ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

THEORETICAL HYDRODYNAMICS

by

L. M. MILNE-THOMSON, C. B. E.,

Professor in the Mathematics Research Center, United States Army, the University of Wisconsin, Emeritus Professor of Mathematics in the Royal Naval College

Fourth edition

London

Macmillan and Co. LTD

New York

St. Martin's Press

1960

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
А. А. ПЕТРОВА, Я. И. СЕКЕРЖ-ЗЕНЬКОВИЧА
И
П. И. ЧУШКИНА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Н. Н. МОИСЕЕВА

*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1964

Предлагаемый курс современной гидродинамики написан на высоком теоретическом уровне. По энциклопедичности содержания и систематичности изложения книгу Милн-Томсона можно сравнить со всемирно известным трудом Г. Ламба «Гидродинамика», вышедшим в русском переводе в 1947 г. В то же время она выгодно отличается от книги Ламба новизной материала.

Книга Милн-Томсона будет служить весьма ценным учебником по гидродинамике, причем для его понимания не требуется специальной подготовки. В частности, автор приводит непосредственно в тексте все необходимые для усвоения материала математические сведения. Большую ценность представляют также задачи различной степени трудности, сопровождающие каждую главу; таких задач в книге около 600.

Книга рассчитана на преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов университетов и инженерно-физических вузов. В то же время она представляет интерес и для научных работников и инженеров, занимающихся вопросами гидродинамики.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Предлагаемая советскому читателю книга Милн-Томсона относится к числ классических учебников по гидродинамике. Подобно книге Г. Ламба «Гидро динамика» и двухтомному курсу Н. Е. Кочина, И. А. Кибеля и Н. В. Роз «Теоретическая гидродинамика» книга Милн-Томсона неоднократно переизда валась и уже давно получила заслуженную известность у специалистов. Эт книга хорошо известна также и в Советском Союзе. Автор предисловия по соб ственному опыту знает, как часто преподаватели гидродинамики прибегал к помощи книги Милн-Томсона. Отличный подбор задач, ясность и оригиналь ность изложения большинства вопросов делали эту книгу очень полезны пособием для преподавателей. Теперь в русском переводе книга Милн-Томсон станет доступной также и студенчеству.

Данная книга относится к числу книг энциклопедической направленно сти. Все включенные в нее вопросы излагаются очень обстоятельно и полно При этом она отнюдь не дублирует имеющиеся издания по той же тематике Прежде всего в ней содержится много материала, который обычно не вклю чается в учебники. Например, все изложение плоской задачи автор строи на использовании функций двух комплексных переменных и в рамках этог метода рассматривает также и неустановившиеся течения; кроме того, авто демонстрирует ряд малоизвестных результатов, например таких, как обобще ние формул Чаплыгина — Блазиуса и др.

С очень большой полнотой изложена теория вихрей; такого полног изложения этой теории на русском языке до сих пор не было. Если сравнива этот раздел с известной книгой А. Вилла «Теория вихрей», изданной на рус ском языке в 1933 г., то изложение Милн-Томсона имеет ряд преимуществ при той же полноте изложения классических результатов Милн-Томсон зна комит читателя с многочисленными работами последних лет. Кроме того изложение Милн-Томсона вполне современно.

Указанные преимущества изложения Милн-Томсона полностью можн отнести к главам, посвященным теории движения жидкости со свободны границами: читатель сможет ознакомиться с современным состоянием вопрос особенно внимательно относится автор к последним работам американско школы — Гилбарга, Гарабедяна и др.). Это обстоятельство характерно почт для всех глав — оставаясь в рамках классических вопросов, автор тем не менее все время старается осветить их с современной точки зрения, позна комить с последними результатами, показать перспективу дальнейшего раз вития вопроса. Этому очень способствует подбор задач, многие из которы еще недавно могли бы составить тему самостоятельных исследований.

При всех достоинствах предлагаемой книги ее, однако, нельзя рекомендо вать в качестве учебника для начинающих изучать гидродинамику, так как автор каждый вопрос излагает с энциклопедической полнотой и материал, который нужен начинающему, очень трудно отфильтровать. Кроме того, для советского читателя изложение автора может показаться весьма своеобраз ным. Например, следуя английским традициям, автор широко использует аппарат теории диад. В качестве исходного понятия автор вводит понятие

диады, а не тензора, как это принято у нас. По-видимому, такой подход усложняет изложение. Кроме того, автор широко и без достаточных пояснений использует аппарат функций двух комплексных переменных и т. д. Однако для преподавателей, аспирантов, студентов старших курсов и лиц, желающих углубить свои знания в классической гидродинамике, книга Милн-Томсона будет хорошим руководством. Обилие материала делает ее одновременно хорошим справочником, а большое количество задач позволяет использовать книгу как уникальный задачник.

Переводчики и редактор старались по возможности сохранить манеру изложения автора, и существенных изменений или исправлений в текст внесено не было. Мы отдавали себе отчет в том, что традиционная английская манера изложения отдельных вопросов может затруднить чтение книги. Поэтому к некоторым главам были добавлены небольшие приложения. В одних случаях приложения имели своей целью разъяснить отдельные вопросы, в других — показать читателю возможность несколько иной трактовки вопроса.

В начале книги помещены исторические замечания. Редактор и переводчики сочли необходимым пополнить перечень имен ученых, вклад которых в развитие гидродинамики оказал большое влияние на формирование идей и дальнейшее направление развития этой науки. Отметим еще, что, по нашему мнению, в этих замечаниях, подчеркивая заслуги Ланчестера в развитии современного представления о движении жидкости, автор несколько переоценивает роль этого выдающегося исследователя. Несмотря на то что с именами Ланчестера и Кутта связаны первые представления о циркуляции как об основной причине возникновения подъемной силы крыла, именно Н. Е. Жуковский создал современное представление об эквивалентности крыла некоторому вихрю. Это представление в сочетании с блестящей по своей простоте и эффективности гипотезой о конечности значений скорости на острой кромке крыла (Н. Е. Жуковский, С. А. Чаплыгин) являются основой современной аэродинамики.

Мы надеемся, что книга Милн-Томсона вызовет большой интерес у советского читателя и принесет пользу не только делу преподавания гидродинамики, но и поможет восстановить интерес к ее классическим задачам, которые, по-видимому, незаслуженно отодвинуты в сторону мощным развитием «современных» разделов механики сплошных сред.

Перевод глав 1, 3—5, 7, 8, 10—12, 14, 15 выполнен Я. И. Секерж-Зеньковичем, главы 2, 6, 9, 13 переведены А. А. Петровым, главы 16—20 переведены П. И. Чушкиным.

Н. Н. Моисеев

ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Даниил Бернулли (1700—1783) ввел термин «гидродинамика» для того, чтобы объединить две науки: гидростатику и гидравлику. Д. Бернулли также открыта замечательная теорема, известная под его именем.

Даламбер (1717—1783) исследовал сопротивление тел в потоке, открыл парадокс, названный его именем, и ввел принцип сохранения массы в жидкости (уравнение неразрывности).

Эйлер (1707—1783) вывел уравнения движения идеальной жидкости и развил теорию идеальной жидкости. Эту работу продолжил Лагранж (1736—1813).

Навье (1785—1836) вывел уравнения движения вязкой жидкости, исходя из некоторых гипотез молекулярного взаимодействия.

Стокс (1819—1903) также получил уравнения движения вязкой жидкости. Его можно считать основателем теории современной гидродинамики.

Рэнкин (1820—1872) развил теорию источников и стоков.

Гельмгольц (1821—1894) ввел понятие потенциала скоростей, положил основу теории вихревого движения и теории разрывного движения, тем самым сделав существенный вклад в эту область гидродинамики.

Кирхгоф (1824—1887) и Рэлей (1842—1919) продолжали начатое Гельмгольцем изучение разрывного движения жидкости и обусловленного им сопротивления.

Рейнольдс (1842—1912) изучал движение вязкой жидкости, ввел понятие ламинарного и турбулентного течений и отметил резкий переход от одного к другому.

Н. Е. Жуковский (1847—1921) сделал выдающийся вклад в расчет и теорию крыла; полученные им результаты по исследованию профилей крыла всемирно известны под его именем.

Ланчестеру (1868—1945) принадлежат два замечательных результата в современной теории полета: (I) он ввел понятие циркуляции как причины подъемной силы, (II) он исследовал концевые вихри как причину индуктивного сопротивления [1]). Свои теории он изложил на заседании Бирмингемского естественноисторического общества в 1894 г., но опубликовал их в 1907 г. в своей «Аэродинамике».

Дополнение редактора и переводчиков

М. В. Остроградский (1801—1861) — выдающийся русский математик, один из основоположников теории волн малой амплитуды и теории распространения тепла в жидкости.

---

[1]) См. предисловие редактора русского перевода.— *Прим. ред.*

И. С. Громека (1851—1889) заложил основы теории так называемых винтовых потоков и потоков с поперечной циркуляцией, получивших большое практическое значение. Он исследовал неустановившееся ламинарное движение вязкой жидкости в цилиндрических трубках и изучал влияние деформации упругих стенок на движение жидкости; эти исследования представляют большой интерес для физиологии. Получил в новой форме уравнения гидродинамики, носящие название уравнений Громеки — Ламба.

А. М. Ляпунов (1857—1918)—выдающийся русский математик и механик, создал современную строгую теорию фигур равновесия равномерно вращающейся жидкости; впервые доказал существование фигур равновесия жидкости; впервые исследовал устойчивость как эллипсоидальных, так и открытых им новых фигур для однородной жидкости.

С. А. Чаплыгин (1869—1942) наряду с Н. Е. Жуковским создал теорию крыла в безвихревом потоке. Он является основоположником современной газовой динамики.

А. И. Некрасов (1883—1957) дал точную теорию волн установившегося вида на поверхности идеальной несжимаемой тяжелой жидкости. Получил первое строгое решение задачи обтекания дуги круга с отрывом струй идеальной несжимаемой жидкостью.

А. А. Фридман (1888—1925) является основоположником динамики сжимаемого газа при малых скоростях, служащей основой динамической метеорологии.

Н. Е. Кочин (1900—1944) получил точное решение задачи об установившихся волнах конечной амплитуды на поверхности раздела двух идеальных несжимаемых тяжелых жидкостей разной плотности. Дал строгое решение задачи об установившемся движении в идеальной несжимаемой жидкости круглого в плане крыла и его колебаниях. Наряду с А. А. Фридманом он внес большой вклад в современную динамическую метеорологию.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

До недавнего времени динамика идеальной жидкости рассматривалась как академический раздел науки, не имеющий практического приложения, ввиду больших расхождений между результатами расчетов и наблюдений. Однако окончательное признание того, что теория циркуляции в идеальной жидкости, предложенная Ланчестером, объясняет подъемную силу крыла, а также гипотеза Прандтля о возможности пренебречь вязкостью вне пограничного слоя дали новый толчок в развитии этой области науки, которая всегда была необходима кораблестроителям-проектировщикам и которая вышла на передовые позиции в связи с появлением современных самолетов.

Исследование движения жидкости естественно распадается на две части: (I) экспериментальная, или практическая часть; (II) теоретическая часть, которая стремится объяснить характер экспериментальных результатов и, кроме того, пытается предсказать ход эксперимента. Таким образом, практическая и теоретическая части взаимно дополняют друг друга; настоящая книга посвящена теоретической части.

Когда научная теория становится более точной, тогда по необходимости она принимает более математическую форму. Это утверждение не следует понимать так, что форма становится более сложной и более трудной для понимания, но скорее так, что основные законы получают ясную формулировку и нужные выводы делаются точными математическими методами.

В основу этой книги легли лекции автора по гидродинамике, которые были прочитаны в Гринвиче для младших подразделений Королевского корпуса инженеров-кораблестроителей. Цель книги — дать полное, ясное и методическое введение к математической теории движения жидкости, которое будет полезно для применения как в гидродинамике, так и в аэродинамике.

Автор решился радикально отклониться от традиций и полностью основать изложение на применении векторного анализа и его естественной модификации для случая двух измерений — теории функций комплексного переменного. Применение этих методов в гидродинамике не является само по себе новостью, но, насколько известно автору, попыток такого исключительно широкого их применения в гидродинамике до сих пор не было. Предварительные математические знания, требуемые от читателя, не выходят за пределы обычного курса математического анализа. Необходимый дополнительный математический аппарат вводится в книге по мере надобности, и тем самым предпринята попытка сделать книгу в этом отношении разумно независимой. Так как мы имеем дело с описанием реальной действительности (хотя и в идеализированной форме), то в книге широко применяются рисунки, число которых превышает 360.

Последовательность расположения глав является результатом попытки дать рациональную классификацию излагаемого материала. Несомненно, эта последовательность не является единственно возможной, но, как нам кажется, она имеет некоторые преимущества. Глава 1 носит вводный характер и посвящена главным образом выводам, основанным на знаменитом уравнении Д. Бернулли, который по праву может считаться отцом гидродинамики.

В главе 2 описываются те свойства векторов, которые важны при изучении движения частиц жидкости и при рассмотрении гидродинамических уравнений. Векторы вводятся здесь независимо от выбора системы координат. Основные свойства векторных операций выводятся операторным методом, который в изложенной здесь форме легко применяется и непосредственно приводит к теоремам Стокса, Гаусса и Грина. Так как эта книга посвящена гидродинамике, а не векторам, то теория последних излагается кратко. С другой стороны, при изложении этой теории имелось в виду помочь читателям, незнакомым с действиями над векторами; читателю рекомендуется полностью и детально изучить содержание этой главы, что необходимо в силу большого числа ссылок на нее. Этот труд хорошо вознаграждается при стремлении понять физическую сторону рассматриваемых явлений, которая особенно неясна при использовании специальных систем координат. В главе 3 общие свойства движения непрерывной жидкой среды, динамические уравнения, давление, энергия и вихри изучаются в свете векторных формулировок, преимущество которых вполне очевидно.

В главе 4 описываются те существенные свойства двумерного движения, которые можно рассматривать, не применяя комплексного переменного. Содержание главы 5 отклоняется от темы книги — в ней вводится комплексное переменное, определяемое как векторный оператор, и доказываются некоторые теоремы, применяемые впоследствии. В частности, здесь рассматриваются свойства конформного отображения с некоторыми подробностями ввиду их существенного значения для дальнейшего изложения.

Главы 6—14 образуют законченное целое; в них делается попытка дать подробное описание двумерного движения с единой точки зрения функций комплексного переменного; при этом широко применяется конформное отображение, теорема Чаплыгина — Блазиуса и ее обобщения. В главе 6 исследуются потенциальные течения; в главе 7 рассматривается простое крыло Жуковского, глава 8 посвящена источникам и стокам. В главе 9 подробно рассматривается движение цилиндра и дается обобщение теоремы Кутта — Жуковского, охватывающее случай ускоренного движения (п. 9.53). Глава 10 содержит изложение теоремы Шварца — Кристоффеля о конформном отображении и ее некоторые непосредственные приложения; в главах 11, 12 даются дальнейшие приложения с целью изучения прерывных течений с отрывом струй и образованием каверн в потоке за цилиндром, сюда включено также описание изящного метода Леви-Чивита. Глава 13 посвящена рассмотрению прямолинейных вихрей, вихревой дорожки Кармана и сопротивлению, вызванному вихревым следом за телом. В главе 14 рассматривается двумерное волновое движение жидкости.

В главе 15 вводится функция тока Стокса и дается приложение конформного отображения к трехмерным задачам с осевой симметрией. Движение сфер и эллипсоидов в жидкости рассматривается в главе 16. В главе 17 частное дифференцирование по вектору (п. 2.71) применяется для получения уравнений Кирхгофа в векторной форме; таким образом шесть уравнений заменяются двумя. По-видимому, этот метод является новым и удобным при исследовании вопросов устойчивости.

В главе 18 рассматривается общее вихревое движение с частным приложением к крылу конечного размаха. Глава 19 содержит описание приложения векторного метода к течению вязкой жидкости и краткое изложение теории пограничного слоя. Интересно отметить, как просто могут быть получены компоненты напряжений в вязкой жидкости в произвольной системе координат с помощью векторного метода (п. 19.41).

Глава 20 служит введением в теорию течения сжимаемой жидкости при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях. Источник в сжимаемой жидкости рассмотрен в п. 8.90, а вихрь — в п. 13.80.

В книге имеется всего 569 примеров, приведенных в конце каждой главы. Некоторые из примеров очень легки, другие весьма трудны и могут рассматриваться как дополнения к тексту.

Формулируя теорему, я по мере возможности связывал с ней имя ее автора, как достаточное указание на ее происхождение, но не следует думать, что приводимая формулировка теоремы совпадает с той, которая была дана первоначально. Например, Гаусс мог бы рассматривать свою теорему в п. 2.60 как завуалированную с помощью аллегории и иллюстрированную символами. Библиографические ссылки были сделаны попутно там, где они казались полезными и уместными, но не было предпринято попытки их систематизировать.

Хороший прием, оказанный этой работе, поощрил меня к ее усовершенствованию. Помимо значительных изменений в расположении материала и новых методов изложения, это четвертое издание отличается от третьего несколькими важными добавлениями; даны формулы Племеля для решения некоторых задач (п. 5.592); систематически изложена теория движения тяжелой жидкости со свободной поверхностью, включая соответствующий новый метод, впервые здесь публикуемый (пп. 11.60—11.64); дано изложение точной теории поверхностных волн постоянной формы (п. 14.84) и так называемой «точной линеаризированной теории», вытекающей из предыдущей; описаны некоторые теоремы сравнения, включая теорему сравнения Серрина при наложении течений. Эти теоремы имеют важные приложения и заслуживают того, чтобы их извлечь из журналов, где они были первоначально опубликованы.

США, Висконсин,
май 1959 г.

Л. М. Милн-Томсон

Глава 1

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

1.00. Вводные замечания. Гидродинамика занимается изучением движения жидкостей.

Все вещества [1]) испытывают *деформацию* под действием сил; деформация называется *упругой*, если она исчезает после устранения силы; деформация называется *пластической*, если она сохраняется после удаления силы; *течением* называется такая деформация, которая непрерывно беспредельно увеличивается под действием *сколь угодно малых* сил.

Жидкость является веществом, которое течет.

Жидкости делятся на две категории, а именно на газы и жидкости.

Газ заполняет любое замкнутое пространство, в которое он имеет доступ, и поэтому он классифицируется как весьма *сжимаемая жидкость*.

Жидкость при постоянной температуре и давлении имеет определенный объем; если жидкость поместить в открытый сосуд, то под действием силы тяжести она будет иметь форму нижней части сосуда и будет сверху ограничена горизонтальной свободной поверхностью. Все известные жидкости в какой-то незначительной степени сжимаемы. Однако для многих целей достаточно рассматривать жидкости как *несжимаемые*.

В данной книге мы главным образом будем исследовать поведение жидкостей, считая их несжимаемыми, и термин «жидкость» будем использовать в этом смысле. Но следует отметить, что при скоростях движения, значительно меньших по сравнению со скоростью звука, эффектом сжимаемости в атмосфере можно пренебречь, и во многих экспериментах, проводимых в воздушных трубах, воздух рассматривается как жидкость в вышеупомянутом смысле. В этом случае удобно применять термин *несжимаемый воздух*.

Реальные жидкости (и газы), а также и твердые тела обладают *вязкостью*, возникающей от внутреннего трения в веществе. Наше определение жидкости отличает вязкую жидкость, такую, как патока или деготь, от пластического твердого тела, такого, как замазка или глина. Действительно, жидкости первого вида не могут оказывать сопротивление какому-либо напряжению сдвига, как бы ни было оно мало, в то время как в последнем случае, чтобы вызвать деформацию, требуется напряжение определенной величины. Деготь — пример очень вязкой жидкости; вода — пример жидкости с небольшой вязкостью. Более точное определение вязкости будет дано позднее. Для точной математической трактовки предмета мы пока будем поступать так, как в других разделах механики, и делать упрощающие предположения, вводя определение идеальной субстанции, известной как *невязкая*, или *идеальная*, жидкость.

Определение. Невязкой жидкостью называется непрерывная жидкая субстанция, в которой не может возникнуть никакого *сколь угодно малого* касательного напряжения.

Непрерывность постулируется для того, чтобы избежать трудностей, связанных с представлением о жидкости как о зернистой структуре, состоящей

[1]) Предполагается, что все рассматриваемые вещества непрерывны и действующие силы недостаточно велики, чтобы вызвать разрыв. Таким образом, куча песка исключается из рассмотрения, а отдельные зерна не исключаются.

из отдельных молекул. Как будет показано позже, отсутствие каких-либо касательных напряжений означает, что давление в каждой точке жидкости одинаково для всех направлений в этой точке.

Однако отсутствие касательного напряжения в жидкости по обе стороны какой-либо малой поверхности, мысленно проведенной в жидкости, означает полное отсутствие внутреннего трения, так что в этом случае не может быть никакого рассеивания энергии. Далее, если твердое тело движется в жидкости или жидкость обтекает твердое тело, то предполагается, что твердая поверхность не может оказывать никакого тангенциального действия на жидкость, так что жидкость свободно обтекает границы тела и не происходит никакого рассеивания энергии из-за трения. Это свойство идеальной жидкости особенно отличает ее от реальной, так как эксперимент показывает, что реальная жидкость прилипает к поверхности твердого тела, погруженного в нее.

Отличие в поведении реальной и идеальной жидкостей хорошо иллюстрируется на примере прямого установившегося течения внутри горизонтальной

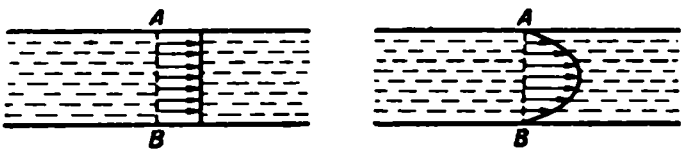


Рис. 1.

трубки. Если изобразить на рисунке векторы, характеризующие скорость в точках линии AB диаметра трубки (рис. 1), то для невязкой жидкости их концы будут лежать на другом диаметре, в то время как для вязкой жидкости их концы будут лежать на параболе, проходящей через точки A и B. Можно думать, что исследование поведения идеальной жидкости поможет изучить поведение реальной жидкости. Как мы вскоре увидим, в большинстве важных случаев теория еще не может объяснить не только количественно, но и качественно движение реальной жидкости.

1.01. Размерности физических величин. Физика имеет дело с измеримыми свойствами физических величин. Некоторые из этих величин, например длина, масса, время и температура, рассматриваются как основные, так как они не зависят друг от друга. Другие величины, такие, как скорость, ускорение, сила, теплопроводность, давление, энергия, рассматриваются как производные величины, так как в конечном счете они определяются через основные величины. Математическая физика занимается представлением физических величин посредством чисел и связанными с этим вопросами. Значения физических величин имеют характер отношений, получаемых путем сравнения измеряемой величины с соответствующей стандартной величиной, произвольно выбранной в качестве единицы, так что число, выражающее результат измерения, зависит от выбора единицы.

Рассмотрим *динамическую систему*, т. е. систему, в которой производные величины зависят только от длины, массы и времени; заменим основные единицы, скажем фут, фунт, секунду, на милю, тонну, час. Пусть l_1, m_1, t_1 и l_2, m_2, t_2 являются мерами длины, массы и времени соответственно в двух системах единиц. Тогда можно записать равенства

$$l_1 = \frac{l_1}{l_2} \times l_2 = Ll_2, \quad m_1 = Mm_2, \quad t_1 = Tt_2, \tag{1}$$

где L, M, T — числа, не зависящие от частных значений измеряемых величин: длины, массы или времени, но зависящие только от выбора двух систем единиц.

Таким образом, в этом случае $L = 5280$, $M = 2240$, $T = 3600$. Эти числа L, M, T мы назовем соответствующими *коэффициентами* длины, массы и времени для двух систем единиц в том смысле, что результаты измерения этих величин во второй системе переводятся в соответствующие результаты измерения в первой системе посредством умножения на числа L, M, T.

Коэффициенты размерностей V, A, F производных величин, скорости v, ускорения a и силы f легко получаются из определения этих величин и записываются в виде

$$V = \frac{L}{T}, \quad A = \frac{V}{T}, \quad F = MA,$$

так что в конечном счете коэффициент размерности силы задается формулой $F = ML/T^2$.

В общем случае если n_1, n_2 являются двумя результатами измерений одной и той же физической величины n в двух системах единиц, то мы приходим к следующему коэффициенту размерности:

$$\frac{n_1}{n_2} = N = L^x M^y T^z. \tag{2}$$

Условно будем считать, что данная величина имеет *размерность* $L^x M^y T^z$. Если $x = y = z = 0$, тогда $n_1 = n_2$, так что величина, о которой идет речь, не зависит от выбора единиц, как, например, величина, равная отношению массы машин к массе корабля. В таком случае мы говорим, что величина является безразмерной и представляется отвлеченным числом, значение которого не зависит от выбора единиц измерения.

Рассмотрим теперь некоторое соотношение

$$a = bc \tag{3}$$

между значениями a, b, c физических величин в динамической системе, т. е. соотношение, которое не изменяется от выбора системы единиц и которое является вполне закономерным для рассматриваемых величин, измеренных в одной частной системе единиц. Предположим, что величины a, b, c имеют размерности (p, q, r), (s, t, u) и (x, y, z) соответственно, и тогда можно записать равенства

$$a_1 = a_2 L^p M^q T^r, \qquad b_1 = b_2 L^s M^t T^u, \qquad c_1 = c_2 L^x M^y T^z. \tag{4}$$

Теперь соотношение (3) принимает вид $a_1 = b_1 c_1$; подставив сюда величины из равенств (4), получим равенство

$$a_2 L^p M^q T^r = b_2 L^s M^t T^u c_2 L^x M^y T^z.$$

Так как соотношение (3) не зависит от выбора единиц, то $a_2 = b_2 c_2$, откуда следует соотношение

$$L^p M^q T^r = L^{s+x} M^{t+y} T^{u+z} \text{ или } p = s + x, \; q = t + y, \; r = u + z.$$

Иными словами, каждый коэффициент размерности основных величин должен входить с одинаковым показателем степени с каждой стороны соотношения (3), т. е. обе части формулы (3) должны быть одинаковой физической размерности.

В системах величин, содержащих как длину, массу, время, так и температуру в качестве основных величин (*термодинамические системы*), должен быть введен коэффициент размерности температуры (скажем, D).

1.10. Скорость. Так как рассматриваемая жидкость непрерывна, то мы можем ввести следующее определение: *жидкая частица* состоит из жидкости, заключенной в бесконечно малом объеме, т. е. в объеме, который можно

считать настолько малым, что в особых целях его линейными размерами можно пренебречь. Тогда мы можем рассматривать жидкую частицу как геометрическую точку, для того чтобы ввести понятие скорости и ускорения частицы.

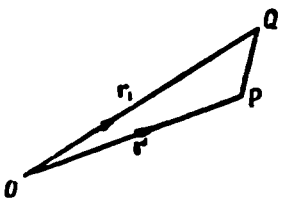


Рис. 2а.

Рассмотрим частицу, которая в момент времени t находится в точке P, определяемой вектором (рис. 2а)[1]):

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}.$$

В момент времени t_1 эта частица переместится в точку Q, определяемую вектором

$$\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OQ}.$$

Тогда скорость частицы в точке P определяется вектором[2])

$$\mathbf{q} = \lim_{t_1 \to t} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}}{t_1 - t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Таким образом, скорость $\mathbf{q}$ является функцией вектора $\mathbf{r}$ и времени t, а именно

$$\mathbf{q} = f(\mathbf{r}, t).$$

Если вид функции f известен, то нам известно и движение жидкости. Чтобы наглядно представить вектор $\mathbf{q}$, проведем через точки пространства небольшие отрезки, имеющие направление этого вектора, как показано на рис. 2б.


Рис. 2б.

Для того чтобы получить физическое представление о поле скоростей, определенных вектором $\mathbf{q}$, предположим, что в жидкости расположено большое (но не бесконечно большое) число светящихся точек, движущихся вместе с жидкостью.

Фотография жидкости, снятая за короткий промежуток времени, показывает, что следы освещенных точек изображаются в виде небольших черточек, длина каждой из которых пропорциональна расстоянию, проходимому точкой за время экспозиции, и поэтому пропорциональна ее скорости. Действительно, такие фотографии являются одним из способов наглядного изображения действительного движения жидкости[3]).

При помощи фотографий в реальной жидкости можно обнаружить некоторую закономерность поля скоростей, которая выражается в том, что черточки на фотографии образуют части правильных кривых. Тогда такое движение представляет собой движение вдоль *линий тока*. С другой стороны, такие черточки на фотографиях могут быть нерегулярными, пересекающими друг друга, и тогда движение жидкости называется *турбулентным*. Предполагается, что движение нашей идеальной невязкой жидкости всегда является движением первого вида. Точное математическое описание турбулентного движения до настоящего времени не получено.

1.11. Линии тока и траектории частиц. *Линией тока* называется линия, проведенная в жидкости таким образом, что касательная к ней в каждой точке совпадает с направлением скорости жидкости в этой точке.

---

[1]) Сведения о векторах подробно излагаются в гл. 2.

[2]) Символ $\lim\limits_{t_1 \to t}$ следует читать как «предел при t_1, стремящемся к t». Это обычный метод определения производных, существование которых мы выводим из физических соображений. Символ $\to$ означает «стремление к ...».

[3]) См. фото 1—12 в начале книги.

Если скорость жидкости в данной точке зависит не только от координаты точки, но также от времени, то линии тока будут изменяться при переходе от одного момента времени к другому. Таким образом, фотографии, сделанные в различные моменты времени, будут изображать различные системы линий тока. Совокупность всех линий тока в данный момент времени составляет *картину течения* в этот момент.

Если скорость в каждой точке не зависит от времени, то картина течения будет одинакова в каждый момент времени и такое движение называется *установившимся*. В связи с этим полезно рассмотреть так называемое *относительно установившееся* движение. Такое движение возникает в том случае, когда его можно рассматривать как результат наложения постоянной скорости на всю систему, включая наблюдателя. Таким образом, если корабль движется по прямому курсу с постоянной скоростью по невозмущенному морю, то наблюдателю, находящемуся на корабле, поток жидкости, обтекающий корабль, кажется установившимся и он действительно может быть сделан таким при помощи наложения скорости, равной скорости корабля с противоположным знаком, на всю систему, состоящую из корабля и моря.

Рассмотрим движение отдельной частицы жидкости; кривая, которую эта частица описывает во время движения, называется *траекторией*. Направление движения частицы обязательно должно быть касательным к траектории, так что траектория касается линии тока, проходящей через мгновенное положение частицы, когда она описывает траекторию.

Таким образом, линии тока показывают, как каждая частица движется в данный момент времени.

Траектории показывают, как данная частица движется в каждый момент времени.

Если движение установившееся, то траектории совпадают с линиями тока.

1.12. Трубки тока и струйки тока. Если мы проведем линию тока через каждую точку замкнутой кривой, то получим *трубку* тока.

Струйкой тока, или элементарной трубкой тока, называется трубка тока, поперечное сечение которой является кривой бесконечно малого размера.

Если движение жидкости зависит от времени, то конфигурация трубок тока и струек тока изменяется от момента к моменту; однако наиболее интересные приложения этих понятий связаны с установившимися движениями жидкости, которые мы сейчас будем рассматривать.

В установившемся движении жидкости трубка тока ведет себя подобно действительной трубке, через которую течет жидкость. Это связано с тем, что не может существовать потока жидкости сквозь стенки трубки тока, так как, по определению, поток всегда касается стенок трубки тока. Кроме того, эти стенки имеют фиксированное положение в пространстве, так как движение установившееся и, следовательно, движение жидкости внутри трубки тока не изменится, если мы заменим стенки твердой поверхностью.

Рассмотрим струйку тока жидкости в установившемся движении. Мы можем считать площадь поперечного сечения струйки настолько малой, что скорость ее будет одинакова в каждой точке сечения, проведенного перпендикулярно направлению скорости.

Пусть теперь q_1 и q_2 — скорости потока в точках, где площади поперечных сечений равны σ_1 и σ_2 (рис. 3). Поскольку жидкость несжимаема, то объем жидкости, вытекающий через одно сечение за данный промежуток времени, должен быть равен объему жидкости, втекающему через другое сечение за то же время. Таким образом, можно записать равенство

$$q_1\sigma_1 = q_2\sigma_2.$$

Это уравнение представляет собой простейший случай уравнения сохранения массы, или *уравнения неразрывности*, согласно которому в общем случае движения жидкости количество массы, втекающей в данный объем, должно компенсироваться количеством массы, вытекающей из этого объема. Вышеуказанный результат можно выразить следующей теоремой.

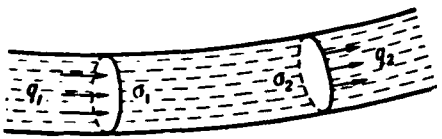


Рис. 3.

В установившемся движении жидкости произведение скорости на площадь поперечного сечения постоянно вдоль жидкой струйки тока.

Это следует из того, что нить тока расширяется в местах, где скорость жидкости уменьшается, и сужается в местах, где скорость жидкости увеличивается.

Другое важное следствие состоит в том, что струйка тока не может оканчиваться внутри жидкости, если скорость не равна бесконечности в соответствующей точке. Если не рассматривать этот случай, то отсюда следует, что вообще струйки тока либо замкнуты, либо оканчиваются на границе жидкости. То же самое справедливо для линии тока, так как поперечное сечение струйки тока можно считать сколь угодно малым.

1.20. Плотность. Если обозначим через M массу жидкости в замкнутом объеме V, то мы можем написать равенство

$$M = V\varrho_1, \tag{1}$$

и тогда величина ϱ_1 является средней плотностью жидкости внутри объема в данное время. В гипотетической непрерывно распределенной среде мы можем определить плотность ϱ как предел величины ϱ_1 при $V \to 0$.

В реальной жидкости, состоящей из большого числа отдельных молекул, мы не можем осуществить предельный переход $V \to 0$, так как на некотором этапе в объеме V может не оказаться ни одной молекулы. Поэтому мы будем определять плотность жидкости согласно формуле (1), понимая, что размеры объема V должны быть очень малыми, но такими, чтобы объем V еще содержал большое число молекул. Так, например, в воздухе при обычной температуре приходится около 3×10^{19} молекул на кубический сантиметр. Тогда сфера радиуса 0,001 *см* содержит около 10^{11} молекул, и, несмотря на малость объема сферы в гидродинамическом смысле, это число молекул достаточно велико для целей измерения средней плотности.

1.30. Давление. Рассмотрим элементарную площадку $d\sigma$, центр которой P находится в жидкости, и проведем нормаль PN с одной стороны площадки, которую назовем положительной стороной (рис. 4). Другую сторону будем называть отрицательной.

Допустим, что взаимодействие частиц жидкости с обеих сторон от площадки в данный момент времени можно представить при помощи двух равных, но противоположных по направлению сил $p\,d\sigma$, приложенных к точке P; при этом каждая сила является давлением, а не растяжением, т. е. жидкость с положительной стороны давит на жидкость с отрицательной стороны с силой $pd\sigma$.

Эксперимент показывает, что в покоящейся жидкости эти силы действуют вдоль нормали; в реальной движущейся жидкости они составляют угол ε с нормалью (аналогичный углу трения). Если вязкость жидкости мала, как это имеет место в случае воздуха и воды, то угол ε мал. В невязкой жидкости, в которой не возникают касательные напряжения, $\varepsilon = 0$, и в этом случае p называется *давлением* в точке P.

В вышеприведенном рассуждении не было показано, что давление p не зависит от ориентации элемента $d\sigma$, используемого при определении p. Справедливость этого утверждения доказывается в следующей теореме.

Теорема. *Давление в любой точке в невязкой жидкости не зависит от направления.*

Доказательство. Пусть PQ — две соседние точки жидкости. Рассмотрим жидкий цилиндр, образующие которого параллельны отрезку PQ и который ограничен поперечным сечением $d\sigma_1$ и наклонным сечением $d\sigma_2$, причем центры этих сечений находятся соответственно в точках P и Q (рис. 5). Пусть давления в точках P и Q, определяемые в сечениях $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$, будут p_1 и p_2 и пусть нормаль в точке Q образует угол θ с отрезком PQ. Объем жидкости в рассматриваемом цилиндре равен $l\,d\sigma_1$, где l — бесконечно малая величина. Пусть F является компонентой внешней силы, отнесенной к единице массы жидкости, в направлении PQ, и f — ускорение цилиндра в направлении PQ. Тогда если через ϱ обозначить плотность, то на основании второго закона движения можно записать уравнение

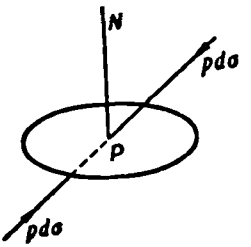


Рис. 4.

$$p_1\,d\sigma_1 - p_2\,d\sigma_2\cos\theta + F\varrho l\,d\sigma_1 = f\varrho l\,d\sigma_1.$$

Заметим теперь, что $d\sigma_2\cos\theta = d\sigma_1$, поэтому, разделив приведенное уравнение на $d\sigma_1$, получим уравнение

$$p_1 - p_2 = l\varrho\,(f - F).$$

Пусть точка Q приближается к точке P, тогда отрезок l стремится к нулю и поэтому разность $p_1 - p_2$ также стремится к нулю. Таким образом, если точка Q совпадает с точкой P, то получаем, что $p_1 = p_2$. Так как направление нормали к сечению в точке Q совершенно произвольно, то мы заключаем, что давление в точке P одинаково при всех ориентациях определяющего элемента площади.

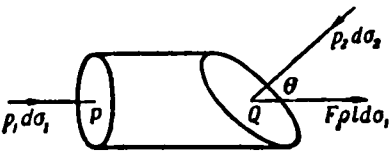


Рис. 5.

Давление является скалярной величиной, т. е. не зависит от направления. Размерность давления выражается через коэффициенты размерности (см. п. 1.01) M, L, T массы, длины и времени в следующем виде: $ML^{-1}T^{-2}$.

Воздействие жидкости на площадь $d\sigma$, обусловленное давлением, является силой, т. е. это векторная величина, для полного определения которой требуется указать как ее направление, так и величину.

Давление в движущейся жидкости представляет собой функцию времени и координат точки, в которой оно измеряется. Если движение установившееся, то давление может изменяться от точки к точке, но в данной точке оно не зависит от времени.

Следует отметить, что давление p — существенно положительная величина.

1.40. Теорема Бернулли (специальная форма). *В установившемся движении жидкости величина*

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}q^2 + gh$$

имеет постоянное значение в каждой точке одной и той же линии тока. Здесь p, ϱ, q — соответственно давление, плотность, скорость; g — ускорение

силы тяжести и h — высота рассматриваемой точки над фиксированной горизонтальной плоскостью.

Доказательство. Рассмотрим струйку тока, ограниченную сечениями AB и CD с площадями σ_1 и σ_2, и пусть p_1, q_1, h_1 — давление, скорость и высота в сечении AB, в то время как p_2, q_2, h_2 — соответствующие величины в сечении CD (рис. 6). Через короткий промежуток времени δt жидкость, которая находилась в объеме $ABCD$, займет объем $A'B'C'D'$, где

$$AA' = q_1\delta t, \qquad CC' = q_2\delta t.$$

При движении жидкости из первого положения во второе будет совершена работа благодаря давлению на сечения AB и CD. Эта работа расходуется на увеличение кинетической и потенциальной энергий жидкости. Силы давления на стенки трубки не совершают работы, так как они перпендикулярны направлению перемещения жидкости.

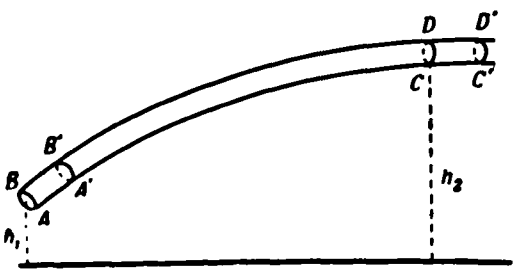


Рис. 6.

Работа силы давления в сечении AB равна $p_1\sigma_1 \times AA'$, а работа сил давления в сечении CD равни $-p_2\sigma_2 \times CC'$. Следовательно, полная работа сил давления равна разности

$$p_1\sigma_1 q_1\delta t - p_2\sigma_2 q_2\delta t.$$

Жидкость получила кинетическую и потенциальную энергии за счет части жидкости, находящейся между сечениями CD и $C'D'$; поэтому полное увеличение количества энергии равно сумме

$$\tfrac{1}{2}\sigma_2 q_2\delta t\varrho \times q_2^2 + \sigma_2 q_2\delta t\varrho \times gh_2.$$

Жидкость потеряла кинетическую и потенциальную энергии за счет части жидкости, заключенной между сечениями AB и $A'B'$, т. е. уменьшение количества энергии равно сумме

$$\tfrac{1}{2}\sigma_1 q_1\delta t\varrho \times q_1^2 + \sigma_1 q_1\delta t\varrho \times gh_1.$$

Приравнивая величину приращения энергии совершенной работе, получаем уравнение

$$p_1\sigma_1 q_1\delta t - p_2\sigma_2 q_2\delta t = \sigma_2 q_2\delta t\varrho\left(\tfrac{1}{2}q_2^2 + gh_2\right) - \sigma_1 q_1\delta t\varrho\left(\tfrac{1}{2}q_1^2 + gh_1\right).$$

Согласно закону сохранения массы (см. п. 1.12), имеем $\sigma_1 q_1 = \sigma_2 q_2$. Подставляя это равенство в предыдущее уравнение, получаем в результате уравнение

$$p_1 - p_2 = \varrho\left(\tfrac{1}{2}q_2^2 + gh_2\right) - \varrho\left(\tfrac{1}{2}q_1^2 + gh_1\right).$$

Поэтому

$$\frac{p_1}{\varrho} + \tfrac{1}{2}q_1^2 + gh_1 = \frac{p_2}{\varrho} + \tfrac{1}{2}q_2^2 + gh_2,$$

так что выражение $(p/\varrho + {}^1/_2 q^2 + gh)$ имеет одинаковую величину в двух произвольных точках элементарной трубки тока, и поэтому оно одинаково во всех точках линии тока, в которую может быть стянута элементарная трубка тока.

1.41. Поток в канале. Рассмотрим установившийся поток воды в канале с горизонтальным дном и прямоугольным поперечным сечением ширины b. Пусть h — высота свободной поверхности над дном; поскольку давление на свободной поверхности должно быть равно атмосферному, мы можем из теоремы Бернулли получить уравнение $u^2+2gh=\text{const}$, где u — скорость потока, параллельная стенкам и постоянная по сечению. Если ширина канала мало изменяется, то также мало изменяется скорость u и, следовательно, после дифференцирования вышеуказанного соотношения получим уравнение

$$u\,du+g\,dh=0.$$

Кроме того, из уравнения неразрывности следует равеиство $ubh=\text{const}$, которое можно представить в виде

$$\frac{du}{u}+\frac{db}{b}+\frac{dh}{h}=0.$$

Исключая du из приведенных соотношений, получаем формулу

$$\frac{dh}{db}=\frac{u^2h}{b(gh-u^2)}.$$

Таким образом, глубина и ширина канала увеличиваются одновременно тогда и только тогда, когда $u^2<gh$, т. е. когда скорость u меньше скорости распространения длинных волн в канале (ср. п. 14.62).

1.42. Замечания о теореме Бернулли. Специальная форма теоремы Бернулли была получена при двух предположениях. Прежде всего мы предполагали, что действует только одна внешняя сила — сила тяжестн. Поле силы тяжести является консервативным; это означает, что работа, совершенная силой тяжести при движении тела от точки P к другой точке Q, не зависит от пути, а зависит только от высоты точки Q по отношению к точке P. Консервативное поле сил приводит к понятию потенциальной энергии, которая измеряется работой, совершенной телом при переходе от одного определенного положения к другому. Для того чтобы потенциальная энергия единицы массы в точке могла иметь определенный смысл, очевидно, необходимо, чтобы работа сил поля не зависела от пути, по которому совершается переход в эту точку.

Гравитационное поле, очевидно, является самым важным из консервативных силовых полей, но оно является не единственно возможным полем такого вида; например, электростатическое поле также консервативно. Если в более общем случае мы обозначим через Ω потенциальную энергию единицы массы в консервативном поле сил, то теорему Бернулли можно сформулировать в более общей форме: выражение

$$\frac{p}{\varrho}+\frac{1}{2}q^2+\Omega$$

имеет постоянное значение вдоль линии тока. Доказательство проводится тем же методом, что и для специального случая теоремы Бернулли.

Второе предположение состояло в том, что жидкость несжимаема и имеет постоянную плотность. В более общем случае для баротропного потока, т. е. когда давление является функцией плотности[1]), теорема

[1]) Это равносильно предположению, что существует уравнение состояния вида $f(p,\ \varrho,\ S)=0$, где энтропия S имеет повсюду одинаковое значение [так называемый гомэнтропический случай (см. п. 20.01)].

принимает следующую форму: выражение

$$\int \frac{dp}{\varrho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega$$

имеет постоянное значение вдоль линии тока. Эта форма теоремы Бернулли доказывается в п. 1.61.

1.43. Константа в теореме Бернулли. Для отдельной линии тока, обозначенной индексом 1, теорема Бернулли утверждает, что выполняется соотношение

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2} q^2 + gh = C_1,$$

где величина C_1 постоянная для этой линии тока. Если мы возьмем вторую линию тока, обозначенную индексом 2, то получим соотношение

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2} q^2 + gh = C_2,$$

где величина C_2 постоянная вдоль второй линии тока.

Мы не доказывали (и в общем случае это неверно), что $C_1 = C_2$. Однако если движение безвихревое (значение этого термина будет объяснено далее в п. 2.41), то константа одинакова для всех линий тока, так что справедливо соотношение

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2} q^2 + gh = C,$$

где C имеет одно и то же значение в каждой точке жидкости. Позже (см. п. 3.64) также будет показано, что этот случай имеет место всякий раз, когда невязкая жидкость приводится в движение обычным механическим способом, как это происходит, например, при внезапном или медленном движении границ, при открывании отверстия в замкнутом сосуде или при движении тела через жидкость.

1.44. Гидродинамическое давление. При установившемся движении жидкости теорема Бернулли позволяет еще больше выяснить характер давления. В покоящейся жидкости в каждой точке имеется гидростатическое давление p_H, и закон Архимеда утверждает, что на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной им жидкости. Частицы жидкости также подчиняются этому закону, и поэтому они находятся в равновесии под действием гидростатического давления p_H и силы тяжести. Отсюда следует, что величина $p_H/\varrho + gh$ является константой во всей жидкости. Если жидкость движется, то подъемная сила еще действует, так что если мы напишем

$$p = p_0 + p_H,$$

то теорема Бернулли дает

$$\frac{p_0}{\varrho} + \frac{1}{2} q^2 + \frac{p_H}{\varrho} + gh = C,$$

и, следовательно,

$$\frac{p_0}{\varrho} + \frac{1}{2} q^2 = C', \tag{1}$$

где $C' = C - (p_H/\varrho + gh)$ — новая константа.

Формула (1) выражает теорему Бернулли для случая отсутствия силы тяжести.

Величину p_0 можно назвать *гидродинамическим давлением*, или давлением, обусловленным движением. В дальнейшем будет установлено, что знание гидродинамического давления позволит вычислить *результирующее* действие жидкости на погруженное тело; вначале мы должны определить только воздействие, обусловленное давлением p_0, и добавить результат действия давления p_H, известного из законов гидростатики. Это очень важный результат, используя который мы можем пренебречь внешней силой тяжести при исследовании многих задач.

Часто считают, что гидродинамические задачи, в которых пренебрегают внешними силами, имеют искусственный и непрактический характер. На самом деле это не так. Пренебрежение внешними силами является только способом избежать ненужные осложнения при исследовании гидродинамических задач. Следовательно, нужно помнить, что если мы пренебрегаем внешними силами, то мы вычисляем действие гидродинамического давления.

Из формулы (1) мы видим, что гидродинамическое давленне больше там, где скорость меньше, а также что наибольшее гидродинамическое давление имеет место в точках с нулевой скоростью.

Однако необходимо отметить, что применение способа гидродинамнческого давления может быть оправдано только в том случае, если границы жидкости неподвижны, так как только при этих условиях гидродинамическое давление постоянно в данной точке. Если жидкость имеет колеблющуюся свободную поверхность, то гидростатическое давление в фиксированной точке будет изменяться и мы должны будем рассматривать полное давление.

В случае сжимаемых жидкостей давление, обусловленное движением, обычно называют *аэродинамическим давлением*.

1.50. Трубка Пито. На рис. 7. показана заостренная изогнутая трубка $ABCD$, имеющая отверстие в точке A и запаянная в точке D; U-образная часть трубки заполнена жидкостью.

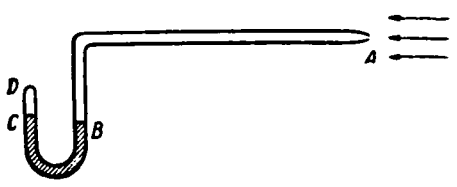


Рис. 7.

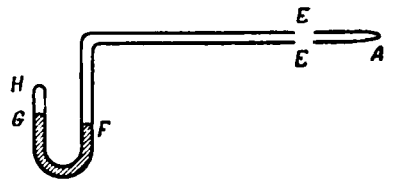


Рис. 8.

Если этот прибор поместить в установившийся поток жидкости и направить открытым концом вверх по течению, то ось горизонтальной части фигуры образует часть линии тока, проходящей через точку A. Следовательно, если p_1 — давление в точке A с внутренней стороны трубки и p — давление впереди A, то, согласно теореме Бернулли, справедливо равенство

$$\frac{p_1}{\varrho} = \frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2} q^2,$$

поскольку жидкость внутри трубки находится в покое. Давление p_1 измеряется разностью уровней ртути в точках B и C, если предположить, что в части трубки CD имеется вакуум. Описанный прибор представляет собой простейшую форму трубки Пито для определения величины $p + \varrho q^2/2$.

На практике часто требуется измерить величину скорости q, а для этого мы должны иметь способ измерения давления p.

Эту величину можно измерить посредством прибора, показанного на рис. 8 и отличающегося от прежнего только тем, что в точке A трубка запаяна, а в точке E, расположенной вблизи от точки A вниз по течению, имеется отверстие. Теперь линии тока идут по стенкам трубки от точки A, и если жидкость в трубке находится в покое и давление непрерывно, то давление вне трубки в окрестности точки E равно давлению внутри трубки в точке E и это давление измеряется разностью уровней ртути в точках G и F. На практике полезно комбинировать обе трубки в один прибор, как показано на рис. 9.

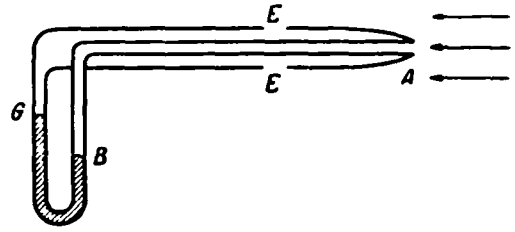


Рис. 9.

В этом приборе разность уровней ртути в точках B и G определяет величину $p_1 - p = \varrho q^2/2$. Вышеприведенное описание только иллюстрирует принцип измерения скоростей при помощи трубки Пито. Действительный прибор нужно очень тщательно сконструировать, чтобы его влияние на измеряемый поток было как можно меньше. При соответствующем конструировании и аккуратном обращении трубкой Пито можно измерять соответствующие величины с точностью до 1% относительно их истинных значений как в случае воздуха, так и в случае воды.

1.60. Работа газа при расширении. Пусть S и S' — поверхности, ограничивающие единицу массы газа до и после малого расширения. Пусть dn — нормальное перемещение элемента dS поверхности S (рис. 10).

Предположим, что давление газа равно p. Тогда работа, совершенная газом, выразится в виде $p\sum\limits_{(s)} dS \cdot dn = p\,dv$, где v — объем, ограниченный поверхностью S; dv — увеличение объема v. Но поскольку рассматриваемая масса газа равна единице, то имеем $v\varrho = 1$.

Следовательно, совершенная газом работа равна $pd(1/\varrho)$, и если в процессе расширения плотность изменяется от значения ϱ до значения ϱ_0, то совершенная работа равна $\int\limits_{\varrho}^{\varrho_0} pd\left(\frac{1}{\varrho}\right)$. При этом мы предполагаем, что давление является функцией только плотности.

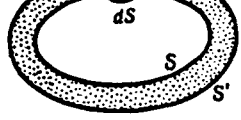


Рис. 10.

Внутренней энергией единицы массы газа будем называть работу, которую единица массы газа для заданного соотношения между p и ϱ может совершить при расширении из его действительного состояния до некоторого начального состояния, характеризуемого величинами p_0 и ϱ_0. Обозначая через E внутреннюю энергию единицы массы газа и интегрируя по частям полученное выше выражение, приходим к соотношению

$$E = \int\limits_{\rho}^{\rho_0} pd\left(\frac{1}{\varrho}\right) = \frac{p_0}{\varrho_0} - \frac{p}{\varrho} - \int\limits_{p}^{p_0} \frac{dp}{\varrho}.$$

Таким образом, получим окончательный вид для внутренней энергии

$$E = \frac{p_0}{\varrho_0} - \frac{p}{\varrho} + \int\limits_{\varrho}^{\varrho_0} \frac{dp}{\varrho}.$$

Итак, внутренняя энергия является одним из видов энергии деформации, аналогичной энергии растянутой упругой нити.

1.61. Теорема Бернулли для сжимаемой жидкости. При выводе теоремы Бернулли в случае сжимаемой жидкости мы используем точно такой же метод, как в случае несжимаемой жидкости, однако в данном случае должна быть учтена внутренняя энергия газа.

Используя рис. 6 и обозначая через ϱ_1 и ϱ_2 плотность в сечениях AB и CD, работу, совершенную давлением, выразим в следующем виде:

$$p_1\sigma_1 q_1 \delta t - p_2\sigma_2 q_2\,\delta t.$$

Эта работа расходуется на приращение кинетической энергии, потенциальной энергии и внутренней энергии. Таким образом, мы получим уравнение

$$p_1\sigma_1 q_1\delta t - p_2\sigma_2 q_2\delta t = \sigma_2 q_2\delta t\varrho_2\left(\tfrac{1}{2}q_2^2 + gh_2\right) - \sigma_1 q_1\delta t\varrho_1\left(\tfrac{1}{2}q_1^2 + gh_1\right) + \\ + E_2\sigma_2 q_2\delta t\varrho_2 - E_1\sigma_1 q_1\delta t\varrho_1,$$

где E_1, E_2 обозначает внутреннюю энергию единицы массы соответственно в сечениях AB и CD.

Так как движение жидкости установившееся, то количество втекающей массы через сечение AB должно равняться количеству массы, вытекающей через сечение CD, и, следовательно, уравнение неразрывности запишется следующим образом:

$$\varrho_1\sigma_1 q_1\delta t = \varrho_2\sigma_2 q_2\delta t.$$

Поэтому, подставляя уравнение неразрывности в предыдущее уравнение, получаем формулу

$$\frac{p_1}{\varrho_1} - \frac{p_2}{\varrho_2} = \tfrac{1}{2}q_2^2 + gh_2 + E_2 - \left(\tfrac{1}{2}q_1^2 + gh_1 + E_1\right).$$

Заменяя в этой формуле значения внутренней энергии, согласно п. 1.60, следующими соотношениями:

$$E_2 = \frac{p_0}{\varrho_0} - \frac{p_2}{\varrho_2} + \int_{p_0}^{p_2}\frac{dp}{\varrho}, \quad E_1 = \frac{p_0}{\varrho_0} - \frac{p_1}{\varrho_1} + \int_{p_0}^{p_1}\frac{dp}{\varrho},$$

мы получаем в результате уравнение Бернулли

$$\int_{p_0}^{p_2}\frac{dp}{\varrho} + \tfrac{1}{2}q_2^2 + gh_2 = \int_{p_0}^{p_1}\frac{dp}{\varrho} + \tfrac{1}{2}q_1^2 + gh_1. \tag{1}$$

Если учесть выражение для аэродинамического давления, согласно п. 1.44, теорема Бернулли примет форму

$$\int\frac{dp}{\varrho} + \tfrac{1}{2}q^2 = \text{const вдоль линии тока}, \tag{2}$$

откуда получаем соотношение

$$dp = -\varrho q\,dq. \tag{3}$$

1.62. Применение теоремы Бернулли к адиабатическому расширению. Если газ расширяется адиабатически (т. е. без изменения количества тепла), то давление и плотность связаны соотношением

$$p = \varkappa\varrho^{\nu}, \tag{1}$$

где $\varkappa$ и γ — константы. Для сухого воздуха $\gamma = 1{,}405$. Следовательно,

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho} = \varkappa\gamma \int_{\varrho_0}^{\varrho} \varrho^{\gamma-2}\, d\varrho = \frac{\varkappa\gamma}{\gamma-1}\left[\varrho^{\gamma-1} - \varrho_0^{\gamma-1}\right] = \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p}{\varrho} - \frac{p_0}{\varrho_0}\right).$$

Так как величина p_0/ϱ_0 относится к начальному состоянию, то она является константой и, следовательно, из теоремы Бернулли получим соотношение

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}q^2 + gh = C.$$

Если мы обозначим через p_0 давление торможения, т. е. при скорости, равной нулю[1]), и пренебрежем действием силы тяжести, то получим формулу

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}q^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\varrho_0}, \tag{2}$$

так что

$$q^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\varrho_0}\left(1 - \frac{p\varrho_0}{p_0\varrho}\right). \tag{3}$$

Теперь из формулы (1) следует соотношение

$$\frac{p\varrho_0}{p_0\varrho} = \frac{\varrho^{\gamma-1}}{\varrho_0^{\gamma-1}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Как известно из теории звуковых волн (см. п. 14.87), скорость звука c_0 при давлении p_0 задается формулой

$$c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\varrho_0}.$$

Следовательно, из формулы (2) мы получаем

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - \frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{q}{c_0}\right)^2,$$

и поэтому

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{q}{c_0}\right)^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1 - \frac{\gamma}{2}\left(\frac{q}{c_0}\right)^2 + \frac{\gamma}{8}\left(\frac{q}{c_0}\right)^4 + \ldots =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\frac{\varrho_0 q^2}{p_0} + \frac{\gamma}{8}\left(\frac{q}{c_0}\right)^4 + \ldots.$$

Отношение третьего члена ко второму в этом разложении равно $q^2/4c_0^2$, так что если даже скорость q равна половине скорости звука, то это отношение равно $1/16$. Таким образом, оказывается, что мы можем с хорошим приближением отбросить все члены, начиная с третьего члена, даже если отношение q/c_0 не очень мало. Тогда теорема Бернулли для воздуха примет форму

$$\frac{p}{\varrho_0} + \frac{1}{2}q^2 = \frac{p_0}{\varrho_0},$$

означающую, что воздух можно рассматривать как несжимаемый в очень большом диапазоне скоростей. В частности, для скорости около 500 *км/час* ошибка, сделанная при измерениях скорости с помощью трубки Пито (см. п. 1.50), составит около 2%.

[1]) Не доказано, что в жидкости достигается нулевая скорость. Тем не менее давление p_0 определяется единственным образом с помощью последующего уравнения.

Кроме того, скорость потока в окрестности крыла самолета будет сравнима со скоростью набегающего потока, и поэтому эффект сжимаемости мал для малых значений скоростей набегающего потока. С другой стороны, сжимаемостью нельзя пренебречь вблизи концов лопастей пропеллера.

1.63. Дозвуковой и сверхзвуковой потоки. Если c — скорость звука, а p — давление, то, согласно п. 14.87, $c^2 = \gamma p/\varrho$ и, следовательно, из формулы (2) п. 1.62 получим соотношение

$$\frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2} q^2 = \frac{c_0^2}{\gamma-1}, \qquad (1)$$

показывающее, что величина c имеет максимальное значение c_0 при $q=0$ и что величина q имеет максимальное значение $q_{\max}$ при $c=0$, задаваемое формулой

$$q_{\max}^2 = \frac{2c_0^2}{\gamma-1}. \qquad (2)$$

Скорость q^* будем называть *критической скоростью*, если скорость звука и скорость потока равны, и, следовательно, из соотношения (1) получим формулу

$$q^* = c^* = c_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}. \qquad (3)$$

Отметим еще следующий вид уравнения Бернулли:

$$c^2 = \frac{1}{2}(\gamma-1)(q_{\max}^2 - q^2), \qquad (4)$$

$$\frac{q^2-c^2}{q_{\max}^2} + \frac{c^2}{c^{*2}} = 1. \qquad (5)$$

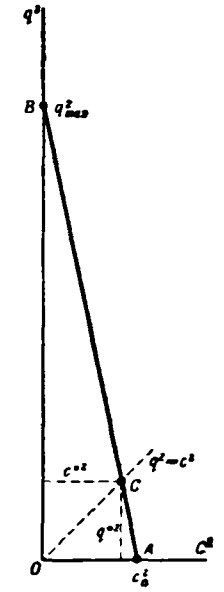


Рис. 11.

График величины q^2 как функции c^2 представляет собой прямую линию AB на рис. 11. Из этого следует, что вдоль линии тока $c \leqslant c_0$, $q \leqslant q_{\max}$. Прямая линия $q^2 - c^2 = 0$ пересекает прямую AB в точке $C(c^{*2}, q^{*2})$, где $q^* = c^*$. Две части AC и BC этой прямой соответствуют двум физически различным режимам. Если ввести *число Маха*

$$M = \frac{q}{c} \qquad (6)$$

в каждой точке отрезка AC, то мы имеем $q < q^* = c^* < c$, так что $M < 1$ при условии, что $q < c$; поток, для которого $M < 1$, называется *дозвуковым*.

В каждой точке отрезка BC мы имеем $q > q^* = c^* > c$, так что $M > 1$, и тогда говорят, что поток *сверхзвуковой*.

Из формулы (1) мы получаем соотношение

$$1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) M^2 = \frac{c_0^2}{c^2} = \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \qquad (7)$$

1.64. Газовый поток в сужающейся трубке. Если ω — площадь малого сечения трубки, то трубка будет сужаться, если величина ω уменьшается, когда мы идем вдоль трубки, т. е. если $d\omega/ds < 0$, где ds — элемент длины трубки. Из уравнения неразрывности $\omega\varrho q = \text{const}$ следует дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds} + \frac{1}{q}\frac{dq}{ds} = -\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{ds}. \qquad (1)$$

Запишем теорему Бернулли для адиабатического закона

$$\frac{1}{2}q^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\varrho}=\text{const}.$$

Отсюда следует уравнение

$$q\frac{dq}{ds}+\gamma\varkappa\varrho^{\gamma-2}\frac{d\varrho}{ds}=0.$$

Пусть $c^2=\gamma p/\varrho$ обозначает местную скорость звука, т. е. скорость в рассматриваемой точке. Тогда

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds}=-\frac{q}{c^2}\frac{dq}{ds}.$$

Подставляя в формулу (1) приведенные уравнения, получаем соотношение

$$q\frac{dq}{ds}=\frac{c^2q^2}{c^2-q^2}\left(-\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{ds}\right)=\frac{M^2c^2}{1-M^2}\left(-\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{ds}\right),$$

и, таким образом, dq/ds положительно, если $M<1$, т. е. если $q<c$.

Следовательно, скорость потока увеличивается по мере уменьшения сечения трубки, если поток дозвуковой; для сверхзвукового потока скорость уменьшается при уменьшении сечения трубки.

1.70. Трубка Вентури. Принцип трубки Вентури иллюстрируется на рис. 12. Прибор используется для измерения параметров течения в трубе. Он состоит из конической части, которая сужается от полного сечения

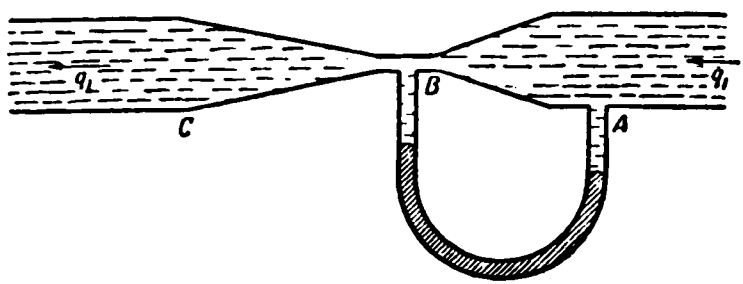


Рис. 12.

трубки в точке A до минимального сечения в точке B, и из постепенно расширяющейся части, переходящей в точке C снова в трубку с полным сечением. Постепенное расширение части BC обеспечивает плавное изменение линий тока.

Манометр, имеющий U-образную форму и содержащий ртуть, соединяется с трубкой через отверстия в точках A и B; разность уровня в манометре измеряет разность давления в точках A и B. Пусть величины p_1, q_1; p_2, q_2 означают давления и скорости соответственно в точках A и B. Тогда из теоремы Бернулли следует соотношение

$$\frac{p_1}{\varrho}+\frac{1}{2}q_1^2=\frac{p_2}{\varrho}+\frac{1}{2}q_2^2.$$

Пусть S_1, S_2 — площади поперечных сечений в точках A и B. Тогда

$$q_1S_1=q_2S_2,$$

так как одинаковый объем жидкости протекает через каждое сечение в данное время. Поэтому для величины q_1 получается следующее выражение:

$$q_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\varrho\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)}},$$

в которое подставляется измеренное значение величин $p_1 - p_2$.

Если h — разность уровней ртути в двух частях манометра и σ — плотность ртути, то последняя формула принимает вид

$$q_1 = \sqrt{\frac{2gh\sigma}{\varrho\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)}} = K\sqrt{h},$$

где K — константа прибора.

1.71. Измерение скорости течения газа трубкой Вентури. Предполагая справедливость адиабатического закона для газа в области от входа в трубку до наименьшего сечения, из теоремы Бернулли и уравнения неразрывности получаем соотношения

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_1}{\varrho_1} + \frac{1}{2}q_1^2 = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_2}{\varrho_2} + \frac{1}{2}q_2^2,$$

$$\varrho_1 q_1 S_1 = \varrho_2 q_2 S_2,$$

откуда легко находим формулу

$$q_1^2 = \frac{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{p_1}{\varrho_1} - \frac{p_2}{\varrho_2}\right)}{\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 \frac{S_1^2}{S_2^2} - 1}.$$

Так как $p_1/p_2 = (\varrho_1/\varrho_2)^\gamma$, то, следовательно,

$$q_1^2 = \frac{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_1}{\varrho_1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}\right]}{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{2}{\gamma}}\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1}.$$

Для использования этой формулы мы должны знать величины p_1, p_2 и ϱ_1. Поэтому прибор должен быть изменен таким образом, чтобы отверстия в точках A и B на рис. 12 соединялись с отдельными манометрами; тем самым измерялись бы сами давления p_1, p_2, а не их разность, как в случае жидкости. Для скоростей, значительно меньших скорости звука, можно использовать обычную формулу и метод, пригодный для жидкости (см. п. 1.62).

1.80. Истечение из отверстия. Если сделать малое отверстие в стенке большого наполненного жидкостью сосуда, то оказывается, что на коротком расстоянии от стенки вытекающая струя жидкости сужается до некоторого минимального поперечного сечения (рис. 13). В самой узкой части вытекающая струя имеет форму цилиндра и все линии тока здесь параллельны между собой. Если σ_1 — площадь отверстия и σ_2 — площадь минимального поперечного сечения струи, то величина $\alpha = \sigma_2 : \sigma_1$ называется *коэффициентом сжатия*. Точное значение *коэффициента сжатия* может

быть строго вычислено только в некоторых специальных случаях, но можно с достаточной убедительностью показать, что $\alpha > 1/2$. То, что $\alpha < 1$, следует из экспериментально установленного факта существования сужения.

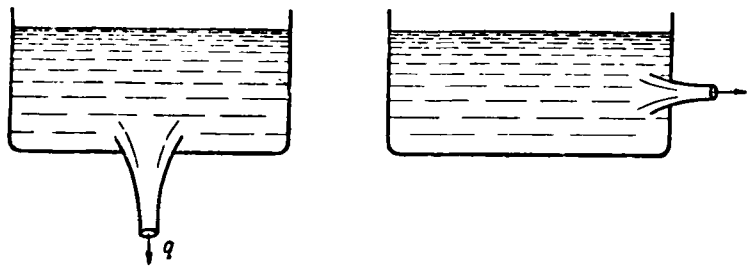


Рис. 13.

1.81. Теорема Торичелли. Пусть на рис. 14 h обозначает глубину самой сжатой части струи по отношению к уровню верхней поверхности жидкости

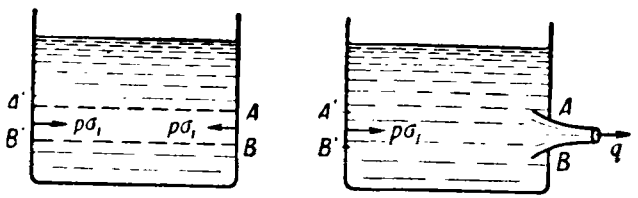


Рис. 14.

в сосуде, наполненном водой, и пусть Π — атмосферное давление. Если q — скорость истечения в самой сжатой части, то теорема Бернулли дает соотношение

$$\frac{\Pi}{\varrho} + gh = \frac{\Pi}{\varrho} + \frac{1}{2} q^2,$$

так как скорость на свободной поверхности воды в сосуде практически равна нулю, а давление на свободной поверхности и на границах свободной струи равно Π.

Поэтому

$$q^2 = 2gh.$$

Это соотношение выражает теорему Торичелли для скорости истечения.

Если σ_2 — площадь поперечного сечения струи в самом сжатом месте, то количество жидкости, вытекающей в единицу времени, равно $\sigma_2 \sqrt{2gh}$.

В большинстве случаев достаточно взять в качестве h глубину отверстия, так как самое сжатое место струи находится вблизи от него. Если σ_1 — площадь отверстия и α — коэффициент сжатия, то количество жидкости, вытекающей за секунду, равно $\alpha\sigma_1 \sqrt{2gh}$.

1.82. Коэффициент сжатия. Пусть в стенке сосуда, наполненного жидкостью, сделано малое отверстие AB и пусть h — глубина отверстия под свободной поверхностью. Пусть Π — атмосферное давление, q — скорость истечения в самой сжатой части струи. Пусть $A'B'$ — проекция площади отверстия на противоположную стенку, при этом обе стенки предполагаются вертикальными.

Если p — гидростатическое давление в отверстии AB, когда отверстие закрыто, то воздействие отверстий AB и $A'B'$ на жидкость будет состоять из двух равных по величине, но противоположных по направлению сил $p\sigma_1$. Когда отверстие открыто, то сила $p\sigma_1$ в отверстии AB исчезнет и заменится силой $\Pi\sigma_1$. Если мы в первом приближении предположим, что гидростатическое давление остается неизменным, кроме давления у отверстия AB,

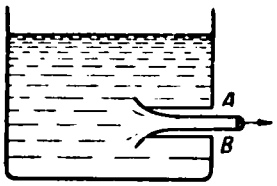


Рис. 15.

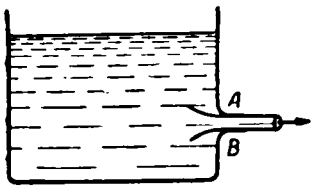


Рис. 16.

то сила, приводящая в движение жидкость, равна $(p-\Pi)\sigma_1$. Величина количества движения вытекающей жидкости равна $\varrho q\sigma_2 q$, где σ_2 — площадь самого сжатого сечения. Таким образом[1]), получим соотношение

$$(p-\Pi)\,\sigma_1=\sigma_2\varrho q^2.$$

С другой стороны, из теоремы Бернулли имеем

$$\frac{p}{\varrho}=\frac{\Pi}{\varrho}+\frac{1}{2}q^2.$$

Следовательно, $\sigma_2=\sigma_1/2$ и коэффициент сжатия равен $^1/_2$.

Теорема Бернулли также показывает, что если отверстие открыто, то давление на стенки в окрестности отверстия AB будет падать ниже гидростатического давления, так что движущая сила действительно больше, чем $p-\Pi$ и, следовательно, вообще $\sigma_2/\sigma_1>{}^1/_2$ (см. п. 3.32).

Однако если мы сделаем маленькое цилиндрическое сопло, *вдающееся внутрь* сосуда, то сделанное в начале предположение будет выполняться почти точно и коэффициент сжатия будет равен $^1/_2$. Это устройство известно как насадок Борда (рис. 15).

