;$$
$$S = \alpha\theta+\beta \text{ при } n=0;$$
$$R = Ar^n + Br^{-n} \text{ при } n\neq 0;\quad R = c\ln r + d \text{ при } n=0,$$

так что получаются гармонические функции

$$\phi = \left(Ar^n+\frac{B}{r^n}\right)(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)+(\alpha\theta+\beta)(c\ln r+d).$$

Сумма конечного числа таких решений также гармонична; если ряд однородно сходящийся, получаем функцию потенциала

$$\varphi = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(Ar^{n_i} + \frac{B}{r^{n_i}}\right)(a_i \cos n_i\theta + b_i \sin n_i\theta) + \\ + (\alpha\theta + \beta)(c \ln r + d). \qquad (70)$$

Предыдущий результат может быть применен к решению задач Дирихле и Неймана для круга. Первая функция $f(\theta)$ берется как заданные значения потенциала на единичной окружности с центром в начале координат; это кусочно-непрерывная однородная функция, т. е. кусочно-непрерывная неразрывная функция с кусочно-непрерывными неразрывными производными. Если необходимо найти потенциал, который удовлетворяет данному граничному условию, является однозначным и не имеет особенностей внутри круга (внутренняя задача), в уравнении (70) можно принять величины $A=1$, $B=\alpha=c=0$; если необходимо решить наружную задачу, можно принять величины $A=0$ и $B=1$. В любом случае, когда $r=1$, граничное условие дает

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) + \alpha\theta,$$

что, за исключением члена $\alpha\theta$, соответствующего циркуляции вокруг цилиндра в наружной задаче, является разложением $f(\theta)$ в ряд Фурье. Следовательно, уравнение (70) дает решение внутренней или внешней задачи Дирихле для круга.

Следующая функция $g(\theta)$ берется как заданные значения нормальной производной потенциала на единичной окружности. Если снова допустить, что потенциал выражается в форме уравнения (70), нормальная производная потенциала для $r=1$ составляет [когда $g(\theta)$ однозначна]:

$$g(\theta) = c + \sum_{n=1}^{\infty} n(A - B)(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

Если принять $A=1$, $B=0$ для внутренней задачи и $A=0$, $B=1$ для наружной задачи, разложение $g(\theta)$ в ряд Фурье дает соответственно:

$$c = 0; \quad a_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n\theta d\theta;$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin n\theta d\theta$$

и

$$c = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta;$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n\theta d\theta;$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin n\theta d\theta.$$

При этих значениях постоянных уравнение (70) дает решение наружной и внутренней задач Неймана для круга.

Функции Лежандра. Принятие в уравнении Лапласа

$$\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\phi}{\partial R}\right)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}=0,$$

записанном в сферических координатах (R, ϑ, φ), решения $\phi = F(R)G(\vartheta)H(\varphi)$ приводит к следующему разделению переменных:

$$\frac{1}{F}\cdot\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dF}{dR}\right)+\frac{1}{G\sin\vartheta}\cdot\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dG}{d\vartheta}\right)+$$
$$+\frac{1}{H\sin^2\vartheta}\cdot\frac{d^2H}{d\varphi^2}=0.$$

Поскольку первый член зависит только от R, его можно приравнять постоянной в виде $n(n+1)$:

$$R^2\frac{d^2F}{dR^2}+2R\frac{dF}{dR}-n(n+1)F=0.$$

Предполагая, что F имеет вид R^m, при помощи подстановки находим, что $m=n$ или $m=-(n+1)$. Отсюда общее решение для F составляет

$$F = AR^n+\frac{B}{R^{n+1}}.$$

Оставшиеся в уравнении Лапласа члены теперь удовлетворяют соотношению

$$\frac{\sin\vartheta}{G}\cdot\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dG}{d\vartheta}\right)+n(n+1)\sin^2\vartheta+\frac{1}{H}\cdot\frac{d^2H}{d\varphi^2}=0,$$

где последний член зависит только от φ и, следовательно, также будет постоянной величиной. Произвольное приравнивание этой постоянной к $-s^2$ приводит к решению (имеются в виду только однозначные функции):

$$H = a_s\cos s\varphi+b_s\sin s\varphi.$$

Наконец, при подстановке $\mu = \cos\vartheta$ уравнение для G получает вид

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dG}{d\mu}\right] + \left[n(n+1) - \frac{s^2}{1-\mu^2}\right]G = 0. \qquad (71)$$

Когда n и s — положительные целые числа, для решения этого однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка используются хорошо известные полиномы и присоединенные функции Лежандра. Общее решение уравнения имеет вид:

$$G = cP_n^s(\mu) + dQ_n^s(\mu), \qquad (72)$$

где c и d — постоянные, а $s \leqslant n$. Функции вида

$$P_n(\mu) \equiv P_n^0(\mu) = \frac{1}{2^n n} \cdot \frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n$$

являются полиномами Лежандра в степени n, а функции вида

$$P_n^s(\mu) = (1-\mu^2)^{s/2}\frac{d^s P_n(\mu)}{d\mu^s}$$

представляют присоединенные функции Лежандра первого рода и функции вида

$$Q_n(\mu) = Q_n^0(\mu) = \frac{1}{2}P_n(\mu)\ln\frac{1+\mu}{1-\mu} -$$

$$-\frac{2n-1}{1(n)}P_{n-1} - \frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3} - \cdots;$$

$$Q_n^s(\mu) = (1-\mu^2)^{s/2}\frac{d^s Q_n(\mu)}{d\mu^s}$$

— присоединенные функции Лежандра второго рода. Таким образом:

$$P_0(\mu) = 1; \quad P_1(\mu) = \mu;$$

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2-1); \quad P_3(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^3-3\mu);$$

$$Q_0(\mu) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}; \quad Q_1(\mu) = \frac{\mu}{2}\ln\frac{1+\mu}{1-\mu} - 1;$$

$$Q_2(\mu) = \frac{1}{4}(3\mu^2-1)\ln\frac{1+\mu}{1-\mu} - \frac{3}{2}\mu;$$

$$Q_3(\mu) = \frac{1}{4}(5\mu^2-3\mu)\ln\frac{1+\mu}{1-\mu} - \frac{5}{2}\mu^2 + \frac{2}{3}.$$

Функции Лежандра разделяют с тригонометрическими функциями свойство возможности выражения кусочно-непрерывных однородных функций в виде бесконечного ряда их членов. Это свойство является следствием «ортогональности» семейства функций;

семейство функций $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$, ... называют ортогональным, если для некоторого интервала от a до b $\int_a^b \psi_m \psi_n dx = 0$ при $m \neq n$. Например, функции $\sin mx$ и $\cos nx$ ортогональны в интервале от 0 до 2π. Для случая $m=n$ можно допустить, что $\int_a^b \psi_n^2 \, dx = c_n$. Наконец, можно предположить, что функция $f(x)$ может быть выражена как ряд:

$$f(x) = a_1\psi_1(x) + a_2\psi_2(x) + a_3\psi_3(x) + \cdots.$$

Коэффициенты a_n могут быть вычислены путем умножения уравнения соответственно на $\psi_n(x)$ и интегрирования членов одного за другим. Таким образом, получаем

$$\int_a^b f(x)\,\psi_n(x)\,dx = a_n \int_a^b \psi_n^2\,dx = a_n c_n.$$

Можно показать, что функции Лежандра первого рода ортогональны в интервале от —1 до 1, т. е.

$$\int_{-1}^{1} P_m^s(\mu)\,P_n^s(\mu)\,d\mu = 0 \text{ при } m \neq n;$$

$$\int_{-1}^{1} \left[P_n^s(\mu)\right]^2 d\mu = \frac{(n+s)!}{(n-s)!} \cdot \frac{2}{2n+1}.$$

Комплектование произведения $F(R)\,G(\vartheta)\,H(\varphi)$ и создание бесконечного ряда таких членов приводит к общей потенциальной функции

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n} \left(AR^n + \frac{B}{R^{n+1}}\right)\left[cP_n^s(\mu) + dQ_n^s(\mu)\right] \times$$
$$\times \left(a_n^s \cos s\varphi + b_n^s \sin s\varphi\right). \qquad (73)$$

Здесь $A=1$, $B=0$ для внутренней задачи и $A=0$, $B=1$ для наружной задачи.

Для иллюстрации приложения вышеизложенной теории применим ее к решению наружной задачи Дирихле для шара. Допустим, что функция $\phi = f(\mu, \varphi)$ конечна за шаром и пригодна для разложения в следующую форму:

$$f(\mu,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}P_n(\mu) + \sum_{s=1}^{\infty} P_n^s(\mu)\left(a_n^s \cos s\varphi + b_n^s \sin s\varphi\right)\right],$$

в которой члены, содержащие $Q_n^s(\mu)$, должны быть опущены по граничному условию. Тогда

$$\left.\begin{matrix} a_n^s \\ b_n^s \end{matrix}\right\} = \frac{2n+1\,(n-s)!}{2\pi\,(n+s)!} \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} f(\mu, \varphi)\, P_n^s(\mu) \left\{\begin{matrix} \cos s\varphi \\ \sin s\varphi \end{matrix}\right\} d\mu d\varphi$$

и по уравнению (73) соответствующая потенциальная функция для наружной задачи составит

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \left[\frac{a_n}{2} P_n(\mu) + \sum_{s=1}^{\infty} P_n^s(\mu) \left(a_n^s \cos s\varphi + b_n^s \sin s\varphi \right) \right].$$

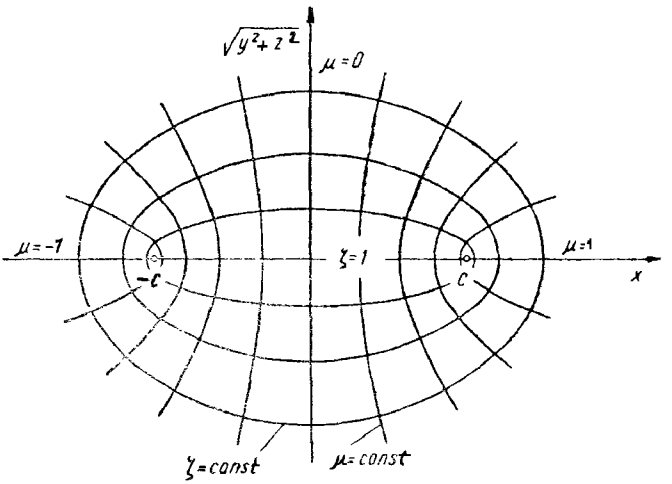


Рис. 29. Конфокальная координатная система

Функции Лежандра встречаются также при применении метода разделения переменных к ортогональным координатам, полученным внутренними сечениями семейства конфокальных растянутых эллипсоидов вращения и семейства конфокальных гиперболоидов (рис. 29). Если записать

$$x = c\mu\zeta; \quad y = c\,(1-\mu^2)^{1/2}\,(\zeta^2-1)^{1/2}\cos\varphi;$$
$$z = c\,(1-\mu^2)^{1/2}\,(\zeta^2-1)^{1/2}\sin\varphi, \qquad (74)$$

где $|\mu| \leqslant 1$ и $\zeta \geqslant 1$, видно, что поверхности $\zeta = \text{const}$ представляют эллипсоиды, а $\mu = \text{const}$ — гиперболоиды с общими фокусами в точках $(\pm c, 0, 0)$. Координаты μ, ζ, φ образуют ортогональную систему координат, относительно которой уравнение Лапласа может быть записано в виде (см. приложение):

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial\phi}{\partial\mu}\right] + \frac{1}{1-\mu^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\right] + \frac{1}{1-\zeta^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}. \qquad (75)$$

Принимая $\phi = F(\mu)\,G(\zeta)\,H(\varphi)$, получим

$$\frac{1}{F}\cdot\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dF}{d\mu}\right]+\frac{1}{H(1-\mu^2)}\frac{d^2H}{d\varphi^2}=$$

$$=\frac{1}{G}\cdot\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{dG}{d\zeta}\right]+\frac{1}{H(1-\zeta^2)}\cdot\frac{d^2H}{d\varphi^2}$$

и отсюда, поскольку функции μ и ζ находятся в разных частях уравнения, его члены могут быть приравнены к такой же функции от φ, например $f(\varphi)$. Путем дифференцирования относительно φ найдено, что $df/d\varphi$ есть функция от φ и μ, подразумевающая, что $f(\varphi)$ — постоянная величина. Если эту постоянную записать в форме $n(n+1)$ и переменные снова разделить в каждом из образовавшихся уравнений, получим, что $H(\varphi)$ имеет вид

$$H(\varphi) = a_s \cos s\varphi + b_s \sin s\varphi$$

и что как $F(\mu)$, так и $G(\zeta)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению Лежандра (71), общий вид решения которого представлен уравнением (72). Если требуется, чтобы потенциал был конечным на поверхности любого эллипсоида $\zeta=\text{const}$, когда μ изменяется от -1 до 1, тогда произведение $F(\mu)\,G(\zeta)\,H(\varphi)$ может быть приведено к форме бесконечного ряда таких членов

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n} P_n^s(\mu)\left[cP_n^s(\zeta)+dQ_n^s(\zeta)\right](a_n^s\cos s\varphi + b_n^s \sin s\varphi), \qquad (76)$$

где, поскольку $\zeta>1$, выражения для P_n^s и Q_n^s должны быть преобразованы в следующие:

$$P_n^s(\zeta) = (\zeta^2-1)^{s/2}\frac{d^sP_n(\zeta)}{d\zeta^s};$$

$$Q_n^s(\zeta) = (\zeta^2-1)^{s/2}\frac{d^sQ_n(\zeta)}{d\zeta^s}.$$

Так как предельный эллипсоид, соответствующий $\zeta=1$, представляет сегментную линию по оси x от -1 до 1, вдоль которой $Q_n^s(\zeta)$ делается бесконечной, принимаем $c=1$, $d=0$ для внутренней задачи и (чтобы избежать бесконечного потенциала в бесконечности) $c=0$, $d=1$ для наружной задачи. Для осесимметричных потоков ϕ не зависит от φ и в уравнении (76) проявляются только члены с $s=0$.

В качестве примера применения уравнения (76) рассмотрим случай движения эллипсоида параллельно экваториальной оси, например, оси y. Если a и b представляют большую и малую полуоси эллипсоида, а e — его эксцентриситет, тогда из уравнений (74) $e=1/\zeta_0$, $a=c\zeta_0$ и $b=c(\zeta_0^2-1)^{1/2}$. Если V — скорость перемещения эллипсоида в положительном направлении оси y, граничное условие на эллипсоиде составляет

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial \zeta}\right|_{\zeta_0} = V \left.\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right|_{\zeta_0} = \frac{Vc\zeta_0 (1-\mu^2)^{1/2} \cos\varphi}{(\zeta_0^2-1)^{1/2}}.$$

Приравнивая это выражение производной от ϕ в уравнении (76) для $c=0$ и $d=1$, путем сравнения с множителем при $\cos\varphi$ видим, что только члены с $s=1$ следует сохранить; кроме того, поскольку множитель $(1-\mu^2)^{1/2}$ есть P_1^1, нет необходимости раскрывать $(1-\mu^2)^{1/2}$ в ряд функций Лежандра, как это обычно делают. Таким образом, получаем

$$a_1 \left.\frac{dQ_1^1}{d\zeta}\right|_{\zeta_0} = \frac{Vc\zeta_0}{(\zeta_0^2-1)^{1/2}}.$$

Но

$$Q_1^1(\zeta) = (\zeta^2-1)^{1/2} \frac{dQ_1}{d\zeta} = \frac{1}{2}(\zeta^2-1)^{1/2}\left[\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - \frac{2\zeta}{\zeta^2-1}\right].$$

Отсюда искомый потенциал составляет

$$\phi = a_1 P_1^1(\mu) Q_1^1(\zeta)\cos\varphi =$$

$$= \frac{a_1}{2}(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2-1)^{1/2}\left[\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - \frac{2\zeta}{\zeta^2-1}\right]\cos\theta,$$

где

$$a_1 = \frac{cV}{\frac{1}{2}\ln\frac{\zeta_0+1}{\zeta_0-1} - \frac{\zeta_0^2-2}{\zeta_0(\zeta_0^2-1)}}.$$

Функции Бесселя. Если принять, что уравнение Лапласа в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

имеет решения в форме $\phi = F(r)G(\theta)H(z)$, получим

$$\frac{1}{F}\cdot\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{rF}\cdot\frac{dF}{dr} + \frac{1}{r^2G}\cdot\frac{d^2G}{d\theta^2} + \frac{1}{H}\cdot\frac{d^2H}{dz^2} = 0.$$

Рассматриваются лишь однозначные решения. Поскольку переменная z появляется только в четвертом члене, приравнивание ее постоянной k^2 дает решение

$$H(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz},$$

где A и B — постоянные величины. Заменяя четвертый член на k^2 и умножая получающееся уравнение на r^2, выделим третий член как функцию только θ, и, полагая, следовательно, его равным постоянной $-s^2$, находим решение

$$G(\theta) = a_s\cos s\theta + b_s\sin s\theta.$$

Оставшиеся члены могут быть записаны в виде выражения

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dF}{dr} + \left(k^2 - \frac{s^2}{r^2}\right) F = 0, \tag{77}$$

которое является дифференциальным уравнением для функций Бесселя. Его общее решение таково:

$$F(r) = cJ_s(kr) + dN_s(kr),$$

где c и d — постоянные, а J_s и N_s — функции Бесселя порядка s первого и второго рода соответственно. Когда s положительное целое число, они составляют выражение

$$J_s(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^s \left[\frac{1}{s!} - \frac{(x/2)^2}{1\,(s+1)!} + \frac{(x/2)^4}{2!\,(s+2)!} - \frac{(x/2)^6}{3!\,(s+3)!} + \cdots\right],$$

которое сходится для всех значений x, и выражение

$$\frac{\pi}{2} N_s(x) = J_s(x)\left[\ln\frac{x}{2} - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{s}\right) + 0{,}577\cdots\right] -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+s}{n\,(n+s)} J_{2n+s} + \frac{s!}{2} \sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n-s} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-s} \frac{J_n}{n!}.$$

Таким образом, подставляя решения для $F(r)$, $G(\theta)$ и $H(z)$ в произведение FGH и создавая бесконечный ряд таких членов, получим

$$\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} [c_j J_s(k_{sj} r) + d_j N_s(k_{sj} r)]\,(a_s \cos s\theta + b_s \sin s\theta) \times$$

$$\times \left(Ae^{k_{sj} z} + Be^{-k_{sj} z}\right), \tag{78}$$

где можно допустить, что $A+B=1$, а величины k_{sj} определяются граничными условиями. Эти определяющие k_{sj} граничные условия могут быть записаны в общей форме:

$$C_1 F(a) + C_2 \frac{dF(a)}{dr} = 0;$$

$$C_3 F(b) + C_4 \frac{dF(b)}{dr} = 0, \tag{79}$$

где $|C_1| + |C_2| > 0$, $|C_3| + |C_4| > 0$, а цилиндры $r=a$ и $r=b$ при $a<b$ являются границами системы. Условия (79) подходят для определения не только k_{sj}, но и отношения d_j/c_j. Когда зона жидкости включает линию $r=0$, первое из условий (79) заменяется требованием, чтобы $F(0)$ была конечной величиной. Это требование удовлетворяется, если значение b_j принять равным нулю.

Функции $J_s(k_{sj}r) + (d_j/c_j)N_s(k_{sj}r)$ ортогональны относительно значения функции r в интервале $a \leqslant r \leqslant b$, т. е.

$$\int_a^b r\left[J_s(k_{si}r) + \frac{d_i}{c_i}N_s(k_{si}r)\right]\left[J_s(k_{sj}r) + \frac{d_j}{c_j}N_s(k_s r)\right]dr = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j; \\ C_{sj} > 0, & \text{если } i = j. \end{cases} \quad (80)$$

В особых случаях, когда $d_j = 0$ (т. е. когда $a = 0$), постоянная C_{sj} в уравнении (80) имеет вид

$$C_{sj} = \frac{1}{2}b^2\left\{\left[J_s'(k_{sj}b)\right]^2 + \left(1 - \frac{s^2}{k_{sj}^2 b^2}\right)\left[J_s(k_{sj}b)\right]^2\right\},$$

где штрих обозначает дифференцирование относительно аргумента. Если значение C_4 подобно d_j равно нулю, тогда $J_s(k_{sj}b) = 0$ и $C_{sj} = {}^1/_2 b^2[J_s'(k_{sj}b)]^2$. Если значение C_3 подобно d_j равно нулю, тогда $J_s'(k_{sj}b) = 0$ и

$$C_{sj} = \frac{1}{2}b^2\left(1 - \frac{s^2}{k_{sj}^2 b^2}\right)[J_s(k_{sj}b)]^2.$$

Для примера рассмотрим случай вибрирования круглой пластины единичного радиуса, расположенной в начале координат и перпендикулярной оси z; окружность пластины ограничена так, что нормальная скорость пластины $\partial\phi/\partial z$ равна нулю, когда $r = 1$ и $z = 0$. Поскольку потенциал конечен, когда $r = 0$ и когда $z = \infty$, следует принять $d_j = A = 0$ и тогда $B = 1$ в уравнении (78) и $C_4 = 0$, а $b = 1$ в уравнении (79). Следовательно, мгновенный потенциал скорости имеет следующий вид:

$$\phi = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} c_j J_s(k_{sj}r)(a_s \cos s\theta + b_s \sin s\theta)\, e^{-k_{sj}z}.$$

Условие на окружности пластины видимо удовлетворено, так как $J_s(k_{sj}) = 0$. Если мгновенная нормальная скорость у пластины задана в виде $\partial\phi/\partial z = f(r,\theta)$ при $z = 0$, тогда

$$f(r,\theta) = -\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} c_j k_{sj} J_s(k_{sj}r)(a_s \cos s\theta + b_s \sin s\theta),$$

где произведения $c_j a_s$ и $c_j b_s$ могут быть установлены применением ортогональности. Так, если $s > 0$,

$$c_j a_s = -\frac{2}{\pi k_{sj}\left[J_s'(k_{sj})\right]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r f(r,\theta) J_s(k_{sj}r)\cos s\theta\, dr\, d\theta.$$

35. Метод отражений. Как указано ранее, формы тела или границы потока в теории потенциальных течений представляются просто поверхностями тока, геометрически подобными очертаниям твердых границ, имеющих практический интерес; поскольку задача напряжений сдвига у границы не рассматривается, то никаких трудностей из-за этого представления не возникает, ибо поток не проникает ни через эти поверхности, ни через твердые границы. Однако, как видно из уравнений для функций потенциала или тока, математическое поле беспредельно, и здесь существует кажущееся поле потока по обе стороны любой выбранной поверхности тока, например, в случае моделирования потока, обтекающего шар, исследование уравнений покажет, что неразрывное поле движения распространяется на произвольно большое расстояние, выравниваясь после шарообразной поверхности тока к диполю в центре. Поскольку любое другое замкнутое тело должно также включать особенности, подобным же образом поля потока будут существовать по обеим сторонам границы и поток будет всегда заканчиваться у внутренних особенностей. Эта система внутренних особенностей считается как бы отражением их наружной части. Если может быть найдено расположение, природа и напряжение этих отраженных особенностей, их потенциалы вместе с потенциалами механизмов течения, воспроизводящих наружный поток, дадут полный потенциал для потока вокруг тела. Оценка этих потенциалов, однако, вообще является трудной задачей. Только для случаев шарообразной, круглой или плоской границ имеются способы, пригодные для определения отражений.

В случае плоской границы отражение становится тотчас же очевидным по симметрии. Если источник напряжением M расположен на единичном расстоянии от плоскости, система координат может быть выбрана так, чтобы источник находился в точке $(1, 0, 0)$. Если принять, что отраженный источник с таким же напряжением находится в точке $(-1, 0, 0)$, по симметрии ясно, что плоскость yz будет поверхностью тока получающегося потока. Таким образом, потенциал составляет:

$$\phi = -M\left\{\frac{1}{[(x-1)^2+y^2+z^2]^{1/2}} + \frac{1}{[(x+1)^2+y^2+z^2]^{1/2}}\right\}.$$

Аналогично в двухмерном случае у источника напряжением m в точке $(1, 0)$ существует отражение относительно оси x с тем же напряжением в точке $(-1, 0)$, а получающийся потенциал равен

$$\phi = \frac{m}{2}\ln\left[(x-1)^2+y^2\right]\left[(x+1)^2+y^2\right].$$

Результат для источника вблизи плоскости является особым случаем источника вне шара. Если центр шара радиусом a находится в начале координатной системы xyz, а источник напряжением M расположен в точке $(c, 0, 0)$, причем $c>a$, легко доказать, что система отражения состоит из источника напряжением

Ma/c в противолежащей точке $(a^2/c, 0, 0)$ и равномерного линейного стока с линейной плотностью M/a, протянувшегося от противолежащей точки к центру шара. Доказательство основывается на том, что $\partial\phi/\partial n=0$, когда $z=a$, где ϕ — результирующий потенциал, обусловленный источником и отражениями:

$$\phi = \frac{M}{[(x-c)^2+y^2+z^2]^{1/2}} + \frac{Ma/c}{[(x-a^2/c)^2+y^2+z^2]^{1/2}} - \frac{M}{a}\int_0^{a^2/c} \frac{d\xi}{[(x-\xi)^2+y^2+z^2]^{1/2}}.$$

Обычно, когда произвольный безвихревый поток несжимаемой невязкой жидкости возмущается шаром, результирующий потенциал представляется замечательной теоремой Вейса, известной как теорема о шаре. Функция $\phi_0(R, \vartheta, \varphi)$ обозначает первоначальный потенциал скорости, а $\phi(R, \vartheta, \varphi)=\phi_0+\phi_1(R, \vartheta, \varphi)$ — потенциал возмущения, получающийся после введения шара радиусом a в начало координат. Предполагается, что ϕ_0 не имеет особенностей, расположенных на поверхности или внутри шара. Тогда теорема о шаре гласит, что потенциал ϕ_1 при $\partial\phi/\partial R=0$ на шаре составляет

$$\phi_1 = \frac{a}{R}\phi_0\left(\frac{a^2}{R}, \vartheta, \varphi\right) - \frac{2}{aR}\int_0^a \lambda\phi_0\left(\frac{\lambda^2}{R}, \vartheta, \varphi\right) d\lambda. \qquad (81)$$

Для доказательства этой теоремы нужно прежде всего показать, что члены правой части уравнения (81) гармоничны для $R>a$. Подставляя первый член в уравнение Лапласа в обозначениях сферической координатной системы и принимая $R'=a^2/R$, находим, что

$$-a\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial R}\left(\phi_0 + R'\frac{\partial\phi_0}{\partial R'}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{a}{R}\sin\vartheta\frac{\partial\phi_0}{\partial\vartheta}\right) + \frac{a}{R}\csc\vartheta\frac{\partial^2\phi_0}{\partial\varphi^2} = \frac{a}{R}\left[\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial R'}\left(R'^2\frac{\partial\phi_0}{\partial R'}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\phi_0}{\partial\vartheta}\right) + \csc\vartheta\frac{\partial^2\phi_0}{\partial\varphi^2}\right] = 0$$

для $R>a$, поскольку $\phi_0(R', \vartheta, \varphi)$ гармонична для $R<a$. Это преобразование одной гармонической функции в другую путем инверсии известно как преобразование Кельвина. Так как подынтегральное выражение в последнем члене уравнения (81) имеет такую же форму, этот интеграл также должен быть гармоническим.

Остается показать, что при $R=a$

$$\frac{\partial\phi}{\partial R} = \frac{\partial\phi_0}{\partial R} + \frac{\partial\phi_1}{\partial R} = 0.$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{a}{R}\,\phi_0\left(\frac{a^2}{R},\vartheta,\varphi\right)\right]_{R=a}=\left[-\frac{a\phi_0}{R^2}-\frac{a^3}{R^3}\cdot\frac{\partial\phi_0(R',\vartheta,\varphi)}{\partial R'}\right]_a=$$

$$=-\left[\frac{\phi_0}{a}+\frac{\partial\phi_0(R,\vartheta,\varphi)}{\partial R}\right]_a$$

и

$$\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{2}{aR}\int_0^a\lambda\phi_0\left(\frac{\lambda^2}{R},\vartheta,\varphi\right)d\lambda\right]_{R=a}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{2}{a}\int_0^{a/\sqrt{R}}\frac{\lambda}{\sqrt{R}}\,\phi_0\left(\frac{\lambda^2}{R},\vartheta,\varphi\right)d\,\frac{\lambda}{\sqrt{R}}\right]_{R=a}=$$

$$=\frac{2}{a}\left(\frac{d}{dR}\cdot\frac{a}{\sqrt{R}}\right)\left[\frac{a}{\sqrt{R}}\,\phi_0(R',\vartheta,\varphi)\right]_a=-\frac{\phi_0(a,\vartheta,\varphi)}{a}\,.$$

Следовательно, подстановка в производную уравнения (81) дает

$$\frac{\partial\phi_1(a,\vartheta,\varphi)}{\partial R}=-\frac{\partial\phi_0(a,\vartheta,\varphi)}{\partial R}\,,$$

что и требовалось доказать.

В качестве первого приложения теоремы о шаре примем, что потенциал для равномерного потока равен $\phi_0=Uz=UR\cos\vartheta$. Тогда для шара в равномерном потоке будем иметь

$$\phi=UR\cos\vartheta+\frac{a}{R}\cdot\frac{Ua^2}{R}\cos\vartheta-\frac{2}{aR}\int_0^a\lambda U\frac{\lambda^2}{R}\cos\vartheta\,d\lambda=$$

$$=U\left(R+\frac{a^3}{2R^2}\right)\cos\vartheta.$$

Таким образом, отражение представляет диполь напряжением $^1/_2Ua^3$ в центре шара.

Следующая функция ϕ_0 взята как потенциал источника напряжением M в точке $(c,0,0)$ при $c>a$. Тогда

$$\phi_0=\frac{M}{[R^2-2Rc\cos\vartheta+c^2]^{1/2}}$$

и, следовательно, потенциал источника вне шара составляет

$$\phi=\frac{M}{[R^2-2Rc\cos\vartheta+c^2]^{1/2}}+\frac{Ma/R}{\left[\frac{a^4}{R^2}-\frac{2a^2c}{R}\cos\vartheta+c^2\right]^{1/2}}-$$

$$-\int_0^a\frac{(2M/aR)\,\lambda d\lambda}{\left[\frac{\lambda^4}{R^2}-\frac{2\lambda^2c}{R}\cos\vartheta+c^2\right]^{1/2}}=\frac{M}{[R^2-2Rc\cos\vartheta+c^2]^{1/2}}+$$

$$+\frac{Ma/c}{\left[R^2-\frac{2Ra^2}{c}\cos\vartheta+\frac{a^4}{c^2}\right]^{1/2}}-\int_0^{a^2/c}\frac{(M/a)\,d\xi}{[R^2-2R\xi\cos\vartheta+\xi^2]^{1/2}},$$

что подтверждает правильность предварительно заданной системы отражения для источника.

Вейсовская теорема о шаре дает отражение для системы наружного потенциала в шаре. Также должна быть указана внутренняя теорема о шаре Лудфорда, Мартинека и Еха. Если

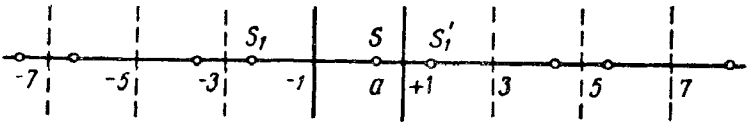


Рис. 30. Воображаемая (мнимая) система источников между параллельными пластинами

$\phi_0(R,\vartheta,\varphi)$ является потенциалом распределения полного напряжения, находящегося внутри шара $R=a$, тогда функция

$$\phi_1(R,\vartheta,\varphi)=\frac{a}{R}\phi_0\left(\frac{a^2}{R},\vartheta,\varphi\right)+\frac{2}{aR}\int_a^{\infty}\lambda\phi_0\left(\frac{\lambda^2}{R},\vartheta,\varphi\right)d\lambda \quad (82)$$

является гармонической внутри шара и на нем, удовлетворяя равенство

$$\frac{d}{\partial R}(\phi_0+\phi_1)=0 \text{ на } R=a.$$

Доказательство аналогично приведенному ранее для наружной теоремы о шаре.

Другой класс задач — с плоскими или круглыми границами, может решаться методом последовательных отражений. В качестве начального примера рассмотрим случай, когда источник M расположен в точке $(a, 0, 0)$ между параллельными плоскостями P_1 и P_2 у $x=-1$ и $x=+1$. Первые отражения источника на P_1 и P_2, обозначенные на рис. 30 как S_1 и S_1', могут служить в качестве приближения для получения потока между плоскостями, но не дают точного решения, поскольку S_1' нарушает симметрию вокруг P_1, требующуюся для того, чтобы эта плоскость могла стать поверхностью тока. Для сохранения симметрии необходимо получить отражение S_1' на плоскости P_1, однако она снова нарушается, когда S_1 отражается на плоскости P_2 с целью придания симметричности последней плоскости. Приближение к желаемому потоку увеличивается с каждым отражением, но точное решение может быть дано только бесконечным линейным рядом

источников при $x=4n+a$ и $x=4n+2-a$, когда $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Таким образом, точный потенциал выражается как бесконечный ряд потенциалов начального источника и его отражений. Отсюда очевидно, что система отражений для источника в прямоугольном канале, полученная аналогичным путем с помощью последовательных отражений в двух взаимно перпендикулярных парах параллельных плоскостей, состоит из двойного бесконечного ряда источников в плоскости, проходящей через перпендикуляр от начального источника к каналу.

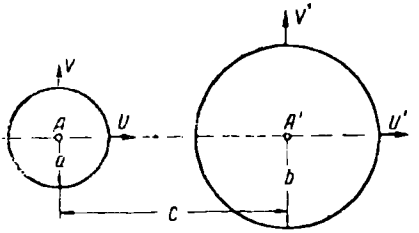


Рис. 31. Два шара, движущиеся вдоль линии их центров

Поле скоростей, обусловленное движением двух шаров в жидкости, также может обрабатываться методом последовательных отражений. Самый общий случай плоского движения двух шаров S и S' радиусами a и b с центрами A и A', расположенными на расстоянии c друг от друга, осуществляющегося с компонентами скорости U, V и U', V', показан на рис. 31. Примем, что ϕ_1, ϕ_2, ϕ_1' и ϕ_2' — потенциалы скорости, соответствующие следующим значениям компонентов скорости:

	U	V	U'	V'
ϕ_1	1	0	0	0
ϕ_2	0	1	0	0
ϕ_1'	0	0	1	0
ϕ_2'	0	0	0	1

тогда решение для общего случая составляет

$$\phi = U\phi_1 + V\phi_2 + U'\phi_1' + V'\phi_2'.$$

Справедливость этого выражения подтверждается, когда $d\phi/dn$ удовлетворяет заданные граничные условия на шарах. Кроме того, очевидно, что решения для ϕ_1' и ϕ_2' могут быть выведены из решений для ϕ_1 и ϕ_2, так что должны быть получены только последние решения.

Если бы шара S' не существовало, потенциал скорости, обусловленный движением шара S с единичной скоростью в направлении оси x, был бы таким же, как у диполя напряжением $\Delta_0 = a^3/2$ в точке A. При внесении в поле шара S' граничное условие на нем удовлетворяется путем введения системы отражения Δ_0 в S', т. е. диполя $\Delta_1' = -\Delta_0 b^3/c^3$ в точке, противолежащей A. Знак минус означает, что отражение диполя направлено вдоль отрицательной оси x. Для сохранения граничного условия на S необходимо отразить этот отраженный диполь на S, а затем новый отраженный диполь на S' и т. д. Продолжая в том же духе, получим бесконечные группы диполей в шарах S и S', расположенные в последовательных противолежащих точках:

$$\Delta_0 = \frac{a^3}{2}; \quad \Delta_1' = -\Delta_0\left(\frac{b}{c}\right)^3;$$

$$\Delta_1 = -\Delta_1'\left(\frac{a}{x_1}\right)^3; \quad \Delta_2' = -\Delta_1\left(\frac{b}{x_1'}\right)^3;$$

$$\Delta_2 = -\Delta_2'\left(\frac{a}{x_2}\right)^3; \quad \Delta_3' = -\Delta_2\left(\frac{b}{x_2'}\right)^3,$$

где $x_1, x_2, \ldots$ — расстояния диполей $\Delta_1', \Delta_2', \ldots$ от A и $x_1', x_2', \ldots$ — расстояния диполей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ от A', или

$$x_1 = c - \frac{b^2}{c}, \quad x_1' = c - \frac{a^2}{x_1},$$

$$x_2 = c - \frac{b^2}{x_1'}, \quad x_2' = c - \frac{a_2}{x_2}, \ldots.$$

Соответствующий расчет для движения, перпендикулярного линии центров, более сложен и здесь не рассматривается. Можно показать, что кинетическая энергия жидкости для общего движения двух шаров имеет вид

$$2T = AU_1^2 + 2BU_1U_1' + CU_1'^2 + DU_2^2 + 2EU_2U_2' + FU_2'^2,$$

и, применяя общее правило теоремы присоединенных масс Тэйлора, выразить присоединенные массы A, B, ..., F непосредственно в форме диполей:

$$A = 4\pi\rho\left[(\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots) - \frac{a^3}{3}\right];$$

$$B = 4\pi\rho\,(\Delta_1' + \Delta_2' + \cdots),$$

что при последовательной подстановке выражений для напряжений диполя дает

$$A = \frac{2}{3}\pi\rho a^3\left\{1 + \frac{3a^3b^3}{(c^2-b^2)^3} + \frac{3a^6b^6}{[(c^2-b^2)^2 - c^2a^2]^3} + \cdots\right\};$$

$$B = -2\pi\rho \frac{a^3b^3}{c^3}\left\{1 + \frac{a^3b^3}{(c^2 - a^2 - b^2)^3} + \cdots\right\}$$

и, по симметрии,

$$C = \frac{2}{3}\pi\rho b^3\left\{1 + \frac{3a^3b^3}{(c^2 - a^2)^3} + \frac{3a^6b^6}{[(c^2 - a^2)^2 - c^2b^2]^3} + \cdots\right\}.$$

Соответствующие результаты для относительного движения, перпендикулярного к линии центров, составляют:

$$D = \frac{2}{3}\pi\rho a^3\left\{1 + \frac{3a^3b^3(c^2 + b^2)}{4c^2(c^2 - b^2)^3} + \frac{3a^6b^6(c^2 + a^2)}{16c^8(c^2 - a^2)^3} + \cdots\right\};$$

$$E = \pi\rho \frac{a^3b^3}{c^3}\left\{1 + \frac{a^3b^3(c^2 + a^2)}{4c^2(c^2 - a^2)^3} + \cdots\right\};$$

$$F = \frac{2}{3}\pi\rho b^3\left\{1 + \frac{3a^3b^3(c^2 + a^2)}{4c^2(c^2 - a^2)^3} + \frac{3a^6b^6(c^2 + b^2)}{16c^3(c^2 - b^2)^3} + \cdots\right\}.$$

36. Метод интегральных уравнений. Ни один из методов, описанных в двух предыдущих пунктах, не подходит для решения задач с произвольными границами. Когда границы в задаче не плоские, не сферические, не эллипсоидальные, не круглоцилиндрические (или их двухмерное соответствие), для получения решения применяются два других способа: в одном уравнение Лапласа заменяется уравнением конечных разностей, преобразование которого рассмотрено в следующем разделе; в другом задача формулируется как линейное интегральное уравнение.

Существует несколько путей приведения задачи потенциального течения к решению интегрального уравнения, и для частных случаев может быть установлено бесконечное число различных интегральных уравнений. Однако прежде чем приступить к изучению их, следует познакомиться с природой интегральных уравнений и с возможностями и приемами для получения их решения. Теория интегральных уравнений получила широкое развитие и описана во многих книгах и статьях. Здесь можно представить только те результаты этой теории, которые имеют непосредственное практическое значение для настоящего случая.

Уравнение вида

$$\int_a^b f(y)\,K(x, y)\,dy = g(x),$$

где $f(y)$ — неизвестная функция, а $g(x)$ и «ядро» $K(x, y)$ — известные функции, называется интегральным уравнением Фредгольма первого рода. Если неизвестная функция находится также за интегралом, как в уравнении

$$\int_a^b f(y)\,K(x, y)\,dy = g(x) + f(x),$$

то это будет интегральное уравнение Фредгольма второго рода. В обоих случаях допускается, что $g(x)$ и $K(x, y)$ неразрывны в пределах $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$.

Наиболее разработана теория интегральных уравнений в применении к уравнениям второго рода. Для этого типа уравнений имеются теоремы, совершенно аналогичные теоремам для линейных алгебраических уравнений. Для интегральных уравнений первого рода таких теорем нет. Действительно, частный метод Кармана, использующий осевое распределение источника-стока для получения потенциального потока вокруг вращающегося тела, очевидно приводит к интегральному уравнению первого рода, которое в общем случае не имеет решения. Однако было установлено, что даже когда точные решения не могут быть получены из уравнений первого рода, эти уравнения все же можно применять для получения полезных приближений.

Из различных методов решения интегральных уравнений метод Фредгольма — замена интегрального уравнения алгебраическим уравнением — кажется самым простым, а метод итерации кажется наиболее точным. Метод Фредгольма основывается на том, что определенный интеграл в интегральном уравнении приближается к конечной сумме. Вследствие простоты этого метода, он будет подробно разобран и проиллюстрирован далее. Большая точность метода итерации объясняется сохранением интегралов в каждом повторении и выражением их значений с помощью точной формулы квадратуры. Оценка погрешности соответствующего интегрального уравнения получается после каждого последовательного приближения, следовательно, повторения могут быть закончены, как только будет замечено, что погрешность начала расти. Последняя предосторожность особенно необходима для интегральных уравнений первого рода, когда точного решения не существует. В этом случае, хотя полный квадрат погрешности продолжает уменьшаться с увеличением числа повторений, могут наблюдаться весьма большие погрешности в отдельных точках.

Для интегральных уравнений второго рода существует хорошо известная итерационная формула Неймана

$$\int_a^b f_n(y) K(x, y)\, dy = g(x) + f_{n+1}(x). \tag{83}$$

Начиная с предполагаемого первого приближения $f_0(x)$ последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... дается уравнением (83). Если эта последовательность равномерно сходящаяся, ее пределом является решение настоящего интегрального уравнения. Можно показать, что повторная формула сходится, если M — максимальное значение $|K(x, y)|$ в пределах $a \leqslant x$, $y \leqslant b$ удовлетворяет условию $M|b - a| < 1$.

Для интегральных уравнений первого рода существует совсем недавно установленная итерационная формула

$$\int_a^b f_n(y)\,K(x, y)\,dy = g(x) + f_n(x) - f_{n+1}(x), \qquad (84)$$

сходимость которой для различных условий рассмотрена в литературе. В обоих уравнениях (83) и (84) погрешность представлена разницей между соседними приближениями $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Уравнение (84) пригодно для практического применения, когда функция $K(x, y)$ очень мала по сравнению с единицей всюду, кроме точки $x=y$, где $K(x, y)$ становится намного больше единицы и $\int_a^b K(x, y)\,dy = 1$. Последнее условие не ограничивает общности уравнения, так как всегда может быть удовлетворено разделением первоначального интегрального уравнения на интеграл ядра и определением ядра как частного первоначального ядра и его интеграла.

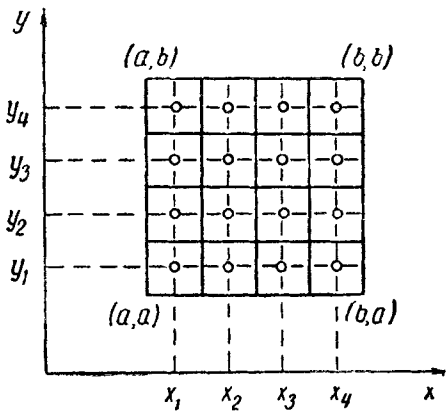


Рис. 32. Сетка для оценки интегральных уравнений

В фредгольмовском методе выражения интегрального уравнения в виде системы линейных уравнений квадрат, ограниченный линиями $x=a$, $x=b$, $y=a$ и $y=b$, подразделяется на n^2 равных квадратов, координаты центров которых обозначаются x_i, y_i (рис. 32). Для удобства будет использована следующая терминология:

$$f(y_j) = f_j; \quad g(x_i) = g_i; \quad K(x_i, y_j) = K_{ij},$$

где $i, j = 1,2, \ldots, n$. Здесь величины g_i и K_{ij} даны в числах, а функции f_j неизвестны. Тогда интегральное уравнение первого рода запишется в приближенной форме

$$\frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f_j K_{ij} = g_i, \text{ где } i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (85)$$

а уравнение второго рода выразится так:

$$\frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f_j K_{ij} = g_i + f_i, \text{ где } i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (86)$$

Таким образом, значения неизвестной функции $f(x)$ в n точка: могут быть определены приближенно в каждом случае решением ряда n линейных уравнений с n неизвестными.

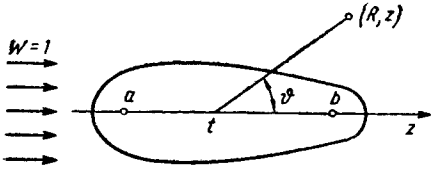


Рис. 33. Поток, обтекающий произвольное тело вращения

Первым случаем применения метода интегральных уравнений является безвихревое течение вокруг небольшого тела вращения, обусловленное равномерным потоком единичной скорости в положительном направлении z. Примем, что на этот поток накладываются распределенные вдоль оси z диполи с осями в отрицательном направлении z напряжением $-\Delta'(z)$ на единицу длины, простирающиеся от $z=a$ до $z=b$ (рис. 33).

В форме цилиндрических координат (r, θ, z) функция тока Стокса из уравнений (39) и (52) составит

$$\psi(r, z) = \frac{r^2}{2} - r^2 \int_a^b \frac{\Delta'(t)\,dt}{[(t-z)^2 + r^2]^{3/2}}. \tag{87}$$

Если $\Delta'(t)$ — известное распределение, то уравнение (87) дает поле скоростей с поверхностями тока $\psi = \text{const}$. В частном случае, когда твердое тело вращения образует поверхность тока $\psi = 0$, уравнение (87) представляет способы получения потоков вокруг так называемых тел Ренкина. С современной точки зрения, однако, желательно определять распределение $\Delta'(t)$, когда задана форма тела. Тогда, обозначая величину r на теле как $r_B = f(z)$ и принимая $\psi = 0$, получим из уравнения (87) интегральное уравнение первого рода для неизвестной функции $\Delta'(t)$:

$$\int_a^b \frac{\Delta'(t)\,dt}{\left[(t-z)^2 + r_B^2\right]^{3/2}} = \frac{1}{2}. \tag{88}$$

Приближенное решение уравнения (88) для удлиненных тел было дано Мунком. Предполагая, что $r_B \ll |b-a|$, видим, что подынтегральное выражение растет очень быстро, когда t приближается к z. Таким образом, поскольку основное воздействие подынтегрального выражения проявляется на очень коротком участке оси z, значение интеграла лишь немного изменится при изменении пределов на бесконечности и замене $\Delta'(t)$ на $\Delta'(z)$. Уравнение (88) тогда приобретает следующий вид:

$$\Delta' z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left[(t-z)^2 + r_B^2(z)\right]^{3/2}} = \frac{1}{2}.$$

Интегрирование его дает

$$\Delta'(z) = \frac{r_B^2}{4} \tag{89}$$

— исключительное простое, так же как и полезное соотношение между напряжением диполя и размерами тела. Величина $\Delta'(z)$ может быть использована для приближенного определения линий тока и поля скоростей вокруг тела, или может служить первым приближением для итерации формулы [уравнение (84)].

Так как распределение, обусловливающее осесимметричное течение, не обязательно соосно с ним, как, например, распределения по кольцам вокруг оси z, ясно, что существуют тела вращения, для которых уравнение (88) не имеет решения. Тем не менее, контролируя погрешности последовательных итераций, можно использовать итерационную формулу для получения полезных приближенных решений. Метод Фредгольма также, очевидно, дает хорошие приближения, если подразделения интервала ab не слишком мелки, т. е. $n<10$.

Самый общий способ решения интегральных уравнений основан на обратной формуле Грина — уравнение (35). Если ϕ — потенциал для наружного потока вокруг простой замкнутой поверхности S, а ϕ' — любая гармоническая функция, к тому же без особенностей в наружной зоне поверхности S, настолько удаленной, что ϕ и ϕ' исчезают в бесконечности достаточно высокого порядка, тогда

$$\int_S \phi \frac{\partial \phi'}{\partial n}\, dS = \int_S \phi' \frac{\partial \phi}{\partial n}\, dS, \tag{90}$$

где n отсчитывается по направлению внешней нормали к поверхности S. Поскольку функция ϕ' выбирается произвольно, ее можно рассматривать как известную функцию. Таким образом, для задачи Дирихле, в которой ϕ задано, уравнение (90) становится интегральным уравнением первого рода для нахождения неизвестной функции $\partial\phi/\partial n$ на поверхности S и аналогично для задачи Неймана оно становится уравнением для нахождения значений ϕ на поверхности S. И в том и в другом случае, если интегральное уравнение было решено, значения ϕ и $\partial\phi/\partial n$ на поверхности известны, и тогда потенциал скорости в любой точке жидкости определяется уравнением (37).

Для иллюстрации применения уравнения (90) снова рассмотрим случай осесимметричного потока вокруг тела вращения. Предположим, что тело движется с единичной скоростью в отрицательном направлении оси z (рис. 34). Используя цилиндрические координаты (r, θ, z) и обозначая длину дуги вдоль меридианного сечения, увеличивающуюся с увеличением z, символом s, имеем для элемента площади

$$dS = 2\pi r ds$$

и для граничного условия на S

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial s}.$$

Соответствующая вспомогательная функция потенциала является такой же, как для диполя единичного напряжения, расположенного в произвольной точке t на оси z внутри тела:

$$\phi' = \frac{z-t}{R^3}, \quad \text{где } R = [(z-t)^2 + r^2]^{1/2}.$$

Функция тока Стокса для нее составляет $\psi' = -r^2/R^3$. Тогда

$$\frac{\partial \phi'}{\partial n} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{r^2}{R^3}\right).$$

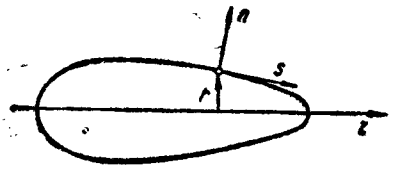


Рис. 34. Условное изображение тела вращения

Отсюда уравнение (9C) приобретает вид

$$\int_0^l \phi \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{r^2}{R^3}\right) ds = \int_0^l \frac{r(z-t)}{R^3} \cdot \frac{\partial r}{\partial s}\, ds,$$

где l — половина периметра меридианного сечения. Но

$$\int_0^l \phi \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{r^2}{R^3}\right) ds = \phi \frac{r^2}{R^3}\Bigg|_0^l - \int_0^l \frac{r^2}{R^3} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial s}\, ds =$$

$$= -\int_0^l \frac{r^2}{R^3}\left(u - \frac{\partial z}{\partial s}\right) ds,$$

поскольку $r=0$ при $s=0$ и l. Здесь u — общая скорость вдоль тела, когда течение делается установившимся наложением потока единичной скорости в положительном направлении оси z. Тогда получается

$$\int_0^l \frac{ur^2}{R^3}\, ds = \int_0^l \left[\frac{r^2}{R^3} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{r(z-t)}{R^3} \cdot \frac{\partial r}{\partial s}\right] ds =$$

$$= \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \cdot \frac{z-t}{R}\, ds = \frac{z-t}{R}\Bigg|_0^l = 2$$

или

$$\int_0^l \frac{u(z)\, r_B^2(z)\, ds/dz}{[(z-t)^2 + r_B^2(z)]^{3/2}}\, dz = 2, \qquad (91)$$

т. е. интегральное уравнение первого рода. С помощью приема, аналогичного приближению Мунка, можно показать, что $u(z) = \partial z/\partial s$ является приближенным решением уравнения (91). В противоположность уравнению (88) уравнение (91), несомненно, имеет решение.

Выбранный общий метод решения задач Дирихле и Неймана, приводящий к интегральным уравнениям второго рода, основан на разрывах поверхности распределений источников и диполей. Допустим сначала, что потенциал на замкнутой поверхности тела S задан как $\phi = f(P_B)$, где P_B обозначает точки на поверхности (рис. 35). Если допустить, что потенциал зависит от распределения диполей $\Delta''(P_B)$ над поверхностью S по осям, перпендикулярным S, потенциал в любой точке P, расположенной снаружи от S, составит по уравнению (54):

$$\phi(P) = -\int_S \Delta''(Q_B)\,\frac{\cos\vartheta}{R(P, Q_B)^2}\,dS,$$

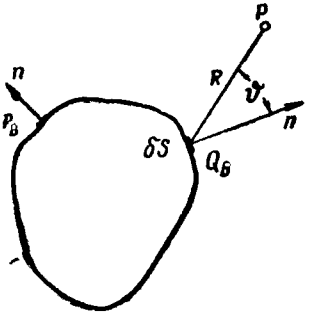


Рис. 35. Условное изображение распределения особенностей

где Q_B обозначает точки на поверхности S, изменяющиеся при интегрировании в отличие от установленной точки P_B на поверхности, а $R(P, Q_B)$ есть расстояние между P и Q_B. Когда P приближается к S вдоль нормали, потенциал приближается к пределу, данному уравнением (59):

$$f(P_B) = -2\pi\Delta''(P_B) - \int_S \Delta''(Q_B)\,\frac{\cos\vartheta}{R^2}\,dS. \qquad (92)$$

Как видим, это выражение является интегральным уравнением второго рода для неизвестного распределения $\Delta''(P_B)$.

Подобным же образом решение задачи Неймана можно сделать зависимым от распределения источников $M''(P_B)$ над поверхностью S. Потенциал у наружной точки выражается при помощи уравнения (53) в виде

$$\phi(P) = -\int_S \frac{M''(Q_B)}{R(P, Q_B)}\,dS,$$

и, так как P приближается к поверхности по перпендикуляру, нормальная производная потенциала, взятая по уравнению (58), приближается к пределу:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_B = 2\pi M''(P_B) - \int_S M''(Q_B)\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)dS, \qquad (93)$$

где n обозначает направление перпендикуляра к P_B. Поскольку $(\partial\phi/\partial n)$ является данной функцией, уравнение (93) представляет интегральное уравнение второго рода для неизвестного распределения M''. Уравнения (92) и (93) не только играют важную роль в доказательстве существования решений задач Дирихле и Неймана, но также служат основой вычислительных операций для решения общих задач в потенциальном потоке.

Пример 9. Найти надежное решение уравнения Лапласа, которое удовлетворяет условиям, соответствующим волне на свободной поверхности ($z=0$) в воде с глубиной h:

$$\phi = C \sin 3x \cos 4y, \text{ когда } z = 0$$

и

$$\partial\phi/\partial z = 0, \text{ когда } z = h.$$

На основании первого условия ϕ имеет вид

$$\phi = C \sin 3x \cos 4y \left(Ee^{lz} + Fe^{-lz}\right),$$

где $E + F = 1$ и $l = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Второе условие для всех величин y и x дает

$$0 = 5 \sin 3x \cos 4y \left(Ee^{5h} - Fe^{-5h}\right),$$

откуда имеем

$$Ee^{5h} - (1 - E)\, e^{-5h} = 0$$

или

$$E = \frac{e^{-5h}}{e^{5h} + e^{-5h}}, \quad F = \frac{e^{5h}}{e^{5h} + e^{-5h}}.$$

Подставляя эти величины E и F в выражение для ϕ, получим решение

$$\phi = C \sin 3x \cos 4y \frac{\operatorname{ch} 5(z-h)}{\operatorname{ch} 5h}.$$

Последний множитель представляет амплитуду колебания, которая уменьшается от величины C на свободной поверхности до $C \operatorname{sch} 5h$ на дне.

Г. Техника приближенных решений

37. Графические методы. Единственной целью вычисления функции тока или потенциала скорости для данных граничных условий является описание формы линии тока соответствующего потока. Такое описание обычно равноценно графическому изображению, так что построение формы течения чисто графическими методами часто дает возможность хотя бы грубо проверить другие приемы анализа. В какой степени можно положиться на эти методы для количественных и качественных оценок, зависит от числа факторов, затронутых в их применении.

Так называемая гидродинамическая сетка движения, часто используемая для иллюстрации форм двухмерного потока в зависимости от их характеристик, основывается на том факте, что

линии тока и потенциальные линии плоского безвихревого потока образуют сетку, ячейки которой приближаются к совершенным квадратам, когда $\delta\psi = \delta\phi \to 0$. При достаточно значительных величинах этих приращений, необходимых для получения практически полезного числа делений гидродинамической сетки, ячейки конечно будут существенно отклоняться от квадратов, однако два семейства линий обязательно останутся ортогональными во всех пересечениях. Таким образом, строение гидродинамической сетки для данного профиля границы представляет собой просто схему системы линий тока и потенциальных линий, делящих поле

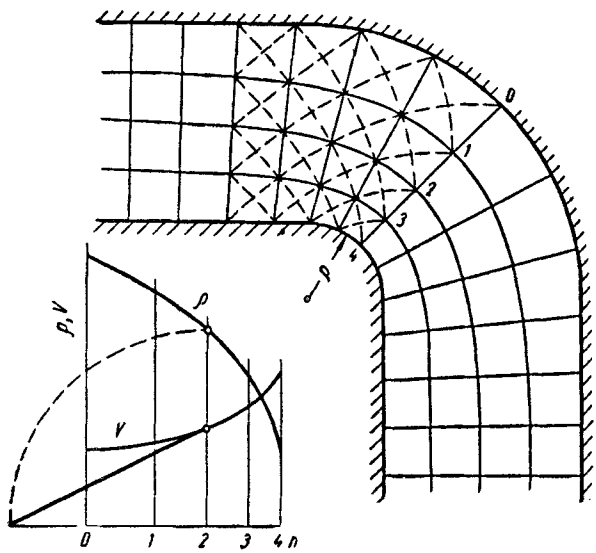


Рис. 36. Гидродинамическая сетка для двухмерного поворота

потока на ячейки, близость которых к квадратам согласуется с выбранным числом делений.

Хотя вышеописанный процесс кажется легко выполнимым, тем не менее остается фактом, что при данных граничных условиях существуют единственные решения как для функции тока, так и для потенциала скорости, и, следовательно, единственная гидродинамическая сетка для выбранного масштаба ячеек. В действительности преимущества использования различных графических приемов позволяют опытному чертежнику относительно быстро получить вполне удовлетворительное первое приближение к желаемой форме потока. Прежде всего выбирается число приращений ψ, которое давало бы наибольшие размеры ячеек, обусловливая тем самым наименьшую трудоемкость ре-

шения — очевидно это связано с некоторым риском. Соответствующие линии тока вычерчиваются на глаз и затем проведением перпендикулярных линий образуются ячейки. Для корректировки линий тока рекомендуется просмотреть график на свет с обратной стороны, это позволит выявить допущенные неточности.

После завершения построения гидродинамической сетки (рис. 36) размеры ячейки могут быть использованы для установления распределения скорости в соответствии с приближенным видом производных потенциала скорости и функции тока:

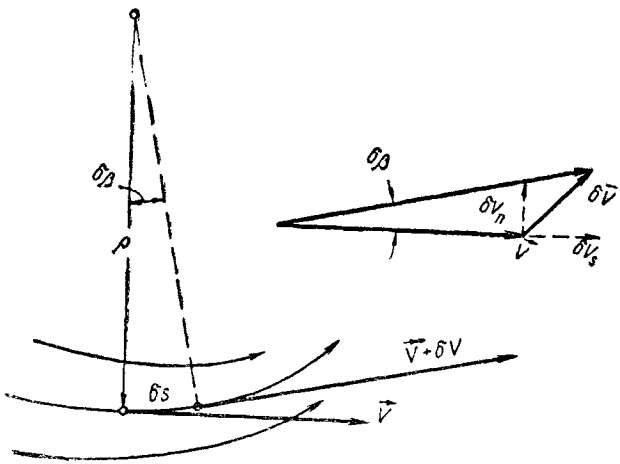


Рис. 37. Пояснительная схема изменения скорости

$$V \approx \frac{\Delta\psi}{\Delta n} \approx \frac{\Delta\phi}{\Delta s} \text{ или } \frac{V}{V_0} \approx \frac{\Delta s_0}{\Delta s} \approx \frac{\Delta n_0}{\Delta n}.$$

Действительно получается, что указанное распределение скорости может быть использовано как грубая проверка точности построения сетки потока.

Что касается рис. 37, на котором изображено изменение касательного и нормального компонентов вектора скорости на отрезке δs, то из подобия треугольников и условия потенциальности следует, что

$$\frac{V}{\rho} \approx \frac{\delta V_n}{\delta s} \approx \frac{\delta V}{\delta n}.$$

Если построить график зависимости величины вектора скорости от расстояния вдоль любой эквипотенциали (см. рис. 36), то радиус кривизны каждой линии тока должен быть таким, чтобы

отношение V/ρ равнялось уклону скоростной кривой в этой точке.

К сожалению, сетка с квадратными ячейками неприменима при осевой симметрии, так как размерности функции потенциала и тока здесь не эквивалентны. Фактически численно равные приращения ϕ и ψ дают прямоугольные ячейки, продольный размер которых зависит от радиального расстояния, как это видно из выражений:

$$V \approx \frac{1}{r} \cdot \frac{\Delta\psi}{\Delta n} \approx \frac{\Delta\phi}{\Delta s}; \quad \frac{\Delta s}{\Delta n} \approx Cr.$$

Эти выражения могут быть получены графически.

Тогда как предыдущее соотношение между скоростью, радиусом кривизны и градиентом скорости фактически мало способствует улучшению гидродинамической сетки двухмерного движения, в случае осевой симметрии дело обстоит совсем иначе, ибо визуальный контроль такой искривленной сетки довольно труден. Дальнейшее усовершенствование проверки правильности построения сводится к применению следующей интегральной формы соотношения $V : \rho$:

$$V = e^{\int \frac{dn}{\rho}}; \quad \psi = \int Vr dn.$$

Если форма и расположение линий тока правильны, тогда кривая ψ, вычерченная путем графического интегрирования по замерам кривизны линии тока в соответствии с этими равенствами (рис. 38), будет характеризоваться равными приращениями между последовательными парами линий тока. Иными словами, проверка показывает, что гидродинамическая сетка построена надлежащим образом.

Для эффективности таких графических методов должны быть указаны пределы точности. Кроме того, количественная польза этих методов значительно уменьшается в случае обтекания погруженных тел, так как при этом радиус кривизны линий тока с увеличением расстояния от тела стремится к бесконечности, что уменьшает точность построения. Никогда графические методы не дают точности, нужной для сравнения двух состояний потока или для проверки принятого положения свободной поверхности. Для удовлетворения этих требований должны быть использованы другие, более совершенные методы аппроксимации.

38. Метод аналогии с непрерывным проводником. Хотя математические методы, представленные в предыдущих частях книги, применимы для любых общих систем безвихревых потоков, однако их граничные условия часто очень затрудняют решение. Как уже было указано, основы потенциальной теории применимы не только к безвихревым потокам, но также и к нескольким другим физическим системам, многие из которых могут быть построены в любой произвольной форме. Благодаря этой исходной эквива-

лентности можно создать модель или аналог одной системы, используя материалы другой. Затем, выполнив соответствующие измерения на аналоге и использовав переходные соотношения, получить любую желаемую информацию об исходной системе.

Из упомянутых в п. 28 систем практически наиболее удобным аналогом потока является однородный электрический проводник, так как он легко ограничивает ток границами желаемой формы,

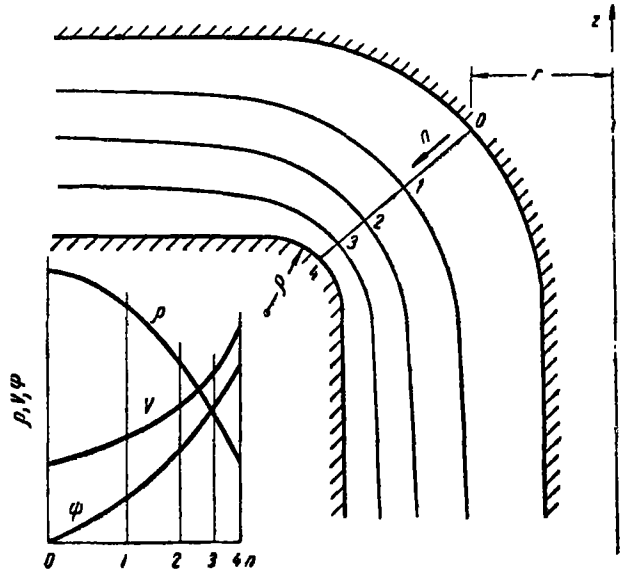


Рис. 38. Определение параметров течения осесимметричного потока

выполняется из широко распространенных и хорошо поддающихся измерениям материалов, а также обладает совершенно точно соответствующими потоку физическими характеристиками. Для использования электрического аналога необходимо геометрическое подобие формы проводника и границ рассматриваемого потока. Эквипотенциальные поверхности, представляющие зоны входа и выхода жидкости, делаются из хорошо проводящего материала. К контактам подводится разность потенциалов или напряжение. Результирующий ток соответствует теоретическим линиям тока и, если проводник однороден, пропорционален градиенту потенциала. Можно измерять или ток, или градиент потенциала, хотя последнее измерение более удобно. Отношение градиентов потенциала в произвольных точках проводника равно отношению скоростей в соответствующих точках системы безвихревого потока.

В электрических аналогах могут быть использованы разные типы проводящих сред, окончательный выбор зависит от того, является ли поток двухмерным, осесимметричным или трехмерным, а также от требуемой точности. Для изучения двухмерных потоков наиболее удобны однородные листы фольги или специальной проводящей бумаги; материалы и инструкции по созданию таких систем хорошо известны. Необходимая геометрическая модель получается путем выкраивания из листов соответствующей формы. Контактами служат тяжелые металлические бруски или серебряная краска с высокой проводимостью; распределение потенциала измеряется или несколькими неподвижно закрепленными на листе электродами, или переносным одиночным или сдвоенным электродом. Неподвижные электроды дают большую точность, но подвижный удобнее и поэтому применяется во всех случаях, когда достаточно иметь приближенный результат.

В двухмерных задачах, для которых необходимо установить общую картину потока, например, при изучении фильтрации, линии тока обычно наносятся на лист обыкновенной бумаги с помощью пантографа. Пересечение проводящих и изолирующих границ создает новую картину движения, при которой эквипотенциальные линии ортогональны свободным поверхностям. Аналогия с водным потоком основана здесь на том факте, что как потенциал скорости, так и функция тока подчиняются уравнению Лапласа.

Для воспроизведения системы трехмерного потока более пригоден жидкий проводник — электролит, ибо границами потока могут быть стенки сосуда из стекла, пластика, парафина или окрашенного дерева с металлическими контактами. Свободную поверхность нередко принимают за одну из плоских границ. Обычно в качестве проводника используется медный купорос, а контактами служат медные листы или щиты. Такие схемы работают одинаково хорошо и в двух-, и в трехмерных аналогиях, и одна модель при правильном исполнении может быть использована для исследования двухмерной, осесимметричной и трехмерной систем. Разнообразие граничных условий лимитируется лишь возможностями экспериментатора, но результаты будут анологичны безвихревому потоку реальной жидкости только при выполнении условий, описанных в п. 28.

Различные способы использования сосуда с электролитом иллюстрируются рис. 39, где заданная граница A может быть закруглена по любой цилиндрической поверхности, а плоская граница C нормальна плоскости B. Жидкий проводник может заполнять пространство между этими границами. Когда плоскость B горизонтальна (рис. 39, $а$), то глубина жидкости постоянна и мы имеем двухмерное движение. Если плоскость B немного наклонна (рис. 39, $б$), то глубина жидкости уменьшается от максимальной вдоль граничной поверхности A до нуля на оси про-

водника. Хотя A — самостоятельная криволинейная поверхность, но если угол наклона плоскости B не превышает 6°, можно допустить, что граница A представляет продольный элемент поверхности вращения. Такая система соответствует вытеканию жидкости из резервуара в трубу круглого сечения. Если плоскость B наклонена к горизонту под углом 45° (рис. 39, *в*), то пространство, занятое проводником, представляет сегмент закругленного входа в

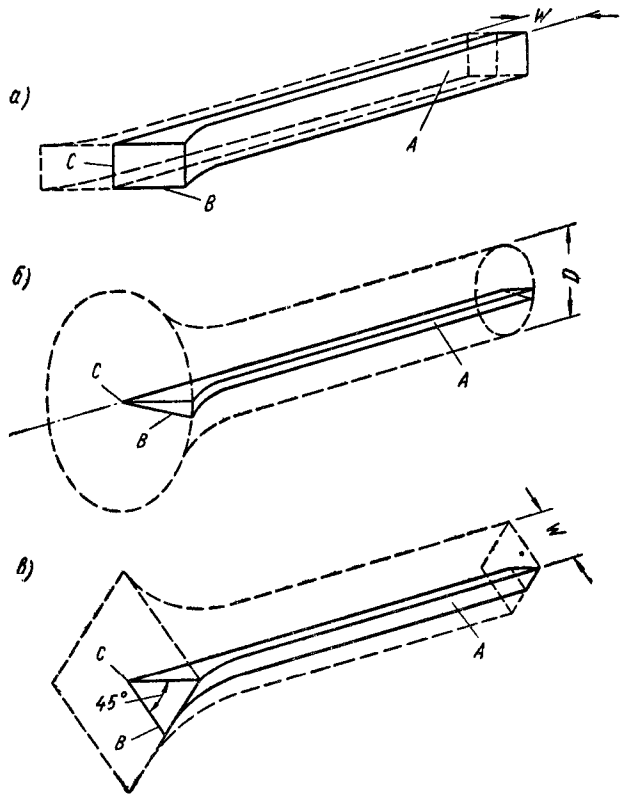


Рис. 39. Использование одного проводникового аналога для представления нескольких типов потока

а — двухмерный вход; *б* — осесимметричный вход; *в* — квадратный вход

проводник квадратного сечения. Так как переход к такому проводнику симметричен относительно четырех плоскостей, пересекающихся вдоль оси, то эти плоскости представляют поверхности линий токов, и не будет ошибкой считать одну из них твердой границей, а другую свободной поверхностью. Для любого из этих трех случаев размер D или W может быть произвольно изменен изменением глубины проводника или расположения границы C.

Таким путем относительная кривизна может меняться в очень широких пределах.

39. Принцип конечных разностей. Приближенное решение дифференциального уравнения в частных производных, как, например, уравнения Лапласа, может быть получено в числовом выражении путем принятия пространственного распределения или сетки значений в области и проверки, удовлетворяют ли принятые значения соответствующее уравнение и граничные условия. В случае, если эти значения не удовлетворяют уравнение, их корректируют. Для выполнения этих операций необходимо заменить бесконечно малые дифференциальные элементы элементами малыми, но конечными, а затем воспользоваться методами теории конечных разностей. Приближенное выражение можно получить для функции ϕ уравнения Лапласа, приняв значения ее величины в равномерно распределенных точках такими, как показано на рис. 40. Расстояние a принимается достаточно малым, чтобы изменение функции от точки к точке можно было считать линейным. Если x_0 и y_0 — координаты центральной точки, то в точках $(x_0+a/2,\ y_0)$ и $(x_0-a/2,\ y_0)$ приближенные градиенты соответственно равны

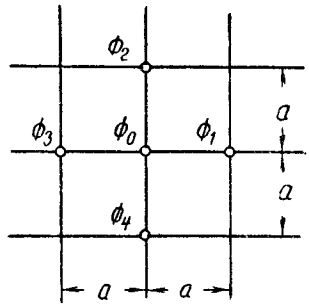


Рис. 40. Распределение потенциалов для правильной секции

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \approx \frac{\delta\phi}{\delta x} = \frac{\phi_1 - \phi_0}{a} \text{ и } \frac{\phi_0 - \phi_3}{a}.$$

Частная производная второго порядка может быть аппроксимирована подобным же образом в точке $(x_0,\ y_0)$:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \approx \frac{(\phi_1 - \phi_0)/a - (\phi_0 - \phi_3)/a}{a} = \frac{\phi_1 + \phi_3 - 2\phi_0}{a^2}.$$

Тем же самым приемом может быть аппроксимирована частная производная второго порядка в направлении y:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \approx \frac{\phi_4 + \phi_2 - 2\phi_0}{a^2}.$$

Эти соотношения можно сложить для выражения уравнения Лапласа в форме конечных разностей в точке $(x_0,\ y_0)$ через величины принятых потенциалов в пяти точках:

$$a^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4\phi_0.$$

Аналогичное выражение получается для функции тока при замене в данном равенстве ϕ на ψ.

Для осесимметричных систем уравнение несколько усложняется из-за дополнительного члена, но выведено оно может быть совершенно так же:

$$a^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\approx$$

$$\approx\phi_1+\phi_2+\phi_3+\phi_4-4\phi_0+\frac{\phi_2-\phi_4}{2n},$$

где $n=r_0/a$ — число равномерных подразделений между точкой (r_0, z_0) и осью $r=0$. Уравнение для определения функции тока подобно по форме и отличается лишь изменением знака у третьего члена:

$$a^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\approx$$

$$\approx\psi_1+\psi_2+\psi_3+\psi_4-4\psi_0-\frac{\psi_2-\psi_4}{2n}.$$

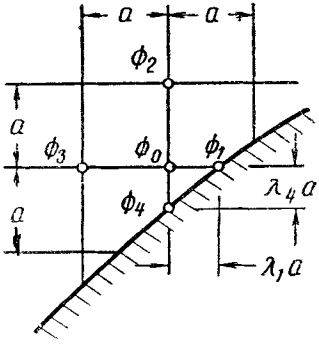


Рис. 41. Распределение потенциалов для неправильной секции

Вблизи твердой границы некоторые из четырех соседних точек не могут находиться на равном расстоянии от рассматриваемой, как, например, на рис. 41, где подлежат определению λ_1 и λ_4. Уравнение Лапласа в форме конечных разностей для точки 0 соответственно для двухмерной и осесимметричной систем имеет вид:

$$\frac{\phi}{\lambda_1}+\phi_2+\phi_3+\frac{\phi_4}{\lambda_4}-\phi_0\left(2+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_4}\right)$$

и

$$\frac{\phi_1}{\lambda_1}+\phi_2+\phi_3+\frac{\phi_4}{\lambda_4}-\phi_0\left(2+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_4}\right)+\frac{\phi_2-\phi_4}{n(1+\lambda_4)}.$$

Процесс, с помощью которого полученные равенства используются для уточнения принятых значений ϕ и ψ, называют «систематической релаксацией ограничений» или просто «релаксацией». Этот процесс состоит из двух частей: корректировка принятых величин до тех пор, пока справа в каждой точке не получится нуль или почти нуль, и подразделение площади на столь малые квадраты, чтобы допущение о линейности изменения функции от точки к точке оказалось справедливым. Нет необходимости, конечно, делать все квадраты равными по размеру; практически чем выше ускорение, тем мельче должны быть квадраты, и наоборот. После окончания процесса релаксации скорость в любой точке может быть определена по значению надлежащего градиента; давления, а отсюда силы и моменты могут быть затем вычислены с помощью уравнения Бернулли.

Основным преимуществом процесса релаксации является неограниченное разнообразие граничных условий и простота вычислений. К специальным легко решаемым случаям относятся задачи о свободных поверхностях, в которых границы определены кинематически.

Большая трудоемкость решения задач методом релаксации может быть преодолена использованием соответствующего электрического аналога. В этом электрическом конечно-разностном аналоге сопротивления располагаются в виде квадратной решетки. Все сопротивления, за исключением находящихся у твердых

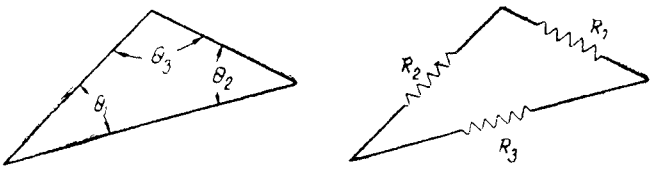


Рис. 42. Основные элементы для расчета в конечных разностях

границ, имеют одинаковую величину. Значения тех сопротивлений, что находятся у твердых границ, подсчитываются на основании геометрии. Указанная решетка соответствует квадратной сетке, используемой в процессе релаксации. Когда электрическая разность потенциалов прилагается к контактам, представляющим вход и выход потока, тогда электрический потенциал каждого соединения сопротивлений автоматически принимает значение, пропорциональное потенциалу соответствующей точки окончательной сетки релаксации. Скорости и, следовательно, давления, силы и моменты вычисляются по измеренному градиенту потенциала, коэффициент длины равен при этом коэффициенту, употреблявшемуся при вычислении величин сопротивлений.

При использовании сеточного аналога очень важно правильно выбрать величины сопротивлений. Для этого вся область, представляющая поток, подразделяется на треугольные элементы, каждый из которых изображает треугольное расположение сопротивлений (рис. 42). Допустив, что элемент так мал, что градиент потенциала по всей его площади постоянен, находим величину сопротивления, пропорциональную тангенсу противолежащего угла:

$$R_1 = K \operatorname{tg} \theta_1 \text{ и т. д.}$$

Конечно, в общем случае сопротивление изображается двумя треугольными элементами по обеим его сторонам, и окончательно использованная величина — это величина двух параллельных

сопротивлений. Например, на рис. 43 точная величина R находится по соотношению $R=K(\operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_4)/(\operatorname{tg}\theta_1+\operatorname{tg}\theta_4)$. Если одна сторона элемента совпадает с границей, то значение соответствующего сопротивления определяется только одним углом.

Хотя применение сетки сопротивлений позволяет частично избежать последовательной обработки процесса релаксации, однако в зонах больших ускорений размеры решетки должны быть уменьшены для сохранения справедливости предположения о линейном изменении потенциала. Если границы потока опреде-

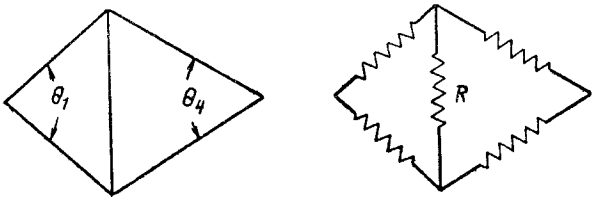
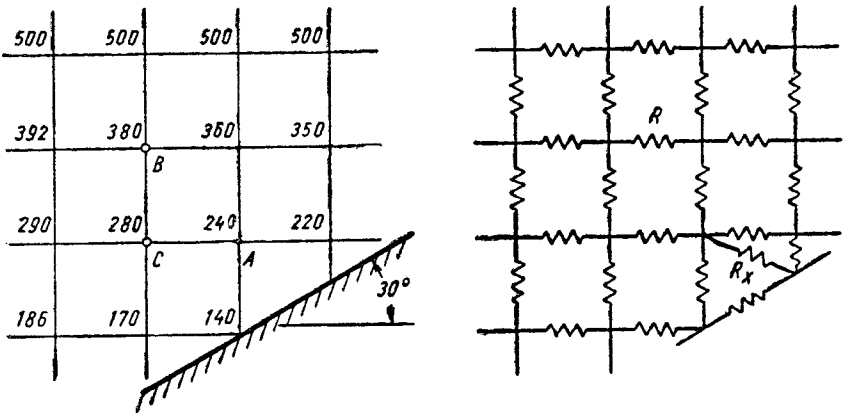


Рис. 43. Расположение сопротивлений между соседними элементами

лены кинематически, как в струе свободного очертания, то процедура последовательного приближения все-таки необходима для определения формы граничных линий тока.

Пример 10. Приведенные схемы изображают сетку релаксации и соответствующую электрическую сетку для части двухмерной системы. а) Найти вычет в точке C после того, как в точках A и B были выполнены стандартные коррективы. б) Вычислить R_x, если $R=200$ *ом*.



а) Стандартная поправка равна четверти вычета. Первоначально вычеты в каждой точке таковы:

A . . . $360 + 280 + 140 + 220 - 4(240) = +40$;
B . . . $500 + 392 + 280 + 360 - 4(380) = +12$;
C . . . $380 + 290 + 170 + 240 - 4(280) = -40$.

Увеличив потенциалы в точках A и B на 10 и 3, соответственно уменьшим вычет в точке C до —27.

б) Каждый из углов, используемых для вычисления сопротивлений в сетке, равен 45°, так что постоянная сетки K составляет

$$K = \frac{R(\operatorname{tg}\theta_1 + \operatorname{tg}\theta_2)}{\operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2} = 200 \cdot 2 = 400 \text{ ом}.$$

Углы, соответствующие R_x, равны 60 и 90°; для иллюстрации того, что правый угол не влияет на величину сопротивления, можно привести основное уравнение

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{K}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\theta_1} + \frac{1}{\operatorname{tg}\theta_2}\right) = \frac{1}{400}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 0\right);$$

$$R_x = 400\sqrt{3} = 692{,}8 \text{ ом}.$$

Глава IV

КОНФОРМНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВУХМЕРНОГО ПОТОКА

А. Введение к функциям комплексного переменного

40. Функции комплексного переменного. Хотя все двухмерные потоки могут быть исследованы методами, изложенными в предыдущих главах, однако более действенным средством их представления является теория комплексных переменных. Функция потенциала и функция тока всякого плоского безвихревого потока могут рассматриваться как действительная и мнимая части функции комплексного переменного, и наоборот. Рассматривая различные функции, можно установить большое число двухмерных потенциальных (безвихревых) течений, представляемых этими функциями. Более того, оказывается теоретически возможным непосредственное определение потенциальной функции, удовлетворяющей заданным граничным условиям, ибо теория показывает, как преобразовать произвольную форму в круг и таким образом отобразить характер течения произвольной формы на круге, решение для которого дано в главе III.

Ознакомление с функциями комплексного переменного будет проведено в двух направлениях: во-первых, общая теория будет дана в приложении к двухмерному безвихревому течению и, во-вторых, будут представлены аналитические и геометрические свойства пяти элементарных функций, на которых базируется техника непосредственного подхода к решению проблем потенциального течения.

Предполагается, что читатель знаком с алгеброй комплексных чисел и их геометрическим представлением как точек в прямоугольной системе координат. Символ z, обычно применяемый для изображения комплексного числа, состоящего из действительной x и мнимой y частей, представляет точку на диаграмме Арганда (Argand), на которой действительная часть откладывается как абсцисса, а мнимая часть как ордината (рис. 44). Положение точки может быть определено прямоугольными (x, y) или полярными (r, θ) координатами:

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ \theta = \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}\ ;\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Здесь r — абсолютное значение или модуль комплексного числа, иногда записываемый как $|z|$, а θ — амплитуда или аргумент комплексного числа, записываемый как $\arg z$.

Величина $\bar{z} = x - iy$ называется сопряженной с числом z. Так как $z\bar{z} = x^2 + y^2$, эта величина используется в упрощениях комплексных выражений. Например, для выделения мнимой и действительной частей в выражении $\frac{1}{z}$ записываем

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2}.$$

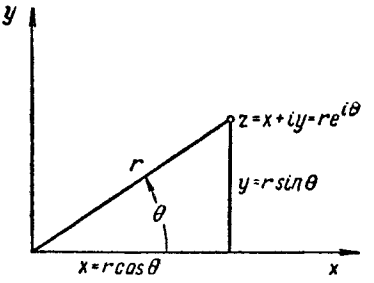


Рис. 44. Графическое представление комплексного числа

Другая комплексная величина w будет рассматриваться как функция комплексной переменной z:

$$w = \phi + i\psi = f(z),$$

здесь ϕ и ψ — действительные величины.

Термин «функция» означает, что точка в плоскости z связана с одной или несколькими точками в плоскости w согласно некоторому установленному закону. В этом общем определении зависимость является слишком произвольной, чтобы можно было показать, что ϕ и ψ есть дифференцируемые функции x и y. Ее необходимо выделить из трех различных сопряжений функции

$$f(z) = 1 - 2i + iz^2 = 1 - 2i + i(x + iy)^2:$$

а) $f(\bar{z}) = 1 - 2i + i\bar{z}^2 = 1 - 2i + i(x - iy)^2$,

здесь z заменено $\bar{z}$ в функциональной форме;

б) $\bar{f}(z) = 1 + 2i - iz^2$,

здесь изменены знаки перед всеми членами, содержащими i, за исключением z;

в) $\overline{f(z)} = \bar{f}(\bar{z}) = 1 + 2i - i\bar{z}^2 = \phi - i\psi$,

здесь имеем случай обычного сопряжения, при котором знаки перед всеми членами, содержащими i, меняются.

Для действительных дифференцируемых функций, таких, как $y = f(x)$, значение dy/dx определяется нахождением предельного значения $\delta y/\delta x$ для двух соседних точек на некоторой кривой, когда δx стремится к нулю. Этот процесс является прямым в том смысле, что данная точка может приближаться к другой только по кривой, определяемой зависимостью $y = f(x)$. Анало-

гичный процесс для непрерывной комплексной функции $w=f(z)$ осложняется тем фактом, что в данном случае находятся во взаимосвязи две области или плоскости, вследствие чего любая точка может приближаться к другой по бесчисленному количеству направлений.