С другой стороны, круглый насадок, *выступающий наружу* (рис. 16), приводит к увеличению потока жидкости, так как самая сжатая часть будет иметь место в выходном отверстии, и мы получим

$$p\sigma_1-\Pi\sigma_2=\sigma_2\varrho q^2$$

и, следовательно,

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{1}{2}\,\frac{p-\sigma_2\Pi/\sigma_1}{p-\Pi},$$

что превышает предыдущую величину.

Теорема Торичелли показывает, что количество жидкости, вытекающей за единицу времени, увеличивается с ростом коэффициента сжатия, так что это приспособление увеличивает истечение. Этот факт был использован древними римлянами, когда население могло потреблять столько воды, сколько можно было извлечь за данное время, применяя истечения из отверстий.

1.90. Теорема Эйлера о количестве движения. Рассмотрим трубку тока, ограниченную поперечными сечениями AB и CD соответственно с площа-

[1]) В п. 3.40 будет показано, что если движение установившееся, то поток измеряет скорость изменения количества движения

дями σ_1 и σ_2 в случае установившегося движения жидкости. Пусть q_1 и q_2 — скорости в сечениях AB и CD, тогда теорема Эйлера утверждает, что если пренебречь массовыми силами, то результирующая сила, обусловленная давлением окружающей жидкости на стенки и концы трубки, эквивалентна силам $\rho\sigma_1 q_1^2$ и $\rho\sigma_2 q_2^2$, приложенным к концевым сечениям AB и CD и направленным по внешним нормалям к ним (рис. 17).

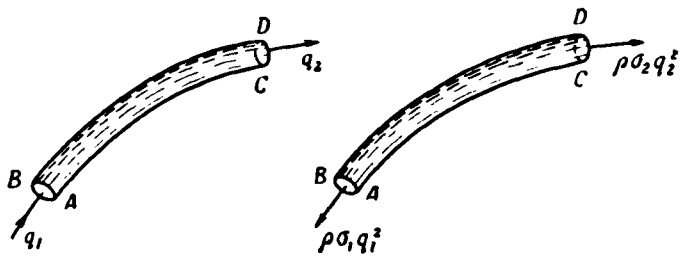


Рис. 17.

Доказательство. Согласно второму закону движения Ньютона, результирующая сила должна вызвать изменение количества двнжения жидкости, занимающей в данный момент времени t часть трубки между сечениями AB и CD, изображенными на рис. 6.

В момент времени $t+\delta t$ эта часть жидкости будет занимать часть трубки между сечениями $A'B'$, $C'D'$. Таким образом, количество движения рассматриваемой жидкости увеличивается на количество движения жидкости, заключенной между сечениями CD и $C'D'$, и уменьшается на соответствующую величину для жидкости между сечениями AB и $A'B'$.

Следовательно, за время δt имеет место увеличение количества движения на величину $\rho\sigma_2 q_2 \delta t \times q_2$ при прохождении через сечение CD и потеря его на величину $\rho\sigma_1 q_1 \delta t \times q_1$ при прохождении через сечение AB. Следовательно, за единицу времени количество движения увеличится на величину $\rho\sigma_2 q_2^2$ в сечении CD и уменьшится на величину $\rho\sigma_1 q_1^2$ в сечении AB. Эти изменения обусловлены только давлениями на стенки и концевые сечения трубки. Следовательно, давления должны быть эквивалентны силам $\rho\sigma_1 q_1^2$ и $\rho\sigma_2 q_2^2$, приложенным в сечениях AB и CD и направленным по *внешним* нормалям к ним.

1.91. Сила, действующая на стенки тонкой трубки. Рассмотрим установившееся движение жидкости в части AB трубки, площадь поперечного сечения которой настолько мала, что жидкость можно рассматривать как часть элементарной трубки тока (рис. 18).



Рис. 18.

Пусть через σ_1, p_1, q_1 обозначены площадь поперечного сечения, давление и скорость в точке A; через σ_2, p_2, q_2 — соответствующие величины в точке B. По теореме Эйлера о количестве движения, полное действие давления на жидкость в трубке AB состоит из нормальных сил $\rho\sigma_1 q_1^2$ в точке A и $\rho\sigma_2 q_2^2$ в точке B, причем обе силы направлены по внешним нормалям. Однако силы, обусловленные давлениями в точках A и B, равны $p_1\sigma_1$ и $p_2\sigma_2$, и обе силы направлены по внутренним нормалям.

Следовательно, силы, действующие на жидкость со стороны стенок вместе с нормальными, направленными внутрь силами $p_1\sigma_1$, $p_2\sigma_2$, эквивалентны нормальным, направленным наружу силам $\varrho\sigma_1 q_1^2$, $\varrho\sigma_2 q_2^2$.

Таким образом, силы, действующие со стороны стенок на жидкость, эквивалентны нормальным, направленным наружу силам $\sigma_1 (p_1 + \varrho q_1^2)$ в точке A и $\sigma_2 (p_2 + \varrho q_2^2)$ в точке B. По принципу действия и противодействия силы, действующие со стороны жидкости на стенки трубки, получаются заменой последних на противоположные и поэтому эквивалентны вышеупомянутым нормальным силам, но направленным внутрь.

1.92. Парадокс Даламбера. Рассмотрим длинную прямую трубку, по которой течет невязкая жидкость с постоянной скоростью U. Если в середине трубки мы поместим препятствие A (рис. 19), поток вблизи препятствия изме-

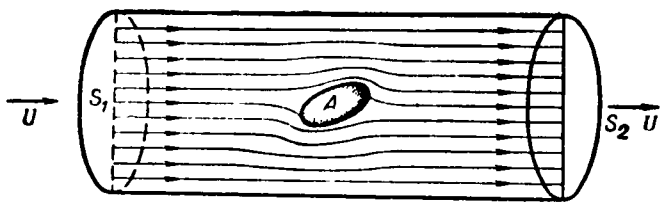


Рис. 19.

нится, но на большом расстоянии как вверх, так и вниз по течению поток останется невозмущенным. Чтобы препятствие находилось в покое, в общем случае к нему необходимо приложить силу и пару сил. Обозначим через F компоненту силы в направлении, параллельном течению. Парадокс Даламбера состоит в том, что в указанных условиях компонента силы F в направлении потока равна нулю. Докажем это.

При доказательстве мы будем пренебрегать массовыми силами, такими, как сила тяжести. Тогда F является результирующей сил давления, действующих на границу препятствия A.

Рассмотрим два поперечных сечения S_1 и S_2 на большом расстоянии от A вверх и вниз по потоку. Жидкость, заключенная между этими сечениями, может быть разделена на элементарные трубки тока, к каждой из которых применима теорема Эйлера о количестве движения. Наружные элементарные трубки тока ограничиваются стенками трубки, и на них компоненты давления перпендикулярны течению. На струйки тока, находящиеся в соприкосновении с препятствием A, действует твердое тело с силой, составляющая которой в направлении потока равна $-F$. По теореме Эйлера, результирующая всех давлений на жидкость равняется сумме

$$-\varrho S_1 U^2 + \varrho S_2 U^2,$$

которая обращается в нуль, так как $S_1 = S_2$.

По теореме Бернулли, давление p_1 в сечении S_1 равно давлению p_2 в сечении S_2. Тогда из уравнения

$$p_1 S_1 - F - p_2 S_2 = 0$$

получим требуемое равенство

$$F = 0.$$

Если предположить, что стенки трубки удалены, то это будет соответствовать случаю тела, погруженного в неограниченный во всех направлениях поток и, согласно вышеуказанному доказательству, по-прежнему $F = 0$.

Наконец, если мы наложим на всю систему постоянную скорость U в направлении, противоположном направлению течения, то жидкость на большом

расстоянии от препятствия будет находиться в состоянии покоя и препятствие A будет двигаться с постоянной скоростью U. Наложение постоянной скорости не изменит динамических условий. Следовательно, сопротивление тела, движущегося с постоянной скоростью в неограниченной невязкой покоящейся жидкости, будет равно нулю.

1.93. Поток за препятствием. Рассмотрим сферу (рис. 20), обтекаемую потоком, равномерным на большом расстоянии от сферы, и пренебрежем внешними массовыми силами. Тогда линии тока должны быть симметричными относительно диаметра сферы AC, совпадающего с направлением течения.

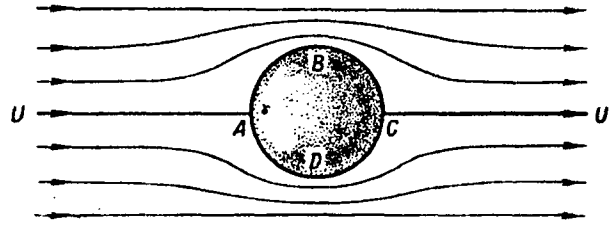


Рис. 20.

Центральная линия тока, идущая со стороны набегания потока, встречает препятствие в точке A, где жидкость покоится. Точка A, в которой скорость течения равна нулю, обычно называется *критической точкой.*

Центральная линия тока в точке A раздваивается на части ABC и ADC, соединяющиеся в точке C. Эта точка является второй критической точкой, в которой скорость равна нулю; далее рассматриваемая линия тока сходит с препятствия и удаляется в бесконечность [1]). Линии тока, примыкающие к центральной, искривлены вблизи сферы и постепенно распрямляются при удалении от нее. Если мы будем удаляться от сферы, то линии тока будут все менее и менее искривленными, так что на большом расстоянии в поперечном направлении от AC их кривизна становится пренебрежимо малой. Фотография, снятая в *начальной* стадии движения, согласуется с рассмотренным качественным описанием (см. фото 1).

В реальной жидкости, такой, как вода, обязательно имеет место внутреннее трение. Эксперимент показывает, что жидкость, непосредственно прилегающая к препятствию, примыкает к поверхности препятствия. В соответствии с этим Прандтль ввел гипотезу пограничного слоя, состоящую в том, что непосредственно к сфере прилегает тонкий слой жидкости, в котором касательная составляющая скорости быстро увеличивается от нуля до ее значения, равного скорости в основном потоке вне сферы; при этом давление изменяется непрерывно в направлении внешней нормали. Если скорость потока увеличивается, то пограничный слой остается тонким в точке A и на передней стороне сферы, но на противоположной стороне сферы толщина слоя увеличивается, как это иллюстрируется рис. 21 (см. также фото 3).

Внутри пограничного слоя возникает обратное течение с вихрями, в то время как вне пограничного слоя существует описанное выше теоретическое движение. Пограничный слой, таким образом, отделяется от сферы в окрестности точки B.

Если скорость потока продолжает увеличиваться, то точка отрыва пограничного слоя передвигается вперед по направлению к критической точке

---

[1]) Мы будем применять термин «бесконечность» для обозначения области, точки которой удалены от препятствия на такое расстояние, где возмущающее действие препятствия на поток пренебрежимо мало.

и пограничный слой утолщается, переходя в вихревую дорожку, в которой энергия непрерывно уносится вихрями вниз по течению (рис. 22).

При движении сферы в неподвижной жидкости картина относительного движения будет такая же, как описано выше, и сфера будет испытывать *лобовое сопротивление*, которое компенсирует потери энергии при обтекании. Для поддержания скорости движения необходимо непрерывно сообщать телу энергию,

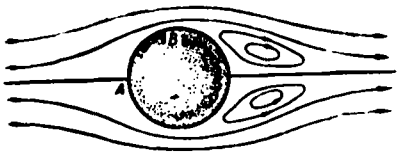


Рис. 21.

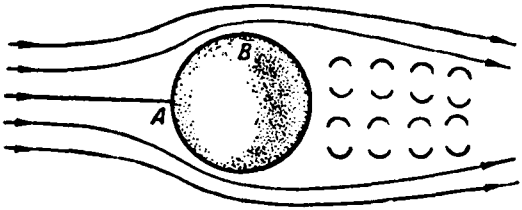


Рис. 22.

и парадокс Даламбера не имеет места. Общая справедливость гипотезы Прандтля достаточно хорошо подтверждается фотографиями потока и тем самым показывает, что теоретическая гидродинамика может быть полезной, так как течение вне следа согласуется с теоретическим движением. С другой стороны, теорию мы можем применить к изучению поведения хорошо обтекаемых тел, у которых разрушение пограничного слоя происходит вблизи кормовой части и соответственно ширина следа за телом будет меньше. Примерами таких хорошо обтекаемых тел являются тело рыбы, специально спроектированные крыловые профили, стойки, имеющие сечения с небольшим лобовым сопротивлением.

В заключение отметим следующие два соображения, которые позволяют применять теорему Бернулли при измерениях в реальной жидкости. Во-первых, отверстия трубки Пито расположены спереди, где пограничный слой тонкий, и, во-вторых, давление не претерпевает разрыва при переходе через этот тонкий пограничный слой.

ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ 1

1. Водяной кран с диаметром 0,6 *см* расположен на 18 *м* ниже уровня резервуара, который снабжает водой город. Найти количество воды, вытекающей через кран за один час.

2. Вода бьет струей через маленькое отверстие в большом сосуде, в котором давление 51 *атм* поддерживается сжатым воздухом; при этом внешнее давление равно 1 *атм*. Пренебрегая разностью уровней между отверстием и свободной поверхностью воды в сосуде, вычислить скорость, с которой вода вытекает через отверстие.

3. Вдоль горизонтальной трубки переменного поперечного сечения течет установившийся поток воды. Зная, что давление равно 700 *мм* рт. ст. (удельный вес ртути 13,6) в том месте, где скорость равна 150 *см/сек*, требуется найти давление в том месте, где поперечное сечение трубки равно удвоенной ее ширине, принимая $g=981$ *см/сек*^{2}.

4. Поток в горизонтальной трубе после прохождения самого узкого места, где площадь поперечного сечения равна A, течет при атмосферном давлении в участке трубы с площадью поперечного сечения, равной B. Показать, что если трубку присоединить к трубе в первом указанном месте, то вода будет всасываться через нее в трубу из резервуара, расположенного на глубине $S^2(1/A^2-1/B^2)/2g$ ниже трубы; здесь S—секундный расход воды.

5. Жидкость плотности ϱ течет вдоль горизонтальной трубки переменного поперечного сечения, и трубка связана с дифференциальным прибором, измеряющим давление в двух точках A и B. Показать, что если p_1-p_2 давление, указанное прибором, то масса m жидкости, протекающей через трубку в одну секунду, задается формулой

$$m=\sigma_1\sigma_2\sqrt{\frac{2\varrho\,(p_1-p_2)}{\sigma_1^2-\sigma_2^2}},$$

где σ_1 и σ_2—соответственно поперечные сечения в точках A и B.

6. Сосуд в форме полого кругового конуса с вертикальной осью и вершиной, обращенной вниз, открытый сверху, наполнен водой. Круглое отверстие, диаметр которого равен $1/n$ диаметра основания конуса (n велико), открывается в вершине конуса. Показать, что время, необходимое для того, чтобы уровень воды упал до величины, отвечающей половине первоначального объема h, не может быть меньше чем

$$\frac{(4\sqrt{2}-1)\,n^2\sqrt{h}}{20\sqrt{g}}.$$

7. Жидкость, в которой плотность и давление связаны адиабатическим соотношением $p/\varrho^{\gamma}=\text{const}$, вытекает через тонкую трубку, выходящую из широкого замкнутого сосуда, в котором давление в n раз превышает атмосферное давление p. Показать, что скорость V истечения жидкости задается формулой

$$V^2=\frac{2\gamma p}{(\gamma-1)\varrho}\left[n^{1-\frac{1}{\gamma}}-1\right],$$

где ϱ — плотность в самом сжатом месте.

8. Газ, в котором давление и плотность связаны адиабатическим соотношением $p=k\varrho^{\gamma}$, течет вдоль трубы. Доказать, что величина

$$q^2+\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\varrho}$$

постоянна, если пренебречь массовыми силами, причем q — скорость. Если в направлении потока поперечное сечение трубы уменьшается, то доказать, что скорость q будет увеличиваться и отношение p/ϱ будет уменьшаться в направлении потока при условии, что $q^2\varrho<\gamma p$.

9. Показать, что скорость q газа, текущего в тонкой трубке, поперечное сечение которой равно σ, в точке на расстоянии s, измеряемом по дуге от фиксированного поперечного сечения, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{ds}(\ln\sigma)+\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)\frac{d}{ds}\ln q=0,$$

где c — скорость звука в газе в рассматриваемой точке; при этом предполагается, что газ удовлетворяет адиабатическому закону.

10. Если газ вытекает из сосуда через малое отверстие из области с давлением p_1 в область с давлением p_2, то доказать, что количество газа, вытекающее в секунду, равно

$$c_2\varrho_2\omega_2\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}-1\right]^{1/2},$$

где $p=k\varrho^{\gamma}$, ω_2 — площадь сечения в самом сжатом месте $c_2^2=\gamma p_2/\varrho_2$ (ср. п. 1.64); при этом ϱ_2 — плотность в самом сжатом месте.

11. Пусть ω — малая площадь поперечного сечения трубки тока в газе; доказать, что $q\varrho\omega=\text{const}$ вдоль трубки тока; используя результат п. 1.64, доказать, что величина $q\varrho$ максимальна, если $q=c$, и что ω тогда имеет минимальное значение.

12. Если c_m — скорость звука в минимальном поперечном сечении из примера 11, то доказать, что имеется верхний предел значения скорости q, даваемый формулой

$$q_{\max}=c_m\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}=2{,}45c_m.$$

13. Газ вытекает из точки по радиусам симметрично во всех направлениях, причем давление и плотность удовлетворяют закону $p=\varkappa\varrho$. Пусть m — секундный расход, предполагаемый постоянным; доказать равенство

$$4\pi qr^2=m\exp\left[\frac{q^2-q_1^2}{2\varkappa}\right],$$

где q — скорость на расстоянии r и q_1 — скорость при $\varrho=1$.

Глава 2

ВЕКТОРЫ

2.10. Скаляры и векторы. Отвлеченные числа и физические величины, для полного определения которых не требуется задавать направления в пространстве, называются *скалярными величинами*, или просто *скалярами*. Например, скалярами являются объем, плотность, масса и энергия. Давление жидкости также является скаляром. Однако сила, действующая на бесконечно малую площадку вследствие давления на нее со стороны жидкости, не является скаляром, так как для полного описания этой силы должно быть задано направление, по которому она действует.

Векторной величиной, или *вектором*, называется величина, для полного определения которой необходимо задать как число, так и направление в пространстве; эта величина при сложении подчиняется правилу параллелограмма, а при умножении подчиняется законам, которые будут сформулированы позднее. Примерами векторов служат скорость, количество движения, сила. Угловая скорость и момент количества движения также являются векторами, что доказывается в курсах механики.

Вектор может быть полностью представлен отрезком прямой, проведенной в направлении этого вектора. Длина отрезка в выбранном масштабе равна величине вектора. Направление вектора можно обозначить стрелкой на конце отрезка.

В некоторых случаях вектор необходимо рассматривать вместе с некоторой линией, вдоль которой этот вектор направлен; такие векторы называются *скользящими*. Например, ясно, что при вычислении момента силы существенно положение линии действия силы.

Однако во многих случаях мы будем иметь дело со *свободными векторами*, т. е. векторами, которые полностью определяются величиной и направлением и которые, следовательно, могут быть изображены в любом удобном нам положении. Так, если мы хотим найти только величину и направление равнодействующей нескольких данных сил, то мы можем использовать силовой многоугольник, не обращая внимания на действительное положение в пространстве линий действия данных сил.

Мы будем обозначать вектор жирной прямой латинской буквой, а его величину той же курсивной буквой. Так, если $\mathbf{q}$ — вектор скорости, то его величина обозначается через q. Аналогично вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ имеет величину ω.

Единичным вектором называется вектор, величина которого равна единице. Любой вектор может быть представлен произведением числового (скалярного) множителя и единичного вектора, параллельного данному вектору. Так, если $\mathbf{i}_a$ — единичный вектор, параллельный вектору $\mathbf{a}$, то справедливо равенство

$$\mathbf{a} = a\mathbf{i}_a.$$

Ниже мы рассмотрим некоторые свойства векторов, имея в виду их гидродинамические приложения.

В дальнейшем будем предполагать, что величина вектора отлична от нуля, если специально не оговорено противоположное.

2.11. Скалярное произведение двух векторов. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — два вектора с величинами a и b, направленные вдоль лучей OA и OB, выходящих из точки O (рис. 23). Пусть угол между этими векторами, т. е. угол AOB, который считается положительным в направлении наименьшего вращения от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$, равен θ. Тогда *скалярное произведение* векторов $\mathbf{ab}$ определяется соотношением

$$\mathbf{ab} = ab\cos\theta.$$

Скалярное произведение векторов является скаляром и измеряется произведением $OA \cdot OM$, где M — проекция точки B на прямую OA; тогда $OA = a$, $OM = b\cos\theta$. Из определения сразу же следует равенство

$$\mathbf{ba} = ba\cos(-\theta) = ab\cos\theta = \mathbf{ab},$$

так что порядок сомножителей оказывается несущественным. Если векторы перпендикулярны, то $\cos\theta = 0$ и $\mathbf{ab} = 0$. Обратно, это равенство означает, что или $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ перпендикулярны, или $\mathbf{a} = 0$, или $\mathbf{b} = 0$. Если $\mathbf{ab} = 0$, причем $\mathbf{b}$ — *произвольный* вектор, то $\mathbf{a} = 0$, так как $\mathbf{a}$ не может быть перпендикулярным каждому вектору $\mathbf{b}$. Если θ — тупой угол, то скалярное произведение отрицательно.

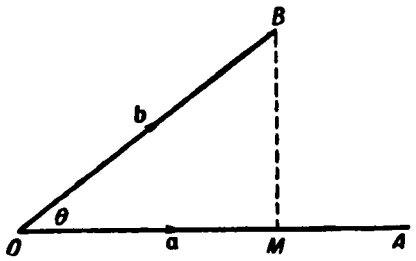


Рис. 23.

Если $\mathbf{i}_a$ — единичный вектор, то скаляр $\mathbf{i}_a\mathbf{b} = \mathbf{b}\cos\theta$ является составляющей вектора $\mathbf{b}$ в направлении некоторого вектора, параллельного $\mathbf{i}_a$. Если $\mathbf{i}_a$ и $\mathbf{i}_b$ — единичные векторы, то $\mathbf{i}_a\mathbf{i}_b = \cos\theta$, где θ — угол между любыми двумя векторами, параллельными $\mathbf{i}_a$ и $\mathbf{i}_b$.

Если точка приложения силы $\mathbf{F}$ движется со скоростью $\mathbf{v}$, то мощность, которую развивает сила $\mathbf{F}$, равна $\mathbf{Fv}$.

2.12. Векторное произведение двух векторов. Пусть угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, величины которых равны соответственно a и b, равен θ (рис. 24). Положительное направление отсчета угла выбирается от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$. Мы определим *векторное произведение* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ как вектор, величина которого равна $ab\sin\theta$ и который перпендикулярен обоим векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а направлен в ту сторону, откуда вращение от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$ соответствует правилу «правого винта».

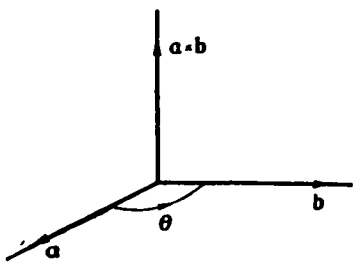


Рис. 24.

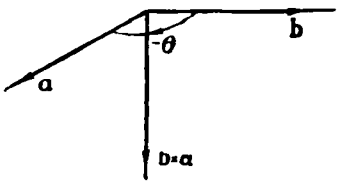


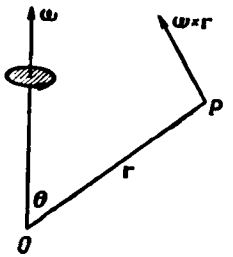
Рис. 25.

Из определения следует, что векторное произведение не коммутативно так как $ba\sin(-\theta) = -ab\sin\theta$ (рис. 25), т. е.

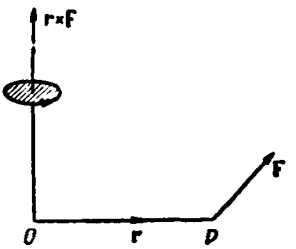
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

Если векторы параллельны ($\theta = 0$ или π), мы имеем $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$. Обратно, это равенство означает, что или векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ параллельны, или один из них равен нулю.

В качестве примера рассмотрим движение точки P твердого тела, которое вращается вокруг неподвижной точки O с угловой скоростью ω (рис. 26). Пусть $\mathbf{r}$ есть радиус-вектор точки P относительно точки O. Тогда скорость точки P, равная величине $\omega \cdot OP \cdot \sin\theta$, перпендикулярна плоскости PON и, следовательно, скорость есть вектор $\omega \times \mathbf{r}$.



Р и с. 26.



Р и с. 27.

Аналогично вектор момента силы $\mathbf{F}$, приложенной к точке P, относительно точки O равен $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ (рис. 27).

Так как величина $ab\sin\theta$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то векторное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ можно рассматривать как *направленную меру* этой площади, т. е. вектор, величина которого равна этой площади и который направлен перпендикулярно к ней.

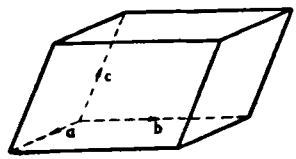
2.121. Закон дистрибутивности. Как скалярное, так и векторное произведения дистрибутивны, т. е.

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{ab}+\mathbf{ac}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

Доказательство этих соотношений представляем читателю (см. примеры 27, 28 к гл. 2).

2.13. Тройное скалярное произведение. Если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — три вектора, то комбинация $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ называется их тройным скалярным произведением. Это есть скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Тройное скалярное произведение равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.



Р и с. 28.

Доказательство. Так как вектор $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ равен по величине площади параллелограмма и направлен вдоль нормали к нему в ту же сторону, что и вектор $\mathbf{a}$ (рис. 28), то тройное скалярное произведение измеряется объемом параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, что и требовалось доказать.

Таким образом,

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Но $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{a}(\mathbf{c} \times \mathbf{b})$, так как

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times \mathbf{b}.$$

Заметим, однако, что

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{a}.$$

Следовательно, имеет место *правило цикличности*: тройное скалярное произведение изменяет знак только при изменении циклического порядка

перемножаемых векторов. Заметим также, что действительное положение знака $\times$ несущественно, так как

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,\mathbf{c}=\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=[\mathbf{abc}].$$

Последнее выражение справа является удобным обозначением тройного скалярного произведения.

Если два вектора равны или параллельны или если все три вектора компланарны [1]), то тройное скалярное произведение равно нулю, т. е.

$$[\mathbf{aab}]=0. \tag{1}$$

2.14. Тройное векторное произведение. Если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — три вектора, то комбинация $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ называется тройным векторным произведением.

Это есть векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$. Заметим, что $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=-\mathbf{a}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{b})=(\mathbf{c}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}$. Отсюда следует *правило центричности*: знак тройного векторного произведения изменяется только с изменением центрального вектора.

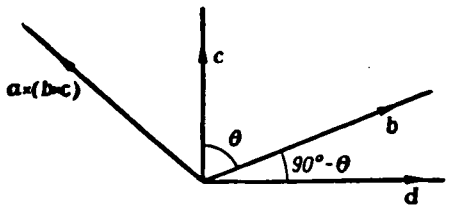


Рис. 29.

Тройное векторное произведение обладает очень важным свойством, которое выражается соотношением

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=-(\mathbf{ab})\,\mathbf{c}+(\mathbf{ac})\,\mathbf{b}.$$

Доказательство. Вектор $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ перпендикулярен вектору $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, который в свою очередь перпендикулярен плоскости, содержащей векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Таким образом, вектор $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ лежит в плоскости векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ и, следовательно, может быть выражен через векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ соотношением

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=p\mathbf{b}-q\mathbf{c},$$

где p и q — скаляры. Так как вектор $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ перпендикулярен $\mathbf{a}$, то скалярное произведение этих двух векторов равно нулю. Следовательно,

$$0=p\mathbf{ab}-q\mathbf{ac}.$$

Таким образом,

$$p=\lambda\mathbf{ac};\quad q=\lambda\mathbf{ab},$$

где λ — скаляр. Отсюда следует, что

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=-\lambda\,(\mathbf{ab})\,\mathbf{c}+\lambda\,(\mathbf{ac})\,\mathbf{b}.$$

Чтобы определить скаляр λ, составим скалярное произведение с некоторым вектором $\mathbf{d}$, который компланарен векторам $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ и перпендикулярен вектору $\mathbf{c}$ (рис. 29). Тогда $\mathbf{cd}=0$ и, следовательно,

$$\lambda\mathbf{bd}\,(\mathbf{ac})=\mathbf{d}\,[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]=\mathbf{a}\,[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{d}].$$

Здесь мы использовали свойство тройного скалярного произведения. Далее, вектор $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{d}$ компланарен векторам $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ и перпендикулярен вектору $\mathbf{d}$; следовательно, он параллелен вектору $\mathbf{c}$. Если θ — угол между векторами $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, то величина этого вектора равна

$$bcd\sin\theta=bd\cos(90^\circ-\theta)\,c$$

и поэтому имеет место равенство

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{d}=(\mathbf{bd})\,\mathbf{c}.$$

[1]) То есть лежат в одной плоскости. — *Прим. ред.*

Отсюда находим, что

$$\lambda\,(\mathbf{bd})\,(\mathbf{ac}) = (\mathbf{ac})\,(\mathbf{bd})$$

и, следовательно, $\lambda = 1$, что и требовалось доказать.

Заметим также, что равенство

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = -\mathbf{a}\,(\mathbf{bc}) + \mathbf{b}\,(\mathbf{ac})$$

можно получить с помощью мнемонического правила: член с отрицательным знаком всегда получается сдвигом скобок в тройном произведении при сохранении порядка сомножителей.

2.15. Разложение вектора. Если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — заданные некомпланарные векторы, а $\mathbf{x}$ — произвольный вектор, то

$$\mathbf{x}\,[\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})] = \mathbf{a}\,[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,\mathbf{x}] + \mathbf{b}\,[(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\,\mathbf{x}] + \mathbf{c}\,[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,\mathbf{x}], \qquad (1)$$

$$\mathbf{x}\,[\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})] = (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,(\mathbf{ax}) + (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\,(\mathbf{bx}) + (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,(\mathbf{cx}). \qquad (2)$$

Первое выражение есть разложение $\mathbf{x}$ вдоль данных векторов, а второе — разложение $\mathbf{x}$ по направлениям, перпендикулярным плоскостям bc, ca и ab.

Доказательство равенства (1). Так как векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, и $\mathbf{c}$ некомпланарны, то мы можем разложить вектор $\mathbf{x}$ по этим векторам и получить соотношение

$$\mathbf{x} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b} + r\mathbf{c},$$

где p, q и r — скаляры. Умножим это равенство скалярно на вектор $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, перпендикулярный $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, тогда получим равенство

$$\mathbf{x}\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = p\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\ ^{1}),$$

которое определяет скаляр p.

Доказательство равенства (2). Пусть

$$\mathbf{x} = p\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + q\,(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + r\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

Умножим это равенство на вектор $\mathbf{a}$, перпендикулярный $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. Тогда получим соотношение

$$\mathbf{ax} = p\,[\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]$$

и отсюда найдем скаляр p.

2.16. Индефинитное, или диадное, произведение[2]. Для данных двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в дополнение к скалярному и векторному произведению введем *индефинитное*, или *диадное*, *произведение* этих векторов

$$\mathbf{a};\ \mathbf{b}.$$

Это произведение, которое мы назовем *диадой*, не имеет геометрической интерпретации. Оно представляет собой некоторый *оператор*, очень полезный при преобразовании векторных выражений.

Тензором второго ранга называется сумма диад

$$(\mathbf{a};\ \mathbf{b}) + (\mathbf{c};\ \mathbf{d}) + (\mathbf{e};\ \mathbf{f}).$$

Скобки в этом выражении можно опустить.

Определим скалярное произведение некоторого вектора $\mathbf{c}$ и диады $\mathbf{a};\ \mathbf{b}$ следующим образом:

$$(\mathbf{a};\ \mathbf{b})\,\mathbf{c} = \mathbf{a}\,(\mathbf{bc});\quad \mathbf{c}\,(\mathbf{a};\ \mathbf{b}) = (\mathbf{ca})\,\mathbf{b}.$$

---

[1]) Аналогично определим q и r. Полученные выражения затем подставим в равенство $\mathbf{x}\,[\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})] = [p\mathbf{a} + q\mathbf{b} + r\mathbf{c}]\cdot[\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]$. — *Прим. ред.*

[2]) Более подробно об этом см. приложение к гл. 2. — *Прим. ред.*

Таким образом, скалярное произведение диады и вектора является вектором, причем этот вектор зависит от того, где стоит вектор c: слева или справа от диады.

В качестве примера скалярного произведения диады и вектора можно привести тройное векторное произведение

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = -(\mathbf{ab})\,\mathbf{c}+(\mathbf{ac})\,\mathbf{b} = \mathbf{a}\,[-(\mathbf{b};\ \mathbf{c})+(\mathbf{c};\ \mathbf{b})],$$

которое, кроме того, иллюстрирует свойство дистрибутивности определенного выше произведения.

Единичной диадой I, или *идемфактором*, называется такой тензор, что для любого вектора a имеют место равенства

$$I\mathbf{a} = \mathbf{a}I = \mathbf{a}. \tag{1}$$

Мы докажем существование единичной диады при помощи следующего выражения для нее:

$$I = \mathbf{i};\ \mathbf{i}+\mathbf{j};\ \mathbf{j}+\mathbf{k};\ \mathbf{k}, \tag{2}$$

где i, j, k — *взаимно перпендикулярные* единичные векторы. На основании разложения (см. п. 2.15) мы можем записать соотношение

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k},$$

и непосредственным составлением соответствующих произведений диад и векторов легко доказать справедливость равенств (1).

Рассмотрим тензор

$$\Phi = \mathbf{a};\ \mathbf{b}+\mathbf{c};\ \mathbf{d}+\mathbf{e};\ \mathbf{f}. \tag{3}$$

Тензор

$$\Phi_c = \mathbf{b};\ \mathbf{a}+\mathbf{d};\ \mathbf{c}+\mathbf{f};\ \mathbf{e}, \tag{4}$$

полученный перестановкой сомножителей в каждой диаде, называется *сопряженным* тензору Φ.

Если r — некоторый вектор, то

$$\Phi\mathbf{r} = \mathbf{a}\,(\mathbf{br})+\mathbf{c}\,(\mathbf{dr})+\mathbf{e}\,(\mathbf{fr}) = \mathbf{r}\Phi_c. \tag{5}$$

Если $\Phi = \Phi_c$, то говорят, что тензор Φ *симметричный*, и тогда

$$\Phi\mathbf{r} = \mathbf{r}\Phi_c = \mathbf{r}\Phi.$$

Если $\Phi = -\Phi_c$, говорят, что тензор Φ *антисимметричный, или косой.*

Если Φ — произвольный тензор, то можно записать

$$\Phi = \tfrac{1}{2}(\Phi+\Phi_c)+\tfrac{1}{2}(\Phi-\Phi_c). \tag{6}$$

Тензор $^1/_2\,(\Phi+\Phi_c)$ симметричный, так как

$$(\Phi+\Phi_c)\,\mathbf{r} = \mathbf{r}\Phi_c+\mathbf{r}\Phi = \mathbf{r}\,(\Phi+\Phi_c).$$

Аналогично доказывается, что тензор $^1/_2\,(\Phi-\Phi_c)$ является антисимметричным тензором. Таким образом, произвольный тензор может быть представлен (причем единственным образом) суммой симметричного и антисимметричного тензоров.

Если в выражении (3) заменить диадное умножение скалярным, то получим скаляр, который называют *первым скалярным инвариантом* тензора Φ и записывают в виде

$$\Phi_I = \mathbf{ab}+\mathbf{cd}+\mathbf{ef}. \tag{7}$$

Скалярное произведение двух диад (a; b) и (c; d) определяется равенствами

$$(\mathbf{a};\ \mathbf{b})\,(\mathbf{c};\ \mathbf{d}) = \mathbf{a}\,(\mathbf{bc});\ \mathbf{d} = \mathbf{a};\ (\mathbf{bc});\ \mathbf{d} = (\mathbf{bc})\,(\mathbf{a};\ \mathbf{d}) = (\mathbf{a};\ \mathbf{d})\,(\mathbf{bc}) \tag{8}$$

и снова представляет собой диаду. Произведение диад не меняется при переносе скаляра (bc).

Из дистрибутивности скалярного произведения диад следует, что скалярное произведение двух тензоров второго ранга есть снова тензор второго ранга.

Если мы возьмем первый скалярный инвариант от правой части равенства (8), то получим скаляр, который называется *двойным скалярным произведением* диад и означает следующее:

$$(\mathbf{a};\ \mathbf{b})\cdot\cdot(\mathbf{c};\ \mathbf{d}) = (\mathbf{ad})\,(\mathbf{bc}) = (\mathbf{cb})\,(\mathbf{da}) = (\mathbf{c};\ \mathbf{d})\cdot\cdot(\mathbf{a};\ \mathbf{b}). \tag{9}$$

Отсюда видно, что двойное скалярное произведение диад коммутативно.

Из дистрибутивности этого произведения выводится двойное скалярное произведение двух тензоров Φ и Ψ:

$$\Phi\,..\,\Psi = \Psi\,..\,\Phi = \Phi_c\,..\,\Psi_c = \Psi_c\,..\,\Phi_c. \tag{10}$$

Отсюда следует, что скалярное произведение тензоров не меняется, если *оба* тензора заменить на их сопряженные тензоры.

Так, если S — симметричный, а A — антисимметричный тензоры второго ранга, то

$$S\,..\,A = S_c\,..\,A_c = S\,..\,(-A) = -S\,..\,A.$$

Следовательно, $S\,..\,A = 0$, т. е. *двойное скалярное произведение симметричного и антисимметричного тензоров* равно нулю.

2.19. Скалярные и векторные поля. Если каждой точке пространства поставлен в соответствие скаляр, то говорят, что определено *скалярное поле*. Так, например, давление жидкости p и плотность жидкости ϱ образуют скалярные поля.

Если каждой точке пространства поставлены в соответствие скаляр и некоторое направление, т. е. каждой точке поставлен в соответствие вектор, то говорят, что определено *векторное поле*. Одним из наиболее важных векторных полей в гидродинамике является поле вектора скорости $\mathbf{q}$. Другим важным полем является поле вихря (см. п. 2.41).

2.20. Криволинейные, поверхностные и объемные интегралы. В этом пункте вводятся понятия криволинейного, поверхностного и объемного интегралов, поскольку впоследствии мы будем использовать эти термины. Здесь не будут излагаться методы вычисления таких интегралов или условия, при которых они существуют, так как эти вопросы освещены в курсах математического анализа. Однако в отдельных случаях при решении примеров нам придется делать численные оценки интегралов.

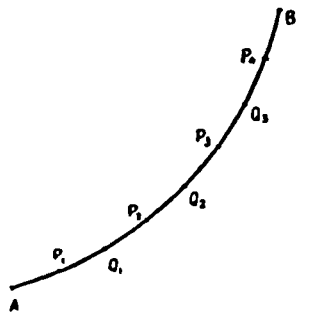


Рис. 30.

Пусть AB — некоторая дуга заданной кривой (не обязательно плоской). Точками $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{N-1}$ разобьем дугу AB на N частей AQ_1, $Q_1Q_2, \ldots, Q_{N-1}B$, длины $\delta s_1, \delta s_2, \ldots, \delta s_N$, каждая из которых меньше ε, и возьмем точки $P_1, P_2, \ldots, P_N$ — по одной на каждой части разбиения. На рис. 30 показан случай разбиения при $N = 4$.

Пусть $f(P)$, или для краткости просто f, есть функция, значение которой известно в каждой точке P кривой AB, и пусть функция f в точках $P_1, P_2, \ldots, P_N$ принимает значения $f_1, f_2, \ldots, f_N$. Тогда мы можем составить сумму

$$f_1\delta s_1 + f_2\delta s_2 + \ldots + f_N\delta s_N = \Sigma f\delta s. \tag{1}$$

Если число N неограниченно возрастает и в то же время ε стремится к нулю, то *линейный интеграл* от функции f вдоль прямой AB или *криволинейный интеграл* от f вдоль кривой AB определяется равенством

$$\int\limits_{(AB)} f\,ds = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \Sigma f\delta s.$$

Это определение справедливо независимо от того, является ли функция f вектором или скаляром.

Если функция f — вектор, то сумма в формуле (1) представляет собой векторную сумму, которая может быть получена по закону сложения векторов, и интеграл тогда является векторной величиной.

Если функция f — константа, т. е. f имеет одно и то же значение c в каждой точке дуги AB, то из формулы (1) видно, что сумма равна cl, где l — длина дуги AB. В этом случае величина интеграла равна cl.

Если функция f является скаляром и удовлетворяет неравенству

$$M > f > m, \tag{2}$$

где M и m — фиксированные числа, то ясно, что выполняются следующие неравенства:

$$\Sigma (M - f)\,\delta s > 0, \quad \Sigma (f - m)\,\delta s > 0,$$

и, следовательно,

$$\Sigma M\delta s > \Sigma f\delta s > \Sigma m\delta s,$$

откуда получим соотношение

$$Ml > \int\limits_{(AB)} f\,ds > ml.$$

Пусть $\mathbf{i}_s$ — единичный вектор, направленный по касательной к элементу дуги ds. Тогда определим вектор $d\mathbf{s}$ равенством $d\mathbf{s} = \mathbf{i}_s\,ds$. Вектор $d\mathbf{s}$ представляет собой *направленный элемент дуги* кривой AB; теперь мы можем записать тождество

$$\int\limits_{(AB)} X\,d\mathbf{s} = \int\limits_{(AB)} X\mathbf{i}_s\,ds.$$

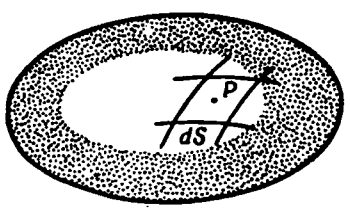


Рис. 31а.

Таким образом, интеграл слева определен через известный уже интеграл. Здесь X может быть скаляром или вектором, а произведение под знаком интеграла может быть скалярным, векторным или диадным.

Чтобы определить *поверхностный интеграл* от функции $f = f(P)$ по поверхности S (не обязательно плоской или замкнутой), разобьем поверхность на элементы, у которых площади равны δS_1, δS_2, δS_3, ..., δS_N, а наибольшие линейные размеры не превосходят ε (рис. 31а).

Если обозначить значения функции f в точках P_1, P_2, ..., P_N, взятых на элементарных площадках, через f_1, f_2, ..., f_N, то мы можем образовать сумму

$$f_1\delta S_1 + f_2\delta S_2 + \ldots + f_N\delta S_N = \Sigma f\delta S.$$

Тогда интеграл от функции f по поверхности S определяется равенством

$$\int\limits_{(S)} f\,dS = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \Sigma f\delta S.$$

Это определение справедливо и для скалярных и для векторных функций.

Если функция f имеет постоянную величину c на поверхности S, то поверхностный интеграл равен cA, где A — площадь поверхности S. Кроме того, если функция f удовлетворяет неравенству (2), то

$$MA > \int\limits_{(S)} f\,dS > mA.$$

Если $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный вдоль внешней нормали к элементу dS *замкнутой* поверхности S, то

$$\int\limits_{(S)} \mathbf{n}\,dS = 0, \tag{3}$$

так как легко заметить, что проекция этого вектора на любую фиксированную плоскость равна нулю.

Часто бывает удобно заменить произведение $\mathbf{n}dS$ вектором $d\mathbf{S}$, который представляет собой элемент площади поверхности, направленный вдоль нормали к ней (ср. п. 2.12). При помощи этого обозначения соотношение (3) принимает вид

$$\int\limits_{(S)} d\mathbf{S} = 0.$$

В общем случае мы приходим к рассмотрению интегралов типа

$$\int\limits_{(S)} X\,d\mathbf{S},$$

где X может быть скаляром или вектором, а умножение скалярным, векторным или диадным.

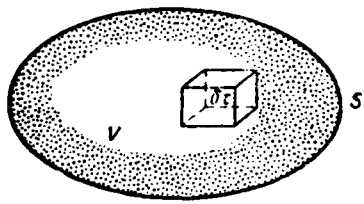


Рис. 31 б.

Чтобы определить *интеграл по объему*, рассмотрим объем V, заключенный внутри замкнутой поверхности S (рис. 31 б). Разобьем этот объем на элементарные объемы $\delta\tau_1$, $\delta\tau_2$, $\delta\tau_3$, ..., $\delta\tau_N$, у которых максимальные линейные размеры не превосходят ε. Если обозначить значения функции f в точках P_1, P_2, P_3, ..., P_N, взятых внутри элементарных объемов, через f_1, f_2, f_3, ..., f_N, то можно составить сумму

$$f_1\delta\tau_1 + f_2\delta\tau_2 + f_3\delta\tau_3 + \ldots + f_N\delta\tau_N = \Sigma f\delta\tau.$$

Тогда интеграл от функции f по объему V определяется следующим образом:

$$\int\limits_{(V)} f\,d\tau = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \Sigma f\delta\tau.$$

Это определение снова применимо и к векторным и к скалярным функциям.

Если функция f имеет постоянную величину c, то интеграл равен cV, а если f удовлетворяет неравенству (2), то справедливо соотношение

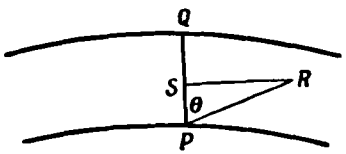
$$MV > \int\limits_{(V)} f\,d\tau > mV.$$

Замечание. Мы пишем один знак интеграла, когда используем только один дифференциал ds, dS или $d\tau$. Если мы используем два дифференциала, то будем писать два знака интеграла. Так, если $dS = dx\,dy$, запишем

$$\int\limits_{(S)} f\,dS = \iint\limits_{(S)} f\,dx\,dy.$$

2.22. Изменение скалярной функции координат. Пусть φ — скалярная функция точки в пространстве, так что значения функции φ образуют скалярное поле. Будем предполагать, что функция φ непрерывна вместе со своими первыми частными производными. Тогда существует, вообще говоря, семейство поверхностей, на каждой из которых функция φ постоянна. Мы назовем их *поверхностями уровня* функции φ.

Пусть P — произвольная точка, а Q — близкая к ней точка, лежащая на нормали к поверхности уровня $\varphi = \varphi_P$ в точке P (рис. 32). Через φ_P обозначено значение функции φ в P. Тогда если рассматривать PQ как величину первого порядка малости, то можно записать



Р и с. 32.

$$\varphi_Q - \varphi_P = PQ\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{PQ}, \tag{1}$$

где через $(\partial\varphi/\partial s)_{PQ}$ обозначена скорость изменения функции φ при смещении точки в направлении PQ.

Пусть R — произвольная точка, близкая к P, и пусть поверхность уровня $\varphi = \varphi_R$ пересекает отрезок PQ в точке S. Примем, что с точностью до малых первого порядка отрезок RS перпендикулярен отрезку PQ. Тогда

$$\varphi_R = \varphi_S = \varphi_P + PS\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{PQ},$$

так что

$$\varphi_R - \varphi_P = PR\cos\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{PQ} = \vec{PR}\,(\operatorname{grad}\varphi), \tag{2}$$

где через $\operatorname{grad}\varphi$ обозначен вектор[1]), направленный вдоль PQ и равный по величине

$$|\operatorname{grad}\varphi| = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{PQ}.$$

Из этого определения после замены вектора $\vec{PQ}$ на $\mathbf{n}\,dn$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный вдоль нормали к поверхности уровня функции в точке P, следует равенство

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathbf{n}. \tag{3}$$

Для $\operatorname{grad}\varphi$ применяются различные обозначения:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}} = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{P}} = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathbf{n}. \tag{4}$$

В первом из них изменение координаты радиуса-вектора точки P обозначено через $d\mathbf{r}$, а во втором изменение координаты радиуса-вектора обозначено через $d\mathbf{P}$. Преимущество последнего состоит в том, что обозначение явно указывает на точку P. Обозначение $\partial\varphi/\partial\mathbf{r}$ можно сравнить с обычной частной производной $\partial\varphi/\partial x$, но следует помнить, что мы не можем делить на вектор, так что выражение $\partial\varphi/\partial\mathbf{r}$ нельзя рассматривать как предел отношения двух малых величин. Символ ∇ (произносится «набла») введен Гамильтоном и называется так потому, что знак ∇ формой напоминает арфу[2]). Векторный оператор ∇ аналогичен скалярному оператору $D = d/dx$ тем, что это обозначение не указывает явно независимую переменную. Тем не менее это обозначение удобно. В дальнейшем мы будем использовать то обозначение из равенств (4), которое окажется более подходящим к рассматриваемому случаю.

---

[1]) Обозначение $\operatorname{grad}\varphi$ является сокращением фразы «градиент функции Φ».

[2]) По-гречески ναβλα — арфа. — *Прим. перев.*

Возвращаясь к равенству (2), отметим, что скорость изменения функции φ при перемещении точки по направлению PR равна

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{PR}=\lim_{R\to P}\frac{\varphi_R-\varphi_P}{PR}=\cos\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{PQ}$$

и является компонентой вектора $\operatorname{grad}\varphi$ по направлению PR.

Таким образом, если в равенство (2) ввести обозначение

$$\overrightarrow{PR}=\mathbf{i}_s\,ds,$$

то мы получим соотношение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\mathbf{i}_s\operatorname{grad}\varphi=\mathbf{i}_s\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}}=\mathbf{i}_s(\nabla\varphi). \tag{5}$$

Следовательно, мы должны рассматривать ∇ как *векторный оператор*, применение которого к скалярной функции φ дает вектор, компонента которого по любому направлению равна скорости изменения функции φ по этому направлению.

2.23. Другое выражение для градиента функции. Рассмотрим цилиндр S, ограниченный поверхностями уровня $\varphi=\varphi_P$ и $\varphi=\varphi_Q$, причем точка Q находится на нормали к поверхности $\varphi=\varphi_P$ в точке P (рис. 33). Пусть PQ — бесконечно малая величина первого порядка, пусть диаметр нашего цилиндра считается малым по сравнению с PQ, а образующая цилиндра перпендикулярна поверхности $\varphi=\varphi_P$.

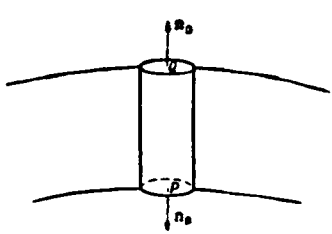


Рис. 33.

Введем единичный вектор внешней нормали к элементу dS поверхности цилиндра $\mathbf{n}$ и рассмотрим выражение

$$\int\limits_{(S)}\mathbf{n}\varphi\,dS. \tag{1}$$

Так как диаметр поперечного сечения цилиндра — бесконечно малая второго порядка, то функцию φ можно считать постоянной на линии, ограничивающей нормальное сечение цилиндра. Следовательно, интеграл (1) по боковой поверхности цилиндра равен нулю [ср. с формулой (3) п. 2.20]. Если через ω обозначить площадь поперечного сечения цилиндра, то интеграл (1) приближенно можно представить следующим образом:

$$\int\limits_{(S)}\mathbf{n}\varphi\,dS=\mathbf{n}_Q\varphi_Q\omega+\mathbf{n}_P\varphi_P\omega=\omega\left[\mathbf{n}_Q\left\{\varphi_P+PQ\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{PQ}\right\}+\varphi_P\mathbf{n}_P\right]=$$

$$=\omega PQ\,(\operatorname{grad}\varphi)=V\,(\operatorname{grad}\varphi),$$

где V — объем цилиндра. При этом мы использовали равенство

$$\mathbf{n}_P+\mathbf{n}_Q=0.$$

Заменим теперь цилиндр произвольной *малой* выпуклой поверхностью S, окружающей точку P. Тогда поверхность S можно разбить на цилиндры типа, описанного выше, и так как интегралы по внутренним границам пропадают, то получается приближенное равенство

$$\int\limits_{(S)}\mathbf{n}\varphi\,dS=V\,(\operatorname{grad}\varphi), \tag{2}$$

где V — объем, ограниченный поверхностью S. Следовательно, с принятой нами точностью

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{1}{V}\int\limits_{(S)} \mathbf{n}\varphi\, dS.$$

Таким образом, если S — произвольная поверхность, окружающая точку P, то мы можем записать соотношение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}} = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{P}} = \nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int\limits_{(S)} \mathbf{n}\varphi\, dS, \tag{3}$$

где $V \to 0$ означает, что поверхность S стягивается в точку таким образом, что она всегда окружает точку P, когда наибольший линейный размер поверхности стремится к нулю.

2.24. Обобщенное определение оператора ∇. Мы видели, что в результате применения векторного оператора ∇ к скалярной функции φ получается вектор $\operatorname{grad}\varphi$, определяемый формулой (3) п. 2.23. Это обстоятельство, естественно, побуждает нас выяснить смысл выражений $\nabla\mathbf{F}$, $\nabla\times\mathbf{F}$, $\nabla;\mathbf{F}$, где $\mathbf{F}$ — некоторая векторная функция, зависящая от координат. В последующих рассуждениях будем считать X некоторой функцией координат; эта функция может быть как скалярной, так и векторной. Тогда *определим* оператор ∇X равенством

$$\nabla X = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int\limits_{(S)} \mathbf{n}X\, dS, \tag{1}$$

где V — объем, ограниченный поверхностью S; точка P, в которой вычисляется величина ∇X, является внутренней по отношению к поверхности S, когда максимальный линейный размер S стремится к нулю. Через $\mathbf{n}$ обозначен единичный вектор *внешней* нормали к элементу поверхности dS. В выражении ∇X умножение может быть скалярным, векторным или диадным, если X является вектором. Подставляя вместо X сначала скаляр φ, а затем вектор $\mathbf{F}$, мы получаем следующие *определения*:

$$\nabla\varphi = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int\limits_{(S)} \mathbf{n}\varphi\, dS = \operatorname{grad}\varphi, \tag{2}$$

$$\nabla\mathbf{F} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int\limits_{(S)} \mathbf{n}\mathbf{F}\, dS = \operatorname{div}\mathbf{F}\,^{1}), \tag{3}$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int\limits_{(S)} \mathbf{n}\times\mathbf{F}\, ds = \operatorname{rot}\mathbf{F}, \tag{4}$$

$$\nabla;\mathbf{F} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int\limits_{(S)} \mathbf{n};\ \mathbf{F}\, dS. \tag{5}$$

В формулах (2)—(4) справа даются обозначения соответствующих понятий.

Из формулы (2) следует (ср. п. 2.23), что данное здесь определение оператора ∇ не противоречит первоначальному определению ∇ как оператора градиента над скаляром.

Отметим также, что ∇ является векторным оператором в том смысле, что если $\mathbf{n}$ есть некоторый вектор, то выражения $\mathbf{n}\varphi$, $\mathbf{n}\mathbf{F}$ или $\mathbf{n}\times\mathbf{F}$

---

[1]) $\operatorname{div}\mathbf{F}$ читается «дивергенция $\mathbf{F}$». Векторное поле, в каждой точке которого дивергенция равна нулю, называется соленоидальным, а векторное поле, в котором вихрь равен нулю, называется безвихревым.

остаются соответственно вектором, скаляром или вектором, если $\mathbf{n}$ заменяется на ∇.

Таким образом, из соотношения (1) и из формул

$$\mathbf{a}(\mathbf{n}\varphi) = (\mathbf{an})\varphi, \quad \mathbf{a}(\mathbf{n};\ \mathbf{F}) = (\mathbf{an})\mathbf{F}$$

следуют равенства

$$\mathbf{a}(\nabla\varphi) = (\mathbf{a}\nabla)\varphi, \quad \mathbf{a}(\nabla;\ \mathbf{F}) = (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{F}. \tag{6}$$

В общем случае мы можем обращаться с формулами, которые содержат оператор ∇, так как если бы ∇ был обычным вектором; при этом необходимо иметь в виду, что в полученном результате оператор ∇ не может быть крайним правым множителем и что мы различаем переменные векторы и векторы постоянные.

2.31. Оператор $(\mathbf{a}\nabla)$. Пусть $\mathbf{a}$ — некоторый вектор, не изменяющийся при переходе к пределу в формуле (1) п. 2.24. Тогда, применяя правила п. 2.16 и учитывая, что ∇ — векторный оператор, получаем соотношения

$$\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int\limits_{(S)}\mathbf{an}\varphi\,dS = \mathbf{a}\left[\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int\limits_{(S)}\mathbf{n}\varphi\,dS\right] = \mathbf{a}(\nabla\varphi) = (\mathbf{a}\nabla)\varphi, \tag{1}$$

$$\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int\limits_{(S)}(\mathbf{an})\mathbf{F}\,dS = \mathbf{a}\left[\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int\limits_{(S)}(\mathbf{n};\ \mathbf{F})\,dS\right] = \mathbf{a}(\nabla;\ \mathbf{F}) = (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{F}. \tag{2}$$

Если положить $\mathbf{a} = a\mathbf{i}$, то из формулы (5) п. 2.22 видно, что выражение $(\mathbf{a}\nabla)\varphi$ равно вектору $\mathbf{a}$, умноженному на скорость изменения функции φ по направлению вектора $\mathbf{a}$.

Отметим, что $(\mathbf{a}\nabla)$ — скалярный дифференциальный оператор. Чтобы выяснить геометрический смысл соотношения (2), заметим, что вектор $\mathbf{F}$ имеет некоторые скалярные компоненты вдоль трех произвольных фиксированных некомпланарных векторов и, следовательно, выражение $(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{F}$ равно произведению величины a на скорость изменения вектора $\mathbf{F}$ по направлению вектора $\mathbf{a}$. Кроме того, так как $(\mathbf{a}\nabla)$ является скалярным оператором, то обычные правила дифференцирования произведения дают нам соотношения

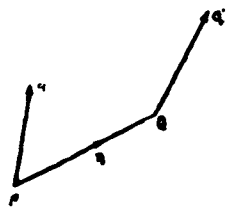


Рис. 34.

$$(\mathbf{a}\nabla)\ (\mathbf{bc}) = \mathbf{b}[(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{c}] + \mathbf{c}[(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}], \tag{3}$$

$$(\mathbf{a}\nabla)\ (\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = [(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}]\times\mathbf{c} + \mathbf{b}\times[(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{c}]. \tag{4}$$

Заметим также, что для бесконечно малого приращения радиуса-вектора точки имеют место равенства

$$\begin{aligned} d\varphi &= (d\mathbf{r}\nabla)\varphi = d\mathbf{r}(\nabla\varphi), \\ d\mathbf{q} &= (d\mathbf{r}\nabla)\mathbf{q}. \end{aligned} \tag{5}$$

В качестве приложения рассмотрим следующий важный пример. Пусть скорость жидкости в точке P равна $\mathbf{q}$, а скорость жидкости в точке Q, положение которой относительно P определяется бесконечно малым вектором $\boldsymbol{\eta}$, равна $\mathbf{q}'$ (рис. 34). Тогда с точностью до членов первого порядка малости можно записать соотношение

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q} + (\boldsymbol{\eta}\nabla)\mathbf{q}.$$

2.32. Некоторые дифференциальные операции над одним вектором или скаляром. Если φ является скаляром, то

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \nabla(\nabla\varphi) = (\nabla\nabla)\varphi = \nabla^2\varphi. \tag{1}$$

Оператор ∇^2 называется оператором Лапласа.

Из формулы (1) п. 2.13 следует соотношение

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{a}) = \nabla(\nabla\times\mathbf{a}) = [\nabla\nabla\mathbf{a}] = 0. \tag{II}$$

Учитывая результаты п. 2.12, легко получить равенство $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=0$ и, используя его, вывести соотношение

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = \nabla\times(\nabla\varphi) = (\nabla\times\nabla)\varphi = 0. \tag{III}$$

Очевидно, что имеет место тождество

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{a}) = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{a}). \tag{IV}$$

Используя свойства тройного векторного произведения, получаем формулу

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{a}) = \nabla(\nabla\mathbf{a}) - (\nabla\nabla)\mathbf{a} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{a}) - \nabla^2\mathbf{a}.$$

Таким образом,

$$\nabla^2\mathbf{a} = \nabla(\nabla\mathbf{a}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{a}). \tag{V}$$

Все эти соотношения можно доказать непосредственной проверкой. Например, для доказательства равенства (II) запишем, используя обычные обозначения:

$$\nabla_1(\nabla_2\times\mathbf{a}) = \lim_{V_1\to 0}\lim_{V_2\to 0}\frac{1}{V_1V_2}\int\int \mathbf{n}_1(\mathbf{n}_2\times\mathbf{a})\,dS_2\,dS_1 =$$

$$= -\lim_{V_2\to 0}\lim_{V_1\to 0}\frac{1}{V_1V_2}\int\int \mathbf{n}_2(\mathbf{n}_1\times\mathbf{a})\,dS_1\,dS_2.$$

При этом мы использовали правило цикличности в тройном скалярном произведении и предположили, что порядок интегрирования может быть изменен. Таким образом,

$$\nabla_1(\nabla_2\times\mathbf{a}) = -\nabla_2(\nabla_1\times\mathbf{a}),$$

или

$$\nabla(\nabla\times\mathbf{a}) = -\nabla(\nabla\times\mathbf{a}) = 0.$$

Аналогичным образом доказывается равенство (V):

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a}) = \lim_{V_1\to 0}\lim_{V_2\to 0}\frac{1}{V_1V_2}\int\int \mathbf{n}_1\times(\mathbf{n}_2\times\mathbf{a})\,dS_2\,dS_1 =$$

$$= \lim_{V_1\to 0}\lim_{V_2\to 0}\frac{1}{V_1V_2}\int\int [\mathbf{n}_2(\mathbf{n}_1\mathbf{a}) - (\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2)\mathbf{a}]\,dS_2\,dS_1 = \nabla(\nabla\mathbf{a}) - \nabla^2\mathbf{a}.$$

Эти примеры доказательств показывают, что правила обращения с оператором ∇ в конечном счете основываются на соответствующих правилах обращения с вектором $\mathbf{n}$.

2.33. Некоторые операции над произведением величин. Чтобы изучить операции над произведением XY, предположим, что при умножении X и Y подчиняются следующему закону:

$$(X+X')(Y+Y') = XY + XY' + X'Y + X'Y',$$

где порядок сомножителей в каждом из произведений, вообще говоря, существен.

Пусть через X и Y обозначены величины функций в точке P, а через X' и Y' — их величины в точке на замкнутой поверхности S, окружающей

точку P. Через $\mathbf{n}$ обозначим вектор единичной нормали к элементу поверхности dS. Тогда можно записать тождества

$$X'Y' = [X + (X' - X)]\,[Y + (Y' - Y)] = \\ = XY + X(Y' - Y) + (X' - X)Y + (X' - X)(Y' - Y),$$

и, следовательно,

$$\int_S \mathbf{n}X'Y'\,dS = \int_S \mathbf{n}XY\,dS + \int_S \mathbf{n}X(Y' - Y)\,dS + \\ + \int_S \mathbf{n}(X' - X)Y\,dS + \int_S \mathbf{n}(X' - X)(Y' - Y)\,dS.$$

Если теперь мы будем стягивать в точку поверхность, окружающую точку P, то величины $X' - X$ и $Y' - Y$ станут бесконечно малыми и, следовательно, последний интеграл станет бесконечно малой величиной по сравнению с остальными интегралами, поэтому им можно будет пренебречь.

Кроме того, значения функций X и Y в точке P фиксированы, а $\int_S \mathbf{n}\,dS = 0$, если поверхность замкнутая [см. формулу (3) п. 2.20]. Отсюда следует

$$\int_S \mathbf{n}XY\,dS = 0; \qquad (I)$$

учитывая это равенство, мы получаем соотношение

$$\int_S \mathbf{n}X'Y'\,dS = \int_S \mathbf{n}X(Y' - Y)\,dS + \int_S \mathbf{n}(X' - X)Y\,dS = \\ = \int_S \mathbf{n}XY'\,dS + \int_S \mathbf{n}X'Y\,dS.$$

Разделив обе части последнего равенства на величину объема V, ограниченного поверхностью S, преобразуем это равенство к виду

$$\frac{1}{V}\int_S \mathbf{n}X'Y'\,dS = \frac{1}{V}\int_S \mathbf{n}XY'\,dS + \frac{1}{V}\int_S \mathbf{n}X'Y\,dS.$$

Если теперь совершим предельный переход $V \to 0$, то, учитывая определение оператора ∇, получим равенство $\nabla(XY) = \nabla(X_0Y) + \nabla(XY_0)$, где индекс нуль указывает, что соответствующая величина под знаком оператора ∇ считается постоянной[1]). Эту формулу можно сравнить с соответствующей формулой для дифференциального оператора $D = d/dx$, а именно

$$D(XY) = D(X_0Y) + D(XY_0) = X_0(DY) + (DX)Y_0 = X(DY) + (DX)Y.$$

В этом соотношении индекс нуль опускается, когда он больше не требуется. Последнее свойство вместе со свойством градиента (см. п. 2.23) показывает, что ∇ является обобщенным дифференциальным оператором.

2.34. Применение оператора ∇ к некоторым произведениям. Теперь применим результаты предыдущего пункта к некоторым произведениям

[1]) Заметим, что этот переход носит существенно предварительный характер при нахождении результата действия оператора ∇ на произведение [ср. формулы (II), (III) п. 2.34].

векторов и скаляров, имея в виду, что оператор ∇ никогда не может быть крайним правым множителем в произведении. Для тройного скалярного и тройного векторного произведений можно получить следующие формулы, которые мы будем использовать в дальнейшем:

$$\mathbf{p}(\mathbf{q}\times\mathbf{r})=\mathbf{r}(\mathbf{p}\times\mathbf{q})=-\mathbf{q}(\mathbf{p}\times\mathbf{r}), \tag{A}$$

$$\mathbf{p}\times(\mathbf{q}\times\mathbf{r})=(\mathbf{rp})\,\mathbf{q}-\mathbf{r}(\mathbf{pq}), \tag{B}$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{qr})=\mathbf{q}\times(\mathbf{p}\times\mathbf{r})+(\mathbf{qp})\,\mathbf{r}. \tag{C}$$

Очевидно, что формула (C) получится из формулы (B) простой перестановкой сомножителей.

Из формулы (A) следует равенство

$$\nabla(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\nabla(\mathbf{a}\times\mathbf{b}_0)+\nabla(\mathbf{a}_0\times\mathbf{b})=$$
$$=\mathbf{b}_0(\nabla\times\mathbf{a})-\mathbf{a}_0(\nabla\times\mathbf{b}). \tag{I}$$

Теперь нулевой индекс можно отбросить и тогда получим соотношение

$$\nabla(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}(\nabla\times\mathbf{a})-\mathbf{a}(\nabla\times\mathbf{b}),$$

или

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}-\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}.$$

Из формулы (B) следует равенство

$$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}_0)+\nabla\times(\mathbf{a}_0\times\mathbf{b})=$$
$$=(\mathbf{b}_0\nabla)\,\mathbf{a}-\mathbf{b}_0(\nabla\mathbf{a})-(\mathbf{a}_0\nabla)\,\mathbf{b}+\mathbf{a}_0(\nabla\mathbf{b}), \tag{II}$$

или

$$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{b}\nabla)\,\mathbf{a}-(\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b}-\mathbf{b}(\nabla\mathbf{a})+\mathbf{a}(\nabla\mathbf{b}).$$

Из формулы (C) следует равенство

$$\nabla(\mathbf{ab})=\nabla(\mathbf{a}_0\mathbf{b})+\nabla(\mathbf{ab}_0)=\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b})+(\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b}+$$
$$+\mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a})+(\mathbf{b}\nabla)\,\mathbf{a}. \tag{III}$$

Из равенств (II) и (III) вычитанием получаем следующую формулу:

$$(\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b}=\frac{1}{2}[\nabla(\mathbf{ab})-\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})-\mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a})-\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b})-$$
$$-\mathbf{b}(\nabla\mathbf{a})+\mathbf{a}(\nabla\mathbf{b})]. \tag{IV}$$

В частности, так как $\nabla\times(\mathbf{q}\times\mathbf{q})=0$, то имеет место равенство

$$(\mathbf{q}\nabla)\,\mathbf{q}=\frac{1}{2}\nabla\mathbf{q}^2-\mathbf{q}\times(\nabla\times\mathbf{q}).$$

Если величина $\boldsymbol{\eta}$ — постоянный вектор (который не подвергается действию оператора ∇), то из равенств (II) и (III) следуют соотношения

$$(\boldsymbol{\eta}\nabla)\,\mathbf{b}=-\nabla\times(\boldsymbol{\eta}\times\mathbf{b})+\boldsymbol{\eta}(\nabla\mathbf{b}),$$
$$(\boldsymbol{\eta}\nabla)\,\mathbf{b}=\nabla(\boldsymbol{\eta}\mathbf{b})+(\nabla\times\mathbf{b})\times\boldsymbol{\eta}. \tag{V}$$

Если величина φ — скаляр, то получим равенство

$$\nabla(\mathbf{a}\varphi)=\nabla(\varphi_0\mathbf{a})+\nabla(\varphi\mathbf{a}_0)=\varphi(\nabla\mathbf{a})+\mathbf{a}(\nabla\varphi), \tag{VI}$$

или

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{a})=\varphi\operatorname{div}\mathbf{a}+\mathbf{a}\operatorname{grad}\varphi.$$

Если φ и ψ — скалярные функции, то имеет место равенство

$$\nabla \times (\mathbf{a}\varphi) = \nabla \times (\mathbf{a}_0\varphi) + \nabla \times (\mathbf{a}\varphi_0) = \\ = -\mathbf{a} \times \nabla\varphi + \varphi(\nabla \times \mathbf{a}), \qquad \text{(VII)}$$

или

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a}\varphi) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \operatorname{grad} \varphi,$$

а также равенство

$$\nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi_0\psi) + \nabla(\varphi\psi_0) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi. \qquad \text{(VIII)}$$

Используя равенство (VIII), а затем равенство (VI), получаем следующую формулу:

$$\nabla^2(\varphi\psi) = \nabla(\nabla\varphi\psi) = \\ = \psi\nabla^2\varphi + 2(\nabla\varphi)(\nabla\psi) + \varphi\nabla^2\psi. \qquad \text{(IX)}$$

Кроме того, справедливо следующее равенство:

$$\nabla(\mathbf{a};\ \mathbf{b}) = \nabla(\mathbf{a};\ \mathbf{b}_0) + \nabla(\mathbf{a}_0;\ \mathbf{b}) = \\ = \mathbf{b}(\nabla\mathbf{a}) + (\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b}, \qquad \text{(X)}$$

которое в частном случае приводится к виду

$$\nabla(\mathbf{q};\ \mathbf{q}) = \mathbf{q}(\nabla\mathbf{q}) + (\mathbf{q}\nabla)\,\mathbf{q}.$$

2.40. Анализ движения элемента жидкости. Рассмотрим бесконечно малый элемент жидкости с центром в точке P.

Пусть радиус-вектор точки Q этого элемента жидкости относительно точки P равен $\boldsymbol{\eta}$ (рис. 35). Тогда, если скорость жидкости в точке P равна $\mathbf{q}$, скорость в точке Q, согласно п. 2.31, будет равна

$$\mathbf{q} + \mathbf{v} = \mathbf{q} + (\boldsymbol{\eta}\nabla)\,\mathbf{q}. \qquad (1)$$

Рассмотрим уравнение

$$[(\boldsymbol{\eta}\nabla)\,\mathbf{q}]\,\boldsymbol{\eta} = c,$$

где c — некоторая постоянная. Левая часть этого уравнения является однородной квадратичной функцией относительно компонент вектора $\boldsymbol{\eta}$ и, следовательно, представляет собой поверхность второго порядка[1]). Найдем нормаль к поверхности в точке с радиусом-вектором $\boldsymbol{\eta}$. Если вектор $d\boldsymbol{\eta}$ лежит в касательной плоскости к поверхности в точке Q, то вектор $\boldsymbol{\eta} + d\boldsymbol{\eta}$ с точностью до малых первого порядка относительно величины $d\boldsymbol{\eta}$ удовлетворяет уравнению поверхности. Поэтому после подстановки $\boldsymbol{\eta} + d\boldsymbol{\eta}$ в уравнение поверхности и отбрасывания члена второго порядка, содержащего величину $d\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{\eta}$, мы получим уравнение

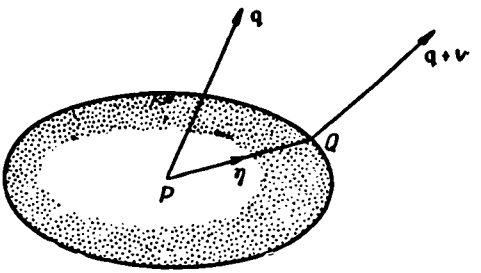


Рис. 35.

$$[(\boldsymbol{\eta}\nabla)\,\mathbf{q}]\,d\boldsymbol{\eta} + [(d\boldsymbol{\eta}\nabla)\,\mathbf{q}]\,\boldsymbol{\eta} = 0. \qquad (2)$$

Но так как оператор ∇ действует на вектор $\mathbf{q}$ и не действует на вектор $\boldsymbol{\eta}$, то из формулы (3) п. 2.31 мы находим соотношение

$$[(d\boldsymbol{\eta}\nabla)\,\mathbf{q}]\,\boldsymbol{\eta} = (d\boldsymbol{\eta}\nabla)(\mathbf{q}\boldsymbol{\eta}) = d\boldsymbol{\eta}\,[\nabla(\mathbf{q}\boldsymbol{\eta})].$$

[1]) Действительно, это центральная поверхность типа эллипсоида, так как если $\boldsymbol{\eta}$ принадлежит поверхности, то и $-\boldsymbol{\eta}$ принадлежит ей.