На рис. 45 представлены два особых случая. Если $\delta y=0$, как, например, для линии PP_1, сближение точек происходит по направлению, параллельному оси x. Для линии PP_2 $\delta x=0$ и путь сближения точек параллелен оси y. В первом примере $z_1=x+\delta x+iy$, и соответствующее значение w составляет

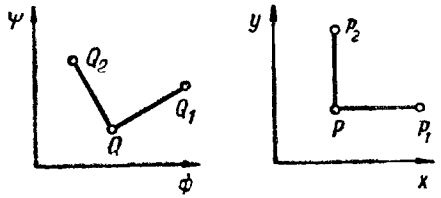


Рис. 45. Отображение комплексных чисел

$$w_1=\varphi(x+\delta x, y)+ i\,\psi(x+\delta x, y).$$

В форме приращений имеем:

$$\frac{\delta w}{\delta z}=\frac{w_1-w}{z_1-z}=\frac{\varphi_1+i\psi_1-\varphi-i\psi}{x_1-x}=\frac{\delta\varphi}{\delta x}+i\frac{\delta\psi}{\delta x},$$

отсюда

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_1=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta w}{\delta z}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Во втором примере $\delta z=i\delta y$ и аналогично предыдущему имеем

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_2=\lim_{\delta y\to 0}\frac{\delta w}{\delta z}=-i\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

Два результата, полученные для dw/dz, одинаковы только при удовлетворении следующих условий:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y};\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{94}$$

Уравнения (94), называемые уравнениями Коши — Римана, показывают, какие условия необходимы для возможности дифференцирования $f(z)$, т. е. для того, чтобы значение dw/dz было единственным независимо от пути дифференцирования. То, что эти условия также достаточны, если частные производные от φ и ψ непрерывны, можно показать следующим образом. Из уравнения

$$w=\varphi(x, y)+i\,\psi(x, y)$$

получаем

$$dw=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+i\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+i\frac{\partial\psi}{\partial y}dy,$$

или, используя уравнения Коши — Римана,

$$dw = \frac{\partial \phi}{\partial x}(dx + i dy) + i \frac{\partial \psi}{\partial x}(dx + i dy).$$

Отсюда производная

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{95}$$

т. е., как уже было показано, результат не зависит от пути дифференцирования.

Функция, дифференцируемая для значений z в области плоскости z, называется регулярной и аналитической в этой области. Точка, в которой удовлетворяются указанные условия, называется регулярной. Аналитическая функция, однако, характеризуется не только поведением совокупности ее регулярных точек, но также и ее особыми точками. С точки зрения теории функций последние представляют большой интерес и требуют глубокого изучения.

Из теории аналитических функций известно, что функция $w = f(z)$ может быть разложена в ряд Тэйлора относительно точки регулярности z_0:

$$w = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots,$$

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Ряд сходится в большой круг с центром в точке z_0; в этом круге функция остается регулярной. Аналитическая функция, однозначная вблизи изолированной особой точки z_0, может также быть разложена относительно этой точки в ряд Лорана:

$$f(z) = \cdots + a_2 (z - z_0)^2 + a_1 (z - z_0) + \\ + a_0 + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots$$

Если z_1, z_2, ... — расстояния от точки z_0 до других особых точек функции $f(z)$, — расположены в порядке возрастания их величины, то функция $f(z)$ может быть представлена многими рядами Лорана, каждый из которых соответствует концентрическому кольцу между следующими одна за другой окружностями с центром в точке z_0, имеющими радиусы $r = r_1$, r_2, ... Точка $z = z_0$ называется полюсом, если в ряду Лорана для кольца, расположенного в непосредственной близости от z_0, имеется ограниченное число отрицательных членов $z - z_0$; эта точка называется существенно особой точкой, если отрицательные члены в этом разложении образуют бесконечный ряд.

Так, функция

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} \equiv \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-2)}$$

будет разлагаться во множество рядов Лорана около точки $z=0$. В концентрическом кольце $0<|z|<1$ эти члены могут быть разложены как

$$-\frac{1}{z-1}=1+z+z^2+\cdots$$

$$\frac{1}{2(z-2)}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{4}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots\right),$$

откуда

$$f(z)=\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n\left(1-\frac{1}{2^{n+2}}\right).$$

В концентрическом кольце $1<|z|<2$

$$-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\cdots$$

при $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, но $\frac{1}{z-2}$ имеет то же разложение, что и раньше. Отсюда

$$f(z)=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{1}{2z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\cdots$$

Наконец, для $|z|>2$ $\frac{1}{z-1}$ имеет то же разложение, что и в предыдущем случае, но при $\left|\frac{2}{z}\right|<1$

$$\frac{1}{2(z-2)}=\frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^{n+1}}$$

и отсюда

$$f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^{n+1}}.$$

Другой часто встречающейся особой точкой является точка, соответствующая алгебраическому разветвлению, такая, как $z=a$ в функции $w=\sqrt{z-a}$. Эта точка называется особой потому, что w после полного обхода вокруг точки a в плоскости z не принимает своего первоначального значения и оказывается точкой разветвления функции. В указанном примере dw/dz бес-

конечно при $z=a$, подтверждая тем самым, что $z=a$ есть особая точка, хотя обратная функция $z(w)=w^2+a$ является регулярной в соответствующей точке $w=0$, которая также называется точкой разветвления. Важно отметить, что $dz/dw=0$ при $w=0$. Условием того, что функция имеет единственную противоположность в некоторой точке, является отличие ее производной от нуля в этой точке.

Как показано в п. 43, отсутствие стремления к нулю производной — важное условие, поскольку оно обеспечивает отображение областей в масштабе один к одному, что является существенным требованием для использования в гидродинамике. Таким образом, в данном случае $w(z)$ не является однозначной функцией, поскольку $dz/dw=0$ при $w=0$, и соответственно $\sqrt{z-a}$ не может быть разложен в ряд Лорана вокруг точки $z=a$.

Свойства функций в точках разветвления более подробно рассматриваются в п. 45.

Следующие простые примеры иллюстрируют аналитические функции, которые регулярны всюду, за исключением некоторых особых точек. Функция $w=z^2+bz$ дифференцируема и имеет производную $dw/dz=2z+b$. Функция становится бесконечной при $z=\infty$, что соответствует ее особой точке. Она имеет точку разветвления при $z=b/2$, когда $w(z)$ регулярна и однозначна но обратная функция $z(w)$ не обладает этими свойствами. Разделение на действительную и мнимую части дает

$$\phi+i\psi=(x+iy)^2+b(x+iy)=x^2-y+bx+i(2xy+by).$$

Фактически здесь имеется два уравнения, так как действи тельная и мнимая части должны быть по отдельности равны:

$$\phi=x^2-y^2+bx;\ \psi=2xy+by.$$

Легко показать, что эти функции удовлетворяют уравнениям Коши — Римана.

Аналитическая функция с полюсами, которая регулярна всюду, за исключением полюсов $z=\pm 1$, иллюстрируется следующим примером:

$$w=\frac{1}{z^2-1}.$$

Неаналитическая функция иллюстрируется следующим примером:

$$w=(x-iy)^2=x^2+y^2-2ixy.$$

Можно показать, что производная этой функции зависит от пути дифференцирования, а действительная и мнимые части ее не удовлетворяют уравнениям Коши — Римана.

41. Интегральная теорема Коши. Интеграл функции комплексного переменного в пределах $z=a$ и $z=b$ зависит не толь-

ко от этих конечных точек, но также от пути в плоскости z, соединяющего эти точки. При определенных условиях, однако, аналитические функции получают замечательное и существенное свойство, заключающееся в том, что их интегралы перестают зависеть от пути.

Для точного установления этих условий необходимо определить понятие о связности области. Область называется связной, если любые две точки в ней могут быть соединены непрерывной кривой без пересечения ее границ. Область называется односвязной, если любая замкнутая кривая в ней может постепенно стягиваться в точку, не покидая ее пределов. Так, кольцеобразная область между двумя концентрическими окружностями не является односвязной, поскольку замкнутая линия, окружающая внутренний круг, не может быть стянута в точку. Такая область называется двухсвязной. В этом случае разрез, соединяющий внутреннюю и внешнюю границы, делает область односвязной, позволяя замкнутым кривым в области беспредельно сокращаться. Если для создания односвязной области требуется два разреза (рис. 46), то область называется трехсвязной и т. д. Замкнутую кривую можно обойти одним из двух способов. Условно можно принять, что способ будет позитивным, если область при обходе по ее контуру, включая разрезы, остается слева.

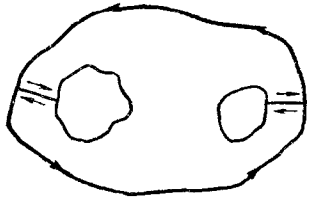


Рис. 46. Многосвязная область

Теперь можем сформулировать основную интегральную теорему Коши. Если $f(z)$ — регулярная функция в односвязной области D, то $\int\limits_C f(z)\,dz=0$, где C обозначает некоторую замкнутую кривую, лежащую внутри области D. Теорема также утверждает, что если две различные линии в области D соединяют точки a и b и образуют замкнутую кривую, интеграл между этими точками не зависит от вида линии. Если написать

$$f(z)=\phi(x, y)+i\psi(x, y),$$

то интеграл составит

$$\int\limits_C (\phi+i\psi)(dx+idy)=\int\limits_C (\phi dx+\psi\,dy)+i\int\limits_C (\psi\,dx+\phi dy).$$

Согласно теореме Стокса этот интеграл равен

$$-\iint\limits_{A_C}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dxdy-i\iint\limits_{A_C}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dxdy,$$

где A_C обозначает площадь, ограниченную замкнутой кривой C. Поскольку последний интеграл в силу уравнений Коши — Римана исчезает, теорема доказана.

Можно показать, что интегральная теорема Коши справедлива и тогда, когда функция $f(z)$ нерегулярна вдоль кривой C, при условии, если она регулярна в области, ограниченной кривой C, и значения ее неразрывны с принятыми на границе. Это распространение теоремы особенно важно для двухмерного потока, обусловленного размещением источников или вихрей вдоль границы.

Интегральная теорема Коши может быть сформулирована также для многосвязных областей. Если C_0, C_1,..., C_n — простые (непересекающиеся) замкнутые кривые, расположенные целиком в области D таким образом, что C_1,..., C_n лежат внутри кривой C_0, но вне друг друга (см. рис. 46), а функция $f(z)$ регулярна и однозначна на границах многосвязной области, содержащей кривые C_0, C_1,...,C_n, то

$$\int_{C_0} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz,$$

где все кривые пересечены вышеописанным способом.

Теорема доказывается введением разрезов, показанных на рис. 46, и обходом всех участков кривых по направлениям, указанным стрелками. Поскольку при наличии разрезов область становится односвязной, может быть применена интегральная теорема Коши. Интегралы по самим разрезам берутся дважды в противоположных направлениях, так что они взаимно уничтожаются и полученное выше уравнение представляет конечный результат.

Если z — внутренняя точка на простой замкнутой кривой C, лежащей полностью в области D, в которой функция $f(z)$ регулярна и однозначна, то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{96}$$

Формула (96), называемая интегральной формулой Коши, дает значения аналитической функции внутри области, когда известны ее значения на границе. Далее будет показано, что это непосредственно касается проблем граничных значений в теории двухмерного безвихревого течения. Для проверки формулы сначала вокруг точки z проводим малую окружность γ. Далее принимаем, что $f(\zeta)/(\zeta - z)$ — есть регулярная функция в двухсвязной области между кривыми C и γ, и затем, используя интегральную теорему для многосвязных областей, а также заменяя $\zeta - z = re^{i\theta}$ на кривой γ, получаем

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int_0^{2\pi} if(\zeta)\,d\theta.$$

Так как функция $f(z)$ непрерывна, $f(\zeta)$ в последнем интеграле может быть заменена на $f(z)$ с ошибкой, уменьшающейся до нуля по мере приближения к нулю радиуса кривой γ. Следовательно, доказано, что

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i f(z).$$

Другой вывод интегральной теоремы Коши известен как теорема о вычете. Коэффициент a_{-1} при $(z-a)^{-1}$ в разложении аналитической функции в ряд Лорана называется вычетом функции в точке $z=a$. Теорема читается так: если C есть простая замкнутая кривая и функция $f(z)$ однозначна и регулярна на кривой C и внутри нее, за исключением конечного числа особых точек внутри кривой, в которых вычеты составляют R_1, R_2,..., R_n, то

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i (R_1 + R_2 + \cdots + R_n). \tag{97}$$

Для доказательства нужно взять малые окружности γ_1, γ_2, ..., γ_n вокруг особых точек. Тогда, согласно интегральной теореме,

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)\, dz.$$

Если a — особая точка, γ — малая окружность вокруг нее и разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана выполняется относительно a, то

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \cdots + a_2 \int_\gamma (z-a)^2\, dz + a_1 \times$$

$$\times \int_\gamma (z-a)\, dz + a_0 \int_\gamma dz + a_{-1} \int_\gamma \frac{dz}{z-a} + a_{-2} \int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^2} + \cdots$$

Произведя замену $z-a=re^{i\theta}$, для всех положительных и отрицательных m, за исключением $m=-1$, будем иметь

$$\int_\gamma (z-a)^m\, dz = ir^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)\theta}\, d\theta = 0.$$

Однако

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i,$$

отсюда

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i a_{-1}.$$

Путем подстановки соответствующего результата в каждый из написанных интегралов доказывается теорема о вычете.

42. Приложение к безвихревому потоку. Если ϕ и ψ обозначают потенциал скорости и функцию тока двухмерного безвихревого потока, то

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Приведенные соотношения показывают, что ϕ и ψ удовлетворяют уравнениям Коши — Римана. Величина $w = \phi + i\psi$, обозначающая комплексный потенциал, является вследствие этого аналитической функцией z. Это доказывает полное соответствие между аналитическими функциями и двухмерными безвихревыми течениями, упомянутыми в начале этой главы. Таким образом, рассматривая аналитические функции различных типов, можно описать самые различные виды двухмерных потоков.

Производная dw/dz имеет непосредственную связь со скоростью потока. Из п. 40 получим следующие соотношения:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv = Ve^{-i\alpha}, \tag{98}$$

где V — результирующая скорость, α — угол ее наклона, а dw/dz — так называемая комплексная скорость.

Комплексные потенциалы для различных представляющих интерес случаев, среди которых имеются уже рассмотренные в главе III, даны в табл. 1. Для каждого из них легко получить полное поле скоростей. Для источника напряжением m, например, имеем:

$$w = m \ln z = m \ln(re^{i\theta}) = m(\ln r + i\theta);$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{m}{z} = \frac{m}{r} e^{-i\theta}.$$

Откуда

$$\phi = m \ln r; \quad \psi = m\theta.$$

Следовательно, величина скорости равна m/r, а наклон ее определяется углом θ.

Иллюстрация возможностей метода комплексных переменных представлена выражениями в форме вычетов для присоединенных масс двухмерного потока и действующих при этом силы и момента.

Если предположить, что простой замкнутый контур C, вокруг которого нет циркуляции, характеризуется скоростью смещения с компонентами u_b и v_b (рис. 47), тогда, используя приемы для трехмерного потока, описанные в п. 33, можем записать выраже-

ния потенциала скорости и кинетической энергии внешней жидкости в следующем виде:

$$\varphi = u_b \varphi_1 + v_b \varphi_1; \; 2K = Au_b^2 + 2Fu_b v_b + Bv_b^2,$$

где

$$A = -\rho \int_C \varphi_1 \frac{\partial x}{\partial n} ds; \; B = -\rho \int_C \varphi_2 \frac{\partial y}{\partial n} ds;$$

$$F = -\rho \int_C \varphi_1 \frac{\partial y}{\partial n} ds = -\rho \int_C \varphi_2 \frac{\partial x}{\partial n} ds;$$

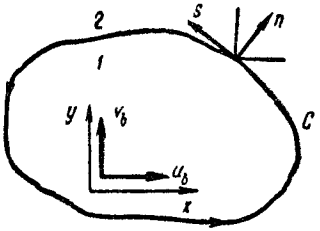


Рис. 47. Схема движущегося контура

1 — внутренняя часть; *2* — наружная часть

n — нормаль, направленная наружу от контура; A, F и B — присоединенные массы двухмерного потока между параллельными пластинами, расположенными на единичном расстоянии друг от друга. Потенциалы удовлетворяют граничным условиям:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \psi_1}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial n}; \; \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \frac{\partial \psi_2}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial n}.$$

Из рис. 47 видно также, что

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial s}; \; \frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial s}.$$

Следовательно, на границе $\partial\psi_1/\partial s = \partial y/\partial s$, или $\psi_1 = y$, если постоянную интегрирования выбрать равной нулю; таким же образом $\psi_2 = -x$ и

$$A = -\rho \int_C \varphi_1 dy; \; F = \rho \int_C \varphi_1 dx = -\rho \int_C \varphi_2 dy;$$

$$B = \rho \int_C \varphi_2 dx.$$

Далее рассматривается комплексный интеграл

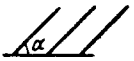
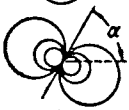
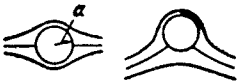
$$\int_C w_1 dz = \int_C (\varphi_1 + i\psi_1)(dx + i dy) =$$

$$= \int_C (\varphi_1 dx - y dy) + i(y dx + \varphi_1 dy).$$

Но $\int_C y dy = 0$ и $\int_C y dx = -S$, где S — площадь, ограниченная контуром C. Отсюда, подставляя эти значения, а также выражения для A и F в интеграл w_1 и составляя подобное выражение для

Таблица 1

Течения, соответствующие различным комплексным потенциалам

Конфигурация течения		$w=\phi+i\psi$
Равномерный поток в направлении α		$Uze^{-i\alpha}$
Источник напряжением m в точке z_0		$m\ln(z-z_0)$
Вихрь напряжением k в точке z_0		$-ik\ln(z-z_0)$
Диполь напряжением $\delta e^{i\alpha}$		$-\delta e^{i\alpha}/z$
Течение в углу π/n		Az^n
Обтекание тела		$Uz+m\ln z$
Течение вокруг круглого цилиндра с циркуляцией		$U\left(z+\frac{a^2}{z}\right)+ik\ln z$
Обтекание овала Ренкина		$Uz+m\ln\frac{z+b}{z-b}$
Линия вихря вблизи стенки		$ik\ln\frac{z+b}{z-b}$
Источник в центре канала		$m\ln\operatorname{sh}\frac{\pi z}{a}$

интеграла $w_2=\phi_2+i\psi_2$, получим соотношения:

$$\left.\begin{aligned} F-i(A+\rho S)&=\rho\int_C w_1dz=2\pi\rho i\ (\text{вычет } w_1);\\ B+\rho S-iF&=\rho\int_C w_2dz=2\pi\rho i\ (\text{вычет } w_2).\end{aligned}\right\}\qquad(99)$$

Можно показать, что уравнения (99) действительны и при наличии циркуляции. В этом случае w_1 и w_2 являются комплексными потенциалами для течений с нулевой скоростью в беско-

нечности. Следует отметить тождественность настоящих результатов теореме Тэйлора для трехмерного случая, описанного в п. 33.

Подобные же простые выражения для силы и момента, действующих на замкнутый контур C в произвольном установившемся безвихревом потоке несжимаемой жидкости, были предложены Блазиусом. Сила, обусловленная давлением жидкости p на элемент дуги ds контура C (рис. 48), имеет следующие компоненты по осям x и y:

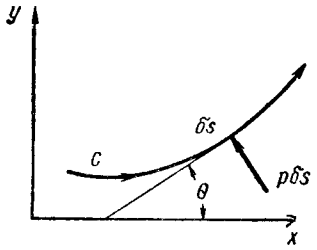


Рис. 48. Давление на элемент дуги

$$dX = -pds\sin\theta; \quad dY = pds\cos\theta.$$

Эти выражения могут быть записаны в комплексной форме:

$$dY + idX = pdse^{-i\theta} = pdze^{-2i\theta},$$

поскольку $dz = dse^{i\theta}$. Момент относительно начала координат, обусловленный давлением жидкости на элемент ds, составляет выражение

$$-ydX + xdY = pds\,(y\sin\theta + x\cos\theta),$$

равное, что легко показать, dM в уравнении

$$dM + idN = pzdze^{-2i\theta}.$$

В этом уравнении N не имеет физического значения. Следовательно:

$$Y + iX = \int_C pe^{-2i\theta}\,dz; \quad M + iN = \int_C zpe^{-2i\theta}\,dz.$$

Теперь, согласно уравнению Бернулли для установившегося потока (учитывая, что сила тяжести действует в отрицательном направлении оси y), имеем

$$p = \text{const} - \frac{\rho V^2}{2} - \gamma y.$$

При постоянном давлении, действующем по всей окружности, результирующая сила равна нулю, а при гидростатическом давлении сила, обусловленная законом Архимеда, определяет динамическую часть давления, т. е. член $\frac{\rho V^2}{2}$. Написав $p = -\rho\frac{V^2}{2}$ и вспомнив, что $\frac{dw}{dz} = Ve^{-i\theta}$, найдем, что

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2}\int_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz; \quad M + iN = -\frac{\rho}{2}\int_C z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz. \quad (100)$$

Эти формулы изображают теорему Блазиуса, которая дает

компоненты силы и момента в форме вычетов аналитических функций $\left(\frac{dw}{dz}\right)^2$ и $z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2$. Здесь необходимо отметить сходство для установившегося потока теорем Блазиуса и Легалли.

Пример 11. Найти присоединенную массу и усилие на круглый цилиндр в равномерном потоке при наличии циркуляции вокруг цилиндра.

Комплексный потенциал, приведенный в табл. 1 для установившегося течения вокруг круглого цилиндра радиусом a с циркуляцией $2\pi k$ в потоке со скоростью U в направлении положительной оси x, имеет вид

$$w = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + ik \ln z.$$

Чтобы найти присоединенную массу цилиндра, требуется определить комплексный потенциал w_1 для неустановившегося течения, когда цилиндр движется с единичной скоростью в направлении положительной оси x. Он может быть получен из w наложением неравномерного течения $-Uz$ и принятием $U=-1$, что дает

$$w_1 = -\frac{a^2}{z} + ik \ln z.$$

Как показано в п. 44, $z=0$ есть точка разветвления функции $\ln z$, так что последняя не может быть разложена в ряд Лорана и не может иметь вычета. Однако вычет w_1 равен $-a^2$, и для присоединенной массы получаем

$$F - i(A + \pi\rho a^2) = -2\pi a^2 \rho i;$$

$$F = 0; \quad A = \pi a^2 \rho = \rho S.$$

Таким образом, присоединенная масса круглого цилиндра равна массе вытесненной им жидкости.

Усилие на цилиндр, определяемое по формуле Блазиуса, выражается через комплексный потенциал для установившегося течения, так что w может использоваться в данной выше форме. Но

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \left[U\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) + \frac{ik}{z}\right]^2 = \frac{2iUk}{z} + \cdots$$

Другие члены в правой части уравнения не определяются, так как требуется только вычет $2iUk$. Таким образом, теорема Блазиуса дает:

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2}(2\pi i)(2iUk) = \rho U 2\pi k = \rho U\Gamma;$$

$$X = 0; \quad Y = \rho U\Gamma.$$

Эта исключительно простая формула для подъемной силы применима, как будет показано далее, и для цилиндра произвольной формы.

Б. Основы конформного отображения

43. Геометрические свойства аналитических функций. Адекватность аналитических функций и безвихревых течений может быть выражена геометрически, поскольку взаимно ортогональные координатные линии $\psi = \text{const}$ и $\phi = \text{const}$, показанные на рис. 49, могут рассматриваться как взаимно ортогональные семейства линий тока и эквипотенциалей в плоскости z. Свойство сохранения величин углов между соответствующими линия-

ми в соответствующих точках является основной характеристикой аналитических функций. Таким образом, если $\zeta=f(z)$ — некоторая аналитическая функция, а z_0 — регулярная точка, в которой $f'(z_0)\neq 0$, то

$$\delta\zeta = f'(z_0)\,\delta z,$$

или, используя полярные представления:

$$\delta\zeta = r'e^{i\theta'};\ \delta z = re^{i\theta};\ f'(z_0) = \rho e^{i\alpha},$$

получим

$$r' = \rho r,\ \theta' = \theta + \alpha.$$

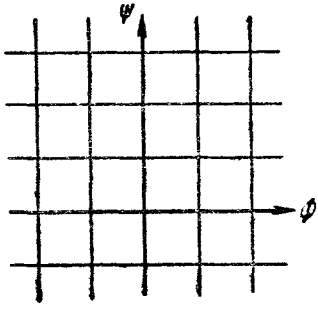


Рис. 49. Отображение комплексного потенциала $w=\phi+i\psi$

Этот результат означает, что элементарный треугольник около точки z_0 может трансформироваться в подобный ему треугольник, увеличенный в ρ раз и повернутый на угол α в плоскости ζ (рис. 50); иначе говоря, величина угла между двумя кривыми, пересекающимися в регулярной точке, в которой $f'(z)\neq 0$, сохраняется при трансформации. По этой причине такая трансформация называется конформной. Этот результат также показывает, что отображение малой области вблизи точки z_0 на окрестность соответствующей точки ζ_0 единственно, т. е. каждой точке в малой области вокруг точки z_0 соответствует одна и только одна точка в области, окружающей точку ζ_0, и наоборот. Кроме того, когда θ изменяется от 0 до 2π при обходе вокруг точки z_0 в малой области, θ' также изменяется в пределах на 2π при обходе вокруг точки ζ_0 в плоскости ζ. В теоремах настоящего раздела было доказано, что большое количество свойств отображения также существует в конечных областях, в которых функция $f(z)$ регулярна и $f'(z)\neq 0$.

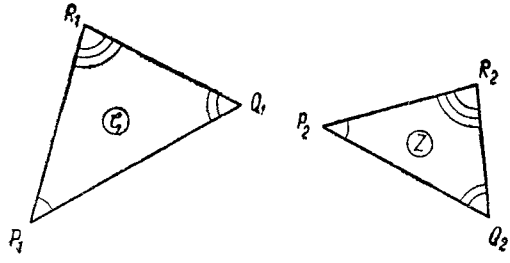


Рис. 50. Конформное отображение элементарного треугольника

Свойство конформных отображений, которое определяет настоящий интерес к ним и их интенсивное изучение, заключается в том, что из решения краевой задачи для круга может быть непосредственно получено решение для произвольного профиля путем единственного конформного преобразования внутренней (или внешней) области произвольного профиля во внутреннюю (или внешнюю) область уже известного круга. Таким образом, если функция $\zeta=f(z)$ трансформирует профиль G в плоскости z в круг C в плоскости ζ и если

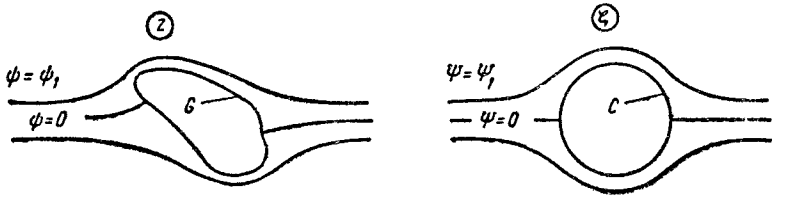


Рис. 51. Преобразование потока, обтекающего тело произвольного профиля, в поток, обтекающий круг

$$W(\zeta)=\Phi(\xi,\ \eta)+i\Psi(\xi,\eta)$$

обозначает комплексный потенциал, который решает краевую задачу для круга, тогда замена $\zeta=f(z)$ в комплексном потенциале плоскости z дает

$$w(z)=W[f(z)]=\phi(x,y)+i\psi(x,y)$$

или

$$\Phi(\xi,\eta)=\phi(x,y);\ \Psi(\xi,\eta)=\psi(x,y).$$

Таким образом, линии тока и эквипотенциали $\Psi=\text{const}$ и $\Phi=\text{const}$ в плоскости ζ становятся линиями тока и эквипотенциалями $\psi=\text{const}$ и $\phi=\text{const}$ в плоскости z. В частности, если C есть линия тока в плоскости ζ, она трансформируется в линию тока G в плоскости z (рис. 51). Очевидно, что задача Дирихле для профиля с заданной величиной ϕ преобразуется в задачу Дирихле для круга с теми же значениями потенциала в соответствующих точках. Когда значения $\partial\phi/\partial n$ — нормальной производной потенциала на линии G — заданы (задача Неймана), соответствующие значения $\partial\Phi/\partial\nu$ нормальной производной на линии C будут:

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}|f'(z)|, \tag{101}$$

причем $\delta\Phi=\delta\phi$, $\delta\nu=|\delta\zeta|$, когда $\delta n=|\delta z|$, и $|\delta\zeta|=|f'(z)|\times\times|\delta z|$.

Комплексные скорости в плоскостях z и ζ также составляют простое соотношение:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dW}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz};$$

или, обозначая компоненты скорости в плоскости z через u и v, а в плоскости ζ через U и V:

$$u - iv = (U - iV) f'(z).$$

Следует подчеркнуть, что приведенные соотношения не требуют, чтобы замкнутый контур C был окружностью. Однако очевидно удобство осуществления трансформации границы области в круг при помощи одной или нескольких промежуточных плоскостей, к каждой из которых могут быть применены указанные соотношения для граничных условий.

Применение конформного отображения к решению проблем потоков таит в себе большие опасности, которые можно избежать, зная свойства, ограничения и возможности таких отображений. С этой целью ниже перечислены и затем рассмотрены некоторые наиболее важные теоремы о конформном отображении.

а. Если функция $\zeta = f(z)$ регулярна на простой замкнутой кривой G и внутри нее и дает единственное преобразование кривой G в простую замкнутую кривую C в плоскости ζ, тогда преобразование также приводит к единственному соответствию между внутренними областями контуров C и G, так что C и G описываются в одинаковом смысле.

б. Если функция $\zeta = f(z)$ регулярна, а функция $f'(z) \neq 0$ на простой замкнутой кривой G и внутри нее и если G отображается в замкнутую кривую C на плоскости ζ, то отображение между G и C и их внутренними областями единственно (т. е. каждой точке одной области соответствует одна и только одна точка другой области).

в. Если функция $f(z)$ регулярна во внутренней области простой замкнутой кривой G, составленной из конечного числа сегментов $z = z(t)$, вдоль которых z дифференцируема и $z'(t) \neq 0$, и дает единственное отображение данной области на внутреннюю область круга C, то существует также единственное непрерывное отображение кривой G в круг C. Функция $f(z)$ регулярна на кривой G с $f'(z) \neq 0$, за исключением концов сегментов, где $f(z)$ непрерывна.

г. Можно найти аналитические функции $z = f(\zeta)$, которые дают единственное отображение любой односвязной области по крайней мере с двумя граничными точками в плоскости z на внутреннюю область единичного круга $|\zeta| < 1$. Это — известная теорема Римана о конформных преобразованиях. Отображение является единственным, если заданы значения $f(0)$ и $\arg f'(0)$.

д. Основная аналитическая функция $z = f(\zeta)$, которая дает

единственное конформное отображение внутренней области простого замкнутого контура G в плоскости z на внутреннюю область круга C, и обратная ей функция $\zeta = f(z)$ выражаются рядом Тэйлора:

$$\left.\begin{aligned} z &= \zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \cdots; \\ \zeta &= z - a_2 z^2 + (2a_2^2 - a_3) z^3 + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (102)$$

Ряд для функции $z(\zeta)$ сходится к значениям ζ внутри круга C, тогда для функции $\zeta(z)$ значения z в пределах большого круга с центром в начале координат могут быть вписаны внутрь контура G. Если функция дает регулярное единственное отображение внешней области G на внешнюю область C, тогда функция $z(\zeta)$ и обратная ей функция $\zeta(z)$ могут быть разложены в ряд Лорана:

$$\left.\begin{aligned} z(\zeta) &= \zeta + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \frac{a_3}{\zeta^3} + \cdots; \\ \zeta(z) &= z - \frac{a_1}{z} - \frac{a_2}{z^2} - \frac{a_1^2 + a_3}{z^3} - \cdots. \end{aligned}\right\} \qquad (103)$$

Ряд для функции $z(\zeta)$ сходится к значениям ζ во внешней области C, тогда для функции $\zeta(z)$ значения z во внешней области малого круга с центром в начале координат ограничиваются контуром G.

е. Если единичный круг в плоскости ζ преобразуется в простой замкнутый контур G функцией $z = \zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \ldots$, то площадь области, ограниченной контуром G, превышает по величине площадь круга и составляет:

$$A = \pi(1 + 2|a_2|^2 + 3|a_3|^2 + \cdots). \qquad (104)$$

Это выражение называется соотношением Биебербаха — Фабера для площади. Соответствующее соотношение для площади A, ограниченной контуром G, когда внешние области G и C преобразуются с помощью ряда Лорана [уравнение (103)], имеет вид

$$A = \pi\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2\right). \qquad (105)$$

В этом случае преобразуемая площадь меньше, чем площадь круга.

Теоремы «а» и «б» будут исчерпывающе проиллюстрированы при изображении элементарных преобразований в следующем пункте. Если бы отображение внутренних областей контуров C и G было не единственным, обратная функция $z(\zeta)$ была бы многозначной, т. е. имелась бы точка разветвления $\zeta_0 = \zeta(z_0)$, где $f'(z_0) = 0$, соответствующая по крайней мере одной точке z_0 внутри G. Но, как видно из соотношения $\zeta = (z - z_0)^n$, $\arg(\zeta_C - \zeta_0)$ уве-

личивается в $2n\pi$ раз, когда $\arg(z_G - z_0)$ увеличивается в 2π раз, так как точка разветвления имеет порядок n, а это противоречит гипотезе единственного отображения контуров G и C. Поскольку сравнение аргументов в плоскостях z и ζ показывает, что они изменяются в одинаковом смысле даже когда $n=1$, теорема «а» доказана. Доказательство теоремы «б» кажется почти тривиальным. Пусть $f'(z) \neq 0$, тогда точек разветвления нет ни на контуре G, ни внутри его, так что отображение должно быть единственным. Теорема «в» очень важна, так как способ составления гладких границ представляет большой практический интерес; однако доказательство этой теоремы выходит за пределы настоящего труда.

Чрезвычайно широкое применение получила теорема Римана «г». Хотя, согласно этой теореме, требуются всего две граничные точки в плоскости z, в практических приложениях желательно отображать в единичный круг кривую, содержащую бесконечное число граничных точек. Проблему конформного отображения Риман разработал в своей диссертации (1851 г.), где были представлены все основные понятия, на которых базируются последующие работы в этой области. Однако его доказательство теоремы об отображении было не полным, поскольку оно зиждилось на спорных допущениях, обоснованность которых была доказана лишь в 1900 г. Гильбертом в теореме, известной под названием принцип Дирихле. Доказательства теоремы здесь не дается, однако полезно рассмотреть условия единственности отображения. Два различных единственных отображения односвязной области на внутреннюю область единичного круга дают единственное отображение единичного круга в самого себя; как будет показано далее, это преобразование должно быть линейным. Однако линейное преобразование единичного круга в самого себя имеет три степени свободы (см. следующий раздел). Итак, комплексное число $f(0)$ дает два действительных числа: само данное и $\arg f'(0)$, что достаточно для обеспечения единственности преобразования.

В связи с первой частью теоремы «д» наиболее общее конформное преобразование внутренней области контура G во внутреннюю область единичного круга в плоскости ζ' имеет три степени свободы, из которых две могут служить для установления, что $z = x + iy = 0$ (т. е. $x=0$, $y=0$), когда $\zeta'=0$, а третья для доказательства, что $\arg f'(0) = 0$, т. е. $(dz/d\zeta')_{\zeta'=0} = r_0 > 0$. Тогда увеличение (или уменьшение) $\zeta = r_0\zeta'$ дает $(dz/d\zeta)_{\zeta=0} = 1$ и преобразует единичный круг в круг радиусом r_0 в плоскости ζ. Так как функция $z(\zeta)$ регулярна внутри круга, она может быть разложена в ряд Тэйлора, который сходится внутри этого круга и у которого значения двух первых коэффициентов могут быть выбраны так, чтобы $a_0 = z(0) = 0$ и $a_1 = (dz/d\zeta)_0 = 1$, как принято в теореме. Обратная функция $\zeta(z)$ также может быть выражена рядом Тэйлора $\zeta = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$. Тогда

$$\zeta = c_1(\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \cdots) + c_2(\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots)^2 + c_3\zeta^3 + \cdots =$$
$$= c_1\zeta + (c_1a_2 + c_2)\zeta^2 + (c_1a_3 + 2c_2a_2 + c_3)\zeta^3 + \cdots$$

Приравнивая коэффициенты и решая равенство относительно c_1, c_2 и c_3, получим $c_1 = 1$; $c_2 = -a_2$; $c_3 = 2a_2^2 - a_3$, как и утверждалось. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Для вывода формулы Биебербаха — Фабера необходимо знать соотношение элементов площади в плоскостях z и ζ. Координатные линии $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$ преобразуются в систему ортогональных криволинейных координат в плоскости z. Если ds_ξ и ds_η обозначают длины элементов дуги в плоскости z соответственно вдоль кривых $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$, то из уравнения $dz = f'(\zeta)\,d\zeta$ получим:

$$ds_\xi = |f'(\zeta)|\,d\xi; \quad ds_\eta = |f'(\zeta)|\,d\eta,$$

откуда устанавливается соотношение элементов площадей dA_ζ и dA_z в плоскостях ζ и z:

$$dA_z = |f'(\zeta)|^2\,dA_\zeta.$$

В полярных координатах в плоскости ζ площадь, ограниченная контуром G, составляет

$$A = \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f'(\zeta)|^2 r\,dr\,d\theta.$$

Но

$$|f'(\zeta)|^2 = f'(\zeta)\overline{f'(\zeta)} =$$
$$= (1 + 2a_2\zeta + 3a_3\zeta^2 + \cdots)(1 + 2\bar{a}_2\bar{\zeta} + 3\bar{a}_3\bar{\zeta}^2 + \cdots) =$$
$$= (1 + 2a_2re^{i\theta} + 3a_3r^2\,e^{2i\theta} + \cdots)(1 + 2\bar{a}_2re^{-i\theta} +$$
$$+ 3\bar{a}_3r^2e^{-2i\theta} + \cdots) = 1 + 4a_2\bar{a}_2r^2 + 9a_3\bar{a}_3r^4 + \cdots +$$
$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\theta}, \quad m \neq 0,$$

где пределы в последнем из указанной суммы слагаемом не определяют площади до тех пор, пока их интегралы, зависящие от θ, все не исчезнут. Отсюда

$$A = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n \bar{a}_n r^{2n-1}\,dr\,d\theta = \pi \sum_{n=0}^{\infty} n\,|a_n|^2.$$

Этот результат был использован Биебербахом как основа для практических способов отображения области в круг.

44. Элементарные преобразования. Цель изучения свойств отображения некоторых элементарных функций становится ясной при сравнении с дифференциальным и интегральным исчислением. Для того чтобы научиться дифференцировать и интегрировать, недостаточно изучить теорию; необходимо знать, как выполнять эти операции над рядом элементарных функций. Подобным же образом необходимо знать конформные отображения некоторых элементарных функций для того, чтобы суметь управлять более сложными случаями.

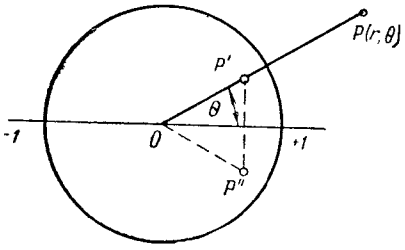


Рис. 52. Изображение преобразования $1/z$

Линейные преобразования. Простейшим и основным преобразованием является так называемая линейная функция

$$w = \frac{az+b}{cz+d}; \quad ad - bc \neq 0,$$

где условие $ad-bc\neq 0$ устраняет тривиальный случай $w=$ $=\text{const}$. Для частных значений постоянных, входящих в выражение линейной функции, получается:

$w = \lambda z$ — преобразование подобия при λ действительном и положительном; вращение при $|\lambda| = 1$;

$w = z + b$ — параллельный перенос;

$w = \frac{1}{z}$ — инверсия.

Инверсия — очень важное преобразование, существо которого может быть изучено путем введения полярных координат

$$w = \rho e^{i\varphi}; \quad z = re^{i\theta}.$$

Тогда, как показано на рис. 52, где P есть точка в плоскости z, а P'' — положение соответствующей точки в плоскости w,

$$\rho = \frac{1}{r}; \quad \varphi = -\theta.$$

Точки P и P' на радиальной линии, проведенной из центра O круга радиусом R, называются инверсными или отображенными точками по отношению к окружности, если $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = R^2$. Таким образом, значение w, данное преобразованием $w = \frac{1}{z}$, является сопряженным инверсии z в единичном круге.

Самым полезным применением инверсии в круге является принцип отражения Шварца, допускающий в определенных случаях распространение отображения на простое отражение части границы. Принцип формулируется следующим образом: если функция $\zeta = f(z)$ регулярна в плоскости z на дуге k, которая отображается в дугу K плоскости ζ, то инверсные по отношению

к k точки отображаются в точки, инверсные по отношению к K. Доказательство принципа, основанное на теории комплексных переменных и называемое аналитическим продолжением, здесь не приводится.

Решение функции $w(z)$ для $z(w)$ дает инверсную линейную функцию

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Как $w(z)$, так и $z(w)$ регулярны всюду, за исключением полюсов первого порядка при $z = -d/c$ и $w = a/c$. Полезно в данном случае представлять точку в бесконечности как обычную точку плоскости, например точка в бесконечности в плоскости z соответствует $w = a/c$ в плоскости w. Также функция $w(z)$ при $z = \infty$ определяется как функция $w(1/\zeta)$ при $\zeta = 0$. Поэтому поскольку функция $w(1/\zeta) = (a + b\zeta)/(c + d\zeta)$ регулярна при $\zeta = 0$, считается, что функция регулярна при $z = \infty$. Точку в бесконечности можно представить себе, если вообразить, что плоскость — это очень большая сфера с точкой, диаметрально противоположной исходной точке, и что радиальные линии из исходной точки — это большие окружности, пересекающиеся в бесконечности. Так как при такой концепции углы между радиальными линиями из полюса $z = -d/c$ могут считаться сохраняющими свою величину в точке в бесконечности в плоскости w, то линейные функции считаются регулярными в комплексной плоскости z.

Линейные функции обладают многими важными свойствами, которые перечисляются и комментируются ниже.

1. Линейная (и только линейная) функция дает единственное конформное преобразование между комплексными плоскостями w и z.

2. Результатом ряда последовательных линейных преобразований является также линейное преобразование.

3. Линейное преобразование трансформирует окружности и прямые одной плоскости в окружности и прямые другой плоскости.

4. Единственная линейная функция, которая преобразует три различные точки z_1, z_2, z_3 плоскости z в три различные точки w_1, w_2 и w_3 плоскости w, следующая:

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}. \qquad (106)$$

5. Линейная функция может быть выражена в виде

$$\frac{w - A}{w - B} = \lambda \frac{z - A}{z - B}$$

или в виде

$$\frac{1}{w - A} = \frac{1}{z - A} + C$$

в зависимости от того, имеет преобразование две фиксированные точки или только одну. Если имеется только одна фиксированная точка, преобразование называется параболическим.

6. Функция $Z=(z-A)/(z-B)$ преобразует радиальные линии и концентрические окружности полярной системы координат в плоскости Z в семейство дуг с общей хордой AB и ортогональное первому семейство окружностей, для которых точки A и B являются инверсными, в плоскости z (рис. 53).

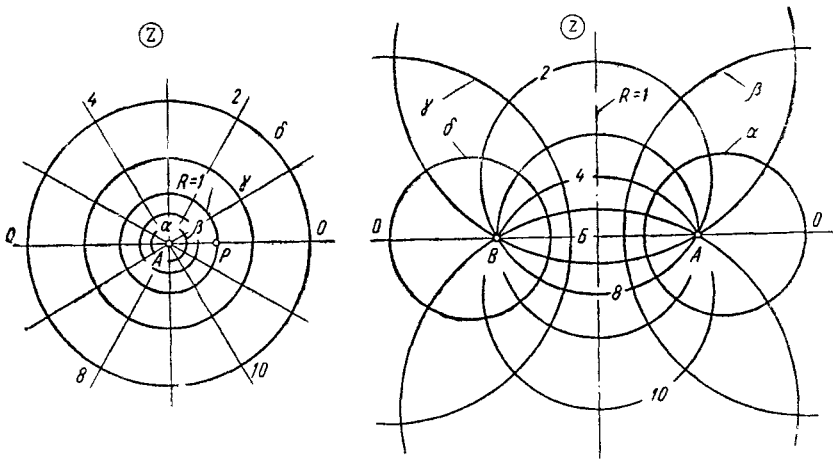


Рис. 53. Конформное отображение $Z=(z-A)/(z-B)$

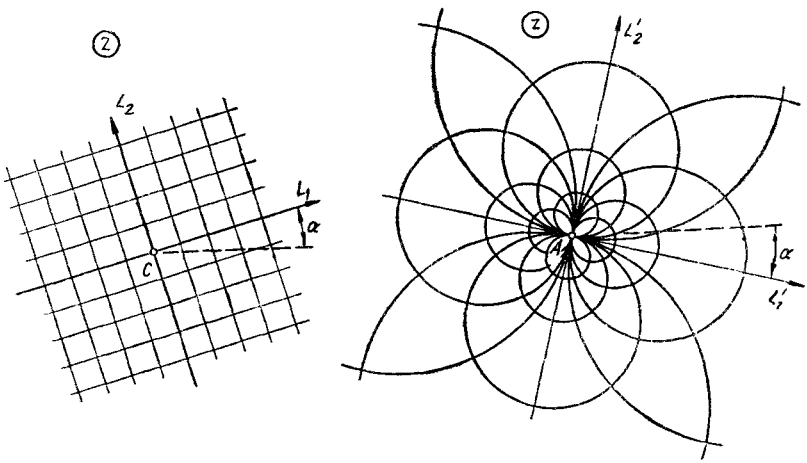


Рис. 54. Конформное отображение $Z=C+1/(z-A)$

7. Линейная функция при двух фиксированных точках A и B преобразует два семейства ортогональных окружностей A и B в самих себя.

8. Если линейная функция преобразует точки A, B и окружность γ в точки A', B' и окружность γ', а A и B инверсны по отношению к окружности γ, то A' и B' инверсны по отношению к окружности γ'.

9. Функция $Z=C+1/(z-A)$ преобразует сетку в прямоугольной системе координат в плоскости Z в два семейства ортогональных окружностей, проходящих через точку A в плоскости z и имеющих общую касательную (рис. 54). Параболическое линейное преобразование с фиксированной точкой A трансформирует модель в самое себя.

10. Линейные функции

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{az+b}{cz+d}; \quad a, b, c, d \text{ — действительны,} \\ & \qquad ad - bc > 0; \\ w &= \frac{az+b}{\bar{a}z+\bar{b}}; \quad I\left(\frac{b}{a}\right) < 0; \\ w &= \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}; \quad |a| > |b| \end{aligned}\right\} \qquad (107)$$

являются наиболее общими для преобразований соответственно верхней полуплоскости в самое себя, верхней полуплоскости плоскости z во внутреннюю область единичного круга в плоскости w и внутренней области единичного круга в самое себя. Любое из этих преобразований имеет три степени свободы.

11. Всякое единственное конформное преобразование единичного круга в самого себя линейно.

Первое из перечисленных свойств уже было рассмотрено и доказано. Обратная теорема, данная в скобках, не будет доказываться. Второе свойство подтверждается исключением промежуточных преобразований. Третье свойство может быть доказано подстановкой в общее уравнение для прямых и окружностей в плоскости z

$$A\bar{z}z + Bz + \bar{B}\bar{z} = 0$$

вместо z и $\bar{z}$ их выражений как линейных функций от w и $\bar{w}$. Тогда результирующее уравнение для плоскости w будет иметь ту же форму. Для доказательства четвертого свойства оба члена приведенной формулы приравниваются Z, причем точки z_1, z_2, z_3 плоскости z преобразуются в точки 0, 1, ∞ плоскости Z и затем в точки w_1, w_2, w_3 плоскости w.

Приравняв члены формулы пятого свойства Z, можно доказать что A и B фиксированные точки этого преобразования, так как A и B и в плоскости z и в плоскости w соответствуют 0 и ∞

в плоскости Z. Величины A и B получаются при подстановке z вместо w в приведенное линейное преобразование и при решении результирующего квадратного уравнения, принимая $c \neq 0$.

Шестое свойство является следствием того, что A и B соответствуют 0 и ∞ в плоскости Z, так что радиальные линии плоскости Z преобразуются в дуги, простирающиеся от A до B. Так как полюс в плоскости Z существует при $Z=1$, то линия AB преобразуется в действительную ось плоскости Z. Далее, из-за конформности отображения угол в точке A между дугой и AB равен углу соответствующей радиальной линии с осью x, и концентри-

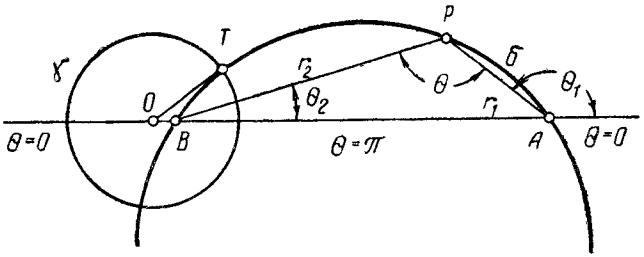


Рис. 55. Ортогональность окружностей, проведенных через инверсные точки

ческие окружности рис. 53, ортогональные радиальным линиям, должны преобразовываться в ортогональное семейство указанных окружностей. Точка T пересечения одной окружности семейства γ с одной окружностью семейства δ показана на рис. 55. Вследствие их ортогональности OT касательна к δ, если O — центр γ, и по теореме секансов элементарной геометрии $OA \times OB = OT^2$, т. е. A и B — инверсные точки по отношению к γ. Другие геометрические свойства отображения могут быть выведены с помощью полярных координат $Z = Re^{i\theta}$ и биполярных координат $z - A = r_1 e^{i\theta_1}$, $z - B = r_2 e^{i\theta_2}$. Далее

$$Re^{i\theta} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}; \quad R = \frac{r_1}{r_2};$$

$$\theta = \theta_1 - \theta_2.$$

Таким образом, $\frac{r_1}{r_2}$ постоянно для γ, а θ постоянно для δ (см. рис. 55). Линия от A к ∞ и затем к B с противоположной стороны отрезка AB соответствует $\theta = 0$; $\theta = \pi$ преобразуется в отрезок AB на самой линии. Единичный круг $R = 1$ в плоскости Z преобразуется в перпендикулярную биссектрису хорды AB. Эта биссектриса делит плоскость z на две части, в одной находится A, в другой — B. Эти части преобразуются соответственно во внутреннюю и наружную области единичного круга. Седьмое свойство легко доказать, переходя от плоскости z к плоскости w через плоскость Z.

Восьмое свойство доказывается на основании рис. 55, где все окружности δ, проходящие через инверсные точки A и B, ортогональны γ, а также на основании того, что эти окружности преобразуются в окружности δ', проходящие через точки A' и B' и ортогональные γ'. Но, как было показано выше, инверсность является непосредственным следствием этой ортогональности. Необходимо отметить, что инверсия точки на прямой линии является ее зеркальным отражением на этой линии. Поэтому и инверсия точки в окружности называется ее отражением.

Для доказательства девятого свойства примем, что A — полюс в плоскости z, а C — полюс в плоскости Z. Тогда все линии в плоскости Z преобразуются в окружности (или линии), проходящие через A и соответствующие линиям, проходящим через C. Пара таких линий L_1 и L_1' и пара перпендикулярных к ним линий L_2 и L_2' показаны на рис. 54. Линии, параллельные L_1, преобразуются в окружности, касательные к L_1', а линии, параллельные L_2, — в окружности, касательные к L_2'. Теперь легко показать, что модель правой части рис. 54 сохраняется параболическим преобразованием при переходе от плоскости z к плоскости w через плоскость Z.

В первом из трех преобразований десятого свойства действительная ось преобразуется сама в себя, так что при действительном z действительно и w. Отсюда должны быть действительными a, b, c и d. Если $z=i$, точка

$$w = \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{bd+ac}{c^2+d^2} + i\frac{ad-bc}{c^2+d^2}$$

при принятом условии $ad-bc>0$ также лежит выше действительной оси. Так как преобразование зависит только от трех независимых соотношений действительных чисел a, b, c и d, то ясно, что имеются только три степени свободы. Следовательно, при преобразовании друг в друга двух заданных окружностей посредством линейной трансформации есть три и только три степени свободы, что можно показать введением линейной трансформации, преобразующей каждую из окружностей в действительную ось.

Второе преобразование десятого свойства, очевидно, отображает действительную ось плоскости z в единичный круг, так как при действительном z числитель и знаменатель являются сопряженными величинами, а отсюда $|w|=1$. Условие возможности отображения внутренней области круга на верхнюю полуплоскость подтверждается тем, что $z=-b/a$ при $w=0$. Достаточно вспомнить, что это преобразование обладает тремя степенями свободы, и можно показать, что оно является наиболее общим линейным преобразованием действительной оси в единичный круг, так как именно три степени свободы необходимы для отображения линейной трансформацией трех заданных точек действительной оси в три произвольные точки единичного круга.

Чтобы доказать, что третье преобразование десятого свойства отображает единичный круг в самого себя, примем $z\bar{z}=1$. Легко убедиться, что при этом и $w\bar{w}=1$. Далее, так как $w=b/\bar{a}$ соответствует $z=0$, то $\frac{b}{\bar{a}}$ лежит внутри единичного круга в плоскости w и отсюда $|b/\bar{a}|<1$ или $|b|<|\bar{a}|$. Уравнение третьего преобразования также имеет три степени свободы, поэтому подобно предыдущему случаю можно заключить, что оно дает наиболее общее линейное преобразование единичного круга в самого себя.

Доказательства одиннадцатого свойства в настоящем труде не приводятся, их можно найти в более детальных учебниках по комплексным переменным или конформным отображениям.

Функция $w=z^n$ при рациональном n. Положительная степень комплексной переменной дает наиболее простое преобразование после линейного. Оно однозначно и имеет единственную производную nz^{n-1}, так что функция эта всюду аналитическая и регулярная. Производная исчезает лишь при значении $z=0$, которое называется точкой разветвления n-го порядка. Введение полярных координат $z=re^{i\theta}$ и $w=Re^{i\varphi}$ дает $Re^{i\varphi}=r^n e^{in\theta}$ или $R=r^n$ и $\varphi=n\theta$. Таким образом, модель радиальных линий и концентрических окружностей в полярных координатах сохраняется, но отображение не конформно в начальной точке, так как соответствующие углы между радиальными линиями не равны. Действительно, сектор плоскости z, ограниченный двумя лучами $\theta=0$ и $\theta=2\pi/n$ и простирающийся от 0 до ∞, преобразуется во всю плоскость w, так как этим лучам здесь будут соответствовать $\varphi=0$ и $\varphi=2\pi$, как показано на рис. 56 для $n=3$. Таким образом, $w=z^2$ отображает верхнюю половину плоскости z на всю плоскость w. При увеличении θ от $2\pi/n$ до $4\pi/n$ значение φ увеличивается от 2π до 4π, т. е. соседний сектор, ограниченный лучами $\theta=2\pi/n$ и $\theta=4\pi/n$, также отображается на всю плоскость w. Подобным же образом видно, что каждый из n секторов, ограниченных последовательно лучами $\theta=0$, $2\pi/n$, $4\pi/n$,..., 2π, отображается на всю плоскость w. Таким образом, за исключением точки $w=0$, любой точке в плоскости w соответствует n различных точек в плоскости z, расположенных в углах правильного n-угольника, как показано на рис. 56.

Для упорядочения этого множества значений можно ввести разрез в плоскости w, простирающийся от точки разветвления до бесконечности. Этот разрез, не обязательно являющийся прямой линией, отображается в n кривых, простирающихся от 0 до ∞ в плоскости z и делящих ее на n конгруэнтных частей, каждая из которых называется ветвью обратной фукции $z=\sqrt[n]{w}$. Однако если выбрать одну ветвь, то между плоскостями z и w будет существовать единственное соответствие.

Как и в случае линейной функции, желательно рассматривать ∞ как обычную точку плоскости. Так как ∞ отображается на ∞, устанавливаем, что $w=1/W$ и $z=1/Z$, а поведение $w(z)$ в ∞ определяем как $W(Z)$ при $Z=0$. Это дает равенство $W=Z^n$, показывающее, что $z=\infty$ также является точкой разветвления n-го порядка.

Аналитическую функцию с точкой разветвления n-го порядка в точке $z=a$ можно выразить в виде $w=(z-a)^n F(z)$, где функция $F(z)$ регулярна при $z=a$ и $F(a)\neq 0$. Отображение этой функции в малой окрестности точки $z=a$ хорошо аппроксимируется отображением $F(a)(z-a)^n$, что, очевидно, подобно показанному на рис. 56.

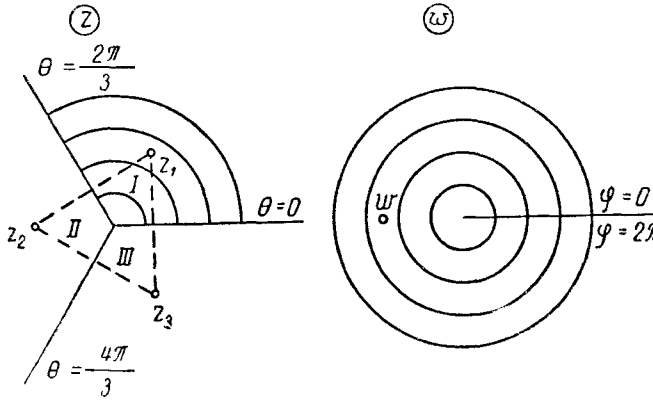


Рис. 56. Отображение $w=z^3$

Предыдущий метод разреза между точками разветвления может быть применен для упорядочения и создания непрерывности изменения всех аналитических многозначных функций. Если $w=f(z)$ является такой функцией, то ее особые точки и точки, где исчезают производные, должны быть отмечены на плоскости z и объединены непрерывным рядом линейных непересекающихся отрезков.

В предшествующем рассмотрении равенства $w=z^n$ значение n было целым и положительным. Когда n — целое и отрицательное, точки $z=0$ и $z=\infty$ меняются местами, но, как уже было сказано, обе они остаются точками разветвления многозначной функции $z=1/w^{-1/n}$. При n рациональном и равном p/q, где p и q — несократимые целые числа, функция может быть записана в виде $w^q=z^p=t$, что может рассматриваться как отображение разреза в плоскости t на p ветвей в плоскости z и q ветвей в плоскости w. Если n иррационально, функцию лучше всего представлять в виде $\ln w=n\ln z$, так что ее обработка будет осуществлена после логарифмирования.

Функция $w = z + 1/z$. Никакое рассмотрение конформного отображения не может быть полным без изучения преобразования Жуковского

$$w = z + \frac{1}{z},$$

названного так из-за использования его Жуковским на заре развития теории воздухоплавания. С помощью этого преобразования можно получить двухмерные потоки у эллиптических цилиндров, плоских и криволинейных пластин, а также у обтекаемых профилей с углами атаки, как показано в п. 45. Таким

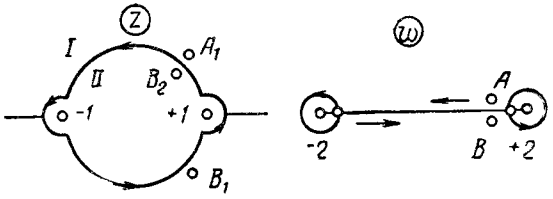


Рис. 57. Отображение барьера $w=z+1/z$

образом, изучение конформного отображения этой функции имеет громадное практическое значение и одновременно иллюстрирует свойства рациональной функции с двумя точками разветвления.

Функция $w(z)$ однозначна и регулярна всюду, кроме $z=0$ и $z=\infty$, где она имеет полюсы первого порядка. Однако из обычного рассмотрения функции в ∞ очевидно, что как $w(z)$, так и обратная ей функция $z(w)$ регулярны в ∞. Производная $w'(z)=1-1/z^2$ исчезает при $z=\pm 1$, когда точки разветвления функции $w=\pm 2$. Обратная функция

$$z = \frac{1}{2}(w \pm \sqrt{w^2-4}),$$

как видим, двузначна. Поскольку функция $z(w)$ регулярна в ∞, она удовлетворяет разрезу плоскости w отрезком линии между точками разветвления $w=\pm 2$. Уравнение этого отрезка может быть записано как $w=2\cos\theta$, что при подстановке в вышеприведенное равенство дает $z=e^{\pm i\theta}$ — единичный круг. Плоскость z таким образом делится на две части: внутреннюю и внешнюю области единичного круга, причем каждая из них отображается на всю плоскость w.

Отображение барьера показано на рис. 57. Так как барьер обходится против часовой стрелки, то единичный круг обходится в том же направлении, когда на плоскость w отображается его внешняя область, но в обратном направлении при отображении его внутренней области. При обходе вокруг точки раз-

ветвления аргумент изменяется в плоскости w на 2π, а в плоскости z на π, так как это точка разветвления второго порядка. Если при проходе через две соседние точки A и B, расположенные на противоположных сторонах барьера в плоскости w, путь от A к B не пересекает барьера, A остается на ветви функции, проходящей к точке B_1, сопряженной с точкой A_1, в противном случае точка B_2 в плоскости z оказывается на другой ветви функции, напротив точки A_1 внутри единичного круга.

Другими возможными барьерами между точками разветвле-

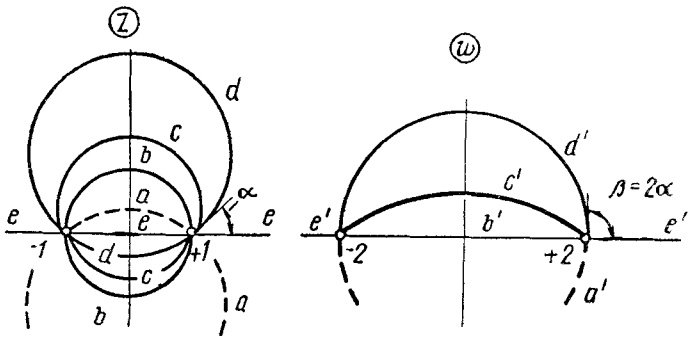


Рис. 58. Отображение дуги барьера $w=z+1/z$

ния являются дуги от $w=+2$ до $w=-2$. Их отображение проще всего исследовать, записав преобразование Жуковского в виде

$$\frac{w-2}{w+2}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2.$$

Теперь, учитывая последовательные преобразования

$$Z=\frac{z-1}{z+1};\quad W=Z^2;\quad W=\frac{w-2}{w+2},$$

видим, как дуги между $w=+2$ и $w=-2$ становятся радиальными линиями в плоскости w, затем превращаются в делящие площадь линии, проходящие через начало координат в плоскости z, затем трансформируются в замкнутые окружности, проходящие через точки $z=1$ и $z=-1$ в плоскости z. При полярных координатах ρ, α в плоскости z и R,β в плоскости w видно, что окружности $\alpha=\text{const}$ в плоскости z преобразуются в дуги $\beta=2\alpha$ в плоскости w, как показано на рис. 58.

Очень интересно также получить отображение контура полярных координат плоскости z на плоскость w. Введя в преобразование Жуковского $z=re^{i\theta}$ и $w=\phi+i\psi$, получим

$$\phi=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta;\quad \psi=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$

Таким образом, окружности $r=\text{const}$ отображаются в эллипсы с полуосями $r+1/r$ и $r-1/r$ в плоскости w. Две окружности радиусом r и радиусом $1/r$ отображаются в один и тот же эллипс. Линии $\theta=\text{const}$ отображаются в гиперболы

$$\frac{\phi^2}{4\cos^2\theta}-\frac{\psi^2}{4\sin^2\theta}=1.$$

Конфокальные эллипсы и гиперболы с общими фокусами в точках разветвления $w=\pm 2$, как и требует отображение, ортогональны друг к другу (рис. 59).

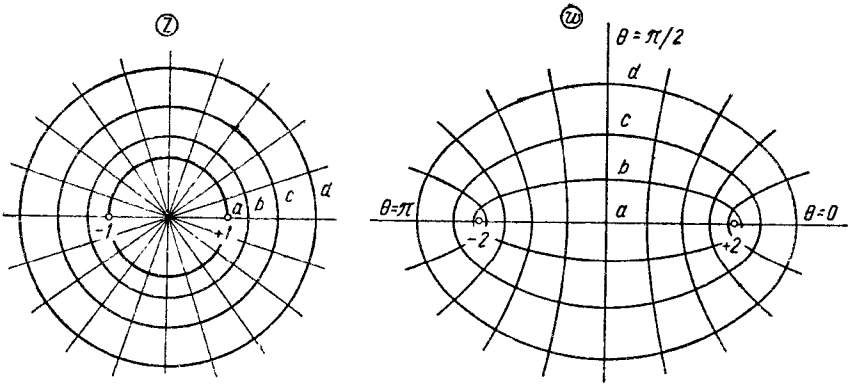


Рис. 59. Отображение преобразования $w=z+1/z$

Показательная и логарифмическая функции. Показательная функция $w=e^z$ является полной, т. е. функцией без особенностей на конечной плоскости. Подстановка $w=re^{i\theta}$ и $z=x+iy$ дает:

$$r=e^x;\quad y=\theta.$$

Это показывает, что окружности $r=\text{const}$ отображаются в вертикальные линии $x=\text{const}$, тогда как радиальные линии $\theta=\text{const}$ отображаются в горизонтальные линии, а полная плоскость w может быть отображена горизонтальной полосой шириной 2π (рис. 60). При увеличении θ от 2π до 4π конгруэнтная полоса в плоскости z отображается снова в полную плоскость w. Далее этот процесс может продолжаться сколь угодно долго, показывая, что e^z — периодическая функция с периодом 2π и что обратная ей функция $z=\ln w$ — бесконечно многозначная. Если w записать в форме

$$w=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y),$$

видно, что периодичность функции объясняется наличием тригонометрических функций. Точки разветвления в плоскости w существуют при $w=0$ и $w=\infty$. Очевидно, что барьер $\theta=0$ в

плоскости w отображается в границы $y=2\pi n$, где $n=0,\pm 1,\pm \pm 2...$ — число периодических полосок.

Поучительно сравнение двух многозначных функций $\sqrt{z}$ и $\ln z$. Обе они имеют точки разветвления при $r=0$ и $r=\infty$. Хотя отображение в окрестности точки разветвления $\sqrt{z}$ не является конформным, поведение функции здесь настолько регулярно и удобно, что 0 и ∞ могут рассматриваться как обычные точки на плоскости. Этого нельзя сделать для точек разветвления функции $w=\ln z$, так как они обладают сущест-

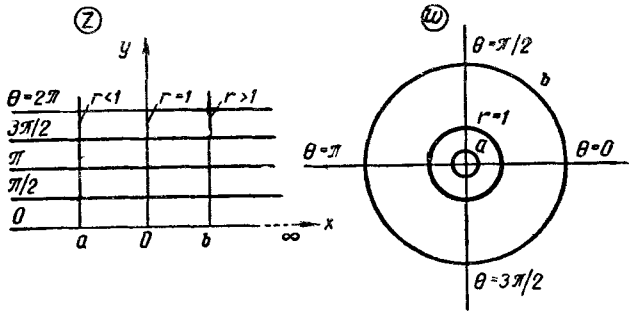


Рис. 60. Отображение $w=e^z$

венными особенностями. Из-за периодичности отображения в плоскости w (см. рис. 60 при w и z поменявшихся местами) точка в бесконечности плоскости w не имеет смысла, так как даже если w беспредельно растет, z продолжает принимать все значения периодических полосок, за исключением нуля.

Функция $w=z^s$ при иррациональном s. Когда s иррационально, значение степени устанавливается из выражения

$$w = z^s = e^{s \ln z},$$

которое может также быть представлено параметрически через однозначные функции

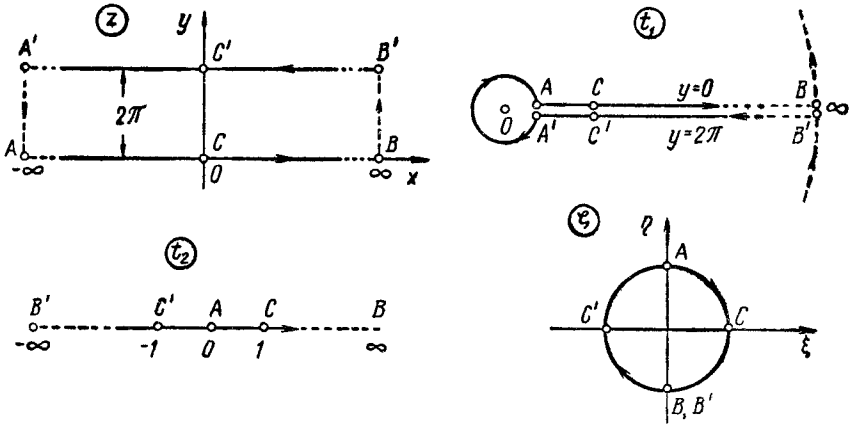
$$w = e^{st}; \quad z = e^t.$$

Введение полярных координат $z=re^{i\theta}$ и $w=Re^{i\varphi}$ дает $R=r^s$ и $\varphi=s\theta$, т. е. показывает, что отображение модели в полярных координатах подчиняется тем же законам, что и при целом показателе степени. Когда θ увеличивается на 2π при вращении вокруг начальной точки, φ увеличивается на $2\pi s$, а для m полных циклов в положительном направлении оно увеличивается на $2\pi ms$, так что w составляет $e^{2\pi ims}$. Поскольку s — иррациональное число, его множители различны для разных значений m; так, если $2\pi i m_1 s = 2\pi i m_2 s + 2\pi n i$, где m_1, m_2 и n — целые числа, тогда $s=n/(m_1-m_2)$ — рациональное число, что

противоречит гипотезе. Отсюда функция z^s бесконечно многозначна и имеет точки разветвления при $z=0$ и $z=\infty$.

Весьма ценно свойство кратности s величине углов в точке разветвления. Оно может быть использовано для преобразования клина с углом α в полуплоскости путем выбора $s=\pi/\alpha$ или для преобразования с помощью линейной трансформации области, ограниченной двумя дугами, пересекающимися под углом α, во внутреннюю область круга.

Пример 12. Найти преобразование, которое отображает горизонтальную бесконечную полосу от $y=0$ до $y=2\pi$ в плоскости z во внешнюю область единичного круга так, что точки $z=-\infty$, 0, ∞ отображаются в точки $\zeta=i$, 1, $-i$



Обозначим точки $z=-\infty$, ∞, 0, $2\pi i$ так, как показано на рисунке, и стрелками покажем положительное направление обхода границ $ACBB'C'A'$. Преобразование $t_1=e^z$ отобразит тогда полосу $ABB'A'$ в целую плоскость t_1, рассеченную линией AB от начала до бесконечности вдоль положительного направления действительной оси плоскости t_1. В плоскости t_1 на рисунке показаны детали отображения и направление обхода границ до перехода к точкам в бесконечности. Верхняя и нижняя части плоскости от разреза соответствуют углам $y=0$ и $y=2\pi$. Разрез можно теперь ликвидировать, заменив 2π на π с помощью преобразования $t_1=t_2^2$, которое отобразит полосу в верхнюю полуплоскость плоскости t_2. Действительная ось может быть отображена в единичный круг линейным преобразованием. Так как точки A, C и B существуют при $t_2=0$, 1 и ∞, линейное преобразование имеет вид

$$\frac{t_2}{t_2-1}=\frac{\zeta-i}{\zeta-1}\cdot\frac{-2i}{-i-1}=(1+i)\frac{\zeta-i}{\zeta-1}$$

или

$$t_2=(1-i)\frac{\zeta-i}{\zeta-(1+2i)}.$$

Объединение последовательных преобразований окончательно дает

$$z=2\ln\frac{(1-i)(\zeta-i)}{\zeta-(1+2i)}.$$

B. Потоки с заданными границами

45. Обтекание отдельных препятствий. Наиболее просто задача обтекания препятствия решается при равномерном в бесконечности потоке. Как отмечалось в п. 42, решение такой задачи заключается в отыскании функции, отображающей заданную границу на круг, а затем в подстановке этой функции в комплексный потенциал для потока, обтекающего круг. Для круга радиусом a с циркуляцией k это имеет такой вид:

$$W = U\left(\zeta' + \frac{a^2}{\zeta'}\right) + ik \ln \zeta',$$

или, так как $\zeta = e^{i\alpha}\zeta'$ является наиболее общим линейным преобразованием круга в самого себя, при котором $\zeta = \infty$, если $\zeta' = \infty$,

$$W = U\left(\zeta e^{-i\alpha} + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta}\right) + ik \ln \zeta;$$
$$\zeta = \xi + i\eta, \tag{108}$$

что представляет собой комплексный потенциал потока, обтекающего круг в плоскости ζ. Из этого выражения видно, что угол с осью ξ является углом атаки α, так как $(dw/d\zeta)_\infty = Ue^{-i\alpha}$. Если функция $\zeta(z)$ отображает внешнюю область круга единственно на внешнюю часть границы G так, что бесконечность переходит в бесконечность и $(d\zeta/dz)_\infty = 1$, тогда подстановка $\zeta(z)$ в уравнение (108) дает $w(z) = W[\zeta(z)]$ для потока вокруг G при угле атаки α, так как

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_\infty = \left(\frac{dW}{d\zeta}\right)_\infty \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_\infty = Ue^{-i\alpha}.$$

Совершенно замечателен тот факт, что этот поток при любых углах атаки может быть выведен из одного соотношения — уравнения (108). Это означает, что при известном уравнении потока в каком-либо одном направлении его можно непосредственно получить для любого другого направления; поразителен пример легкости, с которой уравнение потока, обтекающего перпендикулярную ему пластину, может быть получено из уравнения обыкновенного случая потока, параллельного пластине. Только после того, как осознаешь, что такого простого решения нет ни для одного трехмерного потока, начинаешь понимать силу метода конформного отображения.

При небольшом обобщении уравнение потока, обтекающего препятствие, можно получить с помощью таких особых точек, как источники, диполи и вихри вне препятствия, изменяя положение и напряжение этих точек преобразованием, отображающим контур препятствия на круг. Задача в этом случае сводится

к получению выражений для потока, обтекающего круг при наличии особых точек. Это можно осуществить с помощью теоремы Мильне — Томсона, называемой круговой теоремой.

Если $f(z)$ — комплексный потенциал для потока с особыми точками, расположенными на расстоянии, превышающем a, от начала координат, то комплексный потенциал w, созданный теми же особыми точками, в потоке, обтекающем круг радиусом a, составит

$$w = f(z) + \overline{f}\left(\frac{a^2}{z}\right). \tag{109}$$

Для доказательства теоремы заметим, что когда z находится вне круга, $\frac{a^2}{z}$ расположено внутри него. Следовательно, поскольку $f(z)$ и $\overline{f}(z)$ регулярны в одной и той же области, добавка члена $\overline{f}(a^2/z)$ не создает новых особых точек вне круга и w имеет те же особые точки, что и $f(z)$. Далее, на окружности $a^2/z=\bar{z}$, так что действительно равенство $w=f(z)+\overline{f}(\bar{z})$, и отсюда, раз функция тока ψ на окружности равна нулю, то, следовательно, окружность является линией тока, что завершает доказательство.

Например, комплексный потенциал для потока вокруг единичного круга в центре координат, созданный источником напряжением m в точке с координатами b и 0, равен

$$w = m \ln \frac{(z-b)\left(z-\frac{1}{b}\right)}{z};$$

добавочная постоянная здесь опущена как не имеющая значения. Легко устанавливаемый результат, заключающийся в том, что отображение источника в круге состоит из равного источника в обратной точке и стока той же интенсивности в начале координат, демонстрирует возможности круговой теоремы.

Подстановка самой общей формы $\zeta(z)$ [уравнение (103)] в выражение (108) показывает, что $w(z)$ может быть получена в таком виде:

$$w = Ue^{-i\alpha} z + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots + ik \ln z.$$

Тогда

$$\frac{dw}{dz} = Ue^{-i\alpha} + \frac{ik}{z} - \frac{b_1}{z^2} - \cdots$$

и вычет $(dw/dz)^2 = 2iUke^{-i\alpha}$. Использование уравнения Блазиуса (100) дает

$$X + iY = 2\pi\rho Uke^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)};$$

$$M + iN = i\pi\rho\left(k^2 + 2Ub_1e^{-i\alpha}\right),$$

т. е. сила перпендикулярна направлению набегающего потока; по этой причине она называется подъемной силой. Другой компонент, называемый лобовым сопротивлением, равен нулю. Указанное выражение представляет знаменитую формулу Кутта и Жуковского для подъемной силы крыла. Эти результаты могут быть выражены (на единицу расстояния, перпендикулярного плоскости движения) в виде

$$\left.\begin{aligned} L &= \rho U\Gamma; \quad \Gamma = 2\pi k; \\ M &= -2\pi\rho U I(b_1 e^{-i\alpha}), \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

где I обозначает мнимую часть.

Используя свойства элементарных преобразований, можно получить расчет потока в границах, состоящих из прямых линий, дуг и эллипсов. Для иллюстрации этой процедуры рассмотрим случаи плоской пластины, дуги, эллипса, профиля Жуковского и свода.

Плоская пластина. Плоская пластина от $z=-2$ до $z=+2$ отображается на единичный круг в плоскости ζ по выражению $z=\zeta+1/\zeta$. Поэтому комплексный потенциал для потока, обтекающего пластину с углом атаки α, дается парой уравнений:

$$w = U\left(\zeta e^{-i\alpha} + \frac{e^{i\alpha}}{\zeta}\right) + ik\ln\zeta;$$

$$z = \zeta + \frac{1}{\zeta} \text{ или } \zeta = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2-4}\right).$$

В последнем выражении опущен знак минус, так как желательно получить отображение только на внешнюю часть. При $\alpha=\pi/2$ исключение ζ приводит к результату

$$w = -iU\sqrt{z^2-4} + ik\ln\left(z+\sqrt{z^2-4}\right).$$

Комплексная скорость составляет

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw/d\zeta}{dz/d\zeta} = \frac{\zeta^2}{\zeta^2-1}\left[U\left(e^{-i\alpha} - \frac{e^{i\alpha}}{\zeta^2}\right) + \frac{ik}{\zeta}\right]$$

и становится бесконечной при $\zeta=\pm 1\,(z=\pm 2)$. Этого можно избежать на хвостовой кромке $(z=2)$, выбрав такое значение циркуляции k, что заключенное в квадратные скобки выражение становится равным нулю при $\zeta=1$, т. е. $k=2U\sin\alpha$. Подстановка в уравнение (110) дает подъемную силу

$$L = 4\pi\rho U^2\sin\alpha$$

и коэффициент подъемной силы

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 c} = 2\pi\sin\alpha, \tag{111}$$

так как хорда (замеренная в плоскости движения) пластины $c=4$.

Приведенное определение подъемной силы базируется на следующей гипотезе Кутта—Жуковского: на двухмерном крыле устанавливается такая циркуляция, что скорость у хвостовой кромки будет конечной. Эта очень простая гипотеза служит основой теории воздухоплавания. Полученные таким образом значения циркуляции оказываются несколько завышенными из-за пренебрежения пограничным слоем и следом.

Дуга. Дуга, проходящая через точки $z=+2$ и $z=-2$, отображается на круг, проходящий через точки $\zeta'=+1$ и $\zeta'=-1$,

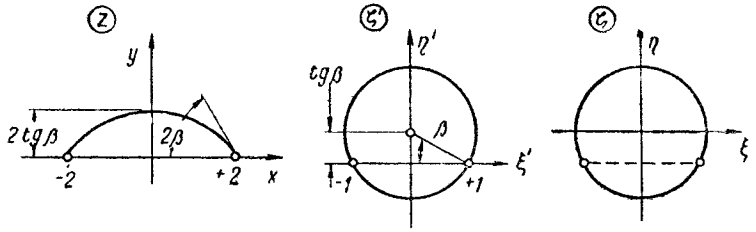


Рис. 61 Отображение дуги окружности

с помощью преобразования $z=\zeta'+1/\zeta'$, как указано в п. 44. Соотношения между дугой, равной 4β *рад*, и кругом показаны на рис. 61.

Круг в плоскости ζ' преобразуется затем в окружность радиусом $\sec\beta$ вокруг начала координат с помощью параллельного переноса $\zeta'=\zeta+i\operatorname{tg}\beta$. Тогда из уравнения (108) комплексный потенциал потока вокруг дуги при угле атаки α составит

$$W = U\left(\zeta e^{-i\alpha} + \frac{e^{i\alpha}\sec^2\beta}{\zeta}\right) + ik\ln\zeta;$$

$$z = \zeta + i\operatorname{tg}\beta + \frac{1}{\zeta + i\operatorname{tg}\beta}.$$

Применение условия Кутта—Жуковского и уравнения (110) дает

$$\left.\begin{aligned} L &= 4\pi\rho U^2 \sin(\alpha+\beta)\sec\beta; \\ C_L &= 2\pi\sin(\alpha+\beta)\sec\beta. \end{aligned}\right\} \qquad (112)$$

Кривизна дуги определяется как отношение максимальной высоты дуги к ее хорде. Сравнение коэффициентов подъемной силы [уравнения (111) и (112)] показывает, что влияние кривизны равно $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta$.

Эллипс. В п. 44 мы видели, что преобразование Жуковского отображает эллипс на окружность. Если масштаб эллипса подобран так, что его фокусы имеют координаты $z=+2$ и $z=-2$, то большая и малая полуоси его составят: $a'=r+1/r$ и $b'=r-1/r$,

а эксцентриситет $e=2r/(r^2+1)$. Эксцентриситет данного эллипса определяет радиус r окружности, на которую он отображается функцией $z=\zeta+1/\zeta$. Подстановка в уравнение (108) дает комплексный потенциал потока вокруг эллипса при угле атаки α:

$$w = U\left(\zeta e^{-i\alpha} + \frac{r^2 e^{i\alpha}}{\zeta}\right) + ik\ln\zeta; \quad z = \zeta + \frac{1}{\zeta}.$$

При α и k равных нулю комплексная скорость составляет

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz} = U\frac{\zeta^2 - r^2}{\zeta^2 - 1}.$$

На эллипсе $\zeta = re^{i\theta}$, тогда величина скорости

$$V^2 = \frac{dw}{dz}\cdot\overline{\frac{dw}{dz}} = \frac{4U^2r^2\sin^2\theta}{a'^2\sin^2\theta + b'^2\cos^2\theta}.$$

Но из уравнений эллипса $x=a'\cos\theta$ и $y=b'\sin\theta$ получается

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = -\frac{b'\cos\theta}{a'\sin\theta};$$

$$\cos^2\gamma = \frac{a'^2\sin^2\theta}{a'^2\sin^2\theta + b'^2\cos^2\theta}$$

Отсюда, так как $a'+b'=2r$, выражение для скорости у эллипса принимает очень простой вид

$$V = U\left(1 + \frac{b'}{a'}\right)\cos\gamma. \qquad (113)$$

Этот результат используется для установления максимального значения скорости и, следовательно, момента начинающейся кавитации у стоек, сечение передних частей которых имеет форму эллипса.

Для получения присоединенной массы A эллипса из уравнения (99) комплексный потенциал w_1 эллипса, движущегося с единичной скоростью в положительном направлении оси x в неподвижной жидкости, выводится из выражения комплексного потенциала w для установившегося движения при $\alpha=0$, $k=0$, $U=-1$ с приложением комплексного потенциала z для единичного равномерного потока. Тогда согласно теореме о вычетах

$$w_1 = z - \zeta - \frac{r^2}{\zeta} = \frac{1-r^2}{\zeta};$$

$$\oint w_1 dz = \oint w_1\frac{dz}{d\zeta}d\zeta = (1-r^2)\oint\frac{1}{\zeta}\left(1-\frac{1}{\zeta^2}\right)d\zeta = 2\pi i(1-r^2).$$

Отсюда, используя уравнение (99), получим

$$A + \pi\rho a'b' = 2\pi\rho(r^2 - 1).$$

Но, так как $a'b'=r^2-1/r^2$, то

$$A = \pi\rho\left(r - \frac{1}{r}\right)^2 = \pi\rho b'^2.$$

Таким образом, присоединенная масса зависит только от b и не зависит от эксцентриситета. Подобным же образом можно показать, что присоединенная масса при движении эллипса в направлении его меньшей оси составляет

$$B = \pi\rho a'^2.$$

Профиль Жуковского. Преобразование Жуковского может быть использовано для получения двухпараметрического семейства сечений несущего крыла принятой формы. Функция $z=\zeta+1/\zeta$ отображает окружность C радиусом $a=BD$ с центром в точке D на несущее крыло Жуковского (рис. 62). Окружность проходит через точку разветвления при $\zeta=1$; вторая точка разветвления находится внутри окружности. Линия BD пересекает

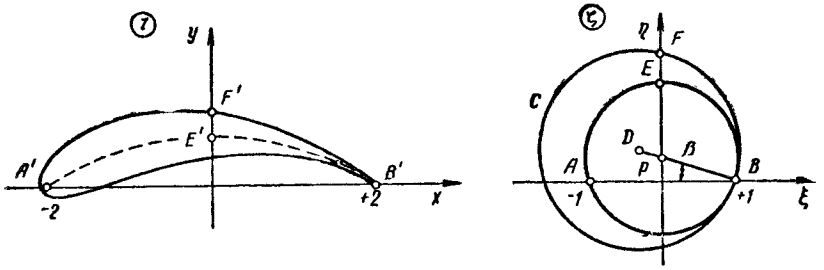


Рис. 62. Отображение профиля Жуковского

ось η в точке P, угол ABD обозначен β. Окружность с центром в точке P и радиусом $\sec\beta$ отображается на дугу $A'E'B'$, кривизна которой равна $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta$. Эта дуга называется центральной линией или скелетом профиля. Толщина профиля зависит от отношения $BD : BP = a\cos\beta$. Таким образом, двухпараметрическое семейство форм различной кривизны и толщины получается изменением β и a. Все члены семейства имеют заостренную хвостовую часть, так как B' — точка разветвления второго порядка. Крыло становится симметричным при $\beta=0$.

Заострение на хвостовом конце может быть уничтожено при использовании преобразования, точки разветвления которого имеют порядок, несколько отличный от второго, например

$$\frac{z+2}{z-2} = \left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right)^{2-\frac{\delta}{\pi}}.$$

Это преобразование отображает окружность с центром в точке P на скелет, состоящий из двух дуг, пересекающихся под углом δ, а окружность C — в профиль, верхняя и нижняя поверхности которого встречаются у хвостового конца под тем же углом δ.

Дадим теперь комплексный потенциал потока вокруг профиля Жуковского в параметрической форме:

$$w = U\left(\zeta' e^{-i\alpha} + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta'}\right) + ik \ln \zeta';$$

$$\zeta' = \zeta - \zeta_D = \zeta - (1 - r_0 e^{-i\beta});$$

$$z = \zeta + \frac{1}{\zeta},$$

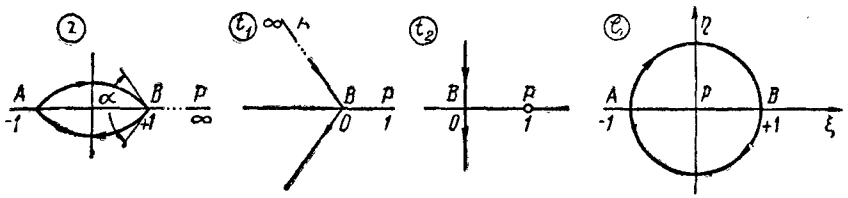


Рис. 63. Отображение внутренней части стрельчатого свода во внутреннюю часть окружности

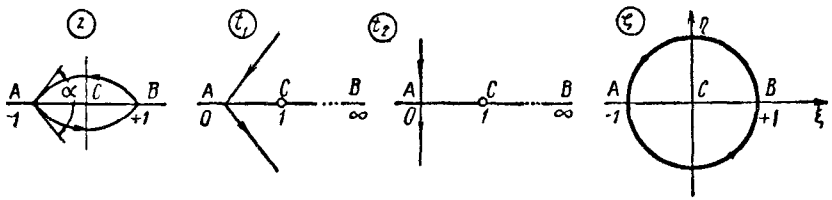


Рис. 64. Отображение внешней части стрельчатого свода во внешнюю часть окружности

где преобразование $\zeta'(\zeta)$ переносит C в начало координат. Согласно условию Кутта

$$k = 2aU \sin(\alpha + \beta)$$

и подъемная сила из уравнения (110) составит

$$L = 4\pi\rho U^2 a \sin(\alpha + \beta). \qquad (114)$$

Сравнение с уравнением (112) показывает, что отношение подъемных сил профиля и его скелета равно отношению их толщин.

Стрельчатый свод. Внутренняя часть свода, границами которого служат две равные дуги, пересекающиеся под углом α (рис. 63), может быть отображена на внутреннюю часть окружности преобразованиями

$$t_1 = \frac{1+z}{1-z}; \quad t_1^{\pi/\alpha} = t_2 = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$$

или

$$\frac{1+\zeta}{1-\zeta}=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\pi/\alpha}.$$

Подобным же образом внешняя часть свода может быть отображена на внешнюю часть окружности преобразованиями (рис. 64)

$$t_1=\frac{z-1}{z+1};\quad t_2=t_1^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}};\quad t_2=\frac{\zeta-1}{\zeta+1};$$

или

$$\frac{z-1}{z+1}=\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^{2-\frac{\alpha}{\pi}}$$

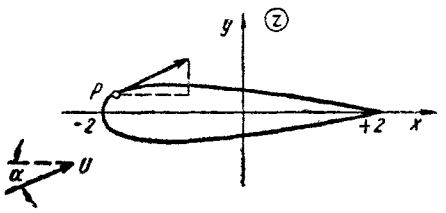


Рис. 65. Изображение тонкого профиля

Важно отметить изменение показателя степени преобразования для внутреннего и наружного отображений от клина до полуплоскости. В первом случае клин лежит в пределах ветви функции $t_2=t_1^{\pi/\alpha}$, так что отображение внутренней части клина и правой половины плоскости t_2 единственно, но это преобразование не может быть использовано для отображения внешней части клина, так как он не лежит на одной ветви функции. Здесь используется преобразование $t_2=t_1^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}$, которое отображает правую половину плоскости t_2 внутрь ветви функции, так что отображение снова единственно.

Поток вокруг свода с комплексной скоростью в бесконечности $V_\infty=Ue^{-i\alpha}$ может быть получен подстановкой последнего преобразования в уравнение (108).

46. Задача Неймана. Линеаризированная теория профиля. Когда форма профиля задана, определение его характеристик — в общем случае трудная задача. Однако для тонких профилей очень широко используется приближенное решение, в котором задача сводится к задаче Неймана для окружности.

Такой профиль показан на рис. 65; его начальный и хвостовой концы находятся соответственно в точках $z=-2$ и $z=+2$. Профиль погружен в поток, набегающий на него со скоростью U под малым углом α. В точке P профиля скорость касательна к нему, так что, обозначив уклон профиля через $y'(x)$, а компоненты скорости по осям x и y соответственно через $U\cos\alpha+u$ и $U\sin\alpha+v$, можем написать

$$y'=\frac{U\sin\alpha+v}{U\cos\alpha+u}\approx\alpha+\frac{v}{U},$$

если допустить, что компоненты «возмущающей» скорости u и v малы по сравнению с U. Дальнейшее линеаризирующее приближение заключается в том, что толщина профиля принимается столь малой, что граничное условие для v может быть принято соответствующим значению x (при $-2<x<2$) на самой оси вместо профиля. Последнее приближение оправдывается уравнением Коши—Римана $\delta u=\delta y\, \partial u/\partial x$, которое указывает, что изменение v от оси до поверхности профиля — бесконечно малая величина второго порядка. Линеаризация задачи состоит в отыскании комплексного потенциала возмущения, который удовлетворяет таким граничным условиям:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = U\left(y'_U - \alpha\right) \text{ — на верхней стороне линии сегмента;}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = U\left(\alpha - y'_L\right) \text{ — на нижней стороне линии сегмента.}$$

Нормаль здесь считается положительной при увеличении y на верхней стороне и уменьшении y на нижней стороне; индексы U и L относятся к верхней и нижней скоронам профиля.

Введем теперь преобразование $z=\zeta+1/\zeta$, которое отображает линейный сегмент $-2\leqslant x\leqslant 2$ на единичную окружность C, где $\zeta=e^{i\theta}$. Тогда на C

$$\frac{dz}{d\zeta} = 1 - \frac{1}{\zeta^2} = 1 - e^{-2i\theta}; \quad \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = 2\,|\sin\theta|.$$

Отсюда, используя уравнение (101), получим задачу Неймана с граничными условиями на C

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 2U\left(y' - \alpha\right)\sin\theta = F(\theta); \quad 0<\theta<2\pi,$$

где прибавление y' ненужно при переменном θ.

Комплексный потенциал в плоскости ζ может быть записан как

$$W = ik\ln\zeta + \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \cdots = ik\ln r - k\theta + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{r^n} e^{-in\theta}$$

и

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)_{r=1} = ik - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n e^{-in\theta}.$$

Тогда

$$F(\theta) = \mathrm{R}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)_{r=1} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(b_n e^{-in\theta} + \overline{b}_n e^{in\theta}\right),$$

что представляет собой комплексный вид ряда Фурье. Отсюда

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)e^{in\theta}d\theta.$$

Применение условия Кутта дает

$$k = I\sum_{n=1}^{\infty} nb_n = -\frac{1}{\pi} I \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} F(\theta)e^{in\theta}d\theta.$$

Для избежания трудностей в определении сходимости бесконечного ряда следует сначала рассмотреть функцию (при $r>1$)

$$K(r) = -\frac{1}{\pi} I \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} F(\theta)\frac{e^{in\theta}}{r^n}d\theta = -\frac{1}{\pi} I \int_0^{2\pi} F(\theta)\frac{e^{i\theta}\,d\theta}{r - e^{i\theta}} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{F(\theta)\,r\sin\theta d\theta}{r^2+1-2r\cos\theta} = -\frac{2U}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r(y'-\alpha)\sin^2\theta d\theta}{r^2+1-2r\cos\theta}.$$

Теперь допустимо принять $r=1$, что дает циркуляцию

$$k = -\frac{2U}{\pi}\int_0^{2\pi}(y'-\alpha)\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta = 2U\left(\alpha - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y'\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta\right).$$

Далее получаем

$$b_1 = -\frac{2U}{\pi}\int_0^{2\pi}(y'-\alpha)e^{i\theta}\,d\theta;$$

$$I\left(b_1 e^{-i\alpha}\right) = -\frac{2U}{\pi}\int_0^{2\pi}(y'-\alpha)\sin\theta\sin(\theta-\alpha)\,d\theta,$$

и из уравнений (110) находим подъемную силу и момент

$$L = 4\pi\rho U^2\left(\alpha - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y'\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta\right);$$

$$M = -4\pi\rho U^2\left[\alpha - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y'\sin\theta\sin(\theta-\alpha)\,d\theta\right].$$

Так как длина хорды составляет четыре единицы, коэффициенты равняются:

$$C_L = 2\pi\left(\alpha - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y'\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta\right);$$

$$C_M = -\frac{\pi}{2}\left[\alpha - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y' \sin\theta \sin(\theta-\alpha)\, d\theta\right] =$$

$$= -\frac{1}{4} C_L - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} y' \left[\cos\theta + \cos(2\theta-\alpha)\right] d\theta.$$

Таким образом, для определения коэффициентов подъемной силы и момента при любом профиле необходимо только решить простые интегралы.

47. Обтекание двух и более препятствий. С помощью функции $\zeta = e^z$ равномерный поток со скоростью U в канале шириной 2π преобразуется в поток от источника напряжением U в начале координат плоскости ζ, т. е.

$$w(z) = U \ln \zeta = U \ln(e^z) = Uz.$$

Кроме того, если $W(\zeta)$ — комплексный потенциал потока у контура C, созданный источником напряжением U в начале координат, то же самое преобразование отображает линии тока вокруг C на линии тока у соответствующего контура G в потоке, движущемся со скоростью U в канале. В таком случае после отображения C на окружность C' задача потока вокруг контура G в канале сводится к хорошо известному решению потока, созданного внешним источником, у круга. Если контур G симметричен по форме и по расположению в канале, то, как показывает отображение, поток в канале можно представлять как поток через бесконечную решетку из симметричных препятствий, причем расстояние между их центрами равно 2π.

В качестве иллюстрации рассмотрим поток через решетку из плоских пластин шириной $2\pi\lambda\,(0<\lambda<1)$, перпендикулярных к направлению скорости движения потока U. Каждая пластина принята симметрично расположенной между точками $z = i\pi(1-\lambda)$ и $z = i\pi(1+\lambda)$ в канале, ограниченном линиями $y=0$ и $y=2\pi$ (рис. 66).

Преобразование $\zeta' = e^z$ отображает пластину AEB в плоскости z на дугу AEB единичной окружности в плоскости ζ', где ей противолежит половинный угол $\pi\lambda$ с центром в точке O. Следующее линейное преобразование $\zeta'' = -2i \csc\pi\lambda\ (\zeta' + \cos\pi\lambda)$ превращает дугу в подобную ей, проходящую через точки $\zeta'' = +2$ и $\zeta'' = -2$, с центром в точке O до $\zeta'' = -2i \operatorname{ctg}\pi\lambda$. Затем согласно рис. 59 преобразование $\zeta'' = \zeta + 1/\zeta$ отображает дугу на окружность радиусом $\sec\pi\lambda/2$ с центром в точке $Q(\zeta = i \operatorname{tg}\pi\lambda/2)$, а точку O в $\zeta = i \operatorname{ctg}\pi\lambda/2$. Точки O и P являются инверсными по отношению к этой окружности, так как

$$\overline{OQ}\cdot\overline{PQ} = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\pi\lambda}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{2} = \sec^2\frac{\pi\lambda}{2}.$$

Комплексный потенциал потока у окружности, созданный источником напряжением U в точке O, получается наложением полей от источника в точке O и от источника и стока, каждого напряжением U, в точках P и Q, т. е.

$$W = U \ln \frac{\zeta\left(\zeta + i \operatorname{ctg} \frac{\pi\lambda}{2}\right)}{\zeta - i \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{2}}.$$

Тогда $w(z)$ получается из W преобразованием

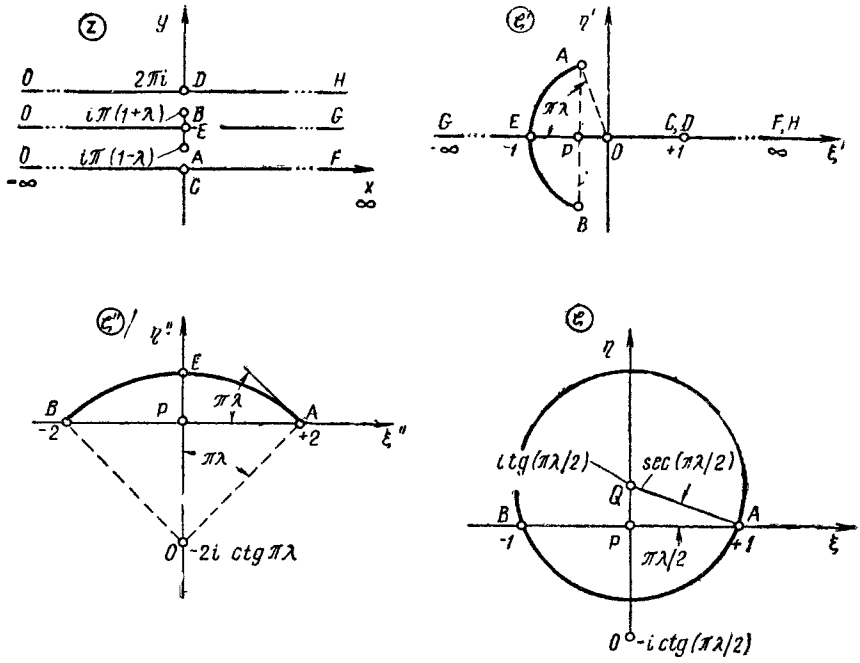


Рис. 66. Отображение плоской пластины в канале

$$\zeta + \frac{1}{\zeta} = -2i\,(e^z + \cos \pi\lambda) \operatorname{csc} \pi\lambda.$$

Так как напряжение источника при переходе от плоскости ζ' к плоскости ζ не изменяется, это выражение дает комплексный потенциал потока, движущегося со скоростью U через решетку.

Случай потока вокруг контура G, расположенного вблизи бесконечной плоской границы (скорость потока параллельна границе), эквивалентен симметричному потоку вокруг пары конгруэнтных контуров. Это — простой случай двухсвязной области, которая в принципе может быть отображена на две окружности.

Поскольку поток вокруг двух окружностей зависит от свойств эллиптических функций с двойным периодом, здесь не рассматриваемых, читатель, интересующийся конформным отображением в таких потоках, должен обратиться к другим источникам.

48. Полигональные границы. Отображение Кристоффеля—Шварца. Значительное применение свойства точек разветвления находят в преобразовании Кристоффеля—Шварца, которое отображает внутреннюю область многоугольника на верхнюю полуплоскость

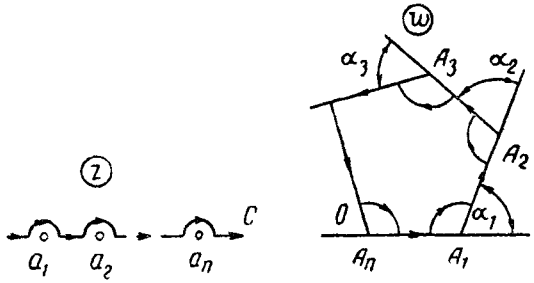


Рис. 67. Отображение Кристоффеля — Шварца для многоугольника

$$w=\int_{a_n}^{z}(z-a_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}}(z-a_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}}\cdots(z-a_n)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}}dz, \qquad (115)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n (a_1<a_2<\ldots<a_n)$ — последовательность n точек на действительной оси в плоскости z, соответствующих вершинам многоугольника в плоскости w, внешние углы при которых составляют $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, а их сумма $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=2\pi$. Так как порядок точки разветвления при интегрировании функции увеличивается на единицу ($\int z^s dz \sim z^{s+1}$), то очевидно, что $w(z)$ имеет точки разветвления порядка $1-\alpha_j/\pi$ в точках a_j. Для больших значений z интеграл приблизительно равен $z^{\frac{-\Sigma\alpha_j}{\pi}}=1/z^2$, так что если $\alpha_j<\pi$, то $w(z)$ регулярна всюду, даже в бесконечности. Исключение составляют лишь точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Рассмотрим путь C (рис. 67), начинающийся в точке a_n, идущий вправо вдоль действительной оси к точке a_1 через ∞ и затем возвращающийся к a_n, избегая точек разветвления путем описывания бесконечно малых полуокружностей вокруг них. Очевидно, что при этом $w(a_n)=0$. Для $x>a_n$ каждый множитель $(x-a_j)^{-\alpha_j/\pi}$ имеет положительный действительный корень, который может быть выбран при изучении конкретной ветви многозначной функции $w(z)$. Следовательно, когда x увеличивается

до ∞ и затем возвращается от $-\infty$ к a_1 [отрицательные величины $z-a_j$ взаимно уничтожаются, так как $(-1)^{\Sigma} = (-1)^2$], w возрастает вдоль действительной оси от 0 до A_1, где

$$A_1 = \left[\int_{a_n}^{\infty} + \int_{-\infty}^{a_1}\right](z-a_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}}(z-a_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}}\cdots(z-a_n)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}}\,dz.$$

Далее, при обходе по полуокружности первой точки разветвления a_1 радиус из a_1 отклоняется на угол $-\pi$, и поэтому соответствующее угловое смещение радиуса из точки A_1 равно $-\pi\left(1-\frac{\alpha_1}{\pi}\right)=-(\pi-\alpha_1)$. Кроме того, это вращение увеличивает $\arg(z-a_1)^{-\alpha_1/\pi}$ на α_1 (от $-\alpha_1$ до 0) и, так как дальнейшего изменения аргумента при приближении x к a_2 по пути C нет, w движется вдоль второй стороны многоугольника под углом α_1 до точки A_2, где

$$A_2 = A_1 + e^{i\alpha}\int_{a_1}^{a_2}(z-a_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}}(a_2-z)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}}\times$$

$$\times(a_3-z)^{-\frac{\alpha_3}{\pi}}\cdots(a_n-z)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}}\,dz.$$

Подобным же образом

$$A_3 = A_2 + e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}\int_{a_2}^{a_3}(z-a_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}}\times$$

$$\times(z-a_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}}(a_3-z)^{-\frac{\alpha_3}{\pi}}\cdots(a_n-z)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}}\,dz.$$

Отсюда видно, что действительная ось отображается на многоугольник.

Ранее было показано, что для таких областей преобразование обладает тремя степенями свободы. Следовательно, при заданном многоугольнике три и только три точки из $a_1, a_2, \ldots, a_n$ могут быть выбраны произвольно. Остальные точки определяются из условия, что $n-3$ отношений сторон n-угольника должны устанавливать его форму. Для примера приведем отношение сторон, соответствующих точкам (A_n, A_1) и (A_1, A_2)

$$\frac{|A_2-A_1|}{A_1} = \frac{1}{A_1}\int_{a_1}^{a_2}(z-a_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}}(a_2-z)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}}\cdots(a_n-z)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}}\,dz,$$

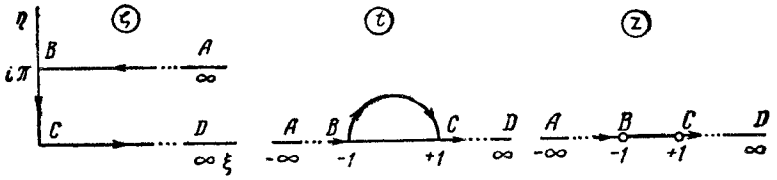
где A_1 — действительный интеграл, приведенный ранее, — функция $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Таким образом, $n-3$ отношений образуют $n-3$ уравнений, которые подтверждают положение, что три и только три из всех точек a могут быть заданы. Кроме того,

когда одна из вершин, например A_n, равна ∞, преобразование (115) все же применимо, если n-ный множитель и нижний предел пренебрежимы. Этот допуск эквивалентен выбору $a_n = w(A_n) = \infty$, так как, поскольку $\alpha_n = \pi$, то $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} = \pi$; отсюда для больших величин z интеграл приблизительно равен $\frac{1}{z}$, и $w(z)$ имеет логарифмическую особую точку при $z = \infty$. Таким образом, $A_n = \infty$ соответствует $a_n = \infty$ и отображение других точек действительной оси на другие вершины многоугольника может быть проделано так же, как и ранее.

Таким же образом можно показать, что отображение внешней области многоугольника на действительную ось дается выражением

$$w = \int_{a_n}^{z} (z - a_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}} (z - a_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}} \cdots (z - a_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}} \frac{dz}{(z^2+1)^2}. \qquad (116)$$

Пример 13. Отобразить внутреннюю область полубесконечного прямоугольника $ABCD$, показанного на схеме, в верхнюю полуплоскость z.



Внешние углы при точках B и C равны каждый $\pi/2$. Следовательно, преобразование Кристоффеля — Шварца, которое отображает точки A и D в ∞ в плоскости ζ и z и дает 90°-ные вершины в точках B и C в плоскости ζ, соответствующие $z = \mp 1$, будет иметь вид

$$\zeta = \int (z^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} dz = \operatorname{arc\,ch} z + \text{const},$$

откуда преобразование в желаемый прямоугольник составляет $\zeta = a \operatorname{arc\,ch} z + b$. Чтобы отобразить $\zeta = 0, i\pi$ в $z = 1, -1$, должны быть выбраны величины $a = 1$, $b = 0$ и ветвь многозначной функции $\operatorname{arc\,ch} z$ в полосе $0 < \eta < 2\pi$. Таким образом, результирующее преобразование составит

$$\zeta = \operatorname{arc\,ch} z \quad \text{или} \quad z = \operatorname{ch} \zeta;$$
$$0 < \eta < \pi.$$

Интересно заметить, что то же самое отображение может быть выполнено более элементарными преобразованиями

$$t = e^{\zeta}; \quad z = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right),$$

как показано на схеме.

Г. Течение струй свободного очертания.

Метод годографа

49. Теория струй свободного очертания. Задачи об истечении, отклонении струи и кавитации отличаются свободными границами, положение которых заранее не известно, но вдоль которых давление (а значит и скорость, если пренебречь силой тяжести) постоянно. Если твердые границы потоков образованы прямыми линиями, потоки могут быть подвергнуты анализу пу-

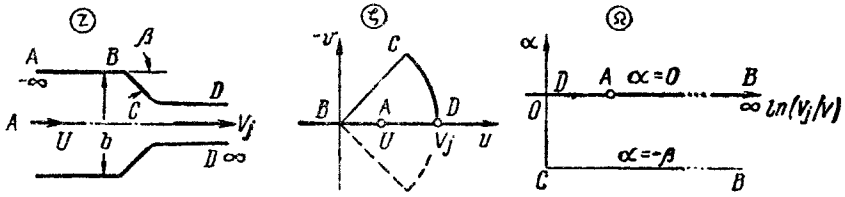


Рис. 68. Отображение комплексной скорости

тем введения дополнительного понятия годограф. Основы этой теории заложили в XIX столетии Гельмгольц и Кирхгоф, поэтому она всегда ассоциируется с их именами. За прошедшее с тех пор время было сделано много полезных применений этой теории.

Плоскость годографа — это плоскость, на которую отображается комплексная скорость. Обычно применяется два типа годографов:

в первом комплексная скорость dw/dz отображается непосредственно

$$\zeta = \frac{dw}{dz} = u - iv,$$

во втором отображается логарифм комплексной скорости

$$\Omega = -\ln\left(\frac{\zeta}{V_j}\right) = -\ln\left(\frac{V}{V_j}\right) + i\alpha,$$

где V_j — скорость вдоль свободной поверхности.

Познакомиться с методом годографа лучше всего на примере. На рис. 68 показано истечение из двухмерного водовода шириной b. В точке A скорость параллельна оси x, и ее величина равна U. Отсюда $u=U$ и $v=0$ — координаты точки A в обычном годографе (центр). Точка B является застойной точкой, поэтому она попадает в начало координат плоскости ζ. Вдоль BC направление потока постоянно, а величина скорости увеличивается от 0 в точке B до V_j в точке C. Так как отношение u/v остается постоянным, BC является радиальной линией в плоскости ζ (рис. 68);

величины u и $-v$ обе положительны. Вдоль свободной поверхности CD согласно гипотезе величина скорости $V=V_j$ постоянна, так что измениться может только направление скорости. Таким образом, CD является дугой радиуса V_j; точка D представляет отдаленную область справа в плоскости z, где поток параллелен оси x.

Нижняя половина плоскости z может быть представлена подобным же образом (пунктир на плоскости ζ). Однако эта часть диаграммы не нужна, так как вдоль осевой линии может быть проведена твердая граница (линия DA в плоскости ζ) без ущерба для универсальности. Если обозначить граничный угол че-

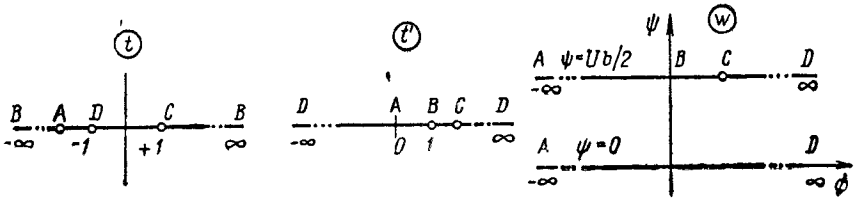


Рис. 69. Отображение комплексного потенциала

рез β, то внутренний сектор BCD в плоскости ζ может быть отображен на верхнюю полуплоскость t (рис. 69) с помощью преобразований

$$t' = \left(\frac{\zeta}{V_j}\right)^{\pi/\beta}; \quad t = -\frac{1}{2}\left(t' + \frac{1}{t'}\right)$$

или

$$t = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\zeta}{V_j}\right)^{\pi/\beta} + \left(\frac{V_j}{\zeta}\right)^{\pi/\beta}\right].$$

Для потока, изображенного на рис. 68, также может быть вычерчен логарифмический годограф. В точке A значение $\Omega = \ln(V_j/U)$ является положительным действительным количеством. Застойная точка B становится областью в ∞, для которой $-\beta \leqslant \alpha \leqslant 0$. Для точки C значение Ω является мнимым и между точками C и D уклон меняется от $-\beta$ до 0. Часть годографа между точками D и A опять представляет ось потока. Результирующая фигура является полубесконечной полосой, которая может быть отображена на верхнюю полуплоскость, как было показано ранее.

Предыдущие преобразования выражали отношение dw/dz как функцию комплексной переменной t. Следующий шаг в методе годографа состоит в отображении плоскости комплексного потенциала w на ту же самую плоскость t, так что точки линии тока $ABCD$ отображаются на соответствующие точки плоскости t.

Таким образом, w также выражается как функция t. Два равенства $w=f(t)$ и $dw/dz=g(t)$ составляют дифференциальное уравнение для $w(z)$. При исключении t можно получить $dw/dz=F(w)$, тогда выражение

$$z=\int\frac{dw}{F(w)}$$

дает связь, из которой может быть установлен комплексный потенциал.

Иным способом соотношения

$$g(t)=\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{dt}\cdot\frac{dt}{dz}=f'(t)\frac{dt}{dz};$$

$$w=f(t);\quad z=\int\frac{f'(t)}{g(t)}dt$$

выражают w как функцию z в параметрическом виде.

Для продолжения анализа двухмерного водовода требуется отобразить контур $ABCDA$ плоскости w также на действительную ось $ABCDA$ плоскости t. Полоса $ABCDA$ плоскости w, показанная на рис. 69, может быть отображена на верхнюю полуплоскость t' преобразованием $w=(Ub/2\pi)\ln t'$ (тот же рисунок), а затем может быть отображена на верхнюю полуплоскость t линейным преобразованием

$$t'=\frac{t-t_A}{t+1}.$$

Таким образом, функциональная зависимость между w и dw/dz составляет

$$w=\frac{Ub}{2\pi}\ln\frac{t-t_A}{t+1};$$

$$t=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\zeta}{V_j}\right)^{\pi/\beta}+\left(\frac{V_j}{\zeta}\right)^{\pi/\beta}\right].$$

50. Приложение к истечению и отклонению струи. Теория струй свободного очертания может быть применена ко многим практическим задачам механики жидкости. Для иллюстрации разнообразия ее применения приведем решение некоторых задач методом годографа.

Коэффициент сжатия $\pi/(\pi+2)$. На рис. 70 показаны границы для двухмерного истечения через щель в плоской стенке бесконечно большого резервуара и вспомогательные плоскости Ω и t. Преобразование от Ω к t несложно: $t=-\operatorname{ch}\Omega$. В плоскости t все линии тока начинаются в ∞ и кончаются в начале координат. Если для удобства математических преобразований ширину сжатой струи произвольно обозначить π, то расход в плоскости z будет равен πV_j, а напряжение стока в начале координат плоскости t также составит πV_j. Отсюда получается второе соотношение

$w = -V_j \ln t$, из которого может быть установлен комплексный потенциал.

Вдоль линии тока BC значение $\partial\varphi/\partial s = V_j$, но из предыдущего равенства $\partial\varphi/\partial s = -(V_j/t)\,dt/ds$, так что $dt/ds = -t$. Кроме того, поскольку вдоль BC $\Omega = i\alpha$ и $dx/ds = \cos\alpha$, получается

$$\frac{dt}{ds} = -t = \operatorname{ch}(i\alpha) = \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \text{ т. е.}$$

$$dx = dt.$$

Отсюда горизонтальное смещение δx от точки B до точки C равно $t_C - t_B = 1$, так что коэффициент сжатия, который представляет отношение ширины струи к ширине отверстия, составляет

$$C_{сж} = \frac{\pi}{\pi + 2}.$$

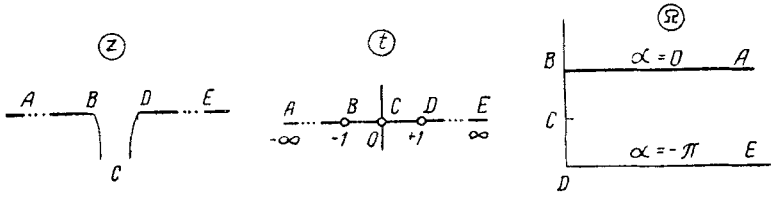


Рис. 70. Отображение потока, вытекающего из щели

Если требуются дополнительные подробности, такие, как уравнение свободной поверхности или изменение давления вдоль стенки резервуара, решение может быть более полным.

Струя, ударяющаяся о бесконечный плоский барьер. Если двухмерная струя конечной ширины направлена перпендикулярно к очень большой плоской пластине, отклонение ее происходит симметрично (рис. 71). Отображение струи $ABCDA$ на плоскость годографа $\zeta = (u - iv)/U$ дает верхнюю половину единичной окружности, которая отображается на верхнюю полуплоскость t преобразованием

$$t = -\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right).$$

Поток в плоскости t эквивалентен потоку от источника напряжением Ub/π в начале координат к стокам половинного напряжения в точках $t = +1$ и $t = -1$. Отсюда комплексный потенциал дается выражением

$$w = \frac{Ub}{2\pi} \ln \frac{t^2}{t^2 - 1}.$$

Из предыдущего соотношения между w и ζ можно вывести соотношение между z и ζ, т. е. выразить скорость в зависимости от положения. Дифференцирование w по z дает

$$\zeta = \frac{2b\zeta}{\pi}\left(\frac{1}{1-\zeta^2}+\frac{1}{1+\zeta^2}\right)\frac{d\zeta}{dz},$$

откуда получается

$$\frac{z}{b} = \frac{2}{\pi}\int\left(\frac{1}{1-\zeta^2}+\frac{1}{1+\zeta^2}\right)d\zeta = \frac{2}{\pi}(\mathrm{th}^{-1}\zeta+\mathrm{tg}^{-1}\zeta).$$

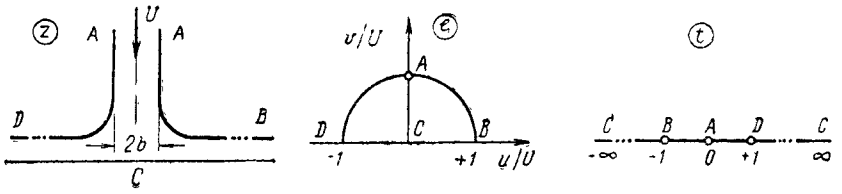


Рис. 71. Отображение отклонения струи

Таким образом, на плоском барьере, где $z=x$ и $\zeta=u/U$, находим

$$\frac{x}{b} = \frac{2}{\pi}\left[\mathrm{th}^{-1}\frac{u}{U}+\mathrm{tg}^{-1}\frac{u}{U}\right].$$

Последнее соотношение и уравнение Бернулли позволили построить график скорости и давления, приведенный на рис. 72.

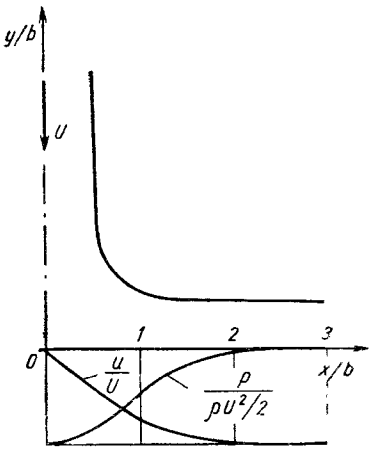


Рис. 72. Распределение скорости и давления при отклонении струи

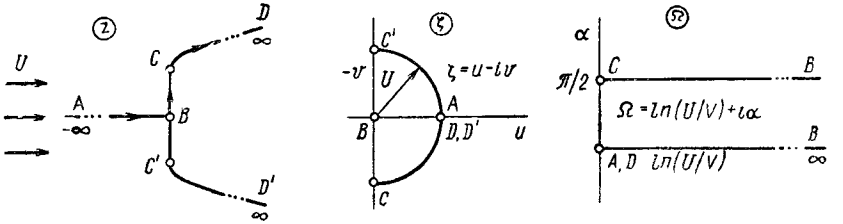
Этот пример рассматривает один из простейших видов всевозможных конфигураций струи, которые могут изучаться подобным путем. Струя может быть наклонной, пластина бесконечно широкой и несимметрично расположенной по отношению к струе, струя может быть частично ограниченной.

Предыдущие вычисления иллюстрируют разные технические случаи, относящиеся к теории струй свободного очертания. Однако в инженерной практике их встречается гораздо больше. Опубликованные работы дают общую картину решенных задач и применений их результатов. Во многих случаях наиболее важные задачи сильно осложнены в

деталях, но не в используемых понятиях. Для некоторых применений необходимы числовые методы интегрирования.

Добавления к перечисленным примерам могут встретиться при изучении кавитации, влияния конструкции воздушных и водяных туннелей, коэффициентов конусных затворов, потоков на водосливах, колес Пельтона, местных потерь и при проектировании транзитных секций. Соответствие между вычислениями, основанными на теории струй свободного очертания, и наблюдениями потоков реальных жидкостей в большинстве случаев очень хорошее. Даже для эквивалентного случая трехмерного или осесимметричного потока такие характеристики, как коэффициент сжатия и угол отклонения, следуют идентичным зависимостям. В будущем можно ожидать увеличения случаев применения этой теории. Поэтому инженер должен быть хорошо осведомлен как о пользе, так и об ограничениях вышеизложенных классических методов.

Пример 14. Получить два типа годографа для течения со свободной поверхностью за плоской пластиной, перпендикулярной к равномерному потоку.



Допускается, что поток имеет точку отрыва в центре B пластины CC', так что разделяющая линия тока AB отделяется от пластины и образует свободные поверхности CD и $C'D'$, которые простираются в бесконечность. Кроме того, считается, что давление в «следе» пластины постоянно. Следовательно, скорость вдоль свободной поверхности также постоянна и равна скорости равномерного потока. Знание величины или направления скорости в различных точках вдоль разделяющей линии тока позволяет непосредственно получить годографы, показанные на плоскостях ζ и Ω.

Глава V

ЛАМИНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

А. Основные положения

51. Соотношение между напряжением и скоростью деформации. Хотя основные уравнения движения уже были даны в главе II, необходимо установить здесь соотношение между напряжением и скоростью деформации, чтобы можно было написать эти уравнения в удобной для применения форме. Поскольку поворот координатной системы не влияет ни на напряжение, ни на скорость деформации, напряжения будут выражаться как функции скоростей деформации по главным направлениям, а преобразование координат от старых к новым будет осуществляться согласно установленному закону.

Преобразование напряжений и скоростей деформации в связи с преобразованием координат удобно производить по следующей схеме:

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

в которой x', y' и z' измеряются по главным направлениям. Величины l_1, m_1 и n_1 — направляющие косинусы оси x' по отношению к осям x, y и z; аналогично для осей y' и z' имеем:

$$x' = l_1 x + m_1 y + n_1 z;$$

$$y' = l_2 x + m_2 y + n_2 z;$$

$$z' = l_3 x + m_3 y + n_3 z.$$

Так как сумма квадратов направляющих косинусов равна единице, то

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = l_3^2 + m_3^2 + n_3^2.$$

Далее, из условия ортогональности главных направлений следует, что

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = \\ = l_3 l_1 + m_3 m_1 + n_3 n_1 = 0.$$

Определение l, m и n как направляющих косинусов подразумевает, что l_1, l_2 и l_3 являются направляющими косинусами оси x по отношению к главным направлениям, а m и n играют аналогичную роль для осей y и z, так что

$$x = l_1 x' + l_2 y' + l_3 z';$$
$$y = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z';$$
$$z = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z'.$$

Поскольку сумма квадратов направляющих косинусов равна единице, то

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2.$$

Из ортогональности осей x, y и z следует, что

$$l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = m_1 n_1 + m_2 n_2 + \\ + m_3 n_3 = n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3 = 0.$$

Все восемнадцать уравнений, содержащихся в данном пункте, выводятся из схемы преобразования. Если u', v' и w' обозначают компоненты скорости по направлениям соответственно x', y' и z', законы преобразования компонентов скорости идентичны таковым для координат и даются той же схемой. Интересно отметить, что дифференциальные операторы преобразуются подобно координатам, например

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial z'} = l_1 \frac{\partial}{\partial x'} + l_2 \frac{\partial}{\partial y'} + l_3 \frac{\partial}{\partial z'}.$$

Как и в главе II, с целью сокращения записи вводятся следующие символы для скоростей деформации:

$$a = \frac{\partial u}{\partial x};\ b = \frac{\partial v}{\partial y};\ c = \frac{\partial w}{\partial z};$$
$$f = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z};\ g = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{dx};\ h = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Если эти символы использовать для соответствующих величин в координатной системе x', y' и z', то к ним могут быть при-

менены законы преобразования компонентов скорости, и дифференциальные операторы представятся в следующем виде:

$$a = \left(l_1 \frac{\partial}{\partial x'} + l_2 \frac{\partial}{\partial y'} + l_3 \frac{\partial}{\partial z'}\right)(l_1 u' + l_2 v' + l_3 w') =$$

$$= l_1^2 \frac{\partial u'}{\partial x'} + l_2^2 \frac{\partial v'}{\partial y'} + l_3^2 \frac{\partial w'}{\partial z'} \text{ и т. д.}$$

Величины f', g' и h' равны нулю, поскольку направления x', y' и z' являются главными. Тогда

$$\left.\begin{aligned} a &= l_1^2 a' + l_2^2 b' + l_3^2 c'; \\ b &= m_1^2 a' + m_2^2 b' + m_3^2 c'; \\ c &= n_1^2 a' + n_2^2 b' + n_3^2 c'; \\ f &= 2(m_1 n_1 a' + m_2 n_2 b' + m_3 n_3 c'); \\ g &= 2(n_1 l_1 a' + n_2 l_2 b' + n_3 l_3 c'); \\ h &= 2(l_1 m_1 a' + l_2 m_2 b' + l_3 m_3 c'). \end{aligned}\right\} \quad (117)$$

Эти выражения являются формулами преобразования скоростей деформации.

Для упрощения обозначим главные напряжения по направлениям x', y' и z' соответственно символами σ_1, σ_2 и σ_3. Возьмем на главных осях три точки A, B и C (рис. 73), так чтобы нормаль к поверхности ABC, равная δs, совпадала с направлением x, и рассмотрим силы, действующие на малый тетраэдр $ABCO$ в направлении x. Пренебрегая силами инерции как членами высшего порядка, получим

$$\sigma_x \Delta = \sigma_1 (l_1 \delta s) l_1 + \sigma_2 (l_2 \delta s) l_2 + \sigma_3 (l_3 \delta s) l_3.$$

Аналогичные уравнения могут быть получены при рассмотрении сил, действующих на тетраэдр в направлениях y и z. Деля все эти уравнения на δs, найдем:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 l_2^2 + \sigma_3 l_3^2; \\ \sigma_y &= \sigma_1 m_1^2 + \sigma_2 m_2^2 + \sigma_3 m_3^2; \\ \sigma_z &= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2; \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = m_1 n_1 \sigma_1 + m_2 n_2 \sigma_2 + m_3 n_3 \sigma_3; \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = n_1 l_1 \sigma_1 + n_2 l_2 \sigma_2 + n_3 l_3 \sigma_3; \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = l_1 m_1 \sigma_1 + l_2 m_2 \sigma_2 + l_3 m_3 \sigma_3. \end{aligned}\right\} \quad (118)$$

Эти формулы служат для выражения напряжений в некоторой произвольной прямоугольной системе координат через главные напряжения.

Из уравнений (117) и соотношений между направляющими косинусами следует, что

$$a + b + c = a' + b' + c' = \theta, \quad (119)$$

где θ — местная скорость объемного расширения, равная нулю для несжимаемой жидкости.

Уравнение (119) совершенно реально, так как скорость расширения не должна зависеть от выбора координатной системы. Аналогично из уравнений (118) видно, что

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3.$$

Принятое ранее соотношение между главными напряжениями и главными скоростями деформации теперь доказано.

Если известно, что главные напряжения отличаются от давления p на величины, являющиеся функциями a', b' и c', симметричным образом, допущение о линейности соотношений позволяет записать их в следующем виде:

$$\sigma_1 = -p + \lambda(a' + b' + c') + 2\mu a';$$
$$\sigma_2 = -p + \lambda(a' + b' + c') + 2\mu b';$$
$$\sigma_3 = -p + \lambda(a' + b' + c') + 2\mu c',$$

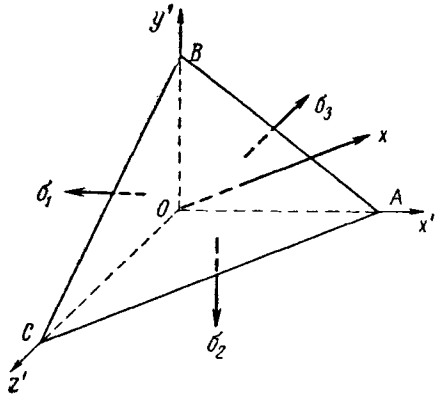


Рис. 73. Тетраэдр, построенный на главных координатных осях

где λ и μ — постоянные величины.

Если сложить эти уравнения, учитывая равенство (119), получим

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + 3p = (3\lambda + 2\mu)\theta,$$

откуда заключаем, что при несжимаемой жидкости $-p$ есть среднее значение из главных напряжений. Таким образом, из уравнений (117), (118) и (119) получаем:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -p + \lambda\theta + 2\mu a; \\ \sigma_y &= -p + \lambda\theta + 2\mu b; \\ \sigma_z &= -p + \lambda\theta + 2\mu c; \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu f; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu g; \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu h. \end{aligned}\right\} \qquad (120)$$

Это — искомые соотношения между напряжениями и скоростями деформации в декартовых координатах.

Скорости деформаций в обычных ортогональных координатах даны в приложении. Запись скоростей деформации в других системах координат имеет вид:

в цилиндрических координатах

$$a = \frac{\partial u}{\partial r};\ b = \frac{1}{r}\left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta}\right);\ c = \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$f = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial \theta};\ g = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z};\ h = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right);$$

в сферических координатах

$$a = \frac{\partial u}{\partial R};\ b = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} + u\right);\ c = \frac{1}{R\sin\vartheta}\left(\frac{\partial w}{\partial \vartheta} + u\sin\vartheta + v\cos\vartheta\right);$$

$$f = \frac{\csc\vartheta}{R}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\sin\vartheta}{R}\cdot\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{w}{\sin\vartheta}\right);$$

$$g = R\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{w}{R}\right) + \frac{1}{R\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi};$$

$$h = \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + R\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{v}{R}\right).$$

Соотношения между напряжениями и скоростями деформации остаются в виде уравнений (120).

52. Физическое представление вязкости. Физическая сущность коэффициента μ, появляющегося в уравнении (120), может быть выявлена при рассмотрении движения жидкости между двумя параллельными пластинами, вызванного перемещением одной из этих пластин в ее плоскости. В этом случае $u = U\,y/b$ (как будет показано далее), $v = 0$ и $w = 0$ при условии, что b есть смещение пластин, y берется в направлении, перпендикулярном плоскости пластин, а x берется в том направлении, в каком перемещается пластина со скоростью U. Из уравнений (120) видно, что нормальные напряжения изотропны и только касательные напряжения τ_{yx} и τ_{xy}, равные оба $\mu U/b$, не исчезают. Таким образом, μ является коэффициентом пропорциональности между касательным напряжением и скоростью деформации сдвига. Этот коэффициент выражает свойство жидкости, называемое динамической вязкостью.

В аналогичном случае теплопроводности между двумя горизонтальными пластинами, нижняя из которых имеет постоянную заданную температуру, а верхняя — некоторую температуру Θ, количество тепла, передаваемого через жидкость на единицу площади любой горизонтальной плоскости, равно $k\Theta/b$, где k — коэффициент теплопроводности. Если речь идет не о температуре, а о массе, перемещаемой от одной границы к другой, количество массы, передаваемой через единицу площади в единицу времени, равно $k'C/b$, где C есть разница концентрации у двух границ в процентах по весу, а k' — коэффициент проводимости массы. Сравнение выражений $\mu U/b$, $k\Theta/b$ и $k'C/b$ показывает, что коэффициент μ соответствует k и k' и, следовательно, может рассматриваться как проводимость количества движения. Если c обоз-

начает удельную теплоту (при постоянном объеме или постоянном давлении), величина $\alpha = k/\rho c$ имеет размерность $[L^2 T^{-1}]$ и называется тепловой диффузией. Массовая диффузия может быть представлена величиной $\alpha' = k'/\rho$, которая также имеет размерность $[L^2T^{-1}]$. В таком случае естественно рассматривать и кинематическую вязкость $\nu = \mu/\rho$, имеющую ту же размерность, как диффузию количества движения. Величины α, α' и ν имеют общее свойство, заключающееся в том, что все они являются кинематическими величинами. Отношение ν/α или ν/α' является показателем способности жидкости диффундировать количество движения по сравнению с ее способностью диффундировать тепло или массу; это отношение называется числом Прандтля. Для большинства газов число Прандтля имеет величину порядка единицы, для жидкостей его величина изменяется в широких пределах от 0,01 для ртути до 5 для воды.

53. Скорость диссипации энергии. В п. 27 было показано, что выражение

$$(\sigma_x a + \sigma_y b + \sigma_z c + \tau_{yz} f + \tau_{zx} g + \tau_{xy} h)\, \delta x\, \delta y\, \delta z$$

определяет скорость, с которой совершается работа по изменению объема и формы частицы жидкости. Если в уравнениях (120) выразить компоненты напряжения через компоненты скорости деформации, приведенное выражение примет вид:

$$[-p\theta + \lambda\theta^2 + \mu\,(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + f^2 + g^2 + h^2)]\, \delta x\, \delta y\, \delta z.$$

Для потоков несжимаемой жидкости, когда $\theta = 0$, это выражение может быть заменено следующим:

$$\varepsilon\, \delta x\, \delta y\, \delta z.$$

Здесь

$$\varepsilon = \mu\,(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + f^2 + g^2 + h^2) \qquad (121)$$

представляет диссипацию механической энергии в единице объема за единицу времени вследствие действия вязкости, называемую диссипативной функцией. Энергия, теряемая при вязкостной диссипации, превращается в теплоту и является невозвратной. Из уравнения (121) следует, что диссипативная функция стремится к нулю только если скорость деформации также стремится к нулю, т. е. только в случае быстрых перемещений и вращений тела.

Если скорость объемного расширения θ отлична от нуля, но деформация изотропна, то

$$a = b = c = \frac{\theta}{3} \quad \text{и} \quad f = g = h = 0.$$

Приведенное выше выражение принимает вид

$$\left[-p\theta + \left(\lambda + \frac{2}{3}\,\mu\right)\theta^2\right] \delta x\, \delta y\, \delta z.$$

Невозвратная часть равна $(\lambda+\frac{2}{3}\mu)\theta^2$; $\lambda+\frac{2}{3}\mu$ называется объемной вязкостью.

Пример 15. Показать, что общая скорость диссипации в несжимаемой вязкой жидкости может быть представлена выражением

$$\mu\int_W \omega^2\,dW-\mu\int_S\frac{\partial V^2}{\partial N}\,dS+2\mu\int_S\begin{vmatrix} l & m & n\\ u & v & w\\ \xi & \eta & \zeta\end{vmatrix}dS,$$

в котором N определяет нормаль к поверхности, а l, m, n — направляющие косинусы нормали.

Вычтем из функции ε п. 53 величину $2\mu\,\theta^2$, которая равна нулю:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+$$
$$+2\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}+2\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

Отсюда видно, что

$$\varepsilon=\mu\omega^2-4\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

или

$$\varepsilon=\mu\omega^2-\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial V^2}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial V^2}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial V^2}{\partial z}\right]+2\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}(v\zeta-w\eta)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}(w\xi-u\zeta)+\frac{\partial}{\partial z}(u\eta-v\xi)\right].$$

Это можно проверить подстановкой

$$V^2=u^2+v^2+w^2;$$
$$\xi=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z};\quad \eta=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x};\quad \zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y},$$

принимая во внимание уравнение неразрывности. Используя теорему Грина и интегрируя предшествующее выражение для ε, получим требуемое уравнение.

Б. Уравнения Навье — Стокса

54. Вывод уравнений. После введения уравнений (120) основные уравнения движения в декартовых координатах, данные в п. 26, принимают более специфический вид:

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{Du}{Dt}&=\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}+(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u;\\ \rho\frac{Dv}{Dt}&=\rho Y-\frac{\partial p}{\partial y}+(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v;\\ \rho\frac{Dw}{Dt}&=\rho Z-\frac{\partial p}{\partial z}+(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w.\end{aligned}\right\}\qquad(122)$$

В них, по предыдущему,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z},$$

а ∇^2 — оператор Лапласа, равный

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Если жидкость несжимаема и если массовые силы могут быть выражены через градиенты потенциальной силы Ω, эти уравнения принимают такой вид:

$$\left.\begin{aligned} \rho\frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial}{\partial x}(p + \rho\Omega) + \mu\nabla^2 u; \\ \rho\frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial}{\partial y}(p + \rho\Omega) + \mu\nabla^2 v; \\ \rho\frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial}{\partial z}(p + \rho\Omega) + \mu\nabla^2 w. \end{aligned}\right\} \qquad (123)$$

Подобные уравнения были получены Навье, Коши и Пуассоном в начале прошлого столетия, но они базировались скорее на произвольных допущениях, чем на учете молекулярного взаимодействия. Нынешний способ вывода этих уравнений относится к средним годам прошлого столетия и оформлен Сен-Венаном и Стоксом. Свое наименование уравнения получили по имени первого (Навье) и последнего (Стокса) исследователей.

Уравнения Навье—Стокса в обычных ортогональных координатах приведены в приложении. В цилиндрических координатах (r, θ, z) они имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r}\right) &= \\ = -\frac{\partial}{\partial r}(p + \rho\Omega) + \mu\left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial\theta}\right); & \\ \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial\theta} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r}\right) &= \\ = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(p + \rho\Omega) + \mu\left(\nabla^2 v + \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{v}{r^2}\right); & \\ \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial\theta} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= \\ = -\frac{\partial}{\partial z}(p + \rho\Omega) + \mu\nabla^2 w, & \end{aligned}\right\} \qquad (124)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

В сферических координатах (R, ϑ, φ) эти уравнения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial R}+\frac{\vartheta}{R}\cdot\frac{\partial u}{\partial \vartheta}+\frac{w}{R\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}-\frac{v^2+w^2}{R}\right)=\\
&\quad=-\frac{\partial(p+\rho\Omega)}{\partial R}+\mu\left(\nabla^2 u-\frac{2u}{R^2}-\frac{2}{R^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial\vartheta}-\right.\\
&\quad\left.-\frac{2v\operatorname{ctg}\vartheta}{R^2}-\frac{2}{R^2\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right);\\
&\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial R}+\frac{v}{R}\cdot\frac{\partial v}{\partial\vartheta}+\frac{w}{R\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{uv}{R}-\frac{w^2\operatorname{ctg}\vartheta}{R}\right)=\\
&\quad=-\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial(p+\rho\Omega)}{\partial\vartheta}+\mu\left(\nabla^2 v+\frac{2}{R^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial\vartheta}-\frac{v}{R^2\sin^2\vartheta}-\right.\\
&\quad\left.-\frac{2\cos\vartheta}{R^2\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right);\\
&\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial R}+\frac{v}{R}\cdot\frac{\partial w}{\partial\vartheta}+\frac{w}{R\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\frac{wu}{R}+\frac{wv\operatorname{ctg}\varphi}{R}\right)=\\
&\quad=-\frac{1}{R\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial(p+\rho\Omega)}{\partial\varphi}+\mu\left(\nabla^2 w-\frac{w}{R^2\sin^2\vartheta}+\right.\\
&\quad\left.+\frac{2}{R^2\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{2\cos\varphi}{R^2\sin^2\vartheta}\cdot\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right),
\end{aligned}\right\}\qquad(125)$$

где

$$\nabla^2=\frac{1}{R^2}\cdot\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)+$$
$$+\frac{1}{R^2\sin^2\vartheta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Если все координаты измерены в единицах характерной длины d, все компоненты скорости выражены в единицах характерной скорости U, время измерено в единицах d/U и давление — в единицах ρU^2, уравнения (123) принимают вид

$$\left(\frac{Du}{Dt}\right)'=-\frac{\partial(p/\rho+\Omega)'}{\partial x'}+\frac{1}{\mathrm{Re}}(\nabla^2 u)'\ \text{и т. п.}\qquad(126)$$

В уравнениях (126) все величины безразмерны, а $\mathrm{Re}=Ud/\nu$ есть число Рейнольдса. Присутствие в этих уравнениях величины Re как параметра показывает, что для подобных потоков несжимаемой жидкости должно не только соблюдаться геометрическое подобие, но и оставаться постоянным число Рейнольдса. Хотя Re является единственным параметром, явно появляющимся в уравнении (126), его может оказаться недостаточно для доказательства подобия даже потоков несжимаемых жидкостей, для которых составлены уравнения (126). Если граница потока не является неподвижной, а представляет свободную поверхность

или границу с другой жидкостью, числа Фруда и Вебера могут оказаться постоянными в заданных граничных условиях при точном обеспечении подобия течений.

55. Уравнения, описывающие диффузию вихря. Компоненты вихря ξ, η и ζ были определены в главе II как

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Можно показать, что эти выражения удовлетворяют уравнению:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \tag{127}$$

Для несжимаемой жидкости уравнения Навье — Стокса могут быть записаны так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v\zeta + w\eta = -\frac{\partial B}{\partial x} + \nu \nabla^2 u;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - w\xi + u\zeta = -\frac{\partial B}{\partial y} + \nu \nabla^2 v;$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - u\eta + v\xi = -\frac{\partial B}{\partial z} + \nu \nabla^2 w,$$

где $\nu = \mu/\rho$, а B представляет трехчлен Бернулли

$$B = \frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} + \Omega.$$

После исключения B перекрестным дифференцированием и объединения уравнений (4) и (127) они принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{D\xi}{Dt} &= \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} + \nu \nabla^2 \xi; \\ \frac{D\eta}{Dt} &= \xi \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial v}{\partial z} + \nu \nabla^2 \eta; \\ \frac{D\zeta}{Dt} &= \xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z} + \nu \nabla^2 \zeta. \end{aligned}\right\} \tag{128}$$

Из этих уравнений, описывающих диффузию вихрей, можно сделать важные выводы.

Во-первых, поскольку условия $\xi = \eta = \zeta = 0$ явно дают решение этих уравнений, они также представляют решение уравнений Навье — Стокса, из которых эти уравнения получены. Таким образом, если пограничные условия не учитываются, потенциальные течения, которые описываются уравнением неразрывности при отсутствии компонентов вихря, представляют одну из форм течения вязкой жидкости. Однако, поскольку в потенциальных потоках всегда имеет место проскальзывание по неподвижной твердой границе, то такие потоки можно представить, только если движение каждой части твердой границы осуществляется

с местной скоростью, равной предсказанной для жидкости теорией безвихревого течения. Когда течение вязкой жидкости без вращения представляется таким путем, Лапласиан компонентов скорости равен нулю. Следовательно, члены уравнения (123), включающие вязкость, исчезнут, и попытка составить уравнение энергии из этих уравнений (как в п. 27) с несколькими членами, содержащими вязкость, очевидно, не удастся. Это, конечно, не означает, что в потоке вязкой жидкости без вращения отсутствует диссипация энергии, ибо, как будет показано далее, за исключением простейших случаев перемещения или вращения твердых тел, члены, содержащие деформацию, не исчезают в потоке без вращения, и диссипативная функция поэтому не становится равной нулю.

Отсутствие любого из членов, включающих вязкость, в уравнении энергии для безвихревого установившегося или неустановившегося потока в действительности означает, что в любой области мгновенная скорость диссипации энергии, вызванной вязкостью, точно компенсируется мгновенной скоростью совершения работы вязких сил на границе этой области. В частности, если скорость обтекания безвихревым потоком твердого тела (поверхность которого движется в соответствии с теорией потенциального течения) постоянна, диссипация энергии во всей области потока в точности равна скорости, с которой совершается работа вязкого сдвига по движущейся поверхности твердого тела. Примерами безвихревого движения вязкой жидкости могут служить движение жидкости в неограниченном пространстве, вызванное вращением цилиндра бесконечной длины, и движение между концентрическими цилиндрами, вращающимися с угловыми скоростями, обратно пропорциональными квадратам их радиусов. Это простые вращательные движения, которые могут быть воспроизведены на практике, поскольку скорость, налагаемая твердой границей, постоянна.

При исчезновении кинематической вязкости уравнения (128) показывают, что если компоненты вихря равны нулю для какой-то части жидкости, они будут оставаться равными нулю и впредь, т. е. будет сохраняться безвихревое движение. Поскольку состояние покоя является безвихревым состоянием, всякое движение невязкой жидкости, начинающееся из состояния покоя под воздействием сил, имеющих потенциал, должно оставаться безвихревым. Это объясняет тесную связь между невязкостью жидкости и безвихревым ее движением.

Некоторые, возможно, попытаются заключить, что даже если кинематическая вязкость не равна нулю, уравнения (128) все же указывают на тенденцию к сохранению безвихревого состояния во всем потоке. Однако поскольку безвихревое течение всегда подразумевает наличие проскальзывания у неподвижной границы, требование отсутствия его для вязкой жидкости несовместимо со стремлением сохранения безвихревого состояния

в потоке. Если движение начинается, например, из состояния покоя, и накладывается условие отсутствия проскальзывания, вихри обязательно будут зарождаться, у неподвижной границы и диффундировать от нее в толщу потока.

Для двухмерного движения уравнения (128) сводятся к такой простой форме:

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \nu \nabla^2 \zeta, \tag{129}$$

где ∇^2 — двухмерный оператор Лапласа.

Если ζ является функцией только t и цилиндрической координаты r, уравнение (128) принимает вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right), \tag{130}$$

поскольку компоненты скорости по r исчезают, и все другие величины зависят только от r.

Можно показать, что уравнение (129) идентично подобному уравнению диффузии тепла в двухмерной области. Эта тепловая аналогия создает очень удобный способ иллюстрации диффузии вихрей от источника. Цилиндр, вращающийся в жидкости, можно рассматривать как источник вихрей, а геометрически подобный нагретый стержень как источник тепла. Если радиусы этих двух цилиндров принимаются стремящимися к нулю, в то время как их напряжения (циркуляция и содержание тепла) остаются постоянными, они будут представлять в пределе линейный вихрь и линейное распределение конечного количества тепла. Если последнее вводится внезапно в некоторый бесконечный проводник постоянной температуры, добавляемое тепло будет диффундировать во внешнюю среду, пока (через бесконечный промежуток времени) температура (т. е. концентрация тепла) не вернется к своему начальному значению во всех точках. Аналогичное явление будет наблюдаться при внезапном введении линейного вихря в безграничную жидкую среду, находящуюся до этого в покое: завихренность на любом радиальном расстоянии будет постепенно увеличиваться, а затем уменьшаться, пока (как температура в первом случае) через бесконечный промежуток времени циркуляция станет постоянной во всех точках, т. е. поток станет опять безвихревым. Если образующемуся линейному вихрю придается нулевая циркуляция, будет происходить обратный процесс, пока опять-таки спустя некоторое время циркуляция станет равной нулю.

Если напряжение вихря обозначить Γ_0, распределение завихренности для двух процессов может быть записано так:

$$\zeta_1 = -\frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t_1} e^{-\frac{r^2}{4\nu t_1}}; \quad \zeta_2 = \frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t_2} e^{-\frac{r^2}{4\nu t_2}}.$$

Справедливость уравнения (130) может быть доказана непосредственным дифференцированием. Изменение ζ во времени показано на рис. 74, *а*. Последовательные изменения в потоке можно очень наглядно представить, если получить распределение скоростей для двух случаев, исходя из характера завихренности. Поскольку $r\zeta = \partial(rv)/\partial r$, скорость при учете начальных условий может быть найдена простым интегрированием. В первом случае имеем вихрь напряжением $\Gamma_0/2\pi$, так что $r_0 v_0 = \Gamma_0/2\pi$; во втором случае вихрь отсутствует, так что $r_0 v_0 = 0$. Таким образом, приведенные уравнения после интегрирования дают выражения:

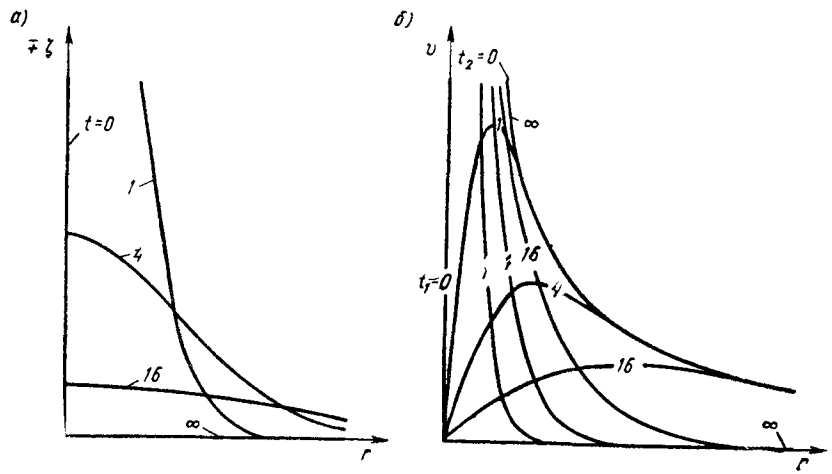


Рис. 74. Диффузия завихренности от линейного вихря

$$v_1 = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} e^{-\frac{r^2}{4\nu t_1}}; \quad v_2 = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t_2}}\right),$$

графики которых для последовательных моментов времени t показаны на рис. 74, *б*.

Пример 16. Получить из уравнения Навье—Стокса для несжимаемой жидкости уравнения скоростей изменения трехчлена Бернулли B; определить $\nabla^2 B$.

Из главы II известно, что

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (V^2/2)}{\partial x} + w\eta + v\zeta.$$

Подстановка в уравнение (123) дает три уравнения следующей формы:

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + w\eta - v\zeta - \nu\nabla^2 u,$$

где

$$B = \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Omega.$$

В случае установившихся условий можно показать последовательным перемножением на u/V; v/V, w/V, что

$$\frac{\partial B}{\partial s} = \frac{\nu}{V}(u\nabla^2 u + v\nabla^2 v + w\nabla^2 w).$$

Если $\nabla^2\vec{V}=0$, то $B=\text{const}$ вдоль линий тока, как при течении невязкой жидкости. В противном случае трехчлен Бернулли изменяется вдоль линий тока в зависимости от вязкости и распределения скорости. Это изменение может быть местами положительным или отрицательным.

В случае течения вязкой жидкости с $u=f(y, z)$, $v=0$, $w=0$,

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Если, например, $u=4u_m(y/b - y^2/b^2)$, как на рис. 75, *б*, то

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -8\frac{\nu u_m}{b^2}.$$

Величина $\nabla^2 B$ может быть представлена так:

$$\nabla^2 B = -\omega^2 + u\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right).$$

Члены, содержащие ν и местные ускорения, сокращаются вследствие неразрывности; таким образом,

$$\nabla^2 B = -(\operatorname{rot}\vec{V})^2 + \vec{V}\cdot\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V}.$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, получим $\nabla^2 B=0$.

В. Точные решения уравнений Навье — Стокса

56. Линейное установившееся движение. Хотя уравнения Навье — Стокса из-за наличия конвективных членов в общем случае не линейны, имеется особая группа потоков, при которых эти члены исчезают. Решение системы дифференциальных уравнений, состоящей из уравнения движения, уравнения неразрывности и граничных условий, для таких потоков обычно очень несложно, особенно при установившемся течении.

Можно показать, что для ламинарного течения между двумя горизонтальными пластинами, находящимися на расстоянии b друг от друга, одна из которых неподвижна, а другая движется в собственной плоскости с постоянной скоростью U в направлении x, скорости всюду направлены в сторону движения пластины и определяются выражением

$$u = \frac{Uy}{b}, \tag{131}$$

если использованы обозначения уравнений (123), причем y измеряется в направлении, перпендикулярном пластинам при их начальном положении. Течение, описываемое уравнением (131), обычно называют плоским потоком Куэтта (рис. 75, *а*). Для течения между двумя горизонтальными пластинами, созданного

постоянным градиентом пьезометрического напора $h=(p+\Omega\rho)/\gamma$ в направлении x, v и w снова исчезают, а u есть функция только y и определяется из первого равенства системы уравнений (123):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\gamma}{\mu}\cdot\frac{dh}{dx}.$$

Дважды интегрируя это уравнение и придавая постоянным интегрирования такие значения, которые удовлетворяют условие отсутствия проскальзывания по пластине, получаем:

$$u=-\frac{\gamma}{2\mu}\cdot\frac{dh}{dx}(by-y^2), \qquad (132)$$

где b — снова расстояние между пластинами.

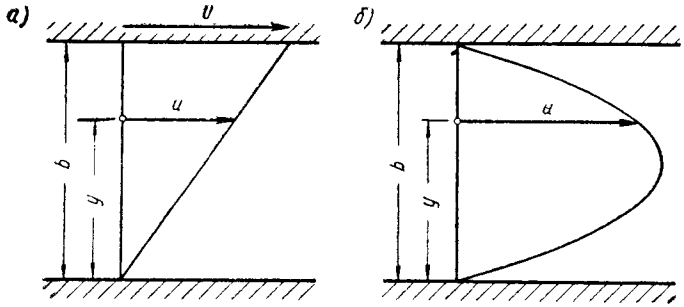


Рис. 75. Ламинарный поток между параллельными границами

Течение с таким распределением скоростей называется плоским пуазейлевским течением (рис. 75, *б*).

Действие скользящей опоры можно пояснить, рассматривая твердую плоскую поверхность конечной длины, слегка наклоненную по отношению к горизонтальной плоскости, находящейся над ней на небольшом расстоянии, как показано на рис. 76, где наклон и расстояние между плоскостями преувеличены. Скорость перемещения горизонтальной плоскости обозначена U. Из-за наклона нижней плоскости в жидкости, находящейся в клинообразном пространстве, при надвигании верхней плоскости в направлении x будет создаваться местный градиент давления (гидростатическим эффектом пренебрегаем), несмотря на равенство давлений на концах этого пространства. Приблизительное установление распределения давления базируется на вероятном допущении, что течение в любом поперечном сечении может быть получено комбинацией двух течений, рассмотренных в предшествующем пункте.

Из уравнений (131) и (132) следует, что расход на единицу ширины составляет

$$q=\int u\,dy=\frac{Ub}{2}-\frac{dp}{dx}\cdot\frac{b^3}{12\mu},$$

где (на основании рис. 76)

$$b = b_1 - \frac{x}{L}(b_1 - b_2) = b_1 - \alpha x.$$

Решение для градиента давления имеет вид

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu U}{(b_1 - \alpha x)^2} - \frac{12\mu q}{(b_1 - \alpha x)^3}.$$

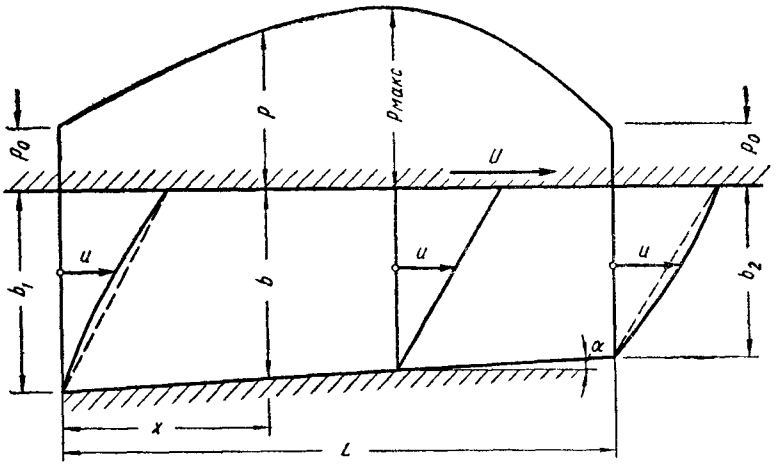


Рис. 76. Течение за скользящей опорой

Интегрирование его дает

$$p = \frac{6\mu U}{\alpha(b_1 - \alpha x)} - \frac{12\mu q}{2\alpha(b_1 - \alpha x)^2} + C$$

В последнем равенстве q и C могут быть определены по условию $p = p_0$ при $x = 0$ и $x = 1$ (гидростатическим эффектом пренебрегаем):

$$C = p_0 - \frac{6\mu U}{\alpha b_1} + \frac{12\mu q}{2\alpha b_1^2}; \quad q = \frac{U b_1 b_2}{b_1 + b_2}.$$

Итак, окончательно получим

$$p = p_0 + \frac{6\mu U x(L - x)(b_1 - b_2)}{L b^2 (b_1 + b_2)}.$$

Максимальное значение находится справа от средней точки опоры, как показано на рис. 76. Интегрирование интенсивности давления на длине L дает полную нормальную силу на единицу ширины опоры

$$P = \frac{6\mu U L^2}{b_2^2 (c-1)^2}\left(\ln c - 2\frac{c-1}{c+1}\right),$$

где $c = b_1/b_2$.

Очевидно, что P исчезает при параллельных плоскостях (для которых $c=1$) и делается отрицательным при c, меньшем единицы. Дифференцирование по c и приравнивание результатов нулю дает $c=2{,}2$ и соответствующее значение P:

$$P_{\text{макс}} = \frac{0{,}41\,\mu UL^2}{b_m^2},$$

где b_m — среднее расстояние между плоскостями.

Хотя результаты, приведенные в этом пункте, строго говоря, не являются точным решением уравнений Навье — Стокса, они иллюстрируют применение двух точных решений, рассмотренных в предыдущем пункте.

Ламинарное движение между концентрическими цилиндрами давно привлекало внимание исследователей. Течение несжимаемой жидкости, созданное вращением любого цилиндра с постоянной угловой скоростью Ω, известно как поток Куэтта. Распределение скорости для этого потока следует интегралу уравнения Навье — Стокса в цилиндрических координатах (r, θ, z)

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} = -\frac{\gamma}{\rho r}\cdot\frac{\partial h}{\partial \theta} + \nu\left(\nabla^2 v + \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2}\right),$$

где v обозначает компонент скорости в направлении увеличения θ. В этом случае приведенное равенство превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0.$$

Приняв решение в форме $v=r^n$ и применив $n=\pm 1$, с учетом граничных условий получим

$$v = \frac{\Omega r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(\frac{r_2^2}{r} - r\right);\quad u = 0 = w, \tag{133}$$

где r_1 — радиус вращающегося внутреннего цилиндра и r_2 — радиус неподвижного внешнего цилиндра.

В выражении (133) первый член в скобках представляет вращательное движение, которое является безвихревым, но диссипативным, в то время как второй член соответствует вращению твердого тела и является чисто вращательным, а поэтому недиссипативным. Уравнение Навье — Стокса для u служит только для определения изменения пьезометрического напора при изменении r, уравнение для w пренебрежимо.

Ламинарное течение в трубах также относится к явлениям вязкости, исследованным аналитически и экспериментально. Распределение скорости в трубе радиусом a, созданное продольным градиентом пьезометрического напора, получается непосредст-

венным интегрированием соответствующего уравнения Навье — Стокса в цилиндрических координатах:

$$w = -\frac{\gamma}{4\mu} \cdot \frac{dh}{dx}(a^2 - r^2). \qquad (134)$$

Такое течение известно как поток Хагена—Пуазейля. Точное решение имеется и для продольного потока через кольцевое пространство между концентрическими цилиндрами. Оно может быть наложено на поток Куэтта.

Уравнение движения для равномерного потока в направлении x по водоводу произвольного поперечного сечения таково:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\gamma}{\mu} \cdot \frac{\partial h}{\partial x}. \qquad (135)$$

Два других компонента скорости равны нулю, поэтому распределение давления в поперечном сечении является гидростатическим. Если поперечное сечение представляет равносторонний треугольник со сторонами b и если начало координат помещено в центр тяжести поперечного сечения, а ось y параллельна одной из сторон, то решение таково:

$$u = -\frac{\sqrt{3}\,\gamma}{6\mu b} \cdot \frac{dh}{dx}\left(z + \frac{b}{2\sqrt{3}}\right) \times$$

$$\times \left(z + \sqrt{3}\,y - \frac{b}{\sqrt{3}}\right)\left(z - \sqrt{3}\,y - \frac{b}{\sqrt{3}}\right). \qquad (136)$$

Оно удовлетворяет не только предыдущее уравнение, но также условие отсутствия проскальзывания на границах поперечного сечения. Для прямоугольного поперечного сечения со сторонами a и b в направлениях y и z предыдущее уравнение представится в виде:

$$u = \frac{\gamma}{2\mu} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} y(y - a) + \sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{m\pi y}{a}\left(A_m \operatorname{ch}\frac{m\pi z}{a} + B_m \operatorname{sh}\frac{m\pi z}{a}\right), \qquad (137)$$

где m — целое число. Это уравнение, очевидно, удовлетворяет граничные условия $u=0$ при $y=0$ и $y=a$. Коэффициенты A_m и B_m должны быть определены в соответствии с граничными условиями $u=0$ при $z=0$ и $z=b$. Если граничное условие при $z=0$ удовлетворяется, то

$$0 = \frac{\gamma}{2\mu} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} y(y - a) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\frac{m\pi y}{a},$$

откуда коэффициент A_m может быть определен по формуле Фурье:

$$A_m = \frac{\gamma}{\mu a} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \int_0^a y(y - a) \sin\frac{m\pi y}{a}\, dy = -\frac{2\gamma a^2}{\mu m^3 \pi^3} \cdot \frac{\partial h}{\partial x}(\cos m\pi - 1).$$

Граничное условие при $z=b=na$ требует, чтобы

$$0=\frac{\gamma}{2\mu}\cdot\frac{\partial h}{\partial x}\,y\,(y-a)+\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi y}{a}\,(A_m\,\mathrm{ch}\,mn\,\pi+B_m\,\mathrm{sh}\,mn\,\pi).$$

При сравнении с равенством для $z=0$ видим, что

$$A_m\,\mathrm{ch}\,mn\,\pi+B_m\,\mathrm{sh}\,mn\,\pi=A_m.$$

Отсюда

$$B_m=-\frac{A_m(\mathrm{ch}\,mn\,\pi-1)}{\mathrm{sh}\,mn\,\pi}.$$

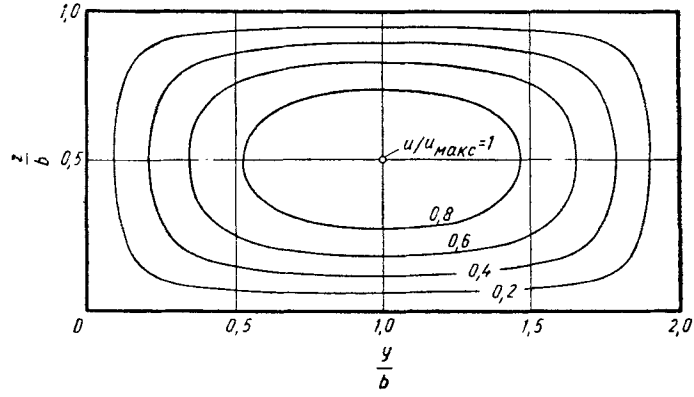


Рис. 77. Распределение скорости в трубопроводе прямоугольного поперечного сечения

После такого определения коэффициентов A_m и B_m решение уравнения (137) завершается. На рис. 77 показаны в безразмерном виде изотахи при $a/b=2$.

Задача ламинарного течения при продольном градиенте пьезометрического напора в длинном водоводе постоянного, но произвольного поперечного сечения в самом общем случае может решаться или конформным отображением, или методом релаксации. Для решения исходного уравнения движения удобно ввести новую переменную

$$u_1=u-\frac{\gamma}{4\mu}\cdot\frac{\partial h}{\partial x}\,(y^2+z^2),$$

которая удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}=0$$

и удовлетворяет граничным условиям в соответствии с отсутствием проскальзывания. Таким образом, если может быть найдено отображение поперечного сечения на круг, то задача сводится

к задаче Дирихле для круга. С другой стороны, метод релаксации, описанный в п. 39, теперь вполне доступен. Следует заметить, что в соответствии с исходным уравнением движения средняя скорость, взятая по малой окружности (в плоскости yz) вокруг произвольной точки в жидкости, всегда меньше, чем скорость в этой точке. Иными словами, тормозящее влияние стенок передается силами вязкости каждой точке в жидкости. Математически это выражается процессом релаксации, который является одним из методов последовательных приближений для оценки влияния и решающей роли граничных условий для всего потока.

Тот факт, что скорость ламинарного потока в трубе пропорциональна смещению тонкой мембраны (натянутой по поперечному сечению), объясняется превосходящим давлением с одной ее стороны. Это явление было впервые отмечено Прандтлем и получило название мембранной аналогии. Смещение ξ мембраны в направлении x определяется уравнением

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -\frac{\delta p}{T},$$

где δp — разность давлений до и после мембраны, а T—поверхностное натяжение. Подобие этого уравнения исходному уравнению движения очевидно. Так как граничные условия идентичны, u и ξ исчезают на границах поперечного сечения. Таким образом, правильно подобрав δp, можно добиться числового совпадения u и ξ.

57. Неустановившееся движение, описываемое линейными уравнениями. Задачи неустановившегося потока, для которого нелинейные слагаемые в уравнениях движения исчезают, в общем виде решаются использованием так называемых собственных функций. Решения получаются довольно просто для прямоугольного или круглого поперечных сечений.

Применение собственных функций лучше всего проиллюстрировать, рассматривая поток несжимаемой жидкости между двумя бесконечными параллельными пластинами, расположенными на расстоянии b одна от другой, движущийся под действием градиента пьезометрического напора в направлении x, приложенного в момент времени $t=0$. Уравнение движения при этом составляет

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\gamma}{\rho} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

если ось y перпендикулярна пластинам. При расположении начала координат на середине расстояния между пластинами асимптотическое распределение скорости дается следующей формой уравнения (132):

$$u_y = -\frac{\gamma}{2\mu} \cdot \frac{dh}{dx}\left(\frac{b^2}{4} - y^2\right).$$

Скорость здесь обозначена $u_у$, так как она относится к решению установившегося движения. При $u_н = u - u_у$, обозначающем неустановившуюся часть u, приведенное дифференциальное равенство принимает вид

$$\frac{\partial u_н}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_н}{\partial y^2}.$$

Если движение начинается из состояния покоя, то вначале $u_н$ должно быть равно $-u_у$. Разделением переменных t и y можно найти, что $\cos my \exp(-m^2\nu t)$ удовлетворяет приведенному дифференциальному уравнению. Так как $u_н$ должно исчезать при $y = \pm b/2$, m может принимать только значения $(2n+1)\pi/b$, где n — любое не отрицательное целое число, при котором удовлетворяются граничные условия. Эти величины n называются собственными величинами и функции $\cos(2n+1)\pi y/b$ — собственными функциями. Так как сумма

$$u_н = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{(2n+1)\pi y}{b} e^{-(2n+1)^2\pi^2\nu t/b} \qquad (138)$$

удовлетворяет уравнению движения и граничным условиям, остается только определить A_n с учетом, что $u_n = -u_у$ при $t = 0$. Но из условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{(2n+1)\pi y}{b} = -u_у$$

коэффициент Фурье A_n получается по формуле

$$A_n = \frac{4}{b} \int_0^{b/2} -u_у \cos \frac{(2n+1)\pi y}{b} dy.$$

Таким образом, задача решена полностью. При t, приближающемся к бесконечности, u_n согласно уравнению (138) приближается к нулю и u приближается к решению для установившегося движения $u_у$. Эпюры скоростей в различных стадиях развития установившегося движения показаны на рис. 78.

В случае прямоугольного поперечного сечения применяется тот же метод, за исключением того, что используется двойной ряд Фурье. Для круглого и эллиптического поперечных сечений собственные функции являются соответственно функциями Бесселя и функциями Мату. Последние пока еще не табулированы. Метод решения их, однако, идентичен показанному на примере течения между параллельными пластинами.

Если градиент пьезометрического напора произвольно меняется во времени, только что найденное решение может быть использовано для построения искомых решений по методу наложения Дюамеля, являющемуся обычным методом в теории тепло-

проводности. Согласно методу Дюамеля, если распределение скорости при внезапном приложении и постоянном поддержании единичного градиента дано функцией $\Phi(y, z, t)$, то для переменного градиента $f(t)$ это распределение составляет

$$u = \int_0^t \Phi(y, z, t-\tau)\frac{df(\tau)}{d\tau}\,d\tau + f(0)\,\Phi(y, z, t). \qquad (139)$$

Смысл уравнения (139) таков: площадь под кривой функции $f(\tau)$ может рассматриваться как состоящая из полубесконечных

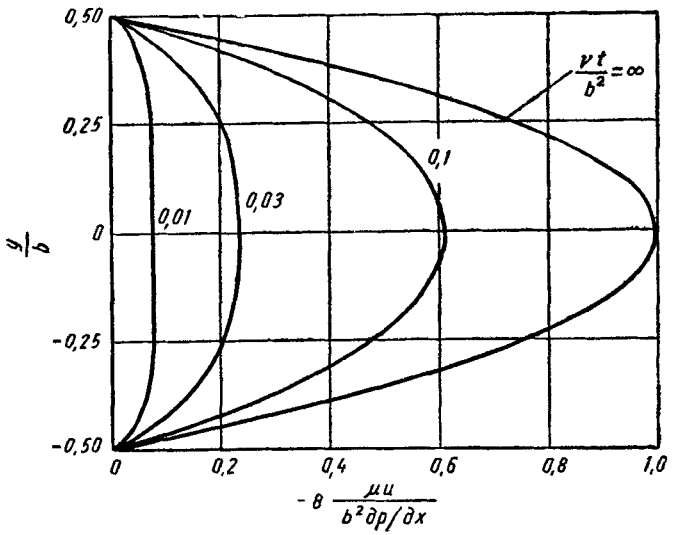


Рис. 78. Установление ламинарного движения между параллельными границами

полос постоянной ширины. К полосе шириной $f(0)$ добавляются через интервалы времени τ полосы шириной $df(\tau)$ или $\frac{df(\tau)}{d(\tau)}\,d\tau$. Решение $f(0)\Phi(y, z, t)$ соответствует полосе шириной $f(0)$, а решение $\Phi(y, z, t-\tau)df(\tau)$ — полосе бесконечно малой ширины $df(\tau)$, начинающейся при $t=\tau$. Сложение всех полос дает уравнение (139). Метод Дюамеля очень полезен, так как во всех практических случаях действующие силы не только прилагаются постепенно, но и изменяются произвольно во времени.