Из равенства (V) п. 2.34 следует соотношение

$$\nabla(\mathbf{q}\boldsymbol{\eta}) = -(\nabla \times \mathbf{q}) \times \boldsymbol{\eta} + (\boldsymbol{\eta}\nabla)\,\mathbf{q}.$$

Следовательно, из формулы (2) получаем уравнение

$$[(\boldsymbol{\eta}\nabla)\,\mathbf{q} - (\nabla \times \mathbf{q}) \times \boldsymbol{\eta} + (\boldsymbol{\eta}\nabla)\,\mathbf{q}]\,d\boldsymbol{\eta} = 0.$$

Так как нормаль к поверхности в точке Q перпендикулярна вектору $d\boldsymbol{\eta}$, то, следовательно, она направлена вдоль вектора

$$2(\boldsymbol{\eta}\nabla)\,\mathbf{q} - (\nabla \times \mathbf{q}) \times \boldsymbol{\eta} = 2f(\boldsymbol{\eta}). \tag{3}$$

Таким образом, из формул (1) и (3) мы получаем выражение для скорости жидкости в точке Q в виде

$$\mathbf{q} + \mathbf{v} = \mathbf{q} + \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{q}) \times \boldsymbol{\eta} + f(\boldsymbol{\eta}).$$

Отсюда видно, что скорость в точке Q имеет три слагаемых:

1) скорость $\mathbf{q}$ точки P, которая соответствует перемещению элемента как целого;

2) скорость $^1/_2(\nabla \times \mathbf{q}) \times \boldsymbol{\eta}$, которая представляет собой скорость вращения элемента как целого с угловой скоростью $^1/_2(\nabla \times \mathbf{q})$ (см. п. 2.12);

3) скорость $f(\boldsymbol{\eta})$ относительно точки P, направленная по нормали к той поверхности из семейства центральных поверхностей второго порядка $[(\boldsymbol{\eta}\nabla)\,\mathbf{q}]\,\boldsymbol{\eta} = \text{const}$, на которой лежит точка Q.

Первые два слагаемых описывают движение твердого тела; они сохранились бы, если бы элемент жидкости «отвердел». Третье слагаемое, называемое *чистой деформацией*, может существовать только в деформируемой среде, например в жидкости. Этот тип относительного движения характерен для любой деформируемой среды, независимо от того, является ли она жидкостью или нет.

Чтобы выяснить природу чистой деформации, заметим, что центральная поверхность второго порядка имеет три взаимно перпендикулярные оси симметрии, которые нормальны касательным плоскостям к поверхности в точках пересечения ее с осями симметрии. Отрезки прямых, параллельных этим осям, растягиваются с постоянными (хотя, вообще говоря, разными) скоростями. Такое движение будет деформировать элемент, имевший первоначально форму сферы, в эллипсоид. Кроме того, заметим, что линии, взятые в направлении осей симметрии в момент времени t, останутся взаимно перпендикулярными в момент $t + \delta t$. Так как оси симметрии параллельны нормалям к поверхности в точках пересечения ее с осями симметрии, направление этих осей задается уравнением

$$\boldsymbol{\eta} \times f(\boldsymbol{\eta}) = 0.$$

Проведенный анализ показывает, что такое описание движения связано с существенными свойствами жидкости и не зависит от выбранной системы координат.

2.41. Вихрь. Вектор $\nabla \times \mathbf{q} = \operatorname{rot}\mathbf{q} = \boldsymbol{\zeta}$ называется *вектором вихря*, или просто *вихрем*. Угловая скорость бесконечно малого элемента жидкости, которую часто, но не совсем удачно называют *молекулярным вращением*, равна половине вихря. Если бы сферический элемент жидкости внезапно «отвердел» и одновременно исчезла бы окружающая жидкость, «отвердевший» элемент жидкости вращался бы с этой угловой скоростью (см. пример **13** к гл. II).

Вихревой линией называется такая линия в жидкости, касательная в каждой точке которой направлена вдоль вектора вихря в этой точке.

В дальнейшем (п. 3.54) будет показано, что вихревые линии движутся вместе с жидкостью.

Если вихрь отличен от нуля, то говорят, что движение *вихревое*. Говорят также, что жидкость находится в состоянии *безвихревого движения*, если в каждой точке области, занятой движущейся жидкостью, вихрь равен нулю. В этой области жидкости не существует вихревых линий.

2.42. Циркуляция. Рассмотрим замкнутую кривую C, полностью расположенную в движущейся жидкости. Пусть $\mathbf{q}$ — вектор скорости в произвольной точке P этой кривой, а $\mathbf{s}_1$ — единичный вектор касательной к кривой в точке P (рис. 36). Направление касательной выбирается так, чтобы наблюдатель, движущийся из точки P в направлении $\mathbf{s}_1$, описывал кривую в выбранном положительном направлении. Возьмем на кривой точку Q, близкую к точке P, такую, что дуга PQ имеет бесконечно малую длину δs. Мы можем тогда в точке P образовать скалярное произведение $\mathbf{q}\mathbf{s}_1\delta s = \mathbf{q}\delta\mathbf{s}$, где $\delta\mathbf{s}$ — направленный элемент дуги в точке P (ср. п. 2.20).

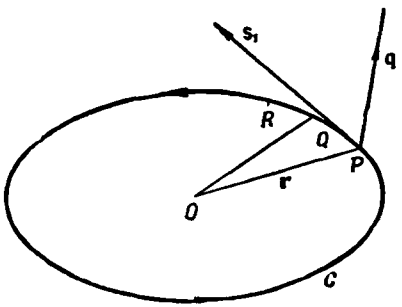


Рис. 36.

Образуя аналогичные произведения в точках Q, R, ... и т. д. вдоль всей кривой снова до точки P, мы определим *циркуляцию* вектора скорости вдоль замкнутой кривой C соотношением

$$\Gamma = \lim_{\delta s \to 0} \sum \mathbf{q}\delta\mathbf{s} = \int_{(C)} \mathbf{q}\, d\mathbf{s}.$$

Циркуляция может быть записана в одной из следующих форм:

$$\Gamma = \int_{(C)} \mathbf{q}\, d\mathbf{s} = \int_{(C)} \mathbf{q}\, d\mathbf{r} = \int_{(C)} \mathbf{q}\, d\mathbf{P},$$

каждая из которых означает одно и то же.

Мы можем образовать циркуляцию любого вектора вдоль некоторой замкнутой кривой.

2.50. Теорема Стокса. Пусть S — поверхность, ограниченная кривой C[1]), а $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к элементу площади dS, направленный в ту сторону, которая связана с направлением циркуляции вокруг dS и вдоль C правилом «правого винта» (рис. 37). Тогда имеет место равенство

$$\int_{(S)} \mathbf{n}\,(\nabla \times \mathbf{q})\, dS = \int_{(C)} \mathbf{q}\, d\mathbf{s} = \Gamma, \qquad (1)$$

которое выражает существо теоремы Стокса.

Доказательство. Если мы соединим точки кривой C семейством линий, лежащих на поверхности S так, чтобы образовать сетку, то мы увидим, что каждая ячейка сетки, за исключением тех, которые принадлежат кривой C, имеет линии, общие с соседними ячейками. Так как линии, которые принадлежат двум соседним ячейкам, проходятся дважды в противоположных направлениях, то, следовательно, циркуляция вдоль кривой C равна сумме циркуляций по всем ячейкам.

[1]) Такие поверхности можно условно представить как *пленку*, натянутую на контур C.

Таким образом, достаточно доказать теорему для одной бесконечно малой ячейки сетки, покрывающей поверхность S.

Так как любая ячейка может быть разделена на треугольники, то достаточно доказать теорему для одной треугольной ячейки ABC, стороны

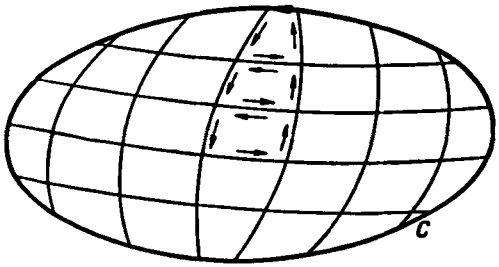


Рис. 37.

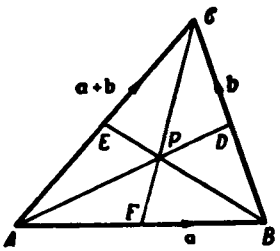


Рис. 38.

которой имеют бесконечно малую длину. Пусть D, E и F — середины этих сторон (рис. 38) и пусть P — центр тяжести треугольника; тогда можем записать

$$\overrightarrow{AB} = \mathfrak{a}; \quad \overrightarrow{BC} = \mathfrak{b}; \quad \overrightarrow{CA} = -(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}).$$

Обозначим через $\mathfrak{q}_M$ значение q в произвольной точке M. Тогда из определения интеграла следует приближенное равенство

$$\int\limits_{(ABC)} d\mathfrak{s}\mathfrak{q} = \overrightarrow{AB}\mathfrak{q}_F + \overrightarrow{BC}\mathfrak{q}_D + \overrightarrow{CA}\mathfrak{q}_E = \\ = \mathfrak{a}(\mathfrak{q}_F - \mathfrak{q}_E) + \mathfrak{b}(\mathfrak{q}_D - \mathfrak{q}_E).$$

Далее, из равенства (5) п. 2.31 следуют соотношения

$$\mathfrak{q}_F = \mathfrak{q}_P + (\overrightarrow{PF}\nabla)\,\mathfrak{q}_P; \quad \mathfrak{q}_E = \mathfrak{q}_P + (\overrightarrow{PE}\nabla)\,\mathfrak{q}_P.$$

Вычитая одно из другого, получим равенство

$$\mathfrak{q}_F - \mathfrak{q}_E = (\overrightarrow{EF}\nabla)\,\mathfrak{q}_P = -\frac{1}{2}(\mathfrak{b}\nabla)\,\mathfrak{q}_P. \tag{2}$$

Аналогично

$$\mathfrak{q}_D - \mathfrak{q}_E = \frac{1}{2}(\mathfrak{a}\nabla)\,\mathfrak{q}_P.$$

Следовательно,

$$\int d\mathfrak{s}\mathfrak{q} = -\frac{1}{2}[\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\nabla) - \mathfrak{b}(\mathfrak{a}\nabla)]\,\mathfrak{q}_P = \\ = \frac{1}{2}[(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\nabla]\,\mathfrak{q}_P.$$

Далее, $\mathfrak{n}\,dS = {}^1/_2(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})$, где dS — площадь треугольника ABC, и поэтому с той же степенью точности можем записать равенство

$$\int \mathfrak{n}(\nabla\times\mathfrak{q})\,dS = \frac{1}{2}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})(\nabla\times\mathfrak{q}) = \frac{1}{2}[(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\nabla]\,\mathfrak{q}_P.$$

Сравнивая последнее равенство с равенством (3), легко установить справедливость теоремы Стокса для бесконечно малого треугольника и, следовательно, для произвольной поверхности, которая может рассматриваться как предел суммы бесконечно малых треугольников. Граничная кривая

этой поверхности может рассматриваться как предел границы вписанных многоугольников.

Теорема Стокса, сформулированная выше, является частным случаем более общей теоремы, которую можно сформулировать следующим образом, если использовать понятие направленной площади:

$$\int_{(S)} \left(dS \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}}\right) X = \int_{(C)} ds\, X, \qquad (3)$$

где X — произвольная скалярная или векторная функция координат, а ds — направленный элемент дуги кривой C (рис. 39).

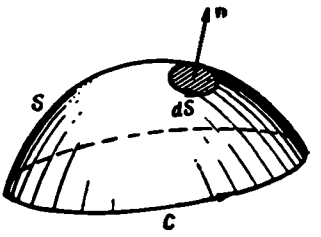


Рис. 39.

Доказательство. Как и в предыдущем случае, достаточно доказать эту теорему для отдельной ячейки сетки. Точно таким же образом, как и при доказательстве предыдущей теоремы, можно получить соотношение

$$\int_{(s)} ds\, X = -\frac{1}{2}\,\mathbf{a}\left[\mathbf{b}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{P}}\right] X + \frac{1}{2}\,\mathbf{b}\left[\mathbf{a}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{P}}\right] X = \left[\frac{1}{2}\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\frac{\partial}{\partial \mathbf{P}}\right] X,$$

а так как величина $^1/_2\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ представляет собой направленную площадь треугольной ячейки, то утверждение теоремы доказано для одной ячейки сетки и, следовательно, для общего случая.

В еще более общей форме теорему можно записать следующим образом:

$$\int_{(S)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}}\left[\left(dS \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}}\right) X\right] = \int_{(C)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}}\,(ds\, X). \qquad (4)$$

Доказательство теоремы в этой формулировке проводится точно так же, как и вышеприведенные доказательства. Необходимо отметить, что первые символы $\partial/\partial\mathbf{P}$ с каждой стороны равенства (4) мы можем заменить той же самой операцией, повторенной n раз.

2.51. Следствия из теоремы Стокса. Подставляя в формулы п. 2.50 вместо символа X выражения $\mathbf{q}$, φ, $\times\mathbf{q}$, мы получим следующие соотношения:

$$\int_{(C)} \mathbf{q}\, ds = \int_{(S)} (\mathbf{n}\times\nabla)\,\mathbf{q}\, dS = \int_{(S)} \mathbf{n}\,(\nabla\times\mathbf{q})\, dS =$$
$$= \int_{(S)} \mathbf{n}\zeta\, dS = \int_{(S)} \zeta\, dS, \qquad (1)$$

где ζ — вектор вихря. Таким образом, циркуляция скорости по любому замкнутому контуру равна интегралу от нормальной компоненты вектора вихря по любой поверхности, натянутой на этот контур[1]):

$$\int_{(C)} \varphi\, ds = \int_{(S)} (\mathbf{n}\times\nabla)\,\varphi\, dS, \qquad (2)$$

$$\int_{(C)} ds\times\mathbf{q} = \int_{(S)} (\mathbf{n}\times\nabla)\times\mathbf{q}\, dS = -\int_{(S)} \mathbf{n}\,(\nabla\mathbf{q})\, dS + \int_{(S)} (\nabla;\mathbf{q})\,\mathbf{n}\, dS. \qquad (3)$$

[1]) То есть равна потоку вектора вихря через любую поверхность, натянутую на контур. — *Прим. ред.*

2.52. Безвихревое движение. Пусть O — фиксированная, а P — произвольная точки некоторой односвязной [1]) области, в которой движение жидкости является безвихревым. Соединим точки O и P двумя кривыми OAP и OBP, каждая из которых лежит в нашей области (рис. 40).

Тогда для замкнутой кривой $OAPBO$, согласно теореме Стокса, имеет место соотношение

$$\int\limits_{(OAP)} \mathbf{q}\,d\mathbf{s} + \int\limits_{(PBO)} \mathbf{q}\,d\mathbf{s} = \int\limits_{(S)} \mathbf{n}(\nabla \times \mathbf{q})\,dS,$$

где S — произвольная поверхность, натянутая на контур $OAPBO$ и целиком лежащая в рассматриваемой области. Так как движение безвихревое, то $\nabla \times \mathbf{q} = 0$ и, следовательно,



Рис. 40.

$$\int\limits_{(OAP)} \mathbf{q}\,d\mathbf{s} = \int\limits_{(OBP)} \mathbf{q}\,d\mathbf{s} = -\varphi_P. \quad (1)$$

Здесь φ_P — скалярная функция, величина которой зависит только от положения точки P (и положения фиксированной точки O) и не зависит от выбора пути из точки O в точку P.

Далее, выберем точку Q настолько близкой к точке P, что можно считать вектор скорости $\mathbf{q}$ постоянным вдоль отрезка PQ.

Обозначим через $\boldsymbol{\eta}$ радиус-вектор точки Q относительно точки P. Тогда можно записать следующее приближенное соотношение:

$$-\boldsymbol{\eta}\nabla\varphi = -\varphi_Q + \varphi_P = \int\limits_{(PQ)} \mathbf{q}\,d\mathbf{s} = \mathbf{q}\boldsymbol{\eta},$$

где через φ обозначено φ_P.

Так как Q — произвольная точка, блнзкая к точке P, то вектор $\boldsymbol{\eta}$ также произвольный и, следовательно,

$$\mathbf{q} = -\nabla\varphi. \quad (2)$$

Таким образом, если движение жидкости безвихревое, то вектор скорости является градиентом некоторой скалярной функции [2]) координат — φ.

Эта скалярная функция называется *потенциалом скорости*. Мы доказали необходимость существования потенциала скорости при безвихревом движении жидкости. Обратно, если существует потенциал скорости, то движение жидкости является безвихревым, так как, согласно формуле (3) п. 2.32,

$$\nabla \times \mathbf{q} = -\nabla \times (\nabla\varphi) = 0.$$

Кроме того, из свойств векторной функции $\nabla\varphi$ следует, что скорость жидкости в любой точке перпендикулярна поверхности $\varphi = \text{const}$, проходящей через эту точку. Другими словами, линии тока ортогональны эквипотенциальным поверхностям.

2.53. Консервативное поле сил. Рассмотрим консервативное поле сил (см. п. 1.42). Работа, совершенная силой поля $\mathbf{F}$ при перемещении единичной массы из точки O в точку P, не зависит от пути. Таким образом

---

[1]) Значение этого термина см. в п. 3.70.

[2]) Одни авторы берут эту функцию со знаком минус, а другие — со знаком плюс. Взяв знак минус, мы следуем Ламбу. В этом случае $\varrho\varphi$ равно импульсивному давлению, которое вызывает движение в покоящейся жидкости (ср. п. 3.64).

(см. рис. 40), можно записать соотношение

$$\int\limits_{(OAP)} \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{(OBP)} \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = -\Omega_P,$$

где Ω_P — скалярная функция, величина которой зависит лишь от координат точки P (и координат фиксированной точки O).

Формально это уравнение не отличается от уравнения (1) предыдущего пункта, и поэтому, проведя те же рассуждения, мы можем получить равенство

$$\mathbf{F} = -\nabla\Omega,$$

где Ω — скалярная функция, называемая силовым потенциалом. Физически величина Ω равна потенциальной энергии поля, т. е. энергии, преобретаемой единицей массы при перемещении от точки O к точке P.

В дальнейшем знак минус в формуле (2) п. 2.52 обеспечит математическую (но не физическую) аналогию между потенциалом скорости и силовым потенциалом.

2.60. Теорема Гаусса. Рассмотрим замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V. Пусть X — скалярная или векторная функция, зависящая от координат точки в пространстве. Тогда, если обозначить элемент объема V через $d\tau$, а элемент поверхности S — через dS, то можно записать следующее равенство, которое выражает теорему Гаусса[1]):

$$\int\limits_{(V)} (\nabla X)\,d\tau = -\int\limits_{(S)} \mathbf{n}X\,dS,$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор *внутренней* нормали к элементу поверхности dS.

Доказательство. Разобьем объем V на элементарные объемы тремя семействами параллельных плоскостей. Если $\delta\tau$ — один из таких элементарных объемов, то мы можем записать приближенное равенство [см. формулу (1) п. 2.24]

$$(\nabla X)\,\delta\tau = -\int\limits_{(\delta S)} \mathbf{n}X\,dS.$$

Этот интеграл берется по поверхности δS объема $\delta\tau$. Просуммировав последнее равенство по всем элементарным объемам, получим соотношение

$$\int\limits_{(V)} (\nabla X)\,d\tau = \lim_{\delta\tau\to 0} \Sigma(\nabla X)\,\delta\tau = -\Sigma \int\limits_{(\delta S)} \mathbf{n}X\,dS.$$

Далее, в произвольной точке общей границы двух соседних элементов внутренние нормали к каждому элементу имеют противоположные знаки. Следовательно, поверхностные интегралы по границам, разделяющим соседние элементы объема, взаимно уничтожаются и остается только интеграл по поверхности S, что и требовалось доказать.

Заметим, что в последней теореме знак минус появился вследствие того, что мы использовали *внутреннюю* нормаль к элементам замкнутой поверхности S (рис. 41). Таким образом, в приложениях этой теоремы к гидродинамике мы будем применять нормаль, направленную внутрь жидкости, если S будет граничной поверхностью.

---

[1]) Gauss C. F., Theoria attractionis, Comm. soc. req. Gott., v. II. Göttingen, 1813. [В отечественной литературе эту теорему обычно называют теоремой Гаусса—Остроградского. — *Прим. ред.*]

Следует упомянуть, что строгое доказательство теорем Стокса и Гаусса и различных следствий, выводимых из этих теорем, основывается на некоторых предположениях о существовании и непрерывности частных производных, которые появляются при формулировке теоремы.

Разрывность параметров движения жидкости проявляется физически, если движение жидкости разрывное, и поэтому мы не будем рассматривать условия, при которых справедливы сформулированные теоремы, так как это увело бы нас слишком далеко от главной темы.

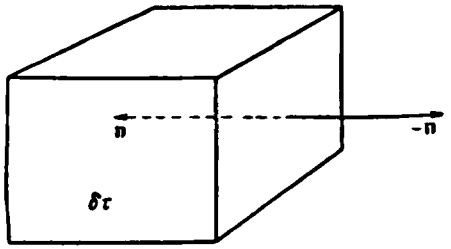


Рис. 41.

Если область, ограниченная поверхностью S, является m-связной областью (см. п. 3.70), мы превратим ее в односвязную, проведя $m-1$ перегородок $B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}$, и будем рассматривать каждую сторону перегородки как отдельную границу. Таким образом, в случае двусвязной области мы получим единственную перегородку B, стороны которой обозначим B^+ (положительная сторона) и B^- (отрицательная сторона). Тогда из теоремы Гаусса, примененной к полученной таким образом односвязной области, следует равенство

$$\int\limits_{(V)} \nabla X\, d\tau = -\int\limits_{(S)} \mathbf{n} X\, dS - \int\limits_{(B^+)} \mathbf{n}^+ X^+\, dS - \int\limits_{(B^-)} \mathbf{n}^- X^-\, dS.$$

Для любой точки B поверхности справедливо равенство $\mathbf{n}^+ + \mathbf{n}^- = 0$. Введем обозначение скачка функции X при пересечении перегородки B с отрицательной стороны на положительную следующим образом:

$$X^+ - X^- = [X].$$

Тогда теорема Гаусса для рассматриваемой двусвязной области запишется в виде

$$\int\limits_{(V)} \nabla X\, d\tau = -\int\limits_{(S)} \mathbf{n} X\, dS - \int\limits_{(B^+)} \mathbf{n}^+ [X]\, dS.$$

Если $m > 2$, то мы просто добавим в правой части последней формулы члены для других перегородок.

2.61. Следствия из теоремы Гаусса. Пусть $\mathbf{a}$ — некоторый вектор, а φ — некоторый скаляр. Заменим в теореме Гаусса выражение (∇X) последовательно на $\nabla \mathbf{a}$, $\nabla \times \mathbf{a}$, $\nabla \varphi$, $(\nabla\nabla)\varphi$, $(\nabla\nabla)\mathbf{a}$, $\nabla(\mathbf{q}; \mathbf{a})$.

Тогда мы получим следующие равенства:

$$\int\limits_{(V)} \nabla \mathbf{a}\, d\tau = -\int\limits_{(S)} \mathbf{n}\mathbf{a}\, dS, \tag{1}$$

$$\int\limits_{(V)} \nabla \times \mathbf{a}\, d\tau = -\int\limits_{(S)} \mathbf{n} \times \mathbf{a}\, dS, \tag{2}$$

$$\int\limits_{(V)} \nabla \varphi\, d\tau = -\int\limits_{(S)} \mathbf{n}\varphi\, dS, \tag{3}$$

$$\int\limits_{(V)} \nabla^2 \varphi\, d\tau = -\int\limits_{(S)} (\mathbf{n}\nabla)\varphi\, dS = -\int\limits_{(S)} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS, \text{ (см. п. 2.22)}, \tag{4}$$

$$\int_{(V)} \nabla^2 \mathbf{a}\, d\tau = -\int_{(S)} (\mathbf{n}\nabla)\, \mathbf{a}\, dS, \tag{5}$$

$$\int_{(V)} \nabla (\mathbf{q};\ \mathbf{a})\, d\tau = -\int_{(S)} \mathbf{n} (\mathbf{q};\ \mathbf{a})\, dS. \tag{6}$$

Последнее равенство может быть названо *тензорной формой* теоремы Гаусса.

Используя формулу (X) п. 2.34, это равенство можно свести к следующему виду:

$$\int_{(S)} \mathbf{a} (\mathbf{nq})\, dS = -\int_{(V)} [\mathbf{a} (\nabla \mathbf{q}) + (\mathbf{q}\nabla)\, \mathbf{a}]\, d\tau. \tag{7}$$

Теорема Гаусса может быть сформулирована также следующим образом

$$\int_{(V)} \frac{\partial X}{\partial \mathbf{P}}\, dV = -\int_{(S)} d\mathbf{S} X. \tag{8}$$

Здесь через dV обозначен элемент объема, а через $d\mathbf{S}$ — вектор элемента площади поверхности, направленный *внутрь* объема, ограниченного этой поверхностью.

2.615. Соленоидальный вектор образует трубки постоянной интенсивности. Если векторная функция $\mathbf{a}$ задает некоторое векторное поле, то векторными линиями поля называются линии, касательные к которым в каждой точке направлены вдоль вектора $\mathbf{a}$, проведенного в этой точке (ср. линии тока). Векторная трубка образуется векторными линиями поля, проведенными через каждую точку некоторой замкнутой кривой. Рассмотрим часть векторной трубки, заключенную между двумя *плоскими* сечениями S_1 и S_2, внешние нормали к которым обозначим через $\mathbf{n}_1$ и $-\mathbf{n}_2$. Из теоремы Гаусса можно получить равенство

$$\int_{(S_1)} \mathbf{n}_1 \mathbf{a}\, dS_1 - \int_{(S_2)} \mathbf{n}_2 \mathbf{a}\, dS_2 = \int_{(V)} \nabla \mathbf{a}\, d\tau = 0,$$

так как, по определению[1]), $\nabla \mathbf{a} = 0$ и так как на боковой поверхности векторной трубки $\mathbf{na}\, dS = 0$.

Таким образом, величина $A = \int \mathbf{na}\, dS$ остается постоянной вдоль векторной трубки. Мы назовем величину A *интенсивностью* векторной трубки. Следовательно, мы можем определить единичную трубку как трубку единичной интенсивности и говорить о числе единичных трубок N, которые охватывает данный контур C.

2.62. Теорема Грина[2]). Из формулы (VI) п. 2.34 для произвольного вектора $\mathbf{a}$ можно получить равенство

$$\nabla (\varphi \mathbf{a}) = \mathbf{a} (\nabla \varphi) + \varphi (\nabla \mathbf{a}).$$

Таким образом, из соотношения (1) п. 2.61 мы получаем равенство

$$-\int_{(S)} \mathbf{na} \varphi\, dS = \int_{(V)} \mathbf{a} (\nabla \varphi)\, d\tau + \int_{(V)} \varphi (\nabla \mathbf{a})\, d\tau.$$

[1]) См. примечание на стр. 48.

[2]) Green G., Essay on Electricity and Magnetism, Nottingham, 1828.

Подставляя сюда вместо вектора a вектор $\nabla\psi$, где ψ — некоторая скалярная функция, и замечая, что $\mathbf{n}(\nabla\psi)=\frac{\partial\psi}{\partial n}$ (см. п. 2.22), мы приходим к следующему соотношению:

$$\int\limits_{(V)}(\nabla\varphi\nabla\psi)\,d\tau=-\int\limits_{(V)}\varphi\nabla^2\psi\,d\tau-\int\limits_{(S)}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,dS=-\int\limits_{(V)}\psi\nabla^2\varphi\,d\tau-\int\limits_{(S)}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS. \quad (1)$$

Второе равенство следует из того, что выраженне в левой части не изменнтся, если скаляры φ и ψ поменять местами. Равенство (1) представляет собой содержание теоремы Грина, или *первое тождество Грина*.

Непосредственным следствием теоремы Грина является *второе тождество Грина*

$$\int\limits_{(V)}(\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi)\,d\tau=-\int\limits_{(S)}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS. \quad (2)$$

Положим в равенстве (1) $\varphi=\psi$. Тогда

$$\int\limits_{(V)}(\nabla\varphi)\,(\nabla\varphi)\,d\tau=-\int\limits_{(V)}\varphi\nabla^2\varphi\,d\tau-\int\limits_{(S)}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS. \quad (3)$$

Определение. Любое решение φ уравнения Лапласа

$$\nabla^2V=0$$

называется *гармонической функцией*.

Если φ — гармоническая функция, то из формулы (1) следует равенство

$$\int\limits_{(V)}(\nabla\varphi)\,(\nabla\psi)\,d\tau=-\int\limits_{(S)}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS. \quad (4)$$

Положим в этом равенстве $\psi=1$. Тогда

$$\int\limits_{(S)}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS=0. \quad (5)$$

Если φ и ψ — гармонические функции, то из формулы (2) получаем равенство

$$\int\limits_{(S)}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS=0. \quad (6)$$

В теореме Грина функции φ и ψ должны быть однозначными, т. е. каждой точке P области V должно соответствовать только одно значение функции φ и одно значение функции ψ. В наших приложениях эти функции обычно будут выражать потенциалы скорости, и требуемое условие будет выполнено, если область течения односвязна [1]). Если же функции φ и ψ являются потенциалами скоростей в многосвязной области течения, то условие однозначности может быть нарушено вследствие существования циркуляций. При наличии циркуляций формулировка теоремы Грина должна быть изменена.

Предположим, например, что область двусвязна и что на перегородке B, которая делает область односвязной, существует постоянный скачок функций φ и ψ, равный соответственно $\varkappa$ и λ. Эти величины называются *цик-*

[1]) См. п. 3.70.

ическими постоянными перегородкн. Следовательно, имеют место следующие равенства:

$$\varphi^+ - \varphi^- = [\varphi] = \varkappa; \quad \psi^+ - \psi^- = [\psi] = \lambda. \tag{7}$$

Тогда из предыдущих рассуждений следуют равенства

$$\begin{aligned}\int\limits_{(V)} (\nabla\varphi\nabla\psi)\,d\tau &= -\int\limits_{(V)} \varphi\nabla^2\psi\,d\tau - \int\limits_{(S)} \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,dS - \int\limits_{(B^+)} \varkappa\frac{\partial\psi}{\partial n^+}\,dS = \\ &= -\int\limits_{(V)} \varphi\nabla^2\psi\,d\tau - \int\limits_{(S)} \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,dS - \varkappa\int\limits_{(B^+)} \frac{\partial\psi}{\partial n^+}\,dS = \\ &= -\int\limits_{(V)} \psi\nabla^2\varphi\,d\tau - \int\limits_{(S)} \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS - \lambda\int\limits_{(B^+)} \frac{\partial\varphi}{\partial n^+}\,dS. \end{aligned} \tag{8}$$

Крайнее правое равенство получено с использоваиием формулы (4), где φ заменено на ψ. Эта замена законна, так как при этом выражение в левой частн не изменяется.

Формула (8) выражает содержание теоремы Грина для двусвязной области. Для n-связной области в правую часть формулы (8) следует добавить интегралы по всем остальным перегородкам. Например, если $n=3$, то формула примет следующий вид:

$$\int\limits_{(V)} (\nabla\varphi\nabla\psi)d\tau = -\int\limits_{(V)} \varphi\nabla^2\psi\,d\tau - \int\limits_{(S)} \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,dS - \varkappa_1\int\limits_{(B_1^+)} \frac{\partial\psi}{\partial n^+}\,dS - \varkappa_2\int\limits_{(B_2^+)} \frac{\partial\psi}{\partial n^+}\,dS.$$

2.63. Приложения теоремы Грина. Возьмем замкнутую поверхиость S, охватывающую область, в каждой точке которой справедливы равенства

$$\nabla^2\varphi = 0, \quad \nabla^2\psi = 0.$$

Тогда из теоремы Грина следует соотношение

$$\int\limits_{(S)} \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dS = 0. \tag{1}$$

Возьмем точку P, внутреннюю по отношению к поверхности S, и обозначим через r расстояние от точки P до элемента поверхности dS. Мы докажем, что если φ_P — значение функции φ в точке P, то справедливо равенство

$$\int\limits_{(S)} \left[\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] dS = 4\pi\varphi_P. \tag{2}$$

Эта формула определяет значение функции в произвольной точке внутри области через значения этой функции на границе области.

Доказательство. Возьмем $\psi = 1/r$. Легко доказать равенство $\nabla^2(1/r) = 0$. Окружим точку P сферой Σ с центром в этой точке. Радиус сферы R мал, так что сфера Σ целиком лежит внутри поверхности S. Применим формулу (2) п. 2.62 к области, заключенной между поверхностями Σ и S. Так как на поверхности Σ имеет место равенство $dn = dR$, то получаем соотношение

$$\int\limits_{(V)} \frac{1}{r}\nabla^2\psi\,d\tau = \int\limits_{(S)} \left[\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]dS + \int\limits_{(\Sigma)} \left[\varphi\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right] d\Sigma. \tag{3}$$

Так как первые два интеграла не зависят от величины R, то не должен зависеть от R и третий интеграл, который равен, следовательно, своему предельному значению при $R \to 0$ (рис. 42). Если выбрать R настолько малым, что на всей сфере $\varphi = \varphi_P$ с точностью до малых второго порядка, то предел этого интеграла можно вычислить следующим образом:

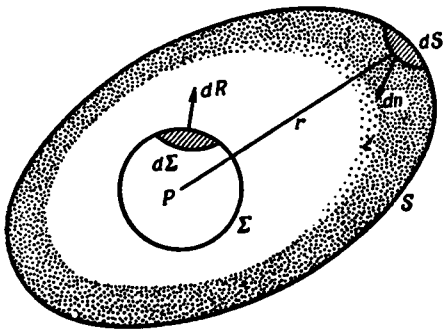


Рис. 42.

$$\lim_{R\to 0}\left[-\varphi_P\frac{1}{R^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right]4\pi R^2=-4\pi\varphi_P.$$

Отсюда мы получаем *третье тождество Грина*

$$\varphi_P=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(V)}\frac{1}{r}\nabla^2\varphi\,d\tau-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)}\varphi\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS. \qquad (4)$$

Так как $\nabla^2\varphi = 0$, то это равенство и доказывает формулу (2).

Из равенства (1), кроме того, следует, что если точка P лежит вне поверхности S, то левая часть равенства (2) обращается в нуль.

2.70. Декартовы координаты. Если выбраны три взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy, Oz и три единичных вектора $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, параллельные этим осям, то любой вектор $\mathbf{a}$ может быть выражен через свои компоненты [1]) a_x, a_y, a_z вдоль осей координат в виде

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}.$$

Так как векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ взаимно перпендикулярны, то их скалярные произведения выражаются равенствами

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1, \qquad \mathbf{ij} = \mathbf{jk} = \mathbf{ki} = 0,$$

а векторные произведения этих векторов — равенствами

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0; \quad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}; \quad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}; \quad \mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}.$$

Взяв второй вектор $\mathbf{b}$, мы получим для скалярного произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выражение

$$\mathbf{ab} = (\mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z)(\mathbf{i}b_x + \mathbf{j}b_y + \mathbf{k}b_z) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Векторное произведение этих векторов записывается в виде

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (\mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z)\times(\mathbf{i}b_x + \mathbf{j}b_y + \mathbf{k}b_z) =$$
$$= \mathbf{i}a_x\times(\mathbf{i}b_x + \mathbf{j}b_y + \mathbf{k}b_z) +$$
$$+ \mathbf{j}a_j\times(\mathbf{i}b_x + \mathbf{j}b_y + \mathbf{k}b_z) + \mathbf{k}a_z\times(\mathbf{i}b_x + \mathbf{j}b_y + \mathbf{k}b_z) =$$
$$= \mathbf{i}(a_yb_z - a_zb_y) + \mathbf{j}(a_zb_x - a_xb_z) + \mathbf{k}(a_xb_y - a_yb_x).$$

Векторное произведение можно запнсать более удобно в виде определителя

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

[1]) Это обозначение для компоиент вектора очень удобно. В соответствии с ним компоненты вектора скорости $\mathbf{q}$ обозначались бы q_x, q_y, q_z, хотя чаще их обозначают u, v, w. Мы будем использовать оба обозначения для компонент вектора $\mathbf{q}$.

При такой форме записи легко видеть, что векторы $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ имеют противоположные знаки, так как второй вектор получается из первого перестановкой двух последних строк в определителе; вследствие этого определитель меняет знак, но абсолютная величина его не изменяется.

Если $\varphi=\varphi(x, y, z)$ — скалярная функция, то мы можем доказать с помощью формул п. 2.22 равенство

$$\mathbf{i}\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

а из формулы (1) п. 2.15 получить следующее соотношение:

$$\nabla\varphi=\mathbf{i}(\mathbf{i}\nabla\varphi)+\mathbf{j}(\mathbf{j}\nabla\varphi)+\mathbf{k}(\mathbf{k}\nabla\varphi),$$

которое после простых преобразований принимает вид

$$\nabla\varphi=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi,$$

так что векторный оператор ∇ может быть записан следующим образом:

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1}$$

Если мы применим оператор ∇ к вектору $\mathbf{q}$, компоненты которого вдоль наших осей равны u, v, w, то получим равенство

$$\nabla\mathbf{q}=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathbf{i}u+\mathbf{j}v+\mathbf{k}w),$$

откуда после перемножения скобок найдем соотношение

$$\nabla\mathbf{q}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{2}$$

Применяя эту операцию к вектору $\nabla\varphi$, мы получим выражение для оператора Лапласа в виде

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Аналогично

$$\nabla\times\mathbf{q}=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\mathbf{i}u+\mathbf{j}v+\mathbf{k}w)=$$
$$=\mathbf{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Последнее соотношение мы можем также записать символически следующим образом:

$$\nabla\times\mathbf{q}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ u & v & w\end{vmatrix}.$$

Чтобы найти выражение $(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{q}$ в декартовых координатах, заметим, что если

$$\mathbf{a}=\mathbf{i}a_x+\mathbf{j}a_y+\mathbf{k}a_z,$$

то

$$\mathbf{a}\nabla=a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}$$

и, следовательно,

$$(\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{q} = \mathbf{i}\left(a_x\frac{\partial u}{\partial x}+a_y\frac{\partial u}{\partial y}+a_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)+$$
$$+\mathbf{j}\left(a_x\frac{\partial v}{\partial x}+a_y\frac{\partial v}{\partial y}+a_z\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\mathbf{k}\left(a_x\frac{\partial w}{\partial x}+a_y\frac{\partial w}{\partial y}+a_z\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Наконец,

$$\nabla^2\mathbf{q} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\mathbf{i}u+\mathbf{j}v+\mathbf{k}w) =$$
$$=\mathbf{i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+$$
$$+\mathbf{k}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right).$$

Приведенные выше соотношения в декартовых координатах показывают, насколько компактнее и удобнее использование векторных обозначений, не зависящих от системы координат. Векторные методы являются мощным средством для получения общих теорем и позволяют сразу выяснить их внутреннее содержание. Но для того чтобы исследовать частную задачу и получить числовые результаты, почти всегда необходимо на некотором этапе вводить систему координат. Ясно, что часто бывает полезно вводить систему координат в самом конце решения задачи.

2.71. Другое обозначение для оператора $\partial/\partial\mathbf{r}$. В предыдущем пункте мы показали, что оператор градиента может быть записан в виде

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z};\quad \mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z. \tag{1}$$

Следовательно, диадное произведение

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}};\ \mathbf{r} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right);\ (\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z) =$$
$$=(\mathbf{i};\mathbf{i})+(\mathbf{j};\mathbf{j})+(\mathbf{k};\mathbf{k}) = I \tag{2}$$

равно единичному тензору, введенному в п. 2.16.

Таким образом, если $\mathbf{a}$ — постоянный вектор, то

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{r}\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}};\mathbf{r}\right)\mathbf{a} = I\mathbf{a} = \mathbf{a}. \tag{3}$$

Кроме того, $\partial\mathbf{r}/\partial x = \mathbf{i}$, и, следовательно, имеет место равенство

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}}. \tag{4}$$

Эти результаты можно весьма просто обобщить.

Так, если $\mathbf{q} = \mathbf{i}u+\mathbf{j}v+\mathbf{k}w$, то мы можем записать

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial u}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial v}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial w}. \tag{5}$$

Отсюда следует, что если $\mathbf{a}$ — постоянный вектор, то

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}(\mathbf{q}\mathbf{a}) = \mathbf{a}, \tag{6}$$

а если T — некоторая скалярная функция переменных u, v и w, то

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial\mathbf{q}}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial\mathbf{q}}. \tag{7}$$

Из формулы (6), повторив рассуждения, приведенные в п. 2.33, можно получить следующее равенство:

$$\frac{\partial q^2}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}\mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0\mathbf{q}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}\mathbf{q}_0) = \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_0 = 2\mathbf{q}_0.$$

Легко показать, что если $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$ — радиусы-векторы фиксированной частицы жидкости в разные моменты времени, то имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial; \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0}, \tag{8}$$

где через $\partial; \mathbf{r}_0/\partial \mathbf{r}$ обозначено произведение $\partial/\partial \mathbf{r}; \mathbf{r}_0$. Отсюда, в частности, находим соотношение

$$\frac{\partial; \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial; \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_0} = \frac{\partial; \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}} = I = \frac{\partial; \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_0} \cdot \frac{\partial; \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{r}}. \tag{9}$$

Пусть T — однородная скалярная функция второй степени относительно векторов $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\omega}$. Это означает, что если $T = T(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$, а t — скаляр, тогда

$$T(t\mathbf{u}, t\boldsymbol{\omega}) = t^2 T(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}).$$

Введем обозначения $\boldsymbol{\xi} = t\mathbf{u}$; $\boldsymbol{\eta} = t\boldsymbol{\omega}$, и тогда

$$T(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = t^2 T(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}),$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial T(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})}{\partial t} = 2tT(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}).$$

Но

$$\frac{\partial T(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\xi}} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\eta}} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t} = \mathbf{u} \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\omega} \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\eta}}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{u} \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\omega} \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\eta}} = 2tT(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}).$$

Полагая $t = 1$, получаем равенство

$$\mathbf{u} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}} + \boldsymbol{\omega} \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} = 2T,$$

которое является векторным аналогом теоремы Эйлера об однородных функциях (второго порядка). Рассмотренное доказательство является совершенно общим и может быть применено к однородным функциям степени n; для этого в проведенном доказательстве число 2 надо заменить на n.

2.72. Криволинейные ортогональные координаты. Декартовы координаты точки определяются пересечением трех взаимно перпендикулярных плоскостей $x = \text{const}$; $y = \text{const}$; $z = \text{const}$. Для некоторых задач удобно ввести другие системы координат, например сферические координаты, в которых положение точки определяется пересечением сферы $r = \text{const}$, плоскости $\omega = \text{const}$ и конуса $\theta = \text{const}$ (рис. 43), или цилиндрические координаты, в которых положение точки определяется пересечением двух плоскостей $x = \text{const}$, $\omega = \text{const}$ и цилиндра $\varrho = \text{const}$ (рис. 44).

Чтобы вывести выражение для оператора ∇ в такой системе ортогональных координат, предположим, что координаты точки заданы равенствами

$$x = f_1(u_1, u_2, u_3), \quad y = f_2(u_1, u_2, u_3), \quad z = f_3(u_1, u_2, u_3),$$

где поверхности $u_1 = \text{const}$, $u_2 = \text{const}$, $u_3 = \text{const}$ взаимно ортогональны. Если мы проведем поверхности, соответствующие значениям координат u_1, u_2, u_3 и $u_1 + \delta u_1$, $u_2 + \delta u_2$, $u_3 + \delta u_3$, то получим фигуру, которая с точностью до малых первого порядка является параллелепипедом с ребрами

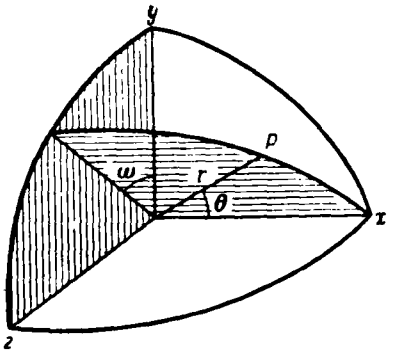


Рис. 43.

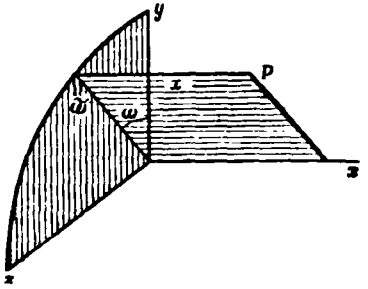


Рис. 44.

$h_1\delta u_1$, $h_2\delta u_2$, $h_3\delta u_3$ (рис. 45), где h_1, h_2, h_3 являются функциями координат и находятся из соотношения

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = h_1^2 (du_1)^2 + h_2^2 (du_2)^2 + h_3^2 (du_3)^2,$$

где

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial x}{\partial u_3} du_3$$

и т. д. При этом надо учитывать, что произведения вида $du_1 du_2$ пропадают вследствие ортогональности координат.

Пусть через $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ обозначены единичные векторы в направлениях OA, OB, OC, соответствующих возрастанию величин u_1, u_2, u_3. Эти векторы взаимно перпендикулярны и удовлетворяют всем соотношениям, выведенным в п. 2.70 для векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

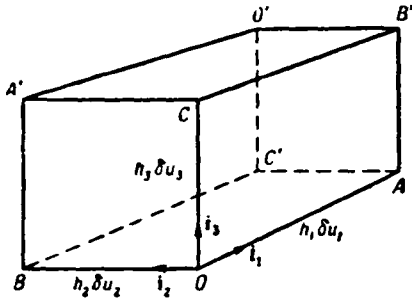


Рис. 45.

Тогда, учитывая результаты п. 2.31 для скалярной функции φ, можно записать соотношение

$$\mathbf{i}_1 \nabla\varphi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}$$

и отсюда, использовав формулу (1) п. 2.15, получим равенство

$$\nabla\varphi = \frac{\mathbf{i}_1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \frac{\mathbf{i}_2}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + \frac{\mathbf{i}_3}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3}. \qquad (1)$$

Таким образом, в криволинейных координатах оператор ∇ имеет вид

$$\nabla = \frac{\mathbf{i}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\mathbf{i}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\mathbf{i}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3}.$$

Так как единичные векторы сами являются функциями координат, мы должны вычислить выражения вида $\nabla \times \mathbf{i}_1$ и $\nabla \mathbf{i}_1$. Чтобы вывести первое из них, заметим, что из формулы (III) п. 2.31 следует равенство $\nabla \times (\nabla u_1) = 0$, а из формулы (I) — равенство $\nabla u_1 = \mathbf{i}_1 / h_1$. Следовательно, из формулы (VII)

п. 2.34 получим соотношение

$$\frac{1}{h_1}(\nabla \times \mathbf{i}_1) = \mathbf{i}_1 \times \nabla\left(\frac{1}{h_1}\right) =$$

$$= \mathbf{i}_1 \times \left[-\frac{1}{h_1^3}\frac{\partial h_1}{\partial u_1}\mathbf{i}_1 - \frac{1}{h_1^2 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial u_2}\mathbf{i}_2 - \frac{1}{h_1^2 h_3}\frac{\partial h_1}{\partial u_3}\mathbf{i}_3 \right].$$

Отсюда

$$\nabla \times \mathbf{i}_1 = \frac{\mathbf{i}_2}{h_1 h_3}\frac{\partial h_1}{\partial u_3} - \frac{\mathbf{i}_3}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial u_2}.$$

Далее, из соотношения (1) п. 2.34 получаем

$$\nabla \mathbf{i}_1 = \nabla(\mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3) = \mathbf{i}_3(\nabla \times \mathbf{i}_2) - \mathbf{i}_2(\nabla \times \mathbf{i}_3).$$

Следовательно,

$$\nabla \mathbf{i}_1 = \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial u_1} + \frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial u_1} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial (h_2 h_3)}{\partial u_1} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial [\ln (h_2 h_3)]}{\partial u_1}.$$

Теперь пусть

$$\mathbf{q} = q_1 \mathbf{i}_1 + q_2 \mathbf{i}_2 + q_3 \mathbf{i}_3.$$

Тогда из формулы (IV) п. 2.34 следует равенство

$$\nabla \mathbf{q} = \Sigma \nabla (q_k \mathbf{i}_k) = \Sigma (q_k \nabla \mathbf{i}_k + \mathbf{i}_k \nabla q_k).$$

Это равенство приводится к виду

$$\nabla \mathbf{q} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(q_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(q_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3}(q_3 h_1 h_2) \right]. \tag{2}$$

Так, если $\mathbf{q} = -\nabla \varphi$, то из соотношений (1) и (2) получаем формулу

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial \varphi}{\partial u_3}\right) \right]. \tag{3}$$

Далее,

$$\nabla \times \mathbf{q} = \Sigma \nabla \times (q_k \mathbf{i}_k) = \Sigma [-\mathbf{i}_k \times \nabla q_k + q_k (\nabla \times \mathbf{i}_k)],$$

и, следовательно, после преобразования выражение для вихря можно представить в форме определителя

$$\zeta = \nabla \times \mathbf{q} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1 \mathbf{i}_1 & h_2 \mathbf{i}_2 & h_3 \mathbf{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 q_1 & h_2 q_2 & h_3 q_3 \end{vmatrix}, \tag{4}$$

где

$$\zeta = \zeta_1 \mathbf{i}_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_2 + \zeta_3 \mathbf{i}_3. \tag{5}$$

Из формул (7) п. 3.10 и (IV) п. 2.34 мы получаем следующее выражение для ускорения [1]):

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla q^2 - \mathbf{q} \times \zeta.$$

Вычислим компоненту ускорения вдоль вектора $\mathbf{i}_1$. Мы имеем

$$\left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}\right)_1 = \frac{\partial q_1}{\partial t}.$$

[1]) Это выражение помещено здесь для удобства изложения, но сначала следует прочитать п. 3.10 следующей главы.

Из формулы (1) получим равенство

$$\left(\frac{1}{2}\nabla q^2\right)_1 = \frac{1}{h_1}\left(q_1\frac{\partial q_1}{\partial u_1} + q_2\frac{\partial q_2}{\partial u_1} + q_3\frac{\partial q_3}{\partial u_1}\right),$$

а из формулы (4) — соотношение

$$(\mathbf{q}\times\boldsymbol{\zeta})_1 = q_2\zeta_3 - q_3\zeta_2 =$$
$$= \frac{q_2}{h_1h_2h_3}\left(h_3\frac{\partial q_2h_2}{\partial u_1} - h_3\frac{\partial q_1h_1}{\partial u_2}\right) + \frac{q_3}{h_1h_2h_3}\left(h_2\frac{\partial q_3h_3}{\partial u_1} - h_2\frac{\partial q_1h_1}{\partial u_3}\right).$$

Комбинируя последние три равенства, получаем выражение для компоненты ускорения вдоль вектора $\mathbf{i}_1$ в виде

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{1}{h_1}q_1\frac{\partial q_1}{\partial u_1} + \frac{1}{h_2}q_2\frac{\partial q_1}{\partial u_2} + \frac{1}{h_3}q_3\frac{\partial q_1}{\partial u_3} +$$
$$+ \frac{1}{h_1}q_1\left[\frac{q_1}{h_1}\left(\frac{\partial h_1}{\partial u_1}\right) + \frac{q_2}{h_2}\left(\frac{\partial h_1}{\partial u_2}\right) + \frac{q_3}{h_3}\left(\frac{\partial h_1}{\partial u_3}\right)\right] -$$
$$- \frac{1}{h_1}\left[\frac{q_1^2}{h_1}\left(\frac{\partial h_1}{\partial u_1}\right) + \frac{q_2^2}{h_2}\left(\frac{\partial h_2}{\partial u_1}\right) + \frac{q_3^2}{h_3}\left(\frac{\partial h_3}{\partial u_1}\right)\right]. \qquad (6)$$

Остальные компоненты ускорения можно выписать, пользуясь правилом симметрии.

Проиллюстрируем полученные результаты на примере сферических координат. В этом случае (см. рис. 43) можем записать равенства

$$x = r\cos\theta;\ y = r\sin\theta\cos\omega;\ z = r\sin\theta\sin\omega,$$
$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr^2) + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta\,(d\omega)^2.$$

Таким образом, если положить $u_1 = r$; $u_2 = \theta$; $u_3 = \omega$, то мы получим

$$h_1 = 1;\ h_2 = r;\ h_3 = r\sin\theta. \qquad (7)$$

Из равенства (3) следует соотношение

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right)\right].$$

Аналогично для цилиндрических координат

$$x = x;\quad y = \tilde{\omega}\cos\omega;\quad z = \tilde{\omega}\sin\omega.$$

Полагая $u_1 = x$, $u_2 = \tilde{\omega}$, $u_3 = \omega$, мы получим $h_1 = 1$; $h_2 = 1$; $h_3 = \tilde{\omega}$.

Используя формулу (4), получим выражение для вихря в цилиндрических координатах в виде

$$\boldsymbol{\zeta} = \frac{1}{\tilde{\omega}}\begin{vmatrix} i_x & i_{\tilde{\omega}} & \tilde{\omega}i_\omega \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial\tilde{\omega}} & \dfrac{\partial}{\partial\omega} \\ q_x & q_{\tilde{\omega}} & \tilde{\omega}q_\omega \end{vmatrix}, \qquad (8)$$

где индексы обозначают направление соответствующего единичного вектора или компоненту вектора (см. также примеры 16, 17 к гл. 2).

2.73. Скорость изменения единичных векторов. В ортогональных криволинейных координатах (п. 2.72) мы можем вычислить производные $\partial\mathbf{i}_r/\partial u_s$ ($r, s = 1, 2, 3$) следующим образом. Согласно теореме Дюпена[1]), линии

[1]) Bell R. J. T., Coordinate geometry of three dimensions, Lnd., 1926, стр. 334—344. [Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, ГИТТЛ, М., 1956, стр. 267—268. — *Прим. ред*].

пересечения трижды ортогональной системы поверхностей представляют собой линии кривизны. Следовательно, кривые, вдоль которых изменяются или координата u_1, или координата u_2, являются линиями кривизны поверхности $u_3 = \text{const}$. Тогда нормали к поверхности в смежных точках линии кривизны пересекаются. Следовательно, когда мы движемся вдоль отрезка OA (см. рис. 45), нормаль $\mathbf{i}_3 + d\mathbf{i}_3$ пересекает нормаль $\mathbf{i}_3$. Отсюда следует, что вектор $d\mathbf{i}_3$ перпендикулярен векторам $\mathbf{i}_2$ и $\mathbf{i}_3$, т. е. параллелен вектору $\mathbf{i}_1$. Следовательно, вектор $\partial\mathbf{i}_3/\partial u_1$ параллелен вектору $\mathbf{i}_1$. Аналогично можно показать, что $\partial\mathbf{i}_3/\partial u_2$ параллелен вектору $\mathbf{i}_2$, и получить еще четыре подобных результата.

Пусть $d\mathbf{s} = h_1 du_1 \mathbf{i}_1 + h_2 du_2 \mathbf{i}_2 + h_3 du_3 \mathbf{i}_3$. Отсюда

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u_1} = h_1 \mathbf{i}_1; \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u_2} = h_2 \mathbf{i}_2; \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u_3} = h_3 \mathbf{i}_3.$$

Следовательно, $\dfrac{\partial (h_1 \mathbf{i}_1)}{\partial u_2} = \dfrac{\partial (h_2 \mathbf{i}_2)}{\partial u_1}$, откуда

$$h_1 \frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial u_2} - h_2 \frac{\partial \mathbf{i}_2}{\partial u_1} = \mathbf{i}_2 \frac{\partial h_2}{\partial u_1} - \mathbf{i}_1 \frac{\partial h_1}{\partial u_2}.$$

Но вектор $\partial\mathbf{i}_1/\partial u_2$ параллелен $\mathbf{i}_2$, а вектор $\partial\mathbf{i}_2/\partial u_1$ параллелен $\mathbf{i}_1$. Следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial u_2} = \frac{\mathbf{i}_2}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial u_1}; \quad \frac{\partial \mathbf{i}_2}{\partial u_1} = \frac{\mathbf{i}_1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial u_2}. \tag{1}$$

Кроме того, из равенства $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3$ мы получаем соотношение

$$\frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial u_1} = \frac{\partial \mathbf{i}_2}{\partial u_1} \times \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_2 \times \frac{\partial \mathbf{i}_3}{\partial u_1} = -\frac{\mathbf{i}_2}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial u_2} - \frac{\mathbf{i}_3}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial u_3} = \frac{\mathbf{i}_1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} - \nabla h_1. \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) мы можем получить производные $\partial\mathbf{i}_r/\partial u_s$ для всех значений $r, s = 1, 2, 3$.

Эти результаты вместе с оператором

$$\nabla = \frac{\mathbf{i}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\mathbf{i}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\mathbf{i}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3}$$

дают возможность весьма экономно вычислить любую ∇-операцию.

ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ 2

1. Пусть массы m, n сосредоточены на концах векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; доказать, что центр тяжести этих масс выражается вектором $(m\mathbf{a} + n\mathbf{b})/(m+n)$.

2. Доказать равенства

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \tag{1}$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = a^2 + b^2 + 2\mathbf{ab}, \tag{2}$$

$$\mathbf{a}\,(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = [\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]. \tag{3}$$

3. Доказать равенства

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times (\mathbf{a}-\mathbf{b}) = -2\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \tag{1}$$

$$|\,\mathbf{a} \times \mathbf{b}\,|^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{ab})^2 = (ab + \mathbf{ab})\,(ab - \mathbf{ab}). \tag{2}$$

4. Доказать равенства

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0, \tag{1}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{ac})\,(\mathbf{bd}) - (\mathbf{ad})\,(\mathbf{bc}) \text{ (тождество Лагранжа)}, \tag{2}$$

$$\mathbf{a}\,[\mathbf{b}\,(\mathbf{c} \times \mathbf{d})] - \mathbf{b}\,[\mathbf{a}\,(\mathbf{c} \times \mathbf{d})] + \mathbf{c}\,[\mathbf{d}\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})] - \mathbf{d}\,[\mathbf{c}\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})] = 0. \tag{3}$$

5. Доказать, что площадь треугольника, радиусы-векторы вершин которого равны a, b, c, равна модулю вектора

$$\frac{1}{2}[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+(\mathbf{a}\times\mathbf{b})].$$

6. Доказать, что если λ — скалярная, а r и s — векторные функции переменной t, то выполняются соотношения

$$\frac{d}{dt}(\lambda\mathbf{r})=\lambda\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\mathbf{r}\frac{d\lambda}{dt}, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{rs})=\mathbf{r}\frac{d\mathbf{s}}{dt}+\mathbf{s}\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{s})=\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{s}}{dt}+\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{s}. \tag{3}$$

7. Пусть имеется семейство поверхностей $\varphi=c$, где φ — потенциал скорости, а постоянная c принимает ряд равноотстоящих бесконечно малых значений. Показать, что в любой точке скорость обратно пропорциональна расстоянию между соседними поверхностями в окрестности этой точки.

Доказать также, что если некоторая эквипотенциальная поверхность имеет точку самопересечения, то эта точка является критической точкой.

8. Пусть через $\varphi(\mathbf{r}, t)$ обозначен потенциал скорости; доказать равенство

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt-\mathbf{q}\,d\mathbf{r}$$

и показать, что дифференциальное уравнение линий тока имеет вид

$$d\mathbf{r}\times\nabla\varphi=0.$$

9. Пусть φ и φ' — два решения уравнения Лапласа (п. 3.20) для области, ограниченной замкнутой поверхностью S. Доказать равенство

$$\int\limits_{(S)}\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n}dS=\int\limits_{(S)}\varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS.$$

10. Пусть функция $\varphi(x+h, y+k, z+l)$ записана в виде $\varphi(\mathbf{r}+\mathbf{R})$, где

$$\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z;\quad \mathbf{R}=\mathbf{i}h+\mathbf{j}k+\mathbf{k}l.$$

Доказать, что теорему Тейлора можно записать в следующей символической форме:

$$\varphi(\mathbf{r}+\mathbf{R})=\varphi(\mathbf{r})+(\mathbf{R}\nabla)\varphi(\mathbf{r})+\frac{1}{2!}(\mathbf{R}\nabla)^2\varphi(r)+\cdots.$$

11. Пусть $\boldsymbol{\eta}=\mathbf{i}\delta x+\mathbf{j}\delta y+\mathbf{k}\delta z$; доказать, пользуясь обозначениями п. 2.40, следующее равенство:

$$f(\boldsymbol{\eta})=\mathbf{i}(a\,\delta x+h\delta y+g\delta z)+\mathbf{j}(h\delta x+b\delta y+f\delta z)+\mathbf{k}(g\delta x+f\delta y+c\delta z),$$

где

$$a=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad b=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad c=\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$2f=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z},\qquad 2g=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},\qquad 2h=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y},$$

и, следовательно, уравнение центральной поверхности второго порядка (см. п. 2.40) имеет вид

$$a(\delta x)^2+b(\delta y)^2+c(\delta z)^2+2f\delta y\delta z+2g\delta z\delta x+2h\delta x\delta y=\text{const}.$$

12. Пусть $\mathbf{q}=\mathbf{i}u+\mathbf{j}v+\mathbf{k}w$, $\boldsymbol{\eta}=\mathbf{i}\delta x+\mathbf{j}\delta y+\mathbf{k}\delta z$; доказать равенство

$$(\boldsymbol{\eta}\nabla)\mathbf{q}=\mathbf{i}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\delta z\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\delta y+\frac{\partial v}{\partial z}\delta z\right)+$$
$$+\mathbf{k}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\delta x+\frac{\partial w}{\partial y}\delta y+\frac{\partial w}{\partial z}\delta z\right).$$

13. Доказать, что в любой точке P движущейся жидкости существует в произвольный момент времени единственный триэдр с взаимно перпендикулярными осями, такой, что если этот триэдр движется вместе с жидкостью, то через малый промежуток времени δt углы между его осями остаются прямыми с точностью до членов первого порядка малости относительно δt, и что угловая скорость вращения триэдра при движении его вместе с жидкостью равна $^1/_2 \operatorname{rot} \mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — скорость жидкости в точке P. Доказать также, что если малая частица жидкости с центром масс в точке P мгновенно отвердеет, не изменяя своего момента количества движения, то угловая скорость ее сразу после отвердевания равна $^1/_2 \operatorname{rot} \mathbf{v}$ тогда и только тогда, когда главные оси инерции отвердевшей частицы направлены вдоль осей упомянутого выше триэдра.

14. Используя тензорную форму теоремы Гаусса, доказать равенства

$$\int\limits_{(S)} (\mathbf{nq})\,\mathbf{q}\,dS = \int\limits_{(V)} [(\mathbf{q}\nabla)\,\mathbf{q} + \mathbf{q}\,(\nabla\mathbf{q})]\,d\tau, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{(S)} [\mathbf{nq}^2 - 2\,(\mathbf{nq})\,\mathbf{q}]\,dS = \int\limits_{(V)} [\mathbf{q}\,(\nabla\mathbf{q}) - \mathbf{q}\times\boldsymbol{\zeta}]\,d\tau. \tag{2}$$

15. Пусть P, Q и R — ограниченные, непрерывные и однозначные функции переменных x, y, z в области, ограниченной замкнутой поверхностью S; доказать, что имеет место равенство

$$\iiint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \int\limits_{(S)} (lP + mQ + nR)\,dS,$$

где l, m, n — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

Вычислить интеграл $\int dS/p$, распространенный по поверхности некоторого эллипсоида, где p — длина перпендикуляра, опущенного из центра эллипсоида на касательную плоскость.

16. Доказать, что в сферических координатах компоненты вектора вихря задаются формулами

$$(\operatorname{rot}\mathbf{q})_r = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\,(q_\omega \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial q_\theta}{\partial\omega}\right],$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{q})_\omega = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\,(q_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial q_r}{\partial\theta}\right],$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{q})_\theta = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial q_r}{\partial\omega} - \frac{\partial\,(q_\omega r)}{\partial r}\right].$$

17. Доказать, что в цилиндрических координатах справедливо равенство

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tilde{\omega}^2} + \frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{\omega}} + \frac{1}{\tilde{\omega}^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}.$$

18. Доказать, что в цилиндрических координатах компоненты вектора вихря имеют вид

$$(\operatorname{rot}\mathbf{q})_x = \frac{1}{\tilde{\omega}}\left[\frac{\partial\,(q_\omega\tilde{\omega})}{\partial\tilde{\omega}} - \frac{\partial q_{\tilde{\omega}}}{\partial\omega}\right],$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{q})_{\tilde{\omega}} = \frac{1}{\tilde{\omega}}\left[\frac{\partial q_x}{\partial\omega} - \frac{\partial\,(q_\omega\tilde{\omega})}{\partial x}\right],$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{q})_\omega = \frac{\partial q_{\tilde{\omega}}}{\partial x} - \frac{\partial q_x}{\partial\tilde{\omega}}.$$

19. Доказать, что если точка P лежит на прямой, которая проходит через конец вектора $\mathbf{a}$ параллельно вектору $\mathbf{b}$, то уравнение этой прямой имеет вид $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{a} + \mathbf{b}t$, где $\boldsymbol{\eta}$ — радиус-вектор точки P, а t — произвольный скаляр.

20. Показать, что уравнение плоскости, имеющей нормаль $\mathbf{n}$ и проходящей через конец вектора $\mathbf{a}$, имеет вид

$$(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{a})\,\mathbf{n} = 0.$$

21. Показать, что если F — тензор, то уравнение $\boldsymbol{\eta}F\boldsymbol{\eta} = \text{const}$ задает семейство центральных поверхностей второго порядка.

22. Доказать равенства $\nabla \times \mathbf{r}=0$, $\nabla \mathbf{r}=3$; $\nabla r=\mathbf{r}/r$,

$$\nabla (1/r)=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \nabla^2 (1/r)=0.$$

23. Доказать, что в общих ортогональных координатах имеют место соотношения

$$(\mathbf{i}_1\nabla)\,\mathbf{i}_1=-\frac{\mathbf{i}_2}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial u_2}-\frac{\mathbf{i}_3}{h_1h_3}\frac{\partial h_1}{\partial u_3},$$

$$(\mathbf{i}_1\nabla)\,\mathbf{i}_2=\frac{\mathbf{i}_1}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial u_2}; \quad (\mathbf{i}_1\nabla)\,\mathbf{i}_3=\frac{\mathbf{i}_1}{h_1h_3}\frac{\partial h_1}{\partial u_3},$$

и вывести выражение для $(\mathbf{i}_1\nabla)\,\mathbf{q}$.

24. Показать, что члены в выражении $(\nabla; \mathbf{q})$ имеют вид

$$\frac{\mathbf{i}_1;\mathbf{i}_1}{h_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial u_1}+\frac{q_2}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial u_2}+\frac{q_3}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial u_3}\right); \quad \frac{\mathbf{i}_2;\mathbf{i}_3}{h_2h_3}\left(h_3\frac{\partial q_3}{\partial u_2}-q_2\frac{\partial h_2}{\partial u_3}\right),$$

и отсюда вывести полное выражение для $(\nabla; \mathbf{q})$.

25. Доказать, что если Φ — произвольная диада, то справедливы равенства

$$\nabla (\mathbf{q}\Phi)=\mathbf{q}\nabla\Phi+(\Phi\nabla)\,\mathbf{q}, \tag{1}$$

$$\Phi=(\Phi\mathbf{i};\ \mathbf{i})+(\Phi\mathbf{j};\ \mathbf{j})+(\Phi\mathbf{k};\ \mathbf{k}). \tag{2}$$

26. Доказать, что если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — произвольные некомпланарные векторы, а векторы $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$ выбраны так, что $\mathbf{a}^*\mathbf{a}=1$; $\mathbf{b}^*\mathbf{b}=1$; $\mathbf{c}^*\mathbf{c}=1$, а произведения $\mathbf{ab}^*$, $\mathbf{ac}^*$ и т. д. все равны нулю, то выражение $(\mathbf{a}; \mathbf{a}^*)+(\mathbf{b}; \mathbf{b}^*)+(\mathbf{c}; \mathbf{c}^*)$ есть единичный тензор.

27. Пусть $\mathbf{u}$ — единичный вектор. Дать геометрическую интерпретацию скалярному произведению $\mathbf{ux}$ и доказать геометрически равенство

$$\mathbf{u}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{ub}+\mathbf{uc}.$$

Вывести закон дистрибутивности для скалярного произведения.

28. Рассматривая векторное произведение единичного вектора $\mathbf{u}$ и вектора

$$\mathbf{x}=\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})-\mathbf{a}\times\mathbf{b}-\mathbf{a}\times\mathbf{c},$$

и используя результаты предыдущей задачи, показать, что $\mathbf{x}=0$, доказав таким образом закон дистрибутивности для векторного произведения.

29. Используя обозначения п. 2.50, доказать равенства

$$\int\limits_{(S)} \nabla (\mathbf{n}\zeta)\,dS=\int\limits_{(C)} \nabla (\mathbf{q}\,ds).$$

30. Используя обозначения п. 2.72, доказать равенство

$$h_1^2=\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\right)^2$$

и вывести аналогичные соотношения для величин h_2 и h_3.

31. Доказать равенство

$$[\mathbf{abc}]\,(\mathbf{p}\times\mathbf{q})=\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{pa} & \mathbf{pb} & \mathbf{pc} \\ \mathbf{qa} & \mathbf{qb} & \mathbf{qc} \end{vmatrix}.$$

32. Доказать равенства

$$\nabla\left[(\mathbf{q};\ \mathbf{q})-\frac{1}{2}Iq^2\right]=\mathbf{q}(\nabla\mathbf{q})-\mathbf{q}\times\zeta, \tag{1}$$

$$\nabla\left\{\mathbf{r}\times\left[(\mathbf{q};\ \mathbf{q})-\frac{1}{2}Iq^2\right]\right\}=-\mathbf{r}\times[\mathbf{q}(\nabla\mathbf{q})-\mathbf{q}\times\zeta]. \tag{2}$$

Глава 3

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

3.10. Дифференцирование по времени. На рис. 46 показана действительная траектория жидкой частицы, находящейся в момент времени t_0 в точке A, которая имеет радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ относительно фиксированной точки O.

В момент времени t частица находится в точке P, в момент $t+\delta t$ она находится в точке Q, радиусами-векторами этих точек являются $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}$ соответственно. Частицу, расположенную в точке P, можно охарактеризовать скалярными функциями, такими, как давление и плотность в точке P, и векторными функциями, такими, как скорость и ускорение в точке P.

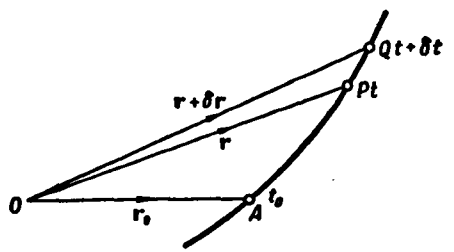


Рис. 46.

Попытаемся получить производные по времени от таких скалярных и векторных функций. Прежде всего заметим, что радиус-вектор $\mathbf{r}$ отдельной частицы жидкости является функцией только времени t, так как ясно, что $\mathbf{r}$ может зависеть только от времени t и некоторого фиксированного начального положения, например точки A.

В п. 1.10 было получено равенство

$$\mathbf{q}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь, например, плотность ρ. Для частицы, находящейся в точке P, плотность зависнт только от радиуса-вектора $\mathbf{r}$ и времени t, так что

$$\rho=f(\mathbf{r}, t).$$

Так как $\mathbf{r}$ является функцией только от времени t, то и плотность ρ является функцией только от времени t и, следовательно, мы можем найти полную производную $d\rho/dt$. Для ее вычисления воспользуемся следующей формулой из п. 2.71:

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t}+\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}=\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t}+\left(\mathbf{q}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)f(\mathbf{r}, t),$$

и, следовательно,

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\mathbf{q}\nabla)\rho. \tag{2}$$

Первый член в правой части этой формулы представляет собой скорость изменения ρ по времени, если P рассматривать как фиксированную точку, второй — скорость изменения ρ в момент временн t за счет того, что частица переместилась из точки P в точку Q. Поскольку ρ — скаляр, то выражение (2) можно записать в виде

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathbf{q}(\nabla\rho). \tag{3}$$

Формула (3) определяет скорость изменения плотности при движении частицы жидкости. Если жидкость несжимаема, то плотность частиц жидкости не изменяется, поэтому справедливы равенства

$$\frac{d\varrho}{dt}=0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial\varrho}{\partial t}+\mathbf{q}(\nabla\varrho)=0. \tag{4}$$

Если плотность ϱ постоянна, то уравнение (4) удовлетворяется тождественно.

Применяя подобный вывод к любой скалярной функции α, получим формулу

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\mathbf{q}(\nabla\alpha). \tag{5}$$

Чтобы найти скорость изменения вектора $\mathbf{a}$, связанного с частицей, применим соображения, аналогичные соображениям, использованным при выводе соотношения (2); теперь получим формулу

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t}+(\mathbf{q}\nabla)\,\mathbf{a}, \tag{6}$$

которую нельзя привести к виду (3).

Наиболее важным является случай, когда $\mathbf{q}$ представляет собой вектор скорости, скорость изменения которого есть *ускорение* частнцы; из формул (IV) п. 2.34 и формулы (6) находим равенство

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t}+(\mathbf{q}\nabla)\,\mathbf{q}=\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{1}{2}q^2\right)-\mathbf{q}\times\boldsymbol{\zeta}. \tag{7}$$

Применяя это соотношение к случаю прямоугольной декартовой системы координат, получаем равенство

$$\mathbf{i}\frac{du}{dt}+\mathbf{j}\frac{dv}{dt}+\mathbf{k}\frac{dw}{dt}=\mathbf{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\mathbf{j}\frac{\partial v}{\partial t}+\mathbf{k}\frac{\partial w}{\partial t}+\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathbf{i}u+\mathbf{j}v+\mathbf{k}w),$$

отсюда следует, что соотношение (7) эквивалентно *трем* уравнениям:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt}&=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z},\\
\frac{dv}{dt}&=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z},\\
\frac{dw}{dt}&=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, в прямоугольных координатах справедлива следующая формула:

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}.$$

В векторной форме получим формулу

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{q}\nabla). \tag{9}$$

Рассматриваемую здесь операцию иногда называют *индивидуальным дифференцированием*, подразумевая под этим, что мы вычисляем скорость изменения некоторого количества, связанного с какой-либо движущейся частицей [1]).

---

[1]) Некоторые авторы используют обозначение D/Dt. Применяется, кроме того, термин *субстанциональное, или материальное, дифференцирование*.

3.20. Уравнение неразрывности. Если мы рассмотрим частицу жидкости бесконечно малого объема $d\tau$ с плотностью ϱ в момент времени t, то масса этой частицы не может измениться при движении и, следовательно, можно записать уравнение

$$\frac{d}{dt}(\varrho\, d\tau) = 0. \tag{1}$$

Это уравнение — одна из форм *уравнения неразрывности*, или *уравнения сохранения массы*. Если объем увеличивается, то плотность уменьшается, и наоборот; таким образом, уравнение (1) всегда удовлетворяется.

Пусть через X обозначено какое-либо свойство, присущее единице массы и переносимое частицей жидкости при движении. Тогда для объема V, движущегося с жидкостью, т. е. состоящего всегда из одних и тех же частиц жидкости, получим равенство

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)} X\varrho\, d\tau = \int\limits_{(V)} \frac{dX}{dt}\varrho\, d\tau + \int\limits_{(V)} X\frac{d}{dt}(\varrho\, d\tau) = \int\limits_{(V)} \frac{dX}{dt}\varrho\, d\tau. \tag{2}$$

Другая точка зрения состоит в следующем. Рассмотрим фиксированную замкнутую поверхность S, целиком лежащую в жидкости (рис. 47). Если $\mathbf{n}$ обозначает единичный вектор внутренней нормали к элементу dS, то количество жидкости, втекающей в единицу времени через границу в объем, заключенный внутри поверхности S, выражается в виде интеграла

$$\int\limits_{(S)} \varrho q_n\, dS. \tag{3}$$

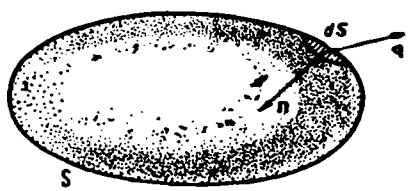


Рис. 47.

Масса жидкости, содержащаяся в объеме V, ограниченном поверхностью S, равна интегралу

$$\int\limits_{(V)} \varrho\, d\tau.$$

Если предположить, что внутри поверхности S нет источников и стоков жидкости, то масса может увеличиваться только благодаря потоку через границу. Приравнивая выражение (3) и производную по времени от увеличения массы и применяя теорему Гаусса, получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{(V)} \varrho\, d\tau = \int\limits_{(S)} \varrho q_n\, dS = -\int\limits_{(V)} \nabla(\varrho\mathbf{q})\, d\tau.$$

Таким образом, находим уравнение

$$\int\limits_{(V)} \left(\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \nabla(\varrho\mathbf{q})\right) d\tau = 0.$$

Так как поверхность S может быть заменена любой произвольной замкнутой поверхностью, проведенной внутри S, то в каждой точке должно выполняться уравнение[1])

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \nabla(\varrho\mathbf{q}) = 0, \tag{4}$$

которое представляет собой другую форму уравнения неразрывности.

[1]) Если $\int\limits_{(V)} A\, d\tau = 0$ для произвольного объема V, то $\frac{1}{V}\int\limits_{(V)} A\, d\tau = 0$, так что $\lim\limits_{V\to 0}\frac{1}{V}\int\limits_{(V)} A\, d\tau = 0$, т. е. $\lim\limits_{V\to 0}\frac{1}{V}\cdot AV = A = 0$.

Применяя теперь формулы (VI) п. 2.34 и (9) п. 3.10, мы последовательно находим равенства

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{q}(\nabla \varrho) + \varrho \nabla \mathbf{q} = 0,$$

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \nabla \mathbf{q} = 0, \quad \nabla \mathbf{q} = \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{1}{\varrho}\right). \tag{5}$$

В случае несжимаемой жидкости $d\varrho/dt = 0$ [см. формулу (4) п. 3.10] и, следовательно, получим уравнение

$$\nabla \mathbf{q} = 0, \tag{6}$$

которое представляет собой уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости; *дивергенция* $\nabla \mathbf{q}$ обращается в нуль.

Используя прямоугольные координаты (п. 2.70), уравнение (6) можно свести к виду

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

В особенно важном случае безвихревого движения получим равенство $\mathbf{q} = -\nabla \varphi$, и, следовательно, уравнение неразрывности (6) для безвихревого движения жидкости имеет вид

$$\nabla^2 \varphi = 0, \tag{8}$$

или в прямоугольных декартовых координатах

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{9}$$

Уравнение (8) известно как уравнение Лапласа.

Из полученных результатов следует, что жидкость не может двигаться при произвольно выбранном законе распределения скорости. Для того чтобы движение было возможно, необходимо, чтобы удовлетворялось уравнение неразрывности.

В частности, для безвихревых движений жидкости потенциал скорости φ должен удовлетворять уравнению Лапласа.

3.30. Граничные условия (кинематические). Если жидкость находится в соприкосновении с твердой поверхностью или с другой жидкостью, с которой она не перемешивается, то, для того чтобы это соприкосновение сохранялось, необходимо выполнение кинематического условия, состоящего в том, что жидкость и поверхность, с которой поддерживается соприкосновение, должны иметь одинаковую скорость, перпендикулярную к поверхности.

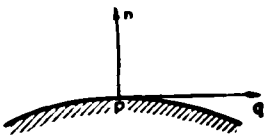


Рис. 48.

Если мы обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор нормали, проведенный в точке P поверхности соприкосновения, и через $\mathbf{q}$ — скорость жидкости, то в случае неподвижной твердой поверхности должно иметь место соотношение $\mathbf{qn} = 0$, выражающее условие того, что нормальные скорости равны нулю или, иными словами, вектор скорости жидкости повсюду касается неподвижной поверхности (рис. 48).

Когда твердая поверхность движется, то должно выполняться равенство

$$\mathbf{qn} = \mathbf{Un},$$

или

$$(\mathbf{q} - \mathbf{U})\,\mathbf{n} = 0,$$

где через $\mathbf{U}$ обозначена скорость точки P поверхности (рис. 49).

Это равенство показывает, что скорость жидкости относительно поверхности перпендикулярна к нормали, т. е. касательна к поверхности.

Если две жидкости, которые не перемешиваются (такие, как воздух и вода), соприкасаются вдоль общей (геометрической) поверхности раздела S, то ясно, что для сохранения соприкосновения относительная скорость $\mathbf{q} - \mathbf{q}'$ снова должна быть касательна к поверхности S (рис. 50). С другой стороны,

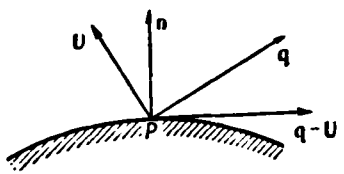


Рис. 49.

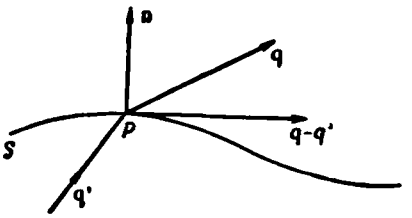


Рис. 50.

отметим, что в данном случае вид и движение поверхности S не известны до тех пор, пока не решена задача о рассматриваемом движении жидкости.

3.31. Граничные условия (физические). Только что рассмотренные кинематические условия должны выполняться независимо от каких-либо специальных физических предположений.

В случае невязкой жидкости, соприкасающейся с твердыми границами (неподвижными или движущимися), требуется выполнение добавочного условия, состоящего в том, что давление жидкости должно быть перпендикулярно границе.

В случае двух невязких жидкостей, имеющих поверхность раздела S, должно быть выполнено условие, заключающееся в том, чтобы давление было непрерывно на границе при переходе с одной стороны поверхности S на другую[1]).

Для доказательства рассмотрим цилиндр (рис. 51), образующие которого перпендикулярны поверхности S и поперечные сечения которого dS представляют собой элементарные площадки, расположенные по обе стороны от поверхности S. Тогда если через p и p' обозначить давления в двух жидкостях, то условие равновесия цилиндра выразится в виде

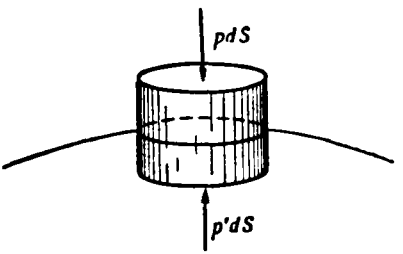


Рис. 51.

$$p\,dS - p'\,dS = 0, \quad \text{т. е. } p = p',$$

поскольку, как показано в п. 1.30, объемные силы и массовые ускорения пренебрежимо малы по сравнению с остальными членами.

Таким образом, в случае воды, находящейся в соприкосновении с атмосферой, давление воды на свободной поверхности будет равно давлению воздуха, и если это последнее предполагается постоянным, то поверхность жидкости будет поверхностью постоянного давления.

Другим важным примером граничных условий является случай, когда поверхность S разделяет не две различные жидкости, а две области одной и той же жидкости и при этом имеется разрыв тангенциальной компоненты скорости на поверхности S, которая является вихревым слоем (п. 13.70).

---

[1]) Это давление следует видоизменить, если учитывать поверхностное натяжение (см. п. 14.50).

Такой случай имеет место в области воздушного потока позади крыла, где два потока с верхней и нижней сторон скользят друг по другу вдоль поверхности раздела, возникающей у задней кромки крыла. Тогда, если движение установившееся, из теоремы Бернулли следует равенство

$$\frac{p'}{\varrho}+\frac{1}{2}q'^2=\frac{p}{\varrho}+\frac{1}{2}q^2,$$

и, так как $p=p'$, мы должны иметь $q=q'$. Таким образом, данная поверхность представляет собой поверхность разрыва *направления* скорости, а не ее величины.

В случае струи или некоторого потока внутри покоящейся жидкости, в которой давление можно считать постоянным, неразрывность давления внутри и вне струи показывает, что поверхность струи является поверхностью постоянной скорости.

В случае *вязкой* жидкости экспериментально доказано, что на твердой поверхности, соприкасающейся с жидкостью, относительная скорость равна нулю; это физическое условие необходимо учитывать при изучении движения вязкой жидкости.

Промежуточную поверхность между жидкостью и погруженным твердым телом можно рассматривать как вихревой слой, т. е. как поверхность разрыва тангенциальной скорости при переходе от жидкости к твердому телу (п. 13.70). В случае вязкой жидкости указанный разрыв скорости отсутствует.

3.32. Истечение из отверстия. Возвращаясь к вопросу, рассмотренному в п. 1.82, исследуем установившийся безвихревой поток жидкости, вытекающей через отверстие площади σ_1 в стенке сосуда (рис. 52).

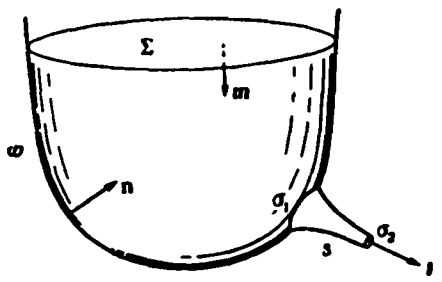


Рис. 52.

Рассмотрим плоское горизонтальное сечение Σ сосуда, настолько удаленное от отверстия, что скорости течения во всех точках пересечения Σ с линиями тока можно считать одинаковыми и равными q_1. Пусть $\mathbf{m}$ — единичный вектор нормали, проведенной к поверхности Σ внутрь жидкости.

Обозначим через $\mathbf{l}$ единичный вектор внешней нормали к сечению σ_2 в самом сжатом месте струи, где скорость равна q_2. Пусть w обозначает поверхность стенки сосуда ниже сечения Σ, s — поверхность струи между сечениями σ_1 и σ_2. Рассмотрим жидкость, ограниченную полной поверхностью $\Sigma+w+s+\sigma_2$; пусть $\mathbf{n}$ будет единичным вектором внутренней нормали в какой-либо точке этой поверхности.

Так как $\nabla\mathbf{q}=0$ и так как течение безвихревое, то применение теоремы Гаусса [формула (7) п. 2.61] дает соотношение

$$\int \mathbf{q}\,(\mathbf{nq})\,dS=-\int (\mathbf{q}\nabla)\,\mathbf{q}\,d\tau=-\frac{1}{2}\int \nabla q^2 d\tau=\frac{1}{2}\int \mathbf{n}q^2 dS,$$

при получении которого использовались формулы (IV) п. 2.34 и (3) п. 2.61.

Теперь скалярная величина $\mathbf{nq}$ принимает на поверхностях Σ, w, s, σ_2 следующие значения: q_1, 0, 0, $-q_2$ соответственно, а векторная величина $\mathbf{n}$ принимает значения $\mathbf{m}$, $-\mathbf{l}$ на поверхностях Σ, σ_2. Кроме того, по теореме Бернулли скорость на поверхности s равна q_2. Следовательно, имеет место равенство

$$-\mathbf{l}q_2^2\sigma_2+\mathbf{m}q_1^2\Sigma=\int\limits_{(w)}\mathbf{n}q^2dS+q_2^2\int\limits_{(s)}\mathbf{n}\,dS.$$

Так как поверхность $s+\sigma_1+\sigma_2$ замкнута, то, согласно формуле (3) п. 2.20, получим соотношение

$$\int\limits_{(s)} \mathbf{n}\,dS = -\int\limits_{(\sigma_1)} \mathbf{n}\,dS - \int\limits_{(\sigma_2)} \mathbf{n}\,dS = \mathbf{I}(\sigma_2-\sigma_1).$$

Следовательно,

$$m q_1^2 \Sigma - \mathbf{I}(2\sigma_2-\sigma_1) q_2^2 = \int\limits_{(w)} \mathbf{n} q^2 dS.$$

Умножим это уравнение скалярно на $\mathbf{I}/(\sigma_1 q_2^2)$ и исключим q_1 с помощью уравнения неразрывности в форме $q_1\Sigma = q_2\sigma_2$. Тогда если $\alpha = \sigma_2/\sigma_1$ — коэффициент сжатия, то мы получаем равенство

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \alpha = \frac{1-\dfrac{\mathbf{I}}{\sigma_1}\displaystyle\int\limits_{(w)} \mathbf{n}\left(\frac{q}{q_2}\right)^2 dS}{2-\dfrac{\sigma_2}{\Sigma}\mathbf{I}m}.$$

Если плоскость отверстия вертикальна, то $\mathbf{I}m = 0$, и знаменатель дроби в правой части равенства равен 2. Этот результат имеет место также и в том случае, когда величина σ_2/Σ пренебрежимо мала.

В случае истечения из отверстия в бесконечной пластинке имеем $\mathbf{I}n = -\mathbf{I}$ и

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sigma_1}\int\left(\frac{q}{q_2}\right)^2 dS > \frac{1}{2}.$$

С другой стороны, если вертикальный цилиндрический насадок, обращенный внутрь, прикреплен к отверстию в горизонтальном дне сосуда с вертикальными стенками, то на сторонах сосуда $\mathbf{I}n = 0$ и опыт показывает, что q почти равно нулю на дне. Таким образом,

$$\alpha = \frac{1}{2-\dfrac{\sigma_2}{\Sigma}} > \frac{1}{2},$$

и если величина σ_2/Σ пренебрежимо мала, то $\alpha = {}^1/_2$.

3.40. Скорость изменения количества движения. Рассмотрим жидкость, которая в момент времени t находится внутри (рис. 53) замкнутой поверхности S. В момент времени $t+\delta t$ эта масса жидкости переместится и займет внутренность замкнутой поверхности S'.

Пусть A — область, внутренняя по отношению к поверхности S и внешняя по отношению к поверхности S', и пусть B — область, внутренняя по отношению к поверхности S' и внешняя относительно поверхности S. Пусть $\mathbf{M}$ — количество движения жидкости в момент времени t, находящейся внутри поверхности S. Тогда в момент времени $t+\delta t$ количество движения той же массы жидкости равно

$$\mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\delta t$$

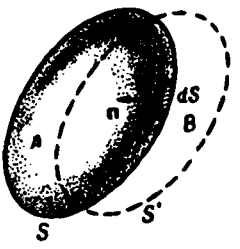


Рис. 53.

плюс количество движения жидкости, находящейся в области B, минус количество движения жидкости, находящейся в области A.

Последние два члена представляют собой количество движения жидкости, которое вытекает через поверхность S за время δt.

Следовательно, скорость изменения количества движения жидкости, которая в момент времени t занимает область внутри замкнутой поверхности S, равна $\partial \mathbf{M}/\partial t$ плюс поток количества движения за единицу времени через границу поверхности S.

Поскольку

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{q} \varrho \, d\tau,$$

то поток количества движения за единицу времени через границу поверхности S определяется интегралом

$$-\int_{(S)} \varrho \mathbf{q} \, (\mathbf{q}\mathbf{n}) \, dS,$$

здесь $-\mathbf{q}\mathbf{n}$ нормальная составляющая скорости течения жидкости через элемент dS. Тензор $\varrho(\mathbf{q}; \mathbf{q})$ представляет собой *тензор переноса количества движения*, так как его скалярное произведение на вектор $\mathbf{n}$ равно величине $\varrho \mathbf{q} \, (\mathbf{q}\mathbf{n})$, которая является отнесенным к единице площади количеством движения, переносимым за единицу времени через элемент поверхности dS.

Таким образом, искомая скорость изменения количества движения определяется формулой

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \varrho \mathbf{q} \, d\tau - \int_{(S)} \varrho \mathbf{q} \, (\mathbf{q}\mathbf{n}) \, dS. \tag{1}$$

Если использовать теорему Гаусса [формула (7) п. 2.61], затем формулу (9) п. 3.10 и, наконец, уравнение неразрывности, то из формулы (1) получим соотношение

$$\int \frac{\partial}{\partial t} (\varrho \mathbf{q}) \, d\tau + \int [(\varrho \mathbf{q}) (\nabla \mathbf{q}) + (\mathbf{q} \nabla) (\varrho \mathbf{q})] \, d\tau = \int \left[\frac{d(\varrho \mathbf{q})}{dt} + (\varrho \mathbf{q}) (\nabla \mathbf{q}) \right] d\tau =$$

$$= \int \left[\varrho \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \mathbf{q} \left(\frac{d\varrho}{dt} + \varrho (\nabla \mathbf{q}) \right) \right] d\tau = \int \varrho \frac{d\mathbf{q}}{dt} \, d\tau. \tag{2}$$

Итак, полученный результат мы можем рассматривать следующим образом: скорость изменения количества движения жидкостн внутри поверхности S, когда S движется вместе с жидкостью, определяется равенством

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{q} \varrho \, d\tau = \int \varrho \frac{d\mathbf{q}}{dt} \, d\tau + \int \mathbf{q} \frac{d}{dt} (\varrho \, d\tau) = \int \varrho \frac{d\mathbf{q}}{dt} \, d\tau,$$

так как здесь третий интеграл обращается в нуль в силу уравнения неразрывности [см. формулу (1) п. 3.20].

3.41. Уравнение движения невязкой жидкости. Рассмотрим жидкость, которая в момент времени t занимает область, ограниченную фиксированной замкнутой поверхностью S. Согласно второму закону движения, полная сила, действующая на массу жидкости, равна скорости изменения количества движения.

Движение жидкости происходит, во-первых, под действием нормального давления на границе и, во-вторых, под действием внешней массовой силы (такой, как сила тяжести); внешнюю массовую силу, отнесенную к единице массы, обозначим через $\mathbf{F}$.

Таким образом, после применения теоремы Гаусса полная сила, действующая на жидкость, может быть записана в виде

$$\int p \mathbf{n} \, dS + \int \mathbf{F} \varrho \, d\tau = -\int (\nabla p) \, d\tau + \int \mathbf{F} \varrho \, d\tau.$$

Приравнивая эту величину скорости изменения количества движения, вычисленной по формуле (2) п. 3.40, находим уравнение

$$\int \left(\mathbf{F}\varrho - \nabla p - \varrho \frac{d\mathbf{q}}{dt}\right) d\tau = 0.$$

Так как объем, по которому происходит интегрирование, совершенно произволен, то мы можем этот объем стянуть в точку и, следовательно, получить уравнение

$$\mathbf{F}\varrho - \nabla p - \varrho \frac{d\mathbf{q}}{dt} = 0,$$

или

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\varrho}\nabla p, \tag{1}$$

которое представляет собой уравнение движения жидкости.

Кроме того, из формул (9) п. 3.10 и (IV) п. 2.34 находим соотношение

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + (\mathbf{q}\nabla)\,\mathbf{q} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla q^2 - \mathbf{q} \times (\nabla \times \mathbf{q}).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \mathbf{q} \times (\nabla \times \mathbf{q}) = \mathbf{F} - \frac{1}{\varrho}\nabla p - \frac{1}{2}\nabla q^2. \tag{2}$$

Это соотношение представляет собой другую форму уравнения движения [1]).

3.42. Теорема Эйлера о количестве движения. Выведем теперь общую форму теоремы, установленной в п. 1.90. Из формулы (1) п. 3.40 мы имеем следующее выражение для скорости изменения количества движения жидкости внутри замкнутой поверхности S:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \varrho \mathbf{q}\, d\tau - \int\limits_{(S)} (\mathbf{nq})\, \varrho \mathbf{q}\, dS.$$

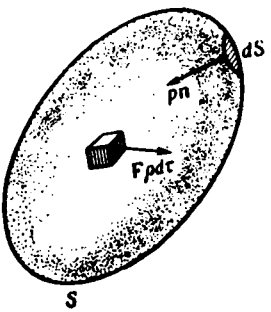


Рис. 54.

и, следовательно, применяя второй закон движения и используя рис. 54, получаем следующее уравнение:

$$\int\limits_{(S)} \mathbf{n}p\, dS = -\int \varrho \mathbf{F}\, d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\int \varrho \mathbf{q}\, d\tau - \int\limits_{(S)} (\mathbf{nq})\, \varrho \mathbf{q}\, dS.$$

Из этого уравнения следует, что результирующее давление на жидкость, содержащуюся внутри замкнутой поверхности S, равно сумме трех слагаемых: 1) взятой со знаком минус результирующей массовых сил, действующих на жидкость внутри поверхности S, 2) частной производной $\partial/\partial t$ от количества движения этой жидкости и 3) потока количества движения жидкости за единицу времени через границу поверхности S во *внешнюю* область. Это — обобщенная форма теоремы о количестве движения. Следовательно, ее можно рассматривать как обобщение теоремы, известной под названием «принцип Архимеда», к которой она сводится, если жидкость покоится

3.43. Консервативные силы. Для консервативных сил, т. е. имеющих потенциал Ω, можно написать равенство $\mathbf{F} = -\nabla\Omega$. Таким образом, если

[1]) В отечественной литературе уравнение (1) обычно называется уравнением Эйлера уравнение (2) — уравнением движения в форме Громеки—Ламба. — *Прим. ред.*

давление является функцией плотности так, что $\int dp/\varrho$ существует, то из формулы (5) п. 2.31 получим соотношение

$$\frac{1}{\varrho}(d\mathbf{r}\nabla)\,p=\frac{dp}{\varrho}=d\int\frac{dp}{\varrho}=(d\mathbf{r}\nabla)\int\frac{dp}{\varrho},$$

и, следовательно, так как величина $d\mathbf{r}$ произвольна, то

$$\frac{1}{\varrho}\nabla p=\nabla\int\frac{dp}{\varrho}. \tag{1}$$

Тогда уравнение движения (1) п. 3.41 принимает форму

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt}=-\nabla\left(\int\frac{dp}{\varrho}+\Omega\right), \tag{2}$$

откуда следует, что ускорение есть градиент *потенциала ускорения* $\int dp/\varrho+\Omega$.

Далее, замечая, что вихрь выражается равенством $\boldsymbol{\zeta}=\nabla\times\mathbf{q}$, уравнение (2) п. 3.41 можно записать в виде

$$\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t}-\mathbf{q}\times\boldsymbol{\zeta}=-\nabla\chi,\quad \chi=\int\frac{dp}{\varrho}+\Omega+\frac{1}{2}q^2, \tag{3}$$

где явно выделен вектор вихря.

Кроме того, формулу (1) п. 3.41 можно написать в виде

$$\varrho\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t}+\varrho(\mathbf{q}\nabla)\,\mathbf{q}=-\nabla p-\varrho\nabla\Omega,$$

в то время как из уравнения неразрывности (4) п. 3.40 следует

$$\mathbf{q}\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\mathbf{q}\nabla(\varrho\mathbf{q})=0.$$

Складывая два последних равенства и используя формулу (X) п. 2.34, мы получаем уравнение

$$\frac{\partial(\varrho\mathbf{q})}{\partial t}+\nabla[\varrho\mathbf{q};\ \mathbf{q}+Ip]+\varrho\nabla\Omega=0, \tag{4}$$

где I — единичный тензор.

В прямоугольной декартовой системе координат уравнение (2) эквивалентно следующей системе трех уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial\Omega}{\partial x}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial\Omega}{\partial y}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial\Omega}{\partial z}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Если $\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{i}\xi+\mathbf{j}\eta+\mathbf{k}\zeta$, так что ξ, η, ζ являются компонентами вихря, то уравнение (3) эквивалентно следующей системе:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+w\eta-v\zeta+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}q^2\right)=-\frac{\partial\Omega}{\partial x}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\zeta-w\xi+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}q^2\right)=-\frac{\partial\Omega}{\partial y}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+v\xi-u\eta+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}q^2\right)=-\frac{\partial\Omega}{\partial z}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z},
\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$q^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

$$\xi = \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}, \quad \eta = \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}, \quad \zeta = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}.$$

Читатель мог бы проверить, что уравнения (5) и (6) эквивалентны. Вышеуказанный результат иллюстрирует, как векторные обозначения сокращают выкладки и делают результаты легко обозримыми.

Если $\mathbf{q} \times \boldsymbol{\zeta} = 0$, то течение в этом случае называется *течением Бельтрами*[1]); соответствующее уравнение движения получается из уравнения (3) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\nabla\chi, \quad \chi = \int \frac{dp}{\varrho} + \Omega + \frac{1}{2} q^2. \tag{7}$$

Если вихрь отличен от нуля, то условие $\mathbf{q} \times \boldsymbol{\zeta} = 0$ показывает, что вихревые линии и линии тока совпадают. Если $\boldsymbol{\zeta} = 0$, то мы имеем важный случай *безвихревого движения*, которое является также течением Бельтрами и для которого выполняется уравнение (7).

В случае несжимаемой жидкости $\int dp/\varrho$ заменяется в вышеуказанных уравнениях величиной p/ϱ.

Полученные выше уравнения известны как уравнения *движения в форме Эйлера*. В этом случае рассматривается отдельная точка $\mathbf{r}$ в пространстве. В течение времени t эту точку занимает последовательно непрерывный ряд частиц жидкости; величины $\mathbf{r}$ и t — независимые переменные.

3.44. Уравнение движения в форме Лагранжа. С точки зрения Лагранжа, вместо того чтобы рассматривать отдельную точку пространства, анализируется отдельная жидкая частица и изучается ее перемещение. Независимыми переменными являются $\mathbf{r}_0$ — вектор начального положения частицы и время t. Если частица в момент времени t занимает положение $\mathbf{r}$, то $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$, так что ускорение частицы равно частной производной $\partial^2\mathbf{r}/\partial t^2$, и, следовательно, используя формулу (8) п. 2.71, уравнение движения (1) п. 3.41 можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \mathbf{F} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{F} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial; \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}_0}.$$

Умножим это уравнение на символическую диаду $\partial; \mathbf{r}/\partial \mathbf{r}_0$. Тогда, учитывая формулу (9) п. 2.71, получим уравнение

$$\frac{\partial; \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_0} \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} - \mathbf{F}\right) + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}_0} = 0, \tag{1}$$

которое представляет собой уравнение движения в форме Лагранжа; при этом дифференцирование производится по независимым переменным $\mathbf{r}_0, t$[2]).

Если $\mathbf{F} = -\nabla\Omega$, то после интегрирования по времени от 0 до t получим уравнение в форме Вебера, а именно

$$\frac{\partial; \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_0}\mathbf{q} - \mathbf{q}_0 = -\frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{r}_0}, \quad \chi = \int_0^t \left\{\int \frac{dp}{\varrho} + \Omega - \frac{1}{2} q^2\right\} dt. \tag{2}$$

---

[1]) В отечественной литературе это течение называется винтовым. Подробное исследование таких течений было проведено в конце XIX века проф. Казанского университета Громеко. — *Прим. ред.*

[2]) Другой вывод этого уравнения без использования диад дан в приложении. — *Прим. ред.*

Уравнение неразрывности получается из формулы (1) п. 3.20 в виде

$$\varrho\, d\tau = \varrho_0\, d\tau_0, \tag{3}$$

где нулевой индекс относится к начальному положению частицы. Уравнение (3) выражает тот факт, что масса частицы остается неизменной во время движения.

В прямоугольных декартовых координатах справедливы равенства

$$d\tau = dx\,dy\,dz, \quad d\tau_0 = dx_0\,dy_0\,dz_0$$

и

$$dx\,dy\,dz = J\,dx_0\,dy_0\,dz_0, \quad J = \frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(x_0,\ y_0,\ z_0)}, \tag{4}$$

где J — якобиан координат $(x,\ y,\ z)$ вектора $\mathbf{r}$ относительно координат $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ вектора $\mathbf{r}_0$. В этих обозначениях уравнение неразрывности принимает вид

$$\varrho J = \varrho_0. \tag{5}$$

Поверхность $F(\mathbf{r},\ t) = 0$ всегда состоит из одних и тех же частиц жидкости тогда и только тогда, когда $dF/dt = 0$ [1]). Это условие означает, что векторная функция $F(\mathbf{r},\ t)$ не зависит от времени и, следовательно, уравнение поверхности, выраженное в координатах Лагранжа, имеет вид $f(\mathbf{r}_0) = 0$. В частности, это имеет место в случае, когда свободная поверхность жидкости находится в непрерывном движении.

Отметим, что вектор $\mathbf{r}_0$ не обязательно должен быть вектором начального положения. С этой целью может быть использован любой переменный вектор, характеризующий положение частицы и непрерывно изменяющийся от одной частицы к другой (см., например, п. 14.80).

3.45. Установившееся движение. Если движение установившееся, то $\partial\mathbf{q}/\partial t = 0$ и из уравнения (3) п. 3.43 мы получаем

$$\mathbf{q} \times \boldsymbol{\zeta} = \nabla\chi, \quad \chi = \int \frac{dp}{\varrho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega. \tag{1}$$

В силу смысла символа ∇, примененного к скалярной величине, это уравнение показывает, что вектор $\mathbf{q} \times \boldsymbol{\zeta}$ перпендикулярен поверхности

$$\int \frac{dp}{\varrho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega = c, \tag{2}$$

где c — константа. Так как вектор $\mathbf{q} \times \boldsymbol{\zeta}$ перпендикулярен векторам $\mathbf{q}$ и $\boldsymbol{\zeta}$, то отсюда следует, что любая поверхность вида (2) содержит как линии тока, так и вихревые линии. Вдоль каждой такой линии тока или вихревой линии член, стоящий в левой части уравнения (2), имеет одно и то же постоянное значение. Уравнение (2) является общей формой уравнения Бернулли для жидкости. Для несжимаемой жидкости интеграл $\int dp/\varrho$ в формулах (1) и (2) заменяется величиной p/ϱ [2]).

Существование поверхности (2) является необходимым условием, для того чтобы было возможно установившееся движение.

---

[1]) Это равенство легко выводится из уравнения неразрывности, см. приложение. — *Прим. ред.*

[2]) К этому же результату можно прийти другим путем. Умножая равенство (1) последовательно на единичные векторы $\mathbf{q}^0$ и $\boldsymbol{\zeta}^0$, получаем

$$\nabla\chi\mathbf{q}^0 = \frac{\partial\chi}{\partial q} = 0,$$

т. е. $\chi = \text{const}$ вдоль линии тока; аналогично $\partial\chi/\partial\zeta = 0$. — *Прим. ред.*

Если движение установившееся и безвихревое ($\zeta = 0$), то уравнение (1) показывает, что константа в равенстве (2) имеет одно и то же значение во всей жидкости.

3.50. Уравнение энергии. Если поле массовых сил консервативно и стационарно, то уравнение движения (1) п. 3.41 после скалярного умножения на $\varrho\mathbf{q}$ приводится к виду

$$\frac{1}{2}\varrho\frac{d}{dt}(q^2) = -\mathbf{q}\nabla p - \varrho\mathbf{q}\nabla\Omega.$$

Так как $\partial\Omega/\partial t = 0$, то в силу формулы (9) п. 3.10 мы получим равенство

$$\frac{d\Omega}{dt} = \mathbf{q}\nabla\Omega$$

и, следовательно,

$$\varrho\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}q^2 + \Omega\right] = -\mathbf{q}\nabla p.$$

Умножим это уравнение на элемент объема $d\tau$ и заметим, что, согласно уравнению неразрывности [формула (1) п. 3.20], справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}(\varrho\, d\tau) = 0.$$

Далее, проводя интегрирование по всему объему жидкости, получим уравнение

$$\frac{d}{dt}\int\varrho\left(\frac{1}{2}q^2 + \Omega\right)d\tau = -\int\mathbf{q}\nabla p\, d\tau.$$

Теперь если

$$T = \int\frac{1}{2}\varrho q^2\, d\tau, \quad V = \int\varrho\Omega\, d\tau, \quad J = \int\varrho E\, d\tau$$

представляют собой соответственно кинетическую, потенциальную и внутреннюю (см. п. 1.60) энергии, то, используя формулу (VI) п. 2.34 и применяя теорему Гаусса, мы получим равенство

$$\frac{d}{dt}(T+V) = -\int\nabla(p\mathbf{q})\, d\tau + \int p\nabla\mathbf{q}\, d\tau =$$

$$= \int p\mathbf{q}\mathbf{n}\, dS + \int p\nabla\mathbf{q}\, d\tau,$$

причем здесь поверхностный интеграл берется по граничной поверхности; $\mathbf{n}$ — единичный вектор внутренней нормали.

Теперь последний интеграл в правой части равен $-dJ/dt$ (см. пример 31 гл. 3), и поэтому находим

$$\frac{d}{dt}(T+V+J) = \int p\mathbf{q}\mathbf{n}\, dS.$$

Эта формула выражает тот факт, что скорость изменения полной энергии любой части движущейся жидкости равна мощности давления на границу.

3.51. Скорость изменения циркуляции. Пусть C — *замкнутый контур, движущийся вместе с жидкостью, т. е. контур, который всегда состоит из одних и тех же частиц жидкости. Пусть* $\mathbf{a}$ *обозначает ускорение* частицы жидкости и $\mathbf{B}$ ее вихрь

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}, \quad \mathbf{B} = \Gamma\times\mathbf{a}. \tag{1}$$

Тогда в движущейся жидкости для скорости изменения циркуляции Γ по замкнутому контуру C мы имеем

$$\frac{d}{dt}\Gamma = \frac{d}{dt}\int_{(C)} \mathbf{q}\,d\mathbf{r} = \int_{(C)} \frac{d\mathbf{q}}{dt}\,d\mathbf{r} + \int_{(C)} \mathbf{q}\,d\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \int_{(C)} \mathbf{a}\,d\mathbf{r}; \tag{2}$$

так как $\mathbf{q}\,d(d\mathbf{r}/dt) = \mathbf{q}\,d\mathbf{q}$, то, следовательно, интеграл по контуру C от этой величины равен нулю.

Таким образом, по теореме Стокса имеем

$$\int_{(C)} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int_{(S)} \mathbf{n}\,(\nabla \times \mathbf{a})\,dS, \tag{3}$$

где интеграл в правой части берется по любой поверхности S, натянутой на контур C. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\Gamma = \int_{(S)} \mathbf{n}\mathbf{B}\,dS. \tag{4}$$

Теперь заметим, что векторное поле $\mathbf{B}$ является соленоидальным (см. п. 2.24, примечание), так как, согласно уравнению (II) п. 2.32,

$$\nabla\mathbf{B} = \nabla\,(\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \tag{5}$$

и, следовательно, мы можем определить единичные $\mathbf{B}$-трубки (2.615). Таким образом, из уравнения (4) находим

$$\frac{d}{dt}\Gamma = N, \tag{6}$$

где N — число единичных $\mathbf{B}$-трубок, проходящих сквозь контур C. Этот результат справедлив для потока вязкой и сжимаемой жидкости, так же как для невязкой или несжимаемой жидкости.

Для невязкой жидкости под действием консервативных сил мы имеем

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{\varrho}\nabla p - \nabla\Omega,$$

и, следовательно,

$$\mathbf{B} = \nabla p \times \nabla\left(\frac{1}{\varrho}\right). \tag{7}$$

Если мы назовем величину $1/\varrho$ *удельным объемом* жидкости, то векторы ∇p и $\nabla(1/\varrho)$ соответственно перпендикулярны поверхностям постоянного давления и постоянного удельного объема, так что вектор $\mathbf{B}$ касателен к кривой пересечения этих поверхностей. Направление вектора $\mathbf{B}$ определяет знак циркуляции по контуру C.

Рассмотрим пример. При заданных температуре и давлении вода с большим содержанием соли имеет бóльшую плотность и, следовательно, меньший удельный объем. Предположим, что в океане содержание соли уменьшается в некотором направлении. Тогда удельный объем в том же направлении увеличивается, а давление всегда растет книзу. В результате оказывается, что циркуляционное течение вдоль дна происходит в направлении уменьшения содержания соли, а вдоль поверхности — в направлении увеличения содержания соли. Этим объясняются морские поверхностные течения в более соленое Средиземное море из Черного моря через Босфор и из Атлантики через Гибралтарский пролив.

Из формулы (6), очевидно, следует, что необходимым и достаточным условием для постоянства циркуляции по замкнутому контуру, движущемуся вместе с жидкостью, является условие $\nabla \times \mathbf{a} = 0$ или $\mathbf{B} = 0$.

Основным следствием этого результата является теорема Кельвина о *постоянстве циркуляции по замкнутому контуру, движущемуся вместе с жидкостью*[1]), *если жидкость является идеальной, а ее плотность или постоянна, или является функцией давления* (*баротропная жидкость*)[2]).

Доказательство. Если плотность ϱ является постоянной, то $\nabla(1/\varrho)=0$ и из формулы (7) следует $\mathbf{B}=0$. Если плотность ϱ является функцией от p, то векторы $\nabla(1/\varrho)$ и ∇p параллельны между собой и, следовательно, из формулы (7) имеем $\mathbf{B}=0$. В обоих случаях $d\Gamma/dt=0$, так что Γ не зависит от времени.

3.52. Вихревое движение. Если $\boldsymbol{\zeta}$ — вектор вихря, то мы имеем

$$\boldsymbol{\zeta}=\nabla\times\mathbf{q}$$

и, следовательно, из уравнения (II) п. 2.32 получим

$$\nabla\boldsymbol{\zeta}=0,$$

так что дивергенция вихря повсюду равна нулю; следовательно, вектор вихря является соленоидальным вектором.

Вихревые линии уже были определены в п. 2.41. Если через каждую точку замкнутой кривой мы проведем вихревую линию, то получим *вихревую трубку*.

Вихревой нитью[3]) называется вихревая трубка, площадь поперечного сечения которой бесконечно мала. По теореме Гаусса, примененной к объему, заключенному между двумя поперечными сечениями с площадями $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$ вихревой нити, мы получаем

$$\int \boldsymbol{\zeta}\mathbf{n}\,dS=-\int\nabla\boldsymbol{\zeta}\,d\tau=0,$$

и так как $\mathbf{n}\boldsymbol{\zeta}=0$ на стенках вихревой нити, то

$$\boldsymbol{\zeta}_1\mathbf{n}_1\,d\sigma_1+\boldsymbol{\zeta}_2\mathbf{n}_2\,d\sigma_2=0,$$

где $\boldsymbol{\zeta}_1$, $\boldsymbol{\zeta}_2$ — вихри на концах вихревой нити. Таким образом, получаем равенство

$$\boldsymbol{\zeta}_1\,d\sigma_1=\boldsymbol{\zeta}_2\,d\sigma_2.$$

Оно показывает, что величина вихря, умноженная на площадь поперечного сечения, постоянна вдоль вихревой нити[4]).

Отсюда следует, что вихревая нить не может кончаться в точке внутри жидкости. Поэтому вихревые нити должны быть или замкнутыми (вихревые кольца), или кончаться на границах.

Можно отметить аналогию вихревой нити с соответствующим свойством нитей тока в жидкости, поскольку в случае несжимаемой жидкости $\nabla\mathbf{q}=0$, так что вектор $\mathbf{q}$, подобно $\boldsymbol{\zeta}$, является соленоидальным вектором.

3.53. Сохраняемость вихревого движения. Если $\mathbf{a}$ — ускорение, то мы имеем

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{q}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t}-\mathbf{q}\times\boldsymbol{\zeta}+\nabla\frac{1}{2}q^2.$$

---

[1]) То есть контур состоит из одних и тех же частиц жидкости в течение всего времени движения. — *Прим. ред.*

[2]) Автор использует термин «баротропная жидкость». В русской литературе принято говорить не о баротропных жидкостях, а о баротропных процессах, поскольку в разных условиях для одной и той же жидкости может выполняться (или не выполняться) условие баротропности. — *Прим. ред.*

[3]) Или элементарной вихревой трубкой. — *Прим. ред.*

[4]) Этот результат следует непосредственно из свойств соленоидальных векторов, см. п. 2.615.

Вычисляя вихрь и используя формулы (III) п. 2.32 и (II) п. 2.34, получаем

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} - (\boldsymbol{\zeta}\nabla)\,\mathbf{q} + (\mathbf{q}\nabla)\,\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\zeta}\,(\nabla\mathbf{q}) - \mathbf{q}\,(\nabla\boldsymbol{\zeta}).$$

Теперь заметим, что из п. 3.52 следует $\nabla\boldsymbol{\zeta} = 0$, а из формулы (5) п. 3.20 имеем $\varrho\nabla\mathbf{q} = -d\varrho/dt$. Таким образом, используя формулу (9) п. 3.10, находим соотношение

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} - (\boldsymbol{\zeta}\nabla)\,\mathbf{q} - \frac{\boldsymbol{\zeta}}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt},$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\zeta}}{\varrho}\right) = \frac{1}{\varrho}(\boldsymbol{\zeta}\nabla)\,\mathbf{q} + \frac{1}{\varrho}\nabla \times \mathbf{a}. \tag{1}$$

Это *чисто кинематическое* соотношение дает скорость изменения вектора $\boldsymbol{\zeta}/\varrho$.

Если *силы консервативные и давление является функцией плотности*, то, применив операцию вихря к обеим частям равенства (2) п. 3.43, получим $\nabla \times \mathbf{a} = 0$. В этом случае соотношение (1) примет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\zeta}}{\varrho}\right) = \left[\left(\frac{\boldsymbol{\zeta}}{\varrho}\right)\nabla\right]\mathbf{q}. \tag{2}$$

Это уравнение получено Гельмгольцем.

Для решения этого уравнения используем обозначение $\partial/\partial\mathbf{r}$ для ∇, и, таким образом, применяя формулу (8) п. 2.71, находим уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\zeta}}{\varrho}\right) = \frac{\boldsymbol{\zeta}}{\varrho}\cdot\left(\frac{\partial;\,\mathbf{q}}{\partial\mathbf{r}}\right) = \frac{\boldsymbol{\zeta}}{\varrho}\cdot\left(\frac{\partial;\,\mathbf{r}_0}{\partial\mathbf{r}}\right)\cdot\left(\frac{\partial;\,\mathbf{q}}{\partial\mathbf{r}_0}\right), \tag{3}$$

где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор частицы в момент t_0, как показано на рис. 46.

Дифференцируя соотношение (9) п. 2.71 по t, получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial;\,\mathbf{r}_0}{\partial\mathbf{r}}\right)\cdot\left(\frac{\partial;\,\mathbf{r}}{\partial\mathbf{r}_0}\right) + \frac{\partial;\,\mathbf{r}_0}{\partial\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial;\,\mathbf{q}}{\partial\mathbf{r}_0} = 0, \tag{4}$$

так как $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{q}$. Таким образом, уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\zeta}}{\varrho}\right) + \frac{\boldsymbol{\zeta}}{\varrho}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial;\,\mathbf{r}_0}{\partial\mathbf{r}}\right)\cdot\frac{\partial;\,\mathbf{r}}{\partial\mathbf{r}_0} = 0.$$

Умножим это соотношение справа на диаду $\partial;\,\mathbf{r}_0/\partial\mathbf{r}$ и снова используем формулу (9) п. 2.71. Тогда получим равенство

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\zeta}}{\varrho}\cdot\frac{\partial;\,\mathbf{r}_0}{\partial\mathbf{r}}\right) = 0 \tag{5}$$

и, следовательно,

$$\frac{\boldsymbol{\zeta}}{\varrho}\cdot\frac{\partial;\,\mathbf{r}_0}{\partial\mathbf{r}} = \text{const} = \frac{\boldsymbol{\zeta}_0}{\varrho_0}, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{\zeta}_0$ и ϱ_0 — значения $\boldsymbol{\zeta}$ и ϱ в момент времени t_0.

Соотношение (6) снова умножим справа на диаду $\partial;\,\mathbf{r}/\partial\mathbf{r}_0$ и используем формулу (9) п. 2.71. Тогда

$$\frac{\boldsymbol{\zeta}}{\varrho} = \frac{\boldsymbol{\zeta}_0}{\varrho_0}\cdot\frac{\partial;\,\mathbf{r}}{\partial\mathbf{r}_0}. \tag{7}$$

Из формулы (6) мы видим, что если $\boldsymbol{\zeta}_0 = 0$, то $\boldsymbol{\zeta} = 0$, так что если движение было безвихревым, то оно таким и остается. Следовательно, частица, имеющая вихрь в какой-либо момент времени, будет *продолжать иметь вихрь*. Таким образом, как вихревое, так и безвихревое движения сохраняются [1]).

[1]) В приложении приведено доказательство теоремы без использования диад. — *Прим ред.*

Заметим, что это заключение зависит от предположений, которые приводят к уравнению (2): жидкость невязкая, силы консервативные, давление является функцией плотности.

3.54. Сохраняемость вихревых линий. Если невязкая жидкость движется под действием консервативных сил и давление является функцией плотности, то вихревая линия состоит всегда из одних и тех же частиц и, следовательно, движется вместе с жидкостью.

Доказательство. Пусть линия, состоящая из частиц жидкости, определена параметром Лагранжа α, так что в момент времени t радиус-вектор частицы равен $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\alpha, t)$. Тогда в момент t касательная к линии имеет направление вектора $\partial\mathbf{r}/\partial\alpha$.

По определению вихревой линии вектор вихря касается этой линии и, таким образом, если $\boldsymbol{\zeta}_0$ — вектор вихря в момент времени t_0, то мы имеем

$$\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \alpha} \times \boldsymbol{\zeta}_0 = 0, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\zeta}_0 = \lambda_0 \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \alpha}, \tag{1}$$

где λ_0 — скаляр и эти соотношения эквивалентны. Из формулы (7) п. 3.53 для момента времени t мы имеем

$$\boldsymbol{\zeta} = \frac{\varrho}{\varrho_0} \lambda_0 \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (x_0, y_0, z_0)} = \frac{\varrho}{\varrho_0} \lambda_0 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = \lambda \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha},$$

так что та же частица α находится все еще на вихревой линии.

Таким образом, вихревая линия движется вместе с жидкостью подобно *материальной субстанции*. Кроме того, эта линия не может исчезнуть, так как мы доказали, что вихревое движение сохраняется.

Отсюда следует, что если в реальной жидкости вихревая линия исчезла, то причиной этого является внутреннее трение [1]).

3.55. Относительное движение. Понятие скорости обычно связывается с некоторой системой координат, которую фиксирует наблюдатель. Так, например, скорость земного тела обычно вычисляется относительно системы координат, закрепленной на земном шаре.

Рассмотрим теперь две прямоугольные декартовы системы координат $Oxyz$, или F, и $O'x'y'z'$, или F', изображенные на рис. 55. Каждую систему координат можно отождествить с системой проволок, жестко связанных и движущихся с системой координат. Предположим, что в некоторый момент времени t системы координат *совпадают* и что система F' движется относительно системы F; это движение описывается наблюдателем, находящимся в системе F, как движение точки O' со скоростью $\mathbf{U}$ и как вращение всей системы F' с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Тогда радиус-вектор $\mathbf{r}$ отдельной частицы жидкости P в момент времени t одинаков для обеих систем [2]).

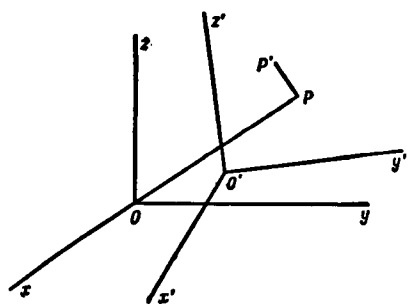


Рис. 55.

Пусть $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}'$ — скорости частицы жидкости P в момент времени t, установленные наблюдателями, находящимися соответственно в системах F и F'. Тогда $\mathbf{q}=\mathbf{q}'+\mathbf{U}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ и, следовательно, для вихря имеем соот-

[1]) В приложении приводится теорема Фридмана о вихревых линиях. — *Прим. ред.*

[2]) Рис. 55 показывает относительные положения систем координат в момент $t+\delta t$, когда они больше не совпадают. Частица жидкости, находящаяся в момент t в точке P, в момент времени $t+\delta t$ будет находиться в точке P'.

ношение

$$\zeta = \nabla \times \mathbf{q} = \nabla \times \mathbf{q}' + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \zeta' + \boldsymbol{\omega}(\nabla \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\omega}\nabla)\mathbf{r} =$$
$$= \zeta' + 3\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} = \zeta' + 2\boldsymbol{\omega},$$

так что, подобно скорости, вихрь является понятием, связанным с системой координат. Если вихрь $\zeta = 0$ в системе координат F, то наблюдатель, связанный с этой системой, утверждает, что движение безвихревое и, следовательно, имеется потенциал скоростей φ, такой, что $\mathbf{q} = -\nabla\varphi$, в то время как наблюдатель, связанный с системой координат F', утверждает, что движение вихревое с вихрем $-2\boldsymbol{\omega}$.

Точно так же циркуляция является понятием, связанным с системой координат, так что если Γ — циркуляция по замкнутому контуру C, определяемая наблюдателем, находящимся в системе координат F, и если Γ' — циркуляция по тому же контуру, определяемая наблюдателем, находящимся в системе координат F', то

$$\Gamma = \Gamma' + 2\omega S,$$

где S — площадь, ограничиваемая проекцией контура C на плоскость, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{\omega}$.

Для доказательства заметим, что

$$\Gamma - \Gamma' = \int_{(C)} \mathbf{q}\,d\mathbf{r} - \int_{(C)} \mathbf{q}'\,d\mathbf{r} = \int_{(C)} (\mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \int_{(C)} (\mathbf{r} \times d\mathbf{r}).$$

Положим $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$, тогда получим

$$\boldsymbol{\omega} \int_{(C)} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \omega \int_{(C)} (x\,dy - y\,dx) = 2\omega S.$$

Эти соображения имеют значение в динамической метеорологии, изучающей движение атмосферы с учетом вращения Земли.

3.60. Безвихревое движение. Уравнение для давления. Если давление является функцией плотности $p = f(\varrho)$, то уравнение безвихревого движения [1]) под действием консервативных сил дается формулой (7) п. 3.43 и имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\nabla\left(\int \frac{dp}{\varrho} + \frac{1}{2}q^2 + \Omega\right).$$

Так как скорость при безвихревом движении $\mathbf{q} = -\nabla\varphi$, то отсюда получим уравнение

$$\nabla\left(\int \frac{dp}{\varrho} + \frac{1}{2}q^2 + \Omega - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = 0$$

и, следовательно,

$$\int \frac{dp}{\varrho} + \frac{1}{2}q^2 + \Omega - \frac{\partial\varphi}{\partial t} = C(t), \qquad (1)$$

где $C(t)$ обозначает константу, зависящую только от времени t, которая поэтому в данный момент времени имеет одно и то же значение во всей жидкости. Соотношение (1) назовем уравнением для давления [2]). Функция

[1]) Движение безви́хрево и жидкость несжимаема,
Вдоль некой тока линии плывет форель одна.
Тогда об этой рыбине уже заранее знаем мы:
Чем выше скорость жидкости — быстрей плывет она.

«Эврика», Кэмбридж.
(*Перевод Е. М. Дмитренко*)

[2]) Соотношение (1) в русской литературе называется интегралом Коши — Лагранжа. — *Прим. ред.*

$C(t)$ может быть заменена абсолютной константой путем добавления к φ подходящей функции от t. Добавление такой функции к φ не изменяет соотношения $\mathbf{q} = -\nabla\varphi$. Если движение установившееся, то $\partial\varphi/\partial t = 0$ и мы получим уравнение Бернулли с одинаковым значением C во всей жидкости в течение всего времени.

Уравнение для давления имеет важное значение. В самом деле, как только мы знаем потенциал скоростей φ, то скорость определяется уравнением $\mathbf{q} = -\nabla\varphi$ и давление тогда находится из уравнения для давления и соотношения $p = f(\varrho)$.

Заметим, что частная производная $\partial\varphi/\partial t$ вычисляется при изменении только времени t и, следовательно, относится к фиксированной точке в пространстве.

Если жидкость несжимаема, то уравнение для давления имеет вид

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}q^2 + \Omega - \frac{\partial\varphi}{\partial t} = C(t).$$

Отсюда вытекает, что в основном решение любой задачи безвихревого движения жидкости сводится к нахождению потенциала скоростей φ, удовлетворяющего уравнению Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$ и другим условиям задачи. Расчет давления в жидкости на поверхности сводится тогда к квадратурам.

3.61. Уравнение для давления относительно подвижных осей. Рассмотрим, так же как и в п. 3.55, подвижную систему координат F', движение которой относительно мгновенного положения[1]) системы координат F с началом координат в точке O описывается поступательной скоростью $\mathbf{U}$ и угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Если точка P, радиус-вектор которой относительно точки O равен $\mathbf{r}$, жестко связана с системой координат F', то она имеет скорость $\mathbf{V} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

Таким образом, если точка P неподвижна в системе F, а не в системе F', то наблюдателю, связанному с системой F', будет казаться, что эта точка движется со скоростью $-\mathbf{V}$. Если движение относительно системы F безвихревое, то существует потенциал скоростей φ, такой, что $\mathbf{q} = -\nabla\varphi$, и скорость изменения φ в неподвижной относительно системы F точке вычисляется набюдателем, связанным с системой F', следующим образом (ср. п. 3.10):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{V}\nabla\right)\varphi.$$

Следовательно, уравнение для давления жидкости принимает вид

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}q^2 + \Omega - \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{V}\nabla\varphi = C(t).$$

Пусть $\mathbf{q}_r$ — скорость жидкости относительно подвижной системы координат. Тогда

$$\mathbf{q}_r = \mathbf{q} - \mathbf{V} = -\nabla\varphi - \mathbf{V}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}q^2 + \mathbf{V}(\nabla\varphi) = \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{V})^2 - \frac{1}{2}\mathbf{V}^2,$$

и, следовательно, уравнение для давления относительно подвижной системы координат может быть записано в виде

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}q_r^2 + \Omega - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}V^2 = C(t),$$

---

[1]) Это мгновенное положение системы координат F считается стандартным, совпадающим с положением неподвижной системы координат, указанной в п. 3.55.

где q_r — величина скорости жидкости в точке P относительно подвижной системы и V — скорость той же точки, которая считается неподвижной относительно подвижной системы координат.

3.62. Давление жидкости на препятствие. Рассмотрим обтекание неподвижного препятствия S. Пусть $\mathbf{F}$ — сила, действующая на препятствие за счет гидродинамического давления. Пусть $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к элементу dS поверхности препятствия; тогда имеем

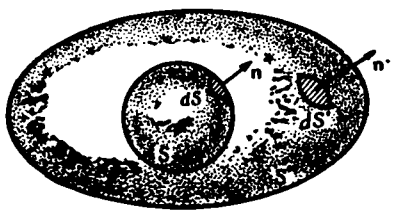


Рис. 56.

$$\mathbf{F} = -\int_{(S)} p\mathbf{n}\,dS.$$

Кроме того, так как движение установившееся, то из уравнения для давления находим

$$p = \text{const} - \tfrac{1}{2}\varrho q^2.$$

Заметим, что постоянное давление не оказывает результирующего действия на замкнутую поверхность; следовательно, отсюда получаем

$$\mathbf{F} = \tfrac{1}{2}\varrho \int_{(S)} \mathbf{n} q^2\,dS.$$

Так как $\mathbf{nq}$ является составляющей скорости жидкости, перпендикулярной к границе, то в точках на границе $\mathbf{nq} = 0$ (рис. 56). Поэтому мы можем написать равенство

$$\mathbf{F} = \tfrac{1}{2}\varrho \int_{(S)} [\mathbf{n}q^2 - 2\mathbf{q}(\mathbf{nq})]\,dS, \tag{1}$$

где поверхностный интеграл берется по поверхности препятствия. Пусть S' — замкнутая поверхность, целиком окружающая препятствие, и пусть $\mathbf{n}'$ — единичная нормаль (проведенная наружу из области между S и S') к элементу dS'.

Тогда, интегрируя по поверхности $S + S'$ и применяя теорему Гаусса (3), (7) п. 2.61 и формулу (IV) п. 2.34, мы получаем соотношение

$$\int_{(S+S')} [\mathbf{n}q^2 - 2\mathbf{q}(\mathbf{nq})]\,dS = -\int_{(V)} [\nabla q^2 - 2\mathbf{q}(\nabla\mathbf{q}) - 2(\mathbf{q}\nabla)\mathbf{q}]\,d\tau =$$

$$= -\int_{(V)} [2\mathbf{q}\times(\nabla\times\mathbf{q}) - 2\mathbf{q}(\nabla\mathbf{q})]\,d\tau.$$

Поскольку движение безвихревое, то $\nabla\times\mathbf{q} = 0$. Если область между S и S' не содержит источников или стоков, то из уравнения неразрывности получим $\nabla\mathbf{q} = 0$ и, следовательно, объемный интеграл обращается в нуль. Отсюда следует равенство

$$\int_{(S)} [\mathbf{n}q^2 - 2\mathbf{q}(\mathbf{nq})]\,dS = \int_{(S')} [\mathbf{n}'q^2 - 2\mathbf{q}(\mathbf{n}'\mathbf{q})]\,dS'.$$

Таким образом, в формуле (1) мы можем заменить поверхность S окружающей ее некоторой другой поверхностью при условии, что не имеется никаких особенностей в жидкости, т. е. если ее можно заменить какой-либо взаимно переводимой поверхностью (см. п. 3.70).

Точно так же доказываем, что момент относительно начала координат равен

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\varrho \int\limits_{(S')} \mathbf{r} \times [\mathbf{n}q^2 - 2\mathbf{q}(\mathbf{nq})]\, dS, \tag{2}$$

где S' — любая поверхность, взаимно переводимая с поверхностью S, причем в жидкости не имеется никаких особенностей.

3.64. Импульсивное движение. Предположим, что на движущуюся жидкость действуют внешние импульсы и импульсивное давление.

Если $\mathbf{q}_1$ — скорость элемента, который ранее двигался со скоростью $\mathbf{q}$, $\mathbf{I}$ — внешний импульс, отнесенный к единице массы, и $\tilde{\omega}$ — импульсивное давление, то, приравнивая полный импульс изменению количества движения жидкости, ограниченной замкнутой поверхностью S, мы получим, как в п. 3.41,

$$\int \tilde{\omega}\mathbf{n}\, dS + \int \mathbf{I}\varrho\, d\tau = \int \varrho(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q})\, d\tau.$$

Применяя теорему Гаусса, получаем отсюда

$$\int \{\mathbf{I}\varrho - \nabla\tilde{\omega} - \varrho(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q})\}\, d\tau = 0.$$

Так как объем интегрирования произвольный, то мы имеем

$$\mathbf{I} - \frac{1}{\varrho}\nabla\tilde{\omega} = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}.$$

Это — общее уравнение импульсивного движения.

Это уравнение дает физическую интерпретацию потенциала скоростей следующим образом.

Пусть внешние импульсы отсутствуют и пусть φ — потенциалы скоростей движения, начинающегося из состояния покоя под действием импульсивного давления $\tilde{\omega}$. Тогда в вышеупомянутом уравнении $\mathbf{I} = 0$, $\mathbf{q} = 0$, $\mathbf{q}_1 = -\nabla\varphi$ и, следовательно, получим равенство

$$\nabla\tilde{\omega} = \varrho\nabla\varphi,$$

которое в случае однородной жидкости приводится к виду

$$\tilde{\omega} = \varrho\varphi + \text{const}.$$

Константой в этом равенстве можно пренебречь, поскольку постоянное давление во всей жидкости не оказывает никакого результирующего действия на движение, и мы видим, что величина $\varrho\varphi$ является импульсивным давлением, которое мгновенно создает реально существующее движение из состояния покоя (ср. пример 32 гл. 3).

Обратно, движение, возникшее из состояния покоя под действием только импульсивного давления, обязательно является безвихревым, при этом потенциал скоростей равен $\tilde{\omega}/\varrho$. Это должно иметь место в том случае, если движение начинается, например, из состояния покоя при внезапном передвижении границ. Доказательство верно также для вязкой жидкости, когда рассматривают только *начальное* движение (см. фото 1 и 7). Однако вихревые слои (п. 13.70) могут образоваться даже в невязкой жидкости при смыкании слоев жидкости, которые ранее были разделены, а после смыкания движутся с различными скоростями. Наличие даже незначительной вязкости может быть причиной того, что эти слои свертываются и образуют концентрированные вихри (см. фото 1—12).

3.70. Связность. О п р е д е л е н и е. Область называется *связной*, если мы можем перейти от какой-либо точки области к другой ее точке, двигаясь вдоль траектории, каждая точка которой лежит в данной области.

Таким образом, внутренняя область сферы (рис. 57), или область между двумя коаксиальными бесконечно длинными цилиндрами (рис. 58), является связной.

Определение. Замкнутая линия, все точки которой лежат в данной области, называется *приводимой*, если ее можно стянуть в точку области, не выходя за пределы области.

Замкнутая линия $PRQS$ на рис. 57, 58 является приводимой. Линия $P'R'Q'S'$ на рис. 58 *не приводима*, так как она не может быть сделана меньше, чем окружность внутреннего цилиндра.

Определение. Область, в которой всякий замкнутый контур приводим, называется *односвязной*.

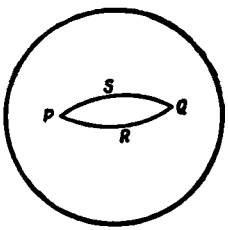


Рис. 57.

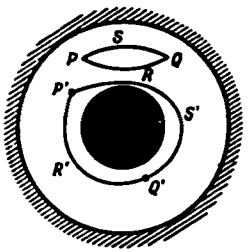


Рис. 58.

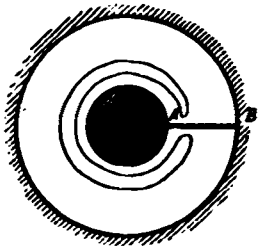


Рис. 59.

Примерами односвязных областей являются: внутренняя область сферы; внешняя область сферы; область, внешняя по отношению к некоторому числу сфер; область между двумя концентрическими сферами; неограниченное пространство.

Область между двумя концентрическими цилиндрами на рис. 58, несомненно, не является односвязной, так как она содержит неприводимые замкнутые линии. Однако мы можем сделать эту область односвязной, проводя *перегородку* или границу, которая не пересекает сама себя, как, например, плоскость AB, содержащую образующую каждого цилиндра (рис. 59).

Если провести эту перегородку, то каждая замкнутая линия в видоизмененной области становится приводимой и видоизмененная область является поэтому односвязной.

Кроме того, мы замечаем, что проведение добавочной перегородки между внутренним и внешним цилиндрами разделяет область на две части, из которых каждая в отдельности является связной областью, а в совокупности они не образуют связную область. Таким образом, мы пришли к следующему определению.

Определение. Область называется *двусвязной*, если она может быть сделана односвязной с помощью проведения одной перегородки. Область называется n-связной, если она может быть сделана односвязной с помощью проведения $(n-1)$ перегородки.

Примерами двусвязных областей являются: область между двумя коаксиальными бесконечно длинными цилиндрами; область, внутренняя по отношению к тору; область, внешняя по отношению к тору; область, внешняя по отношению к бесконечно длинному цилиндру.

Другая полезная идея содержится в следующем определении.

Определение. Траектории, соединяющие две точки P и Q области, называются *взаимно переводимыми*, если одна из них может быть непрерывно деформирована в другую, не выходя из области.

Таким образом, на рис. 57, 58 траектории PRQ, PSQ взаимно переводимы. На рис. 58 траектории $P'R'Q'$ и $P'S'Q'$ взаимно непереводимы. Ясно, что две

взаимно переводимые траектории, взятые вместе, образуют приводимую замкнутую кривую линию.

О п р е д е л е н и е. Две замкнутые кривые линии называются взаимно переводимыми, если каждая из них может быть непрерывно деформирована в другую, не выходя из области.

Взаимно переводимые кривые линии не всегда являются приводимыми. Термин «взаимно переводимый» также может быть применен к поверхности (ср. п. 3.62). Таким образом, поверхности в теореме Стокса, выражаемой формулой (1) п. 2.51, должны быть взаимно переводимыми внутри объема, занятого жидкостью.

Вышеуказанные свойства областей надо называть скорее *топологическими*, чем просто геометрическими, так как они в основном не зависят от частного вида упоминаемых границ. Например, поперечные сечения цилиндров могут быть эллипсами или какими-либо другими простыми замкнутыми кривыми.

3.71. Ациклическое и циклическое безвихревые движения. Если область, занимаемая жидкостью при безвихревом движении, односвязна, то потенциал скоростей однозначен, так как потенциал скоростей в точке P определяется следующей формулой (см. п. 2.52):

$$\varphi_P = -\int\limits_{(OAP)} \mathbf{q}\, d\mathbf{r}. \qquad (1)$$

Этот интеграл имеет одно и то же значение для всех траекторий, соединяющих точки O и P, так как все такие траектории взаимно переводимы. Движение, при котором потенциал скоростей однозначен, называется *ациклическим. Следовательно, в односвязной области единственно возможным безвихревым движением является ациклическое.* Этот результат существенно зависит от возможности построения поверхности, целиком лежащей в жидкости и содержащей две любые траектории, соединяющие точки O и P, и последующего применения теоремы Стокса (см. п. 2.52).

Если область не односвязна, то две траектории между точками O и P могут соединяться поверхностью, целиком лежащей в жидкости, только в том случае, если выполняются некоторые топологические условия. Если это не так, то нельзя сделать необходимого заключения из теоремы Стокса и тогда потенциал скоростей может иметь больше одного значения в точке P, которое зависит от траектории, соединяющей точку O с точкой P.

Если потенциал скоростей не однозначен, то говорят, что движение *циклическое.*

При непрерывном движении жидкости скорость в каждой точке должна быть однозначно определена. Таким образом, даже если потенциал φ имеет более одного значения в данной точке, то градиент $\nabla\varphi$ должен быть однозначен. Следовательно, хотя две траектории, соединяющие точки O и P, могут привести к различным значениям потенциала скоростей φ_P, эти значения могут отличаться только на скалярную величину $\varkappa$, такую, чтобы $\nabla\varkappa = 0$. Таким образом, величина $\varkappa$ не может зависеть от координат точки P. Эту скалярную величину можно отождествить с циркуляцией по одному из замкнутых контуров семейства взаимно переводимых, но не приводимых линий. Если C — какая-либо линия, то формула (1) показывает, что циркуляция по C равна *уменьшению функции* φ *при обходе один раз по этому контуру.*

Позднее у нас будет возможность рассмотреть отдельные типы циклического движения. Сейчас мы рассмотрим только ациклическое безвихревое движение и общие теоремы, которые будут доказаны применительно только к этому типу движения. Поэтому мы будем рассматривать только односвяз-

ные области, но при этом следует также помнить, что ациклическое движение возможно также и в многосвязных областях.

3.72. Кинетическая энергия жидкости. Кинетическая энергия определяется интегралом

$$T = \frac{1}{2} \int_{(V)} \varrho q^2 \, d\tau,$$

взятым по объему V, занимаемому жидкостью.

Если движение безвихревое, то

$$\mathbf{q} = -\nabla\varphi.$$

Следовательно, если потенциал скоростей φ однозначен, то из условия $\nabla^2\varphi = 0$ и теоремы Грина имеем

$$T = \frac{1}{2} \varrho \int_{(V)} (\nabla\varphi)(\nabla\varphi) \, d\tau = -\frac{1}{2} \varrho \int_{(S)} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \, dS.$$

Здесь интегралы берутся по граничной поверхности жидкости, при этом dn обозначает элемент нормали, проведенной внутрь жидкости.

Этот результат имеет простую физическую интерпретацию. Так как действительное движение может возникнуть из состояния покоя под действием импульсивного давления $\varrho\varphi$ и поскольку $-\partial\varphi/\partial n$ — скорость жидкости, нормальная к границе, то величина $\varrho\varphi\delta S\,(-{}^1/_2\,\partial\varphi/\partial n)$ — работа, совершенная за единицу времени импульсивным давлением, действующим на элемент δS в соответствии со следующей теоремой динамики.