58. Движение, описываемое нелинейными уравнениями. Если нелинейные слагаемые в уравнениях Навье—Стокса не исчезают, получить точное решение, удовлетворяющее условию отсутствия проскальзывания на твердых границах, обычно очень трудно. Известны только пять существенно различных и физически

значимых решений такого рода. Самые важные из них принадлежат Блазиусу (1908), Хейменцу (1911) и Гамелю (1917). Гамель при исследовании вращающегося потока, линии тока которого являются также линиями тока соответствующих потенциальных потоков, столкнулся с задачей установившегося двухмерного течения вязкой жидкости между непараллельными пластинами. Вскоре после этого Карман опубликовал преобразования, которые сводили задачу о потоке, созданном вращающимся диском, к системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений; они были решены Кокраном более чем через десять лет. Как будет показано, расчеты Кокрана хорошо подтвердились для ламинарной области экспериментальными работами Рябушинского, проводившего исследования также и в турбулентной области. Поток между двумя вращающимися параллельными дисками был сравнительно недавно рассмотрен Шульцем-Грюновым и Батчелором (1951), но так как его решение может быть получено из преобразований Кармана, то это исследование нельзя признать существенно новым. Задача о двухмерном потоке на плоской пластине была полностью решена Блазиусом и Хейменцом, а решение для соответствующей осесимметричной задачи было подобным же образом получено Хоманном. Точное решение для круглой ламинарной струи было выполнено совсем недавно Сквайром, это решение является математической аналогией решения Гамеля для потока между непараллельными пластинами. Однако его независимое решение приблизительно на год раньше было дано в кратком виде Ятсеевым как одно из точных решений уравнения Навье– Стокса.

Тот факт, что все полученные точные решения подтверждают допущения теории пограничного слоя (см. главу VII) для наиболее важной области течения, является, возможно, наиболее существенным результатом этих решений. Из-за недостатка места здесь приводятся только три решения: Гамеля — вследствие его непосредственного отношения к явлению отрыва; Кармана и Кокрана — так как оно иллюстрирует роль центробежных сил; Хейменца — благодаря его тесной связи с решениями типа пограничного слоя для потока позади тела произвольной формы.

Течение между непараллельными пластинами. Как неоднократно отмечалось, в напорном потоке жидкости, протекающей по трубопроводу, отрыва обычно не происходит при сужении (за исключением случая резкого изменения формы границ), но он почти всегда наблюдается при расширении. Это несомненно объясняется тем фактом, что при сжатии потока давление уменьшается, а при расширении его давление увеличивается. Так как задача о потоке между непараллельными пластинами имеет строгое решение, желательно привести его для лучшего представления механизма отрыва. Как будет показано дальнейшим анализом, сходящиеся ламинарные потоки между непараллельными пластинами всегда свободны от отрыва, тогда как расходящиеся

ламинарные потоки показывают отрыв, если угол между пластинами превышает предел, зависящий от критического числа Рейнольдса.

Для анализа задачи удобно воспользоваться цилиндрическими координатами, у которых ось z является линией пересечения границ, r — расстояние от этой линии, а θ измеряется от плоскости, разделяющей пополам двухгранный угол, образованный границами. Если поток в дополнение к его двухмерности является чисто радиальным, $v=w=0$, и интегрирование уравнения неразрывности $d(ru)/dr=0$ непосредственно дает $u=f(\theta)/r$. Соответствующие уравнения Навье—Стокса тогда имеют вид

$$-\frac{f^2}{r^3}=-\frac{\gamma}{\rho}\cdot\frac{\partial h}{\partial r}+\nu\frac{f''}{r^3};$$

$$0=-\frac{\gamma}{\rho r}\cdot\frac{\partial h}{\partial\theta}+2\nu\frac{f'}{r^3},$$

где штрихи представляют последовательное дифференцирование функции $f(\theta)$ по θ. Из этих двух равенств получается

$$\gamma h=2\mu\frac{f}{r^2}+\frac{k\mu}{2r^2}+C. \tag{140}$$

Здесь k и C — постоянные. Из всех трех уравнений следует, что

$$f''+4f+\frac{f^2}{\nu}+k=0.$$

Интегрирование этого выражения после умножения на $2f'$ дает

$$f'^2=\frac{2}{3\nu}(g-3\nu kf-6\nu f^2-f^3), \tag{141}$$

где g — еще одна постоянная интегрирования. Решение этого уравнения дается некоторой эллиптической функцией — функцией Вейерштрасса. Основные свойства потока, однако, могут быть рассмотрены и без знания этой частной функции.

Две постоянные интегрирования в уравнении (141) и третья постоянная, появляющаяся после его интегрирования, определяются из условий

$$f(\pm\alpha)=0,$$

где α — половина угла, образованного твердыми границами, и интегрального условия

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}f(\theta)\,d\theta=q.$$

Не приводя полного решения, ограничимся рассмотрением задачи с акцентировкой внимания на явлении отрыва пограничного слоя.

На границах $f=0$, так что из уравнения (141) получаем

$$f'^2(\pm\alpha)=\frac{2g}{3\nu}.$$

Таким образом, g не может быть отрицательным. Для чисто расходящегося потока f всегда положительно. Если $f=f_1$ при $\theta=0$, тогда, поскольку $f'(0)=0$ по условиям симметрии, отсюда следует, что

$$g-3\nu kf_1-6\nu f_1^2-f_1^3=0.$$

Решив это уравнение для $3\nu k$ и подставив результат в уравнение (141), получим

$$f'^2=\frac{2}{3\nu}(f_1-f)\left[f^2+f(6\nu+f_1)+\frac{g}{f_1}\right]$$

или после интегрирования по f

$$\alpha=\frac{3\nu}{2}\int_0^{f_1}\frac{df}{(f_1-f)^{1/2}[f^2+f(6\nu+f_1)+g/f_1]^{1/2}}.$$

Так как g, f и f_1 — все положительны, $f_1\geqslant f$ из предыдущего уравнения. Таким образом, интеграл всегда положителен. Следовательно, наибольшая возможная величина α при данных числах Рейнольдса $\mathrm{Re}=f_1/\nu=ru_{\text{макс}}/\nu$ соответствует $g=0$ или из равенства $f'^2(\pm\alpha)=2h/3\nu$ — состоянию неизбежности отрыва. Чтобы найти $\alpha_{\text{макс}}$ в зависимости от Re, g в последнем уравнении принимается равным нулю, а f равным f_1 (λ — просто безразмерная переменная):

$$\alpha_{\text{макс}}=\sqrt{\frac{3}{2\,\mathrm{Re}}}\int_0^1\frac{d\lambda}{(1-\lambda)^{1/2}[\lambda^2+\lambda(1+6/\mathrm{Re})]^{1/2}}$$

или при $\lambda=\cos^2\psi$

$$(\mathrm{Re}+3)^{1/2}\alpha_{\text{макс}}=\sqrt{3}\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\left[1-\frac{1}{2}(1+3/\mathrm{Re})^{-1}\sin^2\psi\right]^{1/2}}. \quad (142)$$

Для очень больших значений Re это сводится к

$$\mathrm{Re}^{1/2}\alpha_{\text{макс}}=\sqrt{3}\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\psi\right)^{1/2}}=3{,}21. \quad (143)$$

Уравнение (143) представлено графически на рис. 79. Интересно отметить, что если Re очень мало, уравнение (142) дает

$$\alpha_{\text{макс}}=\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда, если границы образуют угол больший, чем π, отрыв происходит независимо от величины Рейнольдса.

Для чисто сходящегося потока положение совершенно противоположное. Если уравнение (141) переписать в форме

$$f'^2 = \frac{2}{3\nu}(f_1 - f)(f_2 - f)(f_3 - f), \tag{144}$$

где f_1, f_2, f_3 — корни правой части равенства, то получим

$$f_1 + f_2 + f_3 = -6\nu; \quad f_2 f_3 + f_3 f_1 + f_1 f_2 = 3k\nu;$$
$$f_1 f_2 f_3 = g.$$

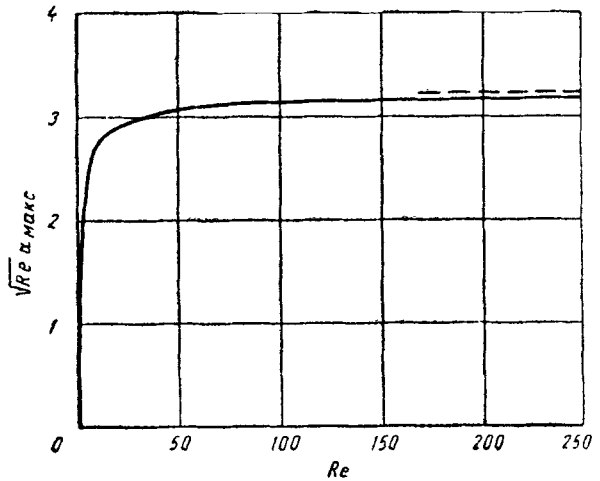


Рис. 79. Угол разделения для диффузора

Так как g не может быть отрицательным, один из корней, например f_1, не отрицателен. Из трех последних уравнений находим, что два других корня должны быть или комплексно сопряженными, или оба действительными и отрицательными. Однако, когда $\theta = 0$, f' исчезает, а f становится отрицательным, так как $u = f/r$ и рассматривается сужающийся поток. По уравнению (144) значение f должно быть равно f_2 или f_3. Таким образом, как f_2, так и f_3 — действительны и отрицательны. Далее, если $f_2 > f_3$, то f должно находиться между f_2 и нулем, потому что иначе правая сторона уравнения (144) становится отрицательной. Таким образом, когда $\theta = 0$, $f = f_2$, так как u при $\theta = 0$ должно быть максимальным.

Теперь, если

$$\mathrm{Re} = -\frac{f_2}{\nu} = \frac{r|u|_m}{\nu}; \quad \frac{f}{f_2} = \lambda;$$
$$\frac{f_3}{f_2} = \lambda_3; \quad -\frac{f_1}{f_2} = \lambda_1,$$

где λ — просто новая переменная, то первое из трех предыдущих уравнений записывается так:

$$1 - \lambda_1 + \lambda_3 = \frac{6}{\mathrm{Re}}, \qquad (145)$$

а интегрирование уравнения (144) дает

$$\mathrm{Re}^{1/2}\theta = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{\lambda}^{1} \frac{d\lambda}{[(1-\lambda)(\lambda_3-\lambda)(\lambda_1-\lambda)]^{1/2}}.$$

Так как λ_3 очень близко к единице при сколь угодно больших величинах $\mathrm{Re}^{1/2}\alpha$, то значение λ всегда положительно (откуда значение f отрицательно). Поэтому при заданном угле α отрыва не произойдет даже при очень больших числах Рейнольдса, или, иначе, при заданном числе Рейнольдса α может быть как угодно велико без угрозы отрыва жидкости от границы. Если (для больших чисел Рейнольдса) λ_3 близко к единице, то, как видно из уравнения (145), λ_1 должно быть близко к двум. При $\lambda_3 = 1$ и $\lambda_1 = 2$ имеем

$$\mathrm{Re}^{1/2}(\alpha - \theta) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{(1-\lambda)(2-\lambda)^{1/2}},$$

что для больших чисел Рейнольдса дает

$$\lambda = \frac{f}{f_2} = \frac{u}{u_m} = 3\,\mathrm{th}^2\left[\sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{2}}(\alpha - \theta) + \beta\right] - 2, \qquad (146)$$

где $\mathrm{th}^2\beta = {}^2/_3$, так что $\beta = 1{,}146$. Уравнение (146) графически изображено на рис. 80. Как видно из рисунка, при больших величи-

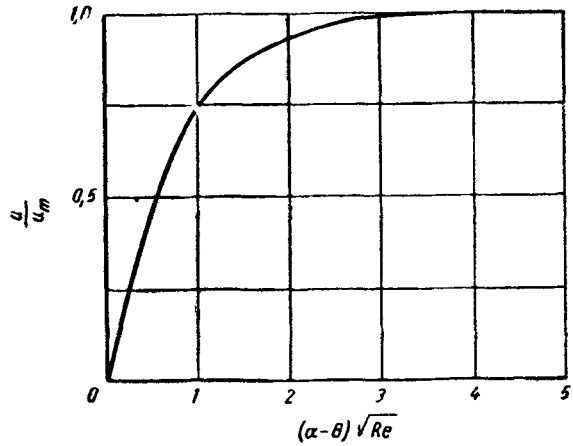


Рис. 80. Распределение скорости в конфузоре

нах Re значения u и u_m почти равны, за исключением тонкого клинообразного слоя у каждой стенки, толщина которого пропорциональна $\mathrm{Re}^{-1/2}$. Таким образом, для сужающегося потока при больших числах Рейнольдса течение существенно потенци-

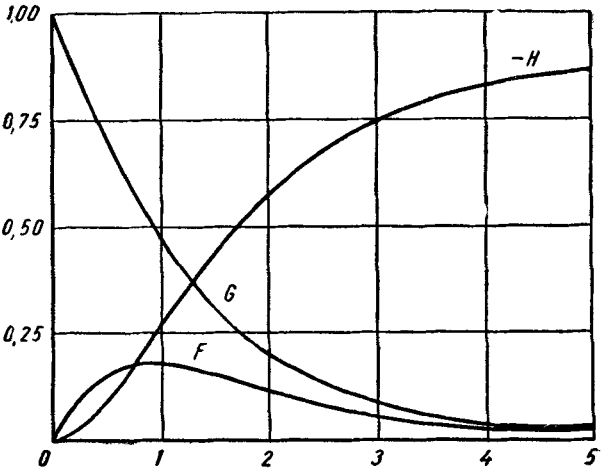


Рис. 81. Безразмерные компоненты скорости в ламинарном потоке у вращающегося диска

ально, за исключением областей, прилегающих к границам, где концентрируются вихри. Далее, для $\lambda_3=1$ и $\lambda_1=2$ из уравнений, выведенных из равенства (144), найдено, что $k\nu=-f_2^2$; приняв постоянную C в уравнении (140) равной нулю, получим

$$\frac{\gamma h}{\rho}=-\frac{f_2^2}{2r_2^2}\left[1+O\left(\mathrm{Re}^{-1}\right)\right],$$

или

$$\frac{\gamma h}{\rho}+\frac{1}{2}u_m^2=O\left[\frac{u_m^2}{\mathrm{Re}}\right],$$

где $O[u_m^2/\mathrm{Re}]$ представляет величину порядка u_m^2/Re, исчезающую при больших числах Рейнольдса. Это значит, что к потоку с большими числами Рейнольдса, за исключением областей вблизи границ, применимо уравнение Бернулли. Этот факт и то, что основная часть потока потенциальна при больших числах Рейнольдса, оправдывают допущения пограничного слоя, принятые в следующей главе.

Ламинарное течение, созданное вращающимся диском. Если бесконечная пластина вращается с постоянной угловой скоростью Ω в вязкой жидкости, заполняющей полубесконечное пространство вокруг нее, то жидкость вблизи пластины будет вра-

щаться вместе с ней. Это, очевидно, объясняется оттоком жидкости от оси вращения потока вследствие возникновения центробежной силы. Для удовлетворения условия неразрывности жидкость из более отдаленных областей будет спускаться к пластине. Если воспользоваться цилиндрическими координатами, совместив ось вращения с $r=0$, а плоскость пластины — с плоскостью $z=0$, то граничные условия состоят:

$$u = 0;\ v = r\Omega;\ w = 0 \quad \text{при } z = 0;$$

$$u = 0;\ v = 0 \text{ при } z = \infty.$$

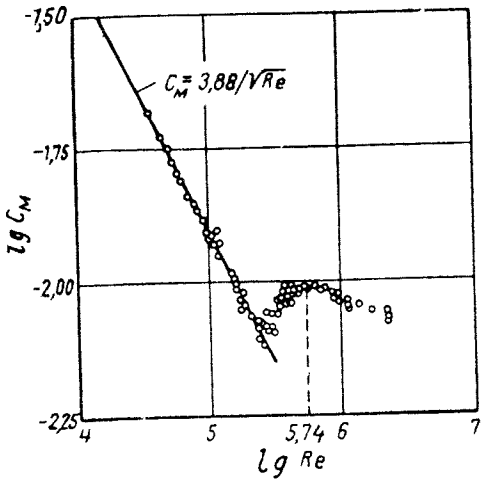


Рис. 82. Коэффициент момента для вращающегося диска

Карман принял, что

$$u = r\Omega F(\zeta);\quad v = r\Omega G(\zeta);$$

$$w = (\nu\Omega)^{1/2} H(\zeta);$$

$$\gamma h = -\rho\nu\Omega P(\zeta),$$

где

$$\zeta = \left(\frac{\Omega}{\nu}\right)^{1/2} z.$$

Из уравнений Навье—Стокса получаются выражения:

$$\left.\begin{aligned} F^2 - G^2 + F'H &= F'';\\ 2FG + G'H &= G'';\\ HH' &= P' + H'', \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

в которых штрихи обозначают дифференцирование по ζ. Уравнение неразрывности принимает вид

$$2F + H' = 0, \tag{148}$$

а граничные условия становятся такими:

$$F = 0;\ G = 1;\ H = 0 \text{ при } \zeta = 0;$$

$$F \to 0;\ G = 0, \text{ когда } \zeta \to \infty.$$

Система дифференциальных уравнений (147) и (148) и граничных условий была решена Кокраном способом последовательного приближения. Результаты приведены на рис. 81, откуда видно, что F и G довольно быстро приближаются к нулю. Следовательно, если $\nu\Omega$ мало, $u/\Omega r$ и $v/\Omega r$ существенны только в тонком слое вблизи границы при толщине слоя порядка

$(\nu/\Omega)^{1/2}$. Кроме того, интегрирование третьего уравнения из системы (147) показывает, что

$$P(\zeta) - P(0) = \frac{1}{2} H^2(\zeta) - H'(\zeta) = \frac{1}{2} H^2 + 2F,$$

так как $H(0)=0$, $H'(0)=0$ по уравнению (148) и $F(0)=0$. Таким образом, разность $\gamma h = -\rho\nu\Omega P$ имеет величину порядка $\rho\nu\Omega$ не только в пограничном слое потока, но и во всей жидкости. При малых значениях $\rho\nu\Omega$ пьезометрический напор везде существенно постоянен.

Результатами Кокрана можно воспользоваться для расчета момента вращающегося диска радиусом a, если пренебречь краевым эффектом. Касательное напряжение на диске дается выражением

$$\tau_{z\theta} = \rho\nu \frac{\partial v}{\partial z} = \rho (\nu\Omega^3)^{1/2} rG'(0),$$

так что момент с одной стороны диска составляет

$$-\int_0^a 2\pi r^2 \tau_{z\theta}\, dr = -\frac{1}{2} \pi a^4 \rho (\nu\Omega^3)^{1/2} G'(0).$$

Полный момент (с обеих сторон), выраженный через число Рейнольдса $\mathrm{Re} = a^2\Omega/\nu$, равен

$$M = -\pi G'(0) \frac{\rho a^5 \Omega^2}{\mathrm{Re}^{1/2}},$$

а безразмерный коэффициент момента составляет

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho a^5 \Omega^2} = -\frac{2\pi G'(0)}{\mathrm{Re}^{1/2}} = \frac{3{,}88}{\mathrm{Re}^{1/2}}, \qquad (149)$$

так как $G'(0) = 0{,}616$. Последнее уравнение хорошо подтверждается экспериментальными данными, полученными Рябушинским при ламинарном режиме (рис. 82).

Ламинарное течение по бесконечной пластине. Если застойную точку двухмерного ламинарного потока на бесконечной пластине принять за начало координат, где y показывает расстояние от пластины, x — расстояние вдоль пластины в плоскости потока, тогда уравнения (123) и уравнение неразрывности будут решаться при граничных условиях $u = v = 0$, когда $y = 0$, и $u = 0$, когда $x = 0$.

По аналогии с безвихревым потоком можно принять, что

$$-\frac{\gamma}{\rho} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = \beta^2 x,$$

где β — производная постоянная с размерностью $[T^{-1}]$, характеризующая общую интенсивность потока. Тогда первое уравнение движения будет иметь такой вид:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\beta^2 x+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Если использовать функцию тока ψ, то выражения

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}\quad\text{и}\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

автоматически удовлетворяют уравнение неразрывности. Из выражений

$$\psi=(\nu\beta)^{1/2}xf(\eta)\quad\text{и}\quad\eta=(\nu\beta)^{1/2}y$$

следует, что

$$u=\beta x f'(\eta)\quad\text{и}\quad v=-(\nu\beta)^{1/2}f(\eta),\qquad(150)$$

так что первое уравнение движения записывается

$$f'^2-ff''=1+f'''.$$

Граничные условия таковы: $f(0)=0$; $f'(0)=0$. Если, принимая во внимание соответствие с безвихревым потоком, $f'(\infty)$ должно быть конечным, то из уравнения (150) следует, что $f'(\infty)=1$, так что $u\approx u_1-\beta x$, где u_1 обозначает $u(\infty)$. Предыдущее уравнение с тремя граничными условиями было получено Блазиусом и численно проинтегрировано Хейменцом. Уточненные Ховарцем результаты показаны на рис. 83. Из рисунка видно, что f', а следовательно, u/x существенно постоянно везде, кроме слоя постоянной толщины. Это постоянство толщины объясняется уменьшением давления вдоль пластины по течению потока, компенсирующим нормальный рост толщины, вызываемый вязкостью. С учетом уравнения (150) второе уравнение движения становится таким:

$$v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\gamma}{\rho}\cdot\frac{\partial h}{\partial y}+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

что вместе с ранее допущенным соотношением дает

$$\frac{\gamma h}{\rho}=C-\frac{1}{2}(u_1^2+v^2)+\nu\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Отсюда и из второго уравнения (150) видно, что в слое, где f' значительно отличается от единицы, давле

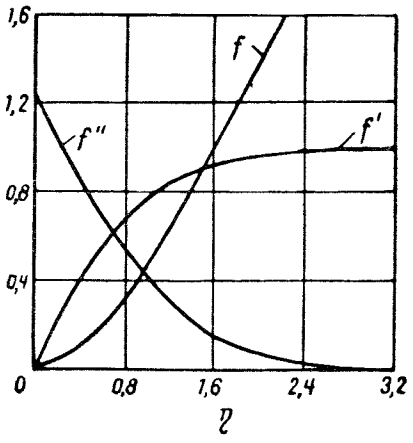


Рис. 83. Безразмерные компоненты скорости в ламинарном потоке на бесконечной пластине

ние (не учитывая гидростатического эффекта) существенно постоянно при малом ν. Выводы настоящего пункта еще раз подтверждают правильность допущений теории пограничного слоя, а также влияние уменьшения давления на рост пограничного слоя, что будет рассмотрено далее.

Пример 17. Бесконечная пластина внезапно начинает двигаться в своей плоскости с постоянной скоростью U. Показать, что вязкая жидкость вокруг пластины будет двигаться со скоростью $u=A\int_0^{\eta} e^{-\eta^2}\,d\eta+B$, где $\eta=y/2\sqrt{\nu t}$, а A и B подлежат определению. Выяснить порядок толщины слоя, приведенного в движение за время t, и сравнить его с результатами анализа размерности.

Допускается, что равномерное движение жидкости, касающейся пластины, распространяется так, что $u=f(y, t)$; $v=0$; $w=0$. Уравнения Навье—Стокса сводятся при этом к равенству

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

так как градиент давления равен нулю. Это уравнение удовлетворяется заданным u, но должно быть проверено граничными условиями. Так, при $y=0$ значение $u=U$ в любой момент времени t_0. Кроме того, при $y=0$ величина $\eta=0$ и $\int_0^0 e^{-\eta^2}\,d\eta=0$, так что $B=U$. При $y=\infty$ значение $u=0$. Но тогда $0=\sqrt{\pi}\,A/2+U$ и отсюда $A=-U$. Окончательно получаем

$$u=U(1-\operatorname{erf}\eta).$$

Так как скорость асимптотически уменьшается до нуля при $y=\infty$, то допускается, что слой, приведенный в движение, кончается там, где $u=0{,}01\,U$, что соответствует $\operatorname{erf}\eta=0{,}99$ и $\eta\approx 1{,}8$. Поскольку $\eta=y/2\sqrt{\nu t}$, то $\delta=3{,}6\sqrt{\nu t}$.

Анализ размерности даст такое функциональное соотношение только при допущении, что $\delta=f(\rho, \mu, t)$, т. е., что скорость пластины не влияет на скорость распространения возмущения.

Г. Приближенные решения уравнений Навье—Стокса

59. Очень медленное движение — решение Стокса для падающего шара. Приближенные решения уравнений Навье—Стокса могут быть грубо разделены на четыре категории. К первой относятся те случаи, когда геометрия границ позволяет использовать существующие точные решения для конкретных случаев. Во второй категории движение жидкости происходит так медленно, что в уравнении движения можно пренебречь инерционными слагаемыми. Если движение не настолько медленно, чтобы это было справедливо, то иногда удается линеаризировать уравнения Навье—Стокса и таким образом получить решение. Такие решения образуют третью категорию. В некоторых задачах инерционными слагаемыми пренебречь нельзя, не внеся значительной ошибки, но одно из слагаемых, включающих вязкость, мало по сравнению с другими; решения, полученные пренебрежением этим слагаемым, относятся к четвертой категории.

Одно из решений первой категории было приведено в связи с точными решениями уравнений Навье—Стокса. В этом и в последующих разделах будет рассмотрено по одному или по два характерных случая, относящихся к каждой из оставшихся трех категорий. Так как основное значение придается методологии, для рассмотрения выбраны только типичные случаи, иллюстрирующие метод и интересные с практической точки зрения.

Как показал Стокс более 100 лет назад, конечная скорость U твердого шара, медленно падающего в бесконечной жидкости, зависит от радиуса шара a, разницы удельных весов твердого тела и жидкости $\Delta\gamma$ и вязкости μ. Плотность жидкости не учитывается, ибо движение шара предполагается очень медленным, так что ускорение жидких частиц практически равно нулю и инерцией можно пренебречь.

Если теперь к величинам U, a, $\Delta\gamma$ и μ применить анализ размерностей, получаемый единственный безразмерный параметр может быть назван числом Стокса

$$S = \frac{U\mu}{a^2\Delta\gamma}.$$

Так как никакой другой параметр здесь не участвует, число Стокса, как показано в главе I, должно быть постоянным. Тот факт, что одного анализа размерностей достаточно для определения закона скорости падения U, за исключением постоянной, указывает на его целесообразность. Использование этого метода для данной задачи, однако, ограничено тем, что число Стокса может быть определено только экспериментально или путем математического анализа течения.

Для удобства обработки на поток накладывается равномерная скорость, равная по величине и противоположная по направлению скорости падения шара. Если в уравнениях (128) пренебречь нелинейными членами, описывающими диффузию вихрей, эти уравнения сводятся к простому виду

$$\nabla^2 \vec{\omega} = 0. \tag{151}$$

При использовании сферических координат (R, ϑ, φ) с вертикальной полярной осью (направление скорости в бесконечности) и наблюдении, что в силу симметрии ни компоненты скорости, ни компоненты вихря не зависят от φ, u и v могут быть выражены через функцию тока Стокса в виде:

$$u = \frac{\csc\vartheta}{R^2}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta};\quad v = -\frac{\csc\vartheta}{R}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial R},$$

а соответствующие компоненты вихря в сферических координатах (из приложения) составят

$$\xi = 0 = \eta;\quad \zeta = -\frac{1}{R\sin\vartheta}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2} - \frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{R^2}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right).$$

Выражение $\nabla^2\vec{\omega}$ в сферических координатах имеет такую же форму, как выражение для $\nabla^2\vec{V}$ в уравнениях Навье—Стокса; компоненты его даны в уравнении (125). Таким образом, уравнение (151) может быть записано так:

$$\frac{1}{R^2}\cdot\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\zeta}{\partial R}\right)+\frac{\csc\vartheta}{R^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\right)-\frac{\zeta\csc^2\vartheta}{R^2}=0.$$

Обозначая через $F(R, \vartheta)$ величину $R\zeta\sin\vartheta$, подставляя вместо ζ его выражение через F и проводя необходимые упрощения, получим

$$\frac{\partial^2F}{\partial R^2}+\frac{1}{R^2}\cdot\frac{\partial^2F}{\partial\vartheta^2}-\frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{R^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial\vartheta}=0.$$

Отсюда, подставив вместо F его выражение через ψ, данное в конце предыдущего пункта, найдем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2}+\frac{1}{R^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}-\frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{R^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2\psi=0. \qquad (152)$$

Решение уравнения (152) разделением переменных дает

$$\psi=-\sin^2\vartheta f(R),$$

где $f(R)$ удовлетворяет дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dR^2}-\frac{2}{R^2}\right)^2 f(R)=0.$$

Решением последнего уравнения является

$$f(R)=\frac{A}{R}+BR+CR^2+DR^4,$$

где

$$C=-\frac{1}{2}U;\ D=0\ \left(\text{по условию при } R=\infty, \text{ т. е. } \psi=\frac{1}{2}UR^2\sin^2\vartheta\right);\quad A=-\frac{1}{4}Ua^3;\quad B=\frac{3}{4}Ua$$

(по условию отсутствия проскальзывания на поверхности шара) Компоненты скорости в направлении R и ϑ соответственно равны

$$u=\frac{\csc\vartheta}{R^2}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}=U\cos\vartheta-2\left(\frac{A}{R^3}+\frac{B}{R}\right)\cos\vartheta;$$

$$v=-\frac{\csc\vartheta}{R}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial R}=-U\sin\vartheta-\left(\frac{A}{R^3}-\frac{B}{R}\right)\sin\vartheta.$$

Таким образом получено распределение скорости для очень медленного движения шара.

Результирующая сила F, действующая на поверхность шара симметрично относительно полярной оси z, дается выражением

$$F=2\pi a^2\int_0^{\pi}\tau_{R_z}\sin\vartheta\,d\vartheta,$$

где τ_{R_z}, как обычно, сила на единицу площади сферической поверхности, действующая в направлении z; величина этой силы может быть получена по формуле

$$\tau_{R_z} = \sigma_R \cos\varphi - \tau_{R_\varphi} \sin\varphi.$$

Подстановка значений σ_R и τ_{R_φ}, выраженных в сферических координатах (см. п. 54), дает

$$\tau_{R_z} = -\gamma h \cos\varphi + 2\mu \cos\varphi \frac{\partial u}{\partial R} - \mu \sin\varphi \left(\frac{\partial v}{\partial R} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{R} \right).$$

Если величины A, B, u, v и τ_{R_z} подставить в интеграл для F, вклады от трех членов в выражении для τ_{R_z} составят соответственно $2\pi\mu aU + \frac{4}{3}\pi a^3 g\rho$, 0 и $4\pi\mu aU$. Таким образом:

$$F = 6\pi\mu aU + \frac{4}{3}\pi a^3 g\rho.$$

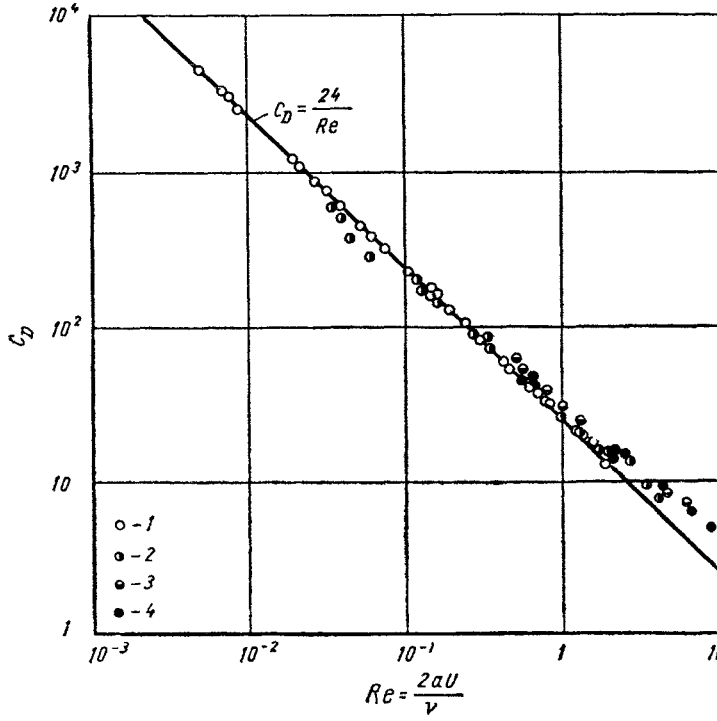


Рис. 84. Коэффициент лобового сопротивления для малых сфер

1 — Арнольд (металлические шарики в сурепном масле); *2* — Аллен (воздушные пузырьки в анилине); *3* — Аллен (восковые пузырьки в аиилине); *4* — Аллен (воздушиые пузырьки в воде)

Так как движение шара равномерно, силы, действующие на него, уравновешены. Гидродинамическая сила составляет $6\pi\mu aU$, гидростатическая сила $-\frac{4}{3}\pi a^3\gamma$ и вес шара $-\frac{4}{3}a^3\gamma_s$, где γ_s — удельный вес шара. Отсюда

$$\frac{4}{3}\pi a^3\,\Delta\gamma = \frac{4}{3}\pi a^3\,(\gamma_s - \gamma) = 6\pi\mu aU$$

или

$$S = \frac{U\mu}{a^2\,\Delta\gamma} = \frac{2}{9} \qquad (153)$$

Число Стокса определено. Уравнение (153), часто применяемое в седиментальном анализе твердых частиц для установления их размера, представляет собой так называемый закон Стокса.

Число Стокса можно определить, причем с тем же результатом, приравняв скорость диссипации энергии и скорость совершения работы гравитационными (вес минус плавучесть) силами на шаре. Как видно из рис. 84, где $C_D = 2F/\pi a^2\rho U^2 = 12\nu/aU$, закон Стокса хорошо подтверждается экспериментами при числах Рейнольдса, меньших 0,1. Следовательно, он представляет собой одно из значительных достижений классической гидродинамики.

60. Ламинарные следы. Приблизительное решение целого ряда задач может быть получено при линеаризации уравнений Навье—Стокса. Например, влияние инерции в предыдущей задаче может быть частично учтено, если принять конвективные ускорения в направлениях x, y и z равными соответственно $Ud u/dx$, $Ud v/dx$ и $Ud w/dx$. Осин и Лэм воспользовались этим подходом к решению Стокса для доказательства того, что характер движения в следе отличается от характера движения перед препятствием. Можно показать, что решение Осина — Лэма дает лучшее приближение, чем решение Стокса, всюду, за исключением области поверхности шара, но и здесь, хотя степень приближения уменьшается, однако все еще достаточна. Довольно любопытно, что решение Осина—Лэма отличается от решения Стокса только в определении характера потока; закон Стокса, данный уравнением (153), совсем не меняется из-за частичного учета влияния инерции. Это возможно объясняется тем фактом, что несоответствие формы потока решению Стокса на больших расстояниях от шара не оказывает существенного влияния на характер движения в непосредственной близости от шара, так что абсолютное значение ошибки вследствие пренебрежения влиянием инерции в отдаленных областях мало. Чтобы избежать использования того же самого явления потока для иллюстрации метода линеаризации, решение Осина—Лэма детально не будет рассматриваться. Вместо этого используется приближенное решение для ламинарного следа.

Если течение в следе носит установившийся характер, то на достаточном расстоянии ниже по течению давление почти постоянно, поперечная скорость v мала по сравнению с продольной скоростью u, продольная скорость мало отличается от скорости свободного потока U, и изменение скорости u в продольном направлении мало по сравнению с ее изменением в поперечном направлении. Когда x измеряется в продольном направлении от начала координат, расположенного поблизости от препятствия, а y измеряется в направлении, перпендикулярном x, приближенное уравнение движения имеет такой вид:

$$U\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2},$$

где величина $\lambda=1-u/U$ обозначает безразмерный дефицит скорости. Это уравнение по математической форме совпадает с уравнением теплопроводности, и решение, удовлетворяющее граничному условию $\lambda\to 0$ при $y\to\pm\infty$, имеет вид

$$\lambda=\frac{A}{(xe^{\eta^2})^{1/2}};\quad \eta=\left(\frac{U}{2\nu x}\right)^{1/2}y. \tag{154}$$

Лобовое сопротивление может быть подсчитано по закону количества движения

$$D=\rho U\int_{-\infty}^{\infty}(U-u)\,dy=\rho U^2\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dy,$$

так что коэффициент лобового сопротивления составляет

$$C_D=\frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2}=2\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dy=2A\left(\frac{2\nu}{U}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{e^{\eta^2/2}}=4A\left(\frac{\pi\nu}{U}\right)^{1/2}. \tag{155}$$

Если лобовое сопротивление известно, величина A может быть определена из уравнения (155), а распределение скорости в следе дано уравнением (154). И наоборот, в области, где действительно уравнение (154), одного измерения (теоретически) достаточно для определения значения A, которое в свою очередь определяет лобовое сопротивление.

Для плоской пластины с нулевым наклоном лобовое сопротивление известно (см. главу VII), так что может быть определено и значение A. Измерения (рис. 85) Фейджа и Фолкнера показывают, что если l — длина пластины, а x — расстояние, замеренное от концевой кромки пластины, то при малых значениях x/l уравнение (154) дает хорошее приближение. Несоответствие, получающееся при больших значениях x/l, объясняется тем, что поток там перестает быть ламинарным.

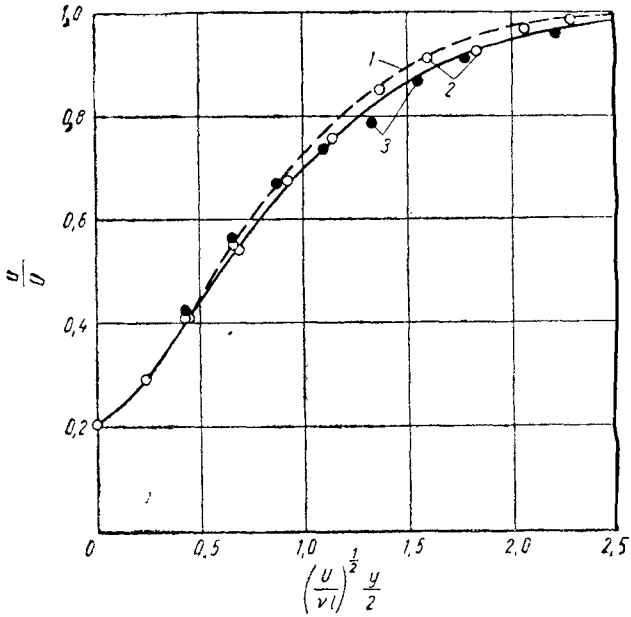


Рис. 85. Распределение скорости в ламинарном следе

1 — расчетная кривая для ламинарного потока; *2* — $Ul/\nu = 2{,}01 \times 10^5$; *3* — $Ul/\nu = 0{,}536 \times 10^5$

61. Течения, описываемые нелинейными уравнениями,— струи. Существуют случаи ламинарного течения, при которых влиянием инерции, представленным нелинейными членами в уравнениях Навье—Стокса, пренебречь нельзя, тогда как один из членов, выражающих вязкость, незначителен по сравнению с другими. Для некоторых задач ламинарного течения иногда можно получить простое решение, пренебрегая этим малым членом, даже при условии сохранения нелинейных членов, обычно создающих столько затруднений. Это относится к потокам с большими числами Рейнольдса после препятствий перед возникновением в них разделения или турбулентности. Подобные потоки будут рассмотрены в последней главе. Здесь же приводятся два решения, однотипных математически, но относящихся к различным физическим категориям: решения для двухмерной ламинарной струи и для осесимметричной ламинарной струи.

Двухмерная ламинарная струя. Для большей ясности представим истечение установившейся струи жидкости через щель в плоской стенке в такую же жидкость, находящуюся в покое. В плоскости, перпендикулярной щели, проекция последней считается началом координат, ось струи — осью x и проекция стенки — осью y. Компоненты скорости в направлениях x и y обоз-

начаются как обычно соответственно u и v. Если давление принято существенно постоянным и если величина $\partial^2 u/\partial x^2$ мала по сравнению с $\partial^2 u/\partial y^2$ (применимость этих допущений может быть проверена впоследствии), уравнение движения для направления x может быть записано так:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Эти два уравнения решаются при следующих граничных условиях:

$$u=0 \text{ при } y=\pm\infty;\ u=0=v \text{ при } x=\infty;$$

$$v=0 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y}=0 \text{ при } y=0.$$

Исчезновение производных от u в бесконечности может считаться следствием указанных граничных условий для бесконечности. Следует заметить, что v по условию неразрывности не исчезает при $y=\pm\infty$. Также не накладывается никакого условия на u и v при $x=0$, так как первое уравнение неполное и применимо лишь к центральной части струи.

Допущение постоянства давления требует постоянства количества движения потока струи, определяемого выражением

$$M=\rho\int_{-\infty}^{\infty}u^2dy.$$

Это также можно установить, исходя из двух первых уравнений и граничных условий. Интегрирование уравнения движения по y и использование уравнения неразрывности дает

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}u^2\,dy+uv\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}u\frac{\partial v}{\partial y}dx=\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}u^2dy=\nu\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{-\infty}^{\infty}=0,$$

так что

$$\rho\int_{-\infty}^{\infty}u^2\,dy=\text{const}.$$

Уравнение неразрывности позволяет использовать функцию тока Лагранжа ψ, для которой $u=\partial\psi/\partial y$ и $v=-\partial\psi/\partial x$.

Допустив, что $\psi=ax^m f(\xi)$, а $\xi=byx^n$, и подставив эти выражения в уравнение движения, находим, что $m=\frac{1}{3}$ и $n=-\frac{2}{3}$, если каждый член в конечном уравнении содержит x в одинаковой степени и если интегральное выражение для количества движе-

ния потока не зависит от x. Так как ψ имеет размерность $[L^2T^{-1}]$, $M\nu/\rho$—$[L^5T^{-3}]$ и $M/\rho\nu^2$—$[L^{-1}]$, величина a должна быть числовым постоянным множителем при $(M\nu/\rho)^{1/3}$, тогда как значение b должно быть пропорционально $(M/\rho\nu^2)^{1/3}$. Наиболее удобны для использования выражения

$$\psi = \left(\frac{9Mx\nu}{2\rho}\right)^{1/3} f(\xi); \quad \xi = \left(\frac{M}{48\rho\nu^2}\right)^{1/3} \frac{y}{x^{2/3}}.$$

из которых можно получить

$$u = \left(\frac{3M^2}{32\rho^2\nu x}\right)^{1/3} f'(\xi); \quad v = \left(\frac{M\nu}{6\rho x^2}\right)^{1/3} (2\xi f' - f).$$

Штрихи обозначают дифференцирование по ξ. Подставив последние выражения в уравнение движения, найдем

$$-f'^2 - ff'' = \frac{1}{2} f'''.$$

Граничные условия теперь превращаются в следующие:

$$f'(\pm\infty) = 0; \quad f(0) = f'(0) = 0,$$

а количество движения потока составляет

$$\frac{3}{4} \int_{-\infty}^{\infty} f'^2 \, d\xi = 1.$$

Первое интегрирование дифференциального уравнения для $f(\xi)$ приводит к равенству

$$2ff' + f'' = 0,$$

где постоянная интегрирования исчезает по граничным условиям. Это равенство можно проинтегрировать снова.

$$f^2 + f' = c^2.$$

Отсюда, считая f независимой переменной, новым интегрированием получим

$$c\xi = \operatorname{th}^{-1} \frac{f}{c}.$$

Постоянная интегрирования в последнем случае равна нулю, так как $f(0) = 0$. Таким образом:

$$f = c \operatorname{th} c\xi.$$

Применив граничное условие, находим, что $c = 1$, так что

$$\left.\begin{aligned} u &= \left(\frac{3M^2}{32\rho^2\nu x}\right)^{1/3} \operatorname{sch}^2 \xi; \\ v &= \left(\frac{M\nu}{6\rho x^2}\right)^{1/3} (2\xi \operatorname{sch}^2 \xi - \operatorname{th} \xi). \end{aligned}\right\} \qquad (156)$$

Из уравнений (156) видно, что на оси струи, так же как на параболе $y=Cx^{2/3}$, компонент скорости u изменяется обратно пропорционально $x^{1/3}$. Таким образом, эпюры для u в разных сечениях перпендикулярны оси x и подобны одна другой. Поэтому приведенное решение, принадлежащее Шлихтингу и Биклею, называется решением подобия.

Осесимметричная струя. Осесимметричный вариант только что разобранного случая допускает решение такого же типа. Так как метод решения подобен рассмотренному для двухмерной ламинарной струи, здесь решается лишь дифференциальная система и приводятся полученные результаты.

Если в плоскости, проходящей через ось струи, начало координат совместить с отверстием и ось струи считать осью z, от которой в радиальном направлении отсчитывать r, то модифицированное уравнение движения будет иметь такой вид:

$$u\frac{\partial w}{\partial r}+w\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\nu}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right),$$

где член $\nu\,\partial^2 w/\partial z^2$ в правой части опущен. Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial (ru)}{\partial r}+\frac{\partial (rw)}{\partial z}=0,$$

а граничные условия составляют

$$w=0 \text{ при } r=\infty;\ w=0=u \text{ при } z=\infty;$$

$$u=0 \text{ и } \frac{\partial w}{\partial r}=0 \text{ при } r=0.$$

Так как давление вновь считается постоянным, количество движения потока

$$M=2\pi\rho\int_0^\infty w^2 r\,dr$$

также не зависит от z. Решение системы, состоящей из уравнения движения, уравнения неразрывности и вспомогательных условий, дается выражениями

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{1}{4}\left(\frac{3M}{\pi\rho z^2}\right)^{1/2}\frac{2\eta(1-\eta^2)}{(1-\eta^2)^2};\\ w&=\frac{3}{8\pi}\cdot\frac{M}{\rho\nu z}\cdot\frac{1}{(1+\eta^2)^2};\\ \eta&=\frac{1}{8}\left(\frac{3M}{\pi\rho\nu^2}\right)^{1/2}\frac{r}{z}. \end{aligned}\right\} \qquad (157)$$

Продольная скорость на оси изменяется обратно пропорционально продольному расстоянию и поэтому уменьшается быстрее, чем в случае двухмерной струи. Кроме того, вдоль любой

радиальной линии, проведенной от начала координат, w изменяется обратно пропорционально z, так что если известна эпюра скорости в одном сечении, то эпюры скорости в других сечениях могут быть легко получены.

Только что приведенное решение принадлежит Шлихтингу, а применимость его для основной области потока была подтверждена экспериментами Эндрейда и Тьена.

Пример 18. Решить уравнение $f''+4f+f^2/\nu+k=0$ для потока между непараллельными пластинами при малом числе Рейнольдса. Использовать для числа Рейнольдса выражение $\mathrm{Re}=\frac{1}{\nu}\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\theta)\,d(\theta)=q/\nu$ и показать, что

$$u(r,\theta)=\pm\frac{q}{\nu}\cdot\frac{\cos 2\theta-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\cos 2\theta}.$$

Прежде всего подстановкой $f(\theta)=qF(\theta)$ превращаем уравнение в безразмерное

$$F''+4F+\mathrm{Re}\,F^2+k=0.$$

Если число Рейнольдса достаточно мало, то

$$F''+4F+k=0$$

и решение составит

$$F=-\frac{k}{4}+A\sin 2\theta+B\cos 2\theta.$$

Постоянные определяются из условий

$$F(\pm\alpha)=0;\quad\int_{-\alpha}^{\alpha}F(\theta)\,d(\theta)=\pm 1.$$

Знак $\pm$ в последнем уравнении учитывает сужение и расширение потока. Таким образом, получаются четыре уравнения:

$$-\frac{k}{4}+A\sin 2\alpha+B\cos 2\alpha=0;\qquad -\frac{k}{4}-A\sin 2\alpha+B\cos 2\alpha=0;$$

$$-\frac{k}{2}\alpha+B\sin 2\alpha=\pm 1.$$

Из них находим, что

$$A=0;\ B=\frac{\pm 1}{\sin\alpha-2\alpha\cos\alpha};\ k=\frac{\pm 4\cos\alpha}{\sin\alpha-2\alpha\cos\alpha}.$$

Подстановка этих выражений в приведенное выше общее решение дает функцию F, и окончательно имеем

$$F=\pm\frac{\cos 2\theta-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-2\alpha\cos 2\alpha}$$

и

$$u=\pm\frac{q}{r}\cdot\frac{\cos 2\theta-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-2\alpha\cos 2\alpha}.$$

Это решение, приблизительное при малых величинах Re, очевидно не дает возможности различить (за исключением знака), является ли поток сужающимся или расширяющимся, и не дает никаких указаний об отрыве потока.

Д. Устойчивость ламинарного течения

62. Общие замечания. Распространится или погаснет малое возмущение, которое накладывается на известное первоначальное течение, зависит от свойств жидкости, характера первоначального течения и природы возмущения. Если все такие возмущения затухают, то первоначальному течению свойственна устойчивость; в противном случае ему присуща неустойчивость, даже если некоторые возмущения исчезают со временем. Задачи гидродинамической устойчивости представляют большой практический и теоретический интерес, о чем свидетельствует большое число посвященных этому вопросу публикаций с начала нашего столетия.

Физически течение может быть неустойчивым только при существовании передачи энергии возмущению от основного потока. Математически эта передача выражается присутствием нелинейных членов в уравнениях движения Навье—Стокса. Так как все возмущения подвержены вязкостной диссипации, устойчивость первоначального потока зависит по существу от соотношения скорости вязкостной диссипации возмущения и скорости получения энергии от первоначального потока.

Хотя в этой главе рассматривается главным образом течение вязких жидкостей, задача об устойчивости существует и для идеализированных потоков невязких жидкостей. Действительно, благодаря относительной простоте их математического анализа исторически именно для них впервые было найдено удачное решение. Неустойчивость может возникнуть, например, если тяжелая жидкость располагается выше легкой или если существует разрыв скоростей на границе двух жидкостей (Гельмгольц, 1882), или если поверхностное натяжение оказывает разрушительное влияние на струю жидкости (Релей, 1879). Во всех этих случаях вязкостной диссипацией пренебрегают, но это не значит, что течения обязательно будут неустойчивыми, так как может установиться такое положение, когда передачи энергии возмущению не будет и тогда не будет ни затухания, ни распространения его.

Гидродинамическая неустойчивость реальных потоков была впервые упомянута в печати Хагеном в 1839 г. и подтверждена экспериментально им же в 1854 г., а затем независимо от него Рейнольдсом в 1883 г. Четыре года спустя Кельвин рассмотрел задачу устойчивости плоского потока Куэтта и плоского потока Пуазейля и заключил, что оба потока устойчивы к малым возмущениям. Хотя позднее Релей подверг сомнению его доказательство, все-таки следует признать, что Кельвин первым использовал метод малых возмущений для анализа устойчивости и тем самым дал начальный толчок к изучению этих трудных проблем.

Так как нерегулярное наблюдение за режимом течения жидкостей, по-видимому, указывало, что более вязкая жидкость имеет более устойчивое течение, возникло искушение изучать устойчивость ламинарных течений, пренебрегая влиянием вязкости на возмущения, и в случае результатов, указывающих на стабильность потока, заключать, что первоначальное течение устойчиво независимо от вязкости жидкости. Релей использовал этот подход для изучения устойчивости параллельного течения между двумя плоскими границами, рассчитывая, что оно может быть только неустойчивым. К своему удивлению он обнаружил, что если на кривой распределения скоростей отсутствует точка перегиба, то любое возмущение, периодически вносимое в поток, обязательно нейтрально, т. е. ни распространяется, ни затухает. Этот результат заставил Релея прийти к убеждению, что даже при вязкости, близкой к нулю, нельзя пренебрегать ею при исследовании предельного случая вязкой жидкости. Тонкость этого различия становится очевиднее, если представить, что пренебрежение влиянием вязкости на возмущение и допущение соответствия потока с возмущениями безвихревому равносильно признанию наличия проскальзывания на границах, что невозможно ни в какой реальной жидкости со сколь угодно малой вязкостью. Таким образом, если возмущение не подвержено вязкостной диссипации, механизм возмущенного движения изменяется коренным образом и, действительно, никакой энергии не может быть передано возмущению от первоначального потока. Двойная роль вязкости становится очевидной благодаря результату Релея, не имеющему прямого отношения к задачам устойчивости вязкой жидкости, но ярко иллюстрирующему трудности, свойственные этим задачам.

Исследования гидродинамической устойчивости в XIX столетии сводятся к работам Рейнольдса, Кельвина и Релея, но в нашем столетии они становятся столь многочисленными, что невозможно да и не нужно приводить здесь все полученные результаты. Однако, несмотря на большое внимание к этому вопросу, пока еще исследована аналитически лишь начальная стадия перехода от ламинарного течения к турбулентному. В оставшейся части этой главы будут рассмотрены только основные моменты наиболее важных решений с уделением особого внимания методологии.

63. Метод показательного фактора времени. Для удобства представления рассматривается параллельное ламинарное течение между двумя бесконечными пластинами. Ось x проходит посередине между пластинами в направлении первоначального потока, ось y взята по нормали к пластинам, расстояние между пластинами принято равным $2b$. Функция тока ψ может быть представлена следующим образом:

$$\psi = \Psi + \psi',$$

где Ψ — функция тока первоначального потока, зависящая поэтому только от y, ψ' — то же самое для возмущения. В общем случае ψ' зависит от всех трех координат и времени t, но для двухмерного возмущения она не зависит от z. На некоторое время возмущение полагается двухмерным.

Если записанную выше функцию тока подставить в следующую комбинированную форму уравнений Навье—Стокса для двухмерного потока

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} = \nu \nabla^2 (\nabla^2 \psi)$$

и если пренебречь слагаемыми второго порядка в ψ', то можно найти, что

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi'}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \nabla^2 \frac{\partial \psi'}{\partial x} - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \nu \nabla^2 (\nabla^2 \psi'),$$

так как Ψ само удовлетворяет дифференциальное уравнение. Скорость первоначального потока составляет

$$u(y) = \frac{\partial \Psi}{\partial y},$$

так что предыдущее равенство может быть записано как

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi'}{\partial t} + u \nabla^2 \frac{\partial \psi'}{\partial x} - u'' \frac{\partial \psi'}{\partial x} = \nu \nabla^2 (\nabla^2 \psi'),$$

где штрихи над u обозначают обычное дифференцирование. Если u выразить через некоторую эталонную скорость U, x и y через b, t через b/U и ψ' через Ub, то написанное равенство становится таким (без введения новых обозначений):

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi'}{\partial t} + u \nabla^2 \frac{\partial \psi'}{\partial x} - u'' \frac{\partial \psi'}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 (\nabla^2 \psi'), \tag{158}$$

где все величины безразмерны. Для двухмерного периодического возмущения в направлении x можно допустить, что

$$\psi' = f(y) e^{im(x-ct)}, \tag{159}$$

где m равно расстоянию $2b$, деленному на длину волны возмущения λ, а выражение

$$c = c_r + ic_i$$

имеет действительную часть c_r, представляющую быстроту распространения волнового возмущения, и мнимую часть c_i, представляющую усиление или затухание, — все выражено через U. Для заданного числа Рейнольдса и заданного m всегда существует определенное значение c. Как показывает равенство (159), возмущение будет усиливаться, если c_i положительно, и затухать, если оно отрицательно. Таким образом, устойчивость или неустойчивость при заданных значениях Re и m зависит от знака, соответствующего c_i.

Подстановка выражения (159) в уравнение (158) приводит к уравнению Ор-Зоммерфельда (1906—1908):

$$(u-c)(f''-m^2 f)-u''f=-\frac{i}{m\,\mathrm{Re}}(f''''-2m^2 f''+m^4 f), \quad (160)$$

где штрихи всех видов обозначают обычное дифференцирование. Четыре независимых решения уравнения (160) могут быть обозначены f_1, f_2, f_3 и f_4. Компоненты скорости, созданные возмущением, должны исчезать на твердых границах. Так как при выражении через U они имеют вид $\partial\psi'/\partial y$ и $-\partial\psi'/\partial x$, граничные условия записываются так:

$$f(1)=0;\ f'(1)=0;\ f(-1)=0;\ f'(-1)=0.$$

Вследствие таких граничных условий решение уравнения (160)

$$f=Af_1+Bf_2+Cf_3+Df_4$$

может отличаться от обычного нулевого решения (т. е. коэффициенты A, B, C и D могут быть не равны нулю), только если

$$\begin{vmatrix} f_1(1) & f_2(1) & f_3(1) & f_4(1) \\ f_1'(1) & f_2'(1) & f_3'(1) & f_4'(1) \\ f_1(-1) & f_2(-1) & f_3(-1) & f_4(-1) \\ f_1'(-1) & f_2'(-1) & f_3'(-1) & f_4'(-1) \end{vmatrix}=0.$$

Этот детерминант является следствием зависимости между Re, m и c, которая после раздела мнимой и действительной частей может быть сведена к двум равенствам:

$$c_r=c_r(m,\mathrm{Re});\quad c_i=c_i(m,\mathrm{Re}).$$

Если c_i равно нулю, то

$$c_i(m,\mathrm{Re})=0$$

или

$$m=m(\mathrm{Re}),$$

что соответствует кривой, разделяющей пространство m—Re на области устойчивости и неустойчивости.

Этот общий подход был использован Толминым и Шлихтингом для исследования устойчивости существенно параллельного потока над полубесконечной пластиной. Хотя в этом случае верхней границы не существует, основы описанного метода могут быть применены после некоторой модификации его. В 1945 г. Линь уточнил результаты Толмина и Шлихтинга, так что теперь между экспериментальными данными, полученными Шубауером и Скрамстедом в 1938 г., и теоретическими результатами существует почти полное соответствие (рис. 86). В этом случае $m=2\pi\delta_1/\lambda$ и $\mathrm{Re}=V\delta_1/\nu$, где δ_1 — толщина смещения пограничного слоя, определенная в п. 82.

Начальная устойчивость ламинарного течения между вращающимися концентрическими цилиндрами была подробно исследована Тэйлором как теоретически, так и экспериментально, хотя только при малой разнице в величине их радиусов. Как видно из рис. 87, где Ω_1 и Ω_2 соответственно угловые скорости (в одном направлении) внутреннего цилиндра ($r_1=3{,}8$ *см*) и

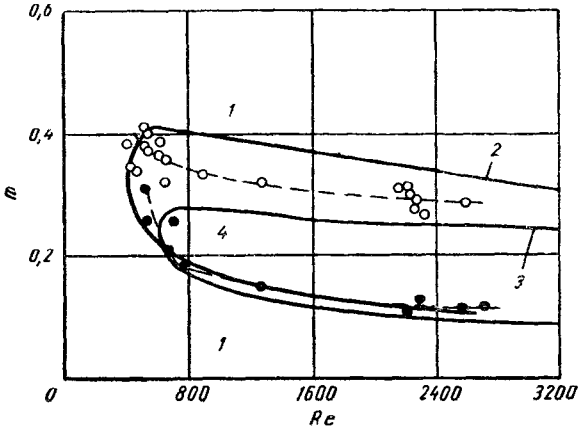


Рис. 86. Устойчивость потока в пограничном слое
1 — погашение; *2* — Линь; *3* — Шлихтинг; *4* — увеличение

внешнего цилиндра ($r_2=4{,}04$ *см*), расчеты Тэйлора поразительно хорошо подтверждаются его экспериментами. Как видно из того же рисунка, если циркуляция на поверхности внутреннего цилиндра меньше, чем циркуляция на поверхности внешнего цилиндра, то $\Omega_1 r_1^2 < \Omega_2 r_2^2$ и поток всегда устойчив, как бы ни были велики Ω_1 и Ω_2. Это было установлено Сингом (1938) пу-

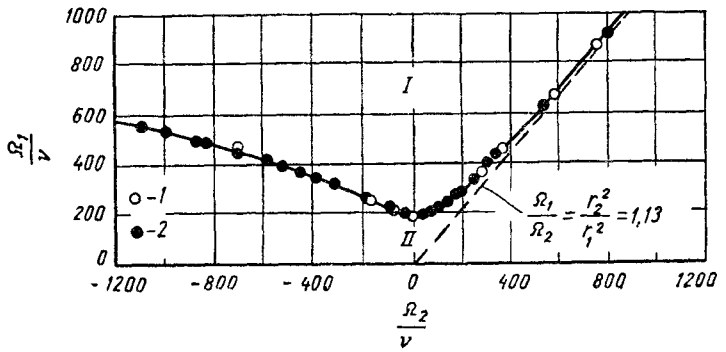


Рис. 87. Устойчивость потока между концентрическими цилиндрами
I — неустойчивый; *II* — устойчивый; *1* — результаты вычислений; *2*—результаты наблюдений

тем точных расчетов осесимметричных бесконечно малых возмущений с показательным фактором времени.

Тэйлоровский подход отличается от описанного только тем, что неизвестные функции, соответствующие $f(y)$ в уравнении (159), распространяются в виде бесконечных рядов, так что четыре из шести граничных условий (о том, что три компонента скорости исчезают на границах) удовлетворяются автоматически. Два оставшихся условия и рекуррентные формулы для коэффициентов одного из рядов получаются из дифференциальных уравнений при условии, что детерминант бесконечного порядка должен исчезать для нетривиального решения системы дифференциальных уравнений. Из уравнения этого детерминанта может быть получена кривая нейтральной устойчивости. Этот метод также относится к тем, где используется показательный фактор времени.

Тэйлоровская оценка возникновения неустойчивости настолько ясна и поучительна, что хочется привести цитату из его работы: «Наблюдаемое явление было одинаковым во всех случаях. Слой окрашенной жидкости неожиданно распадался на ряд равноотстоящих пленок, плоскости которых были перпендикулярны оси вращения. Эти пленки в каждом случае располагались друг от друга на расстоянии, приблизительно равном удвоенной толщине слоя между цилиндрами. Пленки распространялись до тех пор, пока не достигали внутренней поверхности внешнего цилиндра. Затем они распространялись вверх и вниз вдоль этой поверхности, пока не покрывали всю ее тонким слоем окрашенной жидкости. Этот слой был почти незаметен, так как его кромку трудно было различить. С другой стороны, при встрече слоев, направленных вверх и вниз, образуются пленки, движущиеся к внутреннему цилиндру, подобные тем, что движутся к внешнему цилиндру. В результате через 2—3 *сек* после начала движения появляется ряд тонких пленок окрашенной жидкости, расположенных друг от друга на расстоянии, равном толщине слоя между цилиндрами. Фактически через несколько секунд после начала движения оно уже кажется установившимся, так как в нем невозможно различить, какие пленки движутся внутрь, а какие — наружу, хотя каждая из них в отдельности чрезвычайно резко очерчена». Из этого описания видно что в начале возникновения неустойчивости поток не прямо превращается в турбулентный, а переходит в другой вид ламинарного движения. Эксперименты Тэйлора показали, что при увеличении скорости внутреннего цилиндра симметричные вихревые кольца сначала становятся несимметричными или даже узловатыми и затем разрываются, превращая весь поток в турбулентный.

При рассмотрении тэйлоровской задачи устойчивости не следует упускать из вида главный фактор, способствующий неустойчивости. Первичная причина, как уже твердо установлено,

состоит в том, что при заданных радиусах цилиндров с увеличением отношения Ω_1/Ω_2 вероятность неустойчивости возрастает. Вращение внутреннего цилиндра действует двояко. С одной стороны, оно передает движение близлежащим слоям жидкости, которые затем стремятся двигаться центробежно. С другой стороны, оно создает положительный радиальный градиент давления, который противодействует этому стремлению. Равновесие здесь ненадежно; чем быстрее вращается внутренний цилиндр, тем труднее воспрепятствовать жидкости двигаться наружу от него. Вращение внешнего цилиндра, однако, имеет только стабилизирующее воздействие. Оно помогает внутреннему цилиндру создавать радиальный градиент давления и препятствовать движению жидкости наружу. Таким образом, результаты Тэйлора, вполне объяснимые с интуитивной точки зрения, позволяют прийти к заключению, что первичной причиной неустойчивости является центробежная сила, которая в этом случае может рассматриваться как одна из форм массовой силы.

64. Достаточные условия для устойчивости. Вместо решения дифференциальной системы, определяющей устойчивость или неустойчивость первоначального движения, различные исследователи интегрировали дифференциальное уравнение или уравнения, дающие достаточные условия для устойчивости. Хотя получить эти условия намного легче, чем решить дифференциальную систему, однако они содержат гораздо менее специфичную информацию, так как выведены без знания основ природы возмущения. Тем не менее эти условия всегда обеспечивают ценные указания в поисках более специфичной информации, когда отсутствует детальное решение, и являются хорошей проверкой, если такое решение существует. В дальнейшем для иллюстрации смысла метода будут приведены достаточные условия устойчивости плоского потока Пуазейля. Ценность результата, полученного Сингом, доказана удачным исследованием Линя в более узкой области.

Если в качестве характерной скорости первоначального потока берется его максимальная скорость, то распределение скорости этого потока дается безразмерным выражением:

$$u = 1 - y^2.$$

Используя это выражение для u и умножая уравнение (160) на $\bar{f}\,dy$ (где $\bar{f}$ является величиной, комплексно сопряженной с f), а затем интегрируя (в случае необходимости по частям) от -1 до 1, получим с помощью граничных условий следующие интегральные соотношения:

$$m\,\mathrm{Re}\,c_i\left(I_1^2 + m^2 I_0^2\right) = m\,\mathrm{Re}\,Qi + I_2^2 + 2m^2 I_1^2 + m^4 I_0^2,$$

$$I_0^2 = \int_{-1}^{1} f\bar{f}\,dy;\quad I_1^2 = \int_{-1}^{1} f'\bar{f}'\,dy;$$

$$I_2^2 = \int_{-1}^{1} f''\bar{f}''\,dy;$$

$$Q = \int_{-1}^{1} (1-y^2) f'\bar{f}'\,dy + m^2 \int_{-1}^{1} (1-y^2) f\bar{f}\,dy - 2\int_{-1}^{1} f'\bar{f}\,y dy - 2I_0^2.$$

Взяв действительную часть приведенного интегрального соотношения и переменив знаки, получим

$$m\,\mathrm{Re}\,c_i\,(I_1^2 + m^2 I_0^2) = m\,\mathrm{Re}\,i\int_{-1}^{1} (f'\bar{f} - \bar{f}'f)\,y dy -$$

$$-\,(I_2^2 + 2m^2 I_1^2 + m^4 I_0^2). \qquad (161)$$

Но из неравенства Шварца в форме

$$\left|\int (f\bar{g} + \bar{f}g)\,dy\right|^2 \leqslant 4\int f\bar{f}\,dy \int g\bar{g}\,dy \text{ при } g = iyf'$$

имеем

$$i\int_{-1}^{1} (f'\bar{f} - \bar{f}'f)\,y dy \leqslant 2I_0\left[\int_{-1}^{1} f'\bar{f}'\,y^2\,dy\right]^{1/2} \leqslant 2I_0 I_1,$$

так что

$$m\mathrm{Re}\,c_i\,(I_1^2 + m^2 I_0^2) \leqslant -\,(m^4 I_0^2 - 2m\,\mathrm{Re}\,I_0 I_1 + 2m^2 I_1^2) - I_2^2.$$

Из неравенства Шварца также видно, что левая часть этого выражения отрицательна, если $\mathrm{Re}^2 \leqslant 2m^4$. Это значит, что если число Рейнольдса меньше $\sqrt{2}\,m^2$, то первоначальный поток всегда устойчив, так как отрицательное значение c_i соответствует устойчивому состоянию. Далее из неравенства видно, что для данного числа Рейнольдса поток всегда устойчив при достаточно малых значениях m или достаточно большой длине волны.

Можно упомянуть, что достаточное условие Синга ($\Omega_1 r_1^2 < \Omega_2 r_2^2$) для устойчивости первоначального потока между концентрическими цилиндрами, так же как и теоремы Релея (которые представляют только достаточные условия для устойчивости, полученные при пренебрежении влиянием вязкости на возмущение), выведено по существу подобным же образом. Достаточные условия были получены Сингом также вариационным методом, однако его рассмотрение не входит в задачу настоящей книги.

65. Метод энергии и метод завихренности. Если полную кинетическую энергию возмущения обозначить

$$K' = \frac{\rho}{2}\int (u'^2 + v'^2 + w'^2)\, dW,$$

где u', v' и w' есть компоненты скорости возмущения, а интеграл является объемным, и если

$$\Omega' = \int (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)\, dW,$$

где ξ', η' и ζ' представляют компоненты завихренности возмущения, то устойчивость или неустойчивость первоначального потока будет определяться знаком dK'/dt или $d\Omega'/dt$. В отношении Ω' следует заметить, что если $\Omega'=0$, движение возмущения безвихревое. Но так как граничные условия требуют отсутствия проскальзывания на твердых границах, то безвихревых возмущений быть не может, так что $\Omega'=0$ указывает на устойчивость движения. В дальнейшем будет показано, что для плоского потока Пуазейля и для периодических возмущений метод энергии совпадает с методом показательного фактора времени. То, что для одних и тех же случаев метод завихрения также совпадает с последним методом, может быть показано подобным же образом.

Приняв для плоского потока Пуазейля двухмерное периодическое возмущение, из определения K' и уравнений Навье—Стокса получаем:

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{dK'}{dt} = \frac{1}{2}\int \frac{\partial}{\partial t}(u'^2 + v'^2)\, dS = \int \left(u'u\frac{\partial u'}{\partial x} + uv'\frac{\partial v'}{\partial x} + u'v'\frac{\partial u}{\partial y}\right) dS - \frac{1}{\rho}\int \left(u'\frac{\partial p}{\partial x} + v'\frac{\partial p'}{\partial y}\right) dS + \nu\int (u'\nabla^2 u' + v'\nabla^2 v')\, dS, \qquad (162)$$

где интегралы являются поверхностными, а u есть размерная скорость первоначального потока. Сумма двух первых членов в правой части уравнения (162) может быть записана как $\frac{1}{2}\partial[u(u'^2+v'^2)]/\partial x$, а так как u не зависит от x, то по свойству периодичности интеграл этой суммы исчезает. Аналогично исчезает третий интеграл, так как

$$u'\frac{\partial p'}{\partial x} + v'\frac{\partial p'}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(u'p') + \frac{\partial}{\partial y}(v'p')$$

по уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости, граничным условиям и периодичности. Последний интеграл в уравнении (162) может быть заменен интегралом

$$-\nu\int\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2\right] dS = -\nu I,$$

так что уравнение (162) становится таким:

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{dK'}{dt} = -\int u'v'\frac{\partial u}{\partial y}\,dS - \nu I. \qquad (163)$$

До сих пор все величины в данном пункте были размерными. Если теперь сделать безразмерными расстояния, разделив их на половину пространства между пластинами, и компоненты скорости, разделив их на максимальное значение u_m скорости u, то может быть использована безразмерная функция тока ψ':

$$u' = \frac{\partial\psi'}{\partial y}\,;\quad v' = -\frac{\partial\psi'}{\partial x}\,.$$

Если далее выразить t через b/u_m и написать

$$\psi' = f(y,t)\,e^{imx} + \overline{f}\,(y,t)e^{-imx},$$

тогда уравнение (163) при положительной константе C будет иметь такой вид:

$$C\frac{dK'}{dt} = -m\,\mathrm{Re}\int_{-1}^{1}(f'\overline{f} - \overline{f}'f)dy - (I_2^2 + 2m^2 I_1^2 + m^4 I_0^2), \qquad (164)$$

где I_0, I_1 и I_2 определяются так же, как в п. 64, за исключением того, что функция f теперь зависит от y и t. Правая часть уравнения (164) по форме такая же, как в уравнении (161). Если вместо $f(y,\ t)$ написать $f(y)\ \exp(-imct)$, то правые части уравнений (161) и (164) становятся идентичными, так что метод энергии и метод показательного фактора времени совпадают для периодических возмущений.

66. Влияние природы возмущения на устойчивость. До сих пор рассмотрению подвергались лишь двухмерные возмущения. Может возникнуть вопрос: как влияет природа возмущения на стабильность потока? Для двухмерных параллельных потоков ответ прост. Особый случай сужающегося потока однородной жидкости был рассмотрен Сквайром (1933). Общий случай, при котором верхняя поверхность жидкости не обязательно зафиксирована и учитываются гравитационная сила, а также изменения плотности и вязкости, рассматривался Ехом (Yih) с помощью простого подхода Линя.

Для возмущения может быть взята функция тока типа

$$\psi' = f(y)\,e^{i(mx+nz-mct)},$$

где x измеряется в направлении первоначального потока, y — в направлении, перпендикулярном плоскости границы, z — по оси, перпендикулярной плоскости xy, а m, n и c — постоянные. Если выполнить поворот вокруг оси y так, чтобы ось x' заняла положение $(m,\ 0,\ n)$ по отношению к прежней координатной системе, тогда

$$mx + nz = m'x',$$

где $m' = (m^2 + n^2)^{1/2}$. Если далее определить c' из равенства $m'c' = mc$, то фукция тока может быть записана

$$\psi' = f(y)\, e^{im'(x' - c't)},$$

что представляет двухмерное возмущение, перемещающееся в направлении x' с длиной волны $2\pi/m'$ и скоростью c'. Аналогично функция тока

$$\psi'' = f(y)\, e^{i(mx - nz - mct)} = f(y)\, e^{im'(x'' - c't)}$$

представляет то же самое возмущение, перемещающееся в направлении x'', занимающем положение $(m, 0, n)$.

Тогда функция тока

$$\psi_3 = \psi' + \psi'' = 2f(y) \cos nz\, e^{im(x - ct)}$$

представляет трехмерное возмущение, движущееся в направлении оси x со скоростью c и имеющее длины волн $2\pi/m$ и $2\pi/n$ соответственно в направлениях x и z. Так как из-за симметричности ψ' и ψ'' физически идентичны, то устойчивость или неустойчивость для ψ_3 определяется устойчивостью или неустойчивостью ψ', потому что здесь вследствие линейности и однородности дифференциальной системы, описывающей устойчивость, применимо правило суперпозиции.

Если теперь число Рейнольдса, уклон и градиент давления первоначального потока обозначить соответственно Re, s и dp/dx, то для компонентов, соответствующих ψ' (обозначенных Re′, s' и dp'/dx'), они определятся равенствами

$$m'\,\mathrm{Re}' = m\,\mathrm{Re}; \quad m's' = ms;$$

$$\frac{\partial p'}{\partial x'} \csc \beta' = \frac{\partial p}{\partial x} \csc \beta,$$

где β и β' — углы наклона границы к горизонтали в направлениях соответственно x и x', так что $s = \operatorname{tg} \beta$ и $s' = \operatorname{tg} \beta'$. Как легко видеть, сечение потока (в направлении z') для случая ψ' не вносит значительных изменений ни в уравнение движения, ни в уравнение неразрывности и никак не влияет на выполнение граничных условий. Отсюда первоначальный поток устойчив или неустойчив к трехмерному возмущению соответственно тому, устойчив или неустойчив он к двухмерному возмущению при меньших числах Рейнольдса, меньшем уклоне и меньшем градиенте давления. Законы уменьшения перечисленных величин даны предыдущими равенствами.

Глава VI

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

А. Общие соображения

67. Вводные замечания. Даже при случайном наблюдении за истечением дыма из трубы или за следом судна на воде видно, что движение потоков во многих случаях совершенно не имеет того упорядоченного характера, который должен был бы существовать в соответствии с приведенным ранее анализом. Вместо того, чтобы следовать по установленным траекториям, жидкие частицы перемещаются крайне беспорядочно; это перемещение может быть охарактеризовано как неоднородное вторичное движение, наложенное на первоначальное упорядоченное. Вторичное движение является неустановившимся вследствие наблюдающихся при нем пульсаций скоростей во времени во всех точках пространства и беспорядочных изменений скоростей от точки к точке в любой момент времени. Его можно представить в виде бесчисленного количества вихрей различных форм, размеров и скоростей вращения, переносимых по течению осредненным потоком.

Этот общий тип движения обычно называют турбулентным, если пульсации в нем носят непериодический характер. Потоки, находившиеся или находящиеся в состоянии сдвига при числах Рейнольдса от средних до очень больших, могут быть с уверенностью названы турбулентными. Хотя турбулентное вторичное движение редко представляет интерес само по себе, тем не менее значение его для тех, кто вынужден работать с потоками при указанных значениях числа Рейнольдса, достаточно велико. Это объясняется двумя причинами: 1) даже когда пульсации скорости малы по сравнению с осредненной скоростью, они оказывают заметное влияние на такие важнейшие характеристики потока, как потеря энергии, сопротивление трения и перемешивание; 2) математические выражения и понятия, описывающие нетурбулентное движение, здесь становятся неудовлетворительными, так что должны быть заменены новыми.

68. Средние значения. Хотя турбулентный поток всегда является неустановившимся, в нем может быть наведен некото-

рый порядок, если разделить его основные переменные, такие, как скорость и давление, на две части, одна из которых относится к общим характеристикам, например к расходу и усилиям, а вторая преимущественно описывает вторичное движение. Такой технический прием особенно пригоден для систем, обладающих устойчивостью осредненных величин, так что первая из упомянутых частей имеет существенно постоянное значение. Если устойчивость такого рода отсутствует, возможность удов-

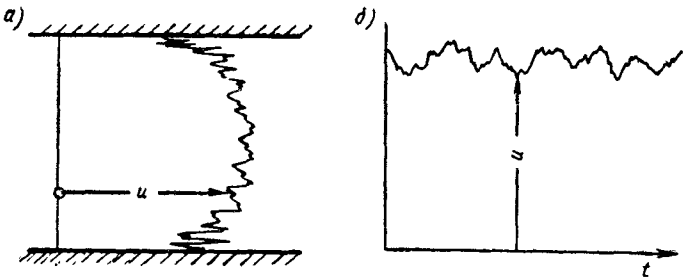


Рис. 88. Турбулентные пульсации компонентов скорости

а — пространственные изменения в данный момент времени; *б* — временные изменения в одной точке

летворительного анализа значительно уменьшается; здесь будут рассмотрены только случаи, в которых допустимо существование осредненных величин.

Поток с большими числами Рейнольдса, заключенный между фиксированными границами, представляет наглядный пример турбулентного движения. На рис. 88 показаны типичные схемы одновременных измерений продольных скоростей в разных точках поперечного сечения и последовательных измерений их в одной точке за некоторый промежуток времени t. Поперечные компоненты скорости, а также нормальные и касательные напряжения, очевидно, тоже пульсируют во времени и пространстве (следует заметить, что турбулентные пульсации отсутствуют в области, прилегающей к гладкой стенке, так как здесь совместное стабилизирующее влияние близости стенки и вязкости достаточно для предотвращения возникновения пульсаций). Повторные измерения в любой зоне турбулентности не дают совпадения полученных записей из-за беспорядочности, с которой происходят пульсации. В общем хотя первичные (средние) распределения скоростей и давлений в потоке зависят от известных или определяемых граничных условий, мгновенные вторичные (турбулентные) пульсации не обладают такой прямой зависимостью. Только приложение к вторичному движению статистических приемов позволяет установить прямую связь.

Если, как предлагалось в предыдущем пункте, отмечать последовательно величины мгновенных параметров в точке, они будут меняться так, как это изображено на рис. 89. Когда s — порядок измерения и n — общее число измерений, среднее значение измеренной величины A составляет

$$\bar{A} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} A_s. \qquad (165)$$

Следует отметить, что уравнение (165) может быть использовано для получения осредненных величин любых характери-

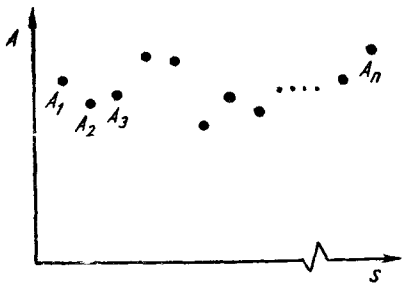


Рис. 89. Запись дискретных измерений

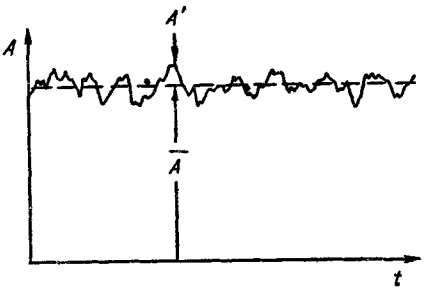


Рис. 90. Запись непрерывных измерений

стик неустановившегося потока путем повторения эксперимента n раз, причем все измерения должны быть проделаны в той же самой точке и через тот же промежуток времени после начала эксперимента.

Однако это понимание среднего значения, очевидно, имеет очень ограниченную применимость, если A не становится существенно постоянной величиной после достаточно большого числа измерений и не удовлетворяется требование, чтобы определяемые параметры, обрабатываемые указанным способом, могли бы рассматриваться как математическая формулировка условий, оговоренных в начале этого пункта, заключающихся в том, что здесь должны рассматриваться только те задачи, в которых значения параметров можно принять постоянными, какими они были в начальном движении.

Строже и поэтому более употребительно среднее значение, полученное из непрерывной записи переменного в зависимости от времени в определенной точке пространства (рис. 90). Следует отметить некоторые отличия рис. 90 от рис. 89. Во-первых, абсциссой здесь является время t, а не последовательность опытов s. Во-вторых, запись представляет собой непрерывную линию, а не ряд дискретных точек. Эта непрерывность записи параметров потока особенно существенна, если его трактовать как

континуум. В-третьих, хотя этого может быть не видно из рисунка, временные и пространственные производные параметров потока также непрерывны. Учтя непрерывность записи введением интеграла вместо конечной суммы, получим второе определение средней величины в таком виде:

$$\overline{A} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T A\,dt, \tag{166}$$

где T — полный период записи. Если число n и время T достаточно велики, значения $\overline{A}$, определенные по уравнениям (165) и (166), совпадают.

Еще одним способом определения средней величины может быть использование в качестве независимой переменной пространственной координаты r вместо времени (см. рис. 90). В этом случае необходима одновременность всех измерений. Соответствующая средняя величина получается так:

$$\overline{A} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R A\,dr. \tag{167}$$

Если первоначальный поток характеризуется равномерностью в направлении r, тогда средняя величина достигает постоянного значения на конечном расстоянии.

Получив среднюю величину, можно обратиться к отдельным измерениям и найти сведения о характеристиках вторичного движения. Разность любой измеренной величины и среднего значения обычно называют отклонением A':

$$A' = A - \overline{A}.$$

Важным свойством отклонения является равенство нулю его осредненного значения, что соответствует полученному определению средней величины

$$\overline{A'} = 0.$$

Для преодоления трудностей, связанных с необходимостью оперирования отрицательными отклонениями или абсолютными значениями, отклонения от среднего возводятся в кадрат и вычисляется среднее этих квадратов. Параметр, имеющий размерность первоначальной величины, получается извлечением квадратного корня из этого результата. Принятая запись имеет такой вид:

$$\sqrt{\overline{A'^2}} = \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T A'^2\,dt\right]^{1/2} \tag{168}$$

Ясно, что это выражение должно быть названо среднеквадратичным отклонением.

Для получения характеристик потока в одно из полученных выражений может быть подставлен любой его параметр. Обычно это три компонента мгновенной скорости u, v и w и давление p. Соответствующие средние величины обозначаются через $\overline{u}$, $\overline{v}$ и $\overline{w}$, а отклонения через u', v' и w'. Таким же образом мгновенное давление, его средняя величина и его отклонение от средней обозначаются через p, $\overline{p}$ и p'.

69. Функция плотности вероятности. Другим методом представления случайной функции может быть использование понятия функции плотности вероятности. Если, как и ранее, A —случайная переменная, а n — количество сделанных измерений, то вероятность того, что данное измерение будет находиться в пределах A_a и $A_a+\delta A$, определится так:

$$\delta P\,(A_a < A < A_a + \delta A) = \frac{n_a}{n},$$

где n_a — число измерений в названном интервале, меньшее n. Совершенно ясно, что вероятность δP зависит как от A_a, так и от δA и что δP стремится к нулю при приближении к нулю δA. Однако отношение их стремится к конечной величине, которая и называется функцией плотности вероятности:

$$f(A) = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta P}{\delta A} = \frac{\delta P}{\delta A}. \qquad (169)$$

Вероятность P может быть получена также из непрерывной записи, подобной изображенной на рис. 90. Вместо n_a используется период времени T_a, в течение которого переменная находится в пределах от A_a до $A_a+\delta A$, а полная продолжительность записи T заменяет n. Тогда вероятность записывается следующим образом:

$$\delta P\,(A_a < A < A_a + \delta A) = \frac{T_a}{T},$$

где значение T достаточно велико. Функция $f(A)$ определяется как и ранее.

Если изобразить графически зависимость $f(A)$ от A, получится кривая частоты распределения (рис. 91). Самая верхняя точка кривой, очевидно, соответствует тому значению A, для которого частота события максимальна; относительная частота любого другого значения определяется с одного взгляда. Так как в данную кривую включены все измерения, площадь, ограниченная ею, равна единице:

$$\int_0^\infty f(A)\,dA = 1.$$

Положение центра тяжести поверхности, очерченной кривой, находится из уравнения момента

$$\overline{A} = \int_0^\infty Af(A)\,dA. \tag{170}$$

Мера распространения кривой (т. е. стандартное отклонение, или радиус вращения поверхности вокруг оси, проходящей через центр тяжести) находится как корень квадратный из второго момента

$$\sqrt{\overline{A'^2}} = \left[\int_0^\infty (A-\overline{A})^2 f(A)\,dA\right]^{1/2}. \tag{171}$$

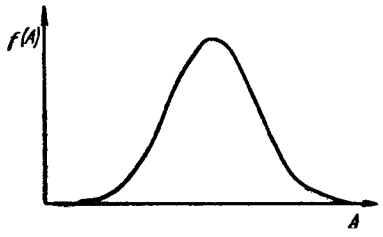


Рис. 91 Функция плотности вероятности

Так называемая асимметрия кривой распределения представляет собой третий момент в этой последовательности. К счастью, асимметрия турбулентной кривой так мала, что ею можно пренебречь, и в результате средние величины и среднеквадратичные отклонения, полученные в этом и предыдущем пунктах, оказываются идентичными.