Работа, совершенная импульсом за единицу времени, равна произведению импульса на полусумму компонент в его направлении начальной и конечной скоростей точки, на которую он действует. Следовательно, поверхностный интеграл представляет собой работу, совершаемую импульсивным давлением, если движение начинается из состояния покоя.

3.73. Теорема Кельвина о минимуме энергии. Безвихревое движение жидкости, занимающей односвязную область, имеет меньшую кинетическую энергию, чем любое другое движение с теми же самыми нормальными компонентами скорости на границе.

Доказательство. Пусть T — кинетическая энергия, φ — потенциал скоростей безвихревого движения и T_1 — кинетическая энергия какого-либо другого движения, заданного соотношениями

$$\mathbf{q} = -\nabla\varphi + \mathbf{q}_0, \quad \nabla\mathbf{q}_0 = 0, \quad \mathbf{n}\mathbf{q}_0 = 0 \text{ на границе.}$$

Второе из этих условий является уравнением неразрывности. Тогда

$$T_1 = \int \frac{1}{2} \varrho \, (-\nabla\varphi + \mathbf{q}_0)^2 \, d\tau = T + T_0 - \varrho \int (\nabla\varphi)\, \mathbf{q}_0 \, d\tau,$$

где

$$T_0 = \int \frac{1}{2} \varrho \mathbf{q}_0^2 \, d\tau.$$

Теперь заметим, что из формулы (VI) п. 2.34 следует соотношение

$$\nabla(\varphi\mathbf{q}_0) = \mathbf{q}_0(\nabla\varphi) + \varphi(\nabla\mathbf{q}_0) = \mathbf{q}_0(\nabla\varphi).$$

Используя теорему Гаусса и граничное условие $\mathbf{n}\mathbf{q}_0 = 0$, получаем

$$\int (\nabla\varphi)\, \mathbf{q}_0 \, d\tau = -\int \mathbf{n}\varphi\mathbf{q}_0 \, dS = 0.$$

Таким образом,

$$T_1 = T + T_0.$$

Так как T_0 — положительная величина, то $T < T_1$.

3.74. Среднее значение потенциала скоростей. Докажем следующую теорему, полученную Гауссом.

Среднее значение функции φ *по любой сферической поверхности, внутри которой* $\nabla^2\varphi = 0$, *равно значению этой функции в центре сферы.*

Доказательство. Опишем из точки P сферу S радиуса r. Тогда по формуле (2) п. 2.63 имеем

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)} \varphi \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) dS + \frac{1}{4\pi r}\int\limits_{(S)} \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS.$$

Но второй интеграл, согласно формуле (5) п. 2.62, обращается в нуль. Поэтому

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{(S)} \varphi\, dS.$$

Следствие. *Функция* φ *не может иметь ни максимума, ни минимума внутри какой-либо области, в которой* $\nabla^2\varphi = 0$.

Действительно, если бы в точке P значение φ_P было максимальным, то оно было бы больше любого значения φ во всех точках достаточно малой сферы с центром в точке P, а это противоречит только что доказанной теореме.

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

При безвихревом движении скорость достигает максимального значения на границе.

Доказательство. Возьмем за начало координат точку P внутри жидкости и проведем ось x по направлению движения в точке P. Тогда если q_P, q_Q — скорости в точках P и Q (точка Q лежит вблизи P), то справедливы равенства

$$q_P^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_P^2, \quad q_Q^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_Q^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_Q^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_Q^2.$$

Так как производная $\partial\varphi/\partial x$ удовлетворяет уравнению Лапласа[1]), то ее значение в точке P не может быть ни максимумом, ни минимумом. Следовательно, в непосредственной близости от точки P имеются точки, такие, как, например, Q, в которых $(\partial\varphi/\partial x)_Q^2 > (\partial\varphi/\partial x)_P^2$ и, значит, $q_Q^2 > q_P^2$.

Таким образом, величина q_P не может достигать своего максимального значения внутри жидкости, поэтому максимальное значение скорости, если таковое имеется, должно достигаться на границе.

Следует заметить, что значение q^2 может быть минимумом внутри жидкости, так как оно равно нулю в критической точке.

Из вышеуказанных результатов мы можем вывести следующую теорему.

При установившемся безвихревом движении гидродинамическое давление имеет минимальное значение на границе.

Доказательство. По теореме Бернулли имеем

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 = \text{const}.$$

---

[1]) Действительно, $\nabla^2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\nabla^2\varphi = 0$.

Таким образом, давление p достигает наименьшего значения там, где q^2 имеет наибольшее значение, а этого не может быть внутри жидкости. Таким образом, давление p должно достигать минимального значения на границе. Максимального значения давление p достигает в критической точке.

3.75. Среднее значение потенциала скоростей в перифрактической области. Область называется перифрактической[1]), если она изнутри ограничивается одной или более замкнутыми поверхностями. Например, такова область, занятая жидкостью, в которую целиком погружено твердое тело.

Рассмотрим жидкость, покоящуюся в бесконечности и ограниченную изнутри замкнутой поверхностью S и не ограниченную снаружи. Опишем сферу Σ достаточно большого радиуса R с центром в точке P, окружающую поверхность S. Если движение жидкости безвихревое, то применение теоремы Гаусса к перифрактической области, заключенной между S и Σ, приводит к соотношению

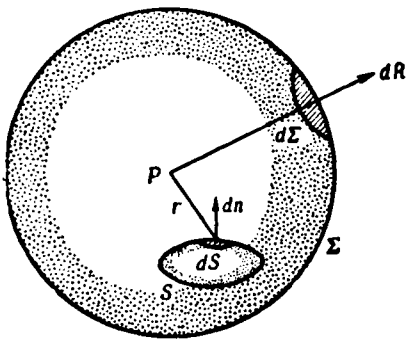


Рис. 60.

$$\int\limits_{(S)} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS + \int\limits_{(\Sigma)} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\Sigma = -\int \nabla^2 \varphi\, d\tau = 0.$$

Следовательно, так как $dn = -dR$ на Σ, то получим равенство

$$\int\limits_{(\Sigma)} \frac{\partial \varphi}{\partial R}\, d\Sigma = \int\limits_{(S)} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS = -F, \qquad (1)$$

где F — поток внутри рассматриваемой области через внутреннюю границу поверхности S.

Теперь $d\Sigma = R^2 d\omega$, где $d\omega$ — телесный угол с вершиной в точке P, опирающийся на элемент $d\Sigma$. Следовательно, вышеуказанный результат можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial R} \int \varphi\, d\omega = -\frac{F}{R^2}.$$

Но если $M(\varphi)$ — среднее значение φ на сфере Σ, то

$$M(\varphi) = \frac{1}{4\pi R^2} \int \varphi\, d\Sigma = \frac{1}{4\pi} \int \varphi\, d\omega$$

и, значит,

$$\frac{\partial M(\varphi)}{\partial R} = -\frac{F}{4\pi R^2}, \quad M(\varphi) = \frac{F}{4\pi R} + C, \qquad (2)$$

где C не зависит от R. Покажем теперь, что C также не зависит от положения центра сферы Σ. Для этого переместим центр на расстояние δx, сохраняя R постоянным. Тогда

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial M(\varphi)}{\partial x} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, d\omega.$$

Так как, по предположению, $\partial\varphi/\partial x \to 0$ в бесконечности, то, делая R достаточно большим, мы сможем сделать $\partial\varphi/\partial x$ сколь угодно малым, так чтобы $\partial C/\partial x = 0$. Таким образом, C не изменяется, если центр сферы переместить при условии, что поверхность S всегда находится внутри сферы.

[1]) По-гречески περίφραχτως — «огражденный».

В том случае, когда поверхность S является поверхностью твердого тела, сквозь него нет потока жидкости, так что $F=0$ и, следовательно, среднее значение φ на любой сфере, окружающей твердое тело, постоянно и равно C.

Теперь докажем, что значение $\varphi_P \to C$, когда точка $P \to \infty$. В самом деле, применяя результаты п. 2.63 к области между S и Σ, получаем соотношение

$$4\pi\varphi_P = \int\limits_{(S)} \left[\varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] dS + \int\limits_{(\Sigma)} \left[\varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] d\Sigma.$$

В силу формул (1) и (2) последний интеграл равен

$$\frac{1}{R^2}\int\limits_{(\Sigma)} \varphi\, d\Sigma + \frac{1}{R}\int\limits_{(\Sigma)} \frac{\partial\varphi}{\partial R}\, d\Sigma = 4\pi C.$$

Следовательно, получим равенство

$$4\pi(\varphi_P - C) = \int\limits_{(S)} \left[\varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] dS. \tag{3}$$

Если теперь положим, что $r \to \infty$, то величина $1/r$ и производная от этой величины по r стремятся к нулю, и, значит, если точка $P \to \infty$, то

$$\varphi_P \to C.$$

3.76. Кинетическая энергия жидкости, занимающей бесконечную область. При рассмотрении безвихревого движения жидкости, покоящейся в бесконечности и ограниченной изнутри твердым телом S, будем предполагать, что потенциал скоростей φ однозначен. Применяя метод п. 3.72 к области, заключенной между твердым телом S и поверхностью Σ, окружающей S, мы получим для кинетической энергии жидкости, занимающей эту область, выражение

$$T_1 = -\frac{1}{2}\varrho\int\limits_{(S)} \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS - \frac{1}{2}\varrho\int\limits_{(\Sigma)} \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\Sigma.$$

Так как внутри области через поверхность S нет потока, то уравнение неразрывности принимает форму [см. уравнение (2) п. 3.20]

$$\int\limits_{(S)} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS + \int\limits_{(\Sigma)} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\Sigma = 0 \tag{1}$$

и, следовательно,

$$T_1 = -\frac{1}{2}\varrho\int\limits_{(S)} (\varphi - C)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS - \frac{1}{2}\varrho\int\limits_{(\Sigma)} (\varphi - C)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\Sigma,$$

где C — произвольная постоянная. Из уравнения (1) следует, что интеграл $\int (\partial\varphi/\partial n)\, d\Sigma$ не зависит от Σ и равен нулю, так как для твердой границы интеграл $\int (\partial\varphi/\partial n)\, dS = 0$. Следовательно, если мы дадим постоянной C значение, к которому величина φ стремится в бесконечности, согласно п. 3.75, и затем расширим поверхность Σ во всех направлениях, то второй интеграл обратится в нуль и мы получим следующее выражение для кинетической энергии:

$$T = -\frac{1}{2}\varrho\int\limits_{(S)} (\varphi - C)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS = -\frac{1}{2}\varrho\int\limits_{(S)} \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS.$$

3.77. Теоремы единственности. Докажем теперь некоторые теоремы, касающиеся ациклического безвихревого движения жидкости. Доказательства основываются на следующей эквивалентности выражений для кинетической энергии:

$$\frac{1}{2}\varrho\int q^2\,d\tau=-\frac{1}{2}\varrho\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS, \qquad (1)$$

где объемный интеграл берется по всему объему жидкости, а поверхностный интеграл берется по всей границе.

(I) *Ациклическое безвихревое движение невозможно в жидкости, целиком ограниченной неподвижными твердыми стенками.*

Так как $d\varphi/dn=0$ в каждой точке границы, то, следовательно, $\int q^2\,d\tau=0$. Так как q^2 не может быть отрицательно, то $q=0$ повсюду и жидкость находится в покое.

(II) *Ациклическое безвихревое движение жидкости, ограниченной твердыми стенками, мгновенно прекратится, если стенки привести в состояние покоя.*

Это утверждение является непосредственным следствием теоремы (I).

(III) *Не может быть двух различных форм ациклического безвихревого движения ограниченной массы жидкости, в которой границы имеют заданные скорости.*

Пусть, если это возможно, φ_1, φ_2 являются потенциалами скоростей двух различных движений, удовлетворяющими условию $d\varphi_1/dn=d\varphi_2/dn$ в каждой точке границы.

Тогда функция $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$ является решением уравнения Лапласа и поэтому представляет возможное безвихревое движение, при котором

$$\frac{d\varphi}{dn}=\frac{d\varphi_1}{dn}-\frac{d\varphi_2}{dn}=0.$$

Следовательно, как и в случае (I), $q=0$ в каждой точке и, значит, $\varphi_1-\varphi_2=\text{const}$, так что движения жидкости по существу одинаковы.

Эта теорема показывает, что безвихревое движение определяется единственным образом, если заданы граничные условия.

(IV) *Если данные импульсивные давления прикладываются к границам ограниченной массы жидкости, находящейся в покое, то результирующее движение, если оно ациклическое и безвихревое, определяется единственным образом.*

Пусть функции φ_1 и φ_2 — потенциалы скоростей двух различных возможных движений жидкости. Импульсивное давление, создающее первое движение, равно $\varrho\varphi_1$, импульсивное давление, создающее второе движение, равно $\varrho\varphi_2$, и так как импульсивные давления задаются на границах, то

$$\varrho\varphi_1=\varrho\varphi_2$$

в каждой точке границы.

Следовательно, $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$ — потенциал скоростей возможного безвихревого движения, такой, что $\varphi=0$ в каждой точке границы. Таким образом, из формулы (1) вытекает, что $q=0$ в каждой точке жидкости. Отсюда следует, что разность $\varphi_1-\varphi_2=\text{const}$, и поэтому движения по существу одинаковы.

(V) *Ациклическое безвихревое движение невозможно в жидкости, которая покоится в бесконечности, а изнутри ограничена неподвижными твердыми стенками.*

Так как жидкость покоится в бесконечности и нет течения через внутренние границы, то кинетическая энергия по-прежнему задается формулой (1) (см. п. 3.76) и доказательство, следовательно, такое же, как в случае (I).

(VI) *Ациклическое безвихревое движение жидкости, покоящейся в бесконечности и ограниченное изнутри твердыми стенками, мгновенно прекращается, если остановить границы.*

Это непосредственно следует из теоремы (V).

(VII) *Ациклическое безвихревое движение жидкости, покоящейся в бесконечности, обусловленное заданным движением погруженного твердого тела, определяется движением твердого тела единственным образом.*

Пусть φ_1, φ_2 — потенциалы скоростей двух различных движений. Граничные условия таковы:

$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$ на поверхности твердого тела, $q_1 = q_2 = 0$ в бесконечности.

Таким образом, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — потенциал скоростей возможного движения, такой, что $\partial\varphi/\partial n = 0$ на поверхности твердого тела, $q = 0$ в бесконечности. Из формулы (1) тогда следует, что $q = 0$ повсюду, так что $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$ и оба движения по существу одинаковы.

(VIII) *Если жидкость в бесконечности движется с постоянной скоростью, то ациклическое безвихревое движение, обусловленное заданным движением погруженного твердого тела, определяется движением твердого тела единственным образом.*

Кинематические условия не изменяются, если мы наложим на всю систему твердое тело — жидкость скорость, равную по величине и противоположную по направлению скорости в бесконечности. Это приведет жидкость к состоянию покоя в бесконечности. Тогда результирующее движение определяется теоремой (VII). Возвращаясь к исходному движению, нужно добавить всей системе скорость, равную по величине и направлению заданной скорости в бесконечности.

ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ 3

1. Вывести уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости в форме

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Показать, что $u = -\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}$, $v = \frac{(x^2-y^2)z}{(x^2+y^2)^2}$, $w = \frac{y}{x^2+y^2}$ являются компонентами скорости возможного движения жидкости. Безвихревое ли это движение?

2. Пусть жидкость движется радиально и скорость u есть функция только от r, t, где r — расстояние от фиксированной точки. Доказать, что уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + u\frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{\varrho}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u) = 0.$$

3. Пусть каждая частица жидкости движется по сфере. Доказать, что уравнение неразрывности имеет вид

$$\cos\theta \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta}(\varrho q_\theta \cos\theta) + \frac{\partial}{\partial \omega}(\varrho q_\omega \cos\theta) = 0,$$

где θ, ω — широта и долгота и q_θ, q_ω — соответственно угловые скорости по широте и долготе.

4. Пусть ω — площадь поперечного сечения трубки тока. Доказать, что уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho\omega) + \frac{\partial}{\partial s}(\varrho\omega q) = 0,$$

где ds — элемент дуги нити тока в направлении потока, а q — скорость.

5. Пусть уравнение $F(r, t) = 0$ представляет собой поверхность, всегда состоящую из одних и тех же частиц жидкости. Показать, что через бесконечно малый промежуток

времени δt, $F(\mathbf{r}+\mathbf{q}\,\delta t, t+\delta t)=0$ и что в этом случае выполняется соотношение

$$\frac{\partial F}{\partial t}+(\mathbf{q}\nabla)F=0.$$

6. Объяснить смысл дифференцирования, следуя за движением частицы жидкости, и найти условие того, что поверхность $F(x, y, z, t)=0$ может быть граничной поверхностью.

Доказать, что переменный эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2k^2t^4}+kt^2\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=1$$

является возможной формой граничной поверхности жидкости в момент времени t.

7. Некоторое количество жидкости занимает длину $2l$ прямой трубки малого поперечного сечения. На жидкость действует сила притяжения, направленная к некоторой неподвижной точке внутри трубки и пропорциональная расстоянию от этой точки.

Определить давление на расстоянии x от указанной неподвижной точки, если ближайшая свободная поверхность находится на расстоянии z.

8. Показать, что в случае цилиндрических координат (см. п. 2.72) ускорение равно

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt}=\mathbf{i}_{\tilde{\omega}}\left(\frac{d'q_{\tilde{\omega}_1}}{dt}-\frac{q_\omega^2}{\tilde{\omega}}\right)+\mathbf{i}_\omega\frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{d'}{dt}(\tilde{\omega}q_\omega)+\mathbf{i}_x\frac{d'q_x}{dt},$$

где

$$\frac{d'}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+q_{\tilde{\omega}}\frac{\partial}{\partial\tilde{\omega}}+\frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{q_\omega\partial}{\partial\omega}+\frac{q_x\partial}{\partial x}.$$

9. Доказать, что уравнения движения в цилиндрических координатах имеют вид (см. пример 8)

$$F_x-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{d'q_x}{dt},\quad F_{\tilde{\omega}}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial\tilde{\omega}}=\frac{d'q_{\tilde{\omega}}}{dt}-\frac{q_\omega^2}{\tilde{\omega}},$$

$$\tilde{\omega}F_\omega-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial\omega}=\frac{d'}{dt}(\tilde{\omega}q_\omega).$$

10. Доказать, что в случае, когда жидкость вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью ω около вертикальной оси (z) и единственной внешней силой является сила тяжести, давление дается формулой

$$\frac{p}{\varrho}=\frac{1}{2}\omega^2r^2-gz+\text{const},$$

где r — расстояние от оси. Показать, что поверхности равного давления — софокусные параболоиды.

11. Пусть жидкость, содержащаяся в замкнутом круговом цилиндре, вращается около оси цилиндра. Доказать, что уравнение неразрывности и граничные условия удовлетворяются, если взять $\mathbf{q}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$, где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, зависящая только от времени, и $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, измеряемый от точки на оси вращения.

12. Пусть жидкость, рассматриваемая в примере 11, выходит из состояния покоя под действием внешних сил, компоненты которых равны $\alpha x+\beta y$, $\gamma x+\delta y$, 0. Пусть осью цилиндра является ось z. Написать уравнение движения и доказать, что

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{1}{2}(\gamma-\beta).$$

Доказать также, что давление задается формулой

$$\frac{p}{\varrho}=\frac{1}{2}\omega^2r^2+\frac{1}{2}[\alpha x^2+(\beta+\gamma)xy+\delta y^2],$$

где r — расстояние от оси z.

13. Пусть движение жидкости отнесено к подвижной системе координат, вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ и движущейся со скоростью $\mathbf{u}$. Показать, что уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q}+\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\nabla\right)\mathbf{q}=\mathbf{F}-\frac{1}{\varrho}\nabla p.$$

Здесь $\partial\mathbf{r}/\partial t=\mathbf{q}-\mathbf{u}-\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$, а уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\nabla\left(\varrho\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)=0,$$

где $\mathbf{q}$ — скорость жидкости, а радиус-вектор $\mathbf{r}$ отсчитывается в подвижной системе координат.

14. Пусть движение отнесено к подвижной системе координат, имеющей скорость $\mathbf{u}$ и угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$. Доказать, что вихрь $\boldsymbol{\zeta}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\zeta} + (\mathbf{q}_r \nabla)\, \boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\zeta} \nabla)\, \mathbf{q},$$

где $\mathbf{q}_r = \mathbf{q} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

15. Доказать, что

$$\frac{1}{2} \int\limits_{(V)} \nabla q^2\, d\tau = \int\limits_{(V)} ((\mathbf{q}\nabla)\, \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \boldsymbol{\zeta})\, d\tau,$$

и вывести формулу

$$\frac{1}{2} \int\limits_{(S)} n q^2\, dS = \int\limits_{(S)} \mathbf{q}\, (n\mathbf{q})\, dS + \int\limits_{(V)} \mathbf{q}\, (\nabla \mathbf{q})\, d\tau - \int\limits_{(V)} (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\zeta})\, d\tau,$$

где $\mathbf{q}$ — скорость жидкости, S — замкнутая поверхность, а V — заключенный внутри нее объем.

Использовать указанный здесь результат для нахождения действующей на тело силы, обусловленной давлением жидкости.

16. Пусть Γ — циркуляция по замкнутой линии, движущейся вместе с жидкостью. Доказать, что

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int p\, d\left(\frac{1}{\varrho}\right),$$

если внешние силы имеют потенциал и давление является функцией только плотности.

17. Вдоль прямолинейной постоянного сечения трубки, наполненной газом, распространяется импульс. В результате этого плотность газа ϱ в момент времени t на расстоянии x от начала, где скорость имеет величину u_0, становится равной [1]) $\varrho_0 \varphi(Vt - x)$. Доказать, что скорость u задается формулой

$$V + \frac{(u_0 - V)\, \varphi(Vt)}{\varphi(Vt - x)}.$$

18. Пусть каждая частица жидкости равномерно вращается около фиксированной оси, при этом угловая скорость ω изменяется как n-я степень расстояния от оси. Показать, что движение будет безвихревым только в том случае, если $n + 2 = 0$.

Доказать, что если бы некоторая очень малая сферическая частица жидкости внезапно отвердела, то она начала бы вращаться около своего диаметра с угловой скоростью, равной $(n+2)/2$.

19. В точке O на некотором расстоянии под поверхностью глубокой воды произошел взрыв. Если O' — отображение точки O относительно свободной поверхности, то показать, что потенциал скоростей начального движения в каждой точке дается выражением

$$\frac{1}{OP} - \frac{1}{O'P}.$$

Определить начальную скорость свободной поверхности в каждой ее точке.

20. Дать определение безвихревого движения и доказать, что при некоторых условиях движение жидкости без трения, если оно безвихревое, остается всегда таким. Доказать, что эта теорема остается верной, если движению каждой частицы оказывает сопротивление сила, пропорциональная абсолютной величине скорости жидкости.

21. Пусть, при безвихревом движении потенциал скоростей φ равен константе на границе любой односвязной области, занятой жидкостью. Доказать, что функция φ имеет то же самое постоянное значение внутри жидкости.

22. Доказать, что если нормальная скорость равна нулю в каждой точке границы жидкости, занимающей односвязную область, и если движение безвихревое, то потенциал скоростей φ равен константе всюду внутри области.

23. Пусть жидкость, находящаяся в безвихревом движении, занимает односвязную область, ограниченную частично поверхностью, на которой потенциал скоростей φ постоянен, и частично поверхностью, на которой нормальная скорость равна нулю. Доказать, что функция φ имеет постоянное значение во всей области движения.

24. Тело движется заданным образом, не изменяя своего объема в невязкой жидкости. Пусть T_0 — кинетическая энергия жидкости, если нет внешней границы и в беско-

---

[1]) Здесь и в дальнейших примерах к гл. III через φ обозначен потенциал скоростей. *Прим. перев.*

нечности жидкость покоится; T_0' — кинетическая энергия той части жидкости, которая находится вне замкнутой поверхности S_0', внешней по отношению к телу; T — кинетическая энергия жидкости, если поверхность S_0 является ее внешней границей и неподвижна. Доказать, что если области, занятые жидкостью, односвязны, то

$$T > T_0 + T_0'.$$

25. Если $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ — уравнения пространственной кривой, то показать, что касательная имеет направление вектора $\nabla\alpha \times \nabla\beta$. Следовательно, надо показать, что если поверхности $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ являются двумя любыми системами поверхностей, проходящими через вихревые линии, то $\zeta = F\nabla\alpha \times \nabla\beta$, где F — скалярная функция.

26. В примере 25, используя равенство $\nabla\zeta = 0$, доказать, что $(\nabla F)(\nabla\alpha \times \nabla\beta) = 0$, и, следовательно, доказать эквивалентность этого соотношения обращению в нуль якобиана $\partial(F, \alpha, \beta)/\partial(x, y, z)$. Таким образом, F является функцией только α и β.

27. Доказать, что

$$\nabla f(\alpha, \beta) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\nabla\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta}\nabla\beta.$$

Пользуясь обозначениями из примеров 25, 26, показать, что если скалярная функция $f(\alpha, \beta)$ удовлетворяет условию $\partial f/\partial\alpha = F$, то (1) $\mathbf{q} = f(\alpha, \beta)\nabla\beta$ является решением уравнения $\zeta = \nabla \times \mathbf{q}$. (2) $\zeta = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\nabla\alpha \times \nabla\beta$.

28. Используя пример 27, доказать, что общее решение уравнения $\zeta = \nabla \times \mathbf{q}$ имеет вид

$$\mathbf{q} = -\nabla\varphi + f(\alpha, \beta)\nabla\beta,$$

где $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ — две системы поверхностей, проходящих через вихревые линии, φ — решение уравнения Лапласа.

29. Получить преобразование Клебша, позволяющее скорость q выразить в форме

$$\mathbf{q} = -\nabla\varphi + \lambda\nabla\mu,$$

где поверхности $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ движутся вместе с жидкостью, а кривые, по которым они пересекаются, являются вихревыми линиями.

30. Вывести формулу (2) п. 3.62 для момента L.

31. Пусть E — внутренняя энергия на единицу массы. Доказать равенства

$$\varrho\frac{dE}{dt} = \frac{p}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} = -p\nabla\mathbf{q}.$$

32. Доказать, что для сжимаемой жидкости при безвихревом движении потенциал скоростей имеет вид

$$\varphi = \int \frac{d\tilde{\omega}}{\varrho},$$

где $\tilde{\omega}$ — импульсивное давление, создающее движение из состояния покоя.

Глава 4

ДВУМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

4.10. Двумерное движение. Двумерное движение характеризуется тем, что все линии тока параллельны фиксированной плоскости и все скорости в соответствующих точках плоскостей, параллельных фиксированной плоскости, имеют одинаковую величину и направление. Чтобы объяснить это подробнее, предположим, что фиксированной плоскостью является плоскость xy (рис. 61) и что P — какая-либо точка в этой плоскости. Проведем прямую PQ перпендикулярно плоскости xy (или параллельно Oz). Тогда говорят, что точки на линии PQ соответствуют точке P.

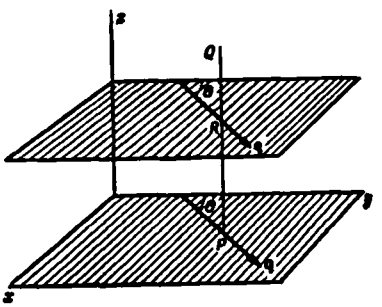


Рис. 61.

Возьмем какую-либо плоскость в жидкости, параллельную xy; пусть она пересекает линию PQ в точке R. Тогда, если скорость в точке P плоскости xy равна q и образует угол θ с осью Oy, то скорость в точке R равна по величине и параллельна по направлению скорости в точке P. Следовательно, скорость в соответствующих точках является функцией от x, y и времени t и не зависит от z. Поэтому достаточно рассмотреть движение частиц жидкости в одной «показательной» плоскости, скажем в плоскости xy, и можно говорить исключительно о скорости в точке P, так как скорость в любой другой точке линии PQ имеет ту же величину и направление.

Чтобы приблизиться к действительности, полезно предположить, что жидкость при двумерном движении заключена между двумя плоскостями, параллельными плоскости движения и расположенными на расстоянии единицы друг от друга. При этом предполагается, что жидкость свободно скользит по этим плоскостям, не испытывая никакого сопротивления трения.

Рассматривая движение цилиндра в направлении, перпендикулярном его оси, предположим, что цилиндр имеет толщину, равную единице [1]), и не испытывает никакого сопротивления со стороны граничных плоскостей (рис. 62). Этот метод исследования никоим образом не ограничивает общности и не влияет на математическое решение.

Для завершения картины мы примем за «показательную» плоскость движения плоскость, параллельную нашим принятым фиксированным плоскостям и расположенную посредине между ними.

Таким образом, в случае двумерного движения кругового цилиндра на плоскости схематического чертежа будет изображен круг C, представляющий собой поперечное сечение цилиндра вышеупомянутой плоскостью, а центром этого круга будет точка A, в которой ось цилиндра пересекает указанную плоскость (рис. 63). Эту точку можно по праву называть *центром* цилиндра. В общем случае любая замкнутая кривая, проведенная в вышеуказанной плоскости, представляет собой поперечное сечение цилиндрической поверхности, ограниченной фиксированными плоскостями.

---

[1]) Термин «толщина» будет применяться для обозначения размера, перпендикулярного к плоскости движения.

Ясное понимание вышеизложенного позволит успешно применять более привычные обозначения двумерной геометрии. В качестве некоторой иллюстрации этого может служить схема на рис. 62.

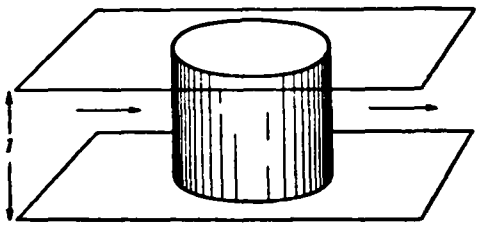


Рис. 62.

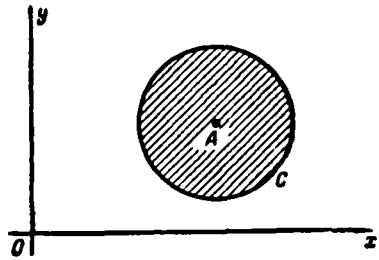


Рис. 63.

Двумерное движение, как будет видно впоследствии, сравнительно легко поддается специальному математическому описанию. Оно позволяет исследовать природу многих явлений, изучение которых в их полной трехмерной постановке до сих пор встречает непреодолимые трудности.

4.20. Двумерное установившееся движение жидкости. В п. 2.40 мы рассматривали общий вид движения жидкости. В этом пункте мы подробно исследуем двумерное установившееся движение жидкости.

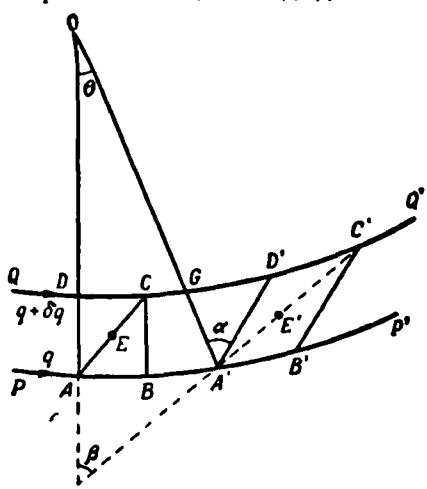


Рис. 64.

Рассмотрим две соседние линии тока PP' и QQ' (рис. 64). Поскольку движение установившееся, линии тока являются траекториями частиц жидкости. Частица, находящаяся в момент времени t в точке A, в момент времени $t+\delta t$ будет находиться в точке A'. Проведем нормали AD и $A'G$ к линии PP', пусть они пересекаются в центре кривизны O. Пусть $AD=\delta n$ — элемент нормали, которая считается положительной по направлению к точке O. Отложим вдоль PP' и QQ' отрезки AB и DC, равные δn.

Жидкость, занимающая в момент времени t призму с квадратным основанием $ABCD$, займет в момент времени $t+\delta t$ призму с основанием в виде ромба $A'B'C'D'$, так как если q — скорость в точке A, то скорость в точке D равна $q+(\partial q/\partial n)\,\delta n$.

Пусть прямая $A'D'$ образует угол α с нормалью $A'O$. Так как диагональ ромба $A'C'$ делит пополам угол $B'A'D'$, то угол $C'A'D'$ равен $^1/_4\pi-{}^1/_2\alpha$, поэтому $A'C'$ образует с AO угол β, определяемый формулой

$$\beta+\theta=\alpha+\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\alpha,$$

где θ — угол между нормалями в точках A и A'.

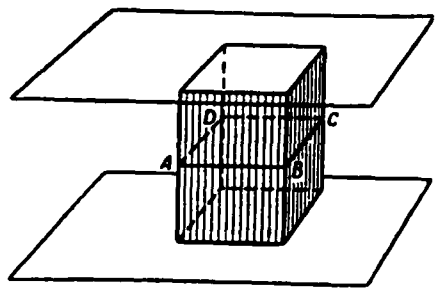
Следует отметить, что мы рассматриваем движение бесконечно малого элемента в течение бесконечно малого промежутка времени и поэтому углы α и θ бесконечно малы.

Теперь очевидно, что за время δt элемент жидкости $ABCD$ испытывает следующие изменения (рис. 64, 65):

(I) *перенос*, при котором центр квадрата E перемещается в центр ромба E';

(II) *вращение*, при котором ось симметрии AC поворачивается на угол $^1/_4\pi-\beta=\theta-{}^1/_2\alpha$ и переходит в линию $A'C'$. Этот угол положителен, если измеряется против часовой стрелки;

(III) *чистая деформация*, при которой все линии, параллельные AC, удлиняются, а все линии, параллельные BD, сокращаются в одинаковом отношении.



Р и с. 65.

Эти искажения вызваны чистой деформацией, которая превращает квадрат в ромб. Искажения по существу обусловлены скоростью точки D относительно точки A.

Вращение и деформация отсутствуют только в том случае, если движение является исключительно переносом.

Имеющая здесь место чистая деформация характерна не только для движения жидкости, но характерна для любой субстанции, способной изменять форму.

Скорость переноса измеряется пределом отношения $EE'/\delta t$, когда $\delta t\to 0$, т. е. величиной q — скоростью жидкости в точке A.

Для вычисления вращения имеем соотношения

$$AA'=q\delta t=R\theta, \tag{1}$$

где $R=OA$ есть радиус кривизны дуги PP' в точке A,

$$DD'=\left(q+\frac{\partial q}{\partial n}\delta n\right)\delta t, \qquad GD'=A'G\alpha=\alpha\delta n.$$

Из (1) находим

$$DG=(R-\delta n)\,\theta=q\left(1-\frac{\delta n}{R}\right)\delta t,$$

таким образом,

$$\alpha=\frac{DD'-DG}{\delta n}=\left(\frac{\partial q}{\partial n}+\frac{q}{R}\right)\delta t$$

и, следовательно, вращение равно

$$\theta-\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{q}{R}-\frac{\partial q}{\partial n}\right)\delta t.$$

Скорость вращения равна

$$\frac{1}{2}\left(\frac{q}{R}-\frac{\partial q}{\partial n}\right).$$

Так как скорость вращения равна половине вихря, то для вихря имеем формулу

$$\omega=\frac{q}{R}-\frac{\partial q}{\partial n}.$$

В двумерном движении вектор вихря перпендикулярен плоскости движения и поэтому имеет фиксированное направление. Таким образом, в двумерном случае вектор вихря имеет много свойств скалярной величины и под вихрем здесь следует понимать вообще только скалярную величину ω.

Приравнивая поток сквозь AD (см. рис. 64) потоку через $A'G$, мы найдем уравнение неразрывности в форме

$$\frac{\partial q}{\partial s}+\frac{q}{R'}=0,$$

где R' — радиус кривизны в точке A кривой, ортогональной линии тока (см. п. 19.82).

Для расчета деформации находим *удлинение*, т. е. отношение приращения отрезка AC к первоначальной его длине, а именно

$$\frac{A'C'-AC}{AC}.$$

Теперь имеем

$$A'C'\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=A'G=\delta n,$$

так что

$$A'C'\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}=\delta n.$$

Поскольку α бесконечно мало, то это соотношение дает

$$A'C'\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=\delta n\sqrt{2}=AC,$$

и, следовательно, применяя биномиальное приближение

$$\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}=1+\frac{\alpha}{2},$$

получаем $A'C'=\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)AC$, поэтому величина удлинения выразится в виде

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial n}+\frac{q}{R}\right)\delta t,$$

а скорость удлинения равна

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial n}+\frac{q}{R}\right).$$

Подобные расчеты показывают, что скорость сжатия отрезка BD дается таким же соотношением.

Ясно, что AC и BD соответственно являются направлениями максимальной скорости удлинения и сжатия. Линии, параллельные AB, не испытывают ни удлинения, ни сжатия.

Следовательно, деформация является сдвигом, при котором линии, параллельные AB, движутся вперед со скоростью, которая увеличивается линейно относительно их расстояний от AB.

4.21. Безвихревое движение. При безвихревом движении вихрь равен нулю и, следовательно,

$$\frac{\partial q}{\partial n}=\frac{q}{R}.$$

Если линии тока прямые ($R=\infty$), то мы имеем $q=\text{const}$, если двигаться поперек потока. Таким образом, для параллельного потока в канале при безвихревом движении скорость постоянна во всех точках поперечного сечения канала. Это имеет место для невязкой жидкости, но не для вязкой жидкости (см. рис. 1).

Кроме того, производная $\frac{\partial q}{\partial n}$ положительна, если мы движемся по направлению к центру кривизны линии тока. Таким образом, на изгибе реки мы должны ожидать увеличения скорости, когда мы проходим через реку с внешней стороны к внутренней стороне изгиба[1]), при этом соответственно уменьшается давление.

4.22. Движение без деформации. Скорость деформации будет равна нулю, если

$$\frac{\partial q}{\partial n}+\frac{q}{R}=0.$$

Таким образом, если линии тока прямые ($R=\infty$), то мы видим, что если скорость q постоянна при движении потока, то деформации нет.

С другой стороны, при установившемся вращении жидкости около оси с таким же распределением скорости, как в твердом теле, а именно $q=r\omega$, где r — расстояние от оси и ω — постоянная угловая скорость, мы имеем

$$R=r,\quad \frac{\partial q}{\partial n}=-\frac{\partial q}{\partial r}=-\omega,$$

и, таким образом, деформация обращается в нуль. Можно заметить, что в этом случае вихрь равен

$$\frac{q}{R}-\frac{\partial q}{\partial n}=2\omega$$

и угловая скорость вращения частицы жидкости поэтому равна ω.

4.23. Вихрь. В двумерном движении вектор вихря $\boldsymbol{\zeta}$ всегда направлен перпендикулярно плоскости движения и, следовательно, векторное произведение $\boldsymbol{\zeta}\times\mathbf{q}$ представляет собой вектор, лежащий в плоскости движения и направленный перпендикулярно вектору скорости $\mathbf{q}$ таким образом, чтобы вращение от $\mathbf{q}$ к $\boldsymbol{\zeta}\times\mathbf{q}$ происходило против часовой стрелки.

Из п. 3.53 скорость изменения вихря можно записать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt}=(\boldsymbol{\zeta}\nabla)\,\mathbf{q}. \qquad (1)$$

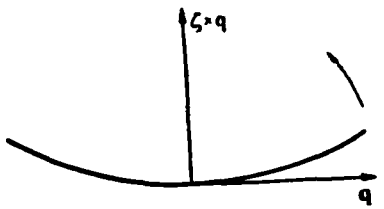


Рис. 66.

Член, стоящий в правой части формулы (1), представляет собой скорость изменения вектора $\mathbf{q}$, если идти в направлении $\boldsymbol{\zeta}$, т. е. перпендикулярно плоскости движения (рис. 66). По определению двумерного движения эта скорость равна нулю. Таким образом,

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt}=0. \qquad (2)$$

Это означает, что вихрь частицы жидкости не изменяется при движении частицы.

Эта особенность вихря свойственна только двумерному движению, что видно из уравнения (1).

В установившемся движении траектории частиц также являются линиями тока.

---

[1]) В реальных реках этот теоретический результат существенно изменяется из-за того, что поток стремится изменить направление на противоположное с внутренней стороны изгиба в области, расположенной вниз по течению, а также по другим причинам.

Следовательно, в установившемся двумерном течении вихрь постоянен вдоль линии тока.

4.24. Уравнения установившегося движения. Касательное и нормальное ускорения элемента $ABCD$, изображенного на рис. 64, имеют вид

$$q\frac{\partial q}{\partial s},\quad \frac{q^2}{R}.$$

Приравнивая силу произведению массы на ускорение, получим уравнение

$$q\frac{\partial q}{\partial s}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s}-\frac{\partial \Omega}{\partial s}, \tag{1}$$

$$\frac{q^2}{R}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial n}-\frac{\partial \Omega}{\partial n}, \tag{2}$$

где Ω — потенциал внешней силы, действующей на единицу массы. Эти уравнения можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{p}{\varrho}+\frac{1}{2}q^2+\Omega\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{p}{\varrho}+\frac{1}{2}q^2+\Omega\right)=-q\left(\frac{q}{R}-\frac{\partial q}{\partial n}\right)=-q\omega,$$

где ω — величина вихря.

Из первого уравнения получаем уравнение Бернулли

$$\frac{p}{\varrho}+\frac{1}{2}q^2+\Omega=C,$$

где C — константа вдоль линии тока. Тогда второе уравнение запишется в виде

$$\frac{\partial C}{\partial n}=-q\omega.$$

Отсюда видно, как изменяется константа C, когда мы движемся, пересекая линию тока. Если движение безвихревое, то $\omega=0$ и C постоянно во всей жидкости.

4.30. Функция тока. Пусть при двумерном движении жидкости A — фиксированная точка в плоскости движения и пусть ABP и ACP — две кривые в той же плоскости, соединяющие A с произвольной точкой P (рис. 67). Предположим, что внутри области R, ограниченной этими кривыми, не имеется ни источников, ни стоков. Тогда условие неразрывности можно выразить в следующей форме.

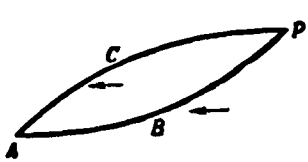


Рис. 67.

Количество жидкости, втекающей за единицу времени в область R справа налево через кривую ABP, равно количеству жидкости, вытекающей за единицу времени через кривую ACP справа налево.

Мы используем принятый термин *поток* для указанного количества жидкости и будем предполагать, что при этом поток положителен, если течение происходит справа налево. Понятие «справа налево» относится к наблюдателю, движущемуся вдоль кривой от фиксированной точки A в направлении, по которому дуга кривой s, измеряемая от A, увеличивается.

Таким образом, поток сквозь дугу ACP равен потоку через любую кривую, соединяющую A с P.

Поскольку *основная точка* A фиксирована, то поток зависит, следовательно, только от положения точки P и от времени t. Если мы обозначим

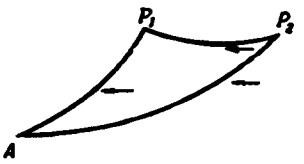
этот поток через ψ, то ψ является функцией положения точки P и времени. Например, в прямоугольных координатах

$$\psi = \psi(x, y, t).$$

Функция ψ называется *функцией тока*.

Существование этой функции является только следствием предположений о непрерывности и несжимаемости жидкости. Таким образом, функция тока существует также и для вязкой жидкости.

Теперь возьмем две точки P_1 и P_2 и пусть ψ_1 и ψ_2 — соответствующие значения фуикции тока (рис. 68). Тогда, по тому же принципу, поток через AP_2 больше потока через AP_1 на величину потока через дугу P_1P_2. Следовательно, поток через P_1P_2 равен $\psi_2 - \psi_1$. Отсюда следует, что если мы возьмем другую исходную точку, скажем A', то функция тока будет измеияться только за счет потока через дугу $A'A$.



Р и с. 68.

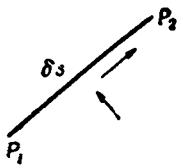
Кроме того, если P_1 и P_2 — точки той же линии тока, то поток через P_1P_2 равен потоку через линию тока, на которой лежат точки P_1 и P_2. Таким образом, $\psi_1 - \psi_2 = 0$. Следовательно, *функция тока постоянна вдоль линии тока*.

Поэтому уравнения линий тока получаются из уравнения $\psi = c$, если давать константе c произвольные значения.

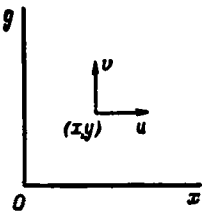
При установившемся движеиии положения линий тока являются фиксированными. При иеустановившемся движеиии положение их меняется в разные момеиты времени.

Примеияя обозначения L и T для размерностей длины и времени, размерность функции тока представляется в виде L^2T^{-1}.

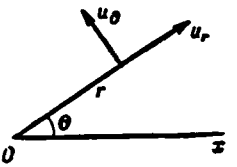
4.31. Выражение скорости через функцию тока. Пусть $P_1P_2 = \delta s$ — бесконечно малая дуга кривой (рис. 69). Скорость жидкости, протекающей через эту дугу, можно разложить на две составляющие, направленные вдоль и перпендикулярно элементу δs. Составляющая вдоль элемента δs



Р и с. 69.



Р и с. 70.



Р и с. 71.

не изменяет потока через элемент дуги. Составляющая, перпендикулярная элементу δs, равна потоку через элемент δs, деленному на величину δs, т. е. равна величине $(\psi_2 - \psi_1)/\delta s$, где ψ_1, ψ_2 — значения функции тока в точках P_1 и P_2.

Таким образом, скорость справа налево через элемент δs в пределе становится равной $\partial\psi/\partial s$.

Рассматривая бесконечно малые приращения δx и δy в прямоугольной декартовой системе координат (рис. 70), выразим компоненты u и v скорости, параллельные осям, в следующем виде:

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

В полярных координатах, для радиальной и трансверсальной компонент (рис. 71) получаем выражения

$$u_r = -\frac{\partial \psi}{r\,\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

4.32. Метод Рэнкина. Если функцию тока ψ представить в виде суммы двух функций $\psi = \psi_1 + \psi_2$, то можно провести линии тока, если известны кривые $\psi_1 = \text{const}$, $\psi_2 = \text{const}$.

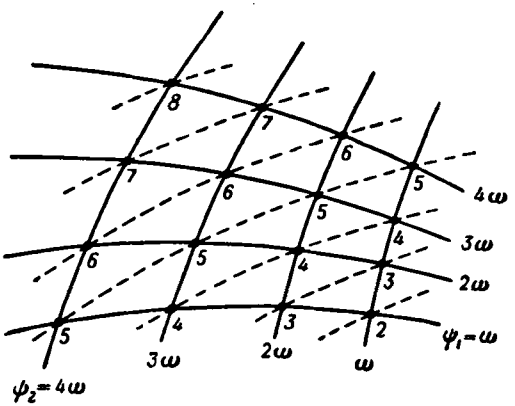


Рис. 72.

Возьмем малую величину ω и проведем кривые $\psi_1 = \omega, 2\omega, 3\omega, \ldots$, $\psi_2 = \omega, 2\omega, 3\omega, \ldots$. Таким образом, мы получим сетку, как показано на рис. 72. В точках, отмеченных цифрой *3*, функция $\psi = 3\omega$; в точках, отмеченных цифрой *4*, функция $\psi = 4\omega$, и т. д.

Если мы соединим точки, отмеченные одними и теми же цифрами, то получим линии, вдоль которых $\psi = \text{const}$ (пунктирные линии на рисунке).

Ячейки этой сетки могут быть сделаны сколь угодно малыми, если взять достаточно малой величину ω. Эти ячейки можно рассматривать как параллелограммы различных размеров. Тогда линии тока получаются с помощью проведения диагоналей ячеек. Линии тока, проходящие через углы ячеек, приблизительно параллельны между собой в окрестности ячейки.

4.33. Функция тока для равномерного потока. Предположим, что каждая частица жидкости движется с постоянной скоростью U, параллельной оси x (рис. 73).

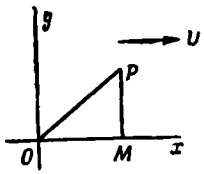


Рис. 73.

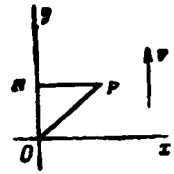


Рис. 74.

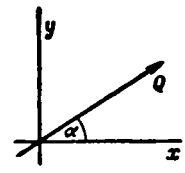


Рис. 75.

Если P — точка с координатами (x, y), то поток через OP равен потоку через PM, где отрезок PM перпендикулярен оси Ox. Таким образом, поток равен $-Uy$ и, следовательно, функция

$$\psi = -Uy$$

является функцией тока для этого движения. В полярных координатах имеем

$$\psi = -Ur\sin\theta.$$

Для аналогичного потока в направлении оси Oy со скоростью V мы получаем соотношение (рис. 74)

$$\psi = Vx = Vr\cos\theta.$$

Если мы наложим два потока, то получим поток со скоростью $\sqrt{U^2+V^2}$, наклоненный к оси x под углом $\alpha = \operatorname{arctg} V/U$. Для этого потока функция тока равна

$$\psi = -Uy + Vx.$$

Если положить $U = Q\cos\alpha$, $V = Q\sin\alpha$, то мы получим функцию тока для потока, в котором скорость Q составляет угол α с осью x, а именно (рис. 75)

$$\psi = Q(x\sin\alpha - y\cos\alpha),$$

или в полярных координатах

$$\psi = -Qr\sin(\theta - \alpha).$$

Во всех этих случаях линии тока являются прямыми линиями.

Линия тока, которая проходит через начало координат, соответствует $\psi = 0$, и поэтому для этой линии $\theta = \alpha$.

4.40. Векторные соотношения, связывающие скорость и вихрь. Пусть $\mathbf{s}_1$ — единичный вектор, касательный к линии тока $\psi = \text{const}$ и направленный вдоль скорости $\mathbf{q}$. Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к линии тока, проведенный в направлении, по которому ψ уменьшается, и пусть $\mathbf{k}$ — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости движения и направленный таким образом, чтобы векторы $\mathbf{k}$, $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{n}$ образовали правую систему координат (рис. 76). Тогда $\mathbf{q} = q\mathbf{s}_1$, где q — величина скорости; из п. 4.31 получим равенство

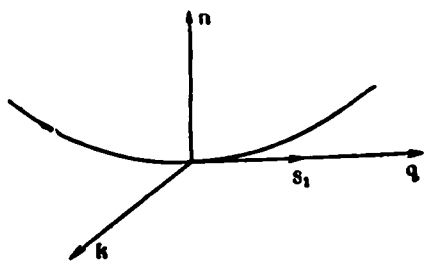


Рис. 76.

$$q = -\frac{\partial\psi}{\partial n} = -(\mathbf{n}\nabla\psi).$$

Так как векторы $\mathbf{n}$ и $-\nabla\psi$ параллельны между собой, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор, то величина скорости равна модулю вектора $(-\nabla\psi)$. Чтобы получить скорость, мы должны повернуть этот вектор на прямой угол от $\mathbf{n}$ к $\mathbf{s}_1$. Следовательно,

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k}\times(-\nabla\psi) = \mathbf{k}\times\nabla\psi. \tag{1}$$

Кроме того, применяя тройное векторное произведение, получаем равенства

$$\zeta = \nabla\times\mathbf{q} = \nabla\times(\mathbf{k}\times\nabla\psi) = \mathbf{k}[(\nabla)(\nabla\psi)] - (\mathbf{k}\nabla)\nabla\psi.$$

Второй член представляет собой изменение вихря, вычисленное вдоль $\mathbf{k}$, и поэтому он равен нулю, так как движение двумерное. Следовательно,

$$\zeta = \mathbf{k}\nabla^2\psi. \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) находим соотношение

$$\mathbf{q}\times\zeta = (\mathbf{k}\times\nabla\psi)\times(\mathbf{k}\nabla^2\psi).$$

Отсюда, используя тройное векторное произведение и замечая, что $\mathbf{kk} = 1$, получаем равенство

$$\mathbf{q}\times\zeta = (\nabla\psi)(\nabla^2\psi). \tag{3}$$

Наконец, рассмотрим оператор $\mathbf{q}\nabla = (\mathbf{k}\times\nabla\psi)\nabla$. Используя тройное скалярное произведение, получаем соотношение

$$\mathbf{q}\nabla = \mathbf{k}(\nabla\psi\times\nabla). \tag{4}$$

Из (2) следует, что если ω — модуль вихря, то

$$\omega = \nabla^2\psi. \tag{5}$$

В прямоугольной декартовой системе координат эта формула, согласно п. 2.70, принимает следующий вид:

$$\omega = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}. \tag{6}$$

В полярных координатах имеем равенство

$$\omega = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}. \tag{7}$$

4.41. Уравнение для функции ψ. В п. 4.23 мы доказали, что $d\zeta/dt = 0$. Отсюда, применяя формулу (9) п. 3.10, находим уравнение

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + (\mathbf{q}\nabla)\,\zeta = 0.$$

Следовательно, воспользовавшись формулами (2), (4) п. 4.40, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{k}\nabla^2\psi) + (\mathbf{k}(\nabla\psi\times\nabla))(\mathbf{k}\nabla^2\psi) = 0.$$

Так как $\mathbf{kk} = 1$, то имеем следующее уравнение, которому удовлетворяет функция ψ:

$$\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + (\nabla\psi)\times\nabla(\nabla^2\psi) = 0.$$

Если движение установившееся, то это уравнение принимает вид

$$(\nabla\psi)\times\nabla(\nabla^2\psi) = 0,$$

и, следовательно, векторы $\nabla\psi$, $\nabla(\nabla^2\psi)$ параллельны между собой.

Так как эти векторы соответственно перпендикулярны кривым $\nabla^2\psi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$, то отсюда следует, что $\psi = \text{const}$ означает, что и $\nabla^2\psi = \text{const}$ и, следовательно,

$$\nabla^2\psi = f(\psi),$$

где $f(\psi)$ — функция, зависящая только от ψ. Этот результат также показывает, что в установившемся движении вихрь постоянен вдоль линии тока.

4.50. Уравнение для давления. Если мы положим (в обычных обозначениях)

$$\chi = \frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}q^2 + \Omega,$$

то из уравнения движения

$$\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t} - \mathbf{q}\times\boldsymbol{\zeta} = -\nabla\chi,$$

используя формулы (1), (3) п. 4.40, получаем уравнение

$$\mathbf{k}\times\nabla\frac{\partial\psi}{\partial t} - (\nabla\psi)(\nabla^2\psi) = -\nabla\chi. \tag{1}$$

Это уравнение является уравнением движения, выраженным с помощью функции тока.

Пусть ds — элемент дуги в точке P кривой AP в плоскости движения и $\mathbf{s}_1$ — единичный вектор, направленный по касательной в точке P. Тогда, согласно п. 2.31, имеем равенство

$$\mathbf{s}_1\nabla\chi = \frac{\partial\chi}{\partial s}.$$

Умножая скалярно уравнение (1) на $\mathbf{s}_1$, получаем уравнение

$$\frac{\partial \chi}{\partial s} - \nabla^2\psi \frac{\partial \psi}{\partial s} + \left[\mathbf{k} \times \nabla \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\right] \mathbf{s}_1 = 0.$$

Интегрирование вдоль дуги AP дает результат

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega - \int\limits_{(AP)} \nabla^2\psi \, d\psi + \int\limits_{(AP)} \left[\mathbf{k} \times \nabla \frac{\partial \psi}{\partial t}\right] \mathbf{s}_1 \, ds = F(t), \qquad (2)$$

где $F(t)$ — произвольная функция времени t.

Это уравнение является уравнением для давления, выраженным через функцию тока. Второй интеграл в левой части уравнения равняется

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{(AP)} \mathbf{q} \, ds,$$

где ds — направленный элемент дуги. Это выражение представляет собой скорость изменения циркуляции по дуге AP. Мы также видим, что тройное смешанное произведение равно

$$\left[\mathbf{k} \times \nabla \frac{\partial \psi}{\partial t}\right] \mathbf{s}_1 = (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{k}) \nabla \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\mathbf{n} \nabla \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial n},$$

где $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к дуге AP, проведенная так, что векторы $\mathbf{k}$, $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{n}$ образуют правую систему координат. Таким образом, уравнение (2) можно также записать в виде

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega - \int\limits_{(AP)} \nabla^2\psi \, d\psi - \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{(AP)} \frac{\partial \psi}{\partial n} \, ds = F(t).$$

При установившемся движении члены, содержащие время, исчезают, и так как в соответствии с п. 4.41 $\nabla^2\psi$ является функцией только от ψ, мы можем написать уравнение

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega - f(\psi) = C,$$

где C — абсолютная константа. Это — уравнение Бернулли в форме, показывающей зависимость его от отдельной выбранной линии тока.

4.60. Критические точки. Предположим, что начало координат является критической точкой. Тогда скорость в ней обращается в нуль и мы имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Без потери общности можно предположить, что $\psi = 0$ в начале координат, и тогда, применяя разложение в ряд Маклорена, получаем соотношение

$$\psi = \frac{1}{2}\left[x^2 \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)_0 + 2xy \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x \, \partial y}\right)_0 + y^2 \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_0\right] + \cdots =$$

$$= \frac{1}{2}(ax^2 + 2hxy + by^2) + \cdots.$$

Отсюда если x и y очень малы, то форма линии тока $\psi = 0$ в общем виде задается приближенно уравнением

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0, \qquad (1)$$

которому соответствуют две прямые линии. Таким образом, в критической точке линии тока пересекаются, иными словами, она является двойной точкой.

Если движение безвихревое, то

$$a+b=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)_0+\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_0=0$$

и, следовательно, линии, отвечающие уравнению (1), взаимно перпендикулярны, так что две ветви линии тока пересекаются под прямым углом.

4.70. Потенциал скоростей жидкости. При безвихревом движении скорость является отрицательным градиентом потенциала, а именно $\mathbf{q}=-\nabla\varphi$. В прямоугольных координатах ее компоненты задаются в виде

$$u=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Так как компоненты скорости также выражаются через функцию тока, то мы имеем равенство

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{1}$$

В векторных обозначениях получаем соотношение

$$-\nabla\varphi=\mathbf{k}\times\nabla\psi. \tag{2}$$

Таким образом, если $\mathbf{s}_1$ — единичный вектор в каком-либо направлении и $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к $\mathbf{s}_1$, расположенный в направлении против часовой стрелки от $\mathbf{s}_1$, то мы получим равенства

$$-\mathbf{s}_1\nabla\varphi=\mathbf{s}_1(\mathbf{k}\times\nabla\psi)=(\mathbf{s}_1\times\mathbf{k})\nabla\psi=-\mathbf{n}\nabla\psi,$$

или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\frac{\partial\psi}{\partial n}.$$

Отсюда получится уравнение (1), если брать $ds=dx$, $ds=dy$ по очереди, так как соответствующими значениями dn являются dy и $-dx$.

Из уравнения (2) мы также заключаем, что $\nabla\varphi$ и $\nabla\psi$ взаимно перпендикулярны. Это означает, что кривые $\varphi=\text{const}$, $\psi=\text{const}$ пересекаются под прямыми углами. Таким образом, кривые постоянного потенциала скоростей пересекают линии тока ортогонально.

Необходимо отметить следующие положения.

а) Функция тока ψ существует независимо от того, является ли движение безвихревым или нет.

б) Потенциал скоростей может существовать только при безвихревом движении.

в) Если движение безвихревое, то существует потенциал скоростей.

г) Одна часть жидкости может иметь безвихревое движение, другая часть — вихревое. Потенциал скоростей существует в тех и только в тех частях жидкости, где движение безвихревое.

д) Когда жидкость движется, то завихренная часть жидкости может занимать различные области пространства. Существование потенциала скоростей является свойством той части жидкости, которая имеет безвихревое движение, а не той области пространства, которую временно занимает эта часть жидкости.

е) Характер течения при безвихревом движении под действием консервативных сил зависит только от граничных условий. В частности, если жидкость не имеет свободной поверхности, то характер течения при ациклическом безвихревом движении зависит только от движения этих границ, а не от поля внешних сил, которые воздействуют только на давление.

Рассмотрим функцию тока

$$\psi=xy.$$

Находим, что $\nabla^2\psi = 0$, поэтому движение безвихревое. Компоненты скорости равны $-x$, y.

Следовательно, для отыскания потенциала скорости мы можем написать уравнения

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -x, \qquad -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = y, \tag{1}$$

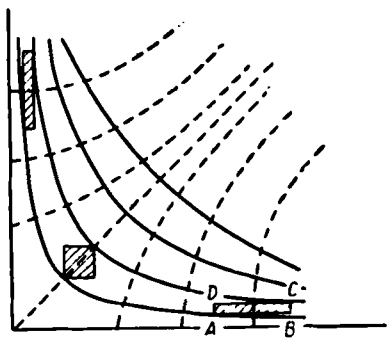
так что

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy = x\,dx - y\,dy = d\,\frac{1}{2}(x^2 - y^2).$$

Таким образом, имеем равенство

$$\varphi = \frac{1}{2}(x^2 - y^2).$$

Линии тока определяются уравнением $xy = \text{const}$, т. е. они будут равносторонними гиперболами, имеющими в качестве асимптот оси координат. Линиями постоянного потенциала скоростей также являются равносторонние гиперболы. Таким образом, эта функция тока и потенциал скоростей задают течение жидкости около прямого угла, как показано на рис. 77, где пунктирные линии соответствуют постоянным значениям функции φ.



Р и с. 77.

Рассмотрим прямоугольный элемент жидкости $ABCD$ со сторонами, параллельными осям координат. Из уравнений (1) мы видим, что компонента u одинакова для всех точек на линии BC, а компонента v одинакова для всех точек на линии AB. Следовательно, прямоугольник $ABCD$ сохраняет прямоугольную форму, когда AB передвигается вверх. Кроме того, площадь $ABCD$ остается постоянной (уравнение неразрывности), так как прямоугольник состоит из одних и тех же частиц жидкости. Ясно, что сторона AB непрерывно уменьшается по длине, в то время как сторона BC непрерывно увеличивается. Следовательно, жидкий элемент изменяет свой вид, но стороны элемента остаются параллельными осями. Этот пример иллюстрирует безвихревой характер движения и скорость чистой деформации, рассмотренную в п. 2.40.

4.71. Уравнение для потенциала скоростей. При безвихревом движении вихрь равен нулю и, следовательно,

$$\nabla^2\psi = 0.$$

С другой стороны, $\mathbf{q} = -\nabla\varphi$ и, согласно уравнению неразрывности, $\nabla\mathbf{q} = 0$. Таким образом,

$$\nabla^2\varphi = 0.$$

Отсюда следует, что обе функции φ и ψ удовлетворяют уравнению Лапласа $\nabla^2 V = 0$, которое в прямоугольных декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Теперь мы пришли к тому этапу, когда безвихревое движение удобнее исследовать с помощью теории функций комплексного переменного. Следую-

щая глава будет посвящена краткому описанию необходимых математических сведений.

В гл. 6 мы увидим, что с применением теории функций комплексного переменного двумерное безвихревое движение жидкости допускает специальную математическую трактовку, позволяющую нам решать задачи, которые в полной их трехмерной постановке не могут быть решены имеющимися в нашем распоряжении средствами. Таким образом, ограничиваясь двумя измерениями, мы сможем рассмотреть многие особенности движения жидкости, от изучения которых в противном случае мы должны были бы уклониться; это поможет выяснить важные физические свойства гидродинамических задач.

ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ 4

1. Ветер дует над поверхностью воды, которая течет в направлении ветра, но с другой скоростью. Объяснить, почему, вообще говоря, любое малое отклонение поверхности воды от плоской формы будет стремиться к увеличению.

2. Вывести условие того, чтобы выражения

$$u=ax+by, \quad v=cx+dy$$

задавали компоненты скорости несжимаемой жидкости. Показать, что линии тока этого движения в общем случае являются коническими сечениями, а если движение безвихревое — равносторонними гиперболами.

3. Доказать, что при двумерном движении жидкости средняя тангенциальная скорость жидкости вдоль малой окружности радиуса r равна ωr, где

$$2\omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

в центре круга, при этом членами порядка r^3 пренебрегаем.

4. Показать, что функции $u=2cxy$, $v=c(a^2+x^2-y^2)$ являются компонентами скорости возможного движения жидкости. Определить функцию тока и начертить линии тока.

5. Вывести уравнение неразрывности для двумерного движения несжимаемой жидкости в форме

$$\frac{\partial(ur)}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial\theta}=0,$$

где u, v — соответственно скорости в направлениях увеличения r и θ, причем r и θ — обычные обозначения координат.

Показать, что этому уравнению удовлетворяют величины $u=akr^ne^{-k(n+1)\theta}$, $v=ar^ne^{-k(n+1)\theta}$, и определить функцию тока. Показать также, что скорость жидкости в каждой точке равна

$$\frac{(n+1)}{r}\psi\sqrt{1+k^2},$$

где ψ — функция тока.

6. Пусть u, v — компоненты непрерывного двумерного движения несжимаемой жидкости. Показать, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Доказать существование функции тока. Если циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю, то доказать, что функция тока удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0.$$

7. Функция тока в двумерном движении задается в виде $\psi=Cr^2\theta$, где r, θ — полярные координаты. Найти вихрь и скорость в любой точке. Далее показать, что это движение соответствует случаю обтекания двух плоских границ, поворачивающихся вокруг их линии пересечения, раскрываясь или закрываясь, как две створки.

8. Показать, что если при двумерном безвихревом движении скорость везде одинакова, то линии тока прямые.

9. Вывести условие того, чтобы уравнение $\psi(x, y, c)=0$ определяло линии тока безвихревого движения, где c — параметр, являющийся постоянным вдоль любой линии семейства.

10. Показать, что в двумерном движении линия тока пересекает сама себя в точке нулевой скорости и что обе ветви расположены под прямым углом друг к другу, если движение безвихревое.

Провести линию тока, проходящую через критическую точку движения, задаваемого функцией тока

$$\psi=U\left(y-a\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right),$$

и определить скорость в точках, в которых эта линия пересекает ось y.

11. Показать, что потенциал скоростей

$$\varphi=\frac{1}{2}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$$

задает допустимое движение, и определить вид линий тока.

Показать, что кривые равной скорости являются овалами Кассини, определяемыми уравнением

$$rr'=\text{const}.$$

12. Жидкость находится в двумерном безвихревом движении под действием консервативных сил, потенциал которых Ω удовлетворяет уравнению $\nabla^2\Omega=0$. Доказать, что давление удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2(\ln\nabla^2 p)=0.$$

13. Показать, что при безвихревом двумерном движении

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2=q\nabla^2 q.$$

14. Путем рассмотрения циркуляции вокруг бесконечно малого четырехугольника $AA'GD$, изображенного на рис. 64, ограниченного двумя соседними линиями тока и соседними нормалями к ним, доказать, что при установившемся движении вихрь (в обозначениях п. 4.20) равен

$$\frac{q}{R}-\frac{\partial q}{\partial n}.$$

Глава 5

КОМПЛЕКСНОЕ ПЕРЕМЕННОЕ

5.01. Комплексные числа. Пусть $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ — единичные векторы вдоль осей x, y и пусть $\mathbf{k}$ — единичный вектор, перпендикулярный к каждому из них. При этом все три вектора образуют правую систему координат (рис. 78).

Если мы ограничимся векторами, лежащими в плоскости x, y, то векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\mathbf{k}\times\boldsymbol{\alpha}$ будут взаимно перпендикулярными и будут лежать в той же плоскости. Таким образом, векторное умножение данного вектора $\boldsymbol{\alpha}$, находящегося в плоскости xy на единичный вектор $\mathbf{k}$ является поворотом этого вектора, без изменения его величины, на прямой угол в направлении от x к y, т. е. против часовой стрелки (рис. 79). Если b — скаляр, то $b\mathbf{k}\times\boldsymbol{\alpha}$ является вектором, полученным поворотом вектора $\boldsymbol{\alpha}$ на прямой угол и умножением его на b.

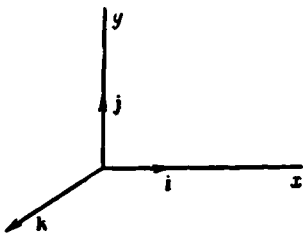


Рис. 78.

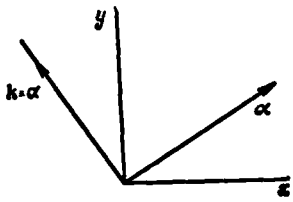


Рис. 79.

Таким образом, при рассмотрении векторов в плоскости xy мы можем рассматривать символ $\mathbf{k}\times$ как оператор, поворачивающий данный вектор на прямой угол.

Применив к данному вектору $\boldsymbol{\alpha}$ оператор $a+b\mathbf{k}\times$, получим вектор $a\boldsymbol{\alpha}+b(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\alpha})$, который также находится в плоскости xy. Таким образом, оператор $a+b\mathbf{k}\times$, примененный к вектору, находящемуся в плоскости xy, преобразует его в другой вектор, находящийся в той же плоскости.

Определение. Оператор $a+b\mathbf{k}\times$ называется комплексным числом, если a и b — скалярные величины.

В математике обычно принято писать i вместо $\mathbf{k}\times$, тогда комплексное число запишется в виде

$$a+ib.$$

5.10. Векторная диаграмма[1]. Оператор комплексного числа, примененный к вектору $\mathbf{i}$, дает в результате

$$(x+iy)\,\mathbf{i}=x\mathbf{i}+y\mathbf{k}\times\mathbf{i}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j},$$

т. е. радиус-вектор $\overrightarrow{OP}$ точки $P(x, y)$ (рис. 80).

---

[1]) В оригинале векторная диаграмма (рис. 80) названа диаграммой Аргана, так как Арган и Гаусс впервые ее рассматривали. — *Прим. перев.*

Таким образом, любое комплексное число, примененное к вектору $\mathbf{i}$, дает радиус-вектор некоторой точки плоскости. Эта точка называется *изображающей точкой* комплексного числа, и она рассматривается как геометрическое представление комплексного числа $z = x + iy$. В этом смысле мы можем говорить о точке z, имея в виду изображающую точку в вышеуказанном геометрическом описании, известном под названием векторной диаграммы.

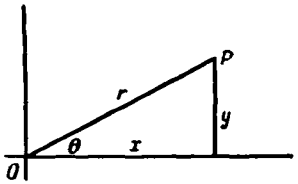


Рис. 80.

Теперь легко получить закон сложения комплексных чисел. Пусть даны два комплексных числа

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2.$$

Тогда, применяя эти операторы к вектору $\mathbf{i}$, получим равенства

$$(x_1 + iy_1)\,\mathbf{i} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}, \quad (x_2 + iy_2)\,\mathbf{i} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}.$$

Отсюда

$$(x_1 + iy_1)\,\mathbf{i} + (x_2 + iy_2)\,\mathbf{i} = (x_1 + x_2)\,\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\,\mathbf{j} = [(x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)]\,\mathbf{i},$$

так что мы можем написать соотношение

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2),$$

из которого следует, что закон сложения комплексных чисел такой же, как и закон сложения векторов.

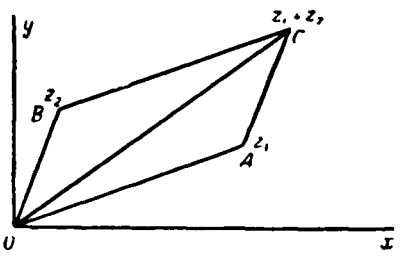


Рис. 81.

Таким образом, если A, B, C — изображающие точки комплексных чисел z_1, z_2, $z_1 + z_2$, то четыре точки O, A, C, B находятся в вершинах параллелограмма (рис. 81). Поскольку

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA},$$

тот же метод может быть применен для получения разности двух комплексных чисел, указанной на векторной диаграмме.

5.11. Умножение. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда, применяя последовательно оператор к вектору $\mathbf{i}$, получаем в результате

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)\,\mathbf{i} = (x_1 + iy_1)(x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}) = x_1x_2\mathbf{i} + x_1y_2\mathbf{j} + y_1x_2\mathbf{j} - y_1y_2\mathbf{i},$$

так как по определению $i\mathbf{j} = -\mathbf{i}$.

Таким образом,

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)\,\mathbf{i} = (x_1x_2 - y_1y_2)\,\mathbf{i} + (x_1y_2 + x_2y_1)\,\mathbf{j} = [(x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1)]\,\mathbf{i},$$

и, следовательно,

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1). \tag{1}$$

Легко доказать, что получится тот же результат, если множители взять в следующем порядке: $(x_2 + iy_2)(x_1 + iy_1)$.

Таким образом, порядок сомножителей можно изменять, не изменяя произведения, т. е. умножение коммутативно. Кроме того, если мы перемножим множители, входящие в левую часть формулы (1) по обычным законам алгебры, то получим выражение

$$x_1x_2 + i\,(x_1y_2 + x_2y_1) + i^2y_1y_2.$$

Сравнение с формулой (1) показывает, что произведение комплексных чисел можно получить по обычным законам алгебры, если положить

$$i^2 = -1.$$

Это вполне согласуется с определением i как оператора $\mathbf{k}\times$, два последовательных применения которого к вектору меняют его направление на противоположное и, следовательно, умножают его на -1.

5.12. Равенство комплексных чисел. Уравнение

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$$

означает равенство векторов

$$(x_1 + iy_1)\,\mathbf{i} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j},$$
$$(x_2 + iy_2)\,\mathbf{i} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$$

и, следовательно,

$$x_1 = x_2, \qquad y_1 = y_2.$$

Величина x называется действительной частью комплексного числа $z = x + iy$, а велнчина iy — его мнимой частью [1]).

Следовательно, равенство двух комплексных чисел означает равенство действительных и мнимых частей. Поэтому, приравнивая комплексные чнсла, мы можем приравнять действительные части с обеих сторон уравнения и отдельно приравнять мнимые части.

Говорят, что комплексное число равно *нулю*, если его действительная и мнимая части равны нулю.

Мы можем применить этот принцип для нахождения величин p и q, таких, чтобы

$$(x_1 + iy_1) = (x_2 + iy_2)\,(p + iq).$$

Тогда

$$x_1 = px_2 - qy_2, \qquad y_1 = py_2 + qx_2,$$

откуда

$$p = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \qquad q = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Число $p + iq$ называется *частным* от деления числа $x_1 + iy_1$ на число $x_2 + iy_2$, так что имеем

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1 + iy_1)\,(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)\,(x_2 - iy_2)}.$$

Таким образом, основные правила алгебры при сложении, вычитании, умножении и делении можно применять к комплексным числам, если выполняется условие

$$i^2 = -1.$$

Используя этот факт, мы можем оперировать комплексными числами в соответствии с правилами алгебры.

5.13. Теорема Эйлера. Эта теорема выражается формулой

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

---

[1]) Это название также применяется иногда просто к величине y. Оси x и y соответственно называются действительной и мнимой осями.

Определим число $e^{i\theta}$ путем подстановки $x=i\theta$ в ряд для показательной функции

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots,$$

отсюда следует, что

$$\frac{de^{i\theta}}{d\theta}=ie^{i\theta}.$$

Кроме того,

$$\frac{d(\cos\theta+i\sin\theta)}{d\theta}=-\sin\theta+i\cos\theta=i(\cos\theta+i\sin\theta).$$

Таким образом, линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{d\theta}=iu$$

имеет два решения

$$u_1=e^{i\theta}, \qquad u_2=\cos\theta+i\sin\theta,$$

каждое из которых обращается в единицу при $\theta=0$. Следовательно, эти решения тождественны. Таким образом,

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta. \tag{1}$$

Поэтому комплексное число $z=x+iy$ можно выразить в форме

$$z=r\cos\theta+ir\sin\theta=re^{i\theta},$$

где r, θ — полярные координаты точки (x, y) (рис. 80).

В этих обозначениях $r=(x^2+y^2)^{1/2}$ называется *модулем* комплексного числа z, что можно записать в виде

$$r=|z|.$$

Модуль комплексного числа измеряет расстояние изображающей точки от начала координат. Таким образом, он является существенно положительной величиной. Важно отметить, что $|e^{i\theta}|=1$, если θ — действительная величина. Это сразу же следует из формулы (1).

Угол θ называется *аргументом* комплексной величины z. Следовательно,

$$\arg z=\theta.$$

Кроме того, если $z_1=r_1e^{i\theta_1}$, $z_2=r_2e^{i\theta_2}$, то $z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

Следовательно,

$$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2.$$

При использовании этого результата важно помнить, что $\arg z=\theta$ определяется с точностью до числа, кратного 2π, так как

$$e^{i(\theta+2\pi)}=e^{i\theta}e^{2\pi i}$$

и

$$e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1.$$

Отметим также, что

$$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$$

$$e^{i\pi/2}=\cos\frac{1}{2}\pi+i\sin\frac{1}{2}\pi=i.$$

Таким образом,

$$\arg(-1)=\pi, \qquad \arg(i)=\frac{1}{2}\pi.$$

5.14. Сопряженные комплексные числа. Если в выражении, содержащем i, изменить знак перед i, то говорят, что полученное выражение является *комплексно сопряженным* относительно первоначального выражения.

Таким образом, если

$$z = x + iy = re^{i\theta},$$

то сопряженное число имеет вид

$$\bar{z} = x - iy = re^{-i\theta}.$$

Будем обозначать сопряженное чнсло с помощью черты над первоначальным числом. Заметим, что сопряженным числом для числа $\bar{z}$ является z и что числа z и $\bar{z}$ имеют одинаковые модули.

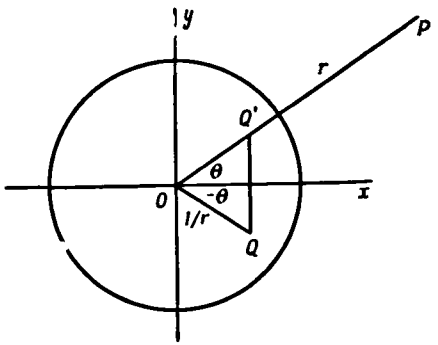


Рис. 82.

Из вышесказанного следует, что

$$z + \bar{z} = 2x, \qquad z - \bar{z} = 2iy,$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = r^2.$$

Таким образом, можно сформулировать следующие важные теоремы.

(1) *Сумма двух сопряженных комплексных чисел есть действительное число.*

(2) *Разность двух сопряженных комплексных чисел есть чисто мнимое число (т. е. его действительная часть равна нулю).*

(3) *Произведение двух сопряженных комплексных чисел есть действительное число, равное квадрату их модулей.*

(4) *Если комплексное число z равно сопряженному числу $\bar{z}$, то z — число действительное* [это следует из теоремы (2)].

Если $f(z)$ — функция от z, то сопряженную комплексную функцию обозначим через $\bar{f}(\bar{z})$. Таким образом, если $f(z) = 6z + 3iz^2$, то $\bar{f}(\bar{z}) = 6\bar{z} - 3i\bar{z}^2$; заменяя здесь $\bar{z}$ на z, получим $\bar{f}(z) = 6z - 3iz^2$.

5.15. Число, обратное комплексному числу. Если $z = re^{i\theta}$, то число, обратное z, равно

$$\frac{1}{z} = \frac{e^{-i\theta}}{r}.$$

Чтобы представить число z и обратное ему число на векторной диаграмме, проведем круг единичного радиуса с центром в точке O.

Пусть P — изображающая точка комплексного числа z и пусть на отрезке OP взята точка Q', такая, что

$$OQ' \cdot OP = 1.$$

(Точка Q' называется *инверсией точки* P относительно окружности.) Тогда точка Q с координатой $1/z$ является отражением точки Q' относительно оси x (рис. 82).

5.16. Векторные свойства комплексных чисел. Мы уже видели, что комплексные числа подчиняются векторному закону сложения, если их представить на векторной днаграмме. Пусть P_1 и P_2 являются изображающими точками комплексных чисел z_1 и z_2. Тогда для выполнения операции

сложения мы можем отождествить векторы $\overrightarrow{OP}_1$ и $\overrightarrow{OP}_2$ с числами z_1 и z_2 в том смысле, что если

$$\overrightarrow{OP}_1 = z_1, \qquad \overrightarrow{OP}_2 = z_2,$$

то

$$\overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2 = z_1 + z_2.$$

С другой стороны, скалярное произведение невозможно представить в виде $z_1 \cdot z_2$. Однако мы можем заметить, что

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 + y_1y_2 - i(x_1y_2 - x_2y_1) = \\ = \overrightarrow{OP}_1 \cdot \overrightarrow{OP}_2 - i\,|\overrightarrow{OP}_1 \times \overrightarrow{OP}_2|.$$

Следовательно, мы получили следующие важные и полезные результаты:

$$\overrightarrow{OP}_1 \cdot \overrightarrow{OP}_2 = \text{действительная часть } z_1 \cdot \bar{z}_2 = \frac{1}{2}(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2),$$

$$|\overrightarrow{OP}_1 \times \overrightarrow{OP}_2| = \text{действительная часть } iz_1 \cdot \bar{z}_2 = \frac{1}{2} i (z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2).$$

Например, момент относительно начала координат комплексной силы $F = X + iY$, действующей на точку z, является действительной частью от $iz\bar{F}$, т. е. от $iz(X - iY)$.

5.17. Поворот координатных осей. Если мы хотим перейти от осей Ox, Oy к осям Ox', Oy', где ось Qx' образует угол α с осью Ox, то мы можем записать (рис. 83)

$$x' + iy' = z' = re^{i\theta'} = re^{i(\theta - \alpha)} = ze^{-i\alpha}$$

и

$$z = z'e^{i\alpha}.$$

Если, кроме того, перенесем начало координат в точку z_0 (относительно Ox, Oy), то получим равенства

$$z = z_0 + z'e^{i\alpha},$$
$$z' = (z - z_0)e^{-i\alpha}.$$

5.20. Логарифмы. Пусть

$$z = x + iy = re^{i\theta}.$$

Тогда

$$\ln z = \ln r + i\theta = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Таким образом, действительная часть $\ln z$ есть $\ln r$, или $1/2 \ln(x^2 + y^2)$. Мнимая часть $\ln z$ равна θ, или $\operatorname{arctg} y/x$.

Важно отметить, что θ определяется с точностью до целого числа, кратного 2π, так как добавление 2π к θ не изменяет положения точки (r, θ).

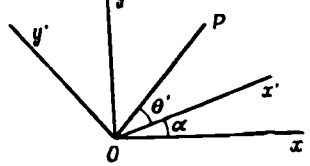


Рис. 83.

Таким образом, если мы опишем окружность радиуса r с центром в точке O и, начиная от точки A, обойдем один раз окружность против часовой стрелки (в положительном направлении), то по возвращении в точку A аргумент увеличится на 2π в предположении, что он изменяется непрерывно. Если мы обойдем окружность еще раз, то аргумент снова увеличится на 2π.

Таким образом, аргумент зависит не только от точки A, но и от истории нашего движения при достижении этой точки. Те же рассуждения применимы, если мы движемся от точки A к A по любой кривой, окружающей начало координат.

Следовательно, мнимая часть от $\ln z$ может иметь значения

$$\theta,\quad \theta+2\pi,\quad \theta+4\pi,\quad \ldots,$$

или

$$\theta,\quad \theta-2\pi,\quad \theta-4\pi,\quad \ldots\ .$$

5.21. Действительная и мнимая части. Для функции от комплексного числа $z=x+iy$ часто требуется отделить действительную и мнимую части. Мы видели, что

$$\ln z=\tfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\operatorname{arctg}\tfrac{y}{x}.$$

Следовательно, если X, Y — действительные функции, то

$$\ln(X+iY)=\tfrac{1}{2}\ln(X^2+Y^2)+i\operatorname{arctg}\tfrac{Y}{X}.$$

Кроме того, по теореме Эйлера (5.13) имеем

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\qquad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Заменяя θ на $i\alpha$, получаем

$$\cos i\alpha=\frac{e^{-\alpha}+e^{\alpha}}{2},\qquad \sin i\alpha=\frac{i}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha}).$$

Гиперболические функции $\operatorname{ch}\alpha$, $\operatorname{sh}\alpha$ определяются формулами

$$\operatorname{ch}\alpha=\frac{e^{-\alpha}+e^{+\alpha}}{2},\qquad \operatorname{sh}\alpha=\frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha}),$$

так что

$$\operatorname{ch}\theta=\cos i\theta,\qquad \sin i\theta=i\operatorname{sh}\theta.$$

Отсюда

$$\sin z=\sin x\cos iy+\cos x\sin iy=\sin x\operatorname{ch}y+i\cos x\cdot\operatorname{sh}y,$$
$$\cos z=\cos x\operatorname{ch}y-i\sin x\operatorname{sh}y.$$

Подобным образом получаем

$$\operatorname{ch}z=\cos(iz)=\cos(ix-y)=\operatorname{ch}x\cos y+i\operatorname{sh}x\sin y,$$
$$\operatorname{sh}z=\operatorname{sh}x\cos y+i\operatorname{ch}x\sin y.$$

5.30. Определение аналитической функции от z. Пусть $\varphi=\varphi(x,\ y)$ и $\psi=\psi(x,\ y)$ — какие-либо функции от x и y. Тогда комбинация $\varphi+i\psi$ является функцией комплексного переменного $z=x+iy$ в том смысле, что данному z (т. е. x и y) соответствует одно или более значений $\varphi+i\psi$. Это понятие является слишком общим для его применения. Поэтому мы ограничимся рассмотрением класса аналитических функций, которые мы ниже определим.

Простой дугой называется дуга, которая сама себя не пересекает и является спрямляемой, т. е. имеет определенную длину. *Простой замк-*

нутой кривой называется замкнутая кривая, которая делится *любой парой* точек на две простые дуги.

Пусть задана простая замкнутая кривая (или *контур*) C в плоскости z и функция $f(z)$ (рис. 84). Говорят, что функция $f(z)$ является аналитической *внутри контура* C, если она удовлетворяет следующим условиям.

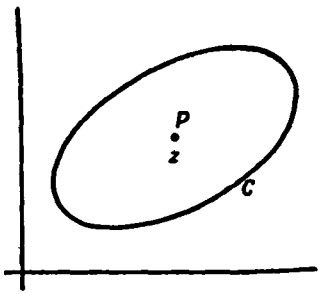


Рис. 84.

а) Каждому значению z внутри C соответствует одно и только одно значение $f(z)$, и это значение конечно (т. е. модуль этой функции не бесконечен). Короче, $f(z)$ — конечная и однозначная функция внутри C.

б) Для каждого значения z внутри C функция имеет однозначную конечную производную по z.

Исследуем условие б).

Так как $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y=-\frac{1}{2}i(z-\bar{z})$, то любая функция от x и y является функцией от z и $\bar{z}$. Например, если $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — заданные функции, то

$$\varphi(x, y)+i\psi(x, y)=f(z, \bar{z}).$$

С другой стороны,

$$df=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}.$$

Следовательно,

$$\frac{df}{dz}=\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\left(\lim_{|dz|\to 0}\frac{d\bar{z}}{dz}\right).$$

Но выражение

$$\lim_{|dz|\to 0}\frac{d\bar{z}}{dz}=\lim_{\delta x,\ \delta y\to 0}\frac{\delta x-i\delta y}{\delta x+i\delta y}=\lim_{\delta x,\ \delta y\to 0}\frac{1-i\frac{\delta y}{\delta x}}{1+i\frac{\delta y}{\delta x}}$$

является неопределенным, так как δx и δy могут стремиться к нулю независимо друг от друга.

Следовательно, определенная производная может существовать только в том случае, если $\partial f/\partial \bar{z}=0$.

Таким образом, аналитическая функция комплексного переменного z не должна зависеть от $\bar{z}$, т. е. $\partial f/\partial \bar{z}=0$.

Предположим теперь, что $f=\varphi(x, y)+i\psi(x, y)=\varphi+i\psi$ и что $\partial f/\partial \bar{z}=0$; так как

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}$$

и

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\quad y=-\frac{1}{2}i(z-\bar{z}),$$

то мы имеем

$$0=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}i\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+i\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}+i\frac{\partial \psi}{\partial y}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial y},\quad \frac{\partial \psi}{\partial x}=-\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{1}$$

Эти условия известны как уравнения Коши—Рнмана[1]). Они являются необходимыми, но недостаточными. Достаточные условия получаются путем добавления к уравнениям (1) следующих условий:

Все частные производные $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\psi/\partial x$, $\partial\psi/\partial y$ должны быть непрерывными. (2)

Таким образом, условие $\partial f/\partial\bar{z}=0$ вместе с условием (2) являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы функция $f(z)$ была аналитической функцией.

Очевидными примерамн аналитических функций являются функции $\sin z$, e^z, z^3+5z^2-3, $(1+z)/(1-z^3)$. В последнем случае надо исключить точки, в которых $z^3=1$. С другой стороны, $|z|$ не является аналитической функцией z, так как $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$ и, следовательно, содержит $\bar{z}$.

5.31. Сопряженные функции. Действительная и мнимая части аналитической функции от z называются *сопряженными функциями*.

Таким образом, если

$$f(z)=\varphi(x, y)+i\psi(x, y)=\varphi+i\psi,$$

то φ и ψ — сопряженные функции. Например, функция

$$z^3=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$$

дает сопряженные функции x^3-3xy^2 и $3x^2y-y^3$.

Согласно условиям Коши—Римана из п. 5.30,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{1}$$

находим уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0.$$

Таким образом, если $\nabla_1^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ — двумерная форма оператора Лапласа, то видим, что сопряженные функции являются решеннями уравнения $\nabla_1^2V=0$.

Если приравнять сопряженные функции постоянным величинам, например $\varphi(x, y)=c_1$, $\psi(x, y)=c_2$, то получим две системы кривых. Эти кривые оказываются *ортогональными*, т. е. их касательные в каждой точке пересечения расположены под прямыми углами. Для доказательства заметим, что dy/dx для кривой $\varphi(x, y)=c_1$ определяется из уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0.$$

Таким образом, $\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial y}$. Для кривой $\psi(x, y)=c_2$ получим $\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\psi}{\partial y}$.

Из уравнений (1) видно, что произведение этих величин равно -1, и, следовательно, касательные к обеим кривым перпендикулярны (рис. 85).

Приведем другое доказательство. Имеем

$$f'(z)\,dz=d\varphi+i\,d\psi.$$

---

[1]) В советской литературе эти условия иногда называются условиями Даламбера—Эйлера. — *Прим. ред.*

Следовательно,

$$(\arg df)_{\varphi=\text{const}} = \frac{1}{2}\pi + (\arg df)_{\psi=\text{const}},$$

так что элементы дуг кривых $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ перпендикулярны друг другу.

Следовательно, кривые $\varphi = c_1$ и $\psi = c_2$, проведенные для малых интервалов изменения постоянных c_1, c_2, делят плоскость на бесконечно малые прямоугольники, причем не все они имеют одинаковые размеры.

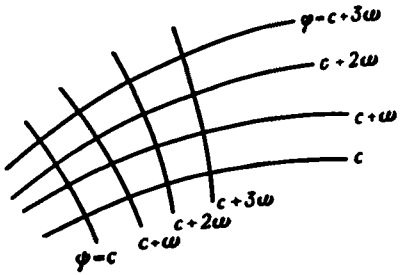


Рис. 85.



Рис. 86.

Для иллюстрации рассмотрим сопряженные функции, определяемые формулой $\varphi + i\psi = \ln z$. Функция $\ln z$ является неаналитической внутри любой кривой, окружающей начало координат, так как при движении вокруг начала координат в положительном направлении $\arg z$ увеличивается на 2π и, следовательно, $\ln z$ увеличивается на $2\pi i$, так что функция $\ln z$ неоднозначная. Если $f(z)$ — аналитическая функция, то она должна быть непрерывна и однозначна в рассматриваемой области. Этого можно достичь введением дополнительных ограничений. Исключим начало координат, проведя вокруг него окружность малого радиуса ε, и сделаем разрез вдоль положительной части действительной оси; таким образом, точка z может двигаться вне проведенной окружности любым путем, но не пересекая положительной части действительной оси (рис. 86). Для определения логарифма условимся, что $\ln z = i\pi$, если $z = -1$. Тогда получаем

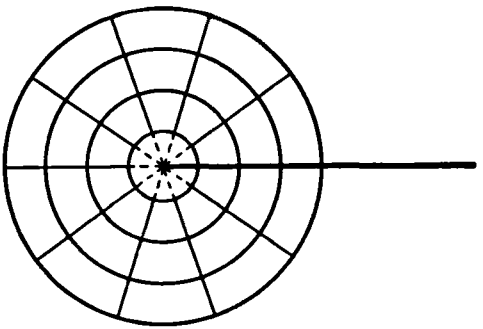


Рис. 87.

$$\varphi = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2), \quad \psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right),$$

где $\operatorname{arctg} y/x$ может теперь принимать только значения от 0 до 2π, но не другие. Кривые $\varphi = c_1$ представляют собой окружности с центром в начале координат, кривые $\psi = c_2$ — прямые линии, идущие по радиусам из начала координат.

Полученное семейство линий показано на рис. 87.

5.32. О связи сопряженных функций с $f(z)$. Данная аналитическая функция $f(z)$ может быть записана в форме

$$f(z) = f(x+iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \varphi + i\psi. \qquad (1)$$

Следовательно, справедливы тождества

$$f(x+iy)+\bar{f}(x-iy)=2\varphi(x, y), \quad f(x+iy)-\bar{f}(x-iy)=2i\psi(x, y).$$

Положим $x={}^1/_2 z$, $y=-{}^1/_2 iz$. Тогда эти тождества дают

$$f(z)=2\varphi\left(\frac{1}{2}z, -\frac{1}{2}iz\right)-\bar{f}(0), \quad f(z)=2i\psi\left(\frac{1}{2}z, \frac{1}{2}i\bar{z}\right)+\bar{f}(0).$$

Пусть $f(0)=\alpha+i\beta$ и $\bar{f}(0)=\alpha-i\beta$. Тогда

$$2\alpha=f(0)+\bar{f}(0)=2\varphi(0, 0), \quad 2i\beta=f(0)-\bar{f}(0)=2i\psi(0, 0).$$

Следовательно, если $\varphi(x, y)$ или $\psi(x, y)$ даны[1]), то мы определим $f(z)$ из равенства

$$f(z)=2\varphi\left(\frac{1}{2}z, -\frac{1}{2}iz\right)-\varphi(0, 0)+i\beta,$$

$$f(z)=2i\psi\left(\frac{1}{2}z, -\frac{1}{2}iz\right)-i\psi(0, 0)+\alpha,$$

где β и α — произвольные действительные константы.

Пример. $\varphi(x, y)=\sin x \operatorname{ch} y+2\cos x \operatorname{sh} y+x^2-y^2+4xy$,

$$f(z)=2\sin\frac{1}{2}z\cdot\operatorname{ch}\left(-\frac{1}{2}iz\right)+4\cos\frac{1}{2}z\cdot\operatorname{sh}\left(-\frac{1}{2}iz\right)+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z^2-2iz^2,$$

так как $\operatorname{ch}(i\theta)=\cos\theta$, $\operatorname{sh}(i\theta)=i\sin\theta$, то $f(z)=\sin z-2i\sin z+z^2-2iz^2$.

5.33. Решение уравнения Лапласа. Для решения уравнения

$$\nabla_1^2 V\equiv\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$$

положим

$$z=x+iy, \quad \bar{z}=x-iy.$$

Тогда получим

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{z}}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial\bar{z}},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{z}}{\partial y}=i\left(\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial V}{\partial\bar{z}}\right).$$

Таким образом, мы имеем следующую эквивалентность операторов:

$$2\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}, \quad 2\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial y}\right)=4\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial\bar{z}}=0.$$

Отсюда следуют соотношения

$$\frac{\partial V}{\partial\bar{z}}=f_1'(\bar{z}), \quad V=f_1(\bar{z})+f_2(z),$$

---

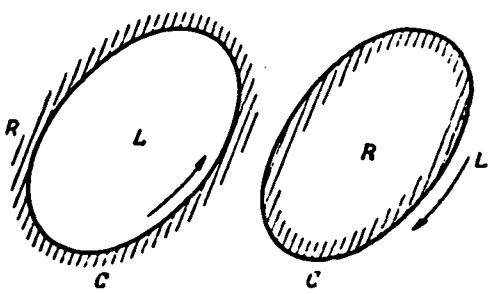
[1]) Этот метод применим лишь в том случае, если φ и ψ — гармонические функции. Рассуждения автора не полны; по этому вопросу см. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, М. Л., 1951. — *Прим. ред.*

где $f_1(\bar{z})$ и $f_2(z)$ — произвольные функцин. Эти соотношения и есть искомое решение. Таким образом, мы видим, что любая аналитическая функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и, следовательно, она является общим непрерывным решением, содержащим только z. Наиболее общее действительное решение таково: $V = f(z) + \overline{f}(\bar{z})$.

Сопряженные функции, которые приводят к функции $f(z)$, также должны быть решениями уравнения Лапласа, поскольку действительная и мнимая части $f(z)$ каждая по отдельности должны удовлетворять уравнению. Это соответствует результатам, уже полученным в п. 5.31. Решения уравнения Лапласа часто называют *гармоническими функциями*. Таким образом, сопряженные функции являются также гармоническими функциями.

5.40. Направление обхода контура. При вычислении интеграла по контуру C можно обходить контур в любом из двух направлений: по часовой стрелке или против часовой стрелки. Условимся называть направление обхода контура *положительным*, если при обходе контура ограничиваемая им область L остается *слева* (область L на рис. 88).

На рис. 88 показано положительное направление обхода для случая, когда ограничиваемая область является внутренней по отношению к контуру, и для случая, когда она является внешней. Значения интегралов, полученные в этих двух случаях, отличаются знаками.



Р и с. 88.

5.43. Теорема Стокса в комплексной форме. *Если $f(z, \bar{z})$ является функцией от $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, непрерывной и дифференцируемой в области S, ограниченной контуром C, то*

$$\int_{(C)} f(z, \bar{z})\, dz = 2i \int_{(S)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, dS, \tag{1}$$

$$\int_{(C)} f(z, \bar{z})\, d\bar{z} = -2i \int_{(S)} \frac{\partial f}{\partial z}\, dS. \tag{2}$$

Доказательство. По теореме Стокса, примененной к *плоскому* контуру C, ограничивающему *плоскую* область S, имеем

$$\int_{(C)} f\, d\mathbf{r} = \int_{(S)} (\mathbf{k} \times \nabla) f\, dS = \mathbf{k} \times \int_{(S)} \left(\mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dS.$$

Но $d\mathbf{r} = \mathbf{i}\, dx + \mathbf{j}\, dy = (dx + i\, dy)\, \mathbf{i} = dz\, \mathbf{i}$, так как $\mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} = i\mathbf{i}$.

Следовательно, отбрасывая множитель $\mathbf{i}$ и используя формулы п. 5.33, получаем

$$\int_{(C)} f\, dz = i \int_{(S)} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dS = 2i \int_{(S)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, dS.$$

Формула (2) получается путем перехода к комплексным сопряженным величинам и путем замены f на $\overline{f}$.

Следствие. Положим в формуле (1) $f=u-iv$. Тогда, приравнивая действительную и мнимую части, получаем важные соотношения

$$\int_{(C)} u\,dx+v\,dy=\int_{(S)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dS, \quad \int_{(C)} u\,dy-v\,dx=\int_{(S)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dS.$$

5.50. Интегральная теорема Коши. Пусть C — простой замкнутый контур, так что функция $f(z)$ аналитична в каждой точке C и внутри C[1]). Тогда имеем

$$\int_{(C)} f(z)\,dz=0.$$

Это равенство выражает интегральную теорему Коши.

Доказательство. Поскольку функция $f(z)$ аналитическая, ее производная $\partial f/\partial\bar{z}=0$.

Следовательно, из формулы (1) п. 5.43 получаем

$$\int_{(C)} f(z)\,dz=0.$$

Данное здесь доказательство основывается на предположении, отмеченном в п. 5.30, о том, что удовлетворены достаточные условия аналитичности. Полное доказательство было бы весьма длинным и сложным, однако принятые здесь допущения обычно удовлетворяются в приложениях.

5.51. Теорема Морера. Эта теорема является обратной для интегральной теоремы Коши, и она устанавливает тот факт, что если

$$\int_{(C)} f(z)\,dz=0$$

для всякого простого замкнутого контура внутри области R, то $f(z)$ — аналитическая функция в этой области.

Доказательство. Из формулы (1) п. 5.43 получаем

$$\int_{(S)}\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}\,dS=0,$$

где S — область, ограниченная контуром R. Так как эта область произвольна и лежит внутри R, то должно быть выполнено равенство

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=0,$$

так что $f(z)$ — аналитическая функция от z.

Указанное здесь доказательство требует значительного дополнения, чтобы стать вполне удовлетворительным. Полное доказательство этой теоремы читатель найдет в курсах анализа.

5.52. Аналитическое продолжение. Пусть R_1 и R_2 — две области, разделенные линией Σ, и пусть функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, определенные в каждой из них, являются аналитическими и такими, что

$$f_1(z)=f_2(z) \quad \text{на} \quad \Sigma.$$

---

[1]) Это означает, что контур C и его внутренняя область целиком лежат внутри большего контура, в котором функция аналитическая.

Тогда функция $f(z)$, равная $f_1(z)$, если z находится в области R_1, и равная $f_2(z)$, если z находится в области R_2, является аналитической функцией во всей области R_1+R_2. Для доказательства достаточно показать только, что выполнено равенство

$$\int_{(C)} f(z)\,dz=0,$$

если C — некоторый контур внутри области R_1+R_2. Так как $f_1(z)$, $f_2(z)$ — аналитические функции в каждой из областей, то единственным случаем, для которого это не очевидно, является тот, при котором контур пересекает линию Σ (рис. 89).

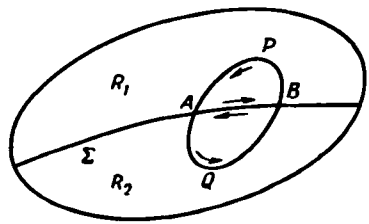


Рис. 89.

Для такого контура имеем

$$\int_{(C)} f(z)\,dz=\int_{(ABPA)} f_1(z)\,dz+\int_{(AQBA)} f_2(z)\,dz=0,$$

так как интегралы вдоль отрезков AB и BA взаимно уничтожаются. Таким образом, по теореме Морера функция $f(z)$ является аналитической во всей области R_1+R_2.

В условиях данной теоремы обычно говорят, что функция $f_2(z)$ есть *аналитическое продолжение* функции $f_1(z)$ в области R_2.

5.53. Принцип симметрии. Пусть $f_1(z)$ — аналитическая функция, определенная внутри области R_1, ограниченной прямой линией Σ, на которой $f_1(z)$ принимает *действительные значения*.

Пусть R_2 — зеркальное отражение области R_1 относительно линии Σ. Пусть точка P_2 — отображение точки P_1 относительно линии Σ.

Чтобы аналитически продолжить функцию $f_1(z)$ в область R_2, нужно взять в качестве $f_2(z)$ функцию, значение которой в каждой точке P_2 равно комплексно сопряженному значению функции $f_1(z)$ в соответствующей точке P_1 (рис. 90).

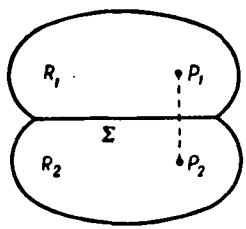


Рис. 90.

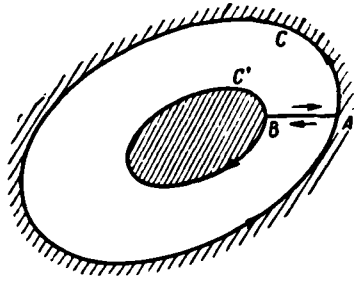


Рис. 91.

5.54. Деформация контура. Применим теорему Коши к контуру, состоящему из двух замкнутых кривых C, C' и линии AB, соединяющей две точки контуров, как показано на рис. 91.

Тогда, предполагая, что функция $f(z)$ — аналитическая на кривых C и C' и в каждой точке области, заключенной между ними, мы имеем

$$\int_{(C)} f(z)\,dz+\int_{(AB)} f(z)\,dz-\int_{(C')} f(z)\,dz+\int_{(BA)} f(z)\,dz=0.$$

Интегралы вдоль AB и BA сокращаются, потому что $f(z)$ однозначна, и, следовательно,

$$\int_{(C)} f(z)\,dz = \int_{(C')} f(z)\,dz,$$

причем оба интеграла берутся по соответствующим контурам C и C' в положительном (против часовой стрелки) направлении.

Это означает, что контур C можно заменить уменьшенным контуром C' при условии, что $f(z)$ остается аналитической в каждой точке между C и C'. Точно так же контур C' можно увеличить до контура C.

5.55. Случай, когда функция не аналитична в некоторых точках. Способ доказательства из п. 5.54 можно применить для получения весьма важного результата. Пусть функция аналитична в конечном числе

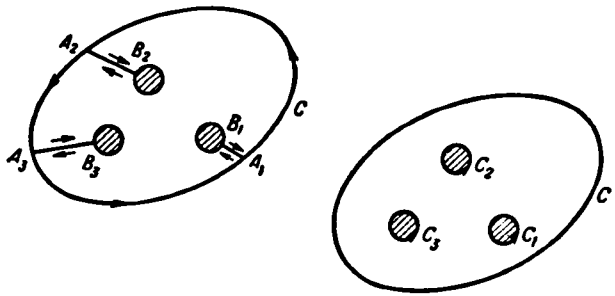


Рис. 92.

точек внутри контура. В этом случае всегда можно провести окружности достаточно малого радиуса с центрами в этих точках, так чтобы каждая окружность содержала внутри себя только одну точку, в которой функция не аналитична. Мы можем соединить эти окружности непересекающимися прямыми линиями с контуром C. На рис. 92 показан случай, когда функция не аналитична в трех точках. Окружностями являются C_1, C_2, C_3; отрезками прямых линий A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 эти окружности соединяются с контуром C. По интегральной теореме Коши имеем

$$\int_{(C)} f(z)\,dz + \int_{(A_1B_1)} - \int_{(C_1)} + \int_{(B_1A_1)} + \int_{(A_2B_2)} - \int_{(C_2)} + \int_{(B_2A_2)} + \int_{(A_3B_3)} - \int_{(C_3)} + \int_{(B_3A_3)} = 0,$$

где повсюду подинтегральным выражением является $f(z)\,dz$. Таким образом, получаем

$$\int_{(C)} f(z)\,dz = \int_{(C_1)} f(z)\,dz + \int_{(C_2)} f(z)\,dz + \int_{(C_3)} f(z)\,dz.$$

Это означает, что интеграл по контуру можно заменить суммой интегралов по малым окружностям с центрами в точках внутри контура, в которых функция неаналитическая.

5.56. Особенности. Точка, в которой функция не является аналитнческой, называется *особой точкой* этой функции. Таким образом, функция $f(z) = (z-a)^{-1}$ аналитична в любой области, из которой исключена точка $z = a$ (например, если провести около нее малую окружность). В точке $z = a$ функция бесконечна и, следовательно, не удовлетворяет первой части определения аналитичности.

Если вблизи точки $z=a$ функция может быть разложена в следующий ряд по положительным и отрицательным степеням $z-a$:

$$f(z)=\ldots+A_2(z-a)^2+A_1(z-a)+A_0+\frac{B_1}{z-a}+\frac{B_2}{(z-a)^2}+\cdots,$$

то точка $z=a$ есть особая точка.

Если в этом разложении содержится только конечное число отрицательных степеней $z-a$, то точка $z=a$ называется *полюсом* функции $f(z)$.

Рассмотрим снова функцию $f(z)=\ln z$. Эта функция не аналитична в точке $z=0$. В п. 5.20 мы видели, что $\ln z$ — многозначная функция. Если мы сделаем эту функцию однозначной, положив $\ln z=0$ при $z=1$, и заставим описывать замкнутую кривую, не окружающую точку $z=0$, то $\ln z$ возвратится к своему первоначальному значению и, следовательно, эта функция будет аналитической внутри кривой.

5.57. Вычеты. Мы видели, что функция, которая в окрестности $z=a$ имеет разложение, содержащее отрицательные степени $(z-a)$, имеет особенность в точке $z=a$.

В этом случае коэффициент при $(z-a)^{-1}$ называется *вычетом* функции при $z=a$.

Рассмотрим интеграл

$$\int(z-a)^n\,dz,$$

взятый по окружности радиуса R с центром в точке $z=a$. На этой окружности $z-a=Re^{i\theta}$ и, следовательно,

$$\int(z-a)^n\,dz=\int_0^{2\pi}R^{n+1}e^{(n+1)\,i\theta}\,i\,d\theta=\frac{R^{n+1}}{(n+1)}\left[e^{(n+1)\,i\theta}\right]_0^{2\pi}=0,$$

если $n\neq-1$.

Однако если $n=-1$, то мы получаем

$$\int\frac{dz}{z-a}=\int_0^{2\pi}i\,d\theta=2\pi i.$$

Теперь предположим, что $f(z)$ в окрестности точки $z=a$ можно разложить в ряд

$$\ldots+A_2(z-a)^2+A_1(z-a)+A_0+\frac{B_1}{(z-a)}+\frac{B_2}{(z-a)^2}+\cdots.$$

Интегрируя этот ряд по малой окружности, окружающей точку $z=a$, получаем

$$\int f(z)\,dz=2\pi iB_1,$$

так как все интегралы, за исключением интеграла от члена $B_1(z-a)^{-1}$, обращаются в нули.

Таким образом, отсюда видно значение вычетов. Они образуют единственные вклады в интегралы от функции, являющейся аналитической во всех точках внутри замкнутого контура, за исключением особых точек описанного выше вида.

5.58. Теорема Коши о вычетах. Пусть C — замкнутый контур, внутри и вне которого функция $f(z)$ аналитическая, за исключением конечного

числа особых точек внутри C, в которых вычеты равны $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда

$$\int_{(C)} f(z)\,dz = 2\pi i\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Доказательство. Предположим, что имеются три особые точки. Окружим их малыми окружностями, как описано в п. 5.55. Тогда, согласно п. 5.57, имеем

$$\int_{(C)} f(z)\,dz = \int_{(C_1)} f(z)\,dz + \int_{(C_2)} f(z)\,dz + \int_{(C_3)} f(z)\,dz = 2\pi i a_1 + 2\pi i a_2 + 2\pi i a_3.$$

Это доказывает теорему в случае трех особых точек. Доказательство для любого конечного числа точек такое же.

5.59. Формула Коши. Пусть $f(\zeta)$ — функция комплексного переменного ζ, аналитическая внутри и на замкнутом контуре C, и пусть z — какая-либо точка, не лежащая на C. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = f(z) \text{ или } 0,$$

смотря по тому, будет ли z внутри или вне C.

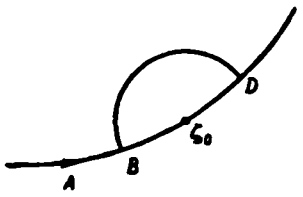


Рис. 93.

Доказательство. Возьмем функцию $F(\zeta) = [f(\zeta) - f(z)]/(\zeta - z)$. Функция $F(\zeta)$ аналитична всюду внутри C, за исключением точки $\zeta = z$, где она неопределенная.

Но поскольку $f(\zeta)$ аналитична, то

$$\lim_{\zeta \to z} F(\zeta) = f'(z).$$

Будем считать, следовательно, функцию $F(\zeta)$ равной $f'(z)$ при $\zeta = z$.

Согласно этому определению, $F(\zeta)$ аналитична всюду внутри C, и, следовательно, по теореме Коши, $\int F(\zeta)\,d\zeta = 0$. Поэтому, согласно теореме Коши о вычетах,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta = f(z) \text{ или } 0,$$

смотря по тому, будет ли точка z внутри или вне C.

5.591. Главное значение интеграла. Пусть ζ_0 — точка на дуге A (которая может быть замкнутым контуром). Рассмотрим интеграл

$$F(\zeta_0) = \int_{(A)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0}\,d\zeta, \tag{1}$$

где $f(\zeta)$ задана, если ζ движется по A. Подинтегральное выражение при $\zeta = \zeta_0$ становится бесконечным, таким образом, интеграл не определен. Опишем окружность с центром ζ_0 бесконечно малого радиуса ε так, чтобы окружность пересекала дугу A в двух точках, скажем B и D (рис. 93). Обозначим через a часть дуги внутри окружности, т. е. дугу BD, и обозначим через $A - a$ остальную часть дуги A. Говорят, что интеграл (1)

существует как *главное значение в смысле Коши*, если существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(A-a)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta. \tag{2}$$

Заметим, что если интеграл существует в обычном смысле, то он существует также в смысле главного значения; обратное неверно.

В частности, рассмотрим $\int_{(C)} d\zeta/(\zeta-\zeta_0)$, взятый вдоль замкнутого контура C. Здесь имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(C-a)}\frac{d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=\lim_{\varepsilon\to 0}[\ln(\zeta-\zeta_0)]_{(C-a)}=\lim_{\varepsilon\to 0} i\,[\arg(\zeta-\zeta_0)]_{(C-a)}=i\pi.$$

Следовательно, главное значение в смысле Коши равно

$$\int_{(C)}\frac{d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=i\pi.$$

5.592. Формулы Племеля. Пусть ζ_0 — заданная точка на простом замкнутом контуре C и пусть $\varphi(\zeta)$ — функция, заданная на C так, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta \tag{1}$$

существует по крайней мере в смысле главного значения.

Если выбрать положительное направление обхода, то кривая разделит плоскость на две области: L слева и R справа (см. рис. 88).

Рассмотрим формулу

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}{\zeta-z}\,d+\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{\varphi(z)\,d\zeta}{\zeta-z}. \tag{2}$$

Если z находится в области L, то мы будем писать $\Phi^+(z)$ для значений $\Phi(z)$, определяемых по интегральной формуле Коши

$$\Phi^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}{\zeta-z}\,d\zeta+\varphi(z). \tag{3}$$

Теперь пусть точка z, оставаясь все время внутри области L, стремится к ζ_0. Тогда

$$\Phi^+(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta+\varphi(\zeta_0). \tag{4}$$

Далее, если z находится в области R, то, по теореме Коши о вычетах, $\int_{(C)} d\zeta/(\zeta-z)=0$ и, следовательно, из формулы (2) находим

$$\Phi^-(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Таким образом, если точка z, оставаясь в области R, стремится к ζ_0, то мы получим

$$\Phi^-(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta. \tag{5}$$

Вычитая (5) из (4), мы получаем *первую формулу Племеля*

$$\Phi^+(\zeta_0) - \Phi^-(\zeta_0) = \varphi(\zeta_0) \tag{6}$$

складывая (4) с (5), получаем *вторую формулу Племеля*[1])

$$\Phi^+(\zeta_0) + \Phi^-(\zeta_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{(C)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0}\, d\zeta. \tag{7}$$

Если вместо замкнутого контура C задана открытая дуга A, то формула еще остается справедливой, так как мы можем замкнуть дугу, соединяя ее концы и полагая функцию $\varphi(\zeta)$ равной нулю на этой смыкающей части.

Одним из наиболее ценных следствий первой формулы Племеля является следующая теорема.

Теорема Племеля. *Функциональное уравнение*

$$\Phi^+(\zeta_0) - \Phi^-(\zeta_0) = \varphi(\zeta_0) \tag{8}$$

на дуге A имеет частное решение

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(A)} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}. \tag{9}$$

Это — единственное решение, которое аналитично во всей плоскости, за исключением дуги A, и которое в бесконечности стремится к нулю.

Из формулы (6) сразу же следует, что функция (9) является решением. Для доказательства единственности обозначим через $\Psi(z)$ *разность* двух решений, удовлетворяющих этим условиям. Тогда посредством подходящего определения функции $\Psi(z)$ на дуге A (где она неопределенная) мы получаем, что $\Psi(z)$ аналитична во всей плоскости, включая бесконечность, и, следовательно, по теореме Лиувилля, сводится к постоянной величине, которая должна быть равна нулю, так как $\Phi(z)$ в бесконечности обращается в нуль.

5.60. Нули. Если аналитическая функция $f(z)$ может быть выражена в форме $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$, где n — положительное целое число и $g(z)$ не равно нулю при $z = z_0$, то говорят, что функция $f(z)$ имеет *нуль кратности n* в точке $z = z_0$. Если $n = 1$, то z_0 является *простым нулем*.

Так как

$$f'(z) = n(z - z_0)^{n-1} g(z) + (z - z_0)^n g'(z),$$

то $f'(z)$ будет иметь нуль кратности $n - 1$ при $z = z_0$. В случае простого нуля $f'(z_0) \neq 0$.

Таким образом, если $f'(z) \neq 0$ внутри данного контура, в котором $f(z)$ аналитична, то $f(z)$ может иметь внутри этого контура только простые нули.

Кроме того, поскольку аргумент произведения равен сумме аргументов (см. п. 5.13), можно записать соотношение

$$\arg f(z) = \arg(z - z_0)^n + \arg g(z) = n \arg(z - z_0) + \arg g(z).$$

При вычислении нулей функции $f(z)$ удобно рассматривать нуль кратности n как n нулей, равных между собой.

---

[1]) Plemelj J., Ein Ergänzungssatz..., *Monatshefte für Math. and Phys.*, 19 (1908), 205—210.

[Формулы (6) и (7) впервые были выведены Ю. В. Сохоцким (1873 г.), позже И. Племелем (1908 г.) и затем при более общих условиях И. И. Приваловым (1918 г.). В отечественной литературе эта формула известна как формула Сохоцкого. — *Прим. перев.*]

5.61. Принцип аргумента. Если C — простой замкнутый контур, на котором $f(z)$ не имеет нулей и внутри которого и на котором функция $f(z)$ аналитична, то число N нулей функции $f(z)$ внутри контура определяется формулой

$$2\pi N = [\arg f(z)]_{(C)},$$

где квадратная скобка в правой части означает увеличение $\arg f(z)$, когда z описывает один раз контур C в положительном направлении.

Доказательство. Для простоты предположим, что внутри области имеется два нуля, скажем z_1 и z_2, кратности n_1 и n_2 (рис. 94). Тогда

$$f(z) = (z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2} g(z),$$

где $g(z)$ не имеет нулей внутри C. Таким образом, согласно п. 5.60,

$$\arg f(z) = n_1 \arg(z-z_1) + n_2 \arg(z-z_2) + \arg g(z).$$

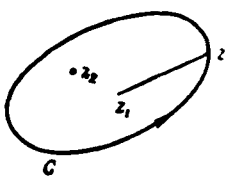


Рис. 94.

Когда точка z описывает контур C один раз в положительном направлении, то каждый из аргументов $\arg(z-z_1)$ и $\arg(z-z_2)$ увеличивается на 2π, в то время как $\arg g(z)$ возвращается к своему первоначальному значению.

Следовательно,

$$[\arg f(z)]_{(C)} = 2\pi(n_1+n_2) = 2\pi N.$$

Пусть, кроме того, $f(z)$ имеет нуль, скажем z_3, *на* контуре C. Если точка z описывает контур один раз в положительном направлении, то $\arg(z-z_3)$ *увеличивается*. Это увеличение равно π, если z_3 обыкновенная точка C (см. рис. 132); в общем случае оно равно углу между касательными в точке z_3, если в этой точке имеются две различные касательные (см. рис. 133). Таким образом, в любом случае имеем

$$[\arg f(z)]_{(C)} \geqslant 2\pi N,$$

где N — число нулей функции $f(z)$ *внутри* контура C.

5.62. Отображение. Пусть $f(z)$ — функция комплексного переменного $z = x+iy$, аналитическая внутри и на замкнутом контуре C в плоскости x, y, которую мы будем называть плоскостью z (рис. 95). Возьмем второе

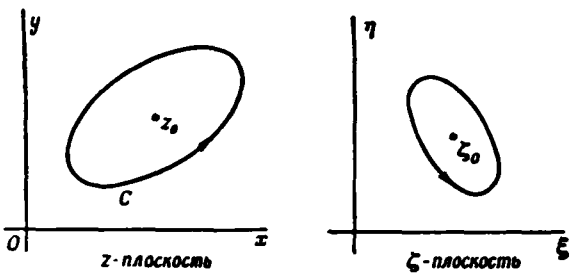


Рис. 95.

комплексное переменное $\zeta = \xi + i\eta$ и отметим изображающие точки на второй векторной диаграмме с осями $O\xi$ и $O\eta$. Эту плоскость мы назовем плоскостью ζ. Рассмотрим теперь соотношение

$$\zeta = f(z). \qquad (1)$$

Посредством этого соотношения каждой точке внутри контура C или на контуре соответствует одна точка в плоскости ζ, и поскольку $f(z)$, будучи аналитической, однозначна, то точка является единственной. Таким образом, точки контура C и внутренняя область отображаются в некоторые точки плоскости ζ. Исследуем характер отображения при следующих допущениях:

а) функция $f(z)$ никогда не принимает одинаковых значений в двух различных точках контура C;

б) производная $f'(z)$ не имеет нулей на контуре C.

Докажем теперь некоторые свойства отображения, задаваемого формулой (1).

(I) *Если точка z описывает замкнутый контур C один раз, то точка ζ описывает замкнутую кривую Γ в плоскости ζ и эта кривая не имеет двойных точек.*

Доказательство. В силу аналитичности функции $f(z)$ она изменяется непрерывно на контуре C, поэтому и величина ζ изменяется непрерывно, так что точка ζ описывает непрерывный контур Γ.

В силу аналитичности функции $f(z)$ она является однозначной функцией, поэтому, когда точка z описывает один раз контур C, возвращаясь к исходному положению, функция $f(z)$ и, следовательно, величина ζ возвращаются к первоначальному значению. Таким образом, Γ — замкнутая кривая.

Согласно допущению (а), функция $f(z)$ никогда не принимает одинакового значения дважды. Поэтому, когда точка z описывает контур C, то переменная величина ζ никогда не принимает одних и тех же значений дважды. Это означает, что кривая Γ не пересекает сама себя, т. е. она не имеет двойных точек.

(II) *Если внутри контура C дана точка z_0, то соответствующая точка ζ_0 находится внутри контура Γ.*

Доказательство. Пусть имеем

$$n = \frac{1}{2\pi}[\arg\{f(z) - f(z_0)\}]_{(C)} = \frac{1}{2\pi}[\arg(\zeta - \zeta_0)]_{(\Gamma)}.$$

Так как разность $f(z) - f(z_0)$ имеет по крайней мере один нуль внутри контура C, а именно z_0, то из п. 5.61 следует, что $n \geqslant 1$.

Далее, когда точка ζ описывает контур Γ один раз, то увеличение $\arg(\zeta - \zeta_0)$ равно 0, $\pm\alpha$ (где[1]) $\alpha < 2\pi$) или $\pm 2\pi$, смотря по тому, будет ли точка ζ_0 вне, на или внутри контура Γ.

Соответствующие значения n таковы: 0, $\pm m$, $(m < 1)$, ± 1. Но $n \geqslant 1$. Отсюда $n = 1$ и, следовательно,

$$[\arg(\zeta - \zeta_0)]_{(\Gamma)} = 2\pi.$$

Это показывает, что точка ζ_0 находится внутри контура Γ и что контур Γ описывается в положительном направлении. Это означает, согласно п. 5.40, что точка ζ_0 находится слева от наблюдателя, описывающего контур в положительном направлении.

(III) *Если точка z описывает контур C в положительном направлении, то точка ζ описывает контур Γ тоже в положительном направлении.*

Данная теорема является непосредственным следствием теоремы (II), согласно которой точка ζ_0 находится внутри контура Γ и Γ описывается в положительном направлении, если точка z описывает контур C в положительном направлении.

---

[1]) Кривая Γ не имеет двойной точки и, следовательно, α должно быть меньше 2π (см. рис. 132, 133).

(IV) *Если внутри контура* Г *задана точка* ζ_0, *то существует только одна точка внутри контура* C, *такая, что* $\zeta_0 = f(z_0)$.

Доказательство. Поскольку точка ζ_0 находится внутри контура Г, разность $\zeta - \zeta_0$ имеет только один нуль внутри Г, поэтому

$$1 = \frac{1}{2\pi}[\arg(\zeta - \zeta_0)]_{(\Gamma)} = \frac{1}{2\pi}[\arg\{f(z) - \zeta_0\}]_{(C)}.$$

Отсюда следует, что разность $f(z) - \zeta_0$ имеет только один нуль внутри контура C. Обозначая его через z_0, получим $f(z_0) - \zeta_0 = 0$.

(V) *Производная* $f'(z)$ *не может обращаться в нуль внутри или на контуре* C.

Доказательство. Допустим, что z_1 является нулем функции $f'(z)$ внутри контура C. Тогда разность $f(z) - f(z_1)$ имеет нуль кратности, большей 1, так как $f'(z_1) = 0$ (п. 5.60).

Следовательно, уравнение $f(z) - f(z_1) = 0$ имеет по крайней мере два корня в точке z_1, находящейся внутри C. Это противоречит теореме (IV) и, таким образом, предположение о том, что $f'(z)$ обращается в нуль внутри контура C, является ложным. То, что $f'(z)$ не может обратиться в нуль на контуре C, следует из допущения (б).

(VI). *Если переменное* ζ *принимает значения внутри контура* Г, *то переменное* z *является аналитической функцией* ζ.

Доказательство. Из теоремы (IV) следует, что каждому значению ζ внутри контура Г соответствует определенное значение z внутри контура C, так что z является однозначной функцией ζ.

Остается показать, что z имеет единственную конечную производную для каждого значения ζ внутри контура Г. Теперь если $f'(z)$ не равна нулю, то

$$\frac{dz}{d\zeta} = \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^{-1} = \frac{1}{f'(z)},$$

и так как значение $f(z)$ единственно и не равно нулю, когда z двигается внутри контура C, то отсюда следует требуемый результат. В соответствии с допущением (б) результат остается верным, когда точка ζ движется по контуру Г.

Вышеуказанные результаты показывают, что соотношение (1) при выполнении допущения (*а*) дает *взаимно однозначное и непрерывное отображение*, при котором область, расположенная внутри контура C, точечно отображается на область, расположенную внутри контура Г, и обратно — внутренняя область контура Г точечно отображается на внутреннюю область контура C таким образом, что точке z_0 внутри контура C соответствует одна и только одна точка ζ_0 внутри контура Г и, наоборот, точке ζ_0 внутри контура Г соответствует одна и только одна точка z_0 внутри контура C. Добавление условия (б) обеспечивает то, что взаимно однозначный и непрерывный характер отображения распространяется на границы областей, контуры C и Г.

5.63. Контуры с нулями функции $f'(z)$. Предположим, что требуется отобразить контур C, на котором имеется нуль функции $f'(z)$, например, в точке P.

Для осуществления этого отображения исключим эту точку контура C, т. е. заменим его видоизмененным контуром C', в котором бесконечно малая часть контура C, содержащего точку P, выбрасывается и заменяется дугой окружности бесконечно малого радиуса с центром в точке P, так что точка P находится теперь вне видоизмененного контура C', как изображено на рис. 96.

Теперь к видоизмененному контуру C' применяем теоремы об отображении. Затем полагаем, что радиус малой окружности стремится к нулю. На контуре по мере надобности могут быть сделаны такие операции во многих точках.

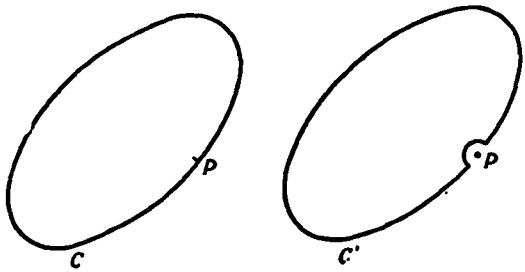


Рис. 96.

5.70. Конформное отображение. Пусть взаимно однозначное и непрерывное отображение некоторой области плоскости z на область плоскости ζ определяется формулой

$$\zeta = f(z). \tag{1}$$

Пусть значения z, z_1, z_2 изображаются точками P, P_1, P_2 плоскости z и пусть соответствующие значения ζ, ζ_1, ζ_2 представляются точками Π, Π_1, Π_2 плоскости ζ (рис. 97). Тогда имеем

$$\frac{\zeta_1-\zeta}{z_1-z}=\frac{f(z_1)-f(z)}{z_1-z}, \qquad \frac{\zeta_2-\zeta}{z_2-z}=\frac{f(z_2)-f(z)}{z_2-z}.$$

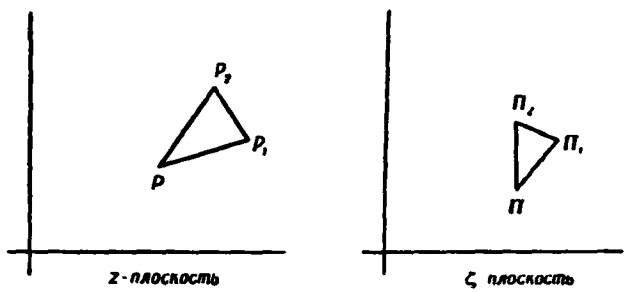


Рис. 97.

Если предположить разности z_1-z и z_2-z малыми, то приближенно получим

$$\frac{\zeta_1-\zeta}{z_1-z}=f'(z), \quad \frac{\zeta_2-\zeta}{z_2-z}=f'(z) \tag{2}$$

и, следовательно,

$$\frac{\zeta_1-\zeta}{z_1-z}=\frac{\zeta_2-\zeta}{z_2-z}=f'(z)=\frac{d\zeta}{dz}.$$

Таким образом, приравнивая модули и аргументы обеих частей последнего равенства, находим соотношения

$$\frac{\Pi\Pi_1}{PP_1}=\frac{\Pi\Pi_2}{PP_2}=|f'(z)|=\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|, \tag{3}$$

$$\arg \Pi\Pi_1-\arg PP_1=\arg \Pi\Pi_2-\arg PP_2=\arg f'(z).$$

Отсюда

$$\arg \Pi\Pi_2 - \arg \Pi\Pi_1 = \arg PP_2 - \arg PP_1,$$

и, следовательно,

$$\angle \Pi_1\Pi\Pi_2 = \angle P_1PP_2. \tag{4}$$

Равенства (3) и (4) геометрически означают, что треугольники P_1PP_2 и $\Pi_1\Pi\Pi_2$ подобны, так что бесконечно малый треугольник плоскости z отображается в подобный ему бесконечно малый треугольник плоскости ζ. Таким образом, рассматриваемое отображение сохраняет:

а) углы,

б) подобие соответствующих бесконечно малых треугольников.

Благодаря этим свойствам отображение, определяемое формулой (1), называют *конформным отображением*.

Соотношение (3) дает масштаб отображения в точке П. Этот масштаб является функцией z, т. е. изменяется от точки к точке. Иллюстрация конформного отображения дается обычной картой в проекции Меркатора. Хорошо известно, что угол между двумя линиями, измеренный на карте, равен углу пересечения двух соответствующих линий на земной поверхности; именно благодаря этому свойству карта полезна в навигации.

В частности, линии на карте, представляющие меридианы и параллели, перпендикулярны друг другу. Если мы рассмотрим малый участок карты, то установим, что расстояния, измеряемые на карте, представляют в измененном масштабе соответствующие расстояния на земном шаре, но этот масштаб изменяется с увеличением широты.

Из формулы (3) можно получить также отношение соответствующих величин малых площадей в следующем виде:

$$\frac{\Delta\Pi_1\Pi\Pi_2}{\Delta P_1PP_2} = |f'(z)|^2 = f'(z)\,\overline{f}'(\bar{z}) = \frac{d\zeta}{dz}\frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}},$$

где $\overline{f}(\bar{z})$ — комплексная сопряженная функция для функции $f(z)$.

Для иллюстрации последнего соотношения предположим, что

$$f(z) = 6z + 3iz^2.$$

Тогда

$$f'(z) = 6 + 6iz = 6 + 6i\,(x + iy),$$
$$\overline{f}'(\bar{z}) = 6 - 6i\bar{z} = 6 - 6i\,(x - iy)$$

и

$$|f'(z)|^2 = (6 - 6y)^2 + (6x)^2.$$

5.71. Отображение бесконечных областей. В большинстве приложений конформного отображения к гидродинамике одна или обе рассматриваемые области простираются до бесконечности. Поэтому важно иметь ясное представление о том, что составляет «внутреннюю часть» области. Для объяснения этого рассмотрим отображение области плоскости z, ограниченной дугами окружностей $r = a$, $r = b$ и радиусами $\theta = 0$, $\theta = \pi/\alpha$ (рис. 98), задаваемое функцией

$$\zeta = z^\alpha, \qquad \alpha > 1.$$

Полагаем $z = re^{i\theta}$, $\zeta = Re^{i\gamma}$. Тогда

$$Re^{i\gamma} = r^\alpha e^{i\alpha\theta}.$$

Таким образом, если точка z движется вдоль $AB\,(\theta = 0)$, то $\gamma = 0$ и точка ζ движется вдоль прямой $A'B'$. Если точка z движется вдоль $CD\,(\theta = \pi/\alpha)$, то точка ζ движется вдоль $C'D'$.

Если точка z движется вдоль дуги DMA $(r=a)$, то точка ζ движется вдоль дуги $D'M'A'$ $(R=a^{\alpha})$ и, наконец, если точка z движется вдоль дуги BLC $(r=b)$, то точка ζ движется вдоль дуги $B'L'C'$ $(R=b^{\alpha})$.

Ясно, что условия 5.62 (а) и (б) для отображающей функции выполняются, так как начало координат, в котором производная от функции z^{α} обращается в нуль, исключена из рассматриваемой области. Таким образом, отображение является взаимно однозначным и непрерывным. Внутренняя

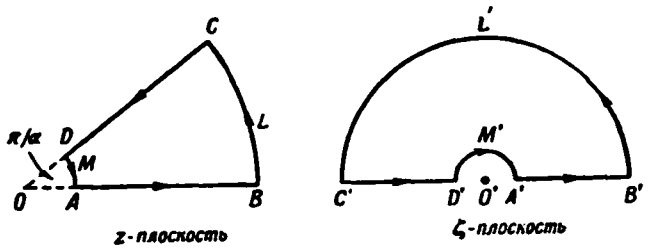


Рис. 98.

часть секторной области плоскости z конформно отображается на внутреннюю часть области, заключенную между полуокружностями в плоскости ζ.

Кроме того, направление обхода сохраняется на обеих плоскостях, поэтому отображаемые области находятся слева, когда контуры обходятся в указанных направлениях. Эти утверждения остаются верными при любом увеличении величины b и, следовательно, полагая $b \to \infty$ и отмечая точки в бесконечности индексами ∞, мы получим области, изображенные на рис. 99, где штриховкой отмечены внешние области. Это показывает, что внутренняя часть бесконечной секторной области отображается на верхнюю половину плоскости ζ и теперь понятие внутренней части области означает предельную форму конечного

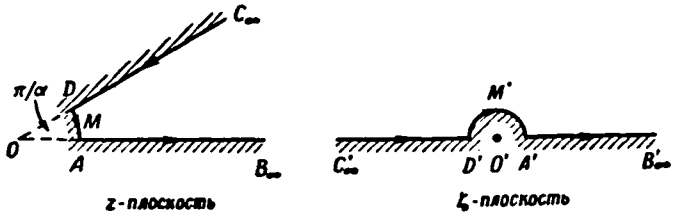


Рис. 99.

случая и таким же образом связывается, как и прежде, с направлением обхода. Выброшенная часть области в начале координат может быть теперь устранена, если величину a устремить к нулю.

Для уяснения смысла понятий «внутренний» и «внешний» при отображении бесконечных областей, вообще говоря, пригодны те простые соображения, которые указаны выше; действительно, уже одно знание направления обхода дает требуемые сведения.

ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ 5

1. Пусть $\varphi+i\psi=f(z)$ и пусть функция $f(z)$ действительна при $y=a$. Показать, что $\psi=0$ при $y=a$.

2. Найти функцию комплексного переменного z, мнимая часть которой равна

$$2x(x^2-3y^2)+\frac{1}{2}(x^2-y^2)+axy.$$

3. Пусть даны преобразования

$$(\text{I})\ \zeta=z+a,\quad (\text{II})\ \zeta=ze^{i\alpha},\quad (\text{III})\ \zeta=bz,\quad (\text{IV})\ \zeta=z^{-1};$$

тогда доказать, что первое преобразование является переносом, второе — вращением, третье — вращением и растяжением, четвертое — инверсией относительно $|z|=1$ и оси x (α — действительное число, величины a и b могут быть комплексными).

Доказать, что дробно-линейное преобразование $\zeta=(\alpha z+\beta)/(\gamma z+\delta)$, где $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$, может быть составлено из последовательного применения вышеуказанных преобразований и, следовательно, дает отображение, в котором окружности и прямые линии преобразуются в окружности и прямые линии.

4. Доказать, что преобразование $\zeta=(z-i)/(z+i)$ отображает верхнюю половину плоскости z на внутренность круга $|\zeta|=1$. Найти точки, соответствующие $z=\infty$, -1, 0, 1.

5. Доказать, что преобразование $\zeta=z^2$ отображает полуплоскость $y\geqslant 0$ на всю плоскость ζ с разрезом вдоль действительной полуоси.

6. В плоскости z дана область, ограниченная контуром, составленным из окружности $|z|=1$ и двух полуокружностей малого радиуса с центрами в точках $z=\pm 1$; с помощью этих полуокружностей исключаются точки $z=\pm 1$.

Доказать, что преобразование $\zeta=-i(z-1)/(z+1)$ отображает внутренность этой области на внутренность области, ограниченной полуокружностями малого и большого радиусов в верхней полуплоскости ζ с центрами в начале координат. Найти соотношение между радиусами полуокружностей в плоскости ζ и радиусом малой полуокружности в плоскости z. Показать, что, когда последний стремится к нулю, рассматриваемая функция определяет отображение на всю верхнюю полуплоскость ζ.

7. Показать, что преобразование $z=\cos\zeta$ отображает всю плоскость z с разрезом вдоль действительной оси от точки $z=-\infty$ до точки $z=1$ на полубесконечный прямоугольник, ограниченный прямыми $\xi=-\pi$, $\xi=\pi$, для которых $\eta\geqslant 0$. Показать, что кривые $\eta=\text{const}$ являются софокусными эллипсами.

8. Показать, что функция

$$z=\frac{2a}{\pi}\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$$

отображает область, заключенную между прямыми $y=a$, $y=-a$, на внутреннюю часть круга единичного радиуса с центром в начале координат в плоскости ζ.

9. Пусть OA — отрезок прямой $y=x\operatorname{tg}(k\pi)$, заключенный между точками $x=0$ и $x=l_1\cos k\pi$, где $k<1$, и пусть OB — линия, соединяющая начало координат с точкой $x=-l_2$. Показать, что преобразование

$$z=Fe^{ik\alpha}\zeta^{-1}(\zeta-e^{-i\alpha})^{1+k}(\zeta-e^{i\alpha})^{1-k}$$

отображает окружность единичного радиуса в плоскости ζ на ломаную линию AOB, описываемую дважды, причем точки $\zeta=e^{i\alpha}$, $\zeta=e^{-i\alpha}$ отображаются в начало координат, а точки $\zeta=e^{i\beta}$, $\zeta=e^{i(\pi-\beta)}$ отображаются соответственно в точки A и B, где $\sin\beta=k\sin\alpha$, а F — подходящим образом выбранная константа.

10. Пусть круг $|\zeta|<r$ отображается на область B плоскости z посредством функции $z=\zeta+a_2\zeta^2+a_3\zeta^3+\ldots$. Доказать, что площадь B равна

$$\pi\{r^2+2|a_2|^2r^4+3|a_3|^2r^6+\ldots\}$$

и, следовательно, больше, чем площадь данного круга.

11. Используя предыдущий пример, доказать, что задача отображения данной области B в плоскости ζ на круг в плоскости z сводится к задаче определения величин $a_2, a_3, \ldots$ в разложении $z=\zeta+a_2\zeta^2+\ldots=f(\zeta)$ таким образом, чтобы интеграл

$$\iint\limits_{(B)}|f'(\zeta)|^2\,d\xi\,d\eta$$

достигал минимума. Показать, что если ограничить ряд несколькими членами, то область B можно отобразить на почти круговую область.

12. Преобразование в примере 3 называется дробно-линейным преобразованием. Доказать, что обратное преобразование имеет вид $z=(-\delta\zeta+\beta)/(\gamma\zeta-\alpha)$ и также является дробно-линейным преобразованием.

13. Пусть последовательные дробно-линейные преобразования преобразуют ζ в z_1 и z_1 в z. Доказать, что ζ преобразуется непосредственно в z с помощью дробно-линейного преобразования. Доказать, что все дробно-линейные преобразования образуют группу.

14. Доказать, что дробно-линейное преобразование отображает всю плоскость z (включая $z=\infty$) саму на себя.

15. Доказать, что дробно-линейное преобразование

$$\zeta = e^{i\alpha}\frac{z-c}{z-\bar{c}},$$

где c не является действительным числом, отображает полуплоскость $y>0$ на единичный круг $|\zeta|<1$ и отображает $z=c$ на $\zeta=0$.

16. Доказать, что дробно-линейное преобразование

$$\zeta = e^{i\alpha}\frac{z-c}{1-\bar{c}z}, \quad |c|<1$$

отображает единичный круг $|z|\leqslant 1$ на единичный круг $|\zeta|\leqslant 1$ и переводит точку $z=c$ в точку $\zeta=0$.

17. Доказать, что преобразование

$$\zeta = \frac{(z+1)^2 - i(z-1)^2}{(z+1)^2 + i(z-1)^2}$$

отображает полукруг с диаметром, соединяющим точку $z=-1$ и точку $z=1$, на единичный круг $|\zeta|\leqslant 1$.

Глава 6

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

6.00. Комплексный потенциал. Пусть φ и ψ — потенциал скорости и функция тока безвихревого двумерного движения невязкой жидкости. Приравнивая компоненты скорости, выраженные через производные от потенциала скорости и функции тока, получим равенства

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{1}$$

Определим *комплексный потенциал* движения жидкости соотношением

$$w=\varphi+i\psi.$$

Согласно п. 5.30, из равенств (1) следует, что потенциал w есть аналитическая функция комплексной переменной $z=x+iy$ в любой области, в которой φ и ψ являются однозначными функциями.

Обратно, если мы предполагаем, что w есть аналитическая функция переменной z, то действительная и мнимая части этой функции представляют собой потенциал скоростей и функцию тока для некоторого возможного двумерного безвихревого движения жидкости, так как они удовлетворяют уравнениям (1) и уравнению Лапласа.

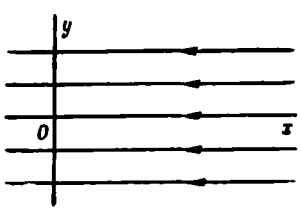


Рис. 100.

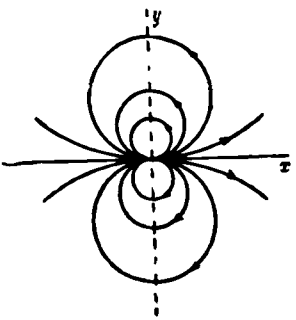


Рис. 101.

Так, например, функция $w=z^2$ характеризует движение жидкости с потенциалом скоростей $\varphi=x^2-y^2$ и функцией тока $\psi=2xy$. Это движение уже было изучено в п. 4.70.

Так как iw также является функцией z, то, следовательно, $-\psi$ и φ являются потенциалом скоростей и функцией тока некоторого другого движения, в котором линии тока и линии равного потенциала поменялись ролями.

Ниже будет установлено, что математический анализ двумерного движения жидкости существенно упрощается, если ввести комплексный потенциал вместо двух функций φ и ψ. Это упрощение подобно тому, которое имеет место при использовании одного векторного уравнения вместо трех уравнений относительно проекций векторов в декартовых координатах. В двумерном случае мы имеем дело с одним уравнением относительно

функций, зависящих от переменной z, вместо двух уравнений относительно функций, зависящих от переменных x и y.

Размерность комплексного потенциала равна произведению размерности скорости на размерность длины, т. е. L^2T^{-1}.

Проиллюстрируем сказанное несколькими примерами. Будем обозначать скорость через U, а длину через a, причем U и a — действительные величины.

(I) $$w = Uz.$$

В этом случае $\psi = Uy$, движение является однородным потоком, направленным вдоль отрицательной оси x (рис. 100).

(II) $$w = \frac{Ua^2}{z},$$

$$\psi = -\frac{Ua^2}{r}\sin\theta = -\frac{Ua^2y}{x^2+y^2}.$$

Линии тока $\psi = \text{const}$ представляют собой окружности, касающиеся оси x в начале координат (рис. 101). Это течение вызвано диполем, помещенным в начале координат (см. п. 8.23).