Пример 19. Если трубка Пито, соосная со средним потоком, реагирует на результирующую скорость, то какова может быть ошибка в ее показании из-за турбулентных пульсаций скорости?

По уравнению Бернулли среднее значение давления в этих условиях равно

$$\overline{p} = p_0 + \frac{\rho}{2}\overline{V^2} = p_0 + \frac{\rho}{2}\left[\overline{(\bar{u}+u')^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right].$$

Так как $\overline{uu'}=0$, то можно написать

$$\overline{p} = p_0 + \frac{\rho\bar{u}^2}{2}\left[1 + \frac{\overline{u'^2}+\overline{v'^2}+\overline{w'^2}}{\bar{u}^2}\right].$$

Очевидно, ошибка будет меньше, если трубка предназначена для измерения только продольного компонента скорости.

Б. Основные уравнения для турбулентных потоков

70. Уравнения Рейнольдса. Считается, что даже в случаях очень интенсивной турбулентности при достаточно подробном рассмотрении можно обнаружить чисто ламинарные характеристики, поэтому уравнения Навье — Стокса могут быть применены в одинаковой степени к ламинарному и турбулентному движениям. Однако наличие бесчисленных турбулентных пульсаций, не связанных непосредственно с известными или определяемыми граничными условиями, делает практически не-

возможным получение точных решений даже для очень простых турбулентных потоков. Как было указано, знание осредненных характеристик потока является первостепенной заботой большинства исследователей, ибо такое приведение решения к среднему движению было бы вполне удовлетворительным для многих целей. К сожалению, даже эта информация не может быть получена без понимания общего механизма турбулентности. Тем не менее многое можно объяснить путем вывода и анализа различных уравнений, описывающих отдельные стороны турбулентности. Значительная сложность таких уравнений привела к использованию специальной формы записи, уменьшающей число необходимых членов. Наряду с сокращением такая форма записи позволяет яснее представить смысл уравнения, объединяя однородные члены в отдельные группы, так что взаимоотношение между группами не затемняется большим количеством слагаемых. Для ясности характеристик большинство главных уравнений, приводимых далее, будет дано сначала в общей тензорной записи, которая очень широко используется ныне, а затем для одного из компонентов в более обычной развернутой форме.

Для быстрого овладения тензорной записью нужно уяснить, что большая часть этой символики получается непосредственно из развернутой формы. Буквы t, u, x, ρ и μ, например, сохраняют свое обычное значение, а символы ∂, d и черточка ($\bar{}$) выражают обычные операции. Принципиальное отличие от обыкновенных уравнений заключается в использовании индексов i и j, которые выполняют две основные функции: во-первых, указывают, какой компонент векторного количества рассматривается, во-вторых, указывают, какова последовательность повторения операции. Повторение индекса означает, что соответствующее количество или количества должны суммироваться по всем возможным слагаемым. Например, уравнение неразрывности может быть записано в тензорной форме следующим образом:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \text{что значит} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Аналогично, оператор Лапласа может быть представлен так:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Для тех, кто пользуется векторными уравнениями, ценность тензорной записи еще более очевидна. Например, три уравнения Навье — Стокса [уравнения (123)] представляются одним:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = X_i - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}. \qquad (172)$$

Здесь индекс i — текущий, показывающий, какой компонент рассматривается, а j — так называемый подставной индекс, который указывает на повторение операций. В направлении оси x это соответствует

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2 u.$$

Если мгновенные значения u, v, w и p заменить суммами $\bar{u}+u'$, $\bar{v}+v'$, $\bar{w}+w'$ и $\bar{p}+p'$, причем $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}=0$, то можно доказать, что уравнение Навье — Стокса и каждое из его слагаемых могут быть разделены на две части, одна из которых представляет осредненное значение, а вторая — отклонение от него. Так как многие произведения в процессе осреднения превращаются в нуль, среднее значение составит

$$\bar{u}_j\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\overline{u_j'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}=X_i-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j\partial x_j}. \qquad (173)$$

Компонент по оси x для этого равенства имеет такой вид:

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}+\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}+$$
$$+\overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}}+\overline{w'\frac{\partial u'}{\partial z}}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\nu\nabla^2\bar{u}.$$

Если такому же процессу осреднения подвергнуть уравнение неразрывности, то осредненные значения дадут такую же запись, как и мгновенные

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}=0, \qquad (174)$$

т. е.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}=0.$$

Если эти уравнения, написанные для осредненных величин, вычесть из развернутой формы соответствующих уравнений для мгновенных величин, то разница и будет представлять основные соотношения, описывающие турбулентные пульсации:

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+u_j'\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+u_j'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}-$$
$$-\overline{u_j'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p'}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j\partial x_j}; \qquad (175)$$

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}=0. \qquad (176)$$

Для направления x получаем:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial u'}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial u'}{\partial z} + u'\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v'\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} +$$

$$+ w'\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + u'\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{\partial u'}{\partial y} + w'\frac{\partial u'}{\partial z} - \overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}} - \overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}} -$$

$$- \overline{w'\frac{\partial u'}{\partial z}} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p'}{\partial x} + \bar{\nu}\nabla^2 u';$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0.$$

Более выразительная форма уравнения для среднего движения может быть получена следующим образом: сначала пульсационное уравнение неразрывности умножается на соответствующий пульсационный компонент и осредняется:

$$\overline{u_i'\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} = 0 \quad \text{или} \quad \overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{u'\frac{\partial v'}{\partial y}} + \overline{u'\frac{\partial w'}{\partial z}} = 0 \text{ и т. д.}$$

Так как эти выражения равны нулю, то добавление их к уравнениям среднего движения не может изменить последние. Выполнив это сложение и перегруппировав члены, получим следующее равенство:

$$\rho\bar{u}_j\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \rho\left(\overline{u_j'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} + \overline{u_i'\frac{\partial u_j'}{\partial x_j}}\right) = \rho X_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j},$$

т. е.

$$\rho\frac{D\bar{u}}{Dt} + \rho\left(\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}\right) + \rho\left(\overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{u'\frac{\partial v'}{\partial y}}\right) +$$

$$+ \rho\left(\overline{w'\frac{\partial u'}{\partial z}} + \overline{u'\frac{\partial w'}{\partial z}}\right) = \rho X - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu\nabla^2\bar{u}.$$

Каждое выражение в скобках соответственно является дифференциалом произведения

$$\frac{\partial \overline{u_i' u_j}}{\partial x_j} \text{ или } \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}, \text{ и т. д.}$$

Наконец, перенеся эти конвективные члены, выражающие ускорение, в правую часть уравнения и учитывая, что, например $\partial^2 u/\partial y^2 = \partial(\partial u)/\partial y$, можем получить общеизвестные уравнения Рейнольдса

$$\rho\bar{u}_j\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \rho X_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho\overline{u_i' u_j'}\right), \qquad (177)$$

или для направления x

$$\rho\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)=\rho X-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}-\rho\overline{u'u'}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}-\rho\overline{u'v'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}-\rho\overline{u'w'}\right).$$

Эти уравнения отличаются от уравнений Навье — Стокса для нетурбулентного потока только наличием дополнительных членов, включающих пульсации скорости. Поскольку девять произведений $\rho\overline{u_i'u_j'}$ обычно называют рейнольдсовыми напряжениями, следует подчеркнуть, что объединение членов, выражающих только ускорение, с членами, относящимися к вязким напряжениям, делается лишь для иллюстрации того влияния, которое оказывают на поток пульсации вместо мгновенных вязких напряжений, исчезающих в процессе осреднения. Хотя эти средние напряжения могут быть намного больше по величине, чем среднее значение напряжения вязкого сдвига, они не могут диссипировать (рассеивать) энергию; как средняя, так и турбулентная полная энергия потока неизбежно диссипируется только под действием вязкости. Механизм этого явления может быть выражен модификацией предыдущих равенств (см. п. 72).

71. Уравнение количества движения. При анализе турбулентного потока обычно удобнее пользоваться интегральной формой уравнения Рейнольдса, применяя для перехода от объемных интегралов к поверхностным теорему Грина. Например, скорость изменения количества движения внутри произвольного объема W составляет

$$\rho\int n_j\bar{u}_i\bar{u}_j dS+\rho\int n_j\overline{u_i'u_j'}\,dS=\rho\int X_i dW-$$
$$-\int n_i\bar{p}dS+\mu\int n_j\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}dS, \qquad (178)$$

где n_i и n_j, как обычно, i-е и j-е компоненты единичной нормали. Компонент уравнения количества движения по оси x имеет вид

$$\rho\int(l\bar{u}^2+m\bar{u}\bar{v}+n\bar{u}\bar{w})\,dS+\rho\int(\overline{lu'^2}+m\overline{u'v'}+n\overline{u'w'})\,dS=$$
$$=\rho\int X dW-\int l\bar{p}dS+\mu\int\left(l\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+m\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+n\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)dS.$$

Интегралы равенства (178) представляют соответственно порядку их расположения скорость передачи количества движения осредненным движением, скорость диффузии количества движения турбулентными пульсациями, внешние силы, среднее давление и средние вязкие напряжения на поверхности объема. Следует подчеркнуть, что это соотношение идентично обычно используемому, за исключением интеграла, учитывающего тур-

булентную диффузию. Дополнительное представление об этом можно получить, сравнив равенство (178) с уравнением (25).

72. Уравнение энергии. Дальнейшее развитие представлений о механизме турбулентности можно получить, исследуя уравнение, аналогичное уравнению (26), которое изображает скорость трансформации энергии в турбулентном потоке. Используя прием Рейнольдса, выражающийся в подстановке средних и пульсационных компонентов вместо мгновенной скорости и мгновенного давления, но не осредняя результатов, можно сохранить мгновенный характер этих уравнений для выполнения необходимых преобразований. Если X_i — i-й компонент внешних сил, то три уравнения Навье — Стокса таковы:

$$\rho \frac{\partial u_i'}{\partial t} + \rho (\bar{u}_j + u_j') \frac{\partial (\bar{u}_i + u_i')}{\partial x_j} =$$

$$= \rho X_i - \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 (\bar{u}_i + u_i')}{\partial x_j \partial x_j}.$$

Каждое уравнение умножается на соответствующий компонент скорости $u_i = \bar{u}_i + u_i'$ и произведения складываются. Осреднив слагаемые, получим дифференциальное уравнение работы и энергии, где символом $\bar{V}$ обозначена результирующая средняя скорость, а V' — соответствующая ей пульсационная составляющая, т. е. $V'^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2$:

$$\bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \frac{\bar{V}^2}{2} + \rho \frac{\overline{V'^2}}{2} \right) + \overline{u_j' \frac{\partial (\rho V'^2/2)}{\partial x_j}} +$$

$$+ \frac{\partial (\bar{u}_i \rho \overline{u_i' u_j'})}{\partial x_j} = \rho \bar{u}_i X_i - \bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \overline{u_i' \frac{\partial p'}{\partial x_i}} +$$

$$+ \mu \bar{u}_i \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \overline{u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_j}}. \qquad (179)$$

В обычной записи это дает

$$\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho \bar{V}^2}{2} + \rho \frac{\overline{V'^2}}{2} \right) + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho \bar{V}^2}{2} + \rho \frac{\overline{V'^2}}{2} \right) +$$

$$+ \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho \bar{V}^2}{2} + \rho \frac{\overline{V'^2}}{2} \right) + \overline{u' \frac{\partial (\rho V'^2/2)}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial (\rho V'^2/2)}{\partial y}} +$$

$$+ \overline{w' \frac{\partial (\rho V'^2/2)}{\partial z}} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} \rho \overline{u'u'} + \bar{v} \rho \overline{v'u'} + \bar{w} \rho \overline{w'u'}) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u} \rho \overline{u'v'} + \bar{v} \rho \overline{v'v'} + \bar{w} \rho \overline{w'v'}) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u} \rho \overline{u'w'} + \bar{v} \rho \overline{v'w'} + \bar{w} \rho \overline{w'w'}) = \rho (\bar{u} X + \bar{v} Y + \bar{w} Z) -$$

$$-\bar{u}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}-\bar{v}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}-\bar{w}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}-\overline{u'\frac{\partial p'}{\partial x}}-\overline{v'\frac{\partial p'}{\partial y}}-\overline{w'\frac{\partial p'}{\partial z}}+$$

$$+\mu\left(\bar{u}\nabla^2\bar{u}+\bar{v}\nabla^2\bar{v}+\bar{w}\nabla^2\bar{w}\right)+\mu\left(\overline{u'\nabla^2u'}+\overline{v'\nabla^2v'}+\overline{w'\nabla^2w'}\right).$$

Из рассмотрения этого уравнения видно не только то, что здесь сохранены многие пульсирующие напряжения, исчезнувшие в процессе осреднения из уравнений количества движения, но и то, что существует постоянная параллель между членами для осредненного и пульсационного движений. В самом деле, поучительно разделение слагаемых в следующих уравнениях работы-энергии на две категории: для осредненного потока и для пульсационного (допустимая операция, так как уравнение для каждого из них может быть выведено путем комбинации соответствующих уравнений и компонентов скорости)

$$\bar{u}_j\frac{\partial(\rho\bar{V}^2/2)}{\partial x_j}+\rho\bar{u}_i\frac{\partial\overline{u_i'u_j'}}{\partial x_j}=\rho\bar{u}_iX_i-\bar{u}_i\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i}+\mu\bar{u}_i\frac{\partial^2\bar{u}_i}{\partial x_j\partial x_j};$$

$$\bar{u}_j\frac{\partial(\rho\overline{V'^2}/2)}{\partial x_j}+\overline{u_j'\frac{\partial(\rho V'^2/2)}{\partial x_j}}+\rho\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}=$$

$$=-\overline{u_i'\frac{\partial p'}{\partial x_i}}+\mu\overline{u_i'\frac{\partial^2u_i'}{\partial x_j\partial x_j}}.$$

Теперь проинтегрируем дифференциальные уравнения работы-энергии в заданной области пространства так, как это было проделано с уравнением движения в форме количества движения. После превращения с помощью теоремы Гаусса соответствующих объемных интегралов в поверхностные уравнение работы-энергии для осредненного потока — сравнить с уравнением (26) — принимает вид:

$$\int_S\frac{\rho\bar{V}^2}{2}\bar{u}_j\frac{\partial x_j}{\partial n}\,dS+\int_S\bar{u}_i\rho\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial x_j}{\partial n}\,dS-\int_W\rho\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_i}\,dW=$$

$$=\int_W\rho\bar{u}_iX_i\,dW-\int_S\bar{p}\,\bar{u}_i\frac{\partial x_i}{\partial n}\,dS+$$

$$+\int_S\mu\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\bar{u}_i\frac{\partial x_j}{\partial n}\,dS-\int_W\mu\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}\,dW. \quad (180)$$

Слагаемые в уравнении (180) имеют следующие значения: крайнее левое представляет приток кинетической энергии среднего движения из рассматриваемой области (т. е. скорость увеличения кинетической энергии по мере протекания жидкости через заданную область). Второе и третье слагаемые, также представляющие перенос энергии, лучше всего могут быть интерпретированы как скорости совершения работы напряжениями Рейнольдса соответственно на поверхности и внутри рас-

сматриваемой области. Первое и второе слагаемые справа — скорости, с которыми совершается работа внешних давлений и внешних сил. Третье и четвертое слагаемые — очевидно скорость совершения работы вязкими напряжениями среднего потока соответственно на поверхности и внутри области.

Но работа, совершаемая вязкими напряжениями вне рассматриваемой области (третье слагаемое справа), сохраняется полностью (так как из преобразования Гаусса ясно, что она выводится из потенциальной или пространственной производной), в то время как внутри области (последнее слагаемое) работа полностью диссипируется. Аналогия между турбулентными и вязкими напряжениями позволяет искать дальнейшее соответствие между типами работ, совершаемых в каждом случае. Действительно, раз второе слагаемое слева подобно третьему справа неизменно, третье слагаемое слева может считаться диссипативным, как и последнее справа, если допустить, что энергия, переданная средним потоком пульсационному, не может быть восстановлена. Иными словами, третье слагаемое слева представляет скорость возникновения турбулентности за счет осредненного потока (сам интеграл существенно отрицателен, так что знак минус перед ним указывает на положительную скорость возникновения турбулентности).

Соответствующее уравнение работы-энергии для вторичного движения имеет такой вид:

$$\int\limits_S \frac{\rho\overline{V'^2}}{2}\,\bar{u}_j\,\frac{\partial x_j}{\partial n}\,dS + \int\limits_S \frac{\rho\overline{V'^2}}{2}\,u'_j\,\frac{\partial x'_j}{\partial n}\,dS + \int\limits_W \rho\overline{u'_i u'_j}\,\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\,dW =$$

$$= -\int\limits_S \overline{p' u'_i}\,\frac{\partial x_i}{\partial n}\,dS + \int\limits_S \mu\,\overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right) u'_i}\,\frac{\partial x_j}{\partial n}\,dS -$$

$$- \int\limits_W \mu\,\overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}\,dW. \qquad (181)$$

Два первых слагаемых слева по аналогии с уравнением для первоначального движения представляют приток кинетической энергии турбулентности в рассматриваемую область соответственно путем конвекции и диффузии (т. е. осредненным и пульсационным потоками). Третье — скорость возникновения турбулентности (величина отрицательная до тех пор, пока это касается работы, выполняемой турбулентностью). Первое слагаемое справа — скорость выполнения работы пульсирующим давлением на поверхности области. Два последних слагаемых представляют скорости выполнения работы вязкими напряжениями турбулентности соответственно на поверхности области и внутри нее (первое из них консервативно, второе — диссипативно).

Пример 20. Написать уравнения Рейнольдса для установившегося двухмерного турбулентного потока, заключенного между параллельными стенка-

ми, и показать, что среднее давление в любом поперечном сечении имеет максимум у стенок. Весом жидкости пренебречь.

Когда ось x совпадает с направлением потока, а стенки перпендикулярны к оси y, действительны следующие условия:

а) все средние величины не зависят от времени (установившийся поток);

б) все средние величины постоянны в направлении оси z, а $\overline{w}=0$;

в) все средние величины, за исключением давления, постоянны в направлении оси x;

г) при соблюдении условий «б» и «в» уравнение неразрывности показывает, что величина $\overline{v}$ должна быть постоянной, а так как эта величина равна нулю на стенке, следовательно, она должна быть равна нулю и в потоке.

С введением этих условий уравнения Рейнольдса упрощаются:

$$0 = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y};$$

$$0 = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} - \rho \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y};$$

$$0 = -\rho \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}.$$

Второе уравнение легко интегрируется

$$\overline{p} + \rho \overline{v'^2} = f(x).$$

Так как величина $\overline{v'^2}$ на стенке равна нулю, давление здесь должно быть максимальным.

В. Изотропная турбулентность

73. Определения и иллюстрирующие соотношения. Хотя основные, только что выведенные уравнения являются точными и помогают изобразить механизм турбулентности, однако добавление еще шести неизвестных (независимые компоненты тензора турбулентных напряжений) к четырем обычным (u, v, w и p), очевидно, приводит к неопределенности задачи, так как число независимых уравнений остается прежним: три уравнения Рейнольдса и уравнение неразрывности.

В 1935 г. Тэйлор рассмотрел задачу совершенно по-новому, предложив использовать теорию непрерывной случайной функции, приняв допущение, что число независимых переменных тензора напряжений уменьшено от шести до одной, которая в случае необходимости может быть получена прямым измерением. Таким образом, он допустил, что турбулентность не только однородна (т. е. одинакова в любой точке), но также изотропна (т. е. статистически независима от ориентации, так же как и от расположения координатных осей). Отсюда

$$\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2}; \quad \overline{uv} = \overline{vw} = \overline{wu} = 0.$$

В системе турбулентности, для которой действительны эти допущения, в качестве характеристики тензора напряжений остается только одна величина из пульсаций скорости, а средняя ско-

рость (по отношению к началу координатной системы) должна быть равна нулю.

Несмотря на то, что эти изотропные условия не являются типичными ни для одного практически значимого реального потока, они оказались целесообразными, так как послужили стимулом для ученых, работающих в этой области, к постановке многих исследований, которые только недавно стали давать некоторые результаты. Отношение критического исследователя к идеализированным системам очень хорошо выразил Батчелор: «Изучение однородной турбулентности практически важно, так как, если мы поймем этот более простой случай, то мы до некоторой степени разберемся и в аспектах неоднородной турбулентности». В самом деле, Тэйлор, сделав еще один шаг в исследованиях, показал, что турбулентность в следе за прямоугольной решеткой в аэродинамической трубе примерно изотропна в плоскостях, нормальных к направлению среднего движения, по отношению к координатной системе, движущейся вместе с потоком. Это открытие с одновременным усовершенствованием анемометра с горячей нитью позволило проводить наблюдения в лаборатории и в поле, так что оба инструмента научного исследования — математический анализ и экспериментальные измерения — могли применяться одновременно.

Так как тензор напряжений Рейнольдса в изотропном движении совершенно симметричен и условия в точке почти всегда известны, основными изучаемыми параметрами в изотропной турбулентности становятся корреляции или осредненные произведения компонентов скорости в двух точках. Следует особо подчеркнуть, что этот выбор двух точек (и, конечно, трех обычных компонентов u, v и w) представляет совершенно частный случай общей статистической теории непрерывной случайной переменной. В самой общей постановке средние значения случайной функции (в данном случае, поле скоростей) определяются распределением вероятности значений функции в n различных точках, и чем меньше должна быть возможная ошибка в средних величинах, тем больше должна быть величина n. Если придерживаться этой общей постановки, то, очевидно, анализ будет настолько сложен, что чрезвычайно замедлит развитие вопроса. Только при рассмотрении простейшего частного случая и использовании минимального числа точек оказалось возможным получение вообще какого-то решения. Схе-

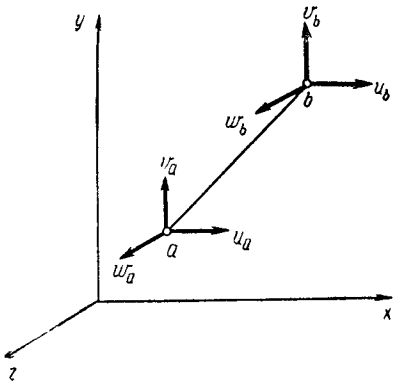


Рис. 92. Условное изображение двухточечной корреляции

ма на рис. 92 иллюстрирует применяемые в дальнейшем обозначения для этих двухточечных корреляций.

В теории стационарных случайных процессов была получена серия параметров, характеризующих любой непрерывный изотропный процесс, два из которых R_{ij} и S_{ijk} обычно употребляются при изучении турбулентности в жидкости. Оба эти параметра — тензорные функции пространства (через вектор расстояния $\vec{r}$) и времени.

Двойная корреляция R_{ij} — двухточечный тензор второго ранга с девятью компонентами, располагаемыми следующим образом для иллюстрации обычной терминологии:

$$R_{ij}(\vec{r}) = (u_a)_i\,(u_b)_j = \begin{array}{c|ccc} i \backslash j & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \overline{u_a u_b} & \overline{u_a v_b} & \overline{u_a w_b} \\ 2 & \overline{v_a u_b} & \overline{v_a v_b} & \overline{v_a w_b} \\ 3 & \overline{w_a u_b} & \overline{w_a v_b} & \overline{w_a w_b} \end{array} \qquad (182)$$

Такое расположение показывает, например, что $R_{23} = \overline{v_a w_b}$ и, так как здесь применимо правило замены, что $R_{ji}(r) = R_{ij}(-r)$. Видим также, что предельные значения при $r \to 0$ представляют собой компоненты тензора напряжений Рейнольдса, описанные в п. 70. Если применить уравнение неразрывности, то получим:

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} = 0; \qquad \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_i} = 0;$$

$$\frac{\partial R_{11}}{\partial x} + \frac{\partial R_{12}}{\partial y} + \frac{\partial R_{13}}{\partial z} = 0; \qquad \frac{\partial R_{11}}{\partial x} + \frac{\partial R_{21}}{\partial y} + \frac{\partial R_{31}}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial R_{21}}{\partial x} + \frac{\partial R_{22}}{\partial y} + \frac{\partial R_{23}}{\partial z} = 0; \qquad \frac{\partial R_{12}}{\partial x} + \frac{\partial R_{22}}{\partial y} + \frac{\partial R_{32}}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial R_{31}}{\partial x} + \frac{\partial R_{32}}{\partial y} + \frac{\partial R_{33}}{\partial z} = 0; \qquad \frac{\partial R_{13}}{\partial x} + \frac{\partial R_{23}}{\partial y} + \frac{\partial R_{33}}{\partial z} = 0.$$

В соответствии с теорией Кармана этот тензор может быть представлен также двумя скалярными функциями $F(r)$ и $G(r)$ следующим образом:

$$R_{ij}(\vec{r}) = \begin{array}{c|ccc} i & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & Fx^2 + G & Fxy & Fxz \\ 2 & Fyx & Fy^2 + G & Fyz \\ 3 & Fzx & Fzy & Fz^2 + G \end{array}$$

Здесь x, y и z — компоненты вектора $\vec{r}$. Если этот тензор дифференцируется по x, y или z, то можно доказать с помощью принципа неразрывности, что

$$4F + r\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial G}{\partial r} = 0, \tag{183}$$

где $r=|\vec{r}|$. Это уравнение показывает, что условия изотропности позволяют выразить тензор двойной корреляции только через скалярные функции.

Для экспериментов с турбулентным движением удобнее пользоваться коэффициентами продольной и поперечной корреляции скорости $f(r)$ и $g(r)$, которые определяются следующим образом (для пояснения обозначений приводится рис. 93):

$$f(r) = \frac{\overline{u_a u_b}}{\overline{u^2}}; \quad g(r) = \frac{\overline{v_a v_b}}{\overline{v^2}}. \tag{184}$$

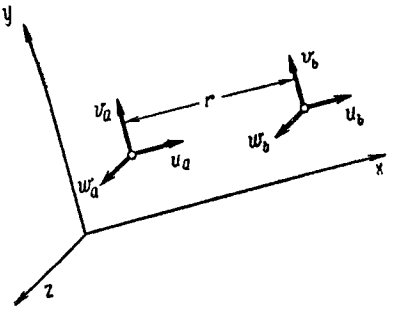


Рис. 93. Предпочтительная ориентация осей

Так как эти соотношения не зависят от ориентации координатных осей, то можно повернуть последние так, чтобы ось x стала параллельна вектору расстояния между точками. В этом случае $x=r$ и $y=z=0$. Из предыдущих тензоров следует, что

$$\overline{u^2}f(r) = \overline{u_a u_b} = Fr^2 + G; \quad F = \frac{\overline{u^2}}{r^2}(f-g);$$

$$\overline{u^2}g(r) = \overline{v_a v_b} = G; \quad G = \overline{u^2}g.$$

Следовательно, тензор может быть записан через f и g:

$R_{ij}(\vec{r}) =$

i \ j	1	2	3
1	$\overline{u^2}\left[(f-g)\frac{x^2}{r^2}+g\right]$	$\overline{u^2}(f-g)\frac{xy}{r^2}$	$\overline{u^2}(f-g)\frac{xz}{r^2}$
2	$\overline{u^2}(f-g)\frac{yx}{r^2}$	$\overline{u^2}\left[(f-g)\frac{y^2}{r^2}+g\right]$	$\overline{u^2}(f-g)\frac{yz}{r^2}$
3	$\overline{u^2}(f-g)\frac{zx}{r^2}$	$\overline{u^2}(f-g)\frac{zy}{r^2}$	$\overline{u^2}\left[(f-g)\frac{z^2}{r^2}+g\right]$

Если те же подстановки сделать в уравнении (183), то получим

$$g = f + \frac{r}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial r},$$

т. е. g и f взаимозависимы.

Не обращаясь к измерениям, можно представить общую форму графиков зависимости f и g от r. Из самих определений

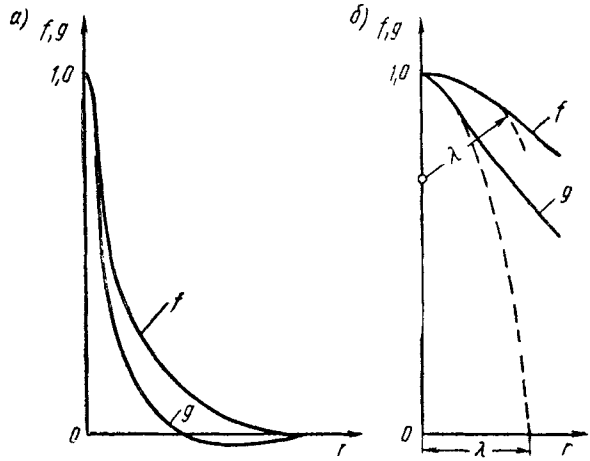


Рис. 94. Наиболее распространенные графики корреляционных функций

очевидно, что обе эти величины приближаются к единице при $r \to 0$. В соответствии с неравенством Шварца

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right),$$

дающим для потока

$$\overline{u_{ai} u_{bj}} \leqslant (\overline{u_{ai}^2}\, \overline{u_{bj}^2})^{1/2},$$

получается, что единица — это максимальное значение, которое может иметь как f, так и g. Ввиду беспорядочного, но непрерывного характера турбулентности следует ожидать, что g и f будут стремиться к нулю при $r \to \infty$ и что переход от $r = 0$ к $r = \infty$ должен быть плавным. Наконец, можно доказать, что f и g должны иметь противоположные знаки при значениях r, превышающих определенную критическую величину. На основании этих соображений заключаем, что зависимости f и g от r будут иметь форму, изображенную на рис. 94.

Разложение f в ряд Тэйлора показывает, что слагаемые высших порядков приближаются к нулю очень быстро, поэтому хорошую аппроксимацию дают два первых члена:

$$f \approx 1 + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}.$$

В результате f и g могут быть выражены через линейный параметр λ, определяемый соотношением

$$-\frac{1}{\lambda^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\Big|_{r \to 0}.$$

Таким образом, вблизи от начала

$$f \approx 1 - \frac{r^2}{2\lambda^2} \text{ и } g \approx 1 - \frac{r^2}{\lambda^2}.$$

Параметр λ, очевидно, является радиусом кривизны кривой $f(r)$ при $r=0$, так как $\partial f/\partial r \to 0$, когда $r \to 0$, или параболы $1-r^2/\lambda^2$, совпадающей с кривой g у ее вершины. Физически λ обычно рассматривается как мера диаметров самых малых вихрей (хотя и не равная им), которые в основном (как показано в п. 74) обусловливают диссипацию энергии.

Два других линейных масштаба, связанных с изотропной турбулентностью, определяются по площади под корреляционными кривыми. Это — продольный L_s и поперечный L_n масштабы:

$$L_s = \int_0^\infty f dr; \quad L_n = \int_0^\infty g dr. \tag{185}$$

Поскольку

$$g = f + \frac{r}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial r},$$

то

$$L_n = \frac{1}{2} L_s.$$

Ранее упомянутый тензор тройной корреляции S_{ijk} есть двухточечный тензор третьего ранга с 27 компонентами, представленными осредненными произведениями всевозможных комбинаций двух компонентов скорости в одной точке и одного компонента скорости в другой точке:

$$S_{ijk} = \overline{(u_a)_i (u_a)_j (u_b)_k}.$$

Так же как и в тензоре двойной корреляции, не все компоненты здесь независимы друг от друга; действительно, в случае изотропной турбулентности все компоненты равны нулю или одному из трех следующих выражений:

$$\overline{u_a^2 u_b}, \quad \overline{v_a^2 u_b}, \quad \overline{u_a v_a v_b}.$$

Для экспериментов удобнее установить значения трех соответствующих скалярных величин, обозначенных символами k, h и q:

$$k(r) = \frac{\overline{u_a^2 u_b}}{(\overline{u^2})^{3/2}}; \quad h(r) = \frac{\overline{v_a^2 u_b}}{(\overline{u^2})^{3/2}};$$

$$q(r) = \frac{\overline{u_a v_a v_b}}{(\overline{u^2})^{3/2}}. \tag{186}$$

Так как u_a и v_a не зависят от положения точки b, с помощью уравнения неразрывности можно показать, что написанные функции взаимозависимы:

$$k = -2h; \quad q = -h - \frac{r}{2} \cdot \frac{\partial h}{\partial r}.$$

Экспериментально легче всего находится значение k, поэтому его обычно выбирают в качестве единственной скалярной функции для определения тройной корреляции скорости.

Для случая изотропной турбулентности известно еще одно важное кинематическое соотношение. Если p_a — мгновенное давление в точке a, то в силу симметрии и неразрывности можно написать

$$\overline{p_a u_b} = \overline{p_a v_b} = \overline{p_a w_b} = 0.$$

74. Динамика изотропной турбулентности. Иллюстрацией способа применения вышеприведенных величин может служить динамическая задача вырождения изотропной турбулентности. Из уравнения (179) можно получить скорость вязкостной диссипации ε на единицу объема при $u=0$ и $u=u'$ в условиях изотропной турбулентности

$$\varepsilon = \mu\left[\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} + \right.$$
$$\left. + \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2}\right].$$

Полная кинетическая энергия на единицу объема

$$K = \frac{3}{2}\rho\overline{u^2}.$$

Условие изотропии приводит к соотношениям

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2} = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2},$$

так что

$$\varepsilon = 15\mu\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} = 7{,}5\mu\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}.$$

В соответствии с уравнением энергии скорость вырождения турбулентной энергии должна равняться скорости вязкостной диссипации:

$$-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial K}{\partial t} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{\partial\overline{u^2}}{\partial t} = 15\nu\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2};$$
$$\frac{\partial\overline{u^2}}{\partial t} = -10\nu\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}. \qquad (187)$$

Наконец, если подставить величину λ из соотношения

$$-\frac{1}{\lambda^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\bigg|_{r\to 0} = -\frac{1}{\overline{u^2}}\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2},$$

то закон вырождения может быть записан так:

$$\frac{d\overline{u^2}}{dt} = -10\nu\frac{\overline{u^2}}{\overline{\lambda^2}}. \qquad (188)$$

Как $\overline{\lambda^2}$, так и $\overline{u^2}$, конечно, зависят от времени. Отсюда ясно, что при заданной интенсивности турбулентности наиболее быстро вырождаются пульсации мельчайшего масштаба. Существенно, что λ значительно превышает масштабы вихрей, диссипирующих большую часть энергии заданной системы, но, возможно, еще важнее то, что λ является мерой временной постоянной вырождения T, а не только физической длиной:

$$T = \frac{\lambda^2}{10\nu}.$$

Для случая турбулентности за решеткой принятие координатной системы, движущейся вместе с потоком, позволяет приблизиться к условиям изотропности по крайней мере в нормальных плоскостях. Затем можно сделать подстановку

$$\frac{d}{dt} = \overline{u}\frac{d}{dx},$$

тогда

$$\overline{u}\frac{\partial\overline{u^2}}{\partial x} = -10\nu\frac{\overline{u^2}}{\overline{\lambda^2}}, \qquad (189)$$

где $\overline{u}$ — осредненная скорость за решеткой.

Соотношение, описывающее изменения корреляционной функции f от времени (или, используя вышеприведенное равенство, от расстояния до решетки), может быть выведено комбинацией уравнений Навье — Стокса со скалярами f, g, k, q и h, определенными для изотропной турбулентности. Если уравнение для

x-компонента скорости в точке a умножить на y-компонент скорости в точке b, то получается:

$$v_b \frac{\partial u_a}{\partial t} + v_b u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} + v_b v_a \frac{\partial u_a}{\partial y} + v_b w_a \frac{\partial u_a}{\partial z} =$$

$$= -\frac{v_b}{\rho} \cdot \frac{\partial p_a}{\partial x} + \nu v_b \nabla^2 u_a.$$

По условиям неразрывности

$$u_a \left(\frac{\partial v_b u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_b v_a}{\partial y} + \frac{\partial v_b w_a}{\partial z} \right) = 0.$$

Далее, так как $\overline{p_a v_b} = 0$,

$$-\overline{\frac{v_b}{\rho} \cdot \frac{\partial p_a}{\partial x}} = 0.$$

Если, наконец, повернуть оси до положения, указанного на рис. 93, то переменные x, y и z будут соответствовать переменным, использованным для определения f, g, k, q и h, а сумма вышеприведенных равенств может быть осреднена и упрощена:

$$v_b \frac{\partial u_a}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \overline{u_a u_a v_b} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u_a v_a v_b} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_a w_a v_b} = \nu \nabla^2 \overline{u_a v_b}.$$

Подобным же образом уравнение Навье — Стокса для v_b может быть умножено на u_a, чтобы получить

$$u_a \frac{\partial v_b}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \overline{u_a u_b v_b} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u_a v_b v_b} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_a w_b v_b} = \nu \nabla^2 \overline{u_a v_b}.$$

Наконец, используя полученные ранее зависимости для f и h, выраженные через u_a, v_a, w_a и v_b, и соотношения $\overline{u_a w_b v_b} = -\overline{u_b w_a v_a}$ и т. д., можем записать уравнение для изменения f от времени:

$$\frac{\partial (f\overline{u^2})}{\partial t} + 2(\overline{u^2})^{3/2} \left(\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{4}{r} h \right) = 2\nu \overline{u^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right). \quad (190)$$

Интересно посмотреть, что дает это уравнение для разных стадий вырождения. В последней стадии, например, тройная корреляция или члены переноса пренебрежимо малы по сравнению с двойной корреляцией или диссипативными членами, чем определяется граничное условие. Это граничное условие может быть сделано более наглядным, если равенство (190) переписать следующим образом:

$$\frac{\partial (f\overline{u^2})}{\partial t} = 2\nu \overline{u^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sqrt{\overline{u^2}}}{\nu} h \right).$$

В конечных стадиях как $\overline{u^2}$, так и h становятся малыми и

$$\frac{\partial f}{\partial r} \gg \frac{h\sqrt{\overline{u^2}}}{\nu}.$$

Если пренебречь последним слагаемым, то уравнение сведется к следующему:

$$\overline{u^2}\,(vt)^{5/2} = \text{const},$$

т. е. скорость вырождения на последних стадиях обратно пропорциональна времени в степени $^5/_2$.

Интересно рассмотреть вырождение изотропной турбулентности в начальных стадиях, когда влияние вязкости мало по сравнению с инерцией. Тогда уравнение (190) может быть упрощено

$$\frac{\partial(f\overline{u^2})}{\partial t} + 2(\overline{u^2})^{3/2}\left(\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{4h}{r}\right) = 0.$$

Если решить это уравнение относительно скорости вырождения и использовать определение λ для получения скорости изменения масштабов, получим такие результаты:

$$\overline{u^2}\,t^{10/7} = \text{const}; \quad \lambda^2 = 7\nu t.$$

Это сходство в представлении двух крайних значений приведенных равенств естественно приводит к предположению, что вырождение может быть описано следующими зависимостями:

$$\overline{u^2} \propto t^{-n}; \quad \lambda^2 = \frac{10}{n}\nu t,$$

где n — функция числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{L_p\sqrt{\overline{u^2}}}{\nu}$, меняющаяся в пределах от $^{10}/_7$ до $^5/_2$. Это общее соотношение было подтверждено экспериментально для турбулентности в аэродинамической трубе.

75. Частотное распределение кинетической энергии. Наряду с корреляциями или осредненными произведениями, употреблявшимися до сих пор для описания поля турбулентного потока, можно анализировать пульсации скорости экспериментально по их спектрам, подобно тому как луч света делят на спектральные компоненты. Эта аналитическая техника, основанная на эйлеровом представлении скорости в фиксированной точке как функции времени, была впервые предложена Тэйлором вместо корреляционной функции $f(r)$, определенной уравнением (184). Применение спектральной функции не ограничивается изотропной турбулентностью, фактически для нее не обязательно равенство нулю осредненной скорости, что должно быть непременным условием для истинной изотропности. Относительно простой одномерный спектр Тэйлора позднее был сведен Гейзенбергом

к трехмерному, а Кампо де Ферье и Батчелор независимо друг от друга использовали общий спектральный тензор. Последние представления более сложны, но они во многих важных деталях сходны с одномерным спектром, так что изучение последнего может иллюстрировать их основные принципы.

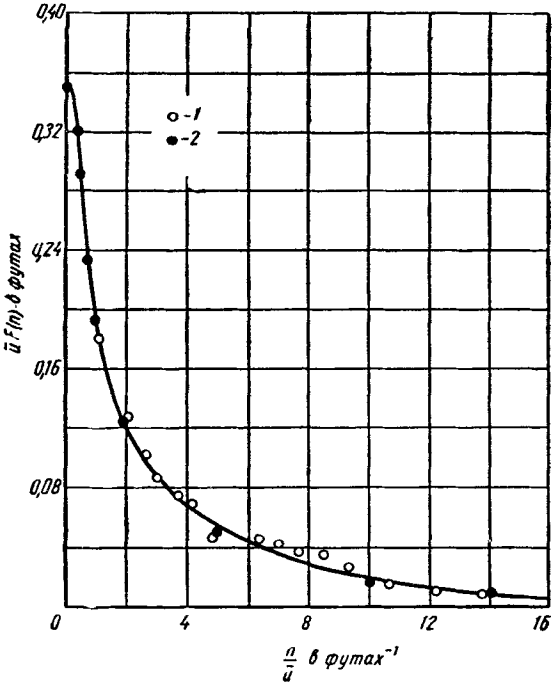


Рис. 95. Типовой турбулентный спектр

1 — результаты измерений; *2* — результаты вычислений по корреляционным соотношениям из непосредственных измерений

$$\overline{u}F(n)=4\int_0^\infty f(x)\cos\frac{2\pi nx}{\overline{u}}\,dx$$

Если продольную пульсацию u' скорости в фиксированной точке разложить на гармонические компоненты, то среднеквадратичное отклонение $\overline{u'^2}$ будет равно общему вкладу (наложению) всех частот (рис. 95). Отсюда очевидно, что если $F(n)$ представляет частотную функцию, то

$$\int_0^\infty F(n)\,dn = 1. \qquad (191)$$

Для уяснения физического смысла понятия спектра полезно представить турбулентность как скопление вихрей различных размеров, проносимых мимо фиксированной точки средним течением. Пульсации скорости, соответствующие меньшим вихрям, будут происходить гораздо быстрее, чем пульсации, вызванные вихрями больших размеров, так что увеличение частоты n может быть рассмотрено как соответствующее уменьшение размеров вихрей при данной осредненной скорости.

При рассмотрении продольной корреляции $f(x)$ видно, что корреляция должна уменьшаться медленнее при преобладании больших вихрей; отсюда можно сделать вывод о существовании прямой связи между спектральным распределением турбулентной энергии и продольным масштабом L_s, введенным в уравнение (185). Эта связь может быть установлена, если допустить, как это сделано в п. 74, что пространственные и временные производные связаны равенством

$$\frac{d}{dt} = \bar{u}\frac{d}{dx}.$$

Это соотношение обычно считается пригодным при $u'/\bar{u} << 1$, и тогда продольная корреляция записывается так:

$$f(x) = \frac{\overline{u'(t)\,u'(t+x/\bar{u})}}{\overline{u'^2}}.$$

Применив теорему Парсеваля, Тэйлор доказал, что правая часть этого равенства представляет собой результат преобразования спектра в ряд Фурье, так что искомое соотношение между спектром и корреляцией таково:

$$f(x) = \int_0^\infty F(n)\cos\frac{2\pi n x}{\bar{u}}\,dn. \qquad (192)$$

Из интегральной теоремы Фурье следует, что спектр представляет собой также разложение корреляции в ряд Фурье:

$$F(n) = \frac{4}{\bar{u}}\int_0^\infty f(x)\cos\frac{2\pi n x}{\bar{u}}\,dx. \qquad (193)$$

Таким образом, если величина $F(n)$ или $f(x)$ может быть измерена в точке, то вторая характеристика вычисляется по выражению (192) или (193).

Так как спектральное распределение и корреляция непосредственно связаны с масштабом пульсаций, они являются ценным источником информации о механизме образования и диссипации турбулентной энергии. Хотя различные исследователи вывели несколько соотношений, подобных уравнению (190), ни одно из них не могло быть применено, так как каждое неизбежно содержало больше неизвестных, чем существовало независимых урав-

нений. В этих условиях необходимо было либо сделать предположение о взаимосвязи между переменными в процессе вырождения, либо непосредственно измерить доминирующий масштаб. Результаты, приведенные выше для начального и конечного периодов, типичны для общего вида допущений, которые делаются при недостатке информации о масштабе. Другим предположением, получившим широкое распространение, было допущение Кармана о том, что функции f и k или им подобные сохраняют общую форму в процессе вырождения. Хотя эта теория о самосохранении была полезным математическим приемом, она имела малое физическое обоснование и плохо согласовывалась с измеренным спектром на участке между рассматриваемыми точками.

Подобная же теория, но основанная на физических гипотезах, была предложена Колмогоровым. Она имеет три важные характеристики:

1) турбулентность во временном и пространственном объеме G общего потока будет всегда существенно изотропна, если G достаточно мало, а число Рейнольдса достаточно велико;

2) турбулентные характеристики в названном объеме однозначно определяются скоростью диссипации энергии на единицу массы ε/ρ и кинематической вязкостью. Это — первая гипотеза подобия;

3) распределение вероятности корреляций между точками в объеме будет зависеть только от ε до тех пор, пока расстояние между точками велико по сравнению с линейным параметром L_k. Длина L_k определяется через основные параметры ε/ρ и ν на основании теории размерностей:

$$L_k = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon/\rho}\right)^{1/4} .$$

Это — вторая гипотеза подобия.

Основной постулат, положенный в основу теории Колмогорова, заключается в том, что граничные условия потока не влияют непосредственно ни на какие детали поля скоростей, за исключением тех, которые характеризуются теми же длинами, что и размеры границ. Таким образом, крупномасштабные компоненты турбулентности образуются самим средним потоком благодаря работе по преодолению вязких или рейнольдсовых напряжений. Эти крупномасштабные пульсации в свою очередь по инерции вызывают пульсации более мелкого масштаба и так далее до тех пор, пока масштаб не сделается настолько малым, что вязкие напряжения становятся преобладающими и кинетическая энергия начинает непосредственно переходить в тепло. Даже при самых крупных масштабах в процессе, конечно, имеются потери и часть энергии диссипирует. С уменьшением масштаба размеры потери энергии увеличиваются, так что линейный параметр L_k турбулентности, соответствующей наибольшей диссипации энергии, частично зависит от размеров границ. Дейст-

вительно, этот масштаб диссипации L_k зависит от числа Рейнольдса среднего движения — с увеличением Re, как показывают эксперименты (при сохранении геометрии границ неизменной), изменение в турбулентности сводится к образованию все меньших вихрей.

Из этих соображений следует, что к крупномасштабным компонентам турбулентности поля, зависящим от геометрии границ, и к компонентам мельчайших масштабов, для которых поток целиком вязок, невозможно применить единую теорию. Применимость теории Колмогорова ограничена внутренним масштабом и объемом, размеры которого отличны от местного граничного масштаба L. Таким образом, эта теория может применяться только к системам, для которых число Рейнольдса $\mathrm{Re}=VL/\nu$ настолько велико, что $L_k \ll L$. Это требование больших чисел Рейнольдса задерживает экспериментальную проверку гипотезы, хотя она широко известна уже более десяти лет. Экспериментальные исследования в этом направлении пока очень немногочисленны.

Пример 21. Доказать следующее соотношение, включенное в вывод уравнения (187):

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} = -\frac{\overline{u^2}}{\lambda^2}.$$

Последовательное дифференцирование выражения зависимости f и g дает:

$$g = f + \frac{r}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial r};$$

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{r}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}.$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = 2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{r}{2}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}.$$

Так как в пределе $r\to 0$, то получаются следующие равенства:

$$\overline{u^2}\frac{\partial^2 f(0)}{\partial r^2} = \left.\frac{\partial^2 \overline{u_a u_b}}{\partial x_a \partial x_b}\right|_{r\to 0} = \lim_{r\to 0}\overline{\frac{\partial u_a}{\partial x_a}\cdot\frac{\partial u_b}{\partial x_b}} = \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2};$$

$$\overline{u^2}\frac{\partial^2 g(0)}{\partial r^2} = \left.\frac{\partial^2 \overline{v_a v_b}}{\partial x_a \partial x_b}\right|_{r\to 0} = \lim_{r\to 0}\overline{\frac{\partial v_a}{\partial x_b}\frac{\partial v_b}{\partial x_a}} = \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}.$$

Далее, так как $\frac{r}{2}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}\to 0$ при $r\to 0$,

$$\frac{\partial^2 g(0)}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 f(0)}{\partial x^2},$$

так что

$$2\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}.$$

Из определения λ следует

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} = \overline{u^2}\frac{\partial^2 f(0)}{\partial x^2} = \overline{u^2}\,\frac{-1}{\lambda^2}.$$

Г. Турбулентная диффузия

76. Описательные соотношения. Как было показано во вводной части этой главы, турбулентность играет важную роль в потоке жидкости, поскольку она оказывает значительное влияние на такие важнейшие характеристики потока, как потеря энергии, сопротивление трения и перемешивание. Некоторые детали механизма диссипации энергии исследуются с помощью уравнения энергии с несколькими специфическими приложениями; влияние турбулентности на перенос количества движения показано в виде измененного уравнения количества движения (линейного), а влияние ее на сопротивление трения показано с большей подробностью в следующей главе; некоторые существенные характеристики перемешивания будут рассмотрены здесь.

Если в поле турбулентного потока имеется местная неоднородность (тепловая, оптическая, химическая или механическая), турбулентные пульсации приводят к распространению ее по все увеличивающемуся объему потока. Это перераспределение, или турбулентная диффузия, существенно отличается от обычной диффузии, вызванной молекулярным перемешиванием. Механизм последнего явления довольно хорошо известен, поскольку оно составляет важную часть кинетической теории газов, но это очень мало помогает в вопросе изучения макроскопической диффузии турбулентности. Как будет показано в части Д, идея аналогичности вихревой и молекулярной вязкости имеет серьезные недостатки во многих случаях, и для более удовлетворительного решения следует выбирать модель, основанную на статистической механике. Таким образом, методы статистики должны быть применены к турбулентной диффузии так, чтобы влияние состояния потока можно было добавить к действию молекулярного перемешивания. Парадоксально, что этот процесс приводит к коэффициенту диффузии, тесно связанному с вихревой (виртуальной) вязкостью.

Еще раз подчеркнем, что применяемые с давнего времени описательные методы неудовлетворительны, поэтому должны быть разработаны новые методы. До сих пор в данной главе использовалась исключительно эйлеровская концепция скорости в фиксированной точке как функции времени, теперь необходимо остановиться на методе Лагранжа, исследующем движение отдельной частицы жидкости. При пользовании этой техникой распространение любых материальных частиц может быть определено статистически из чисто кинематических соотношений. Отсюда следует, что перемещение частицы жидкости в течение некоторого произвольного периода времени является важной переменной. Если частица в момент времени $t=0$ находится в

начале координатной системы, то координаты ее соответствующего перемещения будут равны:

$$x = \int_0^t u\,dt; \quad y = \int_0^t v\,dt; \quad z = \int_0^t w\,dt,$$

где u, v и w — компоненты скорости частицы.

Очевидно, если скорость — величина непрерывно пульсирующая, тогда все частицы будут следовать по непрерывным, но нерегулярным траекториям; перемещение этих частиц в течение любого интервала времени может быть охарактеризовано количественно только статистически. Статистические зависимости, впервые предложенные для этой цели Тэйлором, представляют собой коэффициенты корреляции Лагранжа:

$$R_{Lx} = \frac{\overline{u(0)\,u(t)}}{\sqrt{\overline{[u(0)]^2}}\,\sqrt{\overline{[u(t)]^2}}}; \quad R_{Ly} = \frac{\overline{v(0)\,v(t)}}{\sqrt{\overline{[v(0)]^2}}\,\sqrt{\overline{[v(t)]^2}}};$$

$$R_{Lz} = \frac{\overline{w(0)\,w(t)}}{\sqrt{\overline{[w(0)]^2}}\,\sqrt{\overline{[w(t)]^2}}}.$$

Как и ранее, черточки над величинами означают, что взяты средние их значения, но в этом случае осредняются скорости большого числа частиц, последовательно проходящих через начало координатной системы и затем продолжающих двигаться по индивидуальным траекториям в течение периода времени t_l. Это среднее значение иногда называется общим (или согласованным) средним.

Очевидно, что корреляции, базирующиеся на этом типе средних величин, будут функциями пространства, времени и интервала времени t_l. Для каждой из этих корреляций масштаб времени Лагранжа определяется как площадь под соответствующей кривой $R = f(t_l)$:

$$T_{Lx} = \int_0^\infty R_{Lx}\,dt_l \text{ и т. д.}$$

В отличие от предыдущих масштабов он принимается без корня, чтобы корреляция стремилась к нулю при безграничном увеличении интервала времени.

77. Уравнение диффузии. Как и следовало ожидать, математические представления общей проблемы турбулентной диффузии очень сложны, поэтому необходимы некоторые упрощения. С целью упрощения рассматриваются следующие системы: статистически установившаяся, в которой корреляции будут зависеть только от расстояния и интервала времени t_l; однородная, в которой они будут зависеть только от t_l; изотропная, в которой три соотношения и, конечно, три масштаба будут идентичны.

Важная информация может быть получена при рассмотрении в качестве первого шага изотропного случая.

Так как при изотропной турбулентности $\overline{u^2}=\overline{v^2}=\overline{w^2}$ и $\overline{u}=\overline{v}=\overline{w}=0$, единственный член, содержащий скорость, достаточен для представления системы, а среднее перемещение частиц, которые проходят через данную точку, равно нулю. Поэтому большое количество таких перемещений в плане будет совершенно симметрично относительно точки и может рассматриваться как множество частиц, распространяющихся неограниченно со временем. Это множество может быть описано статистически в виде среднего квадрата или отклонения $\overline{r^2}$ радиального расстояния r составляющих его частиц. Рассмотрим следующий определенный интеграл, осредненный для частиц, проходящих через начало координат в момент времени T и находящихся в движении со времени $t=0$; очевидно, что

$$\overline{\int_0^T u_T u_t dt} = \overline{u_T \int_0^T u_t dt} = \overline{u_T r} = \overline{r\,(dr/dt)_{t=T}},$$

где r — расстояние между положениями частицы в момент времени $t=0$ и $t=T$ (начало координат); $u_T=dr/dt$ в момент времени T. Тогда в соответствии с определением корреляции

$$\overline{u^2}R_L = \overline{u_T u_t},$$

где u_T и u_t — соответственно скорость частиц, проходящих через начало координат, и скорость их в последующий (или предыдущий) момент времени t. Отсюда

$$\overline{r\,(dr/dt)_{t=T}} = \overline{\left(\frac{d}{dt}\cdot\frac{r^2}{2}\right)_{t=T}} = \overline{u^2}\int_0^T R_L dt.$$

Для получения отклонения может быть составлен интеграл

$$\overline{r^2} = 2\overline{u^2}\int_0^T\int_0^\xi R_L dt d\xi.$$

Это выражение, определяющее также отклонение интервала времени $\Delta t=T$, после прохождения которого частицы сконцентрируются в начале координат (вследствие симметрии явления при $t=T$), может быть названо основным уравнением турбулентной диффузии. Оно показывает, что изменение перемещений частиц жидкости и, следовательно, любого, связанного с этим изменением, свойства жидкости зависит от времени, интенсивности турбулентности и формы корреляционной кривой Лагранжа.

Определенные важные характеристики могут быть установлены непосредственно из предыдущего уравнения. Например, если $T \ll T_1$, где T_1 — время, за которое корреляция становится равной 0, тогда R_Z практически равно единице и $\overline{r^2}=\overline{u^2}T^2$.

Последнее равенство может быть интерпретировано следующим образом: осредненный корень квадратный из расстояния, проходимого частицей, прямо пропорционален интенсивности турбулентности и времени первоначального периода диффузии. Это вполне согласуется с тем, что мы предполагали интуитивно.

По мере продолжения диффузионного процесса отклонение растет в соответствии с рассматриваемым уравнением; это происходит до тех пор, пока в какой-то момент времени, больший, чем масштаб времени Лагранжа T_L, внутренний интеграл становится постоянным (равным, конечно, T_L). Отклонение при этом составляет

$$\overline{r'^2} = 2T_L\overline{u^2}T.$$

Для потока с осредненной скоростью $\bar{u}$ и поперечной пульсацией скорости v' уравнение приводится к виду

$$\frac{d\overline{y^2}}{dx} = \frac{2\overline{v'^2}}{\bar{u}^2}\int_0^x R_{Ly}dx. \qquad (194)$$

Это соотношение может быть использовано для определения интенсивности турбулентности $\sqrt{\overline{v'^2}}$ и оценки вихревой диффузии D, а также установления диффузионной длины L_y с помощью экспериментально определенных величин при известном поперечном распространении частиц. Если, например, в точку потока вводится краска или подобное ей вещество, распределение ее концентрации c может быть определено в различных сечениях, тогда функция $c(y)$ анализируется подобно любому статистическому распределению. Полученная величина $\sqrt{\overline{y^2}}$ может быть затем нанесена на график в функции расстояния x от источника краски, и интенсивность турбулентности вычислена из предельного наклона кривой при $x\to 0$ и $R_{Ly}\to 1$:

$$\frac{d^2\overline{y^2}}{dx^2} = \frac{2\overline{v'^2}}{\bar{u}^2}\bigg|_{x\to 0};$$

$$\sqrt{\overline{v'^2}} = \bar{u}\frac{d\sqrt{\overline{y^2}}}{dx}\bigg|_{x\to 0}.$$

Подобным же образом может быть найдено приближенное значение вихревой диффузии D — по предельному наклону кривой $\overline{y^2}$ — функции x, когда x растет. Поскольку корреляция R_{Ly} становится равной нулю на большом расстоянии вдоль потока, диффузионная длина может быть определена как площадь, ограниченная корреляционной кривой:

$$L_x = \int_0^{x_{R_{Ly}=0}} R_{Ly}dx.$$

Диффузия D определяется так:

$$D = \frac{\overline{u}}{2} \cdot \frac{d\overline{y^2}}{dx}\Bigg|_{x > x_{R_L} = 0}$$

Если диффузия рассматривается подобно так называемой вихревой вязкости как произведение интенсивности и масштаба процесса турбулентного перемешивания, тогда этот масштаб равен

$$L_{My} = \frac{D}{\sqrt{\overline{v'^2}}}.$$

Необходимо отметить, что молекулярная диффузия также будет способствовать распространению тепла или любой другой неоднородности в турбулентном потоке, и если число Рейнольдса или отношение D/ν мало, эта диффузия должна быть принята во внимание, так как в этом случае она достаточно велика. Общее отклонение, естественно, равно сумме независимых переменных, обусловленных молекулярной и турбулентной диффузией.

Пример 22. Используя следующие данные, полученные экспериментально для оси открытого канала с турбулентным водным потоком, где средняя скорость составила 0,65 фута в *сек*, определить среднее значение корня квадратного из интенсивности турбулентности и коэффициент диффузии.

x в футах	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$y^2 \cdot 10^4$ в квадратных футах . .	0,7	2,5	5,4	9	12,5	16,3	20,1

При $x=0{,}1$ фута значение первоначального уклона $d\sqrt{\overline{y^2}}/dx$ будет равно 0,083. Интенсивность турбулентности составит

$$\sqrt{\overline{v'^2}} = \overline{u}\,\frac{d\sqrt{\overline{y^2}}}{dx} = 0{,}65 \cdot 0{,}083 = 0{,}054 \ \textit{фута/сек}.$$

Коэффициент диффузии может быть определен из уклона кривой между точками $x=0{,}6$ и $x=0{,}7$. Этот уклон равен

$$\frac{20{,}1 - 16{,}3}{0{,}1 \cdot 10^4} = 3{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ футов}.$$

Следовательно:

$$D = \frac{\overline{u}}{2} \cdot \frac{\overline{dy^2}}{dx} = \frac{0{,}65}{2}\ 3{,}8 \cdot 10^{-3} = 1{,}24 \cdot 10^{-3} \text{ квадратных футов в 1 } \textit{сек}.$$

Если величины $\sqrt{\overline{y^2}}$ и $\overline{y^2}$ нанести на график как функции от x, то можно увидеть, что уклоны, принимаемые для трех выбранных точек, определяют предельные значения искомых величин вполне удовлетворительно.

Д. Турбулентный поток со сдвигом

78. Феноменологические теории. Хотя ценность уравнений движения Навье — Стокса в форме Рейнольдса для исследования турбулентного потока вполне очевидна, необходимо найти дополнительные соотношения между характеристиками

турбулентности и характеристиками осредненного течения, ибо, как было отмечено, неизвестных имеется больше, чем независимых уравнений. В математической модели изотропной турбулентности эта трудность преодолена введением упрощений, которые входят в состав модели (включая отсутствие изменения осредненной скорости вследствие исключения самой этой скорости). Такая турбулентная область с теоретической точки зрения представляет интерес, хотя в этом случае могут наблюдаться только диффузия и диссипация, но не возникновение турбулентности. Важно отметить, что условие изотропности достигается в распадающейся области потока ниже решетки, но из-за отсутствия интенсивного сдвига в потоке непосредственно за решеткой турбулентность здесь не возникает. Таким образом, изучение изотропной турбулентности помогает общему пониманию явлений турбулентного потока, но не может вследствие самой природы ограничений, которые он (поток) включает, широко применяться для решения практических проблем потока со сдвигом.

Другие попытки преодолеть трудности в решении уравнений турбулентного потока могут быть классифицированы как феноменологические теории, поскольку они появились при наблюдении, что в турбулентном потоке со сдвигом вследствие процесса турбулентного перемешивания существует поперечное перемещение потока между зонами высоких и низких скоростей, и заключении из этого, что процесс перемешивания и изменение скорости связаны друг с другом.

Первая формальная попытка оценки воздействия турбулентности на осредненное течение была сделана Сен-Венаном, который ввел коэффициент перемешивания ε в следующие уравнения:

$$\sigma_i = -p + 2\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i; \quad \tau_{ij} = \varepsilon\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{195}$$

где σ_i представляет собой три нормальных напряжения в точке, а τ_{ij} — шесть касательных напряжений. Эти уравнения особенно интересны в свете того факта, что они предшествовали введению Стоксом вязкости μ в уравнения Навье—Стокса. Когда эти соотношения формулировались, Сен-Венан уже ясно представлял, что ε не является константой и может изменяться от точки к точке в зависимости от интенсивности и масштаба турбулентных пульсаций.

Сделанные в последующие годы различные предположения, касающиеся соотношений между ε и условиями осредненного потока, привели к решениям для распределения скорости в различных граничных условиях; большинство из них дано Буссинеском; однако ни одно из этих предположений не было достаточно надежным или пригодным, чтобы получить всеобщее одобрение Попытка дать такое решение для трехмерного турбулентного потока со сдвигом сравнительно недавно была предпринята, и довольно успешно, школой Прандтля (см. главу VIII).

Сравнение с уравнениями Рейнольдса показывает, что коэффициент ε Сен-Венана включает в себя влияние как молекулярной вязкости, так и турбулентного переноса количества движения. В случае доминирующего значения вязкости (ламинарное течение) $\varepsilon = \mu$; преобладание же в потоке турбулентности приводит к следующим выражениям:

$$2\varepsilon \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\rho \overline{u'^2}; \quad \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) = -\rho \overline{u'v'} \text{ и т. д.} \qquad (196)$$

По аналогии с кинетической теорией газов Прандтль допустил, что массы жидкости, перемещаемые в поперечном направлении, переносят с собой среднюю скорость (и, следовательно количество движения) их начальной точки. Так, в двухмерном потоке, движущемся со скоростью $\bar{u}$ в направлении x, обычная пульсация скорости u', образуемая вследствие переноса, может быть представлена так:

$$u' \propto l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y},$$

где l — так называемая длина пути турбулентного перемешивания — расстояние, на котором происходит перемещение.

Далее, если принять во внимание, что вертикальная пульсация скорости v' пропорциональна u', а турбулентное напряжение $\rho \overline{u'v'}$ пропорционально их произведению, получим

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \qquad (197)$$

где l включает в себя коэффициенты пропорциональности.

Абсолютная величина градиента принимается такой, чтобы знаки τ и градиента соответствовали друг другу.

Как и в случае коэффициента перемешивания Буссинеска, длине пути перемешивания должен быть придан в некотором смысле особый вид, чтобы можно было приступить к анализу. Преимуществом метода Прандтля является то, что в качестве переменной, возводимой в степень, здесь рассматривается просто длина, для которой гораздо легче сделать надежные предположения, чем для коэффициента ε, являющегося произведением длины и скорости. Действительно, понятие длины пути перемешивания может рассматриваться как допущение, сделанное независимо от вида ε:

$$\varepsilon = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|. \qquad (198)$$

Решение, полученное таким образом, приведено в главе VIII.

Рассмотрим здесь в качестве примера применение понятия длины пути перемешивания к решению задачи распределения скорости вблизи стенки. Если вблизи стенки τ равно τ_0, а длину

пути перемешивания l можно считать пропорциональной расстоянию y от стенки, тогда

$$\tau_0 = \rho k^2 y^2 \left(\frac{\overline{du}}{dy}\right)^2.$$

Решение этого уравнения обычными способами дает хорошо известную логарифмическую зависимость, характеризующую распределение скорости:

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = \frac{1}{k} \ln y + C.$$

Значение k обычно принимается равным 0,4. Интересно отметить, что это уравнение лучше описывает распределение скорости в трубе, где $\tau \neq \tau_0$, чем распределение скорости в пограничном слое, где τ равно τ_0. Так как в трубе $\tau = \tau_0(1 - y/r_0)$, эта кажущаяся аномалия может быть устранена простым допущением, что

$$l = ky \sqrt{1 - \frac{y}{r_0}};$$

никакое другое допущение не может быть более логичным.

Тэйлор еще в 1915 г. пришел к подобному представлению, рассмотрев, однако, вместо предположения о сохранении первоначального количества движения в единице объема при поперечном его переносе проблему сохранения вихря. В нескольких случаях теория переноса вихря Тэйлора сводится к теории переноса количества движения Прандтля, но в других случаях наблюдается существенная разница в распределениях скоростей, полученных по двум различным теориям.

Карман (в этом, как известно, состояла его гипотеза), пытался установить связь между характеристиками турбулентности и характеристиками осредненной скорости. Подобно Прандтлю он предположил, что турбулентные пульсации пропорциональны длине l, градиенту осредненной скорости $\overline{du}/dy$ и интенсивности напряжения $\rho l^2 (\overline{du}/dy)^2$. Длина l, однако, считалась пропорциональной отношению $\overline{du}/dy$, деленному на $\overline{d^2u}/dy^2$. Таким образом, интенсивность напряжения является функцией первой и второй производных средней скорости

$$\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = -k \frac{(\overline{du}/dy)^2}{\overline{d^2u}/dy^2}.$$

Если предположить, что напряжение постоянно и равно τ_0, интегрирование этого уравнения приводит к логарифмическому распределению скорости. Когда $\tau = \tau_0(1 - y/r_0)$, получается решение более сложного вида, которое почти так же хорошо соответствует опытным данным, как и решение простого вида.

Феноменологические теории подвергались серьезной критике; возражения обычно касались различных выводов, относящихся к особенностям структуры турбулентности. Тем не менее эти теории были удобны, хотя решения, полученные с их помощью, только грубо приблизительны. Понятия, используемые в этих теориях, слишком упрощенны, главным образом потому, что они относят турбулентную структуру в точке к осредненной скорости в той же точке, а не в некоторой площади влияния. При сравнении простоты соотношений со сложностью явления вызывает удивление степень их полезности, а не их недостатки.

79. Измерения, выполненные в потоках со сдвигом. Хотя турбулентность относится к явлениям, происходящим в потоках со сдвигом, и непосредственные измерения турбулентных пульсаций практикуются уже в течение тридцати лет, надежные данные, характеризующие турбулентные потоки, удивительно ограниченны. Большая часть этих данных получена в пограничном слое или в безграничных потоках, подвергнутых обсуждению в главах VII и VIII. В настоящей главе рассматривается сравнительно недавнее исследование равномерного потока в трубах, проведенное Лауфером; это исследование дает понятия некоторых основных характеристик турбулентности в практически простейшем типе турбулентного потока.

Распределение осредненной скорости для двух различных чисел Рейнольдса, установленное Лауфером, показано на рис. 96, а соответствующее распределение трех компонентов турбулентности (и одного напряжения Рейнольдса) — на рис. 97. Упомянутая скорость для осредненного течения может быть взята на оси трубы (см. рис. 96); скорость сдвига для турбулентного потока равна $u_\tau = \sqrt{\tau_0/\rho}$. В обоих случаях используются два радиальных масштаба, что позволяет увеличить зону ламинарного течения в непосредственной близости от стенки.

Для условий, исследованных Лауфером, уравнения энергии осредненного и турбулентного движений могут быть представлены в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{r}{a}\tau_0\frac{d\bar{u}}{dr} = \rho\overline{u'v'}\frac{d\bar{u}}{dr} - \mu\left(\frac{d\bar{u}}{dr}\right)^2; \\ &\rho\overline{u'v'}\frac{d\bar{u}}{dr} + \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left[r\overline{v'\left(\frac{\rho V'^2}{2}+p'\right)}\right] - \\ &-\mu\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{\overline{V'^2}}{2}\right)\right] + \mu\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (199)$$

Выражение в левой части первого уравнения представляет скорость в единице объема, с которой теряется энергия осредненным потоком; первый член в правой части — скорость возникновения турбулентности, а второй член — скорость диссипации энергии осредненным потоком. Во втором уравнении первый

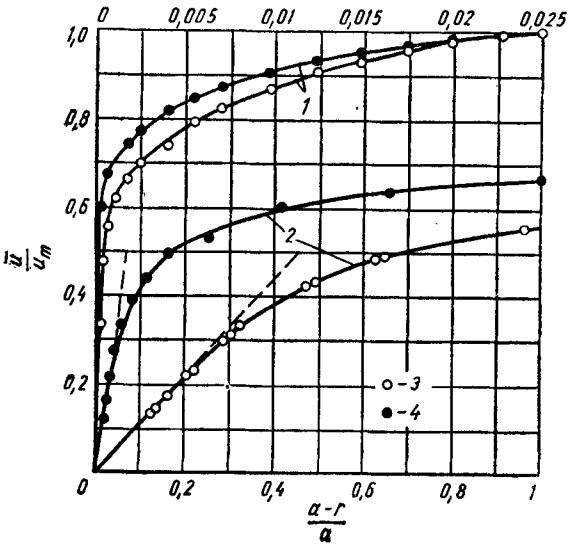


Рис. 96. Распределение осредненной скорости в гладкой трубе

1 — нижняя шкала; *2* — верхняя шкала; *3* — Re=50 000; *4* — Re=500 000

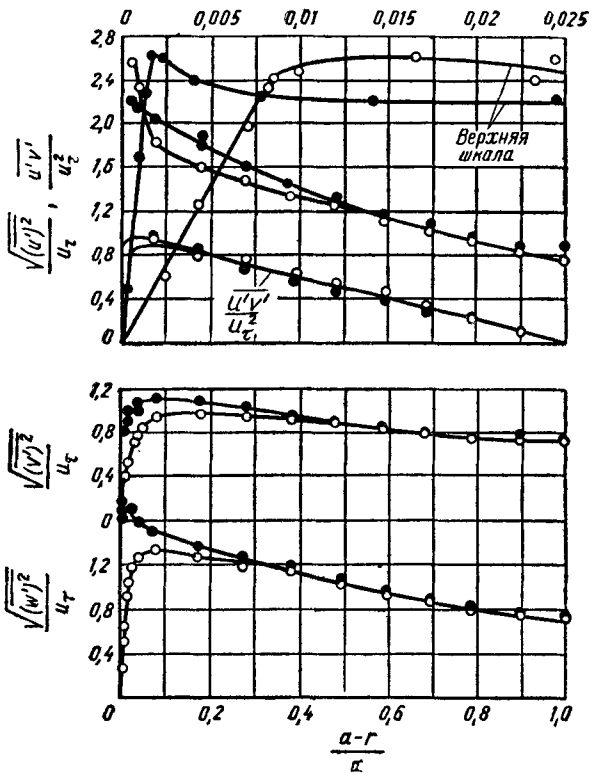


Рис. 97. Распределение интенсивности турбулентности в трубе

член — скорость возникновения турбулентности; второй — скорость поперечной диффузии турбулентности, третий — выражение диффузии, которое существенно только вблизи стенки, и четвертый — скорость диссипации энергии самой турбулентностью.

Подсчитанные характеристики осредненного потока вблизи стенки показаны в безразмерных величинах на рис. 98, где скорость сдвига u_τ и отношение ν/u_τ используются в качестве скорости и длины. Две кривые осредненной скорости на рис. 96

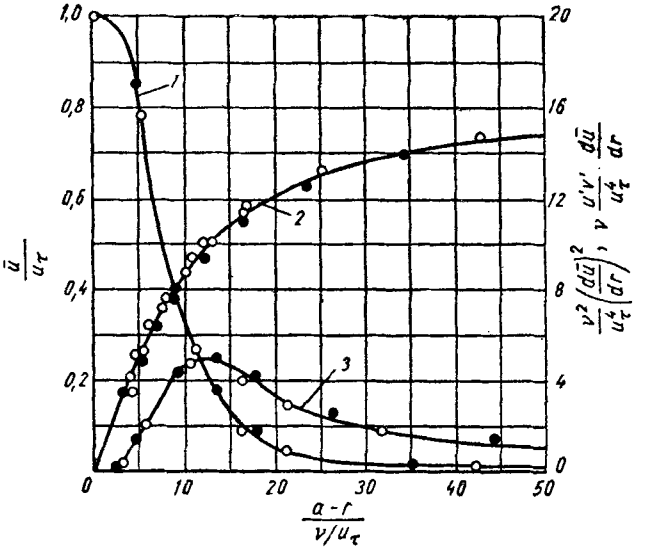


Рис. 98. Характеристики осредненного потока в непосредственной близости от стенки

1 — диссипация; *2* — скорость; *3* — возникновение турбулентности

совпадают почти полностью. Вязкая диссипация в выражении градиента осредненной скорости, очевидно, характеризуется большими величинами в ламинарном подслое с максимумом на стенке. С другой стороны, возникновение турбулентности достигает своей максимальной скорости на условной границе ламинарного подслоя, где $y = 11{,}5\,\nu/u_\tau$.

На рис. 99 кривая возникновения турбулентности показана вместе с вычисленными характеристиками турбулентного потока. Две шкалы на оси абсцисс используются для того, чтобы показать центральную область течения и зону вблизи стенки. Следует отметить, что как возникновение, так и вырождение (спад) турбулентности наблюдаются при максимальных скоростях по границе ламинарного подслоя. Однако энергия турбулентности не диссипируется полностью там, где она возникает; относитель-

ное перемещение кривых возникновения и диссипации указывает, что они непрерывно диффундируют по отношению к оси (т. е. в направлении увеличивающейся интенсивности турбулентности) в результате процессов перемешивания, рассмотренных в предыдущем пункте.

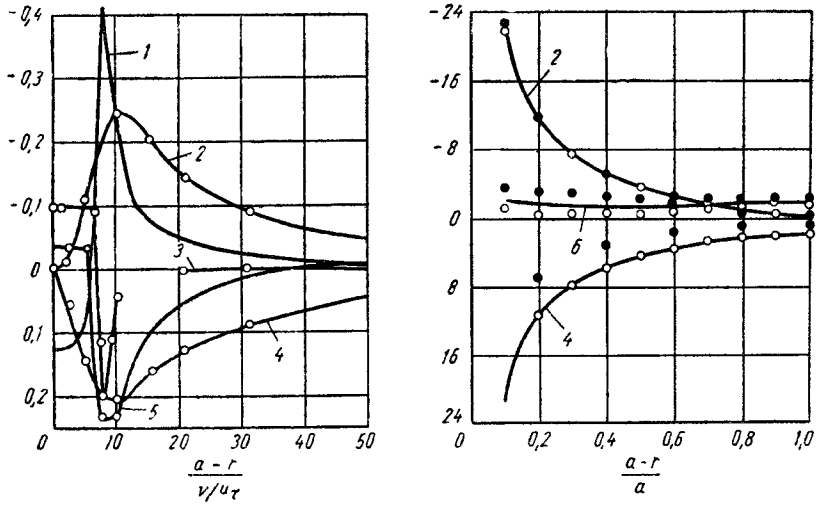


Рис. 99. Возникновение, распространение и диссипация турбулентности у стенки и в центральной области

1 — **диффузия (в форме давления); *2* — возникновение турбулентности; *3* — диффузия (градиент); *4* — диссипация; *5* — диффузия (в форме скорости); *6* — диффузия**

Пример 23. Предположим, что распределение скорости потока в трубе радиусом a имеет следующую форму:

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = \left(\frac{y}{a}\right)^{1/m},$$

где y — расстояние от стенки трубы.

Также предположим, что давление постоянно (для более точного представления см. пример 20).

Найти вид зависимости длины перемешивания, соответствующий этим условиям.

Согласно уравнению (197) длина пути перемешивания связана с напряжением сдвига и градиентом осредненной скорости следующим образом:

$$l = \frac{\sqrt{\tau/\rho}}{\partial\bar{u}/\partial y}.$$

Градиент скорости определяют дифференцированием уравнения, принимаемого для распределения скорости:

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = \frac{\sqrt{\tau_0/\rho}}{my}\left(\frac{y}{a}\right)^{1/m}.$$

Предположение постоянства давления приводит к линейному изменению напряжений от нуля в центре ($y=a$) до величины τ_0 у стенки ($y=0$):

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 - \frac{y}{a}.$$

Комбинация этих трех уравнений приводит к желаемой зависимости

$$l = \frac{\sqrt{\tau/\rho}}{\sqrt{\tau_0/\rho}} my \left(\frac{y}{a}\right)^{-1/m} = \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}\, my \left(\frac{y}{a}\right)^{-1/m} =$$

$$= my \left(\frac{y}{a}\right)^{-1/m} \left(1 - \frac{y}{a}\right)^{1/2}.$$

ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ

А. Основные понятия

80. Природа течения вдоль твердой границы. В начале настоящего столетия предполагали, что между наблюдаемым движением жидкости и движением, предсказываемым теорией потенциального невязкого потока, мало общего. Несмотря на казалось бы приемлемость допущения, заключающегося в пренебрежении малой вязкостью обыкновенных жидкостей, воздуха и воды, теория не могла объяснить лобового сопротивления тел и таких часто наблюдаемых явлений, как формирование волн и отрыв потока. В 1904 г. в Германии была опубликована замечательная статья Людвига Прандтля, отца современной механики жидкости, не только указавшая истинную роль уравнений невязкого и вязкого потока в соответствии с характеристикой течения вдоль границ, но также показавшая, что упрощение равенств Навье—Стокса в соответствии с его допущениями значительно увеличивает число проблем вязкого потока, которые могут быть рассмотрены аналитически.

Прандтль принял, что безотрывное обтекание потоком твердой стенки позволяет считать весь поток, за исключением тонкого слоя у стенки, невязким. В пограничном слое силы вязкости имеют по меньшей мере тот же порядок, что и силы инерции, и именно в пограничном слое сконцентрировано тормозящее действие стенки. Существование такого слоя подтверждается экспериментом, а также незначительным количеством имеющихся точных решений уравнений Навье—Стокса при больших числах Рейнольдса, например в случае ламинарного потока на бесконечно большой пластине, рассмотренном в главе V.

Для выяснения характера течения в так называемом пограничном слое рассмотрим равномерный поток, набегающий со скоростью U на плоскую пластину, параллельную оси потока. До приближения потока к переднему краю пластины скорость его сохраняет постоянное значение U, однако при дальнейшем течении нулевая скорость у стенки вызывает повышение касательных напряжений, которые затормаживают все утолщающийся слой

жидкости (рис. 100). Кроме того, большой градиент скорости у стенки указывает на существование слоя интенсивной завихренности, диффундирующей и распространяющейся вниз по течению аналогично распространению тепла от горячей пластины в равномерном потоке. Таким образом, течение в пограничном слое отличается от течения основного потока дефицитом (недостатком) скорости и наличием завихренности. Как показано на рис. 100, линии тока, находившиеся первоначально в зоне незаторможенного потенциального потока, постепенно вступают в зону пограничного слоя.

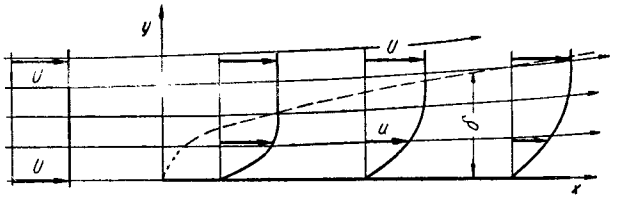


Рис. 100. Изображение потока в пограничном слое

Из-за характера пограничного слоя его толщина (см. п. 82) не может быть определена точно. Дефицит скорости и завихренность исчезают лишь асимптотически с увеличением расстояния от стенки, так что обычно толщину пограничного слоя δ принимают произвольно как такое расстояние от стенки, на котором дефицит скорости уменьшается до 1% скорости свободного потока. Внешняя граница пограничного слоя не может быть линией тока, так как в его зону постоянно входят все новые линии тока (см. рис. 100). Толщина ламинарного пограничного слоя может быть установлена по аналогии с тепловым потоком, откуда следует, что за время t завихренность распространяется в стороны на расстояние $\delta = \sqrt{\nu t}$ и одновременно вниз по течению на расстояние $x = Ut$. Исключение t дает приблизительный результат $\delta/x \approx (Ux/\nu)^{-1/2}$.

В общем случае невязкий поток, в который погружены стенка и ее пограничный слой, может иметь совершенно произвольный характер; существующие в нем градиенты давления вдоль границы будут оказывать сильное влияние на распределение скоростей в пограничном слое. Если градиент положителен, т. е. противоположен направлению течения, наиболее сильно заторможенная жидкость у самой стенки теряет дополнительное количество движения и постепенно начинает двигаться в обратном направлении (рис. 101). Точка отрыва в пограничном слое представляет собой такую точку границы, в непосредственной близости от которой жидкость неподвижна. Аналитически это выражается критерием $(\partial u/\partial y)_{y=0} = 0$, где $u(y)$ — изменение касательного компонента скорости в функции расстояния от стенки, взятого по

нормали к ней. Это условие уже применялось при рассмотрении вязкого потока между расходящимися плоскостями (см. главу V). Когда происходит отрыв, завихренность передается из пограничного слоя по следу в другие зоны потока, поэтому струи в свободном обычно безвихревом потоке и зонах, содержащих завихренность, приобретают большую взаимосвязь. Существенным примером такой взаимосвязи является характер потока с пограничным слоем у конца обтекаемого тела. Если для всего потока принято

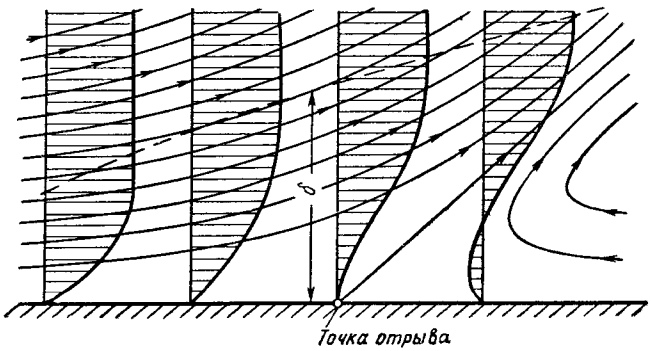


Рис. 101. Отделение (отрыв) пограничного слоя

распределение давления, соответствующее невязкому потенциальному потоку, отрыв произойдет несомненно в зоне большого обратного градиента давления позади тела. При хорошо обтекаемой форме тела благодаря изменению распределения давления из-за утолщения пограничного слоя по мере приближения к хвостовому концу тела этот отрыв не будет наблюдаться, а пограничный слой потока, оставляя это тело, не изменит направления своего движения.

Существует большое сходство между пуазейлевским движением в трубе (или движением между параллельными пластинами) и течением в пограничном слое. Похожи не только эпюры скоростей (при радиусе трубы или половине ширины канала, играющих роль толщины пограничного слоя), но и явление неустойчивости ламинарного потока и превращения его в турбулентный при превышении некоторых критических значений чисел Рейнольдса, ставшее хорошо известным для потоков в трубах после фундаментальных опытов Хагена и Рейнольдса. Когда пограничный слой делается турбулентным, беспорядочное движение масс жидкости охватывает все среднее движение и в результате обмен количеством движения между слоями, движущимися с разной скоростью на разном расстоянии от стенки, происходит с большей эффективностью, чем в ламинарном потоке. Этим объясняются большие сдвигающие усилия на стенке, а также тот факт, что при

обратном градиенте давления турбулентный пограничный слой меньше подвержен отрыву.

81. Допущения теории пограничного слоя. Теория течения вдоль твердой границы без отрыва базируется на следующих допущениях:

1) поток вне слоя толщиной δ, прилегающего к твердой стенке, считается невязким и к нему могут быть применены методы потенциального потока;

2) толщина пограничного слоя δ мала по сравнению с линейным масштабом тела L в направлении движения потока;

3) если U — постоянная скорость порядка величин скоростей вне пограничного слоя, то число Рейнольдса UL/ν очень велико, по меньшей мере порядка величины $(L/\delta)^2$;

4) компоненты скорости, касательные к границе, имеют величину порядка U. В этом случае, согласно уравнению неразрывности, нормальный компонент имеет порядок $U\delta/L$;

5) для турбулентного пограничного слоя порядок величин рейнольдсовых касательных напряжений составляет $\rho U^2\delta/L$, а величина рейнольдсовых нормальных напряжений заключена между ρU^2 и $\rho U^2\delta/L$.

Хотя приемлемость этих допущений может рассматриваться с точки зрения физики потока у стенки, как это сделано в п. 80, или проверяться экспериментальными измерениями, однако главным доказательством их обоснованности является совпадение эксперимента и теоретических расчетов. Значение допущений «3», «4» и «5» становится понятным при получении с их помощью упрощенных форм уравнений Навье—Стокса.

82. Определение толщины пограничного слоя. В соответствии с первым допущением полное давление $\rho V^2/2+p+\gamma z$ вне пограничного слоя постоянно, но внутри него уменьшается под влиянием вязкости. Следовательно, толщина слоя δ по аналогии с определением ее по дефициту скорости может быть представлена как расстояние от стенки, на котором разность значений полного давления вне пограничного слоя и в нем уменьшается до 2% значения полного давления в свободном потоке. Очевидно, что этого недостатка точности в определении δ невозможно избежать, так как между зонами, в которой можно и в которой нельзя пренебречь влиянием вязкости, нет отчетливой границы.

Из-за торможения потока в пределах пограничного слоя линии тока вне его вследствие неразрывности потока более отдалены от тела, чем в полностью невязком потоке. Расстояние, на которое смещаются линии тока, называется толщиной смещения δ_1. Как будет показано, эта толщина может быть определена более точно, чем δ, и расчет безвихревого потока вне пограничного слоя, выполненный с ее помощью, характеризуется большей точностью. Таким образом, хотя в первом приближении поток вне пограничного слоя может быть рассчитан как потенциальный поток в заданных твердых границах, однако лучшее приближение дает рас-

чет при добавлении к очертанию границ толщины смещения. Выражение для δ_1 в двухмерном потоке, движущемся вдоль плоской стенки, устанавливается легко. Объемный расход потока через пограничный слой равен $\int_0^\delta u(y)\,dy$, где $u(y)$ — параллельная стенке скорость на расстоянии y от нее. Если бы поток был невязким, тот же самый расход занимал бы более тонкий слой толщиной $\delta - \delta_1$. Отсюда если U — скорость при $y=\delta$, то

$$\int_0^\delta u\,dy = U(\delta - \delta_1)$$

и

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy. \qquad (200)$$

Эти соотношения описаны геометрически на рис. 102, где кривая OBD представляет эпюру скорости $u(y)$. Определение δ_1 требует равенства площадей $OBDEA$ и $ABCDE$. Отсюда равны криволинейные треугольники OAB и BCD. Значение δ_1, определенное по равенству (200), гораздо точнее, чем значение δ (верхний предел интеграла), так как по характеру распределения скоростей большие изменения в выборе δ вызывают ничтожно малые изменения в δ_1.

Еще одним расстоянием, которым может характеризоваться толщина пограничного слоя, является так называемая толщина количества движения δ_2. Торможение потока, происходящее из-за вязкости в пограничном слое, вызывает уменьшение расхода потока количества движения. Величина δ_2 определяется как толщина слоя жидкости, движущегося со скоростью U, в котором расход потока количества движения равен ранее потерянному при некотором расходе потока через данное сечение пограничного слоя. Для двухмерного потока уменьшение количества движения дается выражением

$$\int_0^\delta \rho u\,(U - u)\,dy.$$

Отсюда

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy. \qquad (201)$$

Очевидно, что и значение δ_2 определяется гораздо точнее, чем значение δ.

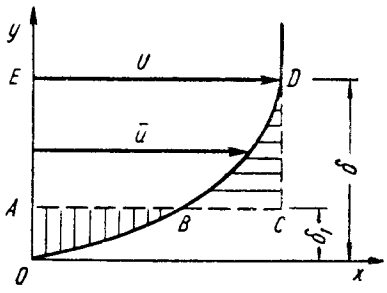


Рис. 102. Схематическая эпюра скорости

Последней должна быть определена толщина слоя жидкости, переносящего энергию δ_3. Торможение потока в пограничном слое из-за вязкости неизбежно вызывает уменьшение потока энергии. Величина δ_3 определяется как толщина слоя жидкости, движущегося со скоростью U, в котором поток энергии равен ранее потерянному перед данным сечением. Для двухмерного потока уменьшение потока энергии выражается так:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\delta}\rho u\,(U^2 - u^2)\,dy.$$

Отсюда

$$\delta_3 = \int_0^{\delta}\frac{u}{U}\left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right)dy \tag{202}$$

Для осесимметричного потока

$$\left.\begin{aligned}
\delta_1 &= \int_0^{\delta}\left(1 - \frac{u}{U}\right)\frac{r}{r_0}\,dn;\\
\delta_2 &= \int_0^{\delta}\frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)\frac{r}{r_0}\,dn;\\
\delta_3 &= \int_0^{\delta}\frac{u}{U}\left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right)\frac{r}{r_0}\,dn,
\end{aligned}\right\} \tag{203}$$

где n — расстояние, нормальное к поверхности вращения; r_0 и r — радиальные расстояния от оси симметрии до стенки и до произвольной точки в пограничном слое.

Пример 24. Определить толщину пограничного слоя и толщину смещения у корпуса корабля в точке, отстоящей на 300 футов от носа, при скорости его 10 узлов (1 узел = 1,69 фута в секунду).

Современный уровень знаний о пограничном слое не позволяет точно рассчитать трехмерный поток у корпуса и учесть влияние свободной поверхности. Однако приблизительно толщину пограничного слоя можно определить, допустив, что корпус эквивалентен плоской пластине такой же длины. Всестороннее рассмотрение турбулентного пограничного слоя у плоской пластины дано в части Г. Для нашей цели достаточно воспользоваться следующими эмпирическими формулами Прандтля и Блазиуса:

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7};\quad \delta = \frac{0{,}37x}{\mathrm{Re}_x^{1/5}},$$

где

$$\mathrm{Re}_x = \frac{Ux}{\nu}.$$

Толщина пограничного слоя δ получается прямой подстановкой в формулу $\nu=10^{-5}$, $x=300$ футов и $U=16{,}89$ футов в секунду. Число Рейнольдса $\mathrm{Re}_x=5{,}07\cdot 10^8$, а $\delta=2$ футам. Тогда

$$\frac{\delta_1}{\delta}=\int_0^1\left[1-\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right]d\left(\frac{y}{\delta}\right)=\left[\frac{y}{\delta}-\frac{7}{8}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{8/7}\right]_0^1=\frac{1}{8}$$

и

$$\delta_1=3''.$$

Б. Уравнения пограничного слоя и их интегралы

83. Двухмерный поток вдоль криволинейной стенки. Предположим, что поток, движущийся вдоль криволинейной стенки, двухмерен и турбулентен. Конечные уравнения будут включать в себя как частные случаи уравнения для ламинарного пограничного слоя, когда пульсационные члены равны нулю, и уравнения для потока вдоль плоской границы, когда кривизна стенки равна нулю.

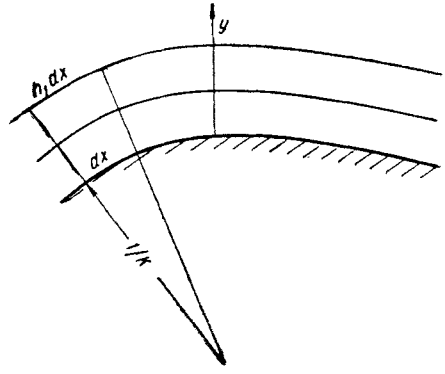


Рис. 103. Ортогональные координаты для двухмерной поверхности

Для вывода уравнений лучше всего использовать систему ортогональных координат, совместив поверхность стенки с одной из ортогональных плоскостей. Линии, нормальные к стенке, считаются следами двухмерных плоскостей $x=\mathrm{const}$, где x — расстояние вдоль стенки от фиксированной на ней точки; расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга кривые, параллельные стенке, считаются следами двухмерных плоскостей $y=\mathrm{const}$, где y — расстояние от стенки до любой точки потока по нормали. Так как поверхность стенки и поток двухмерны, семейство поверхностей $z=\mathrm{const}$ состоит из плоскостей, параллельных плану потока, компонент средней скорости $\overline{w}$ равен нулю и все средние величины не зависят от z. Предполагается, что кривизна стенки, обозначенная $K(x)$, имеет величину порядка линейного масштаба L. Как показано в приложении и изображено на рис. 103, элемент дуги в направлении увеличения x равен $h_1dx=(1+Ky)dx$, а в направлении увеличения y и z соответственно dy и dz. Отсюда $h_1=1+Ky$ и $h_2=h_3=1$.

В рассматриваемой координатной системе уравнение неразрывности, данное в п. 5, записывается в такой форме:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(h_1v)}{\partial y}+\frac{\partial(h_1w)}{\partial z}=0. \qquad (204)$$

Члены конвективных ускорений из уравнений Навье—Стокса, взятые из приложения, могут быть записаны с помощью равенства (204) следующим образом:

$$\frac{u}{h_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{uv}{h_1}\cdot\frac{\partial h_1}{\partial y}=$$

$$=\frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial(u^2)}{\partial x}+\frac{1}{h_1^2}\cdot\frac{\partial\left(h_1^2uv\right)}{\partial y}+\frac{\partial(uw)}{\partial z};$$

$$\frac{u}{h_1}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{u^2}{h_1}\cdot\frac{\partial h_1}{\partial y}=$$

$$=\frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial(uv)}{\partial x}+\frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial(h_1v^2)}{\partial y}+\frac{\partial(vw)}{\partial z}-\frac{Ku^2}{h_1}.$$

Отсюда, заменив u через $\bar{u}+u'$ и v через $\bar{v}+v'$ и осреднив, получим компоненты ускорений для турбулентного потока

$$\frac{\overline{Du}}{Dt}=\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{u}^2+\overline{u'^2}\right)+\frac{1}{h_1^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[h_1^2\left(\bar{u}\bar{v}+\overline{u'v'}\right)\right];$$

$$\frac{\overline{Dv}}{Dt}=\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+\frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{u}\bar{v}+\overline{u'v'}\right)+$$

$$+\frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[h_1\left(\bar{v}^2+\overline{v'^2}\right)\right]-\frac{K}{h_1}\left(\bar{u}^2+\overline{u'^2}\right).$$

Уравнения Рейнольдса принимают вид

$$\frac{\overline{Du}}{Dt}=-\frac{1}{\rho h_1}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\nu\left[\frac{1}{h_1^2}\cdot\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}+\frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(h_1\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{y}{h_1^3}\cdot\frac{dK}{dx}\cdot\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{2K}{h_1^2}\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}-\frac{K^2\bar{u}}{h_1^2}+\frac{\bar{v}}{h_1^3}\cdot\frac{dK}{dx}\right];\qquad(205)$$

$$\frac{\overline{Dv}}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}+\nu\left[\frac{1}{h_1^2}\cdot\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial x^2}+\frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(h_1\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{y}{h_1^3}\cdot\frac{dK}{dx}\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}-\frac{2K}{h_1^2}\cdot\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}-\frac{K^2\bar{v}}{h_1^2}-\frac{\bar{u}}{h_1^3}\cdot\frac{dK}{dx}\right].\qquad(206)$$

Граничные условия: $u=v=0$ на стенке и $u(\delta)=U$ у внешнего края пограничного слоя, где U — скорость основного потока.

Приблизительная форма равенств (204), (205) и (206) может быть получена на основе допущений п. 81. Так как $Ky\ll 1$, то h_1 везде заменяется единицей. Отсюда равенство (204) принимает вид

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}=0.\qquad(207)$$

После введения безразмерных величин $\bar{u}=\bar{u}/U$, $\xi=x/L$, $\eta=y/\delta$, которые не превосходят единицы в соответствии с допущениями, и $\bar{v}=\bar{v}L/U\delta$ уравнение (204) может быть записано так:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}=0.$$

Последнее равенство показывает, что $\bar{v}$ также имеет величину порядка единицы, и подтверждает четвертое допущение о том, что v имеет величину порядка $U\delta/L$. Набор безразмерных величин порядка единицы завершается введением коэффициентов $t=Ut/L$, $k=KL$, $C_p=\bar{p}/(\rho U^2)$, $\overline{u'^2}=\overline{u'^2}/U^2$, $\overline{v'^2}=\overline{v'^2}/U^2$ и $\overline{u'v'}=\overline{u'v'}L/(U^2\delta)$. Здесь порядок величин членов нормальных напряжений преувеличен для большей надежности в соответствии с пятым допущением. Уравнение (205) может быть записано в безразмерном виде, если все его члены умножить на L/U^2. Тогда получается

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\bar{u}^2+\overline{u'^2}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\bar{u}\bar{v}+\overline{u'v'}\right)=$$
$$=-\frac{\partial C_p}{\partial \xi}+\frac{\nu L}{U\delta^2}\left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}+\frac{\delta}{L}(\cdots)\right],$$

где слагаемые в последней скобке не превосходят единицы. Отсюда, отбросив все члены, содержащие δ/L, получаем уравнение пограничного слоя в безразмерном виде

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\quad\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x}-\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y},\qquad(208)$$

и анологично из равенства (206)

$$K\bar{u}^2-\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}.\qquad(209)$$

Здесь первый член в левой части значительно меньше второго, однако он оставлен в уравнении, так как присутствует в ламинарном потоке.

Ламинарный поток. Интегрирование уравнения (209) дает

$$\frac{p}{\rho}=\frac{P}{\rho}-\int_y^\delta Ku^2\,dy,\qquad(210)$$

здесь P/ρ — давление у внешнего края пограничного слоя, где поток принят невязким. Выражение (210) удовлетворяет уравнению Бернулли

$$-\frac{P}{\rho}=\frac{U^2}{2}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}.\qquad(211)$$

Затем

$$-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}=U\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\int_{y}^{\delta}Ku^2dy.$$

Последний интеграл имеет тот же порядок, что и члены, отброшенные при выводе уравнения (208), поэтому уравнения ламинарного пограничного слоя можно записать так:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial(u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(uv)}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};\qquad(212)$$

$$Ku^2=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y};\qquad(213)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.\qquad(214)$$

Так как изменение давления в пограничном слое, данное в уравнении (210), очень мало, то в большинстве случаев можно считать, что $p=P$. Более точную форму наклона кривой давления в функции от y дает равенство (213). При $y=\delta$ выражение $\partial p/\partial y=\rho KU^2$ и поэтому, подставив вместо p его значение по формуле (211), получим наклон кривой распределения скорости в установившемся потоке

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\delta}=-KU.\qquad(215)$$

Равенства (212) и (214) — два уравнения в частных производных двух зависимых переменных u и v. Они подобны точным уравнениям Навье — Стокса в том смысле, что и те и другие нелинейны. Однако эти равенства имеют и существенное отличие, заключающееся в отсутствии в них слагаемого $\nu\partial^2u/\partial x^2$, что превращает равенство (212) из дифференциального уравнения эллиптического типа в уравнение параболического типа, в общем случае гораздо более легко решаемое и более удобное для численной аппроксимации.

Турбулентный поток. Интегрирование уравнения (209) дает

$$\frac{\bar{p}}{\rho}=\frac{P}{\rho}-\int_{y}^{\delta}K\bar{u}^2\,dy-\overline{v'^2}\approx\frac{P}{\rho}-\overline{v'^2},\qquad(216)$$

что можно принять вследствие малости интеграла. Тогда из равенств (208) и (211) получим

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial\bar{u}^2}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{uv})}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}-$$
$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'^2}-\overline{v'^2})+\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}\right].\qquad(217)$$

Равенства (207), (209) и (217) представляют собой уравнения турбулентного пограничного слоя. В противоположность уравнениям ламинарного потока этих равенств недостаточно для получения решения из-за появления добавочных зависимых переменных в виде рейнольдсовых напряжений. Для решения требуется дополнительная связь между рейнольдсовыми напряжениями и осредненной скоростью, но, к сожалению, достаточно разработанной теории турбулентности, на которой эта связь могла бы базироваться, еще не имеется. Пока что в качестве полуэмпирической теории для получения недостающих связей служат некоторые гипотезы подобия, приведенные в части Г.

Уравнение количества движения. Уравнения количества движения для установившегося среднего потока могут быть получены интегрированием выражений (212) и (217) по всему пограничному слою. Так как уравнения турбулентного потока при изчезновении пульсаций скорости сводятся к уравнениям ламинарного потока, рассмотрим только этот первый случай. По уравнению (215), которое пригодно для турбулентного пограничного слоя, если турбулентность свободного потока пренебрежимо мала,

$$\nu \int_0^\delta \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\, dy = \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\Bigg|_0^\delta = -U^2\left(\frac{\nu K}{U} + \frac{\tau_0}{\rho U^2}\right) \approx -\frac{\tau_0}{\rho},$$

где τ_0 — касательное напряжение на стенке, а число Рейнольдса $U/(\nu K)$ очень велико. Так же по уравнению (207)

$$\int_0^\delta \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y}\, dy = U\bar{v}(\delta) = \int_0^\delta U \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\, dy = -\int_0^\delta U \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\, dy$$

и

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y}\overline{u'v'}\, dy = \overline{u'v'}\Big|_0^\delta = 0.$$

Тогда интеграл равенства (217) может быть записан в виде

$$\int_0^\delta \left[\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}(U-\bar{u}) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(U-\bar{u}) + \frac{dU}{dx}(U-\bar{u})\right] dy =$$

$$= \frac{\tau_0}{\rho} + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'^2} - \overline{v'^2}\right) dy$$

или

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \bar{u}(U-\bar{u})\, dy + \frac{dU}{dx}\int_0^\delta (U-\bar{u})\, dy = \frac{\tau_0}{\rho} + \frac{d}{dx}\int_0^\delta \left(\overline{u'^2} - \overline{v'^2}\right) dy.$$

Вводя обозначения толщин смещения и количества движения, приводим последнее равенство к виду

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{H+2}{U} \cdot \frac{dU}{dx} \delta_2 = \frac{C_\tau}{2} + \frac{1}{U^2} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^\delta (\overline{u'^2} - \overline{v'^2})\, dy, \quad (218)$$

где

$$C_\tau = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad \text{и} \quad H = \frac{\delta_1}{\delta_2}.$$

Равенство (218), представляющее собой уравнение количества движения, впервые было выведено Карманом, правда без поправочного члена, выраженного последним интегралом. До недавнего времени слагаемыми нормальных напряжений как в уравнениях пограничного слоя, так и в уравнении количества движения обычно пренебрегали. Однако было найдено, что приближенное уравнение количества движения дает аномальное возрастание касательного напряжения у стенки при достижении точки отрыва вместо ожидаемого уменьшения этого напряжения до нуля. Существует два объяснения этого недостатка уравнения количества движения. Первое заключается в том, что двухмерные образования, дающие этот аномальный эффект, подвержены слабым трехмерным возмущениям, к которым уравнение количества движения очень чувствительно; второе — в соседстве с точкой отрыва: значения ряда членов уравнения количества движения, обычно опускаемых в уравнении пограничного слоя, здесь перестают быть пренебрежимо малыми. Последнее предположение привело к опубликованию нескольких длинных выводов уравнений количества движения из полных уравнений Рейнольдса. Вывод более точного выражения здесь можно было упростить, так как члены, дающие значительную поправку к интегралу уравнения количества движения, уже были введены в уравнения пограничного слоя.

Уравнение энергии. Уравнение энергии установившегося потока, как показал Вейгхарт, может быть получено умножением равенства (217) на $\overline{u}$ и интегрированием полученного выражения по толщине пограничного слоя. Таким образом:

$$\int_0^\delta \left[\overline{u}\frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} + \overline{u}\frac{\partial \overline{u}\overline{v}}{\partial y} - \overline{u}U\frac{dU}{dx}\right] dy = \nu \int_0^\delta \overline{u}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2}\, dy -$$

$$- \int_0^\delta \overline{u}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'^2} - \overline{v'^2}) + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}\right] dy.$$

Но

$$\int_0^\delta \bar{u}\frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y}\,dy = \int_0^\delta \left(\bar{u}^2\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} + \frac{\bar{v}}{2}\cdot\frac{\partial\bar{u}^2}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \int_0^\delta \frac{\bar{u}^2}{2}\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\,dy + \frac{\bar{u}^2\bar{v}}{2}\Bigg|_0^\delta = -\int_0^\delta \frac{U^2+\bar{u}^2}{2}\cdot\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\,dy.$$

Тогда

$$\int_0^\delta \left[\bar{u}\frac{\partial\bar{u}^2}{\partial x} + \bar{u}\frac{\partial\bar{u}\bar{v}}{\partial y} - \bar{u}U\frac{\partial U}{dx}\right]dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}\int_0^\delta \bar{u}\,(U^2-\bar{u}^2)\,dy.$$

Также

$$\int_0^\delta \bar{u}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}\,dy = \bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\Bigg|_0^\delta - \int_0^\delta \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)^2 dy =$$

$$= -KU^2 - \int_0^\delta \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)^2 dy = -\int_0^\delta \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)^2 dy$$

и

$$\int_0^\delta \bar{u}\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}\,dy = \bar{u}\,\overline{u'v'}\Bigg|_0^\delta - \int_0^\delta \overline{u'v'}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\,dy = -\int_0^\delta \overline{u'v'}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\,dy.$$

Отсюда интеграл энергии может быть записан так:

$$\frac{\delta_2}{\nu U^2}\cdot\frac{d}{dx}\,(U^3\delta_3) = 2\Delta + \frac{\delta^2}{\nu U^2}\int_0^\delta \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\,(\overline{u'^2} - \overline{v'^2})\,dy, \qquad (219)$$

где

$$\Delta = \frac{\delta_2}{\mu U^2}\int_0^\delta \tau\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\,dy; \quad \tau = \mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} - \rho\overline{u'v'}.$$

Интеграл в равенстве (219) также является поправкой к обычной форме уравнения. Следует заметить, что как уравнение количества движения, так и уравнение энергии имеют форму обычных линейных дифференциальных уравнений первого порядка, что используется в нескольких приближенных методах решения проблем пограничного слоя.

84. Осесимметричный поток на поверхности вращения. Для поверхности вращения уравнения пограничного слоя лучше всего вывести, используя ортогональные координаты, параллельные и перпендикулярные данной поверхности. Радиальное расстояние от оси вращения до данной поверхности обозначается через $r_0(x)$, где x — длина дуги вдоль части поверхности в меридианной плоскости, проходящей через ось, а r — радиальное расстояние до произвольной точки. Поверхности $x=\text{const}$ и $y=\text{const}$ представлены поверхностями вращения, сечения которых в меридианной плоскости соответственно перпендикулярны и параллельны данной поверхности. В качестве третьей ортогональной координаты может быть принят азимутальный угол γ в меридианной плоскости. Величина $K(x)$ представляет кривизну данного меридианного профиля. Тогда, как показано в приложении из рис. 104 видно, что

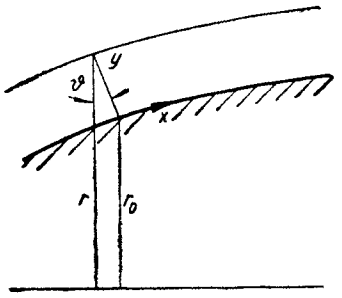


Рис. 104. Ортогональные координаты для поверхности вращения

$$h_1 = 1 + Ky,\ h_2 = 1,\ h_3 = r \text{ и } r = r_0 + y\cos\vartheta,$$

где ϑ — угол между осью симметрии и касательной к данному профилю.

Отсюда следует, что

$$K = -\frac{d\vartheta}{dx};\quad \frac{dr_0}{dx} = \sin\vartheta;\quad \frac{\partial r}{\partial x} = h_1\sin\vartheta \text{ и } \frac{\partial r}{\partial y} = \cos\vartheta.$$

Методика получения уравнений пограничного слоя подобна применявшейся в случае двухмерного потока. В приложении получено уравнение неразрывности

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(h_1 rv)}{\partial y} + \frac{\partial(h_1 w)}{\partial\gamma} = 0. \qquad (220)$$

Так же из приложения получаем компоненты ускорения подобно тому, как это было сделано для двухмерного потока:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{h_1 r}\cdot\frac{\partial(ru^2)}{\partial x} + \frac{1}{h_1^2 r}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(h_1^2 ruv\right) + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(uw)}{\partial\gamma};$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{h_1 r}\cdot\frac{\partial(ruv)}{\partial x} + \frac{1}{h_1 r}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(h_1 rv^2) + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(vw)}{\partial\gamma} - \frac{Ku^2}{h_1}.$$

Отсюда, производя подстановку $u=\bar{u}+u'$ и $v=\bar{v}+v'$ и осредняя, получаем для уравнений Рейнольдса

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\frac{1}{h_1 r}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[r\left(\bar{u}^2+\overline{u'^2}\right)\right]+\frac{1}{h_1^2 r}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[h_1^2 r\left(\bar{u}\bar{v}+\overline{u'v'}\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{\rho h_1}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\nu\left[\frac{1}{h_1^2}\cdot\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}+\frac{K}{h_1}\cdot\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(r\,\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{h_1}\left(\frac{\sin\vartheta}{r}-\frac{y}{h_1^2}\cdot\frac{dK}{dx}\right)\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\left(\frac{\cos\vartheta}{r}+\frac{K}{h_1}\right)\times$$

$$\times\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\frac{2K}{h_1^2}\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}-\left(\frac{K^2}{h_1^2}+\frac{\sin^2\vartheta}{r^2}\right)\bar{u}+$$

$$\left.+\left(\frac{1}{h_1^3}\cdot\frac{dK}{dx}-\frac{yK}{h_1^3}\cdot\frac{dK}{dx}+\frac{K\sin\vartheta}{h_1 r}-\frac{\sin 2\vartheta}{2r^2}\right)\bar{v}\right];$$

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+\frac{1}{h_1 r}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[r\left(\bar{u}\bar{v}+\overline{u'v'}\right)\right]+\frac{1}{h_1 r}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[h_1 r\left(\bar{v}^2+\overline{v'^2}\right)\right]-$$

$$-\frac{K}{h_1}\left(\bar{u}^2+\overline{u'^2}\right)=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}+\nu\left[\frac{1}{h_1^2}\cdot\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial y^2}+\right.$$

$$+\frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\left(\frac{\sin\vartheta}{r}-\frac{y}{h_1^2}\cdot\frac{dK}{dx}\right)+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\left(\frac{\cos\vartheta}{r}+\frac{K}{h_1}\right)-$$

$$-\frac{2K}{h_1^2}\cdot\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}-\bar{u}\left(\frac{1}{h_1^2}\cdot\frac{dK}{dx}-\frac{yK}{h_1^3}\cdot\frac{dK}{dx}+\frac{K\sin\vartheta}{h_1 r}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\sin 2\vartheta}{2r^2}\right)-\bar{v}\left(\frac{K^2}{h_1^2}+\frac{\cos^2\vartheta}{r^2}\right)\right].$$

Проверка относительных величин различных слагаемых может быть выполнена, как и ранее, путем введения безразмерных переменных. Так как δ может достигнуть величины того же порядка, что и r, если граница, вдоль которой происходит движение, достаточно длинна, то необходимо сохранить добавочные члены, содержащие r. Таким образом, вышеприведенные равенства сводятся к следующим:

$$\frac{\partial(r\bar{u})}{\partial x}+\frac{\partial(r\bar{v})}{\partial y}=0; \tag{221}$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial(r\bar{u}^2)}{r\,\partial x}+\frac{\partial(r\bar{u}\bar{v}^2)}{r\,dy}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+$$

$$+\frac{\nu}{r}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(r\,\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)-\frac{\bar{u}\sin^2\vartheta}{r}\right]-\frac{\partial(r\overline{u'^2})}{r\,\partial x}-\frac{\partial(r\overline{u'v'})}{r\,\partial y}; \tag{222}$$

$$K\bar{u}^2 = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial (r\overline{v'^2})}{r\,\partial y} + \frac{\nu\,\bar{u} \sin 2\vartheta}{2r^2}, \qquad (223)$$

где члены $K\bar{u}^2$ и $\nu\bar{u}\,\sin 2\vartheta/2r^2$ сохранены потому, что они становятся доминирующими при ламинарном движении. Интегрирование уравнения (223) с достаточной точностью дает

$$-\frac{\bar{p}}{\rho} = \frac{U^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \int_y^\delta \frac{\partial (\overline{rv'^2})}{r\,\partial y}\, dy. \qquad (224)$$

В результате подстановки равенства (224) в выражение (222) получим

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial (r\bar{u}^2)}{r\,\partial x} + \frac{\partial (\bar{r}\bar{u}\bar{v})}{r\,\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\nu}{r}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(r\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) - \frac{\bar{u}\sin^2\vartheta}{r}\right] - \left[\frac{\partial (r\overline{u'^2})}{r\,\partial x} + \frac{\partial (r\overline{u'v'})}{r\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\int_y^\delta \frac{\partial (r\overline{v'^2})}{r\,\partial y}\, dy\right]. \qquad (225)$$

Уравнения (221) и (225) представляют собой уравнения пограничного слоя, достаточные для нахождения определенного решения в ламинарном потоке.

Уравнение количества движения для установившегося осесимметричного потока может быть выведено умножением уравнения (225) на r и интегрированием его по y от 0 до δ. Тем же методом, что и для двухмерного потока, получаем выражение в обозначениях толщин осесимметричного пограничного слоя [см. равенства (203)]:

$$\frac{1}{r_0} \cdot \frac{d}{dx}(r_0\,\delta_2) + \frac{2+H}{U} \cdot \frac{dU}{dx}\,\delta_2 = \frac{C_\tau}{2} + \frac{\nu \sin^2\vartheta}{r_0 U^2} \int_0^\delta \frac{\bar{u}}{r}\, dy +$$

$$+ \frac{1}{r_0 U^2}\left[\frac{d}{dx}\int_0^\delta r\overline{u'^2}\, dy + \int_0^\delta r\, dy\, \frac{\partial}{\partial x}\int_y^\delta \frac{\partial (r\overline{v'^2})}{r\,\partial y}\, dy\right]. \qquad (226)$$

Члены, содержащие турбулентные пульсации скоростей, здесь также являются поправками, которыми раньше при рассмотрении турбулентного пограничного слоя пренебрегали.

Уравнение энергии для установившегося осесимметричного потока может быть получено умножением уравнения (225) на $r\bar{u}$ и интегрированием его по y от 0 до δ. Тем же методом, что и в случае двухмерного потока, получаем выражение в обозначениях толщин осесимметричного пограничного слоя [см. равенства (203)]:

$$\frac{\delta_2}{\nu U^2} \cdot \frac{d}{dx}(r_0 U^3\,\delta_3) = 2r_0\,\Delta + \frac{\delta_2}{U^2}\sin^2\vartheta \int_0^\delta \frac{\bar{u}}{r}\, dy +$$

$$+\frac{\delta_2}{\nu U^2}\int_0^{\delta}\overline{u}\left[\frac{\partial(r\overline{u'^2})}{\partial x}+r\frac{\partial}{\partial x}\int_y^{\delta}\frac{\partial(r\overline{v'^2})}{r\,\partial y}\,dy\right]dy, \qquad (227)$$

где $\Delta=\dfrac{\delta}{\mu\, r_0 U^2}\int_0^{\delta} r\,\tau\,\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial y}\,dy$ — коэффициент диссипации для осевой симметрии (здесь $\tau=\mu\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial y}-\rho\overline{u'v'}$).

Уравнения энергии и количества движения — обычные линейные дифференциальные уравнения, которые играют важную роль в различных приближенных методах решения проблем пограничного слоя.

85. Трехмерный поток вдоль произвольной поверхности. Проблемы трехмерного пограничного слоя освещены в литературе в гораздо меньшей степени, чем проблемы двухмерных или осесимметричных потоков; попытки получить общий метод решения были сделаны лишь недавно. Затруднения вызваны в основном не столько присутствием дополнительных компонентов главной скорости, параллельной стенке, сколько взаимодействием различных компонентов.

Если линии тока вне пограничного слоя криволинейны, градиент давления, нормальный к линиям тока и параллельный поверхности, создает так называемые вторичные течения. Появление этих вторичных течений объясняется тем, что под действием градиентов давления жидкость в пограничном слое, движущаяся более медленно, следует по траекториям с меньшим радиусом кривизны, т. е. поскольку ускорения нормальны к линиям тока, параллельны поверхности и почти не зависят от расстояния до стенки в пограничном слое, то два элемента потока со скоростями v_1 и v_2 будут двигаться по траекториям с радиусами кривизны r_1 и r_2, связанными соотношением

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{v_1^2}{v_2^2}.$$

Таким образом, поперечная кривизна линий тока увеличивается с приближением к стенке, в результате чего может возникнуть спиральное движение жидкости. Это движение иллюстрируется круговым потоком в твердых границах, где жидкость перемещается от гра-

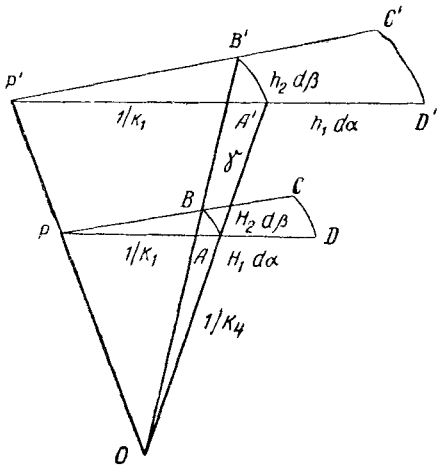


Рис. 105. Ортогональные координаты для трехмерной поверхности

ниц внутрь по радиусу, как это видно по концентрации нерастворимых твердых частиц в центре чашки чая после помешивания. В основном по той же причине при обтекании несимметричного тела в пограничном слое возникают вторичные течения, направленные от зон с наибольшей поперечной кривизной (например, подводная часть корабля).

Уравнения пограничного слоя для этого наиболее общего случая лучше всего вывести в системе ортогональных координат, построенных около данной поверхности (рис. 105). Свойства этой ортогональной системы координат, необходимые для упрощения и сокращений равенств Навье — Стокса и уравнения неразрывности, даны в приложении. Уравнения пограничного слоя получают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{H_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{v}{H_2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \beta}+w\frac{\partial u}{\partial \gamma}+$$
$$+K_2uv-K_1u^2=-\frac{1}{\rho H_1}\cdot\frac{\partial p}{\partial \alpha}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2}; \qquad (228)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{u}{H_1}\cdot\frac{\partial v}{\partial \alpha}+\frac{v}{H_2}\cdot\frac{\partial v}{\partial \beta}+w\frac{\partial v}{\partial \gamma}+K_1uv-K_2u^2=$$
$$=-\frac{1}{\rho H_2}\cdot\frac{\partial p}{\partial \beta}+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial \gamma^2}; \qquad (229)$$

$$-\frac{\partial(w^2)}{\partial \gamma}+K_3u^2+K_4v^2=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial \gamma}; \qquad (230)$$

$$\frac{1}{H_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{1}{H_2}\cdot\frac{\partial v}{\partial \beta}+\frac{\partial w}{\partial \gamma}+K_1u+K_2v=0. \qquad (231)$$

Первое слагаемое в уравнении (230) сохранено потому, что оно является доминирующим в турбулентном потоке.

Заметная разница между этими равенствами и равенствами для ранее рассмотренных частных случаев состоит в наличии кривизны K_1 и K_2 ортогональных поверхностей $\alpha=\text{const}$ и $\beta=\text{const}$. Это не означает, что главная кривизна K_3 и K_4 заданной поверхности S не существенна, так как величины H_1 и H_2, входящие в уравнения в явном виде, зависят от K_3 и K_4. Кроме того, когда величина δ становится соизмеримой с $1/K_3$ или $1/K_4$, что легко может произойти на достаточном расстоянии от начала длинного обтекаемого тела, в вышеприведенные равенства необходимо вводить дополнительные члены, содержащие эту кривизну, как это было сделано для осесимметричного потока.

Случаи применения этих общих уравнений пограничного слоя очень редки. Говард получил решение для окрестности точки отрыва, а Прандтль и Тетервин вывели трехмерное уравнение количества движения для прямолинейных координат. Прандтль предложил использовать уравнение количества движения для определения характеристик пограничного слоя. И хотя это предложение не получило дальнейшего развития, тем не менее большой интерес к трехмерному пограничному слою служит доказа-

тельством того, что методы решения этих равенств скоро станут доступными.

Пример 25. Пренебрегая влиянием турбулентных пульсаций, показать, как получить $\delta_2(x)$ при заданных H, U, dU/dx и C_τ.

В этом случае уравнение количества движения по отношению к $\delta_2(x)$ может считаться линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Тогда:

$$\delta_2 = e^{-\int \frac{H+2}{U}\frac{dU}{dx}dx}\left(C + \int \frac{C}{2} e^{\int \frac{H+2}{U}\frac{dU}{dx}dx} dx\right),$$

где C — постоянная интегрирования.

Пример 26. Определить зависимость C_τ от числа Рейнольдса Re_x, принимая для распределения скоростей закон 1/7, приближенную формулу Блазиуса для $\delta = 0{,}37\ x\ \mathrm{Re}_x^{-1/5}$ и распределение скоростей вне пограничного слоя $U = U_0 \operatorname{th} x/L$. Влиянием турбулентных пульсаций пренебречь.

Значение C получается прямой подстановкой в уравнение количества движения. Из закона 1/7 имеем:

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{1}{8}; \quad \frac{\delta_2}{\delta} = \frac{7}{72}.$$

Отсюда $H = \delta_1/\delta_2 = 9/7$ и $\delta_2 = 0{,}036\ x\ \mathrm{Re}_x^{-1/5}$. Производя подстановку в уравнение количества движения, получаем

$$C_\tau = 0{,}0288\ \mathrm{Re}_x^{-\frac{1}{5}}\left(1 + 8{,}2\,\frac{x}{L}\operatorname{csch}\frac{2x}{L}\right).$$

В. Ламинарные пограничные слои

86. Решения для установившихся двухмерных потоков. Решение простого, но тем не менее важного случая установившегося двухмерного ламинарного течения вдоль плоской продольно обтекаемой пластины в равномерном потоке было первым значительным приложением теории пограничного слоя. Эта проблема была затронута Прандтлем в его оригинальной статье, а позднее была полностью решена Блазиусом, одним из учеников Прандтля. Возможность точного решения уравнения пограничного слоя в этом случае объяснялась тем, что эпюры скоростей $u(y)$ имеют одинаковую форму при всех числах Рейнольдса, т. е. $u = UF(y/\delta)$. Фолкнер и Скен доказали, что решение Блазиуса является одним из многочисленного класса точных решений уравнений пограничного слоя при подобных эпюрах скоростей. Это семейство решений имеет большое значение по трем причинам. Во-первых, в дополнение к течению вдоль плоской пластины они описывают течение у передней точки отрыва; во-вторых, они показывают влияние градиентов давления на эпюру скоростей, что особенно интересно у точки отрыва; в-третьих, они служат основой приближенного метода расчета пограничного слоя.

Потоки Фолкнера — Скена — это те, для которых величина U, равная cx^m при c и m постоянных, есть скорость у внешнего края

пограничного слоя. Безвихревой поток с таким скоростным распределением остается безвихревым и вблизи точки отрыва у остроугольного двухмерного тела с половинным углом при вершине

$$\theta = \frac{\pi m}{m+1}. \tag{232}$$

Для плоской пластины $\theta = m = 0$, для тела тупоугольной формы $m = 1$; $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Вместо непосредственной подстановки выражения $U = cx^m$ в уравнения пограничного слоя и решения их полезнее сначала решить уравнения, дающие подобные эпюры скоростей $u = UF(y/\delta_0)$, где δ_0 пропорционально δ. Уравнение неразрывности [равенство (207)] указывает на существование такой функции тока $\psi(x, y)$, для которой $u = \partial\psi/\partial y$ и $v = -\partial\psi/\partial x$; выраженное через эти члены уравнение для установившегося потока (212) приобретает вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = U\frac{dU}{dx} + \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}. \tag{233}$$

Но

$$\psi = \int_0^y u\,dy = U\delta_0 f(\eta), \text{ где } \eta = y/\delta_0 \text{ и}$$

$$f(\eta) = \int_0^\eta F(\eta)\,d\eta.$$

Отсюда

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = (\delta_0 U' + \delta_0' U) f - \delta_0' U \eta f';$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = Uf'; \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = -\frac{U\delta_0'}{\delta_0}\eta f'' + U'f';$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{Uf''}{\delta_0}; \quad \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} = \frac{Uf'''}{\delta_0^2},$$

где

$$\delta_0' = \frac{d\,\delta_0}{dx}, \quad U' = \frac{dU}{dx}, \quad f' = \frac{df}{d\eta},$$

$$f'' = \frac{d^2f}{d\eta^2} \text{ и } f''' = \frac{d^3f}{d\eta^3}.$$

Тогда равенство (233) преобразуется:

$$f''' + \frac{1}{\nu}(\delta_0^2 U' + \delta_0\delta_0' U) ff'' - \frac{\delta_0^2 U'}{\nu}(f')^2 + \frac{\delta_0^2 U'}{\nu} = 0.$$

Так как η и x — независимые переменные, то это равенство указывает, что

$$\frac{1}{\nu}\left(\delta_0^2 U' + \delta_0 \delta_0' U\right) = c_1; \quad \frac{\delta_0^2 U'}{\nu} = m, \tag{234}$$

где c_1 и m — постоянные.

Отсюда получается

$$\frac{1}{\nu} \cdot \frac{d}{dx}\left(\delta_0^2 U\right) = 2c_1 - m \text{ и } \delta_0^2 = (2c_1 - m)\frac{\nu x}{U}.$$

Это показывает, что $\delta_0 \approx \sqrt{\nu x/U}$, поэтому можно принять $2c_1 - m = 1$ и, следовательно $\eta = y\sqrt{U/\nu x}$. Наконец, подстановка найденного значения для δ_0^2 во второе уравнение (234) дает $xU' = mU$ и $U = cx^m$. Это доказывает, что лишь потоки Фолкнера — Скена приводят к подобию эпюр скоростей. Дифференциальное уравнение для $f(\eta)$ получает такой вид:

$$f''' + \frac{m+1}{2} ff'' - mf'^2 + m = 0. \tag{235}$$

Граничные условия $u = v = 0$ при $y = 0$ и $u = U$ при $y = \infty$ дают $f(0) = f'(0) = 0$; $f'(\infty) = 1$.

Очевидно, что для подобных эпюр скоростей проблема сводится к решению обычного дифференциального уравнения, а не уравнения в частных производных. Точный интеграл уравнения (235) не был найден. Поскольку метод получения решения является типовым для расчетов пограничного слоя, он будет представлен детально для случая плоской пластины ($m = 0$), для которой уравнение (235) получает такой вид:

$$ff'' + 2f''' = 0. \tag{236}$$

Решение в виде степенного ряда есть первое приближение:

$$f(\eta) = a_0 + a_1\eta + \frac{a_2}{2!}\eta^2 + \frac{a_3}{3!}\eta^3 + \cdots.$$

Затем

$$f'(\eta) = a_1 + a_2\eta + \frac{a_3}{2!}\eta^2 + \frac{a_4}{3!}\eta^3 + \cdots.$$

Граничные условия при $\eta = 0$ дают $a_0 = a_1 = 0$. При подстановке степенного ряда в уравнение (236) имеем

$$2a_3 + 2a_4\eta + (a_2^2 + 2a_5)\frac{\eta^2}{2!} + (4a_2a_3 + 2a_6)\frac{\eta^3}{3!} + \cdots = 0,$$

откуда, приравнивая коэффициенты последовательных степеней η нулю, получаем серию равенств

$$a_3 = a_4 = a_6 = a_7 = a_9 = a_{10} = \cdots = 0$$

и

$$a_5 = -\frac{1}{2}\,a_2^2,\ a_8 = -\frac{11}{2}\,a_2 a_5 = \frac{11}{4}\,a_2^3, \ldots.$$

Отсюда, если принять $a_2 = \lambda$, решение уравнения (236) может быть записано в такой форме:

$$f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{\lambda^{n+1} c_n}{(3n+2)!}\,\eta^{3n+2},$$

где $c_0 = 1$; $c_1 = 1$; $c_2 = 11$; $c_3 = 375$; $c_4 = 27897$; $c_5 = 3817137$, ...

Величина λ должна быть выбрана так, чтобы удовлетворить граничное условие $f'(\infty) = 1$. Положив $f = \Phi(\eta)$ при $\lambda = 1$, т.

$$\Phi(\eta) = \frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^5}{2 \cdot 5!} + \frac{c_2 \eta^8}{4 \cdot 8!} - \frac{c_3 \eta^{11}}{8 \cdot 11!} + \frac{c_4 \eta^{14}}{16 \cdot 14!} - \ldots,$$

получим

$$f(\eta) = \lambda^{1/3}\,\Phi(\lambda^{1/3}\,\eta), \tag{237}$$

откуда для граничного условия $\eta = \infty$

$$\lim_{\eta \to \infty} f'(\eta) = \lambda^{2/3} \lim_{\eta \to \infty} \Phi'(\lambda^{1/3}\,\eta) = \lambda^{2/3} \lim_{\eta \to \infty} \Phi'(\eta) = 1$$

и потому

$$\lambda = \lim_{\eta \to \infty} \left[\frac{1}{\Phi'(\eta)}\right]^{3/2}.$$

Таким образом, в принципе λ может быть определена вычислением $\Phi'(\eta)$ по ее ряду для возрастающих значений η до тех пор, пока не будет достигнуто достаточно постоянное асимптотическое значение. Однако для больших значений η ряд сходится очень медленно и предпочительнее вычислять $\Phi'(\eta)$ численным интегрированием дифференциальных уравнений. Таким путем было найдено, что $\lambda = 0{,}33206$ .... Согласно равенству (237) численные значения величины $\Phi(\eta)$ и ее производных дают одновременно численные значения $f(\eta)$. В частности, асимтотическое значение $f(\eta)$ для больших величин η получилось равным $f(\eta) \approx \eta - 1{,}72077$ .... Изменение u/U и $\sqrt{\mathrm{Re}_x}\,v/U$ от η показано на рис. 106. Кривая u/U у стенки почти линейна. Это является следствием того, что кривая u/U имеет точку перегиба при $y = 0$, т. е. $\partial^2 u/\partial y^2 = 0$ при $y = 0$, что становится очевидным при внесении граничных условий $u = v = 0$ при $y = 0$ в равенство (212). Интересно отметить, что нормальный компонент скорости v не исчезает при больших значениях y.

Коэффициенты касательных напряжений и сопротивления для плоской пластины при ламинарном пограничном слое могут быть легко получены. Для касательных напряжений на стенке

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \mu\, U f''(0)\,\mathrm{Re}_x^{1/2}/x = \frac{1}{2}\,\rho U^2\,\frac{2\lambda}{\mathrm{Re}_x^{1/2}}$$

или

$$C_{\tau} = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0{,}664}{\mathrm{Re}_x^{1/2}}; \quad \mathrm{Re}_x = \frac{Ux}{\nu}.$$

Сопротивление F, приходящееся на единицу ширины, для одной стороны плоской пластины длиной x составляет

$$F = \int_0^x \tau_0 \, dx$$

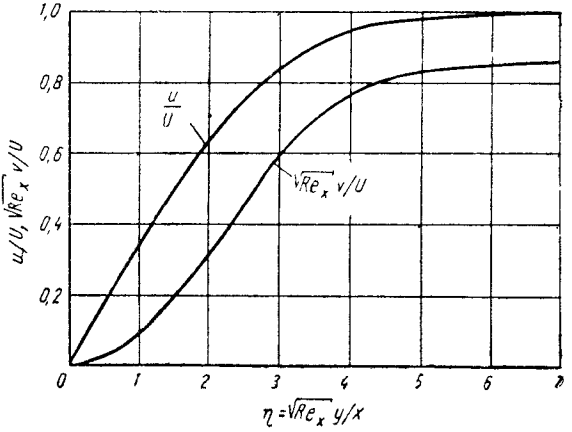


Рис. 106. Эпюры скоростей потока на плоской пластине

или

$$C_f = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2 x} = \frac{1}{\mathrm{Re}_x} \int_0^{\mathrm{Re}_x} C_{\tau} \, d\,\mathrm{Re}_x.$$

Отсюда видно, что коэффициент сопротивления равен среднему коэффициенту касательных напряжений. Подстановка значений C_{τ} дает

$$C_f = \frac{1{,}328}{\mathrm{Re}_x^{1/2}}.$$

Следует отметить, что при вычислении сопротивления по его коэффициенту необходимо знать площадь поверхности пластины, соприкасающейся с водой. Эти теоретические результаты, в основном принадлежащие Блазиусу, превосходно согласуются с экспериментальными данными.

Значения $u/U=f'(\eta)$

$\eta\sqrt{\frac{m+1}{2}}$	Значения $u/U=f'(\eta)$ при величине m									
	−0,0904	−0,0826	−0,0654	0	0,1111	0,2500	0,4286	1,0000	4,0000	∞
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	0,0001	0,0137	0,0246	0,0469	0,0677	0,0834	0,0966	0,1183	0,1441	0,1588
0,2	0,0040	0,0293	0,0507	0,0939	0,1334	0,1628	0,1872	0,2266	0,2726	0,2980
0,3	0,0089	0,0467	0,0781	0,1408	0,1970	0,2382	0,2719	0,3252	0,3859	0,4186
0,4	0,0158	0,0659	0,1069	0,1876	0,2584	0,3097	0,3506	0,4144	0,4849	0,5219
0,5	0,0248	0,0868	0,1370	0,2342	0,3177	0,3771	0,4235	0,4946	0,5708	0,6096
0,6	0,0358	0,1094	0,1684	0,2806	0,3747	0,4403	0,4907	0,5662	0,6446	0,6834
0,7	0,0487	0,1338	0,2010	0,3266	0,4294	0,4994	0,5524	0,6298	0,7076	0,7449
0,8	0,0636	0,1598	0,2347	0,3720	0,4816	0,5545	0,6086	0,6859	0,7610	0,7858
0,9	0,0803	0,1874	0,2694	0,4167	0,5312	0,6055	0,6596	0,7350	0,8058	0,8376
1,0	0,0991	0,2166	0,3050	0,4606	0,5782	0,6526	0,7056	0,7778	0,8432	0,8717
1,2	0,1423	0,2791	0,3784	0,5453	0,6640	0,7351	0,7837	0,8467	0,8997	0,9214
1,4	0,1927	0,3463	0,4534	0,6244	0,7383	0,8027	0,8449	0,8968	0,9375	0,9530
1,6	0,2498	0,4170	0,5284	0,6967	0,8011	0,8568	0,8917	0,9324	0,9620	0,9726
1,8	0,3126	0,4896	0,6016	0,7610	0,8528	0,8988	0,9264	0,9569	0,9775	0,9845
2,0	0,3802	0,5621	0,6712	0,8167	0,8940	0,9305	0,9514	0,9732	0,9871	0,9914
2,2	0,4509	0,6327	0,7354	0,8633	0,9260	0,9537	0,9689	0,9841	0,9928	0,9954
2,4	0,5230	0,6995	0,7927	0,9011	0,9500	0,9700	0,9807	0,9905	0,9961	0,9976
2,6	0,5946	0,7605	0,8422	0,9306	0,9672	0,9812	0,9884	0,9946	0,9980	0,9989
2,8	0,6635	0,8146	0,8836	0,9529	0,9792	0,9886	0,9933	0,9971	0,9990	0,9994
3,0	0,7278	0,8607	0,9168	0,9691	0,9873	0,9933	0,9962	0,9985	0,9995	0,9997
3,2	0,7858	0,8986	0,9425	0,9804	0,9924	0,9962	0,9979	0,9992	0,9998	0,9999
3,4	0,8364	0,9286	0,9616	0,9880	0,9957	0,9979	0,9989	0,9996	0,9999	1,0000
3,6	0,8789	0,9515	0,9752	0,9929	0,9976	0,9989	0,9995	0,9998	1,0000	—
3,8	0,9132	0,9681	0,9845	0,9959	0,9987	0,9994	0,9997	0,9999	—	—
4,0	0,9399	0,9798	0,9907	0,9978	0,9993	0,9997	0,9999	1,0000	—	—
4,2	0,9598	0,9876	0,9946	0,9988	0,9996	0,9999	0,9999	—	—	—
4,4	0,9741	0,9927	0,9970	0,9994	0,9998	0,9999	1,0000	—	—	—
4,6	0,9839	0,9959	0,9984	0,9997	0,9999	1,0000	—	—	—	—
4,8	0,9904	0,9978	0,9992	0,9999	1,0000	—	—	—	—	—
5,0	0,9945	0,9988	0,9996	0,9999	—	—	—	—	—	—
5,2	0,9969	0,9994	0,9998	1,0000	—	—	—	—	—	—
5,4	0,9984	0,9997	0,9999	—	—	—	—	—	—	—
5,6	0,9992	0,9999	1,0000	—	—	—	—	—	—	—
5,8	0,9996	0,9999	—	—	—	—	—	—	—	—
6,0	0,9998	1,0000	—	—	—	—	—	—	—	—
6,2	0,9999	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Таблица 3

Эпюры скоростей $U=cx^m$

m	η_0	η_1	η_2	H	$f''(0)$	E
—0,09041	7,1174	3,4970	0,8673	4,0323	0,0000	0,0000
—0,08676	6,5116	2,9702	0,8538	3,4789	0,0581	0,0496
—0,08251	6,3490	2,7631	0,8377	3,2986	0,0870	0,0729
—0,07407	6,0258	2,5094	0,8113	3,0932	0,1296	0,1051
—0,06542	5,8516	2,3356	0,7875	2,9658	0,1637	0,1289
—0,04762	5,5066	2,0918	0,7462	2,8033	0,2202	0,1643
0,00000	4,9501	1,7209	0,6641	2,5913	0,3320	0,2205
0,05263	4,5487	1,4893	0,6002	2,4815	0,4258	0,2556
0,1111	4,1590	1,3201	0,5479	2,4093	0,5120	0,2805
0,1765	3,9114	1,1884	0,5027	2,3641	0,5942	0,2987
0,2500	3,6682	1,0786	0,4636	2,3268	0,6753	0,3130
0,3333	3,4292	0,9850	0,4292	2,2950	0,7575	0,3251
0,4286	3,1946	0,9038	0,3976	2,2731	0,8418	0,3347
0,6667	2,7385	0,7655	0,3414	2,2424	1,0224	0,3490
1,000	2,4000	0,6480	0,2923	2,2169	1,2326	0,3603
1,500	2,0571	0,5429	0,2470	2,1977	1,4937	0,3690
4,000	1,3283	0,3441	0,1582	2,1745	2,4047	0,3805
∞	0	0	0	2,160	∞	0,3875

Более общее дифференциальное уравнение (235) численно проинтегрировано Фолкнером и Скеном и еще более точно Хартием, чьи результаты приводятся в табл. 2. Различные виды характерных эпюр, рассчитанных по табл. 2, приведены в табл. 3. Для каждой эпюры скоростей по табл. 2 можно определить

$$\eta_1 = \delta_1 \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = \int_0^{\eta_0} (1 - f')\, d\eta$$

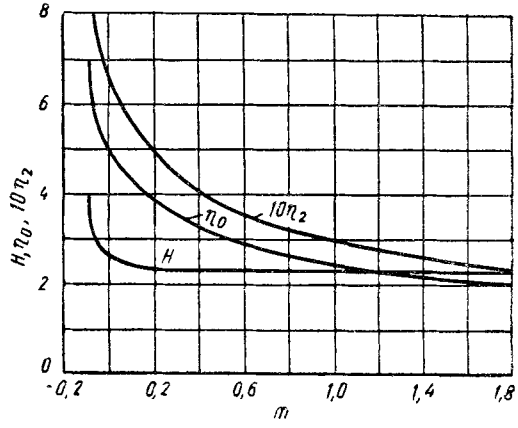


Рис. 107. Характеристики подобных эпюр скоростей

и

$$\eta_2 = \delta_2 \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = \int_0^{\eta} f'(1 - f')\, d\eta,$$

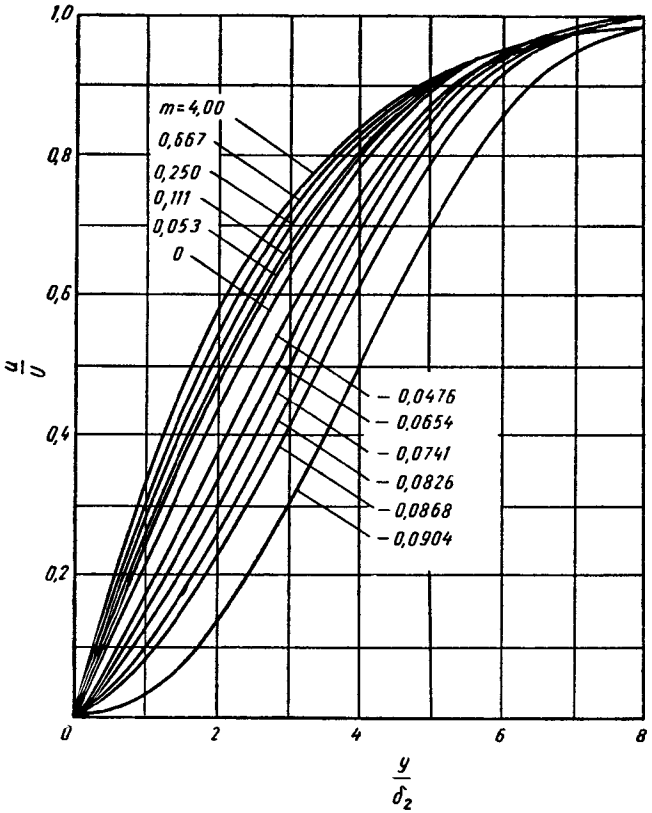


Рис. 108. Семейство подобных эпюр скоростей

где

$$\eta_0 = \delta \sqrt{\frac{U}{\nu x}}\ ;\ f(\eta_0, m) = 1.$$

Значения η_0, η_2 и $H = \frac{\delta_1}{\delta_2}$ в функции от m приведены на рис. 107.

Представление переменными функциями подобных эпюр скоростей, особенно полезное для приближенного расчета пограничных слоев, дается выражением u/U в зависимости от $\eta/\eta_2 = y/\delta_2 \equiv Y$ и от H, т. е. $u/U = g(Y, H)$.

Эпюры скоростей в такой функциональной форме показаны на рис. 108, где значения Y вычислены по величинам η и η_2, взя-

тым из табл. 3. С помощью кривых рис. 108 подсчитываются касательные напряжения у стенки

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \frac{\mu U}{\delta_2} \left(\frac{\partial g}{\partial Y}\right)_{Y=0}$$

Значения

$$E = \frac{\tau_0 \delta_2}{\mu U} = \eta_2 f''(0) = \left(\frac{\partial g}{\partial Y}\right)_{Y=0}$$

также могут быть взяты из табл. 3.

По рис. 108 видно, что точка изгиба, которая наблюдается при $y=0$, когда $m=0$, отсутствует при положительных m. Это подтверждается также равенством (212), которое при $u=v=0$ и $y=0$ дает $\partial^2 u/\partial y^2 < 0$, т. е. крутизна эпюры скоростей уменьшается, как видно из рис. 108. Так как это доказательство применимо ко всем потокам с ускорением, то, очевидно, все такие потоки обладают тем же свойством. Когда m отрицательно [см. рис. 108 и уравнение (212)], крутизна эпюры скоростей возрастает, но так как у края пограничного слоя скорость неизбежно падает до нуля, то в какой-то промежуточной точке обязательно должен существовать перегиб. Кроме того, обнаружено, что при $m=-0{,}0904$ значение $(\partial u/\partial y)_0 = 0$, т. е. происходит отрыв. Это показывает, что даже незначительные положительные градиенты давления могут вызывать отрыв.

87. Решения для установившегося осесимметричного потока. Когда $\delta \ll r_0$, уравнения пограничного слоя для установившихся двухмерных и осесимметричных потоков, за исключением некоторых слагаемых, идентичны уравнению неразрывности. Манглер нашел метод перехода между этими двумя системами уравнений, так что проблема осесимметричного потока может быть сведена к решению соответствующего двухмерного потока.

Переход от касательной и нормальной координат x, y осесимметричного потока к координатам x_P, y_P двухмерного потока выражается зависимостями $x_P = x_P(x, y)$; $y_P = y_P(x, y)$ с u- и v-скоростными компонентами для осесимметричного потока, u_P и v_P — то же, для двухмерного потока. Выражения Манглера таковы:

$$\left.\begin{aligned} x_P &= \frac{1}{L^2} \int_0^x r_0^2(x)\, dx; \quad y_P = \frac{r_0}{L} y; \\ u_P &= u; \; v_P = \frac{L}{r_0} \left(v + \frac{r_0'}{r_0} yu\right), \end{aligned}\right\} \tag{238}$$

где

$$r_0' = \frac{dr_0}{dx}.$$

Эта замена подставляется в уравнения осесимметричного пограничного слоя для случая $\delta \ll r$, написанные в виде:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U\frac{dU}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \tag{239}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{r_0'}{r_0}u=0. \tag{240}$$

Величины, входящие в эти равенства, могут быть выражены следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u_P}{\partial x_P}\cdot\frac{dx_P}{dx}+\frac{\partial u_P}{\partial y_P}\cdot\frac{\partial y_P}{\partial x}=\frac{r_0^2}{L^2}\cdot\frac{\partial u_P}{\partial x_P}+\frac{yr_0'}{L}\cdot\frac{\partial u_P}{\partial y_P};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u_P}{\partial y_P}\cdot\frac{\partial y_P}{\partial y}=\frac{r_0}{L}\cdot\frac{\partial u_P}{\partial y_P};$$

$$UU'=U_P\frac{dU_P}{dx_P}\cdot\frac{dx_P}{dx}=\frac{r_0^2}{L^2}U_P\frac{dU_P}{dx_P};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\frac{r_0}{L}\right)^2\frac{\partial^2 u_P}{\partial y_P^2}.$$

Кроме того, из равенства (238) находим

$$v=\frac{r_0}{L}v_P-\frac{r_0'}{r_0}yu_P;$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{r_0^2}{L^2}\cdot\frac{\partial v_P}{\partial y}-\frac{r_0'}{r_0}u_P-\frac{yr_0'}{L}\cdot\frac{\partial u_P}{\partial y}.$$

Отсюда равенство (239) получает такой вид:

$$\frac{r_0^2}{L^2}\left[u_P\frac{\partial u_P}{\partial x_P}+\frac{L}{r_0}\left(\frac{r_0'}{r_0}yu+v\right)\frac{\partial u_P}{\partial y_P}\right]=\frac{r_0^2}{L^2}\left(U_P\frac{\partial U_P}{\partial x_P}+\nu\frac{\partial^2 u_P}{\partial y_P^2}\right)$$

или

$$u_P\frac{\partial u_P}{\partial x_P}+v_P\frac{\partial u_P}{\partial y_P}=U_P\frac{dU_P}{dx_P}+\nu\frac{\partial^2 u_P}{\partial y_P^2}.$$

Подставив вышеприведенные выражения для $\partial u/\partial x$ и $\partial v/\partial y$ в равенство (240), получим

$$\left(\frac{r_0^2}{L^2}\cdot\frac{\partial u_P}{\partial x_P}+\frac{yr_0'}{L}\cdot\frac{\partial u_P}{\partial y_P}\right)+$$
$$+\left(\frac{r_0^2}{L^2}\cdot\frac{\partial v_P}{\partial y_P}-\frac{r_0'}{r_0}u_P-\frac{yr_0'}{L}\cdot\frac{\partial u_P}{\partial y_P}\right)+\frac{r_0'}{r_0}u_P=0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u_P}{\partial x_P} + \frac{\partial v_P}{\partial y_P} = 0.$$

Таким образом, видим, что u_P и v_P удовлетворяют уравнениям пограничного слоя двухмерного потока. Так как $y_P = 0$ при $y = 0$, а $u_P = v_P = 0$ при $u = v = 0$, также удовлетворено условие отсутствия проскальзывания на границе. Необходимо отметить, что распределение скорости у внешнего края соответствующего двухмерного пограничного слоя $U_P(x)$ совпадает с распределением скорости безвихревого потока на теле вращения $U(x)$.

Таблица 4

Распределение скорости у вершины конуса

θ_0 в *град*	m	θ_0 в *град*	m
0	0	50	0,299
10	0,013	60	0,423
20	0,053	70	0,578
30	0,116	80	0,765
40	0,196	90	1,000

Рассмотрим теперь осесимметричный поток вблизи передней точки отрыва тела вращения, где распределение скорости потенциального потока имеет вид $U = cx^m$. Здесь m — функция половинного угла θ_0 у вершины конуса в точке отрыва, величина m приводится в табл. 4. Так, для тупоугольного тела $\theta_0 = 90°$ и $m = 1$.

Применим преобразование Манглера [уравнения (238)] для пересчета потока у конуса в поток у двухмерного клина.

Так как $r_0 = x \sin \theta_0$, то

$$x_P = \frac{x^3}{3L^2} \sin^2 \theta_0;\ y_P = \frac{xy}{L} \sin \theta_0;$$

$$U_P = U = cx^m = c_P x_P^{m_P},$$

где

$$c_P = c\left(3L^2 \csc^2 \theta_0\right)^{m/3},\ \text{а}\ m_P = m/3.$$

Но для соответствующего двухмерного потока половина вершинного угла клина равна $\theta_{0P} = m_P/(m_P+1) = m/(m+3)$ *рад*. Таким образом, вершинный угол для соответствующего клина отличается от θ_0. Например, когда $\theta_0 = 90°$ и $m = 1$, то $\theta_{0P} = 45°$.

Эпюра скоростей в плоскости $x_P y_P$ имеет вид

$$\frac{u}{U_P} = f'(\eta_P),$$

где

$$\eta_P = y_P \sqrt{\frac{U_P}{\nu x_P}} = y \sqrt{\frac{3U}{\nu x}} = \eta \sqrt{3}.$$

Отсюда, поскольку $u/U = u_P/U_P$, при переносе эпюр скоростей с плоскости xy, где им соответствует зависимость $U = cx^m$, в плоскость $y_P x_P$ и построении там зависимости $U_P = c_P x_P^{mP}$ подобие эпюр не нарушается, так как происходят лишь пропорциональные изменения по оси абсцисс. В частности, соотношения различных толщин, таких как H, при этом переносе сохраняются, и представленные на рис. 108 эпюры скоростей в виде зависимости $u/U = g(Y, H)$ тождественны для двух- и трехмерных случаев. Следует заметить, однако, что абсолютные величины толщин пограничного слоя не сохраняются, например $\delta_{2P} = \sqrt{3}\delta_2$.

88. Приближенные методы решения для установившихся потоков. Вообще проблемы пограничного слоя не могут быть сведены к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Математически изящный метод решения уравнений двухмерного пограничного слоя в частных производных, предложенный впервые Блазиусом и развитый впоследствии К. Хейменцом и Л. Говардом, выражает распределение скорости степенным рядом по длине дуги вдоль границы с коэффициентами, представляющими универсальные функции ортогональных координат. Этот метод обладает тем преимуществом, что, раз затабулировав универсальные функции, можно решать любые двухмерные проблемы с помощью только арифметических выкладок. Недостатком этого метода, однако, является то, что в случае медленной сходимости для получения точного решения требуется большее число универсальных функций, чем затабулировано. Тем не менее этот метод очень ценен для проверки точности других более простых методов с меньшим приближением и используется на практике для расчета первого участка ламинарного пограничного слоя, тогда как следующие по течению участки рассчитывают при помощи одного из имеющихся численных приемов получения последовательных изменений профиля пограничного слоя. Хотя эти методы являются действенными средствами решения проблем ламинарного пограничного слоя, ограниченность объема настоящей работы не позволяет изложить их здесь. Вместо этого рассмотрим метод решения, предложенный Вейгардтом, считающийся лучшим из известных методов. В этом методе дифференциальное уравнение в частных производных также заменяется приблизительной системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

При расчете пограничного слоя требуется определить эпюру скоростей, такие толщины пограничного слоя, как толщину смещения и толщину количества движения, касательные напряжения и точку отрыва. Большинство приблизительных методов решения

проблем ламинарного пограничного слоя начинается с утверждения, что все двухмерные и осесимметричные профили ламинарного пограничного слоя принадлежат однопараметрическому семейству таких кривых, какие были найдены, например, для безвихревого потока: $U=cx^m$ (см. рис. 108). При таком утверждении отпадает необходимость в специальном нахождении эпюры скоростей, поскольку она может быть определена как один из членов семейства по величинам других характеристик. Так как каждый член семейства эпюр скоростей обладает своим отношением $H=\delta_1/\delta_2$, то H может считаться параметром, изменения которого дают различные кривые семейства. На этом основании H называется профилирующим параметром, характеристика которого определяет эпюру скоростей.

Следующий прием применим к двухмерным или осесимметричным пограничным слоям. Предположим, что выбрана такая эпюра ламинарной скорости:

$$\frac{u}{U}=g(Y,H),\quad Y=\frac{y}{\delta_2}.$$

Тогда $H_{32}=\dfrac{\delta_3}{\delta_2}$ и Δ являются функциями H. Другой функцией H является

$$\tau_0=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0=\frac{\mu U}{\delta_2}\cdot\frac{\partial g(0,H)}{\partial Y}$$

или

$$E=\frac{\tau_0\delta_2}{\mu U}.$$

Рассмотрим использование метода для осесимметричного потока, так как двухмерный является его частным случаем. При $\zeta=U\delta_2^2/(x\nu)$ и $\omega=xU'/U$ уравнение количества движения (226) может быть записано в форме

$$x\zeta'+\left[1+\frac{2x}{r_0}\sin\theta+(3+2H)'\omega\right]\zeta=2E, \tag{241}$$

а уравнение энергии (227) становится таким:

$$x\zeta'+\frac{2x}{H_{32}}\cdot\frac{dH_{32}}{dH}\zeta H'+\left(1+\frac{2x}{r_0}\sin\theta+5\omega\right)\zeta=\frac{4\Delta}{H_{32}}. \tag{242}$$

Иная форма уравнения (242) получается исключением ζ из равенств (241) и (242)

$$-xH'=\omega F(H)+\frac{1}{\zeta}G(H), \tag{243}$$

где

$$F(H)=-\frac{H_{32}(H-1)}{dH_{32}/dH};\quad G(H)=\frac{\varepsilon H_{32}-2\Delta}{dH_{32}/dH}.$$

Равенства (241) и (243) — одновременно обыкновенные дифференциальные уравнения для ζ и H как функции x.

С целью получения численного решения этих равенств для некоторых двухмерных или осесимметричных форм предполагают, что распределение скорости у тела известно из решения для потенциального потока или по замерам. Кроме того, вблизи точки отрыва пограничный слой характеризуется одной из подобных эпюр скоростей, приведенных на рис. 108, значения m для которых в двухмерном или осесимметричном потоке приведены в виде зависимости от угла при вершине [равенство (232)] или в табл. 4. Решения остаются точными до длины дуги x, где отклонения распределения скорости от первоначальной формы, выраженной зависимостью $U=cx^m$, становятся ощутимыми. Величины ζ_0 и H_0 на этом участке могут служить начальными условиями для двух дифференциальных уравнений.

Для численного решения уравнений (241) и (243) может быть использован один из известных методов. Приближенным, но простым приемом последовательного решения дифференциальных уравнений является следующий. Выберем малый интервал Δx, в котором различные функции, входящие в равенства (241) и (243), могут считаться постоянными. Затем, заменяя ζ' на $(\zeta_1-\zeta_0)/\Delta x$ и H' на $(H_1-H_0)/\Delta x$, где $x=x_0$, получаем из уравнений (241) и (243):

$$\zeta_1=\zeta_0+\frac{\Delta x}{x_0}\left\{2E_0-\left[1+\frac{2x_0}{r_{00}}\sin\theta+(3+2H_0)\,\omega_0\right]\zeta_0\right\}$$

и

$$H_1=H_0-\frac{\Delta x}{x_0}\left(\omega_0F_0+\frac{G_0}{\zeta_0}\right)$$

или в общем виде

$$\left.\begin{aligned}\zeta_{n+1}&=\zeta_n+\frac{\Delta x}{x_n}\left\{2E_n-\left[1+\frac{2x_n}{r_{0n}}\sin\theta_n+(3+2H_n)\,\omega_n\right]\zeta_n\right\}\\ \text{и}\qquad H_{n+1}&=H_n-\frac{\Delta x}{x_n}\left(\omega_n F_n+\frac{G_n}{\zeta_n}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(244)$$

Кривые $F(H)$, $G(H)$ и $E(H)$, определенные для семейства подобных эпюр, приведены на рис. 109. Пользуясь этими кривыми, по уравнениям (244) можно вычислить последовательные значения H, ζ и отсюда δ_2. Значения других характеристик пограничного слоя, соответствующие этим H, могут быть определены затем по рис. 107 и 108.

89. Неустановившиеся пограничные слои. До сих пор рассматривались пограничные слои установившихся потоков. Хотя они включают большинство практически интересных случаев, развитие пограничного слоя вдоль поверхности, движущейся с ускорением по отношению к жидкости, также важно, так как отделение или отрыв при ускорении может произойти раньше, чем при установившемся движении с той же средней скоростью.

В предыдущих выводах уравнений пограничного слоя время было включено, как одна из независимых переменных. Очевидно, что задачи, в которых эта добавочная переменная должна быть учтена, решить труднее. Приближенные решения были получены методом последовательных приближений. Этот метод был применен к телам, выводимым из состояния покоя импульсивно или с постоянным ускорением, и к телам, подвергаемым периодическим перемещениям. В каждом случае этот метод дает ряд диффсрен-

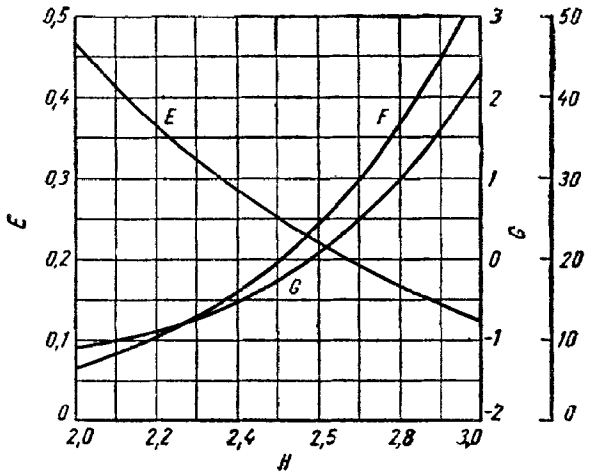


Рис. 109. Вспомогательные функции для расчета пограничных слоев

циальных уравнений в частных производных, напоминающих уравнения теплового потока, решение которых становится все более и более трудоемким. Метод может быть проиллюстрирован значительным увеличением пограничного слоя на цилиндре, импульсивно выведенном из состояния покоя.

Уравнения двухмерного пограничного слоя имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = U\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Граничные условия: $u=v=0$ при $y=0$, $u=U(x, t)$ при $y=\infty$, где $U(x, t)=0$ для $t<0$ и $U(x, t)=U(x)$ для $t\geqslant 0$ [здесь $U(x)$ — распределение скорости вдоль границы в установившемся безвихревом потоке]. Так как движение начинается с нулевой скорости, пограничный слой вначале очень тонок и фактически может рассматриваться как вихревой слой на твердой границе. Следовательно, касательные напряжения у стенки сначала очень велики,

а так как компоненты давления $U\partial U/\partial x$ и конвекции в ускорении имеют тем не менее нормальные величины, то, очевидно, касательные напряжения должны примерно уравновешиваться неустановившимся компонентом ускорения $\partial u/\partial t$. Группировка главных членов в одной стороне равенства дает итерационные формулы

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} &= 0; \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (245)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = U \frac{\partial U}{dt} - u_{n-1} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} - v_{n-1} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}; \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (246)$$

где $n=1, 2, 3, \ldots$; граничные условия $u_n = v_n = 0$ при $y=0$ и $u_n = U(x)$ при $y=\infty$.

Первое из равенств (245) идентично одноразмерному уравнению теплового потока, которое рассматривалось в главе *V*. Его решение имеет вид:

$$u_0 = u(x) \operatorname{erf} \xi,$$

где

$$\xi = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}; \quad \operatorname{erf} \xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Из второго равенства (245) получается

$$v_0 = -2\sqrt{\nu t} \frac{dU}{dx} \left[\xi \operatorname{erf} \xi - \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 - e^{-\xi^2}) \right].$$

Значение u_1 определяется из первого равенства (246) подстановкой в его правую часть полученных выражений v_0 и u_0.

Если принять, что значение u_1 имеет вид

$$u_1 = u_0 + tU \frac{dU}{dx} f(\xi), \qquad (247)$$

то оказывается, что

$$f'' + 2\xi f' - 4f = 4 \left[\operatorname{erf}^2 \xi - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \xi e^{-\xi^2} \operatorname{erf} \xi - 1 + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{\pi} (e^{-\xi^2} - e^{-2\xi^2}) \right].$$

Решение этого равенства дает

$$f = \frac{1}{2}(2\xi^2 - 1)\operatorname{erf}^2\xi + \frac{3}{\sqrt{\pi}}\xi e^{-\xi^2}\operatorname{erf}\xi + \\ + 1 - \frac{4}{3\pi}e^{-\xi^2} + \frac{2}{\pi}e^{-2\xi^2} + a(2\xi^2 + 1) + \\ + b\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}(2\xi^2 + 1)\operatorname{erf}\xi + \xi e^{-\xi^2}\right],$$

где a и b, выбраные для удовлетворения граничных условий $f=0$ при $\xi=0$ и $\xi=\infty$, имеют значения

$$a = -\left(1 + \frac{2}{3\pi}\right) = -1{,}21221...;$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) = 0{,}80364....$$

Отрыв потока от стенки произойдет там, когда $\partial u/\partial y=0$ при $y=0$, т. е. когда $\partial u/\partial\xi=0$ при $\xi=0$. Из равенства (247) получается в первом приближении для времени T, через которое произойдет отрыв

$$1 + \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)\frac{dU}{dx}T = 0.$$

Отрыв начнется, когда dU/dx достигнет своего наибольшего отрицательного значения, т. е.

$$T_{\text{мин}} = \frac{0{,}702}{\left(-\dfrac{dU}{dx}\right)_{\text{макс}}}.$$

Пример 27. Показать, что, если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ решения уравнений двухмерного ламинарного пограничного слоя, $u^*=(x, y, t)=u(x, \bar{y}, t)$ и $v^*(x, y, t)=v(x, \bar{y}, t)-f'(x)u(x, \bar{y}, t)$ также являются их решениями при условии, что $\bar{y}=y+f(x)$, где $f(x)$ — произвольная аналитическая функция.

Вышеприведенное свойство напоминает конформные преобразования в том отношении, что позволяет получить решение уравнений пограничного слоя преобразованием известного. Функция $f(x)$ должна быть того же порядка, что и $\delta(x)$. Задача может быть сформулирована так. Функции $u(x, \bar{y})$, $v(x, \bar{y})$ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{y}^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \bar{y}} = 0.$$

Требуется показать, что

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} + u^*\frac{\partial u^*}{\partial x} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial y} = \frac{\partial U^*}{\partial t} + U^*\frac{\partial U^*}{\partial x} + \\ + \nu\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \text{ и } \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} = 0.$$

Из определения u^*, v^* и $\bar{y}$ получаем

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}; \quad \frac{\partial U^*}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}; \quad \frac{\partial u^*}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \bar{y}};$$

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{y}^2}$$

и

$$\left[\frac{\partial u^*(x, y)}{\partial x}\right]_y = \frac{\partial u(x, \bar{y})}{\partial x} + \frac{\partial u(x, \bar{y})}{\partial \bar{y}}\left[\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\right]_y = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} f'(x),$$

где черточка показывает, что значение y остается постоянным при дифференцировании, а $f'(x)$ обозначает производную от $f(x)$. Подобным образом можно получить

$$\frac{\partial U^*}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \bar{y}} f'(x) = \frac{\partial U}{\partial x},$$

так как в соответствии с уравнением (215) член $f'\partial U/\partial \bar{y}$ имеет тот же порядок, что δ, и поэтому им можно пренебречь. Так же

$$\frac{\partial v^*}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \bar{y}} - f'(x) \frac{\partial u}{\partial \bar{y}}$$

При этих значениях частных производных уравнения для u^* и v^* приобретают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + f' \frac{\partial u}{\partial \bar{y}}\right) + (v - f'u) \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{y}^2}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{y}^2}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \bar{y}} = 0,$$

что и требовалось показать.

Г. Турбулентные пограничные слои

90. Распределение средней скорости у стенки. Уравнения турбулентного пограничного слоя содержат больше неизвестных, чем должно быть для определенности решения. Было бы желательно по аналогии с ламинарным движением использовать для получения приблизительного решения уравнения количества движения и энергии, но условные напряжения, вызванные турбулентными пульсациями скорости, вводят здесь также добавочные переменные, так что решение становится неопределенным. Таким образом, необходимо искать дополнительные соотношения, составленные на основании опытов или некоторых подходящих гипотез. Наиболее признанной из них является «закон стенки».

Обычно принимают, что распределение скорости в турбулентном потоке вдоль гладкой стенки в ближайшей от нее части пограничного слоя зависит только от плотности и вязкости жидкости и касательных напряжений у стенки. Это допущение говорит о том, что на поток у самой стенки не влияют условия, существующие на большом расстоянии от нее, в частности скорость свободного потока и градиент давления. При этих обстоятельствах полное касательное напряжение $\tau = \mu d\bar{u}/dy - \rho\overline{u'v'}$ почти постоянно вблизи стенки.

Применяя анализ размерностей к переменным $\bar{u}$, y, τ_0, ρ и ν, можно вывести функциональную зависимость

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = f(y^*), \tag{248}$$

где $u_\tau = \sqrt{\tau_0/\rho}$ и $y^* = \frac{yu}{\nu}$. Эта функциональная зависимость известна как внутренний закон или закон стенки. Очень тонкий слой у стенки, где числа Рейнольдса пренебрежимо малы, называется ламинарным подслоем; закон вязкости Ньютона здесь может быть записан в форме $\tau_0 = \mu\, \bar{u}/y$ или $\bar{u}/u_\tau = y^*$. Закон стенки подтвержден экспериментально для потоков, движущихся в трубах и вдоль поверхностей, с различными градиентами давления. Соотношение $f = y^*$, по-видимому, действительно до $y^* = 4$. За этим пределом находится область, в которой напряжения Рейнольдса и вязкость становятся соизмеримыми величинами. Хама вывел приблизительное аналитическое выражение для этой функции

$$\sqrt{2\alpha}\,\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{2}{3}\left\{\frac{1-\sqrt{1+z^4}}{z^3} + 2\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}}\right\}, \quad z = \sqrt{2\alpha}\,y^*.$$

Величина $\alpha = 0{,}114$ соответствует экспериментальным данным. Интеграл, появляющийся в формуле Хама, может быть оценен как эллиптический интеграл первого рода. Графическая зависимость $\bar{u}/u_\tau$ от y^* показана на рис. 110.

Из условия, что закон стенки должен согласовываться с уравнениями пограничного слоя, вытекает интересное свойство средних линий тока в турбулентном пограничном слое и указание на размеры области, в которой можно полагать справедливым закон стенки. Подстановка в уравнение (207) дает

$$\bar{v} = -\int \frac{\partial}{\partial x}\left[u_\tau f(y^*)\right] dy = -u_\tau' \int (f + y^* f')\, dy,$$

где $u_\tau' = \frac{du_\tau}{dx}$ и $f' = \frac{df}{dy^*}$

Отсюда

$$\bar{v} = -\frac{\nu u_\tau'}{u_\tau}\int \frac{d(y^* f)}{dy^*}\, dy^* = -u_\tau' y f(y^*). \tag{249}$$

Это показывает, что вдоль линии тока

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\bar{v}}{\bar{u}} = -\frac{u_\tau' y}{u_\tau}$$

или

$$u_\tau' y dx + u_\tau dy = 0.$$

Но, так как $dy^* = (u_\tau' y dx + u_\tau dy)/\nu$, очевидно, что y^*, а значит и $\bar{u}/u_\tau$ постоянны вдоль линии тока в пределах применимости закона стенки. Это любопытное свойство первым заметил Колес.

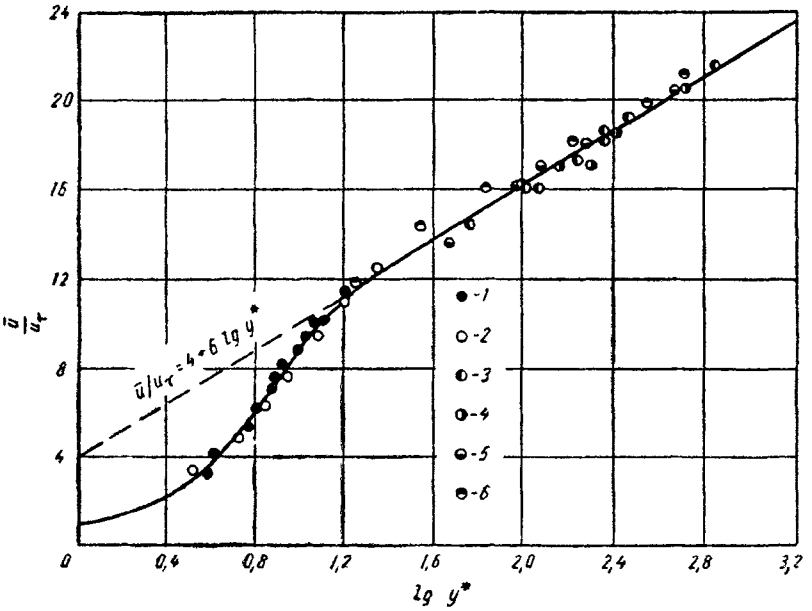


Рис. 110. Закон стенки для плоской пластины

1 — Лауфер (труба $Re_x = 5{,}00 \cdot 10^4$); *2* — Лауфер (труба $Re_x = 5{,}00 \cdot 10^5$; *3* — Шульц-Грюнов (плоская пластина $Re_x = 6{,}78 \cdot 10^7$); *4* — Шульц-Грюнов (плоская пластина $Re_x = 3{,}40 \cdot 10^6$); *5* — Шульц-Грюнов (плоская пластина $Re_x = 7{,}20 \cdot 10^5$); *6* — Людвиг и Тильман (плоская пластина $Re_x = 4.88 \cdot 10^6$)

Если вспомнить картину течения вдоль линии тока (см. рис. 100), входящей в пограничный слой и постепенно оказывающейся внутри него в пределах действительности закона стенки, то становится ясно, что постоянство y^* вдоль линии тока может быть достигнуто только асимптотически.