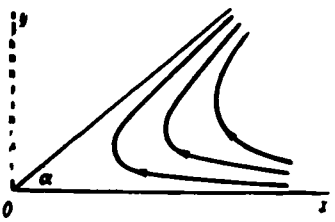


Рис. 102.

(III) $$w = Ua\left(\frac{z}{a}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Течение, описываемое этим потенциалом, представляет собой обтекание некоторого угла α; линии тока течения асимптотически приближаются к сторонам угла (рис. 102). Частный случай такого течения при $\alpha = \pi/2$ был рассмотрен в п. 4.70.

С математической точки зрения комплексный потенциал в форме $w = f(z)$ определяет конформное отображение плоскости z на плоскость w. При этом линии тока течения в плоскости z переходят в прямые $\psi = \text{const}$, параллельные действительной оси плоскости w. Нахождение такого отображения является основным принципом решения задач гидродинамики методами теории функций комплексного переменного.

6.01. Комплексная скорость. Путем дифференцирования комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ можно получить равенства

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dw}{dz}.$$

По определению, $u = -\partial\varphi/\partial x$, $v = \partial\psi/\partial x$, следовательно, имеет место равенство

$$v = u - iv = -\frac{dw}{dz}. \qquad (1)$$

Комбинация $u - iv$, которую мы обозначим через v, называется *комплексной скоростью*. Заметим, что комплексная скорость находится непосредственно из комплексного потенциала по формуле (1). Вектор, изображающий комплексную скорость, является отражением вектора действительной скорости относительно прямой, проведенной через рассматриваемую точку параллельно оси x (рис. 103).

Очень важно отметить, что производная $-dw/dz$ дает $u - iv = v$, а не $u + iv = \bar{v}$. Если мы хотим получить выражение $u + iv$, то мы должны везде изменить знак перед i, так что $u + iv = -d\bar{w}/d\bar{z}$, где через $\bar{w}$ обозначена

комплексно сопряженная функция переменной $\bar{z}$. Так, если $w=iz^2$, то мы должны взять $\bar{w}=-i\bar{z}^2$, изменяя везде знак перед i. Тогда $v=u-iv=-2iz$, а $\bar{v}=u+iv=2i\bar{z}$ и любое из этих выражений дает нам $u=2y$, $v=2x$.

В качестве простого приложения рассмотрим однородный поток, изображенный на рис. 75. Мы имеем

$$-\frac{dw}{dz}=Q\cos\alpha-iQ\sin\alpha=Qe^{-i\alpha},$$

откуда получаем

$$w=-Qe^{-i\alpha}z.$$

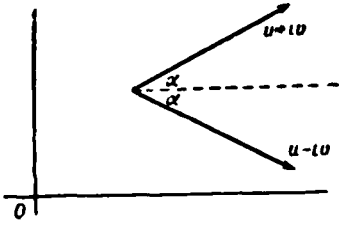


Рис. 103.

6.02. Критические точки. В критической точке скорость равна нулю, следовательно, и комплексная скорость равна нулю. Отсюда следует, что критические точки находятся как корни уравнения

$$\frac{dw}{dz}=0.$$

Например, если $w=Va\left(\frac{z}{a}\right)^{\pi/\alpha}$, то критические точки задаются уравнением

$$z^{\frac{\pi}{\alpha}-1}=0.$$

Так, если $\pi<\alpha$, критическая точка находится в бесконечности. Если же $\pi>\alpha$, то критическая точка расположена в начале координат (см. рис. 102).

6.03. Скорость. Для определения скорости жидкости мы имеем формулу

$$q=\sqrt{u^2+v^2}=\left|\frac{dw}{dz}\right|.$$

Кроме того, скорость можно определить следующим образом:

$$q^2=u^2+v^2=(u-iv)(u+iv)=v\bar{v}=\frac{dw}{dz}\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}.$$

Чтобы проиллюстрировать сказанное, предположим, что $w=2z+3iz^2$, тогда $\bar{w}=2\bar{z}-3i\bar{z}^2$ и $q^2=(2+6iz)(2-6i\bar{z})=4+36z\bar{z}+12i(z-\bar{z})=4+36(x^2+y^2)-24y$.

В этом течении имеется критическая точка, которая определяется как корень уравнения $2+6iz=0$. Отсюда находим, что $z=i/3$, следовательно, координаты критической точки $(0, 1/3)$.

6.04. Уравнения линий тока. Здесь мы приведем экономный метод, посредством которого часто можно получить уравнения линий тока $\psi=\text{const}$. Пусть

$$w=\varphi+i\psi.$$

Тогда $\exp(\varphi+i\psi)=\exp w$. Это равенство может быть записано следующим образом:

$$e^{\varphi}\cos\psi+ie^{\varphi}\sin\psi=X+iY,$$

где через X и Y обозначены действительная и мнимая части выражения $\exp w$.

Таким образом, $X=e^{\varphi}\cos\psi$, $Y=e^{\varphi}\sin\psi$.

Исключая φ, мы получаем

$$Y = X \operatorname{tg} \psi.$$

Таким образом, когда $\psi = \text{const}$, мы можем записать, что $\operatorname{tg} \psi = k$, и можем выписать уравнения линий тока в виде

$$Y = kX.$$

Давая постоянной k различные значения, мы получаем уравнения различных линий тока. Линии тока, соответствующие $k = 0$ и $k = \infty$, т. е. $\psi = n\pi$ и $\psi = (2n+1)\pi/2$, задаются уравнениями

$$Y = 0 \quad \text{и} \quad X = 0.$$

6.10. Течение через отверстие. Если w есть функция z, то и z является функцией w, и иногда бывает полезно воспользоваться этой формой связи между z и w.

Пусть $z = c \operatorname{ch} w$, тогда

$$x + iy = c \operatorname{ch} \varphi \cos \psi + ic \operatorname{sh} \varphi \sin \psi,$$

$$x = c \operatorname{ch} \varphi \cos \psi, \quad y = c \operatorname{sh} \varphi \sin \psi.$$

Исключив φ, мы получим уравнение

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \psi} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \psi} = 1,$$

из которого следует, что линии тока $\psi = \text{const}$ являются софокусными гиперболами, большие и малые полуоси которых равны соответственно $c \cos \psi$ и $c \sin \psi$, а фокусы расположены в точках $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ (рис. 104).

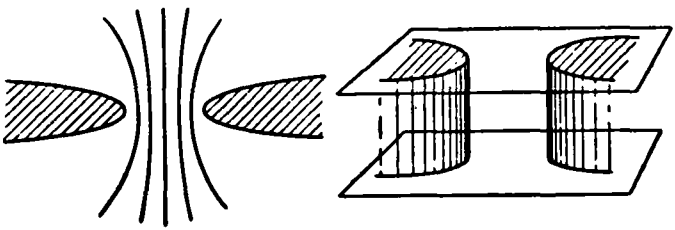


Рис. 104.

Если мы примем цилиндры, направляющими которых являются эти гиперболы, за фиксированную границу, то мы получим картину течения жидкости через отверстие, образованное этими цилиндрами. В предельном случае, взяв гиперболу, вырождающуюся в две прямые ($\psi = 0, \pi$), мы получим течение через отверстие ширины $2c$ в плоской пластине. Однако этот предельный случай не соответствует физической картине течения, так как на краях отверстия скорость обращается в бесконечность.

Для доказательства этого мы используем следующее выражение для скорости:

$$\frac{1}{q^2} = \frac{dz}{dw}\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} = c^2 \operatorname{sh} w \operatorname{sh} \bar{w} = \frac{1}{2} c^2 [\operatorname{ch}(w + \bar{w}) - \operatorname{ch}(w - \bar{w})] =$$

$$= \frac{1}{2} c^2 (\operatorname{ch} 2\varphi - \cos 2\psi).$$

На краях отверстия в точках $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ мы имеем $\varphi = 0$, $\psi = 0$ или $\psi = \pi$. Таким образом, $1/q^2 = 0$ и, следовательно, скорость обращается в бесконечность.

6.11. Течение вокруг эллиптического цилиндра. Пусть дана функция $z = c\cos w$, тогда

$$x = c\,\mathrm{ch}\,\psi\cos\varphi, \qquad y = -c\,\mathrm{sh}\,\psi\sin\varphi.$$

Исключив φ, придем к уравнению

$$\frac{x^2}{c^2\,\mathrm{ch}^2\,\psi} + \frac{y^2}{c^2\,\mathrm{sh}^2\,\psi} = 1,$$

из которого следует, что линии тока теперь являются софокусными эллипсами с полуосями $c\,\mathrm{ch}\,\psi$ и $c\,\mathrm{sh}\,\psi$.

Если в качестве фиксированной границы мы примем цилиндр, направляющей которого является один из этих эллипсов, то получим течение

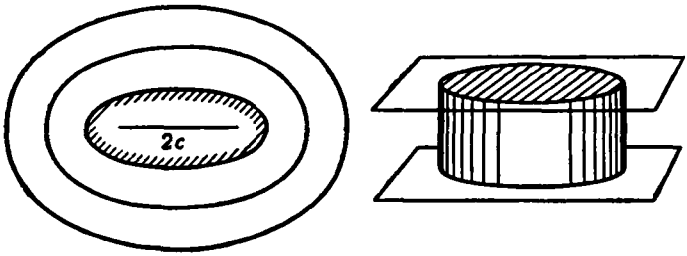


Рис. 105.

жидкости, вращающейся вокруг неподвижного цилиндра. В предельном случае, если положить $\psi = 0$, эллипс вырождается в отрезок длины $2c$ и мы получим течение жидкости, вращающейся вокруг плоской пластины длины $2c$ (рис. 105). В этом случае скорость на концах пластины снова обращается в бесконечность, так как выражение

$$\frac{1}{q^2} = \frac{dz}{dw}\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} = \sqrt{c^2 - z^2}\sqrt{c^2 - \bar{z}^2}$$

обращается в нуль при $z = \pm c$. Кроме того, когда величина $|z|$ велика, мы можем приближенно записать, что $q = 1/r$, где $r = |z| = |\bar{z}|$.

Так как $\cos iw = \mathrm{ch}\,w$, то мы видим, что из формул этого и предыдущего пунктов следует, что линии тока и линии равного потенциала меняются ролями, если заменить w на iw (см. п. 6.00).

6.21. Теорема об окружности. Докажем теперь одну общую теорему [1]), которая будет нам весьма полезна в дальнейшем.

Теорема об окружности. *Пусть в плоскости z имеется двумерное безвихревое течение несжимаемой невязкой жидкости. Пусть твердые границы отсутствуют и пусть комплексный потенциал этого течения задается функцией $f(z)$, причем все особые точки функции $f(z)$ удалены от начала координат на расстояние, большее чем a. Если в это течение жидкости поместить цилиндр, образующей которого является окружность $C: |z| = a$, то комплексным потенциалом нового течения будет функция*

$$w = f(z) + \bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right). \qquad (1)$$

Доказательство. Так как $\bar{z} = a^2/z$ [2]) на окружности C, то мы

[1]) Milne-Thomson, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 36 (1940).

[2]) На окружности C: $z = ae^{i\theta}$, $\bar{z} = ae^{-i\theta}$, $\bar{z} = \frac{a^2}{z}$. — *Прим. ред.*

видим, что функция w, определяемая равенством (1), является действительной на окружности C и, следовательно, $\psi = 0$. Таким образом, C есть линия тока.

Если точка z расположена вне окружности C, то точка a^2/z расположена внутри нее, и наоборот. Так как все особые точки функции $f(z)$ по предположению находятся вне окружности C, то все особые точки функции $\overline{f}(a^2/z)$ расположены внутри C; в частности, функция $\overline{f}(a^2/z)$ не имеет особенности на бесконечности, так как функция $f(z)$ не имеет особенности в нуле. Таким образом, функция w имеет те же особенности, что и функция $f(z)$, и, следовательно, w является комплексным потенциалом нового течения.

6.22. Потенциальное обтекание кругового цилиндра. Рассмотрим течение с комплексным потенциалом Uz. Если мы поместим в это течение цилиндр $|z| = a$, то в силу теоремы об окружности комплексный потенциал нового течения будет иметь вид

$$w = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right). \tag{1}$$

Следовательно, функция w является комплексным потенциалом обтекания кругового цилиндра потоком жидкости, скорость на бесконечности которого равна U и направлена вдоль отрицательной оси x. Вообще, такое течение называют обтеканием цилиндра однородным потоком. Действительно, поток испытывает возмущение только из-за присутствия цилиндра и остается однородным на большом расстоянии от него. Введенный термин оказывается удобным для наглядного представления течения.

В более общем случае если мы поместим цилиндр в однородный поток с комплексным потенциалом $Ue^{-i\alpha}z$, то в силу теоремы об окружности новое течение описывается комплексным потенциалом

$$w = Uze^{-i\alpha} + \frac{Ua^2e^{i\alpha}}{z}. \tag{2}$$

Если центр цилиндра находится в точке z_0, то с помощью простого переноса начала координат мы получим выражение для комплексного потенциала этого течения в виде

$$w = Uze^{-i\alpha} + \frac{Ua^2e^{i\alpha}}{z - z_0}. \tag{3}$$

Найдем уравнение линий тока течения, описываемого потенциалом (1). Так как $z = re^{i\theta}$, то

$$\psi = U\left(r\sin\theta - \frac{a^2}{r}\sin\theta\right) = Uy\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) = \psi_1 + \psi_2,$$

где

$$\psi_1 = Uy, \qquad \psi_2 = -\frac{a^2Uy}{x^2 + y^2}.$$

Полагая $\psi_1 = mUa$, $\psi_2 = -nUa$, мы приходим к уравнениям

$$y = ma, \qquad x^2 + \left(y - \frac{a}{2n}\right)^2 = \frac{a^2}{4n^2},$$

из которых следует, что линии тока, соответствующие функциям ψ_1 и ψ_2, являются прямыми, параллельными оси x, и окружностями, касающимися оси x в начале координат. Задавая параметрам m и n значения 0,1, 0,2, 0,3, ..., с помощью метода Рэнкина можно построить картину линий тока (см. п. 4.32).

Линии тока этого течения симметричны относительно оси y, так как вид уравнений линий тока не изменяется при изменении знака переменной x. Из соображений симметрии следует, что линии тока, лежащие над осью x, получаются отражением относительно этой оси линий тока, лежащих под осью x.

Если изменить направление скорости U на обратное, то картина течения не изменится.

Если положить $\psi = kUa$, то уравнения линий тока примут вид

$$ka = y\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right).$$

Легко видеть, что $y \to ka$ при $r \to \infty$, следовательно, прямые $y = ka$ являются асимптотами линий тока. Кроме того, если $k > 0$, то $y > ka$, т. е. линии тока приближаются к своим асимптотам сверху.

С другой стороны, рассмотрим линии тока, асимптоты которых задаются уравнениями

$$y = ka, \quad y = (k+1)a.$$

Пусть y_1 и y_2 — координаты точек пересечения этих линий с осью $x = 0$. Тогда

$$ka = y_1\left(1 - \frac{a^2}{y_1^2}\right),$$

$$(k+1)a = y_2\left(1 - \frac{a^2}{y_2^2}\right).$$

Если из первого равенства вычесть второе, то после преобразований мы найдем, что

$$\frac{a}{y_2 - y_1} = 1 + \frac{a^2}{y_1 y_2}.$$

Так как правая часть этого равенства положительна и больше единицы, то мы заключаем, что $y_2 > y_1$ и $y_2 - y_1 < a$. Но на бесконечности расстояние между этими линиями равно a. Следовательно, проходя около цилиндра, линии тока сближаются. Так как через каждое сечение трубки тока должна проходить одна и та же масса жидкости, то скорость жидкости на данной линии тока около цилиндра больше, чем скорость на бесконечности, и вследствие теоремы Бернулли давление меньше давления на бесконечности, если отсутствуют внешние силы.

6.23. Разветвляющаяся линия тока. При обтекании цилиндра контур цилиндра должен быть частью линии тока. Так как функция тока имеет вид

$$\psi = Uy\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right),$$

то мы заключаем, что контур цилиндра $r = a$ соответствует отрезку линии тока $\psi = 0$. Полная линия тока $\psi = 0$ состоит, следовательно, из линий $y = 0$ и $r = a$, т. е. окружности $r = a$ и той части оси x, которая лежит вне этой окружности (рис. 106).

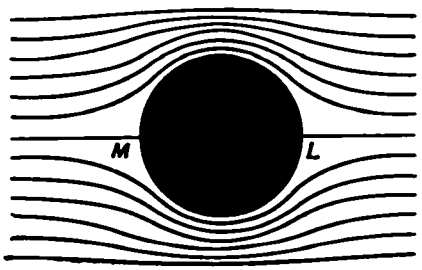


Рис. 106.

Таким образом, эта линия тока идет к цилиндру вдоль оси x, пока не достигает точки L цилиндра, затем разветвляется и идет в противоположных направлениях вдоль контура цилиндра, далее соединяется снова в точке M и вновь идет вдоль оси x.

Рассматриваемая линия тока называется *разветвляющейся линией тока*. Знание положения этой линии тока сразу дает нам возможность

качественно нарисовать картину течения, если мы проведем последовательные линии тока, сначала близкие по форме к разветвляющейся линии, а затем все менее и менее искривленные. Изображенная на рис. 106 картина течения поясняет приведенные рассуждения.

Критическая точка определяется из уравнения $dw/dz=0$, которое в данном случае имеет вид

$$U\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)=0.$$

Следовательно, критическими являются точки с координатами $z=a$ и $z=-a$, т. е. точки L и M, в которых разветвляющаяся линия тока встречает цилиндр. Мы видим, что в соответствии с общими свойствами пересекающихся линий тока (см. п. 4.60) точки L и M являются двойными точками, в которых касательные к линиям тока пересекаются под прямым углом.

6.24. Распределение давления на цилиндре. Для вычисления скорости в точке $z=ae^{i\theta}$ на цилиндре мы имеем соотношение

$$\frac{dw}{dz}=U\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)=U\left(1-e^{-2i\theta}\right)=ie^{-i\theta}\cdot 2U\sin\theta.$$

Следовательно,

$$q=2U\sin\theta. \qquad (1)$$

Таким образом, величина q^2 достигает максимума при $\theta=\pm\pi/2$; скорость в этих точках равна $2U$, т. е. удвоенной скорости течения на бесконечности.

Итак, скорость имеет наибольшую величину в точках A и B, в которых диаметр, перпендикулярный направлению течения на бесконечности, пересекает контур цилиндра (рис. 107).

Из формулы (1) следует также, что скорость в точке P на цилиндре пропорциональна площади треугольника LPM.

Если обозначить через Π давление на бесконечности, то для величины гидродинамического давления в точке на поверхности цилиндра теорема Бернулли дает нам следующее выражение:

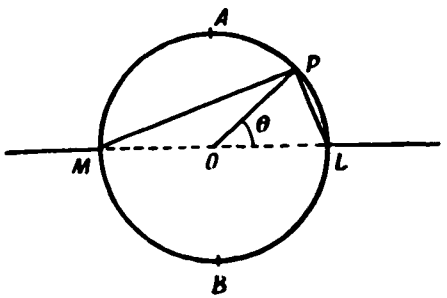


Рис. 107.

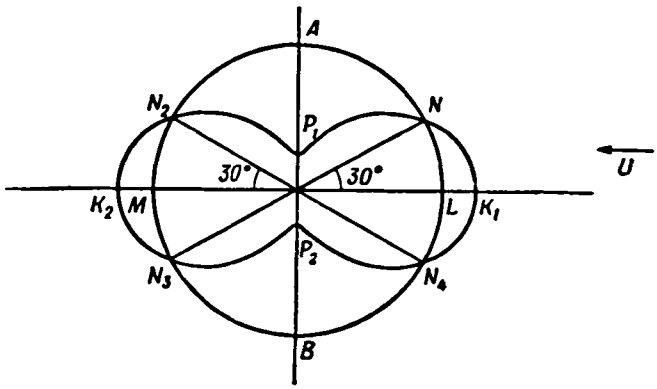
$$\frac{p}{\varrho}+2U^2\sin^2\theta=\frac{\Pi}{\varrho}+\frac{1}{2}U^2,$$

или

$$p-\Pi=\frac{1}{2}\varrho U^2(1-4\sin^2\theta).$$

Мы можем представить это распределение давления на полярной диаграмме, на которой давление в каждой точке измеряется длиной отрезка, отложенного на радиусе, проведенном через данную точку. При этом давление на бесконечности Π измеряется длиной радиуса цилиндра a. В этом случае мы видим (рис. 108), что в точках N_1, N_2, N_3, N_4, полярные углы θ которых равны 30, 150, 210, 330°, давление равно Π. На дугах N_4LN_1 и N_2MN_3 давление превосходит величину Π, причем максимум избыточного давления равен $^1/_2\varrho U^2$ и достигается в точках L и M. На дугах N_1AN_2 и N_3BN_4 давление меньше Π, и максимум отрицательного избыточного давления равен $^3/_2\varrho U^2$ и достигается в точках A и B. Диаграмма давления симметрична, давления в точках с полярными углами θ и $\theta+\pi$ равны, так что равнодействующая гидродинамических сил

давления, действующих на цилиндр, равна нулю. Эти результаты согласуются с экспериментом только на передней части цилиндра N_1LN_4; на остальных частях поверхности цилиндра действительные давления, вообще говоря, меньше приведенного на диаграмме.



Р и с. 108.

6.25. Кавитация. Обычно полагают, что жидкость не способна выдерживать отрицательное давление. При относительном движении твердой границы и жидкости последняя соприкасается всюду с границей только до тех пор, пока давление в каждой точке на границе остается положительным. Так, в точке, где давление обращается в нуль, дальнейшее небольшое уменьшение давления сделало бы давление отрицательным и должен был бы образоваться вакуум. Образование вакуумных полостей в жидкости называется *кавитацией*. Это явление часто встречается; например, его можно наблюдать около концов быстро вращающихся лопастей пропеллера.

При обтекании цилиндра кавитация может наступить в том случае, когда давление обращается в нуль в тех точках, где оно минимально, т. е. в точках A и B ($\theta = \pm \pi/2$). Условие для этого выражается равенством

$$U^2 = \frac{2}{3}\frac{\Pi}{\varrho}.$$

Если скорость U превышает эту величину, то в точках A и B на поверхности цилиндра возникает кавитация.

6.29. Применение конформного отображения. Рассмотрим конформное отображение плоскости ζ на комплексную плоскость z с помощью функции

$$z = f(\zeta). \tag{1}$$

Пусть при этом область R, внешняя по отношению к контуру C в плоскости ζ, переходит в область S, внешнюю по отношению к контуру A в плоскости z. Тогда контур C переходит в контур A (рис. 109).

Пусть течение жидкости в области R плоскости ζ задается комплексным потенциалом

$$w(\zeta) = w = \varphi + i\psi. \tag{2}$$

Тогда в соответствующих точках ζ и z, связанных соотношением (1), функция w и, следовательно, функции φ и ψ имеют те же значения.

Далее, контур C является границей и вследствие этого линией тока течения в плоскости ζ. Следовательно, $\psi = k = \text{const}$ во всех точках

контура C. Так как точки контура A отображаются в точки контура C, то $\psi = k$ во всех точках контура A. Следовательно, контур A является линией тока течения, определяемого в плоскости z функциями (1) и (2).

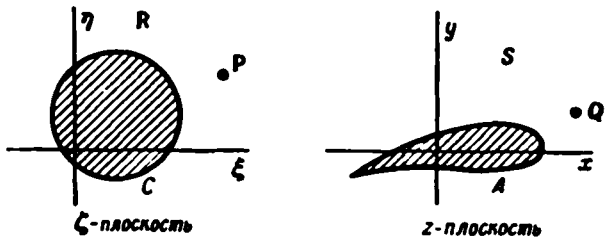


Рис. 109.

Явный вид комплексного потенциала в плоскости z можно было бы получить путем исключения ζ из формул (1) и (2), но часто предпочтительнее рассматривать ζ в качестве параметра и воздерживаться от исключения. Так, например, для определения скорости в точке Q плоскости z, соответствующей точке P плоскости ζ, мы имеем равенство

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}.$$

Следовательно,

$$u_Q - iv_Q = \frac{u_P - iv_P}{f'(\zeta)}. \tag{3}$$

Пусть через q_1 и q_2 обозначены скорости в точках P и Q соответственно. Тогда имеет место равенство

$$q_1^2 = q_2^2 \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2. \tag{4}$$

Пусть через dS_1 и dS_2 обозначены соответствующие элементы площади в точках P и Q. Так как отображение конформно, то мы знаем, что элементы dS_1 и dS_2 подобны и что отношение соответствующих длин в элементах dS_1 и dS_2 равно $|d\zeta/dz|$. Таким образом,

$$\frac{dS_1}{dS_2} = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2$$

и, следовательно,

$$q_1^2\, dS_1 = q_2^2\, dS_2,$$

отсюда следует равенство

$$\int \frac{1}{2}\varrho q_1^2\, dS_1 = \int \frac{1}{2}\varrho q_2^2\, dS_2,$$

в котором интегралы берутся по соответствующим площадям. Но эти интегралы измеряют кинетическую энергию жидкости, занимающей соответствующие площади. Таким образом, кинетическая энергия в обоих движениях одна и та же.

Теперь мы видим применение конформного отображения в гидродинамике. Если мы знаем комплексный потенциал движения жидкости, заданный выражением (2), и если мы затем отобразим плоскость ζ на плоскость z с помощью функции (1), то получим комплексный потенциал движения жидкости в плоскости z. При этом границами движения в плоскости z будут линии, связанные выражением (1) с границами движения в плоскости ζ. Линии тока в одной плоскости переходят в линии тока в другой плоскости, а скорости в соответствующих точках связаны равенством (3).

6.30. Преобразование Жуковского. Преобразование

$$z = Z + \frac{c^2}{4Z} \tag{1}$$

является одним из самых простых и наиболее важных преобразований двумерных течений жидкости. С помощью этого преобразования мы можем отобразить плоскость Z на плоскость z и наоборот.

Мы начнем с замечания, что при больших значениях $|z|$ мы имеем приближенное равенство $Z = z$, так что окрестности бесконечно удаленных точек обеих плоскостей переходят друг в друга без изменений. Таким

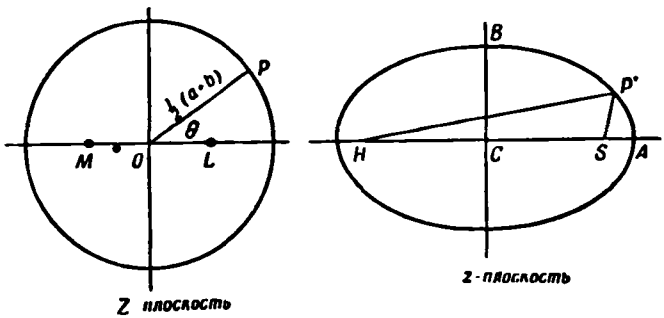


Рис. 110.

образом, однородный поток на бесконечности в плоскости z соответствует однородному потоку того же направления и той же скорости в плоскости Z.

Теперь рассмотрим, как преобразуется окружность с центром в начале координат в плоскости Z при преобразовании Жуковского.

Сначала заметим, что точкам L, M в плоскости Z с координатами $Z = {}^1/_2\, c$, $Z = -{}^1/_2\, c$ соответствуют точки S, H в плоскости z с координатами $z = c$, $z = -c$ (рис. 110).

Пусть точка P' плоскости z соответствует точке P, лежащей на окружности $|Z| = {}^1/_2\,(a+b)$ в плоскости Z; предположим, что $a^2 - b^2 = c^2$. Тогда преобразование Жуковского дает нам следующие равенства:

$$Z + \frac{c^2}{4Z} - c = z - c, \quad Z + \frac{c^2}{4Z} + c = z + c.$$

Отсюда

$$P'S = |z - c| = \left|\frac{\left(Z - \frac{1}{2}c\right)^2}{Z}\right| = \frac{2PL^2}{a+b},$$

$$P'H = |z + c| = \left|\frac{\left(Z + \frac{1}{2}c\right)^2}{Z}\right| = \frac{2PM^2}{a+b},$$

и, следовательно,

$$SP' + P'H = \frac{2(PL^2 + PM^2)}{a+b}.$$

Но так как OP является медианой треугольника MPL, то

$$PL^2 + PM^2 = 2(OL^2 + OP^2),$$

и, следовательно,

$$SP' + HP' = 2a,$$

откуда следует, что точка P' описывает эллипс, фокусы которого находятся в точках S и H, а большая ось равна $2a$.

Далее, если обозначить через B конец малой полуоси этого эллипса, а через C — его центр, то можно написать равенство

$$CB^2 = SB^2 - CS^2 = b^2.$$

Следовательно, полуоси эллипса равны соответственно a и b.

Итак, концентрические окружности с центрами в начале координат в плоскости Z отображаются в софокусные эллипсы в плоскости z.

В частности, если мы возьмем $b=0$, то окружность $|Z| = {}^1/_2 a$ перейдет [1]) в прямую линию SH, соединяющую фокусы, так как малая полуось соответствующего эллипса равна нулю и $a=c$.

Этот результат легко получить и аналитически. Для любой точки на окружности $Z = {}^1/_2 ae^{i\theta}$, следовательно, $z = {}^1/_2 ae^{i\theta} + {}^1/_2 ae^{-i\theta} = a\cos\theta$.

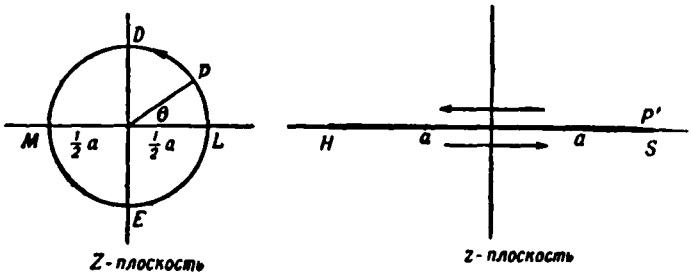


Рис. 111.

Отсюда следует, что когда угол θ принимает значения 0, $\pi/2$, π, ${}^3/_2\pi$, 2π, z принимает значения a, 0, $-a$, 0, a; когда точка P описывает полуокружность LDM, точка P' описывает прямую SH, а когда точка P завершает окружность, описывая дугу MEL, точка P' движется в обратном направлении по прямой HS (рис. 111).

Теперь рассмотрим обратное преобразование, при котором Z задается в зависимости от z. Из формулы (1) получаем

$$Z^2 - zZ + \frac{1}{4}c^2 = 0,$$

$$Z = \frac{1}{2}\left(z \pm \sqrt{z^2 - c^2}\right). \qquad (2)$$

Знак плюс перед квадратным корнем означает, что должна быть взята та ветвь функции $\sqrt{z^2-c^2}$, которая действительна и положительна, когда точка z находится на действительной положительной оси *вне* эллипса. Когда величина $|z|$ велика, из формулы (2) получаем приближенные равенства $Z=z$ или $Z=0$ в зависимости от того, положительный или отрицательный знак берется перед корнем. Следовательно, если мы выберем знак плюс перед корнем, то функция (2) будет отображать точку, *внешнюю* по отношению к эллипсу в плоскости z, на точку, *внешнюю* по отношению к окружности в плоскости Z.

Следовательно, преобразование

$$Z = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - c^2}\right), \quad c^2 = a^2 - b^2$$

отображает внешность эллипса с полуосями a и b в плоскости z на внешность окружности радиуса ${}^1/_2(a+b)$ в плоскости Z.

---

[1]) В нашем случае $dz/dZ = 0$ в точках L и M. Следовательно, мы должны предположить, что окружность стремится к этим точкам в смысле п. 5.63.

6.31. Обтекание эллиптического цилиндра. Согласно п. 6.22, комплексный потенциал обтекания цилиндра в плоскости Z потоком, скорость которого на бесконечности равна U и направлена под углом α к оси x, имеет вид

$$w = U\left(Ze^{-i\alpha} + \frac{(a+b)^2 e^{i\alpha}}{4Z}\right).$$

Внешность круга отображается на внешность эллипса в плоскости z с полуосями a и b, центром в начале координат и осью a, направленной вдоль оси x, с помощью преобразования

$$Z = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - c^2}\right), \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

Следовательно, комплексный потенциал обтекания эллиптического цилиндра имеет вид

$$w = \frac{1}{2} U\left[e^{-i\alpha}\left(z + \sqrt{z^2 - c^2}\right) + \frac{(a+b)^2 e^{i\alpha}}{z + \sqrt{z^2 - c^2}}\right].$$

Но так как

$$\left(z + \sqrt{z^2 - c^2}\right)^{-1} = \frac{1}{c^2}\left(z - \sqrt{z^2 - c^2}\right),$$

то окончательное решение задачи имеет вид

$$w = \frac{1}{2} U (a+b)\left[\frac{e^{-i\alpha}\left(z + \sqrt{z^2 - c^2}\right)}{a+b} + \frac{e^{i\alpha}\left(z - \sqrt{z^2 - c^2}\right)}{a-b}\right].$$

Однако это выражение для комплексного потенциала неудобно для детального исследования картины течения. Чтобы упростить его, мы введем эллиптические координаты.

6.32. Эллиптические координаты. Пусть

$$z = c \operatorname{ch} \zeta, \tag{1}$$

где

$$\zeta = \xi + i\eta.$$

Тогда

$$x + iy = c \operatorname{ch}(\xi + i\eta) = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta + ic \operatorname{sh} \xi \sin \eta,$$

откуда следует, что

$$x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta \tag{2}$$

и, следовательно,

$$\frac{x^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \operatorname{sh}^2 \xi} = 1, \tag{3}$$

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} = 1. \tag{4}$$

Из уравнения (3) видно, что если ξ имеет постоянное значение ξ_0, то точка с координатами (x, y) лежит на эллипсе, большая и малая полуоси которого a и b равны соответственно

$$a = c \operatorname{ch} \xi_0, \quad b = c \operatorname{sh} \xi_0, \tag{5}$$

и, следовательно,

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Эллипсы, соответствующие постоянным значениям[1]) ξ, образуют семейство софокусных эллипсов, расстояние между фокусами которых

[1]) В дальнейшем мы будем предполагать, что каждому значению ξ_0 соответствует некоторый эллипс, и будем считать, что $0 < \xi \leqslant \infty$, $0 \leqslant \eta \leqslant 2\pi$. Можно было бы считать, что $\xi > 0$ для $y > 0$ и $\xi < 0$ для $y < 0$. Тогда соответствующие неравенства имели бы вид $-\infty < \xi < +\infty$, $0 \leqslant \eta \leqslant \pi$.

равно $2c$. Кривые (4), соответствующие постоянным значениям η, являются гиперболами, софокусными друг с другом и с эллипсами.

Далее, через любую точку плоскости мы можем провести два конических софокусных сечения, одно из которых является эллипсом, а другое — гиперболой. На эллипсе величина ξ сохраняет постоянное значение, а на гиперболе — величина η. Если мы знаем эти значения ξ и η, то мы можем провести конические сечения, а их пересечение фиксирует нам точку. Поэтому параметры ξ и η называются *эллиптическими координатами*.

Рассмотрим подробнее эллипс $\xi = \xi_0$. Из формулы (3) мы видим, что η является эксцентрическим углом точки (x, y) на эллипсе. Геометрический смысл сказанного ясен из рис. 112.

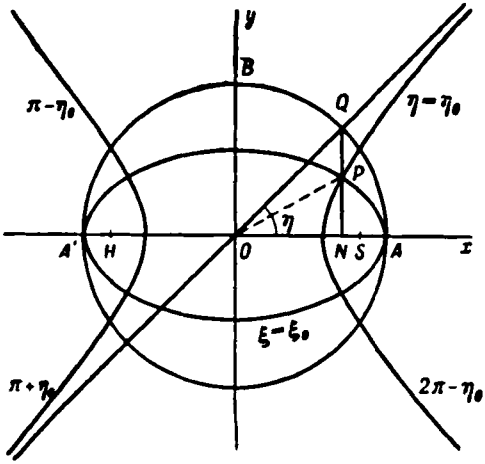


Рис. 112.

На этом рисунке AA' является главной осью эллипса $\xi = \xi_0$, а точки S и H являются его фокусами. На рис. 112 показана также софокусная гипербола, пересекающая эллипс в точке P. На AA', как на диаметре, построена вспомогательная окружность. Ордината PN пересекает эту окружность в точке Q. Угол $QON = \eta$.

Полуоси эллипса суть a и b, поэтому сравнение выражений (2) и (5) показывает, что η есть *эксцентрический* угол точки P. Но

$$x = ON = OQ \cos QON = a \cos QON,$$

и, следовательно, имеет место необходимый результат.

Мы можем теперь видеть, что если $\eta = \eta_0$ на ветви гиперболы, лежащей в первом квадранте, то на ветвях той же самой гиперболы, лежащих во втором, третьем и четвертом квадрантах, η принимает значения соответственно $\pi - \eta_0$, $\pi + \eta_0$, $2\pi - \eta_0$.

Из формулы (4) видно также, что прямая

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \eta,$$

является асимптотой для гиперболы, проходящей через точку P. Эта асимптота совпадает с радиусом OQ.

Чтобы закончить описание эллипса $\xi = \xi_0$, рассмотрим уравнения (5). Складывая и вычитая эти уравнения, получаем равенства

$$\begin{aligned} a + b &= c(\operatorname{ch} \xi_0 + \operatorname{sh} \xi_0) = ce^{\xi_0}, \\ a - b &= c(\operatorname{ch} \xi_0 - \operatorname{sh} \xi_0) = ce^{-\xi_0}. \end{aligned} \tag{6}$$

Разделив первое равенство (6) на второе, найдем, что

$$e^{2\xi_0} = \frac{a+b}{a-b},$$

и, следовательно,

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{a+b}{a-b}.$$

Это равенство определяет параметр ξ_0 в зависимости от полуосей эллипса a и b.

Наконец, заметим, что фокусы $(c, 0)$, $(-c, 0)$ соответствуют значениям $\xi = 0$, $\eta = 0$ и $\xi = 0$, $\eta = \pi$. Это непосредственно следует из формул (2).

6.33. Применение эллиптических координат к изучению обтекания эллипса. Комплексный потенциал обтекания эллипса был найден в п. 6.31. Если мы положим $z = c \operatorname{ch} \zeta$, то получим $\sqrt{z^2 - c^2} = c \operatorname{sh} \zeta$ и отсюда найдем равенства

$$z + \sqrt{z^2 - c^2} = c(\operatorname{ch} \zeta + \operatorname{sh} \zeta) = ce^{\zeta},$$

$$z - \sqrt{z^2 - c^2} = c(\operatorname{ch} \zeta - \operatorname{sh} \zeta) = ce^{-\zeta}.$$

Кроме того, из формулы (6) п. 6.32 следует, что на эллипсе $\xi = \xi_0$ имеют место соотношения

$$a + b = ce^{\xi_0}, \quad a - b = ce^{-\xi_0}.$$

Следовательно,

$$w = \frac{1}{2} U(a + b)\left[e^{-i\alpha + \zeta - \xi_0} + e^{i\alpha - \zeta + \xi_0}\right],$$

или

$$w = U(a + b) \operatorname{ch}(\zeta - \xi_0 - i\alpha). \tag{1}$$

Мы получили выражение для комплексного потенциала обтекания эллипса в эллиптических координатах.

Если положить $\xi = \xi_0$, то получим соотношение

$$w = U(a + b) \operatorname{ch} i(\eta - \alpha) = U(a + b) \cos(\eta - \alpha),$$

т. е. $\psi = 0$. Таким образом, эллипс $\xi = \xi_0$ образует часть линии тока $\psi = 0$, которая является, следовательно, разветвляющейся линией тока.

Из равенства (1) следует, что функция тока имеет вид

$$\psi = U(a + b) \operatorname{sh}(\xi - \xi_0) \sin(\eta - \alpha).$$

Отсюда следует, что вся разветвляющаяся линия тока задается уравнениями

$$\operatorname{sh}(\xi - \xi_0) = 0 \quad \text{и} \quad \sin(\eta - \alpha) = 0,$$

т. е. уравнениями

$$\xi = \xi_0, \quad \eta = \alpha, \quad \eta = \alpha + \pi.$$

Последние значения η соответствуют ветвям гиперболы, конфокальной с эллипсом, и, следовательно, пересекающей эллипс под прямым углом.

Линия, параллельная направлению потока на бесконечности и проходящая через точку O, является асимптотой к этой гиперболе.

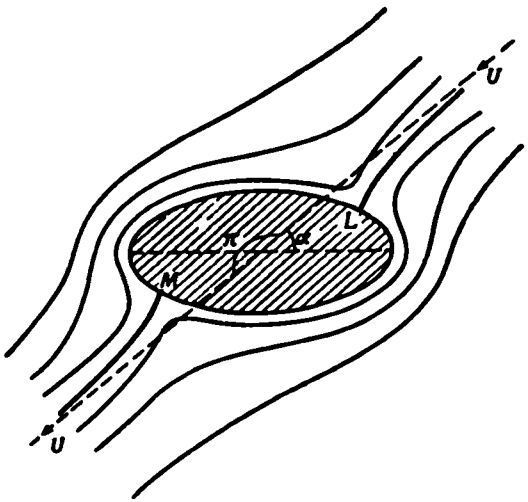


Рис. 113.

Общий вид линий тока исследуемого течения показан на рис. 113. Асимптота для разветвляющейся линии тока проведена штриховой линией. Разветвляющаяся линия тока пересекает эллипс в точках M и L, которые являются, следовательно, критическими точками. В этих точках M и L на поверхности эллиптического цилиндра действует пара сил, стремящаяся поставить цилиндр поперек потока. Мы вычислим величину этой пары сил в п. 6.42.

Для определения скорости мы имеем формулу

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \frac{U(a+b) \operatorname{sh}(\zeta - \xi_0 - i\alpha)}{c \operatorname{sh} \zeta},$$

и, следовательно, в критических точках

$$\zeta - \xi_0 - i\alpha = 0 \text{ или } i\pi,$$

откуда следует, что равенства $\xi = \xi_0$, $\eta = \alpha$ или $\alpha + \pi$ дают нам точки L и M, найденные уже из уравнения разветвляющейся линии тока.

Кроме того,

$$q^2 = \frac{U(a+b)\operatorname{sh}(\zeta - \xi_0 - i\alpha)}{c \operatorname{sh}\zeta} \cdot \frac{U(a+b)\operatorname{sh}(\bar{\zeta} - \xi_0 + i\alpha)}{c \operatorname{sh}\bar{\zeta}} =$$

$$= \frac{U^2(a+b)^2}{c^2} \cdot \frac{\operatorname{ch}(\zeta + \bar{\zeta} - 2\xi_0) - \operatorname{ch}(\zeta - \bar{\zeta} - 2i\alpha)}{\operatorname{ch}(\zeta + \bar{\zeta}) - \operatorname{ch}(\zeta - \bar{\zeta})} =$$

$$= \frac{U^2(a+b)}{a-b} \cdot \frac{\operatorname{ch} 2(\xi - \xi_0) - \cos 2(\eta - \alpha)}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta} =$$

$$= \frac{U^2(a+b)}{a-b} \cdot \frac{\operatorname{sh}^2(\xi - \xi_0) + \sin^2(\eta - \alpha)}{\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta}.$$

Так как $\xi = 0$ только в фокусе эллипса, отсюда следует, что знаменатель последнего выражения не может обращаться в нуль и, следовательно, скорость жидкости нигде не обращается в бесконечность.

Распределение давления по поверхности эллиптического цилиндра находится по уравнению Бернулли, которое имеет следующий вид:

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2} \frac{U^2(a+b)}{a-b} \frac{1 - \cos 2(\eta - \alpha)}{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta} = \frac{\Pi}{\varrho} + \frac{1}{2} U^2, \tag{2}$$

где через Π обозначено давление на бесконечности. Условие $dp/d\eta = 0$ дает соотношение для определения точек, в которых давление достигает максимума и минимума, а именно

$$\sin 2(\eta - \alpha) \operatorname{ch} 2\xi_0 - \sin 2\eta + \sin 2\alpha = 0,$$

или

$$\sin(\eta - \alpha)\{\cos(\eta - \alpha) \operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos(\eta + \alpha)\} = 0.$$

Корни уравнения $\sin(\eta - \alpha) = 0$ определяют координаты точек, в которых давление максимально. Точки, в которых давление минимально, находятся, следовательно, из уравнения

$$\frac{\cos(\eta + \alpha)}{\cos(\eta - \alpha)} = \operatorname{ch} 2\xi_0.$$

Отсюда с использованием результатов п. 6.32 получаем

$$\operatorname{tg}\eta \operatorname{tg}\alpha = \frac{1 - \operatorname{ch} 2\xi_0}{1 + \operatorname{ch} 2\xi_0} = -\operatorname{th}^2 \xi_0 = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Если через P обозначить точку, определяемую этим уравнением, то последний результат означает, что касательная к поверхности эллипса в точке P параллельна нормали к поверхности в критической точке.

Если значение $\operatorname{tg}\eta = -b^2/a^2 \operatorname{ctg}\alpha$ подставить в уравнение (2), то после некоторых преобразований получим величину минимального давления

$$\Pi + \frac{1}{2}\varrho U^2 \left[1 - (a+b)^2 \left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)\right].$$

Условие отсутствия кавитации, следовательно, имеет вид

$$\Pi > \frac{1}{2}\varrho U^2 \left[(a+b)^2 \left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right) - 1\right].$$

6.34. Обтекание пластины. Если положить $b = 0$, то рассматриваемый эллипс выродится в линию, соединяющую фокусы эллипса $\xi_0 = 0$. В этом

случае $a=c$, и мы получаем комплексный потенциал обтекания пластины, наклоненной под углом α к направленню потока на бесконечности, в виде $w=Ua\operatorname{ch}(\zeta-i\alpha)$. Критические точки и в этом случае лежат на гиперболических ветвях линии тока (рис. 114)

$$\eta=\alpha, \quad \eta=\pi+\alpha.$$

На передней и задней кромках пластины скорость обращается в бесконечность, так что найденное решение не может полностью представить реальную картину обтекания пластины.

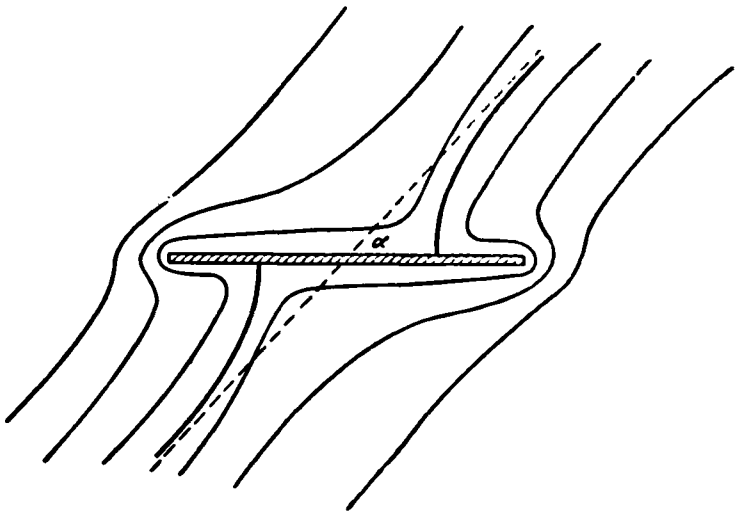


Рис. 114.

Если перейти к переменной z, то мы получим

$$w=U\left(z\cos\alpha-i\sqrt{z^2-a^2}\sin\alpha\right).$$

Если пластина перпендикулярна направлению потока на бесконечности, то комплексный потенциал течения имеет вид

$$w=-iU\sqrt{z^2-a^2}.$$

6.35. Общий метод. Рассмотрим цилиндр с поперечным сечением C, помещенный в поток, комплексный потенциал которого равен $Uze^{-i\alpha}$. Аналогично тому, как были введены эллиптические координаты, введем функцию

$$z=f(\zeta), \tag{1}$$

определяющую систему координат (ξ, η), в которой кривая C задается уравнением $\xi=\xi_0$. Тогда $\zeta=2\xi_0-\zeta$ на кривой C. Таким образом, комплексный потенциал

$$w=F(\zeta)+\overline{F}(2\xi_0-\zeta) \tag{2}$$

на кривой C принимает действительные значения. Следовательно, кривая C является линией тока $\psi=0$.

Далее, комплексный потенциал равномерного потока можно представить в виде

$$Uze^{-i\alpha}=Uf(\zeta)e^{-i\alpha}=F_1(\zeta)+F_2(\zeta). \tag{3}$$

Мы будем предполагать, что функция $F_2(\zeta)$ содержит лишь члены, обращающиеся в нуль на бесконечности. Если мы добьемся, кроме того, чтобы функция $\overline{F}_1(2\xi_0-\zeta)$, сопряженная функции F_1 из последнего равенства, обращалась в нуль на бесконечности, то искомый потенциал обтекания будет иметь следующий вид:

$$w=F_1(\zeta)+\overline{F}_1(2\xi_0-\zeta). \tag{4}$$

Так, например, для эллипса мы имеем $z=c\operatorname{ch}\zeta$, тогда из равенства (3) получаем

$$F_1(\zeta)=\frac{1}{2}Uce^{\zeta-i\alpha}, \quad F_2(\zeta)=\frac{1}{2}Uce^{-\zeta-i\alpha}.$$

Следовательно,

$$w=\frac{1}{2}Uce^{\zeta-i\alpha}+\frac{1}{2}Uce^{2\xi_0-\zeta+i\alpha},$$

что совпадает с равенством (1) п. 6.33.

Чтобы определить искомую систему координат, предположим, что кривая C задана в параметрическом виде уравнениями $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$. Возьмем вместо параметра t переменную $i(\xi_0-\zeta)$, тогда получим соотношение

$$z=f_1(i\xi_0-i\zeta)+if_2(i\xi_0-i\zeta). \tag{5}$$

которое обладает требуемыми свойствами.

Так, например, в случае эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, и мы приходим к соотношению

$$z=(a\operatorname{ch}\xi_0-b\operatorname{sh}\xi_0)\operatorname{ch}\zeta+(b\operatorname{ch}\xi_0-a\operatorname{sh}\xi_0)\operatorname{sh}\zeta,$$

которое после подстановки $a=c\operatorname{ch}\xi_0$, $b=c\operatorname{sh}\xi_0$ переходит в известное соотношение для эллиптических координат.

Заметим, что содержание этого пункта представляет собой общий метод решения рассматриваемых задач. Частный вид выражения для системы координат, использованного здесь для иллюстрации общих положений, нисколько не ограничивает общности данного метода.

6.41. Теорема Блазиуса[1]. Пусть неподвижный цилиндр помещен в установившееся безвихревое течение жидкости. Обозначим через X, Y проекции главного вектора сил давления, действующих на цилиндр, на оси некоторой системы координат, а через M — главный момент этих сил относительно начала координат. Тогда, если пренебречь внешними силами, можно записать равенства

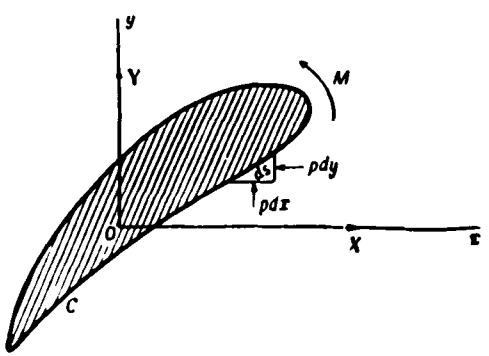


Рис. 115.

$$X-iY=\frac{1}{2}i\varrho\int_{(C)}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2dz,$$

$$M=Re\left\{-\frac{1}{2}\varrho\int_{(C)}z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2dz\right\},$$

где w — комплексный потенциал течения, ϱ — плотность жидкости, а интегралы берутся вдоль контура цилиндра.

Доказательство. В точке P на элемент дуги ds действуют силы $dX=-p\,dy$, $dY=p\,dx$, которые создают момент $dM=p(x\,dx+y\,dy)$ (рис. 115).

[1]) В русской литературе эту теорему называют теоремой Чаплыгина — Блазиуса. (Эта теорема была доказана С. А. Чаплыгиным в 1910 г. независимо от Блазиуса.) — *Прим. перев.*

Таким образом,

$$d(X-iY) = -ip\,d\bar{z}, \tag{1}$$

$$dM = Re\{pz\,d\bar{z}\}. \tag{2}$$

Из уравнения для давления имеем

$$p = a - \frac{1}{2}\varrho q^2, \tag{3}$$

где a — некоторая постоянная.

Так как постоянное давление не дает результирующей силы, мы можем принять, что

$$p = -\frac{1}{2}\varrho q^2 = -\frac{1}{2}\varrho \frac{dw}{dz}\cdot\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}},$$

откуда следует, что

$$d(X-iY) = \frac{1}{2} i\varrho \frac{dw}{dz} d\bar{w}, \quad dM = Re\left\{-\frac{1}{2}\varrho z \frac{dw}{dz} d\bar{w}\right\}$$

Но $\psi = 0$ на контуре C и, следовательно, $d\bar{w} = dw$, так что

$$d(X-iY) = \frac{1}{2} i\varrho \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz,$$

$$dM = Re\left\{-\frac{1}{2}\varrho z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz\right\}.$$

Проинтегрировав последние два равенства вдоль контура C, получим искомое выражение для силы и момента, что и требовалось доказать.

Иногда оказывается полезным рассматривать равенство

$$M + iN = -\frac{1}{2}\varrho \int_{(C)} z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz,$$

где N — мнимая часть интеграла.

Если движение жидкости неустановившееся, то уравнение для давления содержит член $\varrho\,\partial\varphi/\partial t$ и, следовательно, к выражениям для силы и момента мы должны добавить члены

$$-\int_{(C)} i\varrho \frac{\partial\varphi}{\partial t} d\bar{z}, \quad \int_{(C)} \varrho z \frac{\partial\varphi}{\partial t} d\bar{z}.$$

Однако на цилиндре функция ψ принимает постоянное значение $c(t)$. Следовательно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\bar{w}}{\partial t} + ic'(t).$$

Таким образом, в полученное выражение для $X - iY$ и $M + iN$ надо добавить соответственно члены

$$-i\varrho \frac{\partial}{\partial t}\int \bar{w}\,d\bar{z} \quad \text{и} \quad \varrho \frac{\partial}{\partial t}\int [\bar{w} + ic(t)]\, z\,d\bar{z}.$$

В только что сформулированной теореме Блазиуса все интегралы брались по контуру цилиндра. Этот контур может быть расширен произвольным образом, если только он не охватывает при этом новых особых точек подинтегральной функции. В гидродинамике такие особые точки встречаются в тех случаях, когда в жидкости имеются источники и стоки. Однако с этими явлениями мы будем иметь дело позже, а теперь рассмотрим несколько простых примеров на применение теоремы к различным случаям обтекания тел.

Пусть цилиндр движется с постоянной скоростью в покоящейся жидкости. Тогда силы можно вычислять по теореме Блазиуса, так как *динамические* условия не изменяются, если на это движение наложить *постоянную* скорость, равную и противоположно направленную скорости цилиндра. При этом цилиндр будет находиться в покое, а жидкость будет обтекать цилиндр.

Мы можем, кроме того, получить формулы для силы и момента, выраженные через функцию ψ, которая существует, если данное движение жидкости вихревое. В самом деле, с помощью формулы (1) п. 5.33 мы получаем

$$u - iv = -\frac{\partial \psi}{\partial y} - i\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2i\frac{\partial \psi}{\partial z}. \tag{4}$$

Следовательно, положив в выражении (3) $a = 0$, находим

$$p\,d\bar{z} = -2\varrho\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}d\bar{z}. \tag{5}$$

Но $\psi = \psi(z, \bar{z})$ — постоянна на контуре C, поэтому

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}dz + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}d\bar{z} = 0 \quad \text{на контуре } C. \tag{6}$$

Комбинируя равенства (1), (2), (5) и (6), мы находим равенства

$$X - iY = -2i\varrho\int_{(C)}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 dz, \quad M = Re\left\{2\varrho\int_{(C)} z\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 dz\right\}. \tag{7}$$

Далее, заметим, что хотя ψ зависит от z и $\bar{z}$, на контуре C переменная z является функцией z, и, следовательно, после исключения $\bar{z}$ в равенствах (7) мы можем использовать теорему о вычетах и теорему об изменении контура интегрирования.

6.42. Действие равномерного потока на эллиптический цилиндр. Возвращаясь к п. 6.23, мы видим, что комплексный потенциал обтекания эллиптического цилиндра имеет вид

$$w = cA\,\mathrm{ch}\,(\zeta - \zeta_0); \qquad z = c\,\mathrm{ch}\,\zeta,$$

где

$$cA = U(a + b), \quad \zeta_0 = \zeta_0 + i\alpha.$$

Силу и момент, действующие на цилиндр, можно вычислить по теореме Блазиуса. Мы имеем

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz} = \frac{A\,\mathrm{sh}\,(\zeta - \zeta_0)}{\mathrm{sh}\,\zeta} = A\left(\mathrm{ch}\,\zeta_0 - \mathrm{sh}\,\zeta_0\frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}}\right).$$

При вычислении силы и момента мы будем брать интегралы по окружности, охватывающей цилиндр, радиус которой настолько велик, что функция dw/dz может быть разложена в сходящийся ряд по степеням $1/z$. Тогда интеграл по замкнутому контуру будет содержать только коэффициенты при членах $1/z$ разложения подинтегрального выражения (п. 5.57).

В нашем случае

$$\frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}} = 1 + \frac{c^2}{2z^2} + \ldots.$$

Следовательно,

$$\frac{dw}{dz} = A\left(e^{-\zeta_0} - \frac{c^2\,\mathrm{sh}\,\zeta_0}{2z^2} + \ldots\right),$$

откуда

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = A^2\left(e^{-2\zeta_0} - \frac{c^2 e^{-\zeta_0}\operatorname{sh}\zeta_0}{z^2} + \ldots\right).$$

Отсюда получаем $X - iY = 0$ или $X = 0$, $Y = 0$, а

$$M + iN = -\frac{1}{2}\varrho \cdot 2\pi i\,(-c^2A^2e^{-\zeta_0}\operatorname{sh}\zeta_0) = \frac{1}{2}\,i\pi\varrho c^2A^2\,(1 - e^{-2\zeta_0}) =$$

$$= \frac{1}{2}\,i\pi\varrho c^2A^2\,[1 - e^{-2\zeta_0}(\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha)].$$

Следовательно, $M = -\pi\varrho c^2A^2e^{-2\zeta_0}\sin\alpha\cos\alpha$.

Далее, из п. 6.33 получим равенство

$$A^2 = \frac{U^2(a+b)^2}{c^2} = U^2\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = U^2e^{2\zeta_0}.$$

Итак,

$$M = -\pi\varrho\,(a^2 - b^2)\,U^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Знак минус означает, что на цилиндр действует пара сил, которая стремится поставить его поперек потока. Из рис. 113 видно, откуда появляется эта пара сил: критические точки, или точки максимума давления, расположены на контуре несимметрично.

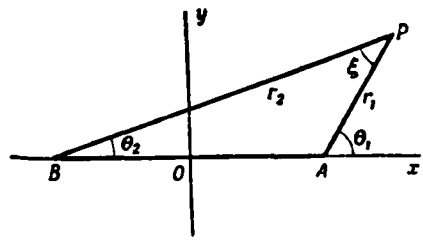
Полученный результат является характерным для любого продолговатого тела, помещенного в поток. В частности, он дает объяснение поведения лодки, дрейфующей по течению.

Заметим, что момент пары сил обращается в нуль, если $a = b$, т. е. в случае кругового цилиндра. Этого можно было ожидать заранее.

Момент пары сил обращается в нуль также и при $\alpha = 0$, т. е. в случае, если большая ось эллипса параллельна потоку на бесконечности. Небольшое отклонение от такой ориентации большой оси вызывает возмущающую пару сил, момент которой будет возрастать до тех пор, пока α не станет равным $\pi/4$. Таким образом, эллиптический цилиндр с большой осью, параллельной направлению потока на бесконечности, неустойчив. Это явление хорошо иллюстрируется на примере корабля, который требует постоянного внимания рулевого для поддержания заданного курса.

Пара сил обращается в нуль, когда $\alpha = \pi/2$, т. е. когда цилиндр расположен поперек потока. Однако это положение цилиндра устойчиво, так как отклонение от него вызывает восстанавливающую пару сил, момент которой возрастает с отклонением.

6.50. Коаксиальные координаты. Возьмем точки A и B с координатами соответственно $(c, 0)$ и $(-c, 0)$. Выберем ось x за начало отсчета углов, а точки A и B в качестве полюсов. Тогда координатами произвольной точки P будут соответственно (r_1, θ_1) и (r_2, θ_2). Числа r_1 и r_2 называются *биполярными координатами* точки P (рис. 116).



Р и с. 116.

Если точка P описывает некоторую окружность, проходящую через точки A и B, то $\angle APB = \theta_1 - \theta_2$ остается постоянным. Такие окружности образуют коаксиальное семейство. Семейство окружностей, ортогональное к указанному, имеет точки A и B предельными точками. Когда точка P описывает некоторую окружность этого семейства, величина r_2/r_1 остается постоянной.

Введем обозначения

$$\xi = \theta_1 - \theta_2, \quad \eta = \ln \frac{r_2}{r_1},$$

тогда

$$\eta - i\xi = \ln (r_2 e^{i\theta_2}) - \ln (r_1 e^{i\theta_1}),$$

таким образом,

$$e^{\eta - i\xi} = \frac{z+c}{z-c}.$$

Если положить $\zeta = \xi + i\eta$, то из последнего равенства следует

$$e^{-i\zeta} = \frac{z+c}{z-c}. \tag{1}$$

Положение точки P определено, если мы знаем, в каком квадранте она находится, и известны постоянные ξ и η на окружностях, проходящих через эту точку. Таким образом, мы можем назвать величины ξ, η, определяемые формулой (1), *коаксиальными координатами* [1]) аналогично тому, как мы ввели эллиптические координаты.

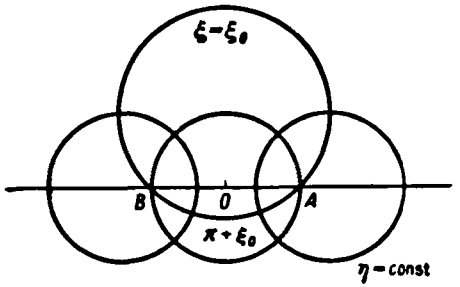


Рис. 117.

Из равенства (1) мы получим

$$\frac{z}{c} = \frac{e^{-i\zeta}+1}{e^{-i\zeta}-1} = i \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\zeta,$$

так что

$$z = ic \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\zeta. \tag{2}$$

Это равенство аналогично выражению, определяющему эллиптические координаты.

Кривая $\xi = \text{const}$ является окружностью с центром в точке $(0, \operatorname{ctg}\xi)$ и радиусом, равным $c \operatorname{cosec}\xi$. Кривая $\eta = \text{const}$ является окружностью с центром в точке $(c \operatorname{cth}\eta, 0)$ и радиусом, равным $c \operatorname{cth}\eta$.

Так как $\bar{z} = -ic \operatorname{ctg} {}^1\!/_2 \bar{\zeta}$, то мы находим

$$\frac{x}{c} = \frac{i}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\zeta - \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\bar{\zeta}\right), \quad \frac{y}{c} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\zeta + \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\bar{\zeta}\right).$$

Но так как имеет место равенство

$$2 \sin\frac{1}{2}\zeta \sin\frac{1}{2}\bar{\zeta} = \cos i\eta - \cos\xi = \operatorname{ch}\eta - \cos\xi,$$

то мы заключаем, что

$$\frac{x}{c} = \frac{\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}, \quad \frac{y}{c} = \frac{\sin\xi}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}.$$

На действительной оси $\xi = 0$, за исключением точек, расположенных между A и B, для которых $\xi = \pi$.

Заметим, что $\xi < \pi$, когда $y > 0$. Кроме того, если $\xi = \xi_0$ на дуге окружности, проходящей через точки A и B, для которой $y > 0$, то на дуге той же самой окружности, для которой $y < 0$, $\xi = \xi_0 + \pi$ (рис. 117).

Если точка P уходит в бесконечность, то прямые PA и PB стремятся стать параллельными, причем $PA = PB$. Таким образом, $\eta \to 0$ при $P \to \infty$, а $\xi \to 0$ или $\xi \to 2\pi$ соответственно для $y > 0$ и $y < 0$.

В заключение заметим, что в точках A и B величина η обращается в бесконечность.

[1]) Эти координаты называют также *биполярными координатами.—Прим. перев.*

6.51. Обтекание впадины или выступа дна. Комплексный потенциал

$$w = U\frac{2ci}{n}\operatorname{ctg}\frac{\zeta}{n}, \quad z = ic\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\zeta,$$

где n — действительная величина, описывает течение с линией тока $\psi = 0$, соответствующей $\xi = 0$ или $\xi = \frac{1}{2}n\pi$, так как в обоих случаях функция w принимает действительные значения.

Таким образом, функция w описывает обтекание границы, которая состоит из дуги окружности, проходящей через точки A и B, на которой $\xi = {}^1/_2 n\pi$, и части оси x, лежащей вне этой дуги (рис. 118).

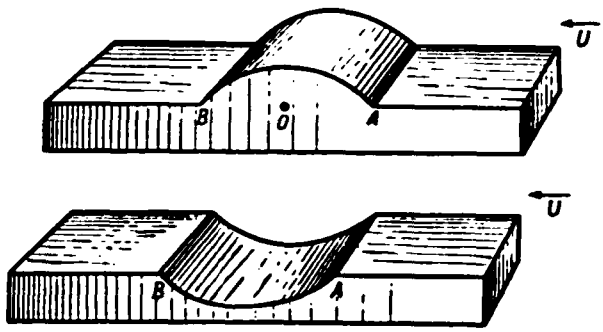


Рис. 118.

Для определения скорости течения мы имеем формулу

$$u - iv = -\frac{dw}{dz} = -\frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz} = -\frac{4}{n^2}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\zeta}{\sin\frac{\zeta}{n}}\right)^2 U.$$

На бесконечности $\zeta \to 0$ и $u - iv \to -U$, т. е. на бесконечности имеется однородный поток. Далее,

$$q^2 = \frac{16U^2}{n^4}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\zeta\sin\frac{1}{2}\bar{\zeta}}{\sin\frac{\zeta}{n}\sin\frac{\bar{\zeta}}{n}}\right)^2 = \frac{16U^2}{n^4}\left(\frac{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}{\operatorname{ch}\frac{2\eta}{n} - \cos\frac{2\xi}{n}}\right)^2.$$

Когда мы подходим к точке A, $\eta \to \infty$; в этом случае имеет место приближенное равенство

$$q^2 = \frac{16U^2}{n^4}e^{2\left(1-\frac{2}{n}\right)\eta}.$$

Таким образом, если $n < 2$, то $q \to 0$, а если $n > 2$, то $q \to \infty$, когда $\eta \to \infty$.

Если $n < 2$, то мы имеем обтекание выступа дна, причем скорость жидкости во всех точках конечна. В частности, если $n = 1$, мы имеем обтекание выступа, образованного полуокружностью, и задача становится аналогичной задаче обтекания кругового цилиндра (см. п. 6.22).

Если $n = 3$, то мы имеем обтекание впадины на дне, образованной половиной окружности, причем в точках A и B скорость обращается в бесконечность. На дне этой впадины $\eta = 0$, $\xi = 3\pi/2$. Следовательно, скорость в этой точке равна ${}^2/_3 U$.

Отметим также, что при $n < 2$ найденный комплексный потенциал описывает обтекание цилиндра, поперечное сечение которого состоит из двух

равных круговых сегментов, построенных на общем отрезке, так как это течение симметрично относительно общего отрезка сегментов.

На рис. 119 показаны два таких поперечных сечения. Круговой цилиндр является частным случаем этих цилиндров.

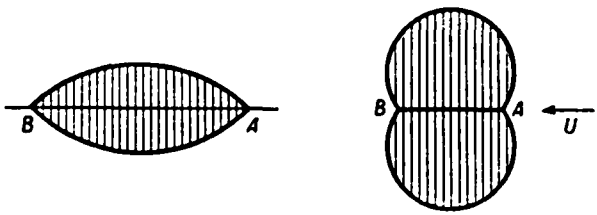


Рис. 119.

Если мы наложим на течение однородный поток со скоростью U ($w = -Uz$), направленной слева направо, то получим комплексный потенциал

$$w = U\frac{2ci}{n}\operatorname{ctg}\frac{\zeta}{n} - Uic\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\zeta,$$

который описывает течение жидкости при движении цилиндра с заданным поперечным сечением в направлении BA со скоростью U.

Комплексный потенциал

$$w = \frac{2Uc}{n}\left(i\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\zeta}{n} + \sin\alpha\operatorname{cosec}\frac{\zeta}{n}\right)$$

задает обтекание описанных выше твердых тел потоком со скоростью на бесконечности, равной $(-U\cos\alpha, -U\sin\alpha)$. В самом деле, при $\xi = \pm n\pi/2$ величина w обращается в действительную функцию, при этом $\psi = 0$. С другой стороны, при $\zeta \to 0$ имеем

$$-\frac{dw}{dz} \to -U\cos\alpha + iU\sin\alpha.$$

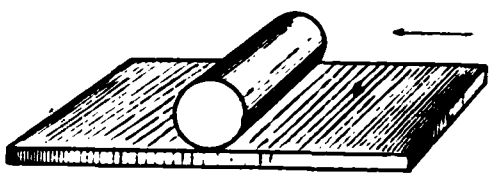


Рис. 120.

6.52. Обтекание цилиндрического тела. Потенциал обтекания выступа на дне, полученный в предыдущем пункте, может быть использован для описания обтекания цилиндрического тела, лежащего на дне, если устремить точку A к точке B (рис. 120).

Радиус a окружности, дуга AB которой стягивает угол ξ, определяется равенством

$$2a = \frac{2c}{\sin\xi}.$$

В случае выступа $\xi = n\pi/2$ и, следовательно,

$$a = \frac{c}{\sin\frac{n\pi}{2}}, \tag{1}$$

$$z = ic\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\zeta, \tag{2}$$

$$w = \frac{2cUi}{n}\operatorname{ctg}\frac{\zeta}{n}. \tag{3}$$

Теперь если точку A устремить к точке B, то $c \to 0$. Тогда из формулы (1) следует, что $n \to 0$, а из формулы (2) следует, что $\zeta \to 0$.

Поэтому можно предположить, что величина c является малой, и равенства (1) и (2) записать в виде

$$a=\frac{2c}{n\pi},\quad z=-\frac{2ic}{\zeta}.$$

Подставив эти равенства в формулу (3), мы получим комплексный потенциал обтекания цилиндрического тела радиуса a, лежащего на дне, в следующем виде:

$$w=ia\pi U\operatorname{ctg}\frac{ia\pi}{z}=a\pi U\operatorname{cth}\frac{a\pi}{z}.$$

Этот результат можно проверить следующим образом. Из формулы

$$w=\varphi+i\psi=a\pi U\operatorname{cth}\left(\frac{a\pi x}{r^2}-\frac{a\pi iy}{r^2}\right),\quad r^2=x^2+y^2$$

видно, что функция w принимает действительные значения при $y=0$, т. е. линия $y=0$ является линией тока $\psi=0$. Функция w принимает действительные значения также и при $a\pi y/r^2=\pi/2$.

Таким образом, линия тока $|z|$ состоит из действительной оси $y=0$ и окружности $x^2+y^2=2ay$.

Далее, заметим, что при больших значениях $|z|$ комплексный потенциал имеет вид

$$w=a\pi U\frac{z}{a\pi}=Uz.$$

Следовательно, на бесконечности комплексный потенциал w определяет однородный поток, параллельный действительной оси и направленный слева направо.