Чтобы применить закон стенки к уравнению (217), достаточно пренебречь слагаемыми нормальных напряжений и написать результирующее уравнение для установившегося потока в виде

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}=UU'+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial y}, \qquad (250)$$

где τ — полное напряжение, равное $\mu\partial\bar{u}/\partial y-\rho\overline{u'v'}$, которое у самой стенки должно также удовлетворять закону подобия

$$\tau=\tau_0 g(y^*). \qquad (251)$$

Подстановка равенств (248), (249) и (251) в равенство (250) дает

$$u_\tau u'_\tau f^2=U\frac{dU}{dx}+\frac{u_\tau^3}{\nu}\cdot\frac{dg}{dy^*}. \qquad (252)$$

Так как x и y^* могут считаться независимыми переменными, уравнение (252) будет точным только в случае, если отношения $u_\tau u'_\tau/(UU')$ и $u_\tau u'_\tau/u_\tau^3$ постоянны. Однако, как легко доказать решением элементарных дифференциальных уравнений, полученных из постоянства указанных отношений, это приводит к соотношениям, которые в общем случае не могут быть действительны. Единственная интерпретация уравнения (252) заключается в том, что в пределах действительности закона стенки составляющая ускорения $u_\tau u'_\tau f^2$ должна иметь малую величину того же порядка, что и слагаемые, которыми пренебрегли в уравнениях пограничного слоя, и что $\partial g/\partial y^*$ должно быть почти постоянно. Указанное условие говорит о том, что закон стенки действителен до тех пор, пока влияние инерции пренебрежимо мало по сравнению с влиянием градиента давления и касательных напряжений, и поэтому $f^2=(yu_\tau/\nu)^2$ имеет тот же порядок, что и величина $\left|U^2\delta/(x^2u_\tau u'_\tau)\right|$, которая при постоянстве U выражается как $\left|4\delta/(x^2dC_\tau/dx)\right|$. Отсюда находим, что y/δ имеет порядок величины $4/\sqrt{\mathrm{Re}_x^2\mathrm{Re}_\delta\left|dC_\tau^2/d\mathrm{Re}_x\right|}$, где $\mathrm{Re}_x=Ux/\nu$ и $\mathrm{Re}_\delta=U\delta/\nu$. Предельное значение y/δ для действительности закона стенки, найденное экспериментально для плоской пластины при нулевом градиенте давления, равно около $1/7$.

Для шероховатой стенки в предыдущий анализ должен быть дополнительно введен параметр шероховатости. Если шероховатость эквивалентна песчаной шероховатости с высотой выступа k, то закон стенки приобретает такой вид:

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau}=f(y^*,\ k^*);\qquad k^*=\frac{ku_\tau}{\nu}. \qquad (253)$$

91. Распределение средней скорости на некотором расстоянии от стенки. Плодотворность гипотезы о подобии эпюр скоростей в ламинарных пограничных слоях указывает на желательность соответствующей гипотезы для турбулентных потоков. Теория

подобия Кармана подтверждает подобие эпюр скоростей в трубах и каналах, причем выражение его может быть записано через радиус трубы в виде

$$\frac{U-\bar{u}}{u_\tau} = F\left(\frac{y}{r}\right) \tag{254}$$

и названо внешним законом, или законом дефицита скорости. Справедливость этого закона распространяется на такое расстояние от стенки, на котором напряжения Рейнольдса превосходят вязкие напряжения. Закон исходит из предположения, что в этом слое распределение скорости относительно скорости в центре трубы, за исключением начальной скорости во внутренней точке слоя, не зависит от вязкости. Так как в соответствии с законом стенки этот внутренний скоростной предел непосредственно зависит от касательного напряжения у стенки, приходится допустить, что разность $U-\bar{u}$ зависит только от y, r, τ_0 и ρ, откуда с помощью анализа размерностей может быть получено уравнение (254).

Опытным путем установлено, что эпюры скоростей во внешней части двухмерного или осесимметричного турбулентного пограничного слоя образуют приблизительно однопараметрическое семейство, представляемое в виде

$$\frac{U-\bar{u}}{u_\tau} = F(\eta, H);\ \eta = \frac{y}{\delta}, \tag{255}$$

где H — профилирующий параметр, равный δ_1/δ_2. Как и для турбулентных потоков в трубах, внешний закон здесь считается действительным на тех расстояниях от стенки, где напряжения Рейнольдса превосходят вязкие напряжения.

Закон дефицита скорости пограничного слоя, выраженный уравнением (255), — эмпирический закон, общепризнанный за хорошее совпадение эпюр скоростей в узком диапазоне чисел Рейнольдса, полученных в лабораториях. Таусенд указывал, что характеристики турбулентного потока во внешней части пограничного слоя медленно реагируют на изменение условий у стенки, так что эпюра средней скорости на некотором участке зависит от предыстории потока. Соответственно Таусенд предположил, что закон дефицита скорости может быть усовершенствован при учете зависимости эпюры скоростей от касательного напряжения у стенки на некотором участке выше по течению, т. е.

$$\frac{U-\bar{u}}{u_{\tau_1}} = F(\eta, H), \tag{256}$$

где u_{τ_1} — значение u_τ выше по течению при $x=x_1$.

Для использования предложения Таусенда необходимо сделать дополнительное допущение, касающееся связи между u_{τ_1} и

u_τ, а именно, что их отношение — функция местных значений $\sigma = U/u_\tau$ и H:

$$u_{\tau_1} = u_\tau g(\sigma, H), \tag{257}$$

где g — некоторая функция. Преобразованный таким образом закон дефицита скорости записывается в виде:

$$\frac{U - \bar{u}}{u_\tau} = g(\sigma, H) F(\eta, H). \tag{258}$$

92. Наложение внешнего и внутреннего законов. Анализ эпюр средних скоростей в турбулентных пограничных слоях показывает, что существует такая область на каком-то расстоянии от стенки (рис. 111), в которой действительны как закон стенки, так и закон дефицита скорости. В самом деле, уже допущение возможности этого наложения двух законов достаточно для определения их приблизительных функциональных форм в области, где они оба действительны.

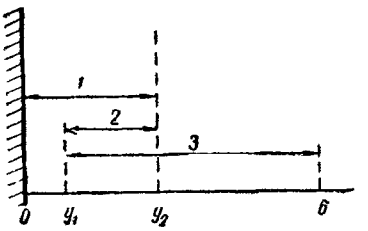


Рис. 111. Области законов пограничного слоя

1 — внутренний закон; *2* — область наложения; *3* — внешний закон

Складывая уравнения (253) и (258) при допущении их одновременного применения, получаем

$$\sigma = f(y^*, k^*) + g(\sigma, H) F(\eta, H). \tag{259}$$

Дифференцирование равенства (259) по y дает

$$\frac{u_\tau}{\nu} \cdot \frac{\partial f}{\partial y^*} + \frac{g}{\delta} \cdot \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0. \tag{260}$$

Новое дифференцирование по y дает

$$\left(\frac{u_\tau}{\nu}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^{*2}} + \frac{g}{\delta^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = 0.$$

Из двух предыдущих равенств следует

$$y^* \frac{\partial^2 f / \partial y^{*2}}{\partial f / \partial y^*} = \eta \frac{\partial^2 F / \partial \eta^2}{\partial F / \partial \eta}. \tag{261}$$

Но поскольку $y^* = \eta(\delta u_\tau/\nu)$ и $\delta u_\tau/\nu$ меняются с числом Рейнольдса, очевидно, что y^* и η могут изменяться независимо и каждый член уравнения (261) должен быть постоянен. Обозначая постоянную через $n-1$, получаем

$$y^* \frac{\partial^2 f / \partial y^{*2}}{\partial f / \partial y^*} = n - 1.$$

Если $n = 0$, последовательное интегрирование дает

$$\frac{\partial f}{\partial y^*} = \frac{C_1(k^*)}{y^*}; \quad f(y^*, k^*) = C_1(k^*) \ln y^* + A(k^*)$$

и точно так же

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{C_2(H)}{\eta}; \; F(\eta, H) = C_2(H) \ln \eta + B(H).$$

Подстановкой в равенство (260) получаем уравнение

$$C_1(k^*) + g(\sigma, H) C_2(H) = 0,$$

из которого видно, что при независимых величинах k^*, H и σ значения C_1, C_2 и g постоянны, если $n=0$. Далее, так как постоянная g может быть введена в функцию F равенства (258), она может быть принята равной единице. Отсюда, положив $C_1 = -C_2 = C$, получим:

$$f(y^*, k^*) = C(k^*) \ln y^* + A(k^*); \tag{262}$$

$$F(\eta, H) = -C(k^*) \ln \eta + B(H). \tag{263}$$

Таким образом, эпюры скоростей в области наложения удовлетворяют линейным логарифмическим соотношениям. Подстановка в равенство (259) теперь дает

$$\sigma = A(k^*) + B(H) + C \ln \xi, \tag{264}$$

где $\xi = \frac{\delta u_\tau}{\nu}$ — соотношение между толщиной пограничного слоя и касательным напряжением на стенке. Логарифмические законы хорошо подтвердились экспериментально для потоков в трубах и каналах, но для течения в пограничном слое положение гораздо менее удовлетворительно. Прямые линии эпюр скоростей, построенных в полулогарифмических координатах в соответствии с внутренним законом, нередко походили на касательные к кривым, построенным в обычных координатах.

Если предположить, что n не равно нулю, то последовательное интегрирование дает

$$\frac{\partial f}{\partial y^*} = n a(k^*) y^{*n-1}; \; f(y^*, k^*) = a(k^*) y^{*n} + b(k^*) \tag{265}$$

и точно так же

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \eta a'(H) \eta^{n-1}; \; F(\eta, H) = a'(H) \eta^n + b'(H). \tag{266}$$

Из подстановки в уравнение (260) следует

$$a(k^*) y^{*n} + g(\sigma) a'(H) \eta^n = 0$$

или

$$\left(\frac{\delta u_\tau}{\nu}\right)^n = -g(\sigma) \frac{a'(H)}{a(k^*)}, \tag{267}$$

а из подстановки в уравнение (259) получаем

$$\sigma = a y^{*n} + b + g(\sigma)(a' \eta^n + b') = b(k^*) + g(\sigma) b'(H),$$

так что

$$g(\sigma) = \frac{\sigma - b(k^*)}{b'(H)}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\delta u_\tau}{\nu}\right)^n = -\frac{a'(H)}{a(k^*)b'(H)}(\sigma - b) \tag{268}$$

и закон дефицита скорости принимает вид.

$$\frac{\sigma - \bar{u}/u_\tau}{\sigma - b(k^*)} = F_1(\eta, H), \quad F_1 = \frac{F}{b'(H)}. \tag{269}$$

Предшествующий анализ показывает, что формулы типа (265) и (266) служили бы лучшей основой, чем обычно употребляемые логарифмические соотношения, для вывода так называемых универсальных законов для характеристик пограничного слоя. Оказалось, что логарифмические формулы составляют только один член семейства возможных формул, из которых должна быть выбрана наиболее подходящая для пограничного слоя. К сожалению, имеющиеся в настоящее время данные недостаточны для такого выбора, главным образом из-за практической ограниченности чисел Рейнольдса, которые могут быть получены в лаборатории.

Ряд данных о пограничном слое на плоской пластине при нулевом градиенте давления, нанесенных на график на основе простейшего вида закона дефицита скорости [уравнения (255)], показан на рис. 112. Данные, полученные при различных состояниях вдоль пластины, ложатся около одной кривой. Этим доказывается справедливость допущения, что функциональные соотношения не зависят не только от числа Рейнольдса, но и от профилирующего параметра H, хотя эта функциональная независимость, особенно от H, может обусловливаться очень малым диапазоном как чисел Рейнольдса, так и H. Из рис. 112 видно, что логарифмический закон распространяется примерно до $\eta_2 = 0{,}16$, при бо́льших значениях η до единицы, что соответствует $y = \delta$, данные образуют кривую. Таким образом, только около 1/7 пограничного слоя подчиняется закону стенки, и, как видно из рис. 110, логарифмический закон распространяется приблизительно от значений $y_1^* = 30$ до $\eta_2 = 0{,}16$. При небольших числах Рейнольдса разница в значениях y_1^*, y и η_2 мала, однако с увеличением чисел Рейнольдса разница также увеличивается до тех пор, пока логарифмический закон не становится определяющим почти для всей части пограничного слоя, где действителен закон стенки. Нижний предел применимости логарифмического закона может быть получен приравниванием y_1 и y_2, для которых $y_1^* = y_1 u_\tau/\nu$ и $\eta_2 = y_2/\delta$. Это дает

$$\frac{\delta u_\tau}{\nu} = \frac{y_1^*}{\eta_2} = 187{,}5$$

и из уравнения (264)

$$\sigma = 6 + 6\lg 187{,}5 \approx 19{,}6.$$

Отсюда $C_\tau = 2/\sigma^2 = 0{,}0052$, что для плоской пластины при нулевом градиенте давления соответствует числу Рейнольдса около $1{,}5 \cdot 10^5$.

93. Пограничный слой на плоской пластине. Порядок применения законов подобия и уравнения количества движения для получения характеристик турбулентного пограничного слоя может быть легко проиллюстрирован на примере плоской пласти-

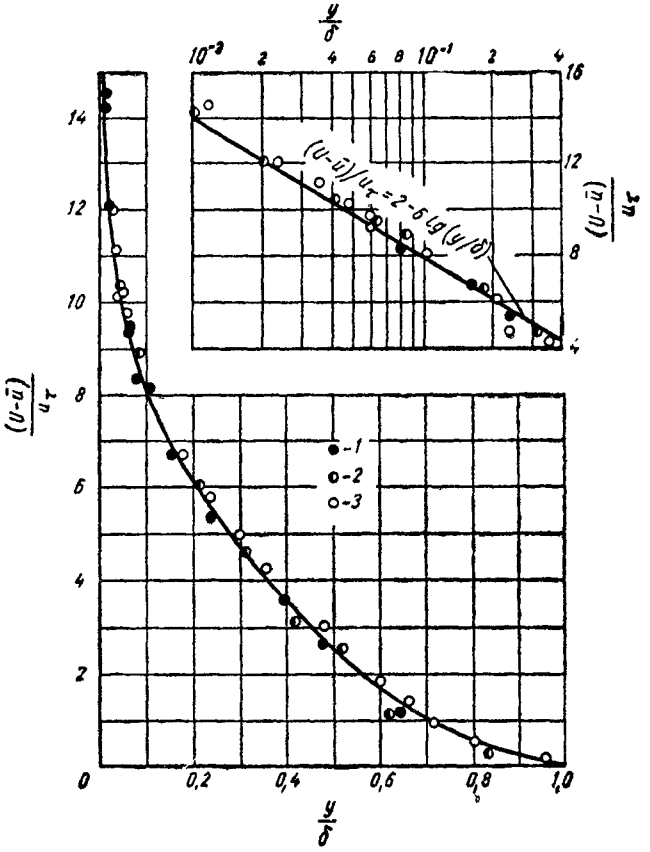


Рис. 112. Закон дефицита скорости для плоской пластины (Шульц-Грюнов)

1 — $\mathrm{Re}_x = 6{,}78 \cdot 10^5$; *2* — $\mathrm{Re}_x = 3{,}40 \cdot 10^6$; *3* — $\mathrm{Re}_x = 7{,}20 \cdot 10^6$

ны при нулевом градиенте давления. Допустим, что законы подобия даны кривыми на рис. 110 и 112 и что уравнение линейной логарифмической части закона стенки таково:

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = 4 + 2{,}6 \ln y^*,$$

где

$$y^* > 30, \text{ а } \eta < 0{,}16.$$

Так же уравнение (264) может быть представлено в виде

$$\sigma = 6 + 2{,}6 \ln \zeta,$$

где

$$\zeta = \frac{\delta u_\tau}{\nu} = \exp\left(\frac{\sigma - 6}{2{,}6}\right).$$

Далее допустим, что нормальными напряжениями в уравнении количества движения (218) можно пренебречь. Тогда

$$C_\tau = 2\frac{d\delta_2}{dx} = 2\frac{d\,\mathrm{Re}_{\delta_2}}{d\,\mathrm{Re}_x},$$

где

$$\mathrm{Re}_{\delta_2} = U\delta_2/\nu.$$

Различные характеристики пограничного слоя удобнее выразить через σ. Определения σ и C_τ дают

$$C_\tau = \frac{2}{\sigma^2}.$$

Затем $\mathrm{Re}_\delta = U\delta/\nu$ представляется как

$$\mathrm{Re}_\delta = \frac{\delta u_\tau}{\nu} \cdot \frac{U}{u_\tau} = \zeta\sigma,$$

где отношение между ζ и σ то же, что принято раньше.

Порядок оценки различных толщин пограничного слоя будет проиллюстрирован применительно к толщине смещения. Можно написать

$$\mathrm{Re}_{\delta_1} = \frac{U\delta_1}{\nu} = \frac{U}{\nu}\left[\int_0^{y_1}\left(1 - \frac{\overline{u}}{U}\right)dy + \right.$$

$$\left. + \int_{y_1}^{y_2}\left(1 - \frac{\overline{u}}{U}\right)dy + \int_{y_2}^{\delta}\left(1 - \frac{\overline{u}}{U}\right)dy\right],$$

где y_1 и y_2 — начальное и конечное значение y для области наложения законов подобия.

Затем

$$\frac{U}{\nu}\int_0^{y_1}\left(1-\frac{\overline{u}}{U}\right)dy=\int_0^{y_1^*}(\sigma-f)\,dy^*=\sigma y_1^*-c_0,$$

где

$$c_0=\int_0^{y_1^*}f(y^*)\,dy^*.$$

Также

$$\frac{U}{\nu}\int_{y_1}^{y_2}\left(1-\frac{\overline{u}}{U}\right)dy=\int_{y_1^*}^{y_2^*}(\sigma-f)\,dy^*=$$

$$=\sigma\left(y_2^*-y_1^*\right)-fy^*\Big|_{y_1^*}^{y_2^*}+\int_{y_1^*}^{y_2^*}y^*\frac{df}{dy^*}\,dy^*.$$

Но из уравнения (262) $y^*df/dy^*=C$, также $y_2^*=\eta_2\zeta$. Отсюда

$$\frac{U}{\nu}\int_{y_1}^{y_2}\left(1-\frac{\overline{u}}{U}\right)dy=\eta_2\zeta\left(F_2+C\right)-y_1^*\left(\sigma+C-f_1\right),$$

где

$$f_1=f\left(y_1^*\right),\quad F_2=F\left(\eta_2\right).$$

Наконец,

$$\frac{U}{\nu}\int_{y_2}^{\delta}\left(1-\frac{\overline{u}}{U}\right)dy=\mathrm{Re}_\delta\int_{\eta_2}^{1}\frac{F(\eta)}{\sigma}\,d\eta=\eta c_2,$$

где

$$c_2=\int_{\eta_2}^{1}F(\eta)\,d\eta.$$

Сложение трех интегралов дает

$$\mathrm{Re}_{\delta_1}=\beta\zeta+\lambda=\beta\exp\left(\frac{\sigma-6}{2{,}6}\right)+\lambda,$$

где β и λ — постоянные, равные:

$$\beta=\zeta_2\left(F_2+C\right.+c_2;\quad\lambda=y_1^*\left(f_1-C\right)-c_0.$$

Выражение для толщины количества движения может быть выведено таким же образом. Результаты сведены в табл. 5. Число Рейнольдса Re может быть определено как функция σ с использованием уравнения количества движения. Получаем

$$\mathrm{Re}_x = \int \frac{2}{C_\tau}\, d\,\mathrm{Re}_{\delta_2} = \sigma^2\,\mathrm{Re}_{\delta_2} - 2\int \sigma\,\mathrm{Re}_{\delta_2}\, d\sigma + c.$$

Последний интеграл легко определяется с помощью выражения для Re_{δ_2} в функции от σ. Результирующая формула для Re_x также дана в табл. 5. Появившаяся постоянная интегрирования связана с расстоянием до переднего края пластины, на котором происходит переход от ламинарного движения к турбулентному.

Таблица 5

Уравнения для характеристик пограничного слоя

Уравнения	Вспомогательные соотношения
$C_\tau = \frac{2}{\sigma^2}$	$\sigma = A + B + C\ln\zeta$
$\mathrm{Re}_\delta = \sigma\zeta$	$\alpha = c_1 - y_1^*\left(f_1^2 - 2Cf_1 + 2C^2\right)$
$\mathrm{Re}_{\delta_1} = \beta\zeta + \lambda$	$\beta = \eta_2(F_2 + C) + c_2$
$\mathrm{Re}_{\delta_2} = \zeta\left(\beta - \frac{\gamma}{\sigma}\right) - \lambda - \frac{\alpha}{\sigma}$	$\gamma = \eta_2\left(F_2^2 + 2CF_1 + 2C^2\right) + c_3$
$\mathrm{Re}_x - c = \zeta\left[\beta\sigma^2 - (\gamma + 2\beta C)\sigma + 2C(\gamma + \beta C)\right]$	$\lambda = y_1^*(f_1 - C) - c_0$
$C_f = 2\frac{\mathrm{Re}_{\delta_2}}{\mathrm{Re}_x}$	$c_0 = \int_0^{y_1^*} f\,dy^*;\quad c_1 = \int_0^{y_1^*} f^2\,dy^*;$
	$c_2 = \int_{\eta_2}^{1} F\,d\eta;\quad c_3 = \int_{\eta_2}^{1} F^2\,d\eta$

Выразим теперь через σ коэффициент полного поверхностного сопротивления C_f. Вспомнив, что C_f — среднее значение коэффициента касательного напряжения, запишем

$$C_f = \frac{1}{\mathrm{Re}_x}\int_0^{\mathrm{Re}_x} C_\tau\, d\,\mathrm{Re}_x = \frac{1}{\mathrm{Re}_x}\int_0^{\mathrm{Re}_x} 2\frac{d\,\mathrm{Re}_{\delta_2}}{d\,\mathrm{Re}_x}\, d\,\mathrm{Re}_x = 2\frac{\mathrm{Re}_{\delta_2}}{\mathrm{Re}_x},$$

что дает требуемый результат, так как Re_{δ_2} и Re_x уже были выражены через σ.

Выражения для C_τ, Re_δ, Re_{δ_1}, Re_{δ_2}, Re_x и C_f как функций σ приведены в табл. 5, а численные их значения даны в табл. 6. Ясно, что с помощью последней таблицы можно построить кривые различных значений C_τ и C_f с Re_x для принятых величин c.

Кривые связи C_τ и H с Re_{δ_2}, показанные на рис. 113, очень важны, так как они не зависят от перемещения точки. Эти результаты, основанные на допущении применимости логарифмических законов и на частных числовых значениях постоянных, полученных опытным путем, дают значительный разброс данных и поэтому могут рассматриваться скорее как иллюстративный, чем как безусловный материал.

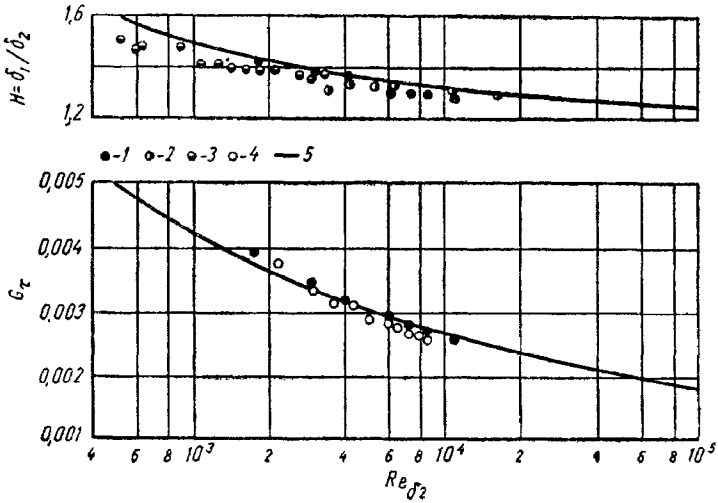


Рис. 113. Характеристики пограничного слоя потока на плоской пластине

1 — **Шульц-Грюнов**; *2* — **Вейгардт**; *3* — **Гама**; *4* — **Людвиг и Тильман**; *5* — **результаты вычислений по законам пограничного слоя**

Таблица 6

Значения характеристик пограничного слоя

$A=4$;	$y_1^*=30$;	$F_2=6{,}78$;	$c_2=1{,}997$;	$\beta=3{,}499$;
$B=2$;	$\eta_2=0{,}16$;	$c_0=274{,}9$;	$c_3=8{,}16$;	$\gamma=23{,}28$;
$C=2{,}606$;	$f_1=12{,}86$;	$c_1=2923$;	$\alpha=-434{,}9$;	$\lambda=32{,}78$

x	$10^3\ C_\tau$	$10^5\ Re_\delta$	$10^4\ Re_{\delta_1}$	$10^4\ Re_{\delta_2}$	$H=\frac{\delta_1}{\delta_2}$	$10^6\ (Re_x-c)$	$10^3\ C_f^*$
20	5,000	0,0431	0,0798	0,0492	1,598	0,1503	6,550
22	4,132	0,1021	0,1657	0,1120	1,479	0,4308	5,200
24	3,472	0,2400	0,3532	0,2514	1,405	1,178	4,269
26	2,959	0,5600	0,7571	0,5594	1,353	3,124	3,580
28	2,551	1,300	1,627	1,237	1,316	8,110	3,050
30	2,222	3,000	3,502	2,721	1,287	20,71	2,629
32	1,953	6,894	7,542	5,968	1,264	52,19	2,288
34	1,730	15,78	16,24	13,06	1,244	130,1	2,007
36	1,543	36,00	34,99	28,52	1,227	320,9	1,780
38	1,385	81,87	75,39	62,17	1,212	785,2	1,584
40	1,250	185,7	162,4	135,4	1,200	1906	1,421

94. Приближенный расчет турбулентных пограничных слоев. Среди существующих числовых полуэмпирических методов вычисления турбулентного пограничного слоя наиболее целесообразным представляется метод Ротта, основанный на следующих допущениях: а) эпюра средней скорости части пограничного слоя вблизи стенки подчиняется внутреннему закону; б) внешняя часть эпюры средней скорости может быть представлена однопараметрическим семейством эпюр, удовлетворяющих внешнему закону; в) существует однозначная связь между эпюрами скоростей и распределением различных функций осредненных пульсаций скорости.

Для применения перечисленных допущений необходимо обратиться к эмпирическим кривым внутреннего и внешнего законов и распределению различных статистических количеств, которое дано в уравнениях количества движения и энергии. В этой главе указывается лишь возможность отыскания решения, поэтому эти кривые не приводятся. Читатель, желающий получить детальную информацию, должен прочесть работы Ротта.

Если упомянутые кривые имеются под рукой, то каждый член уравнений количества движения и энергии может быть выражен в функции C_τ и H. Таким образом, можно получить решение для C_τ и H в виде двух обычных дифференциальных уравнений.

Пример 28. Использовать внутренний и внешний законы для получения выражения $\delta_1(\sigma, H)$, приняв логарифмический вид зависимостей.

Решение должно быть таким:

$$\mathrm{Re}_{\delta_1} = \frac{U\delta_1}{\nu} = \frac{U}{\nu}\int_0^{\delta}\left(1 - \frac{\bar{u}}{U}\right)dy;$$

$$\frac{U}{\nu}\int_0^{y_1}\left(1 - \frac{\bar{u}}{U}\right)dy = \frac{U}{u_\tau}\int_0^{y_1^*}\left(1 - \frac{f}{\sigma}\right)dy^* = \int_0^{y_1^*}(\sigma - f)\,dy^* = \sigma y_1^* - c_0;$$

$$\frac{U}{\nu}\int_{y_1}^{y_2}\left(1 - \frac{\bar{u}}{U}\right)dy = \int_{y_1^*}^{y_2^*}(\sigma - f)\,dy^* = y^*(\sigma - A - C\ln y^* + C)\Big|_{y_1^*}^{y_2^*} =$$

$$= y^*(\sigma - f + C)\Big|_{y_1^*}^{y_2^*} = \eta_2\zeta\left(F_2 + C\right) - y_1'\left(\sigma - f_1 + C\right),$$

так как

$$y_2^* = \frac{y_2 u_\tau}{\nu} = \eta_2\zeta$$

и

$$(\sigma - f)_{y_2} = (F)_{y_2} = F_2\,.$$

Также

$$\frac{U}{\nu}\int\limits_{y_2}^{\delta}\left(1-\frac{\bar{u}}{U}\right)dy=\frac{\delta U}{\nu}\int\limits_{\eta_2}^{1}\frac{U-\bar{u}}{u_\tau}\,d\eta=$$

$$=\zeta\int\limits_{\eta_2}^{1}F(\eta,H)\,d\eta=c_1(H)\,\zeta.$$

Отсюда

$$\mathrm{Re}_{\delta_1}=\zeta\left(c_1+\eta_2F_2+\eta_2C\right)+\left(y_1^*f_1-y_1^*C-c_0\right).$$

Здесь слагаемые во второй скобке — постоянные, а слагаемые в первой скобке — функции H. Отсюда Re_{δ_1} имеет вид

$$\mathrm{Re}_{\delta_1}=\lambda_0+\lambda_1(H)\,\zeta,$$

который, поскольку ζ — экспоненциальная функция $\sigma=\sqrt{2/C_\tau}$, дает величину Re_{δ_1} в функции от C_τ и H, что и требовалось.

Глава VIII

СВОБОДНЫЙ ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОТОК СО СДВИГОМ

А. Вводные замечания

95. Течение, создаваемое внезапным (неплавным) изменением скорости. В главе V было уделено большое внимание влиянию вязкого сдвига в зонах со значительным градиентом скорости. Глава VI посвящена увеличению напряжения, сопровождающего образование турбулентности, с акцентировкой внимания на вторичном течении, возникающем в результате процесса перемешивания. В главе VII даны методы определения формы как ламинарного, так и турбулентного потока, возникающего в результате передачи сдвига вблизи твердых границ и прогрессивно развивающегося от граничной зоны. Эта глава, последняя в изложении, посвящена рассмотрению зон сдвига вдали от неподвижных границ. Хотя при очень малых числах Рейнольдса такой поток, несомненно, ламинарен, однако из-за отсутствия стабилизирующего влияния неподвижной граничной поверхности он чувствителен к сравнительно малым возмущениям и почти во всех практических случаях проявляет с самого начала значительную степень турбулентности. Отсюда становится ясным смысл названия настоящей главы «Свободный турбулентный поток со сдвигом».

Простейшим случаем такого потока может быть слой жидкости, находящейся на границе с неподвижной поверхностью, внезапно приводимой затем в параллельное движение; сдвиг, будь он ламинарным или турбулентным, подчиняет своему влиянию постепенно возрастающую зону жидкости. Свободную турбулентность при подобных условиях можно создать, внезапно приведя два соседних жидких тела (слоя) в относительное движение, параллельное разграничивающей их поверхности. Интенсивный сдвиг на этой поверхности разрыва скорости (по сути, вихревой слой) очень быстро приводит к неустойчивости, зарождению турбулентности и диффузии, обусловливаемой вторичными течениями. Образующаяся турбулентность, усиливая местные напряжения, тем не менее обеспечивает условия, облегчающие ее распространение, так как при процессе перемешивания жидкость,

движущаяся с малой скоростью, переносится в зону с большими скоростями, и наоборот, в результате чего кривая распределения относительных скоростей претерпевает трансформацию, подобную изображенной на рис. 114. Если допустить, что каждая из жидкостей простирается в полубесконечность, тогда изображенный на рис. 114 процесс будет продолжаться бесконечно долго со все возрастающей скоростью, средний масштаб турбулентности будет расти пропорционально размерам зоны диффузии и средняя интенсивность — пропорционально градиенту скорости.

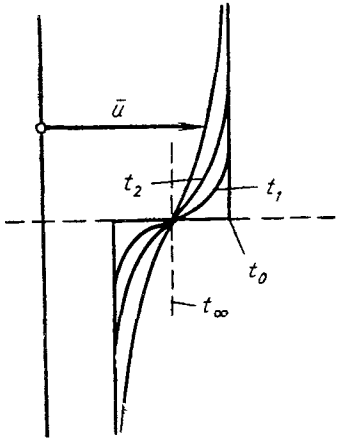


Рис. 114. Временное изменение скорости на поверхности разрыва

Жертвуя в какой-то мере простотой, мы можем значительно выиграть в удобстве применения, заменив неустановившийся равномерный процесс свободной турбулентности установившимся неравномерным процессом: два параллельных потока с различными скоростями вступают в контакт в данной точке, а не в данный момент времени. Можно допустить, что это происходит в конечной точке тонкой разделительной стенки (без сопротивления). Тогда упомянутая последовательность эпюр скоростей представится в виде кривых, размещенных на разных расстояниях от точки начального контакта (рис. 115). Иными словами, наиболее интенсивный сдвиг происходит в конечной точке стенки, распространение турбулентности, образовавшейся в этой зоне, является причиной того, что все больше и больше жидкости вовлекается в процесс перемешивания, и по мере вырождения турбулентности, сформировавшейся ранее, образуется турбулентность более крупного масштаба. Конфигурация потока будет, очевидно, меняться в зависимости от относительных величин двух скоростей; граничным условием параллельных линий тока без взаимного сдвига на разграничивающей поверхности является равенство скоростей.

(Допущение отсутствия сопротивления на стенке, разделяющей два жидких тела, конечно, нереально. Однако турбулентность, возникающая на поверхности резкого изменения скорости внутри жидкости, во много раз превосходит турбулентность, образующуюся на твердой границе. Хотя наличие твердой стенки, несомненно, может изменить до некоторой степени характер свободной турбулентности, но это воздействие второстепенно и поэтому может игнорироваться в общем рассмотрении.)

За исключением замены временного параметра параметром расстояния основное различие между первоначально рассмотрен-

ным случаем неустановившегося движения и неравномерным потоком (см. рис. 115) заключается в том, что временные изменения совершенно симметричны, тогда как пространственным изменениям свойственна асимметричность.

Более того, в то время как движение жидкости, имеющей более высокую скорость, затормаживается, продолжает возрастать количество жидкости с меньшей скоростью, вовлекаемое в более быстрое движение, что заставляет эту жидкость двигаться к зоне диффузии. Указанное положение обостряется, если принять, что скорость медленно движущейся жидкости равна нулю, как это изображено на рис. 116. По мере удаления от начальной

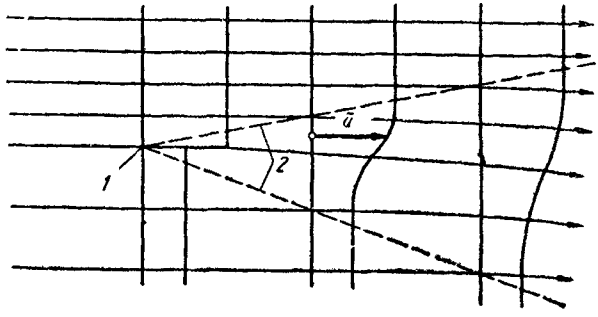


Рис. 115. Пространственное изменение скорости на поверхности разрыва

1 — конец разделительной стенки; *2* — условные границы зоны диффузии

точки контакта все возрастающее количество ранее неподвижной жидкости приходит в движение, так что по условиям неразрывности должен возникнуть поток, движущийся в обратном направлении, как показано линиями тока вторичного течения.

Существует, конечно, бесчисленное множество граничных условий, вносящих дополнительные усложнения, но в то же время представляющих практический интерес. В данном пункте будут рассмотрены только три из них. Первое представляет собой поток конечной ширины, впадающий в параллельный поток с меньшей (или большей) скоростью. Рассмотренная ранее упрощенная картина должна быть при этом дополнена ее зеркальным изображением так, чтобы две первоначально отдельные зоны диффузии со временем соединились и дали новый тип потока. Второе создается жесткой границей, которая нарушает приток жидкости, необходимой для процесса распространения зоны перемешивания (рис. 117). Так как вовлечение новых объемов требует соблюдения неразрывности, должен установиться обратный поток, что создает относительно устойчивый вихрь, обычно сопутствующий зонам разрыва. На достаточном расстоянии от этого вторичного местного течения диффузия будет продолжаться, как если бы эта

дополнительная стенка была бы просто поверхностью (с любым сопротивлением) симметрии в бесконечной жидкости. Наконец, если существуют две такие стенки, тогда диффузию нельзя считать распространяющейся бесконечно. Напротив, зона свободного турбулентного потока со сдвигом существует лишь в непосредственной близости от первоначального разрыва, и проблема

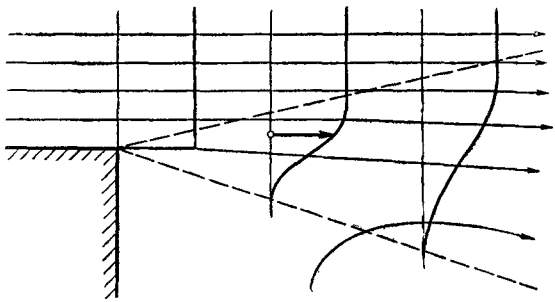


Рис. 116. Характер потока, распространяющегося в неограниченном пространстве

может быть в этом случае решена только с помощью эксперимента.

96. Методы анализа. Для описания свободного турбулентного потока со сдвигом широко применяются уравнения неразрывно-

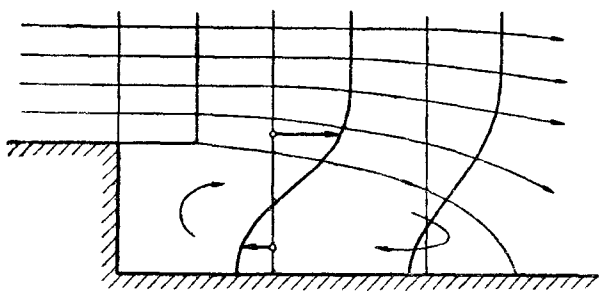


Рис. 117. Характер потока, распространяющегося в ограниченном пространстве

сти и уравнения движения как в дифференциальной форме, полученной Рейнольдсом, так и в интегральной форме. Число их, конечно, недостаточно для решения любой задачи, если только они не упрощаются очень сильно или не дополняются добавочными соотношениями. Обе эти возможности, к счастью, существуют хотя бы в простейших случаях.

Как и в общем анализе пограничного слоя (см. п. 83), можно принять, что продольные изменения скорости по сравнению с по-

перечными и поперечные размеры по сравнению с продольными малы, так что в зоне диффузии и вне ее давление может считаться одинаковым. Тогда из вопросов, связанных с полубесконечной жидкостью, можно исключить изменение давления (кроме гидростатического эффекта). Из-за высокой интенсивности перемешивания вязкие напряжения по сравнению с турбулентными незначительны и ими можно пренебречь. Таким образом, для случая двухмерного потока пригодны такие дифференциальные уравнения:

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{\partial (\rho \overline{u' v'})}{\partial y};$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0.$$

В случае диффузии от единственной зоны разрыва в бесконечной жидкости имеется только один линейный размер, аналогичный длине плоской пластины в анализе пограничного слоя, — расстояние от начальной точки разрыва. В результате можно снова допустить, что кривая распределения скорости в поперечном сечении просто удлиняется с увеличением расстояния от начала; функция распределения, таким образом, подобна во всех сечениях вдоль течения. Такое подобие, очевидно, относится как к осредненному движению, так и к турбулентности, которые неразрывно связаны друг с другом.

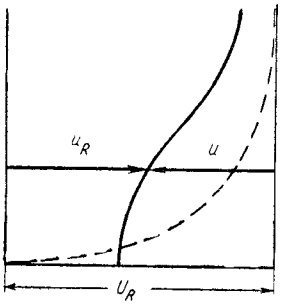
Для окончательного решения вопроса (исключая экспериментальное определение коэффициентов пропорциональности) должны быть приняты еще два соотношения: поперечное распределение некоторой характеристики осредненного потока или поперечное распределение некоторой характеристики турбулентности и соотношение между ними. Характеристикой осредненного потока может быть любой компонент скорости, а турбулентной характеристикой может быть интенсивность, масштаб, сдвиг или диффузионность, однако поскольку единственными достаточно простыми соотношениями между осредненным потоком и турбулентностью являются феноменологические соотношения (см. п. 78), то обычно в качестве характеристики турбулентности принимают или длину перемешивания, или виртуальную (вихревую) вязкость.

При более сложных граничных условиях, представленных близостью двух зон диффузии в зеркальном изображении, перечисленные допущения о подобии, очевидно, применимы лишь в качестве первого приближения значительно выше по течению и в дифференциальной функциональной форме значительно ниже по течению от области смыкания зон. Если, кроме того, такие отображения повторяются многократно (как это происходит в потоке за решеткой) или если зона свободной турбулентной диффузии ограничена в поперечном направлении (как в потоке, движу-

щемся в водоводе), тогда все предыдущие упрощения становятся неприемлемыми. Как было отмечено, детальное исследование последних вопросов должно базироваться на экспериментальных измерениях, ибо аналитические соотношения служат лишь для корректировки деталей в соответствии с физическими требованиями.

Пример 29. Плоская пластина протягивается через первоначально неподвижную жидкость. Начертить распределение скорости в следе и рассмотреть его отношение к лобовому сопротивлению пластины.

Если скорость жидкости относительно пластины обозначить $\bar{u}_R$, а ее предел U_R, то по соотношениям для пограничного слоя интеграл



$$\rho \int_0^\infty \bar{u}_R \left(U_R - \bar{u}_R\right) dy = D$$

должен быть таким же, как в конце пластины во всех последующих поперечных сечениях следа.

Через мгновенную скорость в произвольном сечении, поскольку $\bar{u} = u_R - U_R$, имеем

$$\rho \int_0^\infty \left(U_R + \bar{u}\right)\left(-\bar{u}\right) dy = D = \text{const}.$$

Б. Смешение параллельных потоков

97. Общие соотношения для смешивающихся потоков. На рис. 118 показано, как два параллельных потока с различными скоростями вступают в контакт в начале координат. Для упрощения принято, что разделительная стенка не влияет на распределение скоростей, и скорости во всех точках первого и второго потоков равны соответственно U_1 и U_2. Примем, что в сближающихся потоках турбулентность отсутствует, так что характер скорости ниже точки контакта полностью определяется турбулентным перемешиванием в области наибольшего сдвига. Характер турбулентности в свою очередь может считаться зависящим только от соответствующего распределения средней скорости. Таким образом, это соотношение является объединяющим. История видоизменения, предшествующая каждому поперечному сечению, должна быть подобна для всех сечений, и расстояние x от

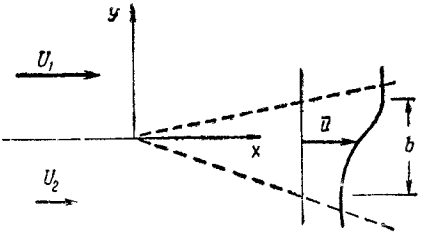


Рис. 118. Пояснительная схема смешения потоков

конца разделительной стенки не должно влиять на распределение скоростей, за исключением изменения ширины b зоны диффузии. Поэтому целесообразно допустить, что отношение всех скоростей, как турбулентных, так и осредненных, к упомянутой характерной скорости является функцией только параметра y/b.

Используя метод Рейхардта, дефицит скорости $\bar{u}_d = \bar{u} - U_1$ принимаем в качестве независимой переменной, максимальным значением которой является разность $U_d = U_2 - U_1$. Допущение о подобии функций распределения скоростей может быть записано так:

$$\frac{\bar{u}_d}{U_d} = f\left(\frac{y}{b}\right). \tag{270}$$

Это соотношение применимо ко всем без исключения компонентам осредненного и вторичного потоков.

Вводя уравнение неразрывности, запишем уравнение движения, представленное в предыдущем пункте, в форме уравнения неразрывности, так что должно быть выполнено аналогичное интегрирование

$$\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{uv})}{\partial y} = 0.$$

Здесь $\overline{uv} = \bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'}$. Если теперь воспользоваться выражением для дефицита скорости, то уравнение неразрывности принимает вид

$$-\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}_d}{\partial x}.$$

При $\bar{u}_d$, записанном как $(\bar{u}_d/U_d)\,U_d$, это уравнение может быть переписано так:

$$-\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = U_d \frac{\partial (\bar{u}_d/U_d)}{\partial x} + \frac{\bar{u}_d}{U_d} \cdot \frac{dU_d}{dx}. \tag{271}$$

Так как в условиях смешения параллельных потоков U_d — постоянная, последнее слагаемое в этом равенстве равно нулю. Введение переменной y/b дает выражение

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial (y/b)} = U_d \frac{db}{dx} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{d(\bar{u}_d/U_d)}{d(y/b)}. \tag{272}$$

Интегрирование по отношению к y/b и деление на U_d приводит к равенству

$$\frac{\bar{v}}{U_d} = \frac{db}{dx} \int \frac{y}{b} \cdot \frac{d(\bar{u}_d/U_d)}{d(y/b)}\, d(y/b) + C_1(x). \tag{273}$$

Поперечный компонент осредненной скорости может быть определен из этого равенства, поскольку распределение скорости в направлении x выражено как функция от y/b.

Вводя квадрат дефицита скорости $\overline{u_*^2} = \overline{u}^2 - U_1^2$, максимумом которого является $U_*^2 = U_2^2 - U_1^2$, можно написать уравнение движения в форме уравнения неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\overline{u_*^2}}{U_*^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\overline{uv}}{U_*^2}\right) = 0. \tag{274}$$

Интегрирование аналогично уравнениям (271) и (273) дает

$$\frac{\overline{uv}}{U_*^2} = \frac{db}{dx}\int \frac{y}{b}\cdot\frac{d\left(\overline{u_*^2}/U_*^2\right)}{d\left(y/b\right)}\,d\left(y/b\right) + C_2(x). \tag{275}$$

Равенство (275) указывает на связь между осредненным произведением $-\rho\overline{uv}$, которое включает турбулентный сдвиг $-\rho\overline{u'v'}$, и распределением продольного компонента скорости, так что выражение для одного из них определяет другое.

Как было упомянуто, осредненные величины всех скоростных характеристик являются функциями только y/b, а не x. Отсюда, поскольку интегралы как равенства (273), так и равенства (275) являются функциями только y/b, величины $C_1(x)$ и $C_2(x)$ должны быть постоянными, а эти равенства содержать кроме db/dx только постоянные величины и функции от y/b. Следовательно, db/dx не может быть функцией x и ширина b зоны диффузии увеличивается линейно в зависимости от x. Скорость распространения, однако, будет зависеть некоторым пока еще неизвестным образом от соотношения скоростей двух параллельных потоков:

$$\frac{db}{dx} = f\left(\frac{U_2}{U_1}\right).$$

Приведенный анализ, очевидно, достаточен только для подтверждения основных соотношений, присущих рассматриваемому потоку. Интегральные выражения, описывающие общие стороны неразрывности, количества движения и энергии потока, могут быть с успехом использованы в этом направлении, помогая с большей отчетливостью представлять характеристики потока.

Эти интегральные соотношения, конечно, выведены из тех же основных уравнений, на которых построена вся механика жидкости. Например, уравнение неразрывности, проинтегрированное по y, может быть записано в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}\,dy = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}\,dy = -\overline{v}_{\infty} + \overline{v}_{-\infty} = V_1 + V_2$$

Интеграл слева представляет продольную скорость изменения объемного расхода через любое нормальное сечение; указанная скорость должна быть равна сумме поперечных скоростей (рис. 119). Если это выразить через дефицит скорости, производ-

ная по x может быть поставлена перед интегралом. Путем дальнейших преобразований, подобных проделанным с равенством (271), получено соотношение

$$\frac{d}{dx} b \left[\int_{-\infty}^{0} \frac{\bar{u}_e}{U_d} d\left(\frac{y}{b}\right) + \int_{0}^{\infty} \frac{\bar{u}_d}{U_d} d\left(\frac{y}{b}\right) \right] = \frac{V_1 + V_2}{U_d} ,$$

в котором $\bar{u}_d$ то же, что и раньше, а $\bar{u}_e = \bar{u} - U_2$. Сумму интегралов, представляющую собой, конечно, цифровую величину, обозначим через I_1. Скорость изменения b в продольном направлении, таким образом, составит

$$\frac{db}{dx} = \frac{V_1 + V_2}{U_d I_1} .$$

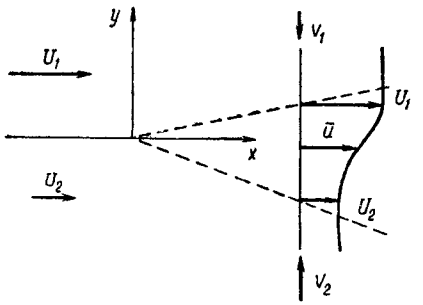


Рис. 119. Соотношение продольного поперечного потоков

То, что ширина зоны диффузии зависит от x линейно, теперь устанавливается непосредственно, так как V_1 и V_2 — поперечные скорости вне зоны перемешивания — постоянны.

Хотя здесь для получения искомого соотношения была необходима интегральная форма только уравнения неразрывности, в других случаях, как будет показано далее, потребуются интегралы количества движения и энергии.

98. Распределение скоростей при смешении потоков. В настоящем анализе будет использовано уравнение движения в форме

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} , \qquad (276)$$

где $\bar{\tau}_{xy} = -\rho \overline{u'v'}$. Прандтлевское представление о длине пути перемешивания, описанное в п. 78, может быть использовано здесь для получения соотношения между сдвигом и градиентом скорости в любой точке:

$$\bar{\tau}_{xy} = \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| .$$

Как показано в предыдущем пункте, допущение о подобии требует линейной зависимости b от x, так что распределение скорости может быть записано в функциональной форме как

$$\frac{\bar{u}}{U_1} = f\left(\frac{y}{x}\right) .$$

Если в прандтлевской гипотезе о механизме турбулентности имеется подобие турбулентности, то отношение длины пути перемешивания к ширине поперечного сечения должно быть функцией y/b

$$\frac{l}{b} = g\left(\frac{y}{b}\right)$$

Самой простой зависимостью, хотя не единственной и не самой лучшей, может быть $l/b = \text{const}$, для которой в силу линейной зависимости b от x

$$l = c_1 x.$$

Функция тока

$$\psi = xF\left(\frac{y}{x}\right)$$

находится обычным способом из записи $\psi = \int \bar{u}\,dy$ и интегрирования равенства $\bar{u} = U_1 f(y/x)$. Отсюда могут быть получены выражения для компонентов осредненной скорости

$$\bar{u} = \frac{dF(y/x)}{d(y/x)} = F', \quad \bar{v} = -F + \frac{y}{x}F',$$

где $F = U_1 \int f(y/x)\,d(y/x)$; $F' = U_1 f(y/x)$. Штрих над F указывает на дифференцирование по y/x. Подстановка в уравнение движения приводит к обычному дифференциальному уравнению

$$F'''(\eta) + F(\eta) = 0,$$

где для упрощения предстоящих математических операций использована дополнительная подстановка

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{2c_1^2}\,x}$$

Решение указанного дифференциального уравнения может быть записано так

$$U(\eta') = d_1 e^{-\eta'} + d_2 e^{\eta'/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\eta' - d_3 e^{\eta'/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\eta,$$

где $\eta' = \eta - \eta_1$, η_1 — величина η при $\bar{u} = U_1$, а d_1, d_2 и d_3 — постоянные. Четыре граничных значения могут быть определены из условий на внешних пределах зоны диффузии: скорость там должна быть равна скорости соседнего окружающего потока, а градиент скорости в поперечном направлении должен равняться нулю, так что

$$\bar{v} = U_1 \text{ и } \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{d\bar{u}}{d\eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \eta_1 \ (\eta' = 0),$$

$$u = U_2 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{d\eta'} = 0 \text{ при } \eta = \eta_2\ (\eta' = \eta_2).$$

Если в прандтлевской гипотезе о механизме турбулентности имеется подобие турбулентности, то отношение длины пути перемешивания к ширине поперечного сечения должно быть функцией y/b

$$\frac{l}{b} = g\left(\frac{y}{b}\right).$$

Самой простой зависимостью, хотя не единственной и не самой лучшей, может быть $l/b = \text{const}$, для которой в силу линейной зависимости b от x

$$l = c_1 x.$$

Функция тока

$$\psi = xF\left(\frac{y}{x}\right)$$

находится обычным способом из записи $\psi = \int \bar{u} dy$ и интегрирования равенства $\bar{u} = U_1 f(y/x)$. Отсюда могут быть получены выражения для компонентов осредненной скорости

$$\bar{u} = \frac{dF(y/x)}{d(y/x)} = F'; \quad \bar{v} = -F + \frac{y}{x}F',$$

где $F = U_1 \int f(y/x)\, d(y/x)$; $F' = U_1 f(y/x)$. Штрих над F указывает на дифференцирование по y/x. Подстановка в уравнение движения приводит к обычному дифференциальному уравнению

$$F'''(\eta) + F(\eta) = 0,$$

где для упрощения предстоящих математических операций использована дополнительная подстановка

$$\eta = \frac{y}{\sqrt[3]{2c_1^2 x}}.$$

Решение указанного дифференциального уравнения может быть записано так:

$$G(\eta') = d_1 e^{-\eta_1'} + d_2 e^{\eta_1'/2} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\eta' + d_3 e^{\eta_1'/2} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\eta',$$

где $\eta' = \eta - \eta_1$, η_1 — величина η при $\bar{u} = U_1$, а d_1, d_2 и d_3 — постоянные. Четыре граничных значения могут быть определены из условий на внешних пределах зоны диффузии: скорость там должна быть равна скорости соседнего окружающего потока, а градиент скорости в поперечном направлении должен равняться нулю, так что

$$\bar{u} = U_1 \text{ и } \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta'} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \eta_1 \ (\eta' = 0);$$

$$\bar{u} = U_2 \text{ и } \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta'} = 0 \text{ при } \eta = \eta_2 \ (\eta_1' = \eta_2').$$

ленное условие, так как при равенстве скоростей не будет турбулентного сдвига, а следовательно, и зоны диффузии. Нижний нулевой предел, как будет показано далее, очень важен для явлений, отличных от смешения потоков.

Пример 30. Используя рис. 120 и 121, получить величины b/x и c_1, если $U_2=0$ и $\overline{u}=0{,}88\ U_1$, когда $y=0{,}04\ x$.

Поскольку $U_2=0$, рис. 121 дает зависимость $\overline{u}/U_1$ от $(\eta_1-\eta)/(\eta_1-\eta_2)$, следовательно, когда $\overline{u}/U_1=0{,}88$,

$$\eta_1-\eta=0{,}16\,(\eta_1-\eta_2).$$

По рис. 120 при $U_2=0$ получаем, что величина $\eta_1=0{,}98$, а $\eta_2=-2$, так что

$$\eta=0{,}98-0{,}16\cdot 2{,}98=0{,}5.$$

Но по определению

$$\eta=\frac{y}{\sqrt[3]{2c_1^2\,x}}.$$

Отсюда, подставляя величину η и заданное отношение y/x и решая равенство относительно c_1, получим

$$\sqrt[3]{2c_1^2}=\frac{0{,}04}{0{,}5}=0{,}08 \text{ и } c_1=0{,}016.$$

Чтобы найти величину b/x, можно принять

$$\eta_1=\frac{y_1}{\sqrt[3]{2c_1^2\,x}};\quad \eta_2=\frac{y_2}{\sqrt[3]{2c_1^2\,x}}.$$

Отсюда, так как $b=y_1-y_2$,

$$\frac{b}{x}=(\eta_1-\eta_2)\sqrt[3]{2c_1^2}=2{,}98\cdot 0{,}08=0{,}24.$$

В. Распространение следа за телом

99. Интегральные соотношения для следа. При помещении тела в бесконечное поле течения, свободного от турбулентности и обладающего постоянной скоростью U_1, равномерный характер движения нарушается (рис. 122). При достаточно высоком числе Рейнольдса нарушенное поле может быть разделено на три области. Вокруг тела тонкий пограничный слой, вне этого слоя перед телом и по бокам от него безвихревое течение, позади тела область свободной турбулентности со сдвигом, обычно называемая следом. Для всех тел, за исключением тел хорошо обтекаемой формы, поверхность тока, совпадающая с твердой поверхностью тела, будет отделяться от него из-за граничного разрыва или из-за развития пограничного слоя и обратных градиентов давления. Сформированная таким образом поверхность средних линий тока замкнется на некотором расстоянии от конца тела. Передняя часть следа подобна только что рассмотренному случаю смешения потоков, разница в основном заключа-

ется в ограниченной протяженности поля потока, замкнутого граничной поверхностью тока. Ниже от этой области поток вновь представляет собой пример зоны диффузии в неограниченном поле. Для удобства рассмотрения скорость вне зоны диффузии считается постоянной величиной, равной U_1, а внутри зоны — переменной величиной $\bar{u}$, меньшей чем U_1. Зона диффузии полагается симметричной, и максимум дефицита скорости — соответствующим оси симметрии. Так как зона диффузии увеличивается

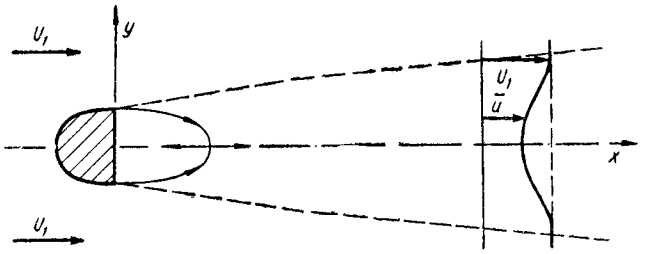


Рис. 122. Пояснительная схема распространения следов

в поперечном направлении вниз по течению, то все возрастающая часть окружающего потока тормозится, а заторможенная ранее — ускоряется.

Для изображения осесимметричного потока, параллельного двухмерному, компоненты скорости u и v до конца главы будут отсчитываться в осевом x и радиальном r направлениях. Интегральная зависимость (см. пп. 26 и 71) между силовым воздействием тела радиусом a и скоростью изменения количества движения в коаксиальной цилиндрической области радиусом r (рис. 123) принимает вид:

$$-C_D \pi a^2 \frac{\rho U_1^2}{2} = 2\pi\rho \int_0^r u^2 r\,dr + 2\pi\rho U_1 \left(\int_0^r U_1 r dr - \int_0^r u\,r dr \right) -$$

$$-2\pi\rho \int_0^r U_1^2 r dr.$$

Левая часть равенства представляет полное силовое воздействие тела. Первое слагаемое в правой части представляет осредненное количество движения через поперечное сечение, взятое ниже тела; хотя его выражение включает и осредненные и пульсационные ско-

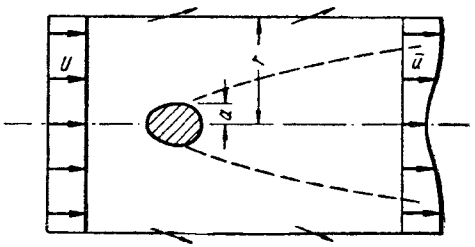


Рис. 123. Пространственное изображение распространения следов

рости, но последние пренебрежимо малы по сравнению с первыми. Величина в скобках во втором слагаемом пропорциональна разнице расхода через верхнее и нижнее сечения, а все слагаемое представляет поток количества движения наружу через цилиндрическую поверхность. Последний член — это поток количества движения через верхнее сечение. Верхний предел интегрирования r, очевидно, должен быть больше, чем радиус следа.

Введение разности скоростей $\overline{u}_d = \overline{u} - U_1$ дает после приведения подобных членов и деления на $2\pi\rho$ выражение

$$-\frac{1}{4} C_D a^2 U_1^2 = \int_0^\infty U_1 \overline{u}_d r dr + \int_0^\infty \overline{u}_d^2 r dr.$$

В этом равенстве пренебрегли воздействием турбулентных пульсаций и верхний предел увеличили до бесконечности. Очевидно, что в следе далеко за телом $\overline{u}_d^2 \ll U_1 \overline{u}_d$, поэтому вторым интегралом можно пренебречь. Если $\overline{u}_d$ заменить $\overline{U}_d \overline{u}_d / \overline{U}_d$ ($\overline{U}_d$ — максимальное значение $\overline{u}_d$) и ввести безразмерную переменную r/b, равенство превращается в следующее:

$$-\frac{1}{4} C_D a^2 U_1^2 = U_1 \overline{U}_d b^2 \int_0^\infty \frac{\overline{u}_d r}{\overline{U}_d b} d\left(\frac{r}{b}\right). \qquad (277)$$

Левая часть уравнения постоянна для данного тела и скорости, интеграл в правой части тоже постоянен. Зависимость между $\overline{U}_d$ и b — характеристической длиной любого сечения следа выглядит так:

$$\overline{U}_d b^2 = \text{const}.$$

Для определения изменений $\overline{U}_d$ и b от x требуется еще одно равенство. Оно может быть получено из уравнения энергии. Используя некоторые допущения, как в равенстве (276), получим для осесимметричного потока

$$\overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial r} = \frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial (r \overline{\tau})}{\partial r}. \qquad (278)$$

Умножив это выражение на $\overline{u}r$

$$r \overline{u}^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + r \overline{u}\,\overline{v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial r} = \frac{\overline{u}}{\rho} \cdot \frac{\partial (r \overline{\tau})}{\partial r},$$

использовав равенства $\partial(\overline{u}^2 \overline{v} r)/\partial r = 2\overline{u}\overline{v} r \partial \overline{u}/\partial r + \overline{u}^2 \partial(\overline{v} r)/\partial r$; $\partial(\overline{u}\overline{\tau})/\partial r = \overline{u}\partial(r\overline{\tau})/\partial r + r\overline{\tau}\partial \overline{u}/\partial r$ и уравнение неразрывности

$$r \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{v} r)}{\partial r} = 0,$$

получим

$$\frac{3}{2}\overline{u}^2 r\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial(\overline{u}^2\overline{v}r)}{\partial r}=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial(\overline{u}r\overline{\tau})}{\partial r}-\frac{r\overline{\tau}}{\rho}\cdot\frac{\partial\overline{u}}{\partial r}.$$

Интегрирование по r от центральной линии до края зоны диффузии и умножение на $2\pi\rho$ дает

$$\frac{d}{dx}\int_0^b\frac{\rho\overline{u}^3}{2}2\pi r\,dr+\frac{\rho\overline{u}^2}{2}\overline{v}\,2\pi r\Big|_0^b=\overline{u}\,\overline{\tau}\,2\pi r\Big|_0^b-\int_0^b\overline{\tau}\frac{\partial\overline{u}}{\partial r}2\pi r\,dr.$$

Первый член в правой части равен нулю при обоих пределах. На центральной линии второй член левой части также равен нулю, но у края следа, где $\overline{u}=U_1$, произведение $2\pi r\overline{v}$ равно скорости изменения расхода в следе, так что, используя понятие о неразрывности, будем иметь

$$\frac{\rho}{2}\overline{u}^2\overline{v}\,2\pi r\Big|_0^b=-\frac{d}{dx}\int_0^b\frac{\rho U_1^2}{2}\overline{u}\,2\pi r\,dr.$$

Тогда уравнение энергии будет

$$\frac{d}{dx}\int_0^b\frac{\rho\overline{u}^3}{2}2\pi r dr-\frac{d}{dx}\int_0^b\frac{\rho U_1^2}{2}\overline{u}\,2\pi r dr=-\int_0^b\overline{\tau}\frac{\partial\overline{u}}{\partial r}2\pi r\,dr.$$

Члены в левой части уравнения являются продольными градиентами потока энергии соответственно через нормальное и периферийное сечение. Сумма их должна равняться скорости, с которой совершается работа турбулентного сдвига. Если ввести дефицит скорости и увеличить до бесконечности верхний предел, уравнение приобретает вид

$$\frac{d}{dx}\left(2\int_0^\infty U_1^2\overline{u}_d r dr+3\int_0^\infty U_1\overline{u}_d^2 r dr+\int_0^\infty\overline{u}_d^3 r\,dr\right)=-2\int_0^\infty\frac{\overline{\tau}}{\rho}\cdot\frac{\partial\overline{u}_d}{\partial r}r dr.$$

Третьим интегралом в левой части уравнения можно пренебречь для последней части следа, так как $\overline{u}_d^3\ll U_1\overline{u}_d^2$. Соответственная подстановка $\overline{u}_d=\overline{U}_d\overline{u}_d/\overline{U}_d$ и безразмерной переменной r/b приводит к новой форме уравнения:

$$\frac{d}{dx}\left[2U_1^2\overline{U}_d b^2\int_0^\infty\frac{\overline{u}_d}{\overline{U}_d}\cdot\frac{r}{b}d\left(\frac{r}{b}\right)+3U_1\overline{U}_d^2 b^2\int_0^\infty\frac{\overline{u}_d^2}{\overline{U}_d^2}\cdot\frac{r}{b}d\left(\frac{r}{b}\right)\right]=$$

$$=-2\overline{U}_d^3 b\int_0^\infty\frac{\overline{\tau}}{\rho\overline{U}_d^2}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\overline{u}_d}{\overline{U}_d}\right)}{\partial\left(\frac{r}{b}\right)}\cdot\frac{r}{b}d\left(\frac{r}{b}\right).$$

Так как каждый из интегралов является числом постоянным и может быть обозначен соответственно через I_2, I_3 и I_4, а постоянное значение $\overline{U}_d b^2$ известно из уравнения количества движения, то последнее равенство сводится к такой форме:

$$3I_3 \frac{C_D a^2 U_1^2}{4I_2} \cdot \frac{d\overline{U}_d}{dx} = 2I_4 \sqrt{-\frac{C_D a^2 \overline{U}_1}{4I_2}}\, \overline{U}_d^{5/2}$$

Это уравнение после интегрирования по x дает зависимость

$$\overline{U}_d = k_1 x^{-\frac{2}{3}}.$$

Теперь может быть получено изменение распространения зоны диффузии; так как $\overline{U}_d b^2$ есть величина постоянная, то

$$b = k_2 x^{1/3}.$$

Полученные здесь результаты могут быть применены только к участку осесимметричного следа намного ниже тела из-за принятого допущения, что дефицит скорости $\overline{u}_d$ в зоне диффузии намного меньше, чем U_1, сделанного для того, чтобы пренебречь величинами $\overline{u}_d^2$ и $\overline{u}_d^3$ соответственно в уравнениях энергии и количества движения. Следует заметить, что пренебрежение членами, выражающими количество движения через цилиндрическую поверхность области, показанной на рис. 123, изменяет функцию только на числовой множитель. Поэтому иногда для выражения изменения потока количества движения ограничиваются слагаемыми для нормального сечения.

100. Общие характеристики следов. Как было указано при рассмотрении смешения потоков, общие характеристики течения могут быть описаны или только что сформулированными интегральными соотношениями, или анализом Рейхардта. Именно последний будет приведен здесь для случая двухмерного следа. По существу для анализа следов делаются те же допущения, что и в случае смешения потоков, так что снова применяются уравнения (271) и (274). Необходимо, однако, заметить, что анализ ограничивается следом, вне которого скорость окружающей жидкости U_1 есть величина постоянная, внутри которого можно пренебречь градиентом давления и в котором можно ожидать подобия безразмерных эпюр скоростей $\overline{u}_d/\overline{U}_d$ при единственном параметре положения y/b.

В зоне установившегося течения в следе величина U_d не постоянна, поэтому обе части уравнения неразрывности (271) сохраняются, и уравнение (272) принимает вид

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial (y/b)} = \overline{U}_d \frac{db}{dx} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{d\left(\overline{u}_d/\overline{U}_d\right)}{d(y/b)} - b \frac{d\overline{U}_d}{dx} \cdot \frac{\overline{u}_d}{\overline{U}_d}.$$

Интегрирование по y/b и деление на $\overline{U}_d$ приводят к равенству

$$\frac{\overline{v}}{\overline{U}_d} = \frac{db}{dx}\int \frac{y}{b}\cdot\frac{\partial(\overline{u}_d/\overline{U}_d)}{\partial(y/b)}\,d(y/b) - b\,\frac{d(\ln \overline{U}_d)}{dx}\int \frac{\overline{u}_d}{\overline{U}_d}\,d\left(\frac{y}{b}\right) + C_3,$$

где C_3 — постоянная, аналогичная C_1 и C_2 в п. 97.

После интегрирования первого члена по частям получаем

$$\frac{\overline{v}}{\overline{U}_d} = \frac{y}{b}\cdot\frac{\overline{u}_d}{\overline{U}_d}\cdot\frac{db}{dx} - b\,\frac{d(\ln \overline{U}_d)}{dx}\int \frac{\overline{u}_d}{\overline{U}_d}\,d\left(\frac{y}{b}\right) + C_4. \qquad (279)$$

Это равенство для зоны установившегося течения в следе можно сравнить с уравнением (273) для зоны диффузии при смешении потоков. Оно позволяет установить поперечный компонент осредненной скорости, если известно распределение продольных скоростей.

Уравнение (274) может теперь быть проинтегрировано аналогично уравнениям (271) и (279)

$$\frac{\overline{uv}}{\overline{U}_*^2} = \frac{y}{b}\cdot\frac{\overline{u}_*^2}{\overline{U}_*^2}\cdot\frac{db}{dx} - b\,\frac{d(\ln \overline{U}_*^2)}{dx}\int \frac{\overline{u}_*^2}{\overline{U}_*^2}\,d\left(\frac{y}{b}\right) + C_5.$$

В условиях зоны установившегося течения в следе это уравнение дает однозначную связь между произведением $\rho\overline{uv}$ и продольной скоростью.

Дальнейшее рассмотрение членов полученного равенства позволяет установить изменения b и $\overline{U}_d$ от x. Ниже по течению от тела продольная скорость изменения потока количества движения может быть принята равной нулю в соответствии с допущением о постоянстве давления в следе. Это дает выражение (относительно малое воздействие турбулентных пульсаций в потоке количества движения не учитывается):

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} \rho\,\overline{u}^2\,dy = 0,$$

из которого после введения y/b и квадрата дефицита скорости $\overline{u}_*^2 = \overline{U}_*^2\overline{u}_*^2/\overline{U}_*^2$ интегрированием может быть получено равенство $b\overline{U}_*^2 = \text{const}$.

Таким образом, второй член в правой части уравнения для осредненного произведения равняется нулю, и так как $\overline{uv} = 0$ при $y/b = 0$, то постоянная C_5 также равна нулю. Следовательно, остается

$$\frac{\overline{uv}}{\overline{U}_*^2} = \frac{y}{b}\cdot\frac{\overline{u}_*^2}{\overline{U}_*^2}\cdot\frac{db}{dx}.$$

Так как критерием подобия для осредненного произведения принято выражение $\overline{uv}/\overline{U}_d^2 = f(y/b)$, то левая часть последнего равенства функция не только y/b. Однако в области следа на значительном расстоянии от тела дефицит скорости так мал, что $\overline{u}_d \ll 2U_1$ и $\overline{u_*^2} \approx 2\overline{u}_d U_1$; это является прямым результатом связи между $\overline{u}_d/\overline{U}_d$ и $\overline{u_*^2}/\overline{U_*^2}$. Уравнение для этой области может быть выражено после умножения последнего равенства на $\overline{U_*^2}/\overline{U}_d^2$:

$$\frac{\overline{uv}}{\overline{U}_d^2} = \frac{y}{b} \cdot \frac{\overline{u}_d}{\overline{U}_d} \cdot \frac{2U_1}{\overline{U}_d} \cdot \frac{db}{dx}.$$

Поскольку все остальные множители в этом уравнении являются функциями только y/b, произведение db/dx и $2U_1/\overline{U}_d$ должно быть величиной постоянной:

$$\frac{db}{dx} \cdot \frac{2U_1}{\overline{U}_d} = \beta.$$

Для этой же области в двухмерном потоке может быть выведено уравнение количества движения, подобное равенству (277):

$$C_D b_0 \frac{U_1^2}{2} = b\overline{U}_d U_1 \int \left(-\frac{\overline{u}_d}{\overline{U}_d}\right) d\left(\frac{y}{b}\right) = b\overline{U}_d U_1 \gamma,$$

где b_0 — ширина тела, а

$$\gamma = \int -\left(\frac{\overline{u}_d}{\overline{U}_d}\right) d\left(\frac{y}{b}\right).$$

Подставляя в предыдущее уравнение для db/dx выражение для $2U_1/\overline{U}_d$ из уравнения количества движения и интегрируя результат подстановки, получаем равенство

$$b^2 = \frac{C_D}{2} \cdot \frac{\beta}{\gamma} b_0 x,$$

в котором начало координат выбрано так, что $x=0$ при $b=0$. Из этого соотношения очевидно, что ширина зоны диффузии b увеличивается пропорционально корню квадратному из продольного расстояния x. Подстановка полученного выражения для b в уравнение количества движения дает равенство

$$\frac{\overline{U}_d}{U_1} = \sqrt{\frac{C_D b_0}{2\beta\gamma} \cdot \frac{1}{x}},$$

которое показывает, что в двухмерном следе максимум дефицита скорости $\overline{U}_d$ изменяется обратно пропорционально корню квадратному из x.

101. Распределение скорости в следах. Для анализа распределения скорости в зоне установившегося течения в следе может быть снова использовано прандтлевское представление о длине пути перемешивания, выражающее распределение турбулентного сдвига. Ход исследования в основном тот же, что и для смешивающихся потоков, но с некоторыми изменениями. Например, допущение о подобии эпюр скоростей [уравнение (270)] переписывается на основе установленной зависимости b и $\overline{U}_d$ от x. Следуя указаниям Шлихтинга, для упрощения дальнейшего анализа вместо x и y используются безразмерные координаты $x'=x/(C_D b_0)$ и $y'=y/(C_D b_0)$ Критерий подобия записывается тогда так:

$$\frac{\overline{u}_d}{U_1} = (x')^{-\frac{1}{2}} f\left(\frac{y'}{\sqrt{x'}}\right) = (x')^{-\frac{1}{2}} f(\eta), \qquad (280)$$

где $\eta=y'/\sqrt{x'}$. Точно так же длина пути перемешивания снова считается постоянной в поперечном сечении и пропорциональной ширине сечения, так что длина пути перемешивания в функции от x получает выражение

$$l = c_2 C_D b_0 (x')^{1/2}.$$

Введение дефицита скорости $\overline{u}_d=\overline{u}-U_1$ и прандтлевского выражения для турбулентного сдвига в равенство (276) дает уравнение движения

$$U_1 \frac{\partial \overline{u}_d}{\partial x} + \overline{u}_d \frac{\partial \overline{u}_d}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{u}_d}{\partial y} = 2l^2 \frac{\partial \overline{u}_d}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \overline{u}_d}{\partial y^2}.$$

Как было указано, для зоны установившегося течения $\overline{u}_d \ll U_1$, поэтому можно отбросить второй член в левой части уравнения, пренебрежимо малый по сравнению с первым. Подобным же образом величина $\overline{v}$ мала по сравнению с $\overline{u}_d$, и третьим членом ее также можно пренебречь. Упрощенное уравнение

$$\overline{U}_1 \frac{\partial \overline{u}_d}{\partial x} = 2l^2 \frac{\partial \overline{u}_d}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \overline{u}_d}{\partial y^2}$$

и будет использоваться для анализа.

Функция тока в системе координат $x'y'$ имеет вид

$$\frac{\psi}{C_D b_0} = \int \overline{u}\, dy' = U_1 (y' + F),$$

где $F = \int f(\eta)\, d\eta$.

Подстановка выражения для l в упрощенное уравнение движения и использование производных от функции тока приводит к дифференциальному уравнению

$$-\frac{1}{2}(F' + \eta F'') = 2c_2^2 F'' F'''.$$

Штрихи над F и соответственно над f обозначают дифференцирование по η. Первый интеграл уравнения составляет

$$-\eta F' = 2c_2^2 F''^2 + \text{const},$$

где постоянная интегрирования равна нулю, потому что $\eta=0$ и $F''=0$ (т. е. $y=0$ и $\partial\bar{u}/\partial y=0$) на центральной линии. Поскольку $F'=f$, то интеграл может быть записан как

$$-\eta f = 2c_2^2 f'^2.$$

Введение новой переменной

$$\eta_1 = \eta\,(2c_2^2)^{-\frac{1}{3}}$$

дает результирующее выражение

$$-\eta_1 f = \left(\frac{\partial f}{\partial \eta_1}\right)^2.$$

После разделения переменных получается дифференциальное уравнение первого порядка, решением которого служит

$$f = -\left(\frac{1}{3}\eta_1^{3/2} - A\right)^2. \tag{281}$$

Для оценки этого выражения используются три граничных условия. На центральной линии следа $\eta=\eta_1=0$, так что $f(\eta_1)=-A^2$. Это дает зависимость изменения скорости на центральной линии от расстояния вдоль следа

$$\frac{\bar{U}_d}{U_1} = -A^2 (x')^{-\frac{1}{2}},$$

где A — еще не определенная постоянная. На границе следа $\bar{u}_d=0$ и поэтому $f(\eta_1)=0$, что приводит к выражению

$$(\eta_1)_{\text{макс}} = 2{,}08\,A^{2/3}.$$

Третье граничное условие относится к равновесию количества движения: полное лобовое сопротивление тела должно быть равно изменению потока количества движения от верхнего до нижнего сечений. Подобно уравнению для осесимметричного потока можно написать уравнение, которое в размерной форме соответствует равенству (277):

$$-\frac{1}{4} C_D b_0 U_1 = \int_0^b \bar{u}_d\, dy.$$

Прежде чем определить величину A, следует установить связь между переменными y', η и η_1. На границе следа

$$y' = \frac{b}{C_D b_0} = (2c_2^2)^{1/3} \cdot 2{,}08\, A^{2/3} (x')^{1/3}.$$

Если ввести теперь новую переменную $\eta_2 = \eta_1/(3A)^{2/3}$, то интеграл может быть получен из равенства

$$\frac{1}{4} = (2c_2^2)^{1/3}(3A)^{2/3}A^2\int_0^1(\eta_2^{3/2}-1)^2\,d\eta_2,$$

которое вытекает из замены переменных и введения равенств (280) и (281) в уравнение количества движения.

Величина A таким образом определяется

$$A = \frac{0{,}559}{c^{1/4}}.$$

Использование этого результата вместе с ранее установленными соотношениями дает:

$$-\frac{\bar{u}_d}{U_1} = 0{,}313\,c_2^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{C_D b_0}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{y}{b}\right)^{3/2}-1\right]^2; \qquad (282)$$

$$-\frac{\bar{U}_d}{U_1} = 0{,}313\,c_2^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{C_D b_0}\right)^{-\frac{1}{2}}; \qquad (283)$$

$$\frac{b}{C_D b_0} = 1{,}781\,c_2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{C_D b_0}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (284)$$

Постоянные c_2 и C_D в приведенных уравнениях должны быть определены экспериментальными измерениями. Кроме того, начало отсчета для x не является определенной точкой тела, а также должно быть найдено экспериментально.

Пример 31. Допустив применимость гипотезы о длине пути перемешивания, получить выражение изменения касательного напряжения в двухмерном следе.

По гипотезе о длине пути перемешивания касательное напряжение

$$\bar{\tau}_{xy} = \rho l^2\,\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\left|\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right|.$$

При анализе двухмерного следа можно принять, что

$$l = c_2\sqrt{xC_D b_0},$$

а эпюра скорости по этому анализу описывается выражением

$$\frac{\bar{u}}{U_1} = 1 - 0{,}313\sqrt{\frac{C_D b_0}{c_2 x}}\left|\left(\frac{y}{b}\right)^{3/2}-1\right|^2.$$

Отсюда

$$\frac{1}{U_1}\cdot\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = 0{,}94\sqrt{\frac{C_D b_0 y}{c_2 x}}\left[1-\left(\frac{y}{b}\right)^{3/2}\right]\frac{1}{b^{3/2}}.$$

Подставляя b из уравнения (284) и используя выражение касательного напряжения, получим

$$\bar{\tau}_{xy} = 0{,}156\rho U_1^2\sqrt{\frac{C_D b_0}{c_2 x}}\cdot\frac{y}{x}\left[\frac{y^{3/2}}{2{,}38\,(c_2 C_D b_0 x)^{3/4}}-1\right]^2.$$

Г. Диффузия струй

102. Интегральные соотношения для струй. Когда жидкость вытекает из отверстия в твердой стенке (рис. 124), погруженного в эту же жидкую среду, то в непосредственной близости от отверстия поток обладает многими свойствами, характерными для смешения струй. Действительно, если отверстие двухмерное, то аналитическое рассмотрение смешивающихся струй может быть применено почти до той точки на плоскости симметрии, где смыкаются зоны диффузии, распространяющиеся от противоположных краев отверстия. Однако если отверстие

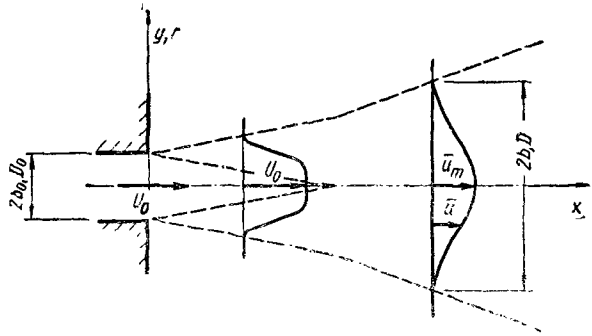


Рис. 124. Пояснительная схема диффузии струй

круглое, то получающаяся кольцевая зона диффузии не имеет такого простого критерия подобия, и соотношения для двухмерной диффузии могут быть применены с достаточной точностью только к потоку около отверстия. Та часть вытекающей жидкости, которая еще не сделалась частью все увеличивающейся зоны диффузии, называется безвихревым ядром. Это ядро кончается там, где зона диффузии достигает оси струи. Вниз по течению от этого сечения максимальная скорость струи должна уменьшаться, так как зона диффузии продолжает расширяться. Процесс диффузии продолжается, по крайней мере теоретически, до бесконечности, пока струя не станет бесконечно широкой при нулевой скорости.

Методы анализа, приведенные в пп. 97, 99 и 100, могут быть использованы для доказательства того, что скорость распространения зоны установившегося течения как двухмерной, так и осесимметричной струи должна быть линейной, если допущение о подобии эпюр скоростей $\bar{u}_d/\bar{U}_d = f(y/b)$ правильно. Следовательно, критерий подобия для осесимметричной струи может быть записан так:

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_m} = f\left(\frac{r}{x}\right) = f(\eta),$$

где $\eta = r/x$, а r измеряется в направлении, перпендикулярном оси x в цилиндрической системе координат. Величины $\bar{u}$ и $\bar{u}_m$ могут здесь применяться соответственно вместо $\bar{u}_d$ и $\bar{U}_d$, так как $U_1 = 0$.

Постоянство потока количества движения в любом поперечном сечении струи, основанное на пренебрежении разницей величин давлений в зоне установившегося течения, может быть выражено так:

$$\frac{M}{M_0} = 1 = \frac{\int_0^\infty \bar{u}_m^2 f^2(\eta)\, 2\pi r dr}{(\pi/4) D_0^2 U_0^2} = \left(\frac{\bar{u}_m}{U_0}\right)^2 \frac{8}{D_0^2} \int_0^\infty x^2 f^2(\eta)\, \eta d\eta. \qquad (285)$$

Из этого уравнения получим выражение для осевой скорости в осесимметричной струе

$$\frac{\bar{u}_m}{U_0} = \frac{D_0}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{I_M}} \cdot \frac{1}{x}, \qquad (286)$$

где

$$I_M = \int_0^\infty f^2(\eta)\, \eta d\eta.$$

Следовательно, максимальная скорость в зоне установившегося течения изменяется обратно пропорционально расстоянию от отверстия.

Подобно отношению потоков количества движения [уравнение (285)] отношение объемных расходов в последовательных сечениях таково:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{2\sqrt{2}}{D_0} \sqrt{\frac{I_Q^2}{I_M}}\, x, \qquad (287)$$

где

$$I_Q = \int_0^\infty f(\eta)\, \eta d\eta.$$

Равенство (287) показывает, что объемный расход с увеличением расстояния от отверстия растет линейно.

Наконец (полагая, что радиальные компоненты пренебрежимо малы) получим отношение потоков энергии:

$$\frac{E}{E_0} = \frac{D_0}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{I_E^2}{I_M^3} \cdot \frac{1}{x}}, \qquad (288)$$

где

$$I_E = \int_0^\infty f^3(\eta)\, \eta d\eta.$$

Полный поток кинетической энергии изменяется обратно пропорционально расстоянию от отверстия.

До сих пор основным допущением в аналитическом рассмотрении была предпосылка о подобии распределения скоростей [уравнение (270) или более специфическое соотношение для струи, полученное оттуда]. Для дальнейшего анализа, однако, необходимо что-то знать или допустить о форме кривой распределения скорости $f(\eta)$. По экспериментальным замерам скоростей в зоне диффузии можно построить зависимость $f(\eta)$ от η. Для получения величин трех интегралов I_Q, I_M и I_E можно применить графическое интегрирование или же по желанию можно подобрать алгебраическое выражение для экспериментальной кривой и интегрирование выполнить аналитически. Например, для изображения распределения скорости может быть выбрана гауссовская нормальная функция вероятности, тогда

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_m} = e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}},$$

где σ — стандартное (среднеквадратичное) отклонение распределения и линейного расширения струи, равное:

$$\sigma = Cx.$$

Интегрирование можно выполнить без определения постоянной C. Уравнения (286)—(288) преобразуются так:

$$\frac{\bar{u}_m}{U_0} = \frac{D_0}{2C} \cdot \frac{1}{x}; \quad \frac{Q}{Q_0} = \frac{4C}{D_0} x; \quad \frac{E}{E_0} = \frac{D_0}{3C} \cdot \frac{1}{x}.$$

Эти уравнения, конечно, применимы лишь к зоне установившегося течения. Тем не менее первое из них позволяет определить длину x_0 безвихревого ядра. В начале зоны установившегося течения $\bar{u}_m = U_0$, так что $x_0/D_0 = 1/(2C)$.

103. Распределение скорости в струе. Если турбулентный сдвиг выразить в терминах гипотезы длины пути перемешивания, то произвольный выбор распределения скорости (как алгебраической функции, так и экспериментальной кривой) приведет к однозначному распределению длины пути перемешивания l в сечении. И обратно, если задаться распределением длины пути перемешивания в сечении и допустить, что $l = c_3 x f(r/b)$, то это приведет к однозначной форме распределения скорости. Подстановка в уравнение (278) обычного допущения о постоянстве l в поперечном сечении, как и в двух предыдущих случаях для зоны установившегося течения, дает дифференциальное уравнение

$$FF' = c_3^2 \left(F'' - \frac{F'}{\eta} \right)^2,$$

где

$$F = \int f(\eta)\,\eta d\eta;\quad \bar{u} = \frac{1}{x} f(\eta) = \frac{F'}{x\eta};\quad \eta = \frac{r}{x}.$$

Это уравнение может быть проинтегрировано непосредственным суммированием, как графически изображено на рис. 125.

Внешняя граница струи описывается так:

$$r_b = 3{,}4 \sqrt[3]{c_3^2 x},$$

а осевая скорость — так:

$$\frac{\bar{u}_m}{U_0} = \frac{x_0}{x}.$$

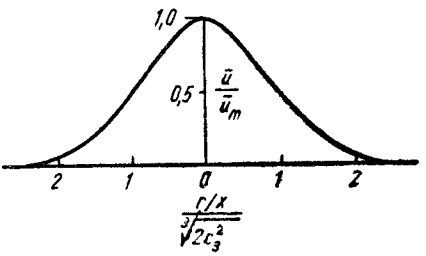


Рис. 125. Распределение скоростей в струе по гипотезе о длине пути турбулентного перемешивания

Чтобы ошибочно не показалось, что прандтлевское выражение для турбулентного сдвига является единственно возможным допущением в анализе свободного турбулентного потока с поперечным сдвигом, приведем два других допущения для рассматриваемого случая. Тэйлоровская модификация теории переноса завихренности может быть упрощена допущениями, что турбулентность изотропна, что производные радиальной скорости по любому направлению малы и что производная $\bar{u}$ по продольному направлению мала по сравнению с производной $\bar{u}$ по радиальному направлению. Тогда член уравнения движения (278), содержащий в себе турбулентный сдвиг, выражается так:

$$\frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial (r\bar{\tau})}{\partial r} = -l^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right| \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right).$$

Вновь принимаются те же основные допущения, что и при использовании прандтлевской гипотезы о длине пути перемешивания:

$$\bar{u} = \frac{1}{x} f(\eta);\quad \eta = \frac{r}{x};\quad l = c_4 x.$$

Функция тока тогда составит

$$\psi = xF;\quad F(\eta) = \int_0^{\eta} f(\eta)\,\eta d\eta,$$

так что

$$\bar{u} = \frac{F'}{\eta x}.$$

Подстановка полученных равенств в уравнение (278) дает дифференциальное уравнение

$$\frac{FF''+F'^2}{\eta^2}-\frac{FF'}{\eta^3}=c_4^2\left(\frac{F'''}{\eta}-\frac{F''}{\eta^2}+\frac{F'}{\eta^3}\right)\left(\frac{F''}{\eta}-\frac{F'}{\eta^2}\right).$$

На оси должны быть удовлетворены следующие граничные условия: $r=0$; $\bar{v}=\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}=0$, тогда

$$\eta=0;\ F'=\frac{F}{\eta}\ \text{и}\ \frac{F''}{\eta}=\frac{F'}{\eta^2}.$$

При $r>0$ частная производная $\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}<0$, так что

$$\eta>0\ \text{и}\ \frac{F''}{\eta}<\frac{F'}{\eta^2}.$$

Окончательно

$$2\pi\int_0^\infty\bar{u}^2\,r\,dr=\frac{1}{4}\pi D_0^2U_0^2.$$

Решение дифференциального уравнения может быть записано в виде ряда:

$$F=a_0\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{\sqrt[3]{c_4^2}}\right)^2-\frac{4\sqrt{6}}{63}\left(\frac{\eta}{\sqrt[3]{c_4^2}}\right)^{7/2}+\frac{11}{405}\left(\frac{\eta}{\sqrt[3]{c_4^2}}\right)^5-\cdots\right],$$

где

$$a_0=\sqrt[3]{c_4^4}\,\bar{u}_m x,$$

или

$$\frac{\bar{u}_m}{U_0}=\frac{x_0}{x}.$$

Это решение изображено графически на рис. 126. Следует отметить, что при увеличении η, т. е. r, скорость не стремится к нулю.

По предложению Прандтля, для диффузии при свободной турбулентности коэффициент перемешивания ε, установленный Буссинеском как

$$\bar{\tau}=\rho\varepsilon\frac{\partial\bar{u}}{\partial r},$$

принимается постоянным в любом поперечном сечении потока и пропорциональным произведению максимальной разности скоростей и ширины сечения. Для осесимметричной струи коэффициент перемешивания, или виртуальная вязкость, может быть охарактеризован так:

$$\varepsilon = A\bar{u}_m b,$$

где A — неопределенная постоянная пропорциональности. Как уже отмечалось, скорость вдоль оси меняется обратно пропорционально x, а ширина — прямо пропорционально x, поэтому коэффициент перемешивания ε постоянен в зоне диффузии осесимметричной струи. Уравнение движения

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = \frac{\varepsilon}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right)$$

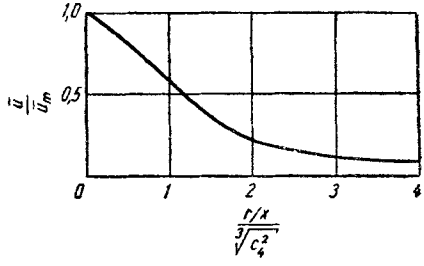


Рис. 126. Распределение скорости по гипотезе о переносе завихренности

теперь совершенно аналогично уравнению движения для круглой ламинарной струи, приведенному в главе V (ε занимает место кинематического коэффициента вязкости ν). Решение поэтому будет таким же

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_m} = \frac{1}{[1+(r/x)^2]^2}.$$

Пример 32. Двухмерная струя начальной шириной $B_0 = 1''$ обладает скоростью истечения $U_0 = 100$ футов в 1 *сек* и длиной безвихревого ядра $x_0 = 5{,}2''$. Определить максимальную скорость и внешнее смещение δ поверхности тока на расстоянии $x = 5$ футам от отверстия.

Уравнение неразрывности может быть записано так:

$$U_0 B_0 = \int_{-b}^{b} \bar{u}\,dy,$$

где $b = B_0/2 + \delta$.

Если принять распределение скорости по Гауссу

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_m} = e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}},$$

где $\sigma = Cx$, то отношение максимальной скорости и скорости истечения составит

$$\frac{\bar{u}_m}{U_0} = \sqrt{\frac{B_0}{\pi^{1/2}\sigma}} = \sqrt{\frac{x_0}{x}},$$

Тогда

$$\frac{B}{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{x}}} = \int_{-b}^{b} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = 2\sqrt{2}\sigma \int_{0}^{\frac{b}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{y}{\sqrt{2}\sigma}\right),$$

это последнее равенство вытекает из обычной формы интеграла вероятности. Введение $z = y/\sqrt{2}\sigma$ дает

$$\frac{B_0}{\sqrt{x_0/x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}\sigma} = \int_0^z e^{-z^2} dz.$$

Здесь интеграл приведен в такой форме, для которой имеются таблицы. Левая сторона равенства может быть определена по известным уравнениям и количествам:

$$\sigma = \frac{B_0 x}{\sqrt{\pi x_0}} = \frac{1 \cdot 60}{\sqrt{\pi}\, 5{,}2} = 6{,}5; \qquad \frac{B_0}{\sqrt{x_0/x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2\sigma}} = 0{,}184.$$

Так как таблицы интеграла вероятности даны для $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz$, необходимо 0,184 умножить на $2/\sqrt{\pi}$. В результате получим 0,2078, которому соответствует $z = 0{,}186$. Отсюда

$$b = z_0 \sqrt{2}\sigma = 0{,}186 \sqrt{2} \cdot 6{,}5 = 1{,}71''$$

или

$$\delta = 1{,}21''.$$

Максимальная скорость в этом сечении равна

$$_m = U_0 \sqrt{\frac{x_0}{x}} = 100 \sqrt{\frac{5{,}2}{60}} = 29{,}4 \text{ футов в } 1 \text{ сек}.$$

Д. Сравнение теории и наблюдения

104. Совершенство анализа. Из-за чрезмерной сложности действительного движения свободного турбулентного потока со сдвигом предыдущий анализ был приближенным. Действительно все анализы намеренно проводились с осредненными во времени величинами, включая сдвиг, и обходили, где только возможно, детали механизма турбулентности. Это положение, очевидно, справедливо для тех случаев, при которых допустимо подобие их распределений скоростей, а также тех, при которых допустимо существование определенной формы кривой распределения осредненной скорости. Справедливость этого положения несна для случаев, в которых вводится специальное соотношение для турбулентного сдвига. Нужно не забывать, что

как прандтлевская, так и тэйлоровская гипотезы предназначались для описания не деталей турбулентности, а лишь некоторых результатов ее воздействия. Тэйлор, говоря о своем допущении переноса турбулентностью неизменяющейся завихренности, отметил: «...Ясно, что это очень грубое допущение, так как оно неверно в деталях, хотя в отношении влияния на осредненное движение оно справедливо».

Так как все турбулентные характеристики, за исключением сдвига, могут быть определены только с помощью компонентов

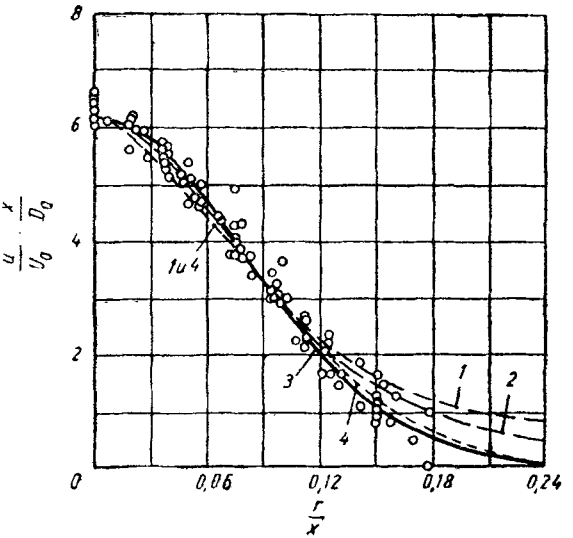


Рис. 127. Сравнение результатов вычислений и измерений для продольной скорости в струе

1 — перенос завихренности; *2* — коэффициент перемешивания; *3* — нормальный закон теории вероятности; *4* — перенос количества движения

прандтлевского или тэйлоровского построения, а также потому, что, как будет показано далее, осредненный поток относительно мало чувствителен к характеру турбулентности, анализы не могут удовлетворительно описывать характеристики самой турбулентности. Но, с другой стороны, они вполне удовлетворительно описывают характеристики осредненных скоростей. Из аналитических выражений могут быть получены характер линий тока, а также потери энергии и присоединенные расходы жидкости в последовательных сечениях.

Дальнейшее обсуждение применимости анализа в первую очередь будет относиться к диффузии струй, что объясняется обширностью экспериментальных данных, имеющихся для этого случая. Однако благодаря большому сходству во всех явлениях

свободного турбулентного сдвига общие заключения могут быть применены и к другим случаям диффузии.

105. Осредненные характеристики струй и следов. На рис. 127 изображены все приведенные выше для струй теоретические кривые распределения скоростей, а также результаты измерений, проведенных рядом исследователей. В точке, где $\bar{u}/\bar{u}_m = 0{,}5$, все кривые совпадают с результатами измерений. Две

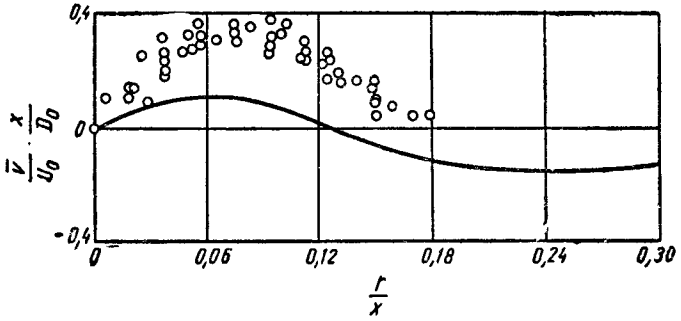


Рис. 128. Сравнение результатов вычислений и измерений для радиальной скорости

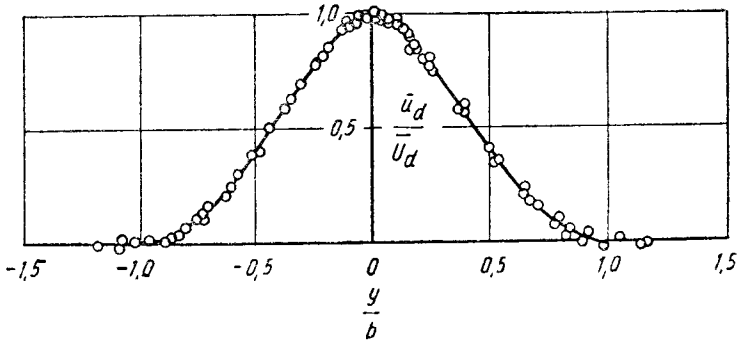


Рис. 129. Профиль продольной скорости в следе

теоретические кривые — распределение по Гауссу и кривая, полученная в предположении постоянства коэффициента перемешивания, — очень хорошо совпадают с главной частью экспериментального распределения осредненной скорости. Кривые распределения, полученные из гипотез о количестве движения и переносе завихренности, лежат выше экспериментальных точек в центральной части потока. Три теоретические кривые асимптотически приближаются к нулевой скорости и лежат выше измерений у края струи. Только теория длины пути перемешивания дает конечное значение скорости в пределах струи, но обычное опреде-

ление неизвестной постоянной приводит к нулевой теоретической скорости там, где еще существует скорость измеренная. У края струи, однако, отброшенные слагаемые вязкости могут не быть бесконечно малыми по сравнению с касательным напряжением, как это принято во всех теориях. Из уравнения неразрывности и

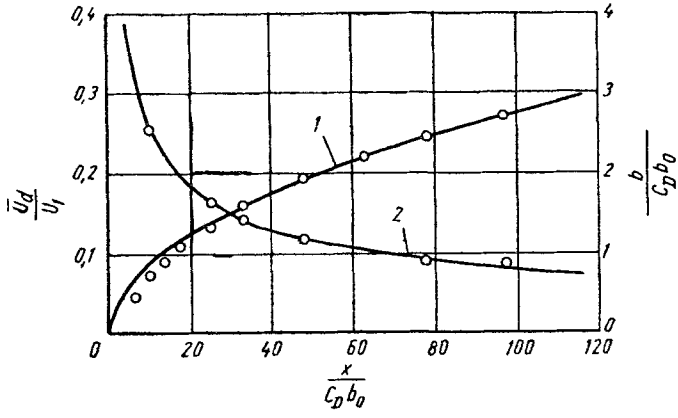


Рис. 130. Изменение максимума дефицита скорости и ширины двухмерного следа

1 — уравнение (284); *2* — уравнение (283)

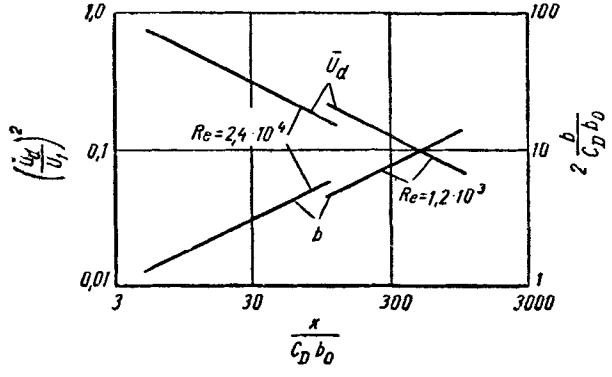


Рис. 131. Влияние вязкости на течение в следе

уравнения распределения продольной скорости можно получить выражение для поперечных скоростей. Кривая для поперечной скорости, соответствующая гауссовскому распределению продольной скорости, показана на рис. 128 вместе с экспериментальными значениями. Поскольку сомнений в правильности уравнения неразрывности не существует, то расхождение между

экспериментальными и теоретическими значениями должно быть отнесено или за счет второго использованного теоретического выражения, или за счет несовершенства экспериментальной техники. Экспериментальные величины поперечных скоростей были получены из замеров направления течения и величин продольной скорости. Хотя измерения в следах не так обширны и многочисленны, как измерения в струях, можно ожидать подобных же расхождений между теорией и наблюдением и в следах. Например, измерения, осуществленные Шлихтингом в следе позади стержня диаметром 1 *см*, воспроизведены на рис. 129 и 130. Значения c_2 и C_D, определенные экспериментально на расстоянии 3,93 *см* вверх по течнию от центра стержня, составляют: $c_2 = 0{,}366^2$ и $C_D = 1{,}32$. Приведенные иллюстрации показывают, что распределение скорости в следе на большом расстоянии от тела очень хорошо аппроксимируется уравнением (282). Однако, как видно из рис. 131, эксперименты указывают также на действие вязкости, подобное найденному в струе, так что экспериментально определенная величина c_2 в уравнении (283) не является постоянной. Согласованность равенств (283) и (284) с экспериментальными данными (см. рис. 130), определенными для области, непосредственно граничащей с телом, где $\overline{u}_d$ еще не является ничтожно малым по сравнению с $2U_1$, может быть более удивительна, чем любое упомянутое до сих пор расхождение. Единственно возможное объяснение заключается в том, что в той области, где не должно быть согласованности, расхождение между теорией и наблюдениями самонейтрализуется в окончательном аналитическом выражении.

Изменения ширины и максимума дефицита скорости трехмерного следа, замеренные Купером и Лютским, также соответствуют теоретическим распределениям (рис. 132) в точках, расположенных вблизи тела, более, чем следовало бы ожидать. Подобие эпюр дефицита скорости и турбулентной скорости в следе за квадратной пластиной осуществляется относительно близко позади тела (рис. 133). Однако следует заметить, что допущение возможности пренебрежения величиной $\overline{u'^2}$ неверно, так как радикал $\sqrt{\overline{u'^2}}$ мал только по сравнению с $\overline{u}$ и имеет тот же порядок, что и $\overline{u}_d$.

106. Турбулентные характеристики струй. Вероятно, наиболее важной турбулентной характеристикой является турбулентный сдвиг $\rho\overline{u'v'}$, ибо этот фактор обычно считается действующей силой механизма переноса турбулентности. На рис. 134 сравнивается измеренный и вычисленный по эпюре осредненной скорости сдвиг в струе. Заметное на графике расхождение может быть отнесено за счет ошибок в измерениях. Нельзя, однако, исключить и возможность, что отброшенные в выражении τ через $\rho\overline{u'v'}$ члены не столь уж малы. Эта последняя возможность

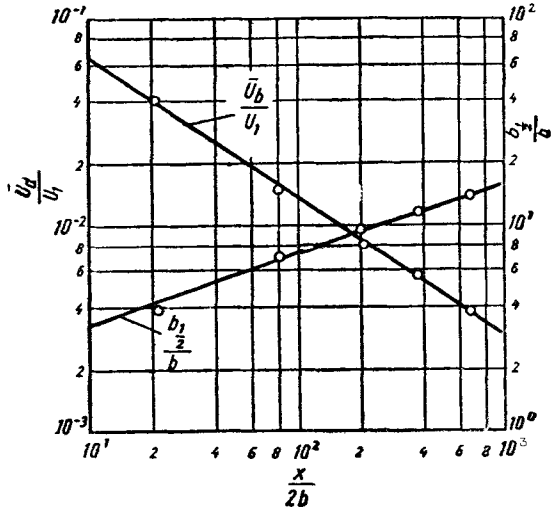


Рис. 132. Изменение максимума дефицита скорости и ширины трехмерного следа

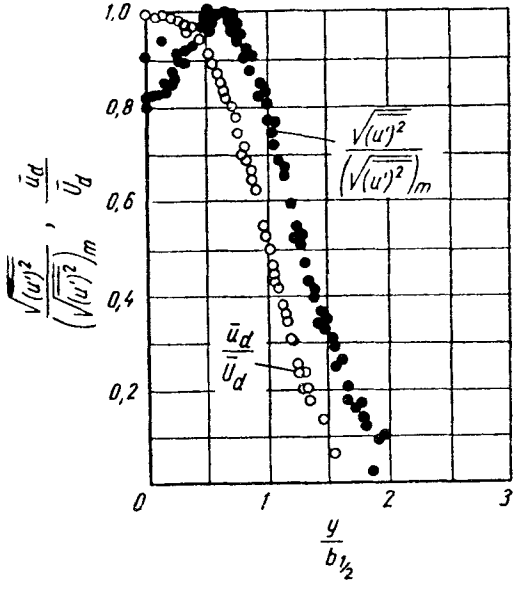


Рис. 133. Распределение осредненной и пульсационной скоростей в трехмерном следе

особенно важна в случае, когда распределение турбулентного сдвига задано.

Изменение $\sqrt{\overline{u'^2}}$ вдоль оси струи, измеренное как Корзином, так и Бейнсом, показано на рис. 135. Из этого графика видно, что турбулентность, образующаяся в зоне диффузии, проникает в безвихревое ядро на небольшом расстоянии от отверстия, а так-

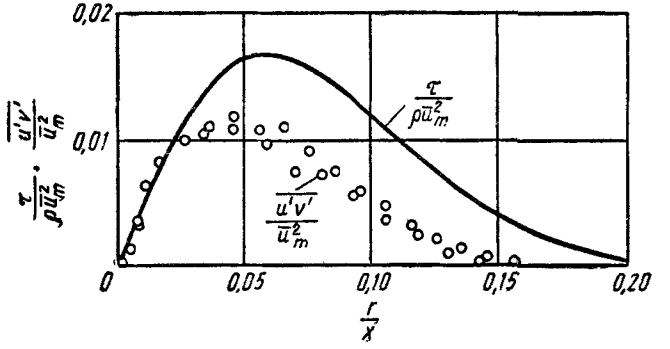


Рис. 134. Сравнение результатов вычисления и измерения турбулентного сдвига в струе

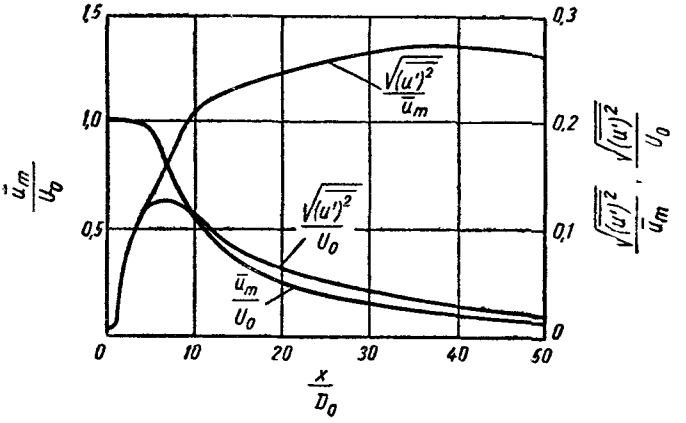


Рис. 135. Изменение осредненных и пульсационных скоростей вдоль оси струи

же, что подобие турбулентной скорости, которое следует из постоянства отношения $\sqrt{\overline{u'^2}}/\overline{u}_m$, отсутствует до конца безвихревого ядра. Хотя это несколько уменьшает применимость допущения о полном подобии, но не оказывает значительного влияния на эпюру осредненной скорости, полученную при этом предположении. Исследования Бейнса также подтверждают влияние

сил вязкости на длину безвихревого ядра и, в меньшей степени, на распределение осредненных скоростей. Длина безвихревого ядра x_0 меняется от $5D_0$ при $\mathrm{Re}=10^4$ до $6{,}5\,D_0$ при $\mathrm{Re}=10^5$.

На рис. 136 показаны изменения $\sqrt{\overline{u'^2}}$ и $\sqrt{\overline{v'^2}}$ по радиусу сечения, в области которого существует приблизительное подобие. Отношение турбулентных скоростей к местной осредненной скорости достигает максимума ближе к краю струи, а отношение их к осевой скорости максимально в центре струи.

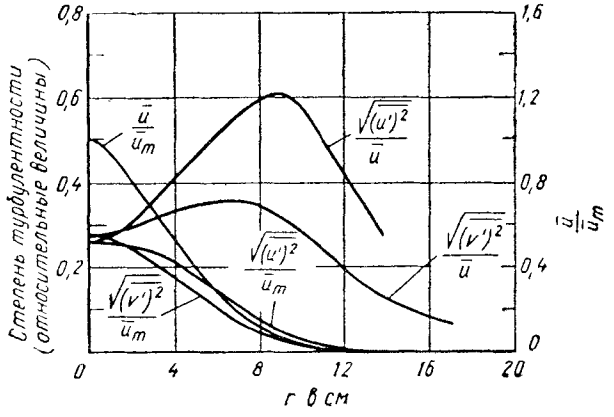


Рис. 136. Изменение осредненной и пульсационной скоростей вдоль радиуса струи ($D_0=1$ дюйму, $x=20$ дюймам)

Перемежаемость турбулентности, впервые замеченная у края турбулентного пограничного слоя, наблюдалась Корзином в кольцевой области у зоны диффузии. Эта перемежаемость начинается приблизительно на таком расстоянии от оси, где $\bar{u}=0{,}5\bar{u}_m$, и распространяется наружу почти на удвоенное это расстояние. На рис. 137 приведены осциллограммы, иллюстрирующие это явление.

Как уже отмечалось, характер осредненного движения свободного турбулентного потока со сдвигом не очень чувствителен к деталям турбулентности. Это иллюстрируется рассмотрением длины пути перемешивания и виртуальной вязкости, которые подсчитываются по функции нормальных погрешностей, лучше других соответствующей экспериментальным точкам. Как показано на рис. 138, ни l/x, ни $\varepsilon/(x\bar{u}_m)$ не постоянны в поперечном сечении потока. И все-таки распределение осредненной скорости, выведенное в предположении постоянства любой из этих величин, почти так же хорошо соответствует экспериментальным измерениям, как и кривая погрешностей (см. рис. 127).

На предыдущих страницах рассматривалось только изменение скорости диффузии струи. Если жидкость, вытекающая из отверстия, не идентична окружающей среде, то характерные свойства ее (температура, проводимость, концентрация взвешенных частиц и т. д.) также будут диффундировать. В дальнейшем изложении будет рассмотрен только случай диффузии тепла.

Для удобства сравнения с аналогичным уравнением переноса тепла здесь повторяются использованные ранее частные формы уравнений движения:

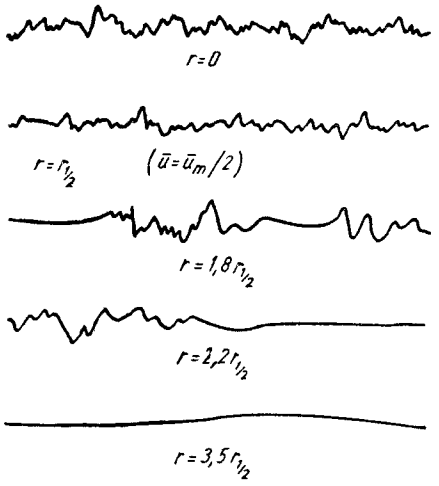


Рис. 137. Перемежающаяся турбулентность в диффундирующей струе

гипотеза Буссинеска о перемешивании —

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\varepsilon_M r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right), \quad (289)$$

где ε_M считается постоянной величиной в соответствии с гипотезой Прандтля о коэффициенте перемешивания;

гипотеза Прандтля о длине пути перемешивания —

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(l^2\left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right| r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right); \quad (290)$$

модифицированная гипотеза Тэйлора о переносе завихренности —

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = \varepsilon\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right) = l^2\left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right|\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right). \quad (291)$$

Уравнение переноса тепла в той же степени приближения может быть записано так:

$$\bar{u}\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \Theta}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\varepsilon_H r \frac{\partial \Theta}{\partial r}\right). \quad (292)$$

При принятии как гипотезы о длине пути перемешивания, так и гипотезы о переносе завихренности коэффициент переноса тепла ε_H заменяется через $l^2\left|\partial \bar{u}/\partial r\right|$. Тогда

$$\bar{u}\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \Theta}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(l^2\left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right| r \frac{\partial \Theta}{\partial r}\right). \quad (293)$$

Уравнения (289) и (292) идентичны, за исключением того, что производная от $\bar{u}$ в одном заменяется производной от Θ в другом. Если допустить, что ε_H равно ε_M, то очевидно, что распределение Θ/Θ_m должно повторить распределение $\bar{u}/\bar{u}_m$. Это остается справедливым, изменяется ли коэффициент сдвига в поперечном сечении, как должно быть для гауссовского распределения, или остается постоянным в сечении в соответствии с концепцией Прандтля. Уравнения (290) и (293) также идентичны; следовательно, если допустить, что l одно и то же в случае пере-

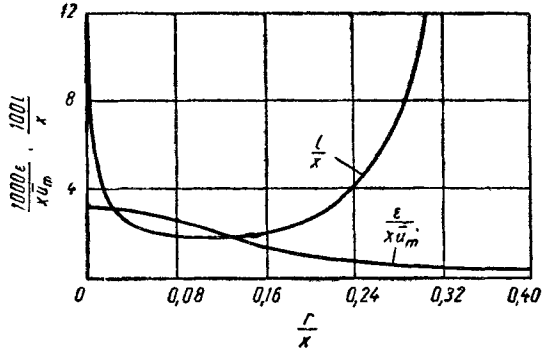


Рис. 138. Изменения l и ε в поперечном сечении струи при гауссовском распределении скорости

дачи количества движения и в случае передачи тепла, то распределения Θ/Θ_m и $\bar{u}/\bar{u}_m$ должны снова совпасть. Только в случае тэйлоровской теории переноса завихренности существует разница между распределениями температуры и скорости. Очевидно, что уравнения (291) и (293) не идентичны, и допущение о том, что l одно и то же для передачи завихренности и тепла, приводит к различным выражениям для температуры и скорости.

Измерения распределения температуры в нагретой струе, осуществленные Корзином, и полученное выше теоретическое распределение ее приведены на рис. 139. Хотя форма теоретического температурного распределения почти правильна, очевидна ошибочность допущения, что перенос коэффициентов или длины пути перемешивания для тепла и количества движения одинаков. Распределение, полученное по теории Тэйлора, больше соответствует измерениям, но и здесь требуется поправочный коэффициент. Каким-то образом, еще не объясненным теориями турбулентности, тепло распространяется быстрее, чем количество движения или завихренность. Это расхождение не слишком неожиданно, так как и для турбулентных пограничных слоев потока отмечалось, что скалярные величины такие, как тепло или веще-

ство, диффундируют легче, чем векторные величины, такие, как количество движения.

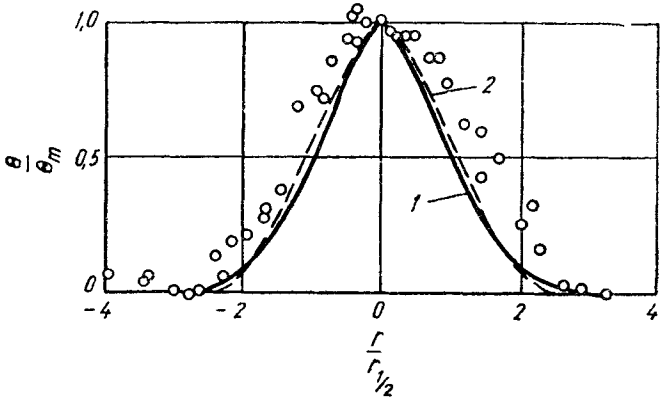


Рис. 139. Сравнение результатов вычисления и эксперимента для распределения температуры в поперечном сечении струи

1 — перенос количества движения; *2* — перенос завихренности

Пример 33. Вентиляционный выход расположен на 30 футов выше пола зала и направлен вертикально вниз. Каким должен быть диаметр выходного отверстия для пропуска 1800 кубических футов в 1 *мин*, если максимальная допускаемая скорость на высоте 5 футов над полом составляет 3 фута в 1 *сек*?

В первом приближении (см. п. 102 и рис. 127) длина безвихревого ядра может быть принята равной $x_0=6{,}2\ D_0$, а $\overline{u}_m/U_0=x_0/x$. На основе заданных величин могут быть выполнены следующие вычисления:

$$Q_0=\frac{1800}{60}=\frac{1}{4}\pi D_0^2 U_0;$$

$$U_0=\overline{u}_m\frac{x}{x_0}=3\frac{25}{6{,}2D_0}.$$

Решение этих двух уравнений дает

$$D_0=3{,}2\ \text{фута}.$$

Расчет основан, конечно, на предпосылке, что на высоте 5 футов над полом последний не влияет на скорость воздуха. Действительно, было найдено, что на длине, превышающей 80% от общего расстояния между отверстием и преградой такого рода, можно пренебречь изменениями в величине осевой скорости.

Е. Распространение анализа на ограниченные области потока

107. Основное различие между ограниченными и безграничными полями. На основе аналитического и экспериментального исследования безграничных потоков сделаем краткие замечания перед рассмотрением ограниченных полей. Главным

допущением, принятым для безграничных потоков, было допущение об отсутствии градиентов давления или, что равнозначно, о постоянстве потока количества движения через последовательные поперечные сечения. Условие неразрывности тогда удовлетворялось боковым течением из бесконечности или к ней. Если пространство потока ограничено, такое боковое течение на внешних границах не может возникнуть. Постоянным в последовательных поперечных сечениях становится не количество движения, а расход. Результирующее изменение потока количества движения от сечения к сечению зоны диффузии требует сущест-

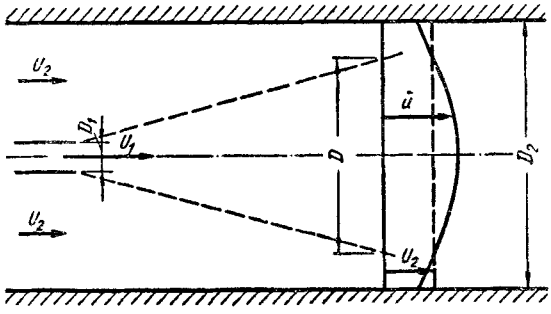


Рис. 140. Истечение струи в ограниченную твердыми стенками область

вования сопровождающего градиента давления. Для иллюстрации осложнений, возникающих в отношении распределения скоростей в ограниченном потоке, рассмотрим струю, вытекающую из насадка в трубу, как схематически показано на рис. 140 (развитием пограничного слоя пренебрегаем). Внешняя скорость U_2 здесь складывается со скоростью потока, а внешним пределом зоны диффузии будет радиус, на котором скорость равна U_2. По аналогии со смешением струй можно ожидать, что струя будет диффундировать все с меньшим и меньшим углом по мере увеличения отношения скоростей U_2/U_1 от 0 до 1. При $U_2=U_1$ скорость распространения в результате турбулентности, вызванной сдвигом, будет равна нулю. Расход $\int_0^{D/2} (\bar{u}-U_2)2\pi r dr$ через последовательные сечения зоны диффузии должен увеличиваться с увеличением ширины зоны. В безграничном потоке увеличение расхода создавалось бы боковым притоком. Если отношение D_2/D_1 велико, но конечно, то увеличение расхода струи, представленное возрастанием написанного интеграла, будет компенсироваться небольшим уменьшением скорости вне зоны диффузии. С этим уменьшением скорости связан обратный градиент давления (в направлении потока). Обратный градиент давления

должен также существовать внутри зоны диффузии для удовлетворения изменившихся потребностей в количестве движения. Решение для безграничного потока может служить достаточным приближением для рассматриваемого случая лишь до тех пор, пока градиенты давления малы.

Если $U_2=0$, то любое уменьшение внешней скорости, очевидно, означает обратное направление течения от струи к области у насадка. В общем, при уменьшении отношения D_2/D_1 происходит уменьшение скорости вне диффундирующей струи, и в зависимости от величины отношения U_2/U_1 может возникнуть обратное течение. Очевидно, что при этом градиент давления будет играть все более важную роль в определении характера потока.

Когда градиентом давления нельзя пренебречь, в уравнении движения должен быть оставлен соответствующий член, так что вместо равенства (276) получается

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial \overline{\tau}_{xy}}{\partial y}.$$

Чтобы найти аналитическое решение для безграничных полей, достаточно допустить подобие в распределении осредненных скоростей или в распределении турбулентных сдвигов. При сохранении в уравнении члена, выражающего градиент давления, необходимо использовать или одно из названных допущений плюс допущение о распределении давления, или оба допущения одновременно. Если поперечные градиенты давления малы, то уравнение Бернулли, прилагаемое к безвихревому пространству вне диффундирующей струи, может быть использовано для характеристики давлений всего поля. Допущение подобия должно быть также сохранено, но для него может потребоваться форма, отличная от использованной в анализе безграничного потока.

Силы сдвига, которые существуют вдоль твердых границ, можно определить с помощью теории пограничного слоя. Однако следует помнить, что поток вне пограничного слоя может быть любым: от безвихревого до свободного турбулентного потока со сдвигом. В настоящее время теория пограничного слоя применяется только в случае, если вне его поток безвихревой. Турбулентность, так же как градиенты скорости и давления у края пограничного слоя, должна быть обязательно учтена, если объединяются два типа турбулентных потоков со сдвигом.

108. Примеры анализа ограниченных потоков. Было сделано несколько попыток анализа частных случаев ограниченных потоков.

Рейхардт, пытаясь сформулировать общую теорему сдвига на основе своих экспериментальных данных, предложил соотношение

$$\overline{uv}=-\Lambda\frac{\partial \overline{u}^2}{\partial y},$$

в котором Λ — линейный параметр, постоянный для данного потока. Это выражение специально приспособлено к его сокращенным уравнениям и гауссовским распределениям $\overline{u^2}$ для ограниченных потоков. Если значение $\overline{u'^2}$ не слишком велико, то рас-

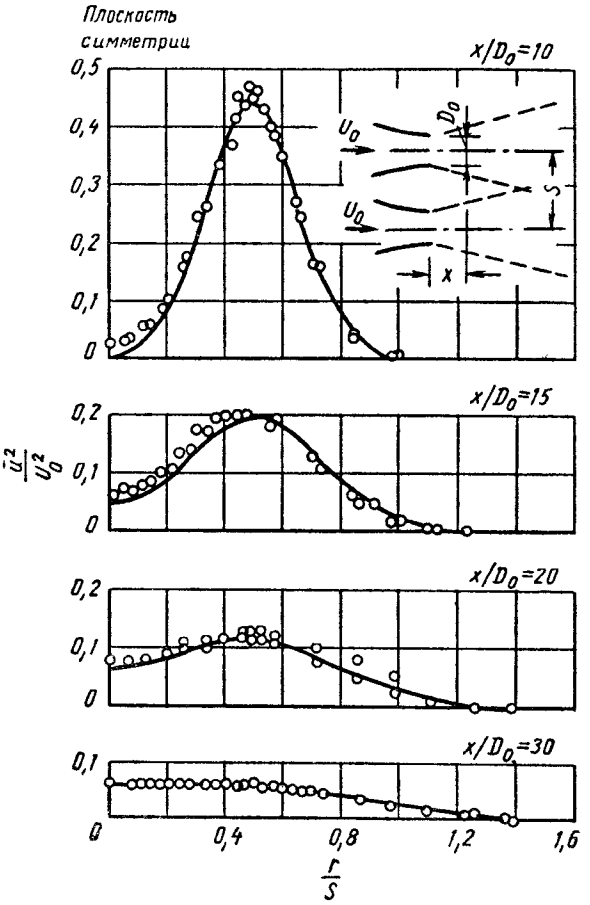


Рис. 141. Распределение скорости двух параллельных струй

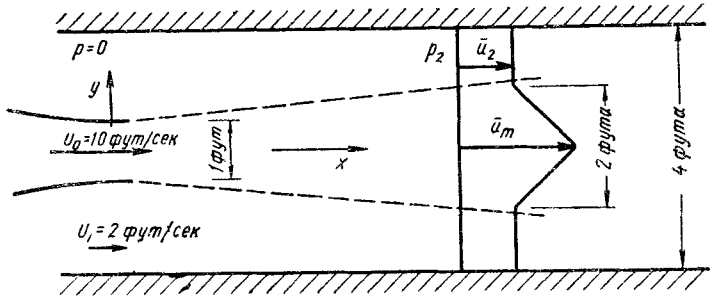
пределение осредненной скорости аппроксимируется гауссовской кривой.

Для случая двух параллельных круглых струй в безграничном пространстве Александер применил аналитический метод наложения продольных компонентов скоростей двух независимых струй, отбросив их поперечные компоненты. Как видно из рис. 141, его анализ, основанный на гипотезе Рейхардта, дает хоро-

шее приближение к реальному потоку, но не отражает тенденции струй к сближению. Включение в анализ поперечных компонентов скорости может уменьшить это несоответствие.

Гидравлический прыжок может рассматриваться главным образом как случай свободного турбулентного потока со сдвигом, ибо сдвиг вдоль границ при этом относительно мал. Форма свободной поверхности, так же как и характер потока, определяется турбулентной диффузией. Цзубаки осуществил анализ этой задачи, приняв гидростатическое распределение давления и задавшись распределениями турбулентного сдвига и осредненной скорости. Он получил решение для формы свободной поверхности, включая длину вальца и длину прыжка, содержащее одну неизвестную постоянную. Хотя данные, достаточные для проверки применимости принятого им распределения скорости и сдвига, были получены лишь недавно, метод, использованный им, может быть рекомендован как пример типичного анализа, необходимого для ограниченных потоков.

Пример 34. На приложенной схеме изображена двухмерная струя в ограниченном вторичном потоке. Для простоты распределение скорости в зоне диффузии принято треугольным, а давление — постоянным в любом поперечном сечении. Пренебрегая развитием пограничного слоя вдоль внешних стенок, определить осевую скорость $\bar{u}_m$, скорость $\bar{u}_2$ вне зоны диффузии и интенсивность давления $\bar{p}_2$ в сечении, где ширина диффузионной зоны равна удвоенной ширине щели. Массовую плотность жидкости принять равной 2 slugs на кубический фут.



Неразрывность потока требует равенства

$$U_0 + 3U_1 = 4\bar{u}_2 + (\bar{u}_m - \bar{u}_2).$$

Применение уравнения Бернулли вдоль поверхности тока, образованной любой границей водовода, приводит к выражению

$$\rho U_1^2 = \rho \bar{u}_2^2 + 2\bar{p}_2.$$

Далее, соотношение для количества движения может быть записано так:

$$-4\overline{p}_2 = 2\rho \int_0^1 \overline{u}^2\, dy - \rho U_0^2 - 3\rho U_1^2 + 2\rho \overline{u}_2^2,$$

где $\overline{u}$ — скорость в произвольной точке сечения. Интеграл легко может быть определен, поскольку

$$\overline{u} = \overline{u}_m - y\,(\overline{u}_m - \overline{u}_2).$$

Совместное решение уравнений и подстановка чисел дает:

$$\overline{u}_m = 11{,}7 \text{ футов в 1 } сек; \quad \overline{u}_2 = 1{,}42 \text{ футов в 1 } сек;$$

$$\overline{p}_2 = 1{,}98 \text{ фунтов на квадратный фут.}$$

(Осевая скорость $\overline{u}_m$ больше начальной U_0 только в силу искусственно принятого треугольного распределения скорости).

ПРИЛОЖЕНИЕ

УРАВНЕНИЯ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Большая часть уравнений, приведенных в тексте, записана в прямоугольных, цилиндрических или сферических координатах. Заметное исключение составляют уравнения пограничного слоя, для вывода которых необходимо было использовать параллельные координаты, и решение обтекания эллипсоида, для которого были введены эллипсоидальные координаты. Унифицированная форма всех этих уравнений может быть дана в криволинейных ортогональных координатах.

В системе криволинейных координат

$$\alpha = \alpha(x, y, z); \quad \beta = \beta(x, y, z);$$

$$\gamma = \gamma(x, y, z)$$

и поверхности $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ и $\gamma = \text{const}$ взаимно ортогональны. В произвольной точке (α, β, γ) эти поверхности пересекаются вдоль трех взаимно перпендикулярных линий или дуг, которые могут рассматриваться как местные координатные оси в направлении возрастания соответственно α, β и γ. Длины элементов дуг в этих направлениях обозначаются $h_1 d\alpha$; $h_2 d\beta$ и $h_3 d\gamma$. Таким образом, в сферических координатах, где длины дуг составляют dR, $Rd\theta$ и $R\sin\theta d\theta$, линеаризирующие множители равны: $h_1 = 1$, $h_2 = R$ и $h_3 = R\sin\theta$. Расстояние ds между точками (α, β, γ) и $(\alpha + d\alpha; \beta + d\beta; \gamma + d\gamma)$ дается выражением

$$(ds)^2 = h_1^2 (d\alpha)^2 + h_2^2 (d\beta)^2 + h_3^2 (d\gamma)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2.$$

Для определения h_1, h_2 и h_3 в общем случае, очевидно, может быть использован такой метод решения. Если выражения x, y и z в форме α, β и γ составляют

$$x = x(\alpha, \beta, \gamma); \quad y = y(\alpha, \beta, \gamma); \quad z = z(\alpha, \beta, \gamma),$$

то

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial x}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial x}{\partial \gamma} d\gamma;$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial y}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial y}{\partial \gamma} d\gamma;$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial z}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial z}{\partial \gamma} d\gamma,$$

откуда

$$(ds)^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2\right](d\alpha)^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2\right](d\beta)^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma}\right)^2\right](d\gamma)^2,$$

где коэффициенты смешанных членов, таких как $d\beta d\gamma$, могут быть приравнены нулю вследствие ортогональности. Отсюда получается

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2 \text{ и т. д.}$$

Из вышеприведенных соотношений между дифференциалами dx, dy и dz и длинами элементов $h_1 d\alpha$, $h_2 d\beta$ и $h_3 d\gamma$ в криволинейных координатах можно непосредственно получить направляющие косинусы для осей двух координатных систем в точке. Например, выражение

$$dx = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha}(h_1 d\alpha) + \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial x}{\partial \beta}(h_2 d\beta) + \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma}(h_3 d\gamma)$$

показывает, что направляющие косинусы оси x с осями α, β и γ составляют $(\partial x/\partial \alpha)/h_1$, $(\partial x/\partial \beta)/h_2$ и $(\partial x/d\gamma)/h_3$.

Если удобнее выражать α, β и γ в виде функций x, y и z, то можно записать:

$$h_1 d\alpha = h_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + h_1 \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy + h_1 \frac{\partial \alpha}{\partial z} dz \text{ и т. д.}$$

Отсюда получается альтернативная форма для направляющего косинуса. Обе формы приведены в табл. 7.

Таблица 7

Направляющие косинусы

	α	β	γ
x	$\frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha}$; $h_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x}$	$\frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial x}{\partial \beta}$; $h_2 \frac{\partial \beta}{\partial x}$	$\frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma}$; $h_3 \frac{\partial \gamma}{\partial x}$
y	$\frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha}$; $h_1 \frac{\partial \alpha}{\partial y}$	$\frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial y}{\partial \beta}$; $h_2 \frac{\partial \beta}{\partial y}$	$\frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma}$; $h_3 \frac{\partial \gamma}{\partial y}$
z	$\frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha}$; $h_1 \frac{\partial \alpha}{\partial z}$	$\frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial z}{\partial \beta}$; $h_2 \frac{\partial \beta}{\partial z}$	$\frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma}$; $h_3 \frac{\partial \gamma}{\partial z}$

Эти направляющие косинусы удовлетворяют обычные соотношения для ортогональной координатной системы, т. е.

$$\left(\frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 =$$

$$= \left(h_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(h_2 \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 + \left(h_3 \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right)^2 = 1;$$

$$\left(\frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2 =$$

$$= \left(h_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(h_1 \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(h_1 \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)^2 = 1;$$

$$\frac{1}{h_1^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{1}{h_2^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \beta} + \frac{1}{h_3^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} = 0;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} + \frac{\partial y}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} + \frac{\partial z}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} =$$

$$= \frac{\partial \beta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0$$

и т. д.

Уравнение неразрывности. Приемы, применяемые при выводе уравнения неразрывности в криволинейных координатах, по существу не отличаются от приемов, применявшихся при выводе его в прямоугольных координатах. Обозначая компоненты скорости в направлении возрастания α, β и γ соответственно символами u, v и w, получаем для расхода потока через элементарный прямоугольник со сторонами $h_2 d\beta$ и $h_3 d\gamma$ произведение $\rho u h_2 h_3 d\beta d\gamma$.

Действуя таким же путем, как в случае прямоугольных координат, получим уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \rho \overline{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (\rho u h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial \beta} (\rho v h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\rho w h_1 h_2) \right] = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (294)$$

Для безвихревого потока выражения компонентов скорости через потенциал скорости составляют

$$u = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}; \quad v = \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \beta}; \quad w = \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \gamma}. \quad (295)$$

Это дает градиент потенциала $\nabla \phi$. Если, кроме того, жидкость несжимаема, то получается уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) \right] = 0. \quad (296)$$

Для системы конфокальных координат μ, ζ, φ уравнений (74) получаем выражения

$$h_1 = c \left(\frac{\zeta^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} \right)^{1/2}; \quad h_2 = c \left(\frac{\zeta^2 - \mu^2}{\zeta^2 - 1} \right)^{1/2};$$

$$h_3 = c (1 - \mu^2)^{1/2} (\zeta^2 - 1)^{1/2},$$

подстановка которых в уравнение Лапласа дает

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left[\left(1 - \mu^2\right) \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \right] + \frac{1}{1 - \mu^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[(1 - \zeta^2) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right] + \frac{1}{1 - \zeta^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}. \quad (297)$$

Циркуляция и завихрение. В криволинейных координатах выражение для циркуляции вокруг замкнутой кривой L имеет вид

$$\Gamma = \int_L (h_1 u d\alpha + h_2 v d\beta + h_3 \omega d\gamma).$$

Это выражение связано с вихрем $\vec{\omega}$ с компонентами ξ, η и ζ по теореме Стокса:

$$\Gamma = \int_S (\xi\, h_2 h_3 d\beta d\gamma + \eta\, h_3 h_1 d\gamma d\alpha + \zeta\, h_1 h_2 d\alpha d\beta).$$

где S — поверхность, ограниченная L. Применяя эту теорему к элементарному криволинейному прямоугольнику со сторонами, параллельными двум осям в окрестности точки, получим, как и в случае прямоугольных координат:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}(h_3 w) - \frac{\partial}{\partial\gamma}(h_2 v)\right]; \\ \eta &= \frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial\gamma}(h_1 u) - \frac{\partial}{\partial\alpha}(h_3 w)\right]; \\ \zeta &= \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(h_2 v) - \frac{\partial}{\partial\beta}(h_1 u)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (298)$$

Поскольку ξ, η и ζ — компоненты вихря вектора скорости $\vec{V}$, то приведенное выражение дает компоненты вихря произвольного вектора в криволинейных координатах.

Уравнения Навье — Стокса. Уравнения Навье — Стокса могут быть выражены в векторной форме

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V}\times\vec{\omega} + \frac{1}{2}\nabla(\vec{V}\cdot\vec{\omega}) = -\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \Omega\right) + \\ + \nu\left(\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V} - \operatorname{rot}\vec{\omega}\right),$$

где $\vec{V}\times\vec{\omega}$ — векторное произведение, компоненты которого составляют $v\zeta - w\eta$, $w\xi - u\zeta$ и $u\eta - v\xi$. Подставляя выражения градиента, дивергенции и вихря в криволинейных координатах, получим уравнения Навье — Стокса в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{h_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{v}{h_2}\cdot\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{w}{h_3}\cdot\frac{\partial u}{\partial\gamma} + \frac{uv}{h_1 h_2}\cdot\frac{\partial h_1}{\partial\beta} + \frac{uw}{h_1 h_3}\cdot\frac{\partial h_1}{\partial\gamma} - \\ &- \frac{v^2}{h_1 h_2}\cdot\frac{\partial h_2}{\partial\alpha} - \frac{w^2}{h_1 h_3}\cdot\frac{\partial h_3}{\partial\alpha} = -\frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p}{\rho} + \Omega\right) + \\ &+ \nu\left\{\nabla^2 u + \frac{2}{h_1}\cdot\frac{\partial v}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{h_2}\right) - \frac{2}{h_2}\cdot\frac{\partial v}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{h_1}\right) + \right. \\ &+ \frac{2}{h_1}\cdot\frac{\partial w}{\partial\gamma}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{h_3}\right) - \frac{2}{h_3}\cdot\frac{\partial w}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{h_1}\right) + \\ &+ \frac{u}{h_1 h_2 h_3}\left[h_2 h_3\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\cdot\frac{\partial(h_2 h_3)}{\partial\alpha}\right) + h_1\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_3}{h_1 h_2}\cdot\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\right) + \right. \\ &+ h_1\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{h_2}{h_3 h_1}\cdot\frac{\partial h_1}{\partial\gamma}\right)\Big] + \frac{v}{h_1 h_2 h_3}\left[h_2 h_3\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\cdot\frac{\partial(h_3 h_1)}{\partial\beta}\right) - \right. \\ &- h_1\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_3}{h_1 h_2}\cdot\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\right)\Big] + \frac{w}{h_1 h_2 h_3}\left[h_2 h_3\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\cdot\frac{\partial(h_1 h_2)}{\partial\gamma}\right) - \right. \\ &\left.\left.\left. - h_1\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{h_2}{h_3 h_1}\cdot\frac{\partial h_3}{\partial\alpha}\right)\right]\right\}; \end{aligned}\right\} \qquad (299)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{u}{h_1}\cdot\frac{\partial v}{\partial \alpha}+\frac{v}{h_2}\cdot\frac{\partial v}{\partial \beta}+\frac{w}{h_3}\cdot\frac{\partial v}{\partial \gamma}+\frac{vw}{h_2h_3}\cdot\frac{\partial h_2}{\partial \gamma}+\frac{uv}{h_1h_2}\cdot\frac{\partial h_2}{\partial \alpha}-$$
$$-\frac{w^2}{h_2h_3}\cdot\frac{\partial h_3}{\partial \beta}-\frac{u^2}{h_1h_2}\cdot\frac{\partial h_1}{\partial \beta}=-\frac{1}{h_2}\cdot\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{p}{\rho}+\Omega\right)+$$
$$+\nu\left\{\nabla^2 v+\frac{2}{h_2}\cdot\frac{\partial w}{\partial \gamma}\cdot\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{h_3}\right)-\frac{2}{h_3}\cdot\frac{\partial w}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{h_2}\right)+\right.$$
$$+\frac{2}{h_2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{h_1}\right)-\frac{2}{h_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{h_2}\right)+\frac{u}{h_1h_2h_3}\left[h_3h_1\frac{\partial}{\partial \beta}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{h_1h_2h_3}\cdot\frac{\partial(h_2h_3)}{\partial \beta}\right)-h_2\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{h_3}{h_1h_2}\cdot\frac{\partial h_1}{\partial \beta}\right)\right]+$$
$$+\frac{v}{h_1h_2h_3}\left[h_3h_1\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{h_1h_2h_3}\cdot\frac{\partial(h_3h_1)}{\partial \beta}\right)+h_2\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\cdot\frac{\partial h_2}{\partial \gamma}\right)+\right.$$
$$\left.+h_2\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{h_3}{h_1h_2}\cdot\frac{\partial h_2}{\partial \alpha}\right)\right]+\frac{w}{h_1h_2h_3}\left[h_3h_1\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{h_1h_2h_3}\cdot\frac{\partial(h_1h_2)}{\partial \gamma}\right)-\right.$$
$$\left.\left.-h_2\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\cdot\frac{\partial h_3}{\partial \beta}\right)\right]\right\};$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{u}{h_1}\cdot\frac{\partial w}{\partial \alpha}+\frac{v}{h_2}\cdot\frac{\partial w}{\partial \beta}+\frac{w}{h_3}\cdot\frac{\partial w}{\partial \gamma}+\frac{vw}{h_2h_3}\cdot\frac{\partial h_3}{\partial \beta}+ \tag{299}$$
$$+\frac{wu}{h_3h_1}\cdot\frac{\partial h_3}{\partial \alpha}-\frac{u^2}{h_1h_3}\cdot\frac{\partial h_1}{\partial \gamma}-\frac{v^2}{h_2h_3}\cdot\frac{\partial h_2}{\partial \gamma}=-\frac{1}{h_3}\cdot\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{p}{\rho}+\Omega\right)+$$
$$+\nu\left\{\nabla^2 w+\frac{2}{h_3}\cdot\frac{\partial u}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{h_1}\right)-\frac{2}{h_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial \gamma}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{h_3}\right)+\right.$$
$$+\frac{2}{h_3}\cdot\frac{\partial v}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{h_2}\right)-\frac{2}{h_2}\cdot\frac{\partial v}{\partial \gamma}\cdot\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{h_3}\right)+$$
$$+\frac{u}{h_1h_2h_3}\left[h_1h_2\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{h_1h_2h_3}\cdot\frac{\partial(h_2h_1)}{\partial \alpha}\right)-h_3\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{h_2}{h_3h_1}\cdot\frac{\partial h_1}{\partial \gamma}\right)\right]+$$
$$+\frac{v}{h_1h_2h_3}\left[h_1h_2\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{h_1h_2h_3}\cdot\frac{\partial(h_3h_1)}{\partial \beta}\right)-h_3\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\cdot\frac{\partial h_2}{\partial \gamma}\right)\right]+$$
$$+\frac{w}{h_1h_2h_3}\left[h_1h_2\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{h_1h_2h_3}\cdot\frac{\partial(h_1h_2)}{\partial \gamma}\right)+h_3\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{h_2}{h_3h_1}\cdot\frac{\partial h_3}{\partial \alpha}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+h_3\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\cdot\frac{\partial h_3}{\partial \beta}\right)\right]\right\}.$$

	α	β	γ
x	1	0	0
y	0	1	0
z	0	0	1

Скорости деформации. Чтобы найти выражения для скоростей деформации в точке P_0 в криволинейной координатной системе, рассмотрим декартовую координатную систему с осями x, y, z, расположенными параллельно касательным в точке P_0 в направлении возрастания соответственно α, β и γ. При этом направляющие косинусы в точке P_0 сводятся в таблицу.

Затем рассмотрим преобразование $a=(du'/dx)_0$, где индекс 0 обозначает величину в

точке P_0, а u', v' и w' обозначают компоненты скорости по осям $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ соответственно. Тогда

$$u' = \frac{u}{h_1}\cdot\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \frac{v}{h_2}\cdot\frac{\partial x}{\partial\beta} + \frac{w}{h_3}\cdot\frac{\partial x}{\partial\gamma}.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial\gamma}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial x}$$

или, поскольку в точке P_0

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{1}{h_1};\quad \frac{\partial\beta}{\partial x} = \frac{\partial\gamma}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha} = h_1;\quad \frac{\partial x}{\partial\beta} = \frac{\partial x}{\partial\gamma} = 0,$$

то

$$a = \frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u}{h_1}\cdot\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \frac{v}{h_2}\cdot\frac{\partial x}{\partial\beta} + \frac{w}{h_3}\cdot\frac{\partial x}{\partial\gamma}\right)\right]_0 =$$

$$= \frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{u}{h_1}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial h_1}{\partial\alpha}\right) + \frac{v}{h_2}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{w}{h_3}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\gamma}\right]_0.$$

Таким же образом получаем

$$f = \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z}\right)_0 = \frac{1}{h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{u}{h_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial\alpha} + \frac{v}{h_2}\cdot\frac{\partial y}{\partial\beta} + \frac{w}{h_3}\cdot\frac{\partial y}{\partial\gamma}\right)\right]_0 +$$

$$+ \frac{1}{h_2}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{h_1}\cdot\frac{\partial z}{\partial\alpha} + \frac{v}{h_2}\cdot\frac{\partial z}{\partial\beta} + \frac{w}{h_3}\cdot\frac{\partial z}{\partial\gamma}\right)\right]_0 = \frac{1}{h_3}\left[\frac{u}{h_1}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\partial\gamma} + \frac{\partial v}{\partial\gamma} + \right.$$

$$+ \frac{v}{h_2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial\beta\partial\gamma} - \frac{\partial h_2}{\partial\gamma}\right) + \left.\frac{w}{h_3}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\gamma^2}\right]_0 + \frac{1}{h_2}\left[\frac{u}{h_1}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\partial\beta} + \right.$$

$$\left. + \frac{v}{h_2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\beta^2} + \frac{\partial w}{\partial\beta} + \frac{w}{h_3}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\beta\partial\gamma} - \frac{\partial h_3}{\partial\beta}\right)\right]_0.$$

Различные производные второго порядка в полученных равенствах могут быть оценены следующим образом. Из таблицы направляющих косинусов находим, что

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)^2 = h_1^2; \tag{300}$$

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial x}{\partial\beta} + \frac{\partial y}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial y}{\partial\beta} + \frac{\partial z}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial z}{\partial\beta} = 0. \tag{301}$$

Дифференцируя уравнение (300) поочередно по α, β и γ и приравнивая окончательные выражения для точки P_0, получаем

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2} = \frac{\partial h_1}{\partial\alpha};\quad \frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial h_1}{\partial\beta};\quad \frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\gamma} = \frac{\partial h_1}{\partial\gamma}.$$

Подобным же образом из уравнения (301) находим, что

$$h_1\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta} + h_2\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2} = 0,$$

или, подставляя выражение для $x_{\alpha\beta}$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} = -\frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{\partial h_1}{\partial \beta}.$$

Дифференцируя уравнение (301) по γ, получаем

$$h_1 \frac{\partial^2 x}{\partial \beta \partial \gamma} + h_2 \frac{\partial^2 y}{\partial \gamma \partial \alpha} = 0.$$

Отсюда по круговой симметрии

$$h_1 \frac{\partial^2 x}{\partial \beta \partial \gamma} = -h_2 \frac{\partial^2 y}{\partial \gamma \partial \alpha} = h_3 \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} = -h_1 \frac{\partial^2 x}{\partial \beta \partial \gamma} = 0.$$

Приведенные выше результаты и результаты, полученные из соображений симметрии, сведены в табл. 8.

Таблица 8

Производные второго порядка

	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\gamma$	$\beta\gamma$	$\gamma\alpha$	$\alpha\beta$
x	$\frac{\partial h_1}{\partial \alpha}$	$-\frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{\partial h_2}{\partial \alpha}$	$-\frac{h_3}{h_1} \cdot \frac{\partial h_3}{\partial \alpha}$	0	$\frac{\partial h_1}{\partial \gamma}$	$\frac{\partial h_1}{\partial \beta}$
y	$-\frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{\partial h_1}{\partial \beta}$	$\frac{\partial h_2}{\partial \beta}$	$-\frac{h_3}{h_2} \cdot \frac{\partial h_3}{\partial \beta}$	$\frac{\partial h_2}{\partial \gamma}$	0	$\frac{\partial h_2}{\partial \alpha}$
z	$-\frac{h_1}{h_3} \cdot \frac{\partial h_1}{\partial \gamma}$	$-\frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{\partial h_2}{\partial \gamma}$	$\frac{\partial h_3}{\partial \gamma}$	$\frac{\partial h_3}{\partial \beta}$	$\frac{\partial h_3}{\partial \alpha}$	0

Скорости деформации могут теперь быть получены подстановкой значений этих производных второго порядка в приведенные ранее выражения для a и f, а также и остальные по симметрии. Таким образом:

$$\left.\begin{aligned}
a &= \frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{h_2} \cdot \frac{\partial h_1}{\partial \beta} + \frac{w}{h_3} \cdot \frac{\partial h_1}{\partial \gamma}\right);\\
b &= \frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{h_3} \cdot \frac{\partial h_2}{\partial \gamma} + \frac{u}{h_1} \cdot \frac{\partial h_2}{\partial \alpha}\right);\\
c &= \frac{1}{h_3}\left(\frac{\partial w}{\partial \gamma} + \frac{u}{h_1} \cdot \frac{\partial h_3}{\partial \alpha} + \frac{v}{h_2} \cdot \frac{\partial h_3}{\partial \beta}\right);\\
f &= \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{v}{h_2}\right) + \frac{h_3}{h_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{w}{h_3}\right);\\
g &= \frac{h_3}{h_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{w}{h_3}\right) + \frac{h_1}{h_3} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{u}{h_1}\right);\\
h &= \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{h_1}\right) + \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{v}{h_2}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (302)$$

Связь между напряжениями и скоростями деформации выражается в форме уравнений (120), т. е.

$$\sigma_\alpha = -p + 2\mu a; \quad \sigma_\beta = -p + 2\mu b; \quad \sigma_\gamma = -p + 2\mu c;$$

$$\tau_{\beta\gamma} = \mu f; \quad \tau_{\gamma\alpha} = \mu g; \quad \tau_{\alpha\beta} = \mu h.$$

Параллельные координаты. Геометрическим местом точек, равноудаленных от поверхности S, является другая поверхность, касательная к которой, нормальная к перпендикуляру первой поверхности, параллельна касательной, нормальной к этому же перпендикуляру и проведенной в плоскости первой поверхности. Такие две поверхности называются параллельными. Если γ обозначает расстояние вдоль нормали к поверхности S, то уравнение

$$\gamma(x, y, z) = \text{const}$$

описывает семейство параллельных поверхностей, в котором начальная поверхность соответствует $\gamma(x, y, z) = 0$. Линии главной кривизны на S определяют два семейства кривых, ортогональных друг другу на поверхности S. Уравнения поверхностей, образованных нормалями к поверхности S вдоль каждого из этих семейств, имеют вид:

$$\alpha(x, y, z) = \text{const} \text{ и } \beta(x, y, z) = \text{const}.$$

В руководствах по дифференциальной геометрии показывается, что линии главной кривизны и только эти линии дают образующие поверхности. Следовательно, три поверхности $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ и $\gamma = \text{const}$ взаимно ортогональны. Как обычно, элементы дуги в направлении увеличения α и β будут обозначаться $h_1 d\alpha$ и $h_2 d\beta$. Так как γ — расстояние вдоль нормали, то $h_3 = 1$. Таким образом, $H_1 = h_1(\alpha, \beta, 0)$; $H_2 = h_2(\alpha, \beta, 0)$.

Для получения соотношения между h_1, h_2 и кривизной поверхностей $k_1(\alpha, \beta, \gamma)$ и $k_2(\alpha, \beta, \gamma)$ примем в качестве главной кривизны поверхностей $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$. Далее записываем $K_1 = k_1(\alpha, \beta, 0)$, $K_2 = k_2(\alpha, \beta, 0)$ и считаем K_3, K_4 главной кривизной заданной поверхности $\gamma = 0$, соответствующей направлению возрастания α и β. На рис. 105 (см. ранее) изображен элемент $ABCD$ поверхности S, где AD и AB являются дуговыми элементами $H_1 d\alpha$ и $H_2 d\beta$. Точка O — главный центр кривизны дуги AB, так что $OA = OB = 1/K_4$. Соответствующим элементом параллельной поверхности является $A'B'C'D'$, полученный продолжением радиуса от точки O на расстояние γ; т. е. $AA' = BB' = CC' = DD' = \gamma$. Центрами главной кривизны образующей поверхности $OA'B'$ являются точки P и P'. Тогда $PA = PB = 1/K_1$ и $P'A' = P'B' = 1/K_1$. По условиям подобия очевидно, что точки O, P и P' коллинеарны.

Из условия подобия криволинейных треугольников OAB и $OA'B'$ получаем

$$\frac{h_2}{H_2} \cdot \frac{d\beta}{d\beta} = \frac{\gamma + \dfrac{1}{K_4}}{\dfrac{1}{K_4}},$$

или

$$h_2 = H_2(1 + K_4\gamma)$$

и также

$$h_1 = H_1(1 + K_3\gamma). \qquad (303)$$

Затем из треугольников OPA и $OP'A'$ находим

$$k_1 = \frac{K_1}{1 + K_4\gamma}$$

и также

$$k_2 = \frac{K_2}{1 + K_3\gamma}. \qquad (304)$$

Далее из треугольников $P'A'B'$ и $P'D'C'$ получаем

$$\frac{\left(h_2+\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\,d\alpha\right)d\beta}{h_2 d\beta}=\frac{\frac{1}{k_1}+h_1 d\alpha}{1/k_1},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} k_1&=\frac{1}{h_1h_2}\cdot\frac{\partial h_2}{\partial\alpha};\quad K_1=\frac{1}{H_1H_2}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial\alpha};\\ \text{и также}\qquad k_2&=\frac{1}{h_1h_2}\cdot\frac{\partial h_1}{\partial\beta};\quad K_2=\frac{1}{H_1H_2}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial\beta}.\end{aligned}\right\}\tag{305}$$

На основании уравнений (303), (304) и (305) можно записать:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}&=h_2k_1=H_2K_1;\\ \frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial h_1}{\partial\alpha}&=h_1k_2=H_1K_2.\end{aligned}\right\}\tag{306}$$

Подставляя величины h_1 и h_2 из уравнения (303) в уравнение (306), получим

$$\frac{\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}+\gamma\left(H_2\frac{\partial K_4}{\partial\alpha}+K_4\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\right)}{H_1+H_1K_3\gamma}=H_2K_1.$$

Так как правая часть этого уравнения не является функцией γ, то

$$\frac{1}{H_1}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}=\frac{1}{H_1K_3}\left(H_2\frac{\partial K_4}{\partial\alpha}+K_4\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\right),$$

или из уравнения (305)

$$\left.\begin{aligned}H_1K_1&=\frac{1}{H_2}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}=\frac{1}{K_3-K_4}\cdot\frac{\partial K_4}{\partial\alpha}\\ \text{и также}\qquad H_2K_2&=\frac{1}{H_1}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial\beta}=\frac{1}{K_4-K_3}\cdot\frac{\partial K_3}{\partial\beta}.\end{aligned}\right\}\tag{307}$$

Дополнительное соотношение, основанное на так называемых соотношениях дифференциальной геометрии Лямэ, приводится здесь без вывода

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2K_1)+\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1K_2)+H_1H_2K_3K_4=0.\tag{308}$$

Теперь могут быть получены выражения для производных h_1 и h_2. Из уравнения (303) имеем

$$\frac{\partial h_1}{\partial\beta}=\frac{\partial H_1}{\partial\beta}+\gamma\left(H_1\frac{\partial K_3}{\partial\beta}+K_3\frac{\partial H_1}{\partial\beta}\right),$$

или из уравнения (307)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}&=\frac{\partial H_1}{\partial\beta}+\gamma H_1H_2K_2K_4\\ \text{и также}\qquad \frac{\partial h_2}{\partial\alpha}&=\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}+\gamma H_1H_2K_1K_3\end{aligned}\right\}\tag{309}$$

Приведенные результаты могут быть изложены вкратце следующим образом. Допустим, что уравнение поверхности выражено в параметрической форме через параметры α, β кривых главной кривизны:

$$x = x(\alpha, \beta); \quad y = y(\alpha, \beta); \quad z = z(\alpha, \beta).$$

Кроме того, как показано в руководствах по дифференциальной геометрии, H_1 и H_2 даются выражениями

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2;$$

$$H_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2,$$

K_3 и K_4 выражениями

$$K_3 = \frac{1}{H_1^3 H_2}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \end{vmatrix}; \quad K_4 = \frac{1}{H_1 H_2^3}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \end{vmatrix}.$$

Тогда h_1 и h_2 получаются по равенствам (303); K_1, K_2 по равенствам 305) и k_1, k_2 по равенствам (304). Остальные соотношения, такие как уравнения (307), (308) и (309), используются для упрощения уравнений Навье — Стокса и уравнения неразрывности в рассматриваемой системе ортогональных координат.

Общие уравнения, таким образом, принимают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{h_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{h_2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \beta} + w\frac{\partial u}{\partial \gamma} + k_2 uv + \frac{H_1 K_3}{h_1} uw - k_1 v^2 =$$

$$= \frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{p}{\rho} + \Omega\right) + \nu\left\{\frac{1}{h_1^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{h_2^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial u}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) + \frac{\partial u}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{h_1}{h_2}\right) + \frac{\partial u}{\partial \gamma}(h_1 H_2 K_4 + h_2 H_1 K_3)\right]\right. -$$

$$- \frac{2k_1}{h_2}\cdot\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{2k_2}{h_1}\cdot\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{2H_1 K_3}{h_1^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial \alpha} -$$

$$- \frac{u}{h_1 h_2}\left[k_1\frac{\partial h_2}{\partial \alpha} + k_2\frac{\partial h_1}{\partial \beta} + \frac{h_2 H_1^2 K_3^2}{h_1}\right] +$$

$$\left. + v\left(\frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial k_2}{\partial \alpha} - \frac{1}{h_2}\cdot\frac{\partial k_1}{\partial \beta}\right) + \frac{w}{h_1}\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{K_3 H_1}{h_1} + \frac{K_4 H_2}{h_2}\right)\right\}; \qquad (310)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{h_1}\cdot\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{v}{h_2}\cdot\frac{\partial v}{\partial \beta} + w\frac{\partial v}{\partial \gamma} + k_1 uv + \frac{H_2 K_4}{h_2} vw - k_2 u^2 =$$

$$= -\frac{1}{h_2}\cdot\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{p}{\rho} + \Omega\right) + \nu\left\{\frac{1}{h_1^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{h_2^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \gamma^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial v}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) + \frac{\partial v}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{h_1}{h_2}\right) + \frac{\partial u}{\partial \gamma}(h_1 H_2 K_4 + h_2 H_1 K_3)\right]\right. -$$

$$- \frac{2k_2}{h_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{2k_1}{h_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{2H_2K_4}{h_2^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta} -$$

$$- \frac{v}{h_1 h_2} \left[k_1 \frac{\partial h_2}{\partial \alpha} + k_2 \frac{\partial h_1}{\partial \beta} + \frac{h_1 H_2^2 K_4^2}{h_2} \right] +$$

$$+ u \left(\frac{1}{h^2} \cdot \frac{\partial k_1}{\partial \beta} - \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial k_2}{\partial \alpha} \right) + \frac{w}{h_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{K_3 H_1}{h_1} + \frac{K_4 H_2}{h_2} \right) \Bigg\}; \quad (311)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{u}{h_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{v}{h_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta} + w \frac{\partial w}{\partial \gamma} - \frac{H_1 K_3}{h_1} u^2 - \frac{H_2 K_4}{h_2} v^2 =$$

$$= - \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{p}{\rho} + \Omega \right) + \nu \left\{ \frac{1}{h_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{h_2^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \gamma^2} + \right.$$

$$+ \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial w}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{h_2}{h_1} \right) + \frac{\partial w}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{h_1}{h_2} \right) + \frac{\partial w}{\partial \gamma} (h_1 H_2 K_4 + h_2 H_1 K_3) \right] -$$

$$- \frac{2H_1 K_3}{h_1^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{2H_2 K_4}{h_2^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \beta} - u \left[\frac{H_2^2 K_1 K_4}{h_2^2} + \frac{1}{h_1 h_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{H_1 h_2 K_3}{h_1} \right) \right] -$$

$$- v \left[\frac{H_1^2 K_2 K_3}{h_1^2} + \frac{1}{h_1 h_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{h_1 H_2 K_4}{h_2} \right) \right] - w \left(\frac{H_1^2 K_3^2}{h_1^2} + \frac{H_2^2 K_4^2}{h_2^2} \right) \Bigg\}; \quad (312)$$

$$\frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial w}{\partial \gamma} + k_1 u + k_2 v + \left(\frac{H_2 K_4}{h_2} + \frac{H_1 K_3}{h_1} \right) w = 0. \quad (313)$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 3

Глава I. **Введение в исследование движения жидкости** 5

А. Математический анализ и экспериментальные измерения . . . . . —
1. Современное состояние науки . . . . . —
2. Ограничения математического анализа 6
3. Ограничения ненаправленного эксперимента 7
4. Метод представления 8
Б. Соображения о размерности 9
5. Размерная однородность . . . . . —
6. П-теорема 11
7. Безразмерные соотношения и их значение 14
В. Порядок проведения исследования 17
8. Выбор первичных переменных . . . . . —
9. Выбор параметров 19
10. Проведение исследования 20
11. Анализ результатов 22
Г. Разбор типичных исследований 23
12. Задачи, содержащие ускорение массы . . . . . —
13. Явление гравитации 25
14. Потоки с вязкостным сопротивлением 27
15. Транспортирование дискретных материалов 28

Глава II. **Основные понятия и уравнения** 30

А. Поток сплошной среды . . . . . —
16. Сплошность . . . . . —
17. Скорость как функция времени и пространственных координат 31
18. Уравнения неразрывности 33
Б. Характеристики форм течений 37
19. Линии тока . . . . . —
20. Функция тока Лагранжа и Стокса 39
21. Поверхности тока в трехмерном потоке 42
В. Кинематика потока 46
22. Перемещение, деформация, вращение. . . . . —
23. Завихрение и циркуляция 48
24. Компоненты ускорения 52
Г. Динамика потока 55
25. Силы, действующие на элемент жидкости . . . . . —
26. Уравнения движения 58
27. Уравнения количества движения и энергии 61

Стр.

Глава III. **Принцип безвихревого течения** 66

А. Основы потенциальной теории . . . . . —
28. Характеристики потенциальных полей . . . . . —
29. Важнейшие теоремы и уравнения 72
30. Классификация задач безвихревого течения 77
Б. Типичные виды течений 79
31. Основные функции потенциала и тока . . . . . —
32. Сложные движения 90
33. Динамические соотношения 91
В. Математическая техника решения задач 97
34. Разделение переменных . . . . . —
35. Метод отражений 111
36. Метод интегральных уравнений 117
Г. Техника приближенных решений 124
37. Графические методы . . . . . —
38. Метод аналогии с непрерывным проводником 127
39. Принцип конечных разностей 131

Глава IV. **Конформное представление двухмерного потока** 136

А. Введение к функциям комплексного переменного . . . . . —
40. Функции комплексного переменного . . . . . —
41. Интегральная теорема Коши 141
42. Приложение к безвихревому потоку 145
Б. Основы конформного отображения 149
43. Геометрические свойства аналитических функций . . . —
44. Элементарные преобразования 156
В. Потоки с заданными границами 169
45. Обтекание отдельных препятствий . . . . . —
46. Задача Неймана. Линеаризированная теория профиля . 176
47. Обтекание двух и более препятствий 179
48. Полигональные границы. Отображение Кристоффеля—Шварца 181
Г. Течение струй свободного очертания. Метод годографа 184
49. Теория струй свободного очертания . . . . . —
50. Приложение к истечению и отклонению струи 186

Глава V. **Ламинарное движение** 190

А. Основные положения . . . . . —
51. Соотношение между напряжением и скоростью деформации . . . . . —
52. Физическое представление вязкости 194
53. Скорость диссипации энергии 195
Б. Уравнения Навье — Стокса 196
54. Вывод уравнений . . . . . —
55. Уравнения, описывающие диффузию вихря 199
В. Точные решения уравнений Навье—Стокса 203
56. Линейное установившееся движение . . . . . —
57. Неустановившееся движение, описываемое линейными уравнениями 209
58. Движение, описываемое нелинейными уравнениями . . 211
Г. Приближенные решения уравнений Навье—Стокса 221
59. Очень медленное движение — решение Стокса для падающего шара . . . . . —
60. Ламинарные следы 225
61. Течения, описываемые нелинейными уравнениями — струи 227

Стр.

Д. Устойчивость ламинарного течения 232
62. Общие замечания . . . . . —
63. Метод показательного фактора времени 233
64. Достаточные условия для устойчивости 238
65. Метод энергии и метод завихренности. 240
66. Влияние природы возмущения на устойчивость 241

Глава VI. **Турбулентность** 243

А. Общие соображения . . . . . —
67. Вводные замечания . . . . . —
68. Средние значения . . . . . —
69. Функция плотности вероятности 247
Б. Основные уравнения для турбулентных потоков 248
70. Уравнения Рейнольдса . . . . . —
71. Уравнение количества движения 252
72. Уравнение энергии 253
В. Изотропная турбулентность 256
73. Определения и иллюстрирующие соотношения . . . . . —
74. Динамика изотропной турбулентности 262
75. Частотное распределение кинетической энергии 265
Г. Турбулентная диффузия 270
76. Описательные соотношения . . . . . —
77. Уравнение диффузии 271
Д. Турбулентный поток со сдвигом 274
78. Феноменологические теории . . . . . —
79. Измерения, выполненные в потоках со сдвигом 278

Глава VII. **Пограничные слои** 283

А Основные понятия . . . . . —
80. Природа течения вдоль твердой границы . . . . . —
81. Допущения теории пограничного слоя 286
82. Определение толщины пограничного слоя . . . . . —
Б. Уравнения пограничного слоя и их интегралы 289
83. Двухмерный поток вдоль криволинейной стенки . . . —
84. Осесимметричный поток на поверхности вращения . 296
85. Трехмерный поток вдоль произвольной поверхности . 299
В. Ламинарные пограничные слои 301
86. Решения для установившихся двухмерных потоков . . —
87. Решения для установившегося осесимметричного потока 309
88. Приближенные методы решения для установившихся потоков 312
89. Неустановившиеся пограничные слои 314
Г. Турбулентные пограничные слои 318
90. Распределение средней скорости у стенки . . . . . —
91. Распределение средней скорости на некотором расстоянии от стенки 321
92. Наложение внешнего и внутреннего законов 323
93. Пограничный слой на плоской пластине. 326
94. Приближенный расчет турбулентных пограничных слоев 331

Глава VIII. **Свободный турбулентный поток со сдвигом** 333

А. Вводные замечания . . . . . —
95. Течение, создаваемое внезапным (неплавным) изменением скорости . . . . . —

Стр.

96. Методы анализа 336
Б. Смешение параллельных потоков 338
97. Общие соотношения для смешивающихся потоков . —
98. Распределение скоростей при смешении потоков . . 341
В. Распространение следа за телом 344
99. Интегральные соотношения для следа . . . . . —
100. Общие характеристики следов 348
101. Распределение скорости в следах 351
Г. Диффузия струй 354
102. Интегральные соотношения для струй . . . . . —
103. Распределение скорости в струе 356
Д. Сравнение теории и наблюдения 360
104. Совершенство анализа . . . . . —
105. Осредненные характеристики струй и следов . . . 362
106. Турбулентные характеристики струй 364
Е. Распространение анализа на ограниченные области потока 370
107. Основное различие между ограниченными и безграничными полями . . . . . —
108. Примеры анализа ограниченных потоков 372

Приложение. Уравнения в криволинейных ортогональных координатах . 376

Х. РАУЗ
МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ

* * *

Стройиздат
Москва, Третьяковский проезд, д. 1

* * *

Редактор издательства *М. А. Шершукова*
Переплет художника *Ю. И. Степанова*
Технический редактор *А. А. Михеева*
Корректоры *О. В. Стигнеева, Л. М. Шустова*

Сдано в набор 17/XI—1966 г. Подписано к печати 21/IV—1967 г.
Формат 60×90$^{1}/_{16}$ д. л. —12,25 бум. л. 24,5 печ. л. (уч.-изд. 23,65 л.)
Изд. № A.VIII—9462. Зак. № 1459. Цена 1 р. 83 к.

Владимирская типография Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР

Гор. Владимир, ул. Победы, д. 18-б

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

В Стройиздате подготавливается к печати и скоро выйдет в свет книга А. А. Лукиных и Н. А. Лукиных «Таблицы для гидравлического расчета канализационных сетей и дюкеров по формуле акад. Н. Н. Павловского», изд. 2-е, объем 10 л., цена 70 коп.

В книге излагаются принципы гидравлического расчета канализационных сетей.

Составленные авторами таблицы служат для подбора наиболее экономичных диаметров, размеров прямоугольных сечений и уклонов канализационных линий.

Книга предназначается для инженеров и техников — проектировщиков по канализации.

Заказы направлять в местные книготорги, в Союзкнигу (г. Москва, Ленинский проспект, 15), а также в магазин № 115 «Техническая книга» (г. Москва, Ленинский проспект, 40).