Скорость жидкости можно вычислить следующим образом:

$$q^2=\frac{dw}{dz}\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}=a^2\pi^2U^2\frac{a^2\pi^2}{z^2\bar{z}^2}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{a\pi}{z}}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{a\pi}{\bar{z}}}=$$

$$=\frac{a^4\pi^4U^2}{r^4}\left[\frac{2}{\operatorname{ch}\left(\frac{a\pi}{z}+\frac{a\pi}{\bar{z}}\right)-\operatorname{ch}\left(\frac{a\pi}{z}-\frac{a\pi}{\bar{z}}\right)}\right]^2=$$

$$=\frac{a^4\pi^4U^2}{r^4}\left[\frac{2}{\operatorname{ch}\frac{2a\pi x}{r^2}-\cos\frac{2a\pi y}{r^2}}\right]^2.$$

На поверхности цилиндра $r^2=2ay$ и, следовательно,

$$q^2=\frac{a^2\pi^4U^2}{4y^2}\left(\frac{2}{1+\operatorname{ch}\frac{2a\pi x}{r^2}}\right)^2=\frac{a^2\pi^4U^2}{4y^2\operatorname{ch}^4\frac{a\pi x}{r^2}}.$$

На плоскости $y=0$ и, следовательно,

$$q^2=\frac{a^4\pi^4U^2}{x^4}\cdot\frac{1}{\operatorname{sh}^4\frac{a\pi}{x}}.$$

6.53. Цилиндр в тоннеле. Если положить

$$w=-\varkappa\zeta,\quad z=ic\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\zeta,$$

то $\varphi=-\varkappa\xi$, $\psi=-\varkappa\eta$. Функция ψ обращается в постоянную на линии $\eta=\text{const}$. Функция φ уменьшается на $2\pi\varkappa$, если мы обойдем окружность $\eta=\text{const}$. Из формулы (2) п. 3.71 следует, что комплексный потенциал w

представляет собой течение жидкости с циркуляцией [1]) $2\pi\varkappa$ вокруг цилиндра $\eta=\eta_1$, окруженного цилиндром $\eta=\eta_2$ (цилиндр в тоннеле, рис. 121). Исключив переменную ζ, мы получим

$$z=-ic\operatorname{ctg}\frac{w}{2\varkappa},\quad w=2\varkappa\operatorname{arc\,ctg}\frac{iz}{c},$$

откуда

$$\frac{dw}{dz}=\frac{2\varkappa ic}{z^2-c^2}=\frac{i\varkappa}{z-c}-\frac{i\varkappa}{z+c}.$$

Таким образом, по теореме Блазиуса, сила, действующая на внутренний цилиндр, равна

$$X-iY=-\frac{i\varrho}{2}\int\varkappa^2\left[\frac{1}{(z-c)^2}-\frac{2}{(z-c)(z+c)}+\frac{1}{(z+c)^2}\right]dz=$$
$$=\frac{i\varkappa^2\varrho}{2}\int\frac{1}{c}\left(\frac{1}{z-c}-\frac{1}{z+c}\right)dz=\frac{i\varkappa^2\varrho}{2c}2\pi i=-\frac{\pi\varkappa^2\varrho}{c}.$$

Следовательно,

$$X=-\frac{\pi\varkappa^2\varrho}{c};\quad Y=0,$$

т. е. главный вектор сил давления жидкости на внутренний цилиндр стремится увеличить расстояние между осью цилиндра и осью тоннеля.

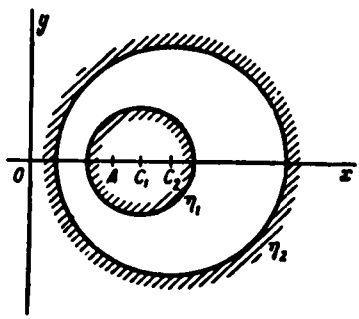


Рис. 121.

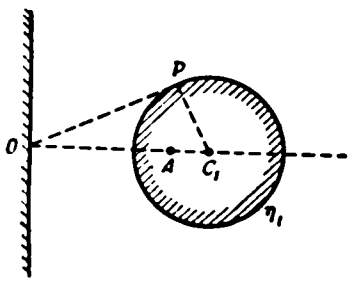


Рис. 122.

Интересно отметить один частный случай, когда радиус окружности η_2 становится бесконечным, т. е. когда эта окружность вырождается в мнимую ось (рис. 122). В этом случае мы имеем обтекание цилиндра, ось которого параллельна стенке. На цилиндр действует сила, равная $\pi\varkappa^2\varrho/c$, которая стремится прижать цилиндр к стенке.

Так как A является предельной точкой, то, проведя касательную, мы получим

$$c^2=0A^2=OP^2=OC_1^2-a^2=h^2-a^2,$$

где h — расстояние оси цилиндра до стенки, a — радиус цилиндра. Следовательно, сила, действующая на цилиндр, равна

$$\frac{\pi\varkappa^2\varrho}{\sqrt{h^2-a^2}}.$$

ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ 6

1. Неподвижный круговой диск обтекается однородным потенциальным потоком жидкости. Скорость потока на бесконечности u постоянна по направлению, но изменяется по величине. Показать, что сила, которую необходимо приложить к диску, чтобы удержать его в покое, равна $2m\,(du/dt)$, где m — масса жидкости, вытесненная диском.

[1]) Заметим что область является двусвязной (п. 3.70).

2. Доказать или проверить, что функция скорости

$$\varphi = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta$$

описывает потенциальное обтекание неподвижного кругового цилиндра.

При заданном давлении на бесконечности вычислить главный вектор сил, действующих со стороны жидкости на единицу длины полуцилиндра, лежащего на плоскости, проведенной через ось цилиндра параллельно направлению потока на бесконечности.

3. Имеется плоское установившееся безвихревое течение жидкости в области, поперечное сечение которой ограничено неподвижной границей, состоящей из линий $\theta = \pm\pi/10$ и кривой $r^5\cos 5\theta = k^5$.

Пусть скорость жидкости в точке, лежащей на одной из граничных плоскостей и отстоящей на единицу длины от линии пересечения граничных плоскостей, равна V.

Доказать, что объем жидкости, проходящей за единицу времени через круговую площадку в плоскости $\theta = 0$, равен

$$\frac{1}{8}\pi V a^2 (a^4 + 12a^2c^2 + 8c^4),$$

где a — радиус площадки, c — расстояние центра площадки от точки пересечения граничных плоскостей.

4. Изобразить схематично линии тока течения, заданного комплексным потенциалом $\varphi + i\psi = Az^2$, и показать, что в любой точке области течения величина скорости жидкости пропорциональна расстоянию этой точки от начала координат.

5. Исследовать течение, заданное комплексным потенциалом $w = \frac{1}{2}U(a^3/z^3)$, и показать, что линии тока этого течения являются лемнискатами.

6. Дан комплексный потенциал $w^2 = z^2 - 1$. Доказать, что линией тока, на которой $\psi = 1$, является линия $y^2(1 + x^2) = x^2$. Взяв эту линию за фиксированную границу течения, показать, что данный комплексный потенциал описывает обтекание этой границы равномерным потоком.

7. Пусть дано твердое тело, границы которого задаются уравнениями

$$(x+1)^2 + y^2 = 2, \quad (x-1)^2 + y^2 = 2.$$

Проверить, что потенциальное обтекание этого тела равномерным потоком, направленным на бесконечности вдоль оси y, задается функциями

$$\varphi = -Uy\left[1 + \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2}{(x-1)^2+y^2}\right],$$

$$\psi = -U\left[-x + \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+y^2}\right]$$

8. Начертить линию тока, на которой $\psi = 0$, а φ изменяется от $+\infty$ до $-\infty$, для двух течений:

1) $z^2 = 4w^3$,

2) $z = (w-1)^{3/2} + (w+1)^{3/2}$.

Изобразить схематически вид линий тока, на которых функция ψ положительна.

9. Пусть $w^2 = U^2(z^2 + c^2)$. Получить уравнение линий тока в виде

$$y^2 = \frac{\psi^2[U^2(x^2+c^2) + \psi^2]}{U^2(U^2x^2 + \psi^2)}$$

и показать, что данный комплексный потенциал описывает обтекание бесконечным потоком тонкого препятствия, выступающего перпендикулярно из прямолинейной границы.

10. Применив конформное отображение $z = \zeta + a^2/\zeta$ к обтеканию цилиндра $r = c$ в плоскости z потоком, скорость которого равна U, получить соответствующее решение для обтекания потоком той же скорости плоской области, форма которой задается ветвью кривой

$$(x^2+y^2) + a^4 + 2a^2(x^2 - y^2) - c^2(x^2+y^2) = 0.$$

Начертить эту кривую для разных значений отношения a/c и исследовать физический смысл полученных результатов.

11. Пусть функция $w = f(z)$ задает некоторое течение несжимаемой жидкости. Обозначим через p_0 давление в точке, в которой скорость жидкости равна V. Доказать, что составляющие (X, Y) главного вектора сил давления жидкости слева от некоторой линии тока на жидкость справа от нее, приложенные к дуге AB этой линии тока, задаются

соотношением

$$\left[X+\left(p_0+\frac{1}{2}\varrho V^2\right)(y_B-y_A)\right]-i\left[Y-\left(p_0+\frac{1}{2}\varrho V^2\right)(x_B-x_A)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}i\varrho\int\left(\frac{dw}{dz}\right)^2dz.$$

Интеграл в правой части соотношения берется вдоль любой дуги, которая может быть непрерывно деформирована в дугу AB без пересечения особых точек течения.

Цилиндр, радиус которого a, помещен в поток жидкости, скорость на бесконечности которого равна V, а давление p_0. Показать, что главный вектор сил давления жидкости на единицу длины четверти цилиндра, вырезанной плоскостями $\theta=0$ и $\theta=\pi/2$, имеет составляющие

$$X=a\left[-p_0+\frac{1}{6}\varrho V^2\right];\qquad Y=a\left[-p_0+\frac{5}{6}\varrho V^2\right].$$

Считать, что луч $\theta=0$ направлен против скорости потока на бесконечности.

12. Применить к равномерному потоку, задаваемому комплексным потенциалом $w=Uz$, последовательно конформные отображения

$$z=z_1+\frac{(a+b)^2}{4z_1},\qquad z_2=z_1e^{i\alpha},\qquad z_3=z_2+\frac{a^2-b^2}{4z_2}$$

и показать, что плоское движение в плоскости z_3 соответствует обтеканию неподвижного эллиптического цилиндра равномерным потоком, у которого направление скорости на бесконечности составляет угол α с большой осью эллипса. Показать также, что аргумент z_2 определяет эксцентрический угол точек на эллипсе.

Доказать, что давление на поверхности эллиптического цилиндра достигает минимума в точках, у которых эксцентрический угол θ удовлетворяет уравнению

$$a^2\operatorname{tg}\theta+b^2\operatorname{ctg}\alpha=0.$$

13. Пусть комплексный потенциал $w=f(z)$, где $w=\varphi+i\psi$ и $z=x+iy$, определяет двумерное течение. Найти вид функции f для обтекания неподвижного кругового цилиндра $x^2+y^2=a^2$ равномерным потоком, скорость которого на бесконечности равна по величине V и составляет угол α с осью x.

Используя конформное отображение $z'=z+c^2/z$ $(c<a)$ или любым другим способом найти комплексный потенциал обтекания эллиптического цилиндра

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2\beta}+\frac{y^2}{\operatorname{sh}^2\beta}=4c^2,$$

где $\beta=\ln a/c$, тем же потоком и вычислить момент, стремящийся повернуть цилиндр вокруг его оси.

14. Показать, что функция тока обтекания эллиптического цилиндра потоком, параллельным малой оси эллипса, имеет вид

$$\psi=-Vce^{\xi_0}\operatorname{sh}(\xi-\xi_0)\cos\eta.$$

Здесь использованы обычные обозначения.

Пользуясь последней формулой, показать, что функция тока обтекания эллиптического цилиндра потоком, скорость которого на бесконечности Q образует угол θ с осью OX, имеет вид

$$\psi=Qce^{\xi_0}\operatorname{sh}(\xi-\xi_0)\sin(\eta-\theta).$$

15. Эллиптический цилиндр $\xi=\xi_0$ помещен в поток, скорость которого U параллельна большой оси эллипса. Доказать, что скорость q течения задается формулой

$$q^2=U^2\frac{a+b}{a-b}\,\frac{\operatorname{sh}^2(\xi-\xi_0)+\sin^2\eta}{\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta}$$

и что скорость достигает максимального значения $U(a+b)/a$ на концах малой оси эллипса.

16. Эллиптический цилиндр обтекается потоком, у которого на бесконечности составляющие скорости вдоль большой и малой осей эллипса, образующего поперечное сечение цилиндра, равны соответственно $-V\cos\beta$ и $-V\sin\beta$. Течение вокруг цилиндра обладает циркуляцией $\varkappa$. Найти главный вектор и главный момент сил, действующих со стороны жидкости на единицу длины цилиндра.

17. Показать, что комплексный потенциал

$$w=-Uz-Ub\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\,e^{-(\xi+i\eta)}+\frac{il(\xi+i\eta)}{2\pi},$$

где $z=\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{ch}(\xi+i\eta)$, задает обтекание неподвижного эллиптического цилиндра с полуосями a и b потоком со скоростью U, направленной вдоль большой оси цилиндра;

при этом течение вокруг цилиндра имеет циркуляцию I. Найти также главный вектор сил давления жидкости на цилиндр.

18. Жидкость, плотность которой равна ρ, совершает безвихревое движение в области между двумя софокусными эллиптическими цилиндрами $\xi=\alpha$ и $\xi=\beta$, где

$$x+iy=c\,\mathrm{ch}\,(\xi+i\eta).$$

Доказать, что если циркуляция равна k, то кинетическая энергия слоя жидкости единичной толщины равна

$$\frac{\rho k^2(\beta-\alpha)}{8\pi}.$$

19. Пусть $x+iy=(\xi+i\eta)^2$. Доказать, что функция тока потенциального обтекания параболы $\xi=\xi_0$ потоком, скорость которого U параллельна оси параболы, имеет вид

$$\psi=2U(\xi-\xi_0)\,\eta.$$

20. Доказать, что комплексный потенциал $w^2=z$ задает течение между двумя софокусными и коаксиальными параболическими цилиндрами.

21. Однородный поток жидкости, скорость которого V направлена вдоль положительной оси x, обтекает бесконечный параболический цилиндр

$$\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{a}.$$

Доказать, что потенциал скорости этого течения имеет вид

$$\varphi=-Vr\cos\theta+2V\sqrt{a}\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}$$

и что главный вектор сил давления на единицу длины цилиндра равен $\pi\rho aV^2$. Давление на бесконечности принять равным нулю.

22. Доказать, что формула

$$\varphi+i\psi=ik\ln\frac{x+iy-c}{x+iy+c},$$

где k—действительная величина, определяет безвихревое движение жидкости, циркулирующей около двух неподвижных цилиндров, причем циркуляция около одного цилиндра равна $2\pi k$, а циркуляция около другого цилиндра равна $-2\pi k$.

Найти течение, полученное с помощью конформного отображения

$$x'+iy'=\frac{a^2}{x+iy-c},$$

где a—действительная величина, а также определить границы области, в которой это течение происходит.

23. Задано обтекание цилиндрического тела радиуса a, лежащего на дне глубокого потока. Показать, что разность давлений в верхней и нижней точках тела равна $\pi^4\rho U^2/32$, где U—скорость потока на бесконечности.

24. Используя коаксиальные координаты, проверить, что комплексный потенциал

$$w=U\frac{2ic}{n}\operatorname{ctg}\frac{\zeta}{n}$$

определяет равномерный поток при $n=2$, а при $n=1$—течение около кругового цилиндра.

25. Однородная несжимаемая невязкая жидкость занимает область, ограниченную плоскостью $x=0$ и цилиндром $(x-b)^2+y^2=a^2$, где $b>a$. Жидкость движется со скоростью V вдоль отрицательной оси y. Доказать, что это движение описывается комплексным потенциалом

$$\varphi+i\psi=-iVz+2iVa^2z\left[\frac{1}{z^2-b^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{2n}}{\prod_{r=0}^{n-1}(b+x_r)^2(z^2-x_n^2)}\right],$$

где

$$z=x+iy,\qquad x_0=b,\qquad x_n=b-\frac{a^2}{b+x_{n-1}}.$$

Глава 7

ПРОФИЛИ КРЫЛЬЕВ

7.10. Циркуляция вокруг кругового цилиндра. Рассмотрим комплексный потенциал

$$w = i\varkappa \ln \frac{z}{a}, \tag{1}$$

где $\varkappa$ — действительное число.

На цилиндре $|z| = a$ имеем $z = ae^{i\theta}$ (рис. 123). Отсюда $w = -\varkappa\theta$, так что $\psi = 0$ и $\varphi = -\varkappa\theta$. Таким образом, цилиндр является линией тока $\psi = 0$.

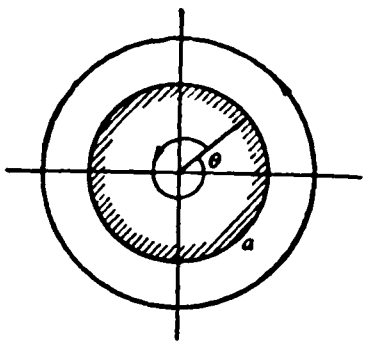


Рис. 123.

Кроме того, если мы обойдем один раз вокруг цилиндра в положительном направлении, то угол θ примет значение $\theta + 2\pi$ и, следовательно, величина φ уменьшится на $2\pi\varkappa$.

Таким образом, как следует из формулы (2) п. 3.71, вокруг цилиндра имеет место циркуляция величиной $2\pi\varkappa$. В общем случае формула (1) дает

$$\varphi = -\varkappa\theta, \quad \psi = \varkappa \ln \frac{r}{a},$$

так что циркуляция равна $2\pi\varkappa$ по каждой окружности, охватывающей один раз цилиндр (см. п. 3.71). Линиями тока являются концентрические окружности с центрами на оси цилиндра.

Определение. Если циркуляция по окружности равна $2\pi\varkappa$, то мы будем называть $\varkappa$ *интенсивностью* циркуляции.

Цель этого определения — избежать постоянного повторения множителя 2π при анализе.

В рассматриваемом случае имеем

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0, \qquad -\frac{\partial\varphi}{r\,\partial\theta} = \frac{\varkappa}{r},$$

так что $\varkappa$ есть скорость течения на единичном расстоянии от начала координат.

Формулу (1) можно представить в виде

$$w = i\varkappa \ln z - i\varkappa \ln a.$$

Так как добавление к потенциалу константы не оказывает никакого физического действия, то мы можем пользоваться комплексным потенциалом $i\varkappa \ln z$. Действительно, такой вид комплексного потенциала часто оказывается более удобным, несмотря на кажущееся отсутствие согласованности в физических размерностях. В этом случае $\varkappa$ по-прежнему является скоростью на единичном расстоянии от начала координат. Отбрасывание константы приводит к тому, что границей цилиндра становится линия тока $\psi = \varkappa \ln a$ вместо $\psi = 0$.

Очень важно иметь в виду, что описываемое здесь движение жидкости происходит без вращения в том смысле, что вихрь равен нулю. В самом деле,

вихрь, вычисленный по формуле (см. п. 4.20)

$$\omega = \frac{q}{r} - \frac{'\partial q}{\partial n} = \frac{q}{r} + \frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\varkappa}{r^2} - \frac{\varkappa}{r^2} = 0,$$

оказывается равным нулю.

7.11. Циркуляционное движение жидкости между концентрическими цилиндрами. Комплексный потенциал $w = i\varkappa \ln z$ применим также для описания циркуляционного движения жидкости, заключенной между двумя концентрическими круговыми цилиндрами, так как функция тока $\psi = \varkappa \ln r$ постоянна на цилиндрах $r = a$, $r = b$.

Циклическое движение в данном случае, а также в случае, рассмотренном в предыдущем пункте, оказывается возможным в силу того, что область, занятая жидкостью, является двусвязной (см. п. 3.70).

7.12. Обтекание кругового цилиндра с циркуляцией и без циркуляции. Обтекание кругового цилиндра раднуса a без циркуляцин задается комплексным потенциалом

$$V\left(z + \frac{a^2}{z}\right).$$

Обтекание кругового цилиндра с циркуляцией интенсивности $\varkappa$ задается комплексным потенцналом $i\varkappa \ln z/a$.

Комбинируя эти движения жидкости, мы получаем следующий комплексный потенциал:

$$w = V\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + i\varkappa \ln \frac{z}{a}. \qquad (1)$$

Цилиндр по-прежнему остается частью линии тока $\psi = 0$. Действительно, полагая $z = ae^{i\theta}$, найдем, что w — действительная величина и, следовательно, $\psi = 0$.

Для отыскания общей формы линий тока исследуем прежде всего критические точки, определяемые уравнением

$$\frac{dw}{dz} = V\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) + \frac{i\varkappa}{z} = 0,$$

или

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{z}{a}\frac{i\varkappa}{aV} - 1 = 0,$$

откуда

$$z = a\left(-\frac{i\varkappa}{2aV} \pm \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{4a^2V^2}}\right).$$

Теперь мы должны рассмотреть три случая

$$\varkappa < 2aV, \quad \varkappa = 2aV, \quad \varkappa > 2aV.$$

Случай I. Если $\varkappa < 2aV$, то можно положить $\varkappa/2aV = \sin\beta$. Тогда $z - a\,(-i\sin\beta \pm \cos\beta)$, так что критические точки являются точками пересечения цилиндра с прямой линией, расположенной ниже центра цилиндра и проведенной параллельно действительной оси.

На рис. 124 показаны критические точки A и B, угол β и расположение линий тока.

Воздействие циркуляции приводит к тому, что увеличивается скорость жидкости в точках, расположенных над цилиндром, и уменьшается скорость в точках, расположенных под цилиндром. Таким образом, давление над цилиндром уменьшается, а под цилиндром увеличивается, и поэтому на цилиндр будет действовать снла, направленная вверх по оси y.

Функция тока

$$\psi = Vy\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \varkappa \ln \frac{r}{a}$$

не изменится, если вместо x напишем $-x$, т. е. линии тока симметричны относительно оси y. Поэтому результирующая сила в направлении оси x равна нулю, т. е. цилиндр не испытывает лобового сопротивления.

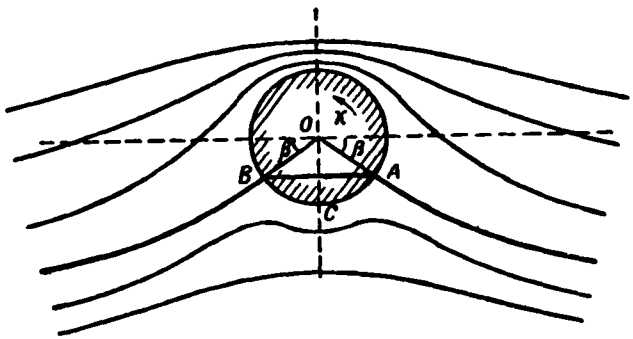


Рис. 124.

Если циркуляция равна нулю, то критические точки лежат на оси x. Таким образом, другое воздействие циркуляции заключается в том, что эти точки передвигаются вниз.

Случай II. Пусть $\varkappa = 2aV$, тогда угол $\beta = \pi/2$. В этом случае критические точки совпадают в точке C (рис. 125) на нижней половине цилиндра.

Случай III. Пусть $\varkappa > 2aV$, положим $\varkappa/2aV = \operatorname{ch}\beta$. Тогда находим

$$z = ai(-\operatorname{ch}\beta \pm \operatorname{sh}\beta) = -aie^{\pm\beta}.$$

Обозначая эти точки через z_1, z_2, имеем $|z_1 z_2| = a^2$.

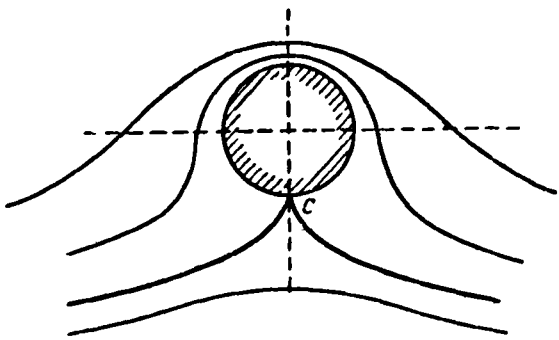


Рис. 125.

Таким образом, критические точки теперь являются точками инверсии относительно окружности на мнимой оси; одна из них находится внутри цилиндра и не принадлежит рассматриваемой области течения.

В критической точке линии тока пересекаются обязательно под прямым углом (см. п. 4.60), и, таким образом, жидкость внутри образовавшейся петли может циркулировать вокруг цилиндра, никогда не соединяясь с основным потоком (рис. 126).

Для нахождения давления в точках на цилиндре определим производную

$$\frac{dw}{dz} = V(1 - e^{-2i\theta}) + \frac{i\varkappa}{a} e^{-i\theta} = e^{-i\theta}\left[2iV\sin\theta + \frac{i\varkappa}{a}\right].$$

Отсюда

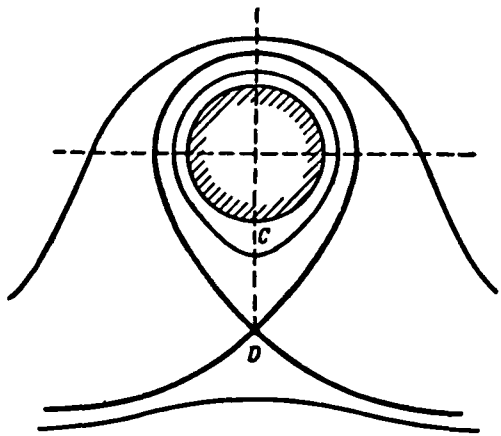
$$q^2 = \left(2V\sin\theta + \frac{\varkappa}{a}\right)^2,$$

и, следовательно,

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\Pi}{\varrho} + \frac{1}{2}V^2 - \frac{1}{2}\left(4V^2\sin^2\theta + \frac{\varkappa^2}{a^2} + \frac{4\varkappa V}{a}\sin\theta\right).$$

Результирующая сил, действующих со стороны жидкости на цилиндр, имеет следующие компоненты:

$$X = -\int_0^{2\pi} p\cos\theta a\, d\theta, \quad Y = -\int_0^{2\pi} p\sin\theta a\, d\theta.$$



Р и с. 126.

Если в выражении для давления p заменить θ на $\theta + \pi$, то изменится только последнее слагаемое. Следовательно, давление в диаметрально противоположных точках выражается следующим образом:

$$p_1 - \frac{2\varkappa V}{a}\varrho\sin\theta, \quad p_1 + \frac{2\varkappa V}{a}\varrho\sin\theta,$$

где

$$\frac{p_1}{\varrho} = \frac{\Pi}{\varrho} + \frac{1}{2}V^2 - 2V^2\sin^2\theta - \frac{\varkappa^2}{2a^2}.$$

Ясно, что слагаемые p_1 не оказывают никакого действия на цилиндр, так как они взаимно уничтожаются. Следовательно,

$$X = 2\varkappa V\varrho\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\, d\theta, \quad Y = 2\varkappa V\varrho\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta,$$

отсюда

$$X = 0, \quad Y = 2\pi\varkappa\varrho V.$$

Таким образом, на цилиндр действует сила $2\pi\varkappa\rho V$, стремящаяся поднять его под прямым углом к направлению основного потока. Эту силу обычно называют *подъемной силой*.

Расчет подъемной силы, даже в этом очень простом случае, весьма облегчается благодаря применению теоремы Чаплыгина—Блазиуса. В рассматриваемом случае эта теорема дает следующее выражение для силы:

$$X - iY = \frac{1}{2} i\rho \int \left(V + \frac{i\varkappa}{z} - \frac{Va^2}{z^2}\right)^2 dz.$$

Здесь интеграл берется по замкнутому контуру цилиндра. Единственным полюсом подинтегральной функции внутри контура является точка $z=0$. Вычет в этой точке равен коэффициенту при $\frac{1}{z}$ в подинтегральном выражении, т. е. величине $2iV\varkappa$.

Отсюда по теореме Коши о вычетах находим

$$X - iY = \frac{1}{2} i\rho \cdot 2\pi i \cdot 2iV\varkappa = -i \cdot 2\pi\rho V\varkappa,$$

так что, как и прежде, $X=0$, $Y=2\pi\varkappa\rho V$.

Преимущество теоремы Чаплыгина—Блазиуса состоит в том, что в ней используется единственная переменная z, а все остальные переменные исключены с помощью теоремы о вычетах.

7.13. Равномерное течение с поперечным градиентом скорости. Пусть ось x расположена горизонтально, скажем на уровне земли, а ось y направлена вертикально вверх. Пусть распределение скоростей имеет следующий вид:

$$u = -\omega y, \quad v = 0, \quad \omega = \text{const}, \tag{1}$$

причем скорость уменьшается, когда мы приближаемся к земле; поперечный градиент скорости равен $du/dy = -\omega$. Этот тип распределения скоростей часто встречается при ветре в природных условиях и известен как равномерное течение с поперечным градиентом скорости. Вихрь равен $dv/dx - du/dy = \omega$. Таким образом, течение с поперечным градиентом скорости имеет постоянный вихрь, поэтому дадим более точное определение такого течения.

Определение. Течение с постоянным вихрем называется равномерным течением с поперечным градиентом скорости.

Для течения с постоянным вихрем ω в соответствии с формулами (6) п. 4.40 и с формулами из п. 5.33 можно получить для функции тока ψ следующее уравнение:

$$4\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial\bar{z}} = \omega.$$

Отсюда путем интегрирования находим

$$\psi = f(z) + \bar{f}(\bar{z}) + \frac{1}{4}\omega z\bar{z}, \tag{2}$$

причем произвольные функции $f(z)$ и $\bar{f}(\bar{z})$ должны быть комплексными сопряженными, поскольку ψ—действительная величина. Следовательно, самое общее течение с поперечным градиентом скорости можно получить путем наложения течения с равномерным поперечным градиентом скорости, функция тока которого имеет вид $\psi_0 = (1/4)\omega z\bar{z}$, и безвихревого течения, комплексный потенциал которого равен $2if(z)$.

В качестве примера рассмотрим течение с циркуляцией около кругового цилиндра (см. п. 7.12), на которое накладывается течение, определяемое

функцией тока $\psi_0 = (1/4)\omega z\bar{z}$. Комплексный потенциал для безвихревого течения задается формулой п. 7.12 (1), и, следовательно, по формуле (2) получим

$$2i\psi = V(z-\bar{z}) + Va^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}\right) + i\varkappa \ln z\bar{z} + \frac{1}{2}i\omega z\bar{z},$$

отсюда

$$2i\frac{\partial\psi}{\partial z} = V + \frac{i\varkappa}{z} + \frac{1}{2}i\omega\bar{z} - \frac{Va^2}{z^2}.$$

Для нахождения силы, действующей на цилиндр, используем формулу (7) п. 6.41. На цилиндре $z\bar{z} = a^2$, или $\bar{z} = a^2/z$, следовательно,

$$2i\frac{\partial\psi}{\partial z} = V + \frac{i\left(\varkappa + \frac{1}{2}\omega a^2\right)}{z} - \frac{Va^2}{z^2}$$

и, таким образом, по формуле (7) п. 6.41 находим результирующую силу

$$X - iY = -2i\varrho \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{res}(\partial\psi/\partial z)^2_{z=0} =$$
$$= -2\pi\varrho i\left(\varkappa + \frac{1}{2}\omega a^2\right)V.$$

Итак, подъемная сила увеличивается из-за налчия течения с поперечным градиентом скорости, если $\omega/\varkappa$ положительно, и уменьшается, если $\omega/\varkappa$ отрицательно. Заметим, что течение с поперечным градиентом скорости создает подъемную силу даже при отсутствии циркуляции.

7.20. Профиль крыла. Крыло, используемое в современных самолетах, имеет профиль, похожий по форме на «рыбу» (рис. 127). Такое крыло имеет затупленную *переднюю кромку* и острую *заднюю кромку*. Проекция профиля на касательную, показанную на рис. 127, называется *хордой*. Отношение размаха крыла к хорде профиля называется *удлинением*.

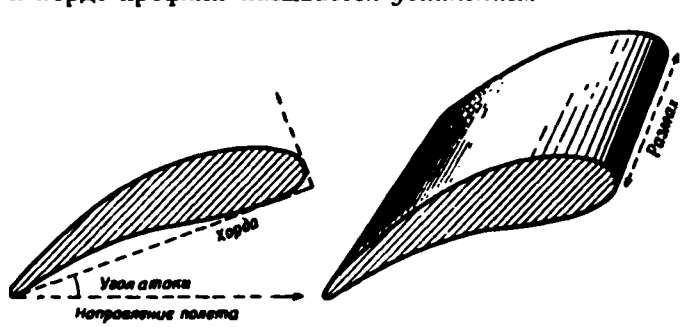


Рис. 127.

Линией кривизны профиля называется геометрическое место точек, расположенных посредине между точками, в которых ордината, перпендикулярная к хорде, пересекает крыло. *Кривизной* профиля является отношение максимальной ординаты линии кривизны профиля к его хорде.

Рассмотрим основы теории обтекания такого профиля крыла при следующих предположениях:

1. Воздух ведет себя как несжимаемая невязкая жидкость.

2. Крыло представляет собой цилиндр, поперечное сечение которого является кривой вышеуказанного типа.

3. Рассматриваемое течение представляет собой двумерное безвихревое циклическое движение жидкости.

Вышеуказанные предположения являются, конечно, только приближениями к действительному состоянию вопроса. Однако эти предположения дают возможность понять основные принципы решения рассматриваемой задачи. По данному вопросу имеется значительная библиография, которую мы здесь не можем охватить даже в общих чертах. Наша цель состоит только в том, чтобы дать вводный обзор простейших сторон явления [1]).

Было установлено, что профили, полученные путем конформного преобразования круга преобразованием Жуковского (см. п. 6.30), имеют хорошую обтекаемую форму. Подъемная сила для таких профилей может быть вычислена по известной формуле для кругового цилиндра. Существуют два способа получения крыльевых профилей указанного вида.

а) Профиль крыла получается путем преобразования данной окружности.

б) Профиль крыла задан. Требуется найти окружность, которая преобразуется в заданный профиль. Естественно, что способ (б) является более сложным. Мы ограничимся исследованием способа (а). Для этой цели рассмотрим подробнее преобразование Жуковского.

7.30. Дальнейшее исследование преобразования Жуковского. Преобразование

$$z = \zeta + \frac{l^2}{\zeta},$$

рассматриваемое как отображение плоскости ζ на плоскость z, эквивалентно последовательным преобразованиям

$$\zeta_1 = \frac{l^2}{\zeta}, \quad z = \zeta + \zeta_1.$$

Если задать ζ и ζ_1, то второе из этих преобразований сводится к простому сложению на векторной диаграмме. Попытаемся теперь получить ζ_1, если ζ задано. Положив

$$\zeta = re^{i\theta},$$

будем иметь

$$\zeta_1 = \frac{l^2}{r} e^{-i\theta}.$$

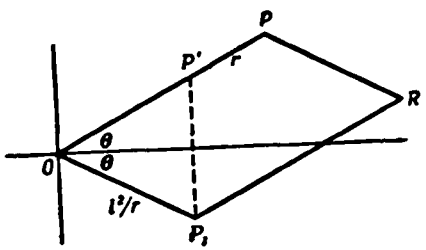


Рис. 128.

Рассмотрим точки P (ζ) и P_1 (ζ_1), изображенные на рис. 128.

Если мы проведем прямую P_1P' перпендикулярно действительной оси и пересекающую OP в точке P', то смо-

жем записать равенства

$$OP' = OP_1 = \frac{l^2}{r},$$

следовательно,

$$OP \cdot OP' = l^2.$$

Таким образом, точка P' является инверсией точки P относительно центра инверсии O. Для нахождения точки P_1 мы должны сначала найти точку инверсии P', а затем отражение отрезка OP' относительно действительной оси, тем самым мы получим точку P_1.

---

[1]) Для более подробного ознакомления см. Милн-Томсон (Milne-Thomson), Theoretical Aerodynamics, Lnd., 1958.

Наконец, для получения точки z сложим комплексные числа, представляемые точками P и P_1, путем построения параллелограмма OP_1RP. Тогда четвертая вершина параллелограмма R и есть точка z; тем самым преобразование завершается.

Пусть теперь в рассматриваемой задаче тока P описывает окружность. Тогда точка P' будет описывать инверсию этой окружности. Как будет показано ниже, эта инверсия является также окружностью и, следовательно, точка P_1 будет описывать окружность, симметричную геометрическому месту точек P' относительно действительной оси. Исследуем теперь геометрическое построение для нахождения геометрического места точек P_1.

7.31. Геометрическое построение преобразования. Пусть точка C — центр данной окружности, пересекающей действительную ось в точках A и B, где $OB = l$ (рис. 129).

Пусть P — любая точка данной окружности и пусть точка P' — ее инверсия относительно окружности радиуса l с центром в точке O, т. е.

$$OP \cdot OP' = l^2 = OB^2, \qquad (1)$$

причем точка P' лежит на отрезке OP.

Пусть продолжение отрезка PO пересекает окружность в точке Q; проведем отрезок $P'C'$ параллельно CQ до пересечения с прямой CO в точке C'. Сначала докажем, что геометрическое место точек P' является кругом с центром в точке C'.

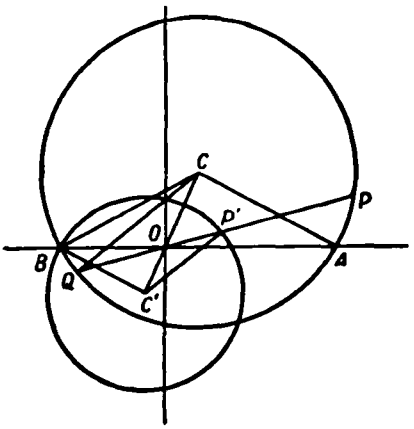


Рис. 129.

Доказательство. Так как AOB и POQ — хорды круга, пересекающиеся в точке O, то

$$OP \cdot OQ = OA \cdot OB. \qquad (2)$$

Если разделить формулу (1) на формулу (2), то получим равенство

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{OB}{OA}.$$

Теперь видим, что треугольники $OP'C'$, OQC подобны, так как стороны $P'C'$ и QC параллельны. Следовательно,

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{C'P'}{CQ} = \frac{OP'}{OQ} = \frac{OB}{OA}.$$

Таким образом, отношение $OC' : OC$ есть величина постоянная. Отсюда следует, что точка C' — фиксированная точка.

Поскольку $CQ = a$ есть радиус данного круга и отношение $C'P' : CQ$ — константа, то отрезок $C'P'$ имеет постоянную длину.

Таким образом, точка P' описывает окружность с центром в точке C'.

В силу того что $OB = l$, точка B является инверсией самой себя и, следовательно, геометрическое место точек P' также проходит через точку B.

Так как

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{OB}{OA},$$

то треугольники OAC и OBC' подобны и расположены подобно. Отсюда

следует, что стороны BC' и CA параллельны и поэтому

$$\angle ABC' = \angle BAC = \angle CBA.$$

Таким образом, стороны BC' и BC образуют одинаковые углы с действительной осью. Следовательно, если мы зеркально отразим окружность, являющуюся геометрическим местом точек P' относительно действительной оси, то мы получим такую же окружность, центр которой лежит в точке D и которая проходит через точку B (рис. 130). Это и есть искомая окружность — геометрическое место точек P_1, являющихся зеркальными отражениями точек P'.

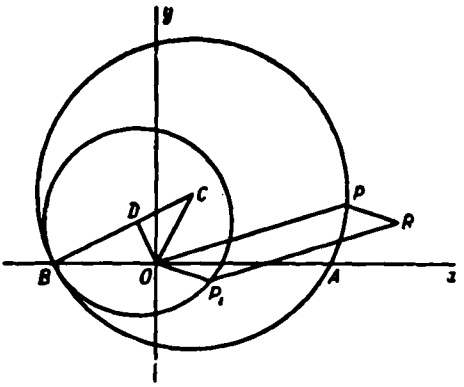


Рис. 130.

Так как точка B находится на линии центров CD, то две окружности должны коснуться в точке B.

Так как стороны OC' и OC образуют одинаковые углы с осью Oy и так как отрезок OD является зеркальным отражением отрезка OC', то отсюда следует, что отрезки OD и OC образуют одинаковые углы с осью Oy. Это замечание дает нам возможность найти точку D и провести без каких-либо затруднений окружность. Теперь остается построить, согласно п. 7.30, точку R, представляющую искомое преобразование $z = \zeta + l^2/\zeta$.

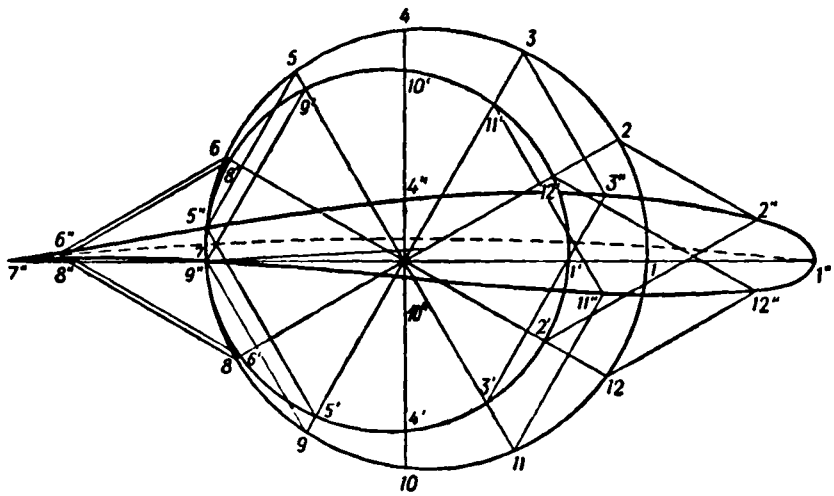


Рис. 131.

На рис. 131 показан профиль крыла, полученный путем построения радиусов-векторов через интервалы в 30°. На профиле крыла и на окружности имеется одинаковое число соответствующих точек.

Профили, полученные таким построением, известны как профили Жуковского[1]). Они имеют затупленную переднюю кромку и острую заднюю кромку, соответствующую точке B на окружности.

[1]) Независимо от Н. Е. Жуковского профили этих крыльев были получены С. А. Чаплыгиным как инверсии параболы. Поэтому их иногда называют профилями Жуковского — Чаплыгина. — *Прим. перев.*

7.32. Характер задней кромки крыла. Преобразование

$$z=\zeta+\frac{l^2}{\zeta} \text{ дает производную } \frac{dz}{d\zeta}=1-\frac{l^2}{\zeta^2},$$

так что $dz/d\zeta$ обращается в нуль в точках $\zeta=-l$, $\zeta=l$. Следовательно, отображение перестает быть конформным в непосредственной окрестности этих точек. Точка $\zeta=l$ находится внутри круга и преобразуется во внутреннюю точку профиля крыла. Поэтому она в дальнейшем не рассматривается. Точка $\zeta=-l$ преобразуется в точку $z=-2l$, т. е. заднюю кромку профиля. Рассматриваемое преобразование можно записать в виде

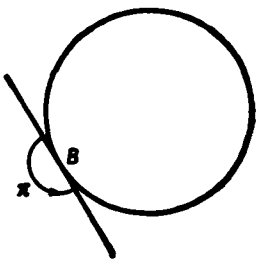


Рис. 132.

$$\frac{z+2l}{z-2l}=\left(\frac{\zeta+l}{\zeta-l}\right)^2. \qquad (1)$$

В окрестности точек $\zeta=-l$ и $z=-2l$ положим

$$\zeta=-l+re^{i\theta},\ z=-2l+se^{i\chi},$$

где r и s — бесконечно малые величины. Тогда можно получить приближенное равенство

$$\frac{se^{i\chi}}{-4l}=\frac{r^2e^{2i\theta}}{4l^2},$$

и, следовательно,

$$\chi+\pi=2\theta.$$

При обходе вокруг точки B угол θ увеличивается на π, следовательно, угол χ увеличивается на 2π (рис. 132).

Отсюда следует, что обе ветви профиля крыла касаются друг друга в задней кромке, которая является поэтому геометрическим местом точек возврата.



Рис. 133.

Обобщенный вид формулы (1), т. е.

$$\frac{z+nl}{z-nl}=\left(\frac{\zeta+l}{\zeta-l}\right)^n, \qquad (2)$$

также используется при проектировании профилей крыльев. Этому преобразованию соответствует класс кривых, известных под названием профилей Кармана — Треффтца. Используя те же обозначения, находим

$$\chi+\pi=n\theta,$$

так что если $n=2-\lambda/\pi$, то увеличение угла θ на π дает для угла χ увеличение на $2\pi-\lambda$ (рис. 133). Следовательно, в задней кромке две различные ветви профиля крыла теперь пересекаются под углом λ.

Преобразование (2) не позволяет получить такой простой геометрической картины, которая получается при $n=2$.

7.40. Постулат Жуковского[1]. Пусть q — скорость в точке B окружности, которая преобразуется в заднюю кромку профиля крыла, а q' — соответствующая скорость на задней кромке. Тогда, согласно п. 6.03, можем записать соотношение

$$q'=\left|\frac{dw}{dz}\right|=\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|\cdot\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|=q\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|.$$

[1]) В отечественной литературе этот постулат называется постулатом Чаплыгина — Жуковского, что более соответствует действительности.—*Прим. перев.*

Мы видели, что на задней кромке $dz/d\zeta = 0$, и, следовательно, величина q' бесконечна. Этого можно избежать, если считать точку B критической точкой, т. е. в этой точке скорость $q = 0$.

Исследование положения критических точек, проведенное в п. 7.12, показывает, что благодаря подходящему выбору интенсивности циркуляции $\varkappa$ критические точки можно расположить в любой точке на нижней половине цилиндра, так что точку B всегда можно сделать критической точкой.

Постулат Чаплыгина — Жуковского состоит в том, что циркуляция в случае соответствующим образом спроектированного профиля всегда устанавливается такая, что точка B является критической и скорость у задней кромки профиля конечна. Это условие[1]), по-видимому, будет удовлетворяться

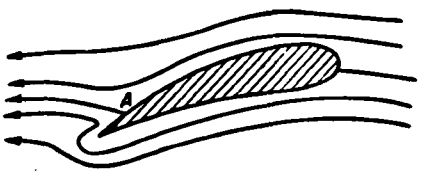


Рис. 134.

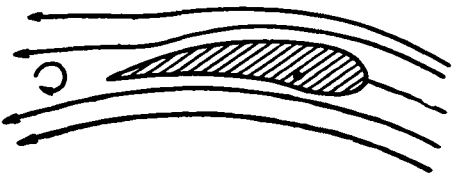


Рис. 135.

с достаточной точностью в области рабочего режима у хорошо спроектированного крыла.

Физическое происхождение циркуляции, вероятно, можно объяснить следующим образом (см. также фото 7—12).

В начале движения, т. е. при малых скоростях воздушного потока, картина обтекания имеет обычные плавные линии тока и задняя критическая точка расположена впереди задней кромки на верхней поверхности крыла (рис. 134). Когда скорость увеличивается, даже при малой вязкости воздуха, силы вязкости возрастают и поэтому воздух перестает огибать острые края профиля, в результате чего образуется вихрь (рис. 135).

Так как в начальный момент времени циркуляция по любому замкнутому контуру, охватывающему профиль, и вихрь в рассматриваемом течении равнялись нулю, то в дальнейшем сумма циркуляции и вихря также должна оставаться равной нулю; поэтому должна существовать циркуляция вокруг профиля, равная по величине и противоположная по знаку образовавшемуся вихрю. При установившемся обтекании профиля вихрь уносится потоком, а циркуляция вокруг профиля остается.

7.45. Теорема Кутта — Жуковского[2]). *Если неподвижный профиль крыла обтекается с циркуляцией K равномерным плоско-параллельным потоком воздуха со скоростью V в бесконечности, то на крыло действует подъемная сила, равная $K\varrho V$ и направленная перпендикулярно скорости V. Направление вектора подъемной силы получается поворотом вектора V на прямой угол в сторону, противоположную направлению циркуляции.*

Доказательство. Так как поток воздуха равномерный и его скорость в бесконечности задана, то при достаточно больших значениях $|z|$ имеет место следующее разложение в ряд:

$$-\frac{dw}{dz} = -Ve^{i\alpha} + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \dots, \qquad (1)$$

---

[1]) За крылом имеется вихревой след, который является причиной того, что измеряемая циркуляция меньше, чем циркуляция, соответствующая постулату Чаплыгина—Жуковского. Влияние вихревого следа увеличивается с увеличением угла атаки.

[2]) В отечественной литературе эта теорема обычно называется теоремой Жуковского. — *Прим. ред.*

где α — *угол атаки* (рис. 127). Отсюда находим $w = Ve^{i\alpha}z - A\ln z + \frac{B}{z} + \ldots$.

Поскольку циркуляция равна K, то надо положить

$$-A = \frac{iK}{2\pi}, \tag{2}$$

так как $\ln z$ увеличивается на $2\pi i$ при одном обходе профиля в положительном направлении. Из формул (1) и (2) получаем

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = V^2e^{2i\alpha} + \frac{iKVe^{i\alpha}}{\pi z} - \frac{K^2 + 8\pi^2BVe^{i\alpha}}{4\pi^2z^2} - \ldots. \tag{3}$$

Если мы проинтегрируем это выражение по окружности достаточно большого радиуса, чтобы разложение (3) было справедливо, то, согласно теореме Блазиуса — Чаплыгина (см. п. 6.41), получим результирующую силу

$$X - iY = \frac{1}{2}i\varrho \cdot 2\pi i\left(\frac{iKVe^{i\alpha}}{\pi}\right) = -iK\varrho Ve^{i\alpha};$$

изменив здесь i на $-i$, получаем

$$X + Y = iK\varrho Ve^{-i\alpha} = K\varrho Ve^{i\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)}. \tag{4}$$

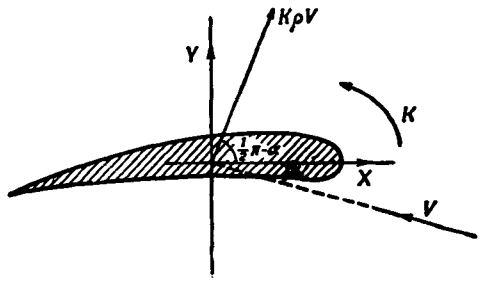


Рис. 136.

Сравнение этой формулы с рис. 136 показывает, что полученная здесь сила удовлетворяет всем условиям теоремы.

Замечания.

(I) Эта теорема была открыта Кутта в 1902 г. и независимо от него Жуковским в 1906 г.[1])

(II) *Подъемная сила не зависит от формы профиля.*

(III) Рассмотренная теория не позволяет определить лобовое сопротивление профиля, так как не учтено наличие вихревого следа и сил вязкости (см. п. 19.74).

(IV) Если крыло движется в неподвижном воздухе, то направление подъемной силы получается путем поворота вектора скорости *крыла* на прямой угол в направлении циркуляции.

(V) Используя теорему Блазиуса — Чаплыгина и формулу (3), легко получить следующую величину для момента силы относительно начала координат:

$$M = Re\ 2\pi i\varrho BVe^{i\alpha}. \tag{5}$$

7.50. Подъемная сила крыла в равномерном потоке. Преобразование Жуковского

$$z = \zeta + l^2/\zeta$$

является частным случаем более общего преобразования следующего вида:

$$z = \zeta + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \ldots. \tag{1}$$

Это преобразование, примененное к окружности радиуса a с центром C в точке $\zeta = s$ плоскости ζ, дает на плоскости z профиль крыла.

[1]) Теорема доказана Кутта в 1902 г. в неопубликованной диссертации. Первая публикация принадлежит Н. Е. Жуковскому (1906 г.) (Собр. сочинений т. IV, ГТТИ, 1949 г.).— *Прим. перев.*

Аэродинамическая сила, действующая на крыло, обусловлена аэродинамическим давлением на элементы его поверхности. Известно, что систему сил, действующих на твердое тело (мы предполагаем, что крыло является твердым), можно заменить для любой заданной *точки приведения* одной силой, действующей в этой точке, и парой сил. Кроме того, величина и направление равнодействующей в точке приведения не зависит от выбора точки приведения, тогда как момент пары сил зависит от этого выбора.

Для дальнейшего исследования примем в качестве точки приведения точку C — центр окружности. Эта точка называется *центром профиля*; действительное положение, которое она занимает относительно профиля, можно определить, если точки окружности и соответствующие точки профиля изобразить на *одной и той же* векторной диаграмме, как это, например, сделано на рис. 131. В настоящем случае мы примем точку C за начало координат. Это достигается путем замены в формуле (1) величины z на $z+s$ и величины ζ на

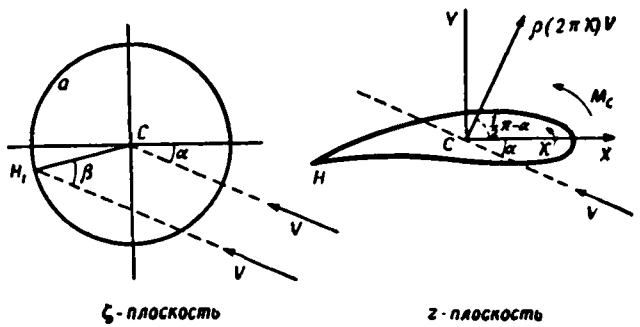


Рис. 137.

$\zeta+s$. Тогда для достаточно больших значений $|\zeta|$ мы получим следующий сходящийся ряд:

$$z=\zeta+\frac{a_1}{\zeta}+\frac{a_2-a_1 s}{\zeta^2}+\ldots. \tag{2}$$

Заметим также, что для уравнения (2) можно записать *обратное* уравнение; тогда получим

$$\zeta=z-\frac{a_1}{z}\ldots=z\left(1-\frac{a_1}{z^2}-\ldots\right). \tag{3}$$

Последнее равенство легко проверить с любой степенью точности путем подстановки в уравнение (2).

На рис. 137 показано положение точки C на профиле и на окружности, причем эта точка является началом координат на обеих плоскостях.

Пусть α — *угол атаки*, тогда, согласно теореме п. 6.21, для комплексного потенциала обтекания окружности можно записать выражение $Ve^{i\alpha}\zeta+\frac{a^2Ve^{-i\alpha}}{\zeta}$. Пусть окружность обтекается с циркуляцией, равной $2\pi\varkappa$, тогда получим

$$w=Ve^{i\alpha}\zeta+\frac{a^2Ve^{i\alpha}}{\zeta}+i\varkappa\ln\zeta. \tag{4}$$

Заменяя здесь величину ζ его выражением через величину z, согласно формуле преобразования, мы найдем комплексный потенциал обтекания заданного крылового профиля. В настоящем случае для достаточно больших значений $|z|$ мы можем применить формулы (3) и (4), тогда для

комплексного потенциала в плоскости z получим следующее выражение:

$$w = Ve^{i\alpha}\left(z - \frac{a_1}{z} - \dots\right) + \frac{Ve^{-i\alpha}a^2}{z}\left(1 - \frac{a_1}{z^2} - \dots\right)^{-1} + \\ + i\varkappa\left[\ln z + \ln\left(1 - \frac{a_1}{z^2} - \dots\right)\right] = \\ = Ve^{i\alpha}z + i\varkappa \ln z + \frac{Ve^{-i\alpha}a^2 - Ve^{i\alpha}a_1}{z} + \dots . \qquad (5)$$

Здесь опущены члены с $\frac{1}{z}$ в степенях выше первой.

Сравнение с п. 7.45 показывает, что в данном случае

$$A = -i\varkappa, \quad B = Ve^{-i\alpha}a^2 - Ve^{i\alpha}a_1. \qquad (6)$$

Поэтому, согласно формулам (4) и (5) п. 7.45, получим формулы

$$X + iY = 2\pi i\varkappa\rho Ve^{-i\alpha} = 2\pi\varkappa\rho Ve^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}, \qquad (7)$$

$$M_C = Re\left(-2\pi\rho V^2 i a_1 e^{2i\alpha}\right). \qquad (8)$$

Здесь M_C — момент силы относительно центра C.

Пусть L — подъемная сила, M — момент силы и c — хорда, тогда безразмерные величины

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 c}, \quad C_m = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho V^2 c^2}$$

соответственно называются *коэффициентом подъемной силы и коэффициентом момента*. Коэффициент момента зависит от выбора точки, относительно которой берутся моменты.

Заметим, что *подъемная сила равна произведению скорости потока в бесконечности на плотность воздуха и на циркуляцию* и поэтому она не зависит от формы крыла.

7.51. Оси профиля. Начертим окружность и профиль на одной и той же векторной диаграмме; тогда прямая, соединяющая центр C с задней критической точкой на круге, называется *первой осью* профиля (ось I). Согласно обозначениям рис. 137, можно записать $\varkappa = 2aV\sin\beta$. Таким образом, подъемная сила L пропорциональна $\sin\beta$; она обращается в нуль при $\beta = 0$, т. е. когда скорость потока в бесконечности направлена по первой оси (направление CH_1 на рис. 137). Поэтому первую ось также называют осью нулевой подъемной силы.

С другой стороны, если в формуле (2) п. 7.50 мы положим $a_1 = l^2 e^{i\mu}$, то по формуле (8) п. 7.50 получим равенство

$$M_C = 2\pi\rho l^2 V^2 \sin(2\alpha + \mu),$$

так что момент M_C обращается в нуль, если угол атаки равен $-\frac{1}{2}\mu$. Прямая, параллельная этому направлению потока и проходящая через центр C, называется *второй осью* профиля (ось II), или осью нулевого момента. Если через γ обозначим угол между первой и второй осями, то получим

$$M_C = 2\pi\rho l^2 V^2 \sin(2\beta - 2\gamma).$$

7.52. Фокус профиля. *Фокусом* профиля называется такая точка, момент аэродинамической силы относительно которой не зависит от угла атаки.

Для доказательства существования фокуса заметим, что момент силы L относительно некоторой точки F выражается в виде

$$M_F = M_C - CF\cos(\beta-\gamma-\varphi)\cdot L,$$

где φ — угол между прямой CF и второй осью профиля, как указано на рис. 138. Отсюда, учитывая соотношения

$$M_C = 2\pi\rho V^2 l^2 \sin 2(\beta-\gamma), \quad L = 4\pi\rho a V^2 \sin\beta,$$

получаем

$$M_F = 2\pi\rho V^2\{l^2\sin(2\beta-2\gamma) - 2aCF\cdot\sin\beta\cos(\beta-\gamma-\varphi)\} =$$
$$= 2\pi\rho V^2\{l^2\sin(2\beta-2\gamma) - a\cdot CF\cdot\sin(2\beta-\gamma-\varphi) - a\cdot CF\cdot\sin(\gamma+\varphi)\}.$$

Это соотношение не будет зависеть от угла β — *абсолютного угла атаки* [1]), если положить

$$l^2 = a\cdot CF, \quad \varphi = \gamma.$$

Таким образом, доказано, что существует фокус F и что он расположен на расстоянии l^2/a от центра на линии, являющейся зеркальным отображением первой оси профиля относительно второй его оси.

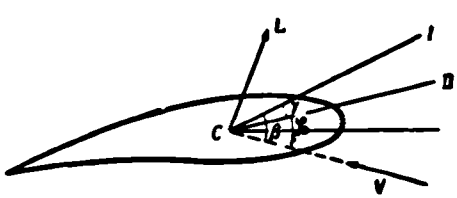


Рис. 138.

Момент относительно фокуса выражается в виде

$$M_F = -2\pi\rho V^2 l^2 \sin 2\gamma.$$

Чертеж был сделан в предположении, что первая ось профиля расположена выше его второй оси в направлении, указанном на рис. 138. В этом случае момент *относительно фокуса* отрицателен. Если, однако, вторая ось была бы выше первой, то угол γ изменил бы знак и момент стал бы положительным. Относительное расположение первой и второй оси профиля соответствует, таким образом, различным динамическим свойствам профиля.

Кроме того, если $\gamma = 0$, то момент $M_F = 0$ при любых углах атаки и поэтому вектор подъемной силы всегда проходит через фокус. В рассматриваемом случае говорят, что профиль имеет *центр подъемной силы*.

Для плоского крыла фокус расположен на одной четверти расстояния от центра до передней кромки крыла.

7.53. Парабола метацентров. Пусть L — линия действия подъемной силы, равной $4\pi\rho a V^2 \sin\beta$. Направление силы L перпендикулярно скорости потока в бесконечности. Пусть в точке P линия действия силы L пересекает линию KF, которая проведена через фокус параллельно скорости потока в бесконечности; при этом точка K находится на первой оси профиля (рис. 139). Момент относительно фокуса F выражается в виде

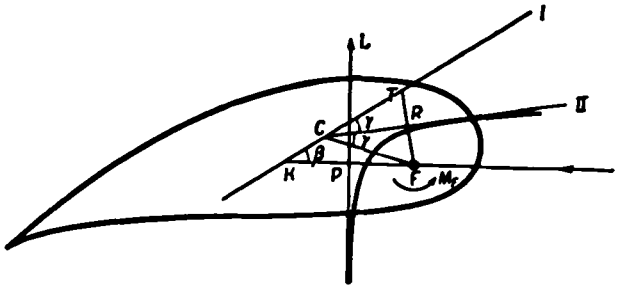
$$M_F + FP\cdot L = 0,$$

отсюда, применяя теорему синусов для треугольника FKC, получаем

$$FP = -\frac{M_F}{L} = \frac{1}{2}\frac{l^2}{a}\frac{\sin 2\gamma}{\sin\beta} = \frac{1}{2}CF\cdot\frac{FK}{FC} = \frac{1}{2}FK.$$

[1]) Абсолютным углом атаки называется угол между скоростью потока в бесконечности и осью нулевой подъемной силы.

Таким образом, геометрическое место точек P является прямой линией, параллельной первой оси профиля, и средней линией между этой осью и фокусом F. Согласно известному свойству параболы, основание перпендикуляра, опущенного на касательную из фокуса, лежит на касательной к параболе, проведенной в ее вершине. Отсюда следует, что линии действия подъемной силы касаются параболы, фокусом которой служит точка F, а директрисой является первая ось профиля. Эта парабола называется *параболой метацентров*[1]).



Р и с. 139.

Для получения линии действия подъемной силы достаточно провести касательную к параболе метацентров перпендикулярно направлению скорости потока в бесконечности.

Вторая ось профиля касается параболы метацентров, так как если линия FRT перпендикулярна ко второй оси, то $FR = RT$ и, следовательно, точка R лежит на касательной в вершине параболы.

Так как взаимно перпендикулярные касательные пересекаются на директрисе, то соответствующая подъемная сила проходит через точку C, если скорость потока в бесконечности направлена по второй оси профиля.

ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ 7

1. Пусть профиль крыла получен преобразованием окружности, как показано в п. 7.31. Доказать, что момент сил давления относительно центра окружности равен $2\pi\rho V^2 l^2 \sin 2\alpha$.

2. Пусть окружность, центр которой расположен на мнимой оси, преобразуется, как показано в п. 7.31. Доказать, что получающийся при этом профиль вырождается в дугу круга, описываемую дважды; если же центр окружности лежит на действительной оси, то получается симметричный профиль.

3. Применить геометрическое построение, отвечающее простейшему преобразованию Жуковского, к следующим случаям:

а) окружность с центром в начале координат, радиус которой равен параметру l в преобразовании Жуковского;

б) окружность с центром в начале координат, радиус которой больше параметра l.

4. Рассмотреть типы преобразования, которые переводят течение идеальной жидкости при обтекании с циркуляцией и без нее кругового цилиндра, в течение при обтекании профиля крыла. В частности, объяснить, как найти обтекание дуги круга и сечения стойки.

Какое преобразование следует применить для получения обтекания профиля заданной формы при переменном угле атаки?

5. Пользуясь обычными обозначениями для двумерного движения идеальной жидкости, определить w как функцию z для течения с проекциями скорости (U, V) при обтекании кругового цилиндра $|z-z_0|=b$, если задана циркуляция l вокруг цилиндра.

Применяя преобразование

$$z' = z + a^2/z,$$

где $|a-z_0|=b$, $|z_0|$ — малая величина, a — действительное положительное число, построить обтекание профиля Жуковского. Путем выбора величины циркуляции получить конечное значение скорости в точке возврата.

---

[1]) Впервые парабола метацентров была введена С. А. Чаплыгиным для моноплана и М. В. Келдышем для полиплана, см. Голубев В. В., Теория крыла. — *Прим. перев.*

6. Пусть неподвижный круговой цилиндр радиуса b с центром в точке $(c, 0)$ помещен в поток, имеющий в бесконечности скорость V, направленную под углом α к оси x. Кроме того, задана циркуляция l вокруг цилиндра. Доказать, что комплексный потенциал имеет вид

$$w=V\left\{(z-c)\,e^{-i\alpha}+\frac{b^2e^{i\alpha}}{z-c}\right\}+\frac{il}{2\pi}\ln(z-c).$$

Применяя преобразование $z'=z+a^2/z$, где $a=b-c$, показать, что если c мало, то преобразование дает такой же поток около крыла с симметричным профилем Жуковского. Показать, что условие конечности скорости в точке возврата имеет вид

$$l+4\pi Vb\sin\alpha=0.$$

Отсюда найти подъемную силу профиля.

7. Граница цилиндрического препятствия в плоскости z отображается на окружность $|\zeta|=a$ в плоскости ζ с помощью преобразования

$$\zeta=z+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots.$$

Показать, что движение жидкости вокруг препятствия дается комплексными потенциалами вида

$$\varphi+i\psi=V(e^{i\alpha}\zeta+a^2e^{-i\alpha}\zeta^{-1})+(ik/2\pi)\ln(\zeta/a).$$

Доказать, что результирующая сила, действующая на единицу длины препятствия, равна $\varkappa\rho V$, а ее момент относительно центра круга, отнесенный к единице длины, равен

$$2\pi\rho b^2V^2\sin 2(\alpha+\mu),$$

где

$$a_1=-b^2\exp(2i\mu).$$

8. Окружность $|\zeta|=a$ преобразуется в тонкий профиль с помощью формулы

$$z=\zeta\left(1+\sum a_n\frac{a^n}{\zeta^n}\right).$$

Найти выражения комплексных величин a_n через толщину и кривизну профиля. Получить следующую формулу для подъемной силы:

$$L=4\pi\rho aV^2\sin(\alpha+\beta),$$

и показать, что момент силы относительно центра равен

$$M=2\pi\rho b^2V^2\sin 2(\alpha+\mu),$$

где α — угол атаки, величины β, b и μ — параметры преобразования.

9. Пусть профиль получен из окружности $|\zeta-be^{i\beta}|=a$ с помощью следующего конформного отображения:

$$z=\zeta+\sum_{r=1}^{n}\frac{a_r}{\zeta^r}.$$

Предполагается, что все нули производной $dz/d\zeta$ лежат внутри круга, кроме одного, расположенного на окружности в точке $\zeta=-l=be^{i\beta}-ae^{i\alpha}$; здесь a, b и l — действительные числа; коэффициенты a_r, вообще говоря, считаются комплексными числами. Кроме того, пусть циркуляция вокруг профиля выбрана в соответствии с постулатом Чаплыгина — Жуковского. Показать, что на крыло, помещенное в рассматриваемое течение, действует подъемная сила, направленная перпендикулярно к скорости в бесконечности и обращающаяся в нуль при некоторых углах атаки. Найти выражение для a_1 из условия, чтобы момент относительно центра круга обращался в нуль вместе с подъемной силой.

10. Преобразование $z'=z+l^2/z$, где l — действительное число, переводит окружность $|z+l-ae^{i\beta}|=a$, где a и β — действительные числа, в профиль Жуковского на плоскости z' с точкой возврата при $z'=-2l$. Показать, что касательная в точке возврата образует угол 2β с осью x'.

Пусть неподвижный профиль помещен в потоке несжимаемой невязкой жидкости плотности ρ, комплексная скорость которого в бесконечности равна $-u+iv=Ve^{i\alpha}$. Циркуляция вокруг профиля выбрана так, что в жидкости не имеется бесконечной скорости.

Тогда показать, что скорость потока направлена по касательной в точке возврата и имеет величину $\frac{Vl\cos(\alpha+\beta)}{a}$. Показать, что момент сил давления M относительно точки $z'=-l+ae^{i\beta}$ выражается формулой $M=2\pi\rho l^2V^2\sin 2\alpha$.

11. Показать, что внешность окружности $|Z|=a$ в плоскости Z преобразуется во внешность дуги круга на плоскости z с помощью конформного отображения, определяемого соотношением

$$\frac{z-ae^{2i\alpha}}{z-ae^{-2i\alpha}}=\left(\frac{Z-iae^{i\alpha}}{Z+iae^{-i\alpha}}\right)^2;$$

при этом дуга круга имеет центральный угол, равный 4α. Показать также, что отношение z/Z стремится к $\sin\alpha$ в бесконечности.

Цилиндр, поперечным сечением которого является рассматриваемая здесь дуга круга, помещен в поток, имеющий в бесконечности скорость V. Скорость V перпендикулярна к образующим цилиндра и составляет положительный угол β с радиусом, соединяющим центр круга с серединой дуги. Кроме того, вокруг цилиндра имеет место положительная циркуляция $\varkappa$. Показать, что соответствующий комплексный потенциал w можно получить, исключая переменное Z из предыдущего соотношения и следующего уравнения:

$$w=-V\sin\alpha\left(Ze^{-i\beta}+\frac{a^2}{Ze^{-i\beta}}\right)+\frac{i\varkappa}{2\pi}\ln Z.$$

Доказать, что скорость у верхней кромки будет конечной тогда и только тогда, когда

$$\varkappa=2\pi aV\left[\sin\beta+\sin(2\alpha-\beta)\right].$$

12. Окружность $|\zeta|=a$ отображается на профиль в плоскости z с помощью преобразования $z=\zeta+a^2/\zeta$. Доказать, что в окрестности точки $z=2a$ справедливо разложение

$$\frac{d\zeta}{dz}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{z-2a}}+\dots.$$

13. Для профиля Жуковского, изображенного на рис. 131, показать, что центр окружности расположен в точке $se^{i\mu}$, а длина хорды $1''7''$ выражается формулой

$$4l+\frac{4s^2\cos^2\mu}{l+2s\cos\mu}.$$

Показать, что для тонких профилей малой кривизны длина хорды приближенно равна $4a$.

14. Применить построение, приведенное в п. 7.31, для вычерчивания профилей, получаемых из окружностей, проходящих через заданную точку B. Центры окружностей расположены соответственно в точках $l/10\ e^{i\pi/6}$, $l/10\ e^{i\pi/3}$. Измерить в каждом случае относительную кривизну и толщину.

15. Окружность $|\zeta|=a$ в плоскости ζ преобразуется в тонкий профиль крыла на плоскости z с помощью формул

$$z'=\zeta\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(a/\zeta)^n\right],\quad A_n=B_n+iC_n,\quad z=z'+b^2/z',$$

где b — действительное число, мало отличающееся от величины a, причем величина b выбрана так, что для $z'=-b$ соответствующая точка в плоскости ζ лежит на окружности; постоянные величины B_n и C_n малы. Найти зависимость толщины профиля и ординаты его средней линии от величин B_n, C_n.

Доказать, что если циркуляция выбрана из условия конечности скорости на задней кромке, то коэффициент подъемной силы профиля равен $C_L=2\pi(\alpha+\lambda)$. При этом угол атаки α считается малым, а величина λ выражается в виде

$$\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}C_n=\frac{1}{2\pi b}\int_0^{\pi}\frac{y\,d\theta}{1+\cos\theta},$$

где y — ордината средней линии, равная величине $2b\cos\theta$ и отсчитываемая от середины линии, соединяющей переднюю кромку с задней.

Кроме того, показать, что коэффициент момента относительно передней кромки приближенно равен $^1/_4C_L+{}^1/_2\pi\lambda-{}^1/_4\pi C_2$. Показать также, что если коэффициент момента обращается в нуль вместе с подъемной силой, то центр давлений расположен на расстоянии четверти длины хорды от передней кромки для всех малых значений угла атаки.

Глава 8

ИСТОЧНИКИ И СТОКИ

8.10. Двумерный источник. Определение. Если двумерное движение жидкости представляет собой течение жидкости от какой-либо точки по радиусам симметрично во всех направлениях координатной плоскости, то эта точка называется *простым источником* (рис. 140, 141).

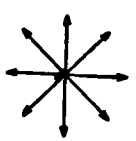


Рис. 140.

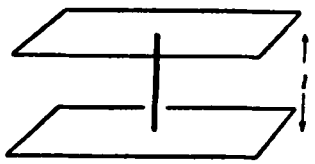


Рис. 141.

Двумерный источник можно рассматривать как прямую ось (единичной длины между двумя фиксированными плоскостями), из которой вытекает жидкость описанным выше образом.

Определение. Если $2\pi m$ есть полное количество жидкости, вытекающей в единицу времени, то m называется *мощностью источника*[1]).

Источник является чисто абстрактным понятием; таких источников в действительности не существует. Тем не менее это понятие оказывается полезным, так как многие движения жидкости можно описать, считая их обусловленными источниками, расположенными вне области, занятой жидкостью. Источник, таким образом, является точкой, в которой жидкость непрерывно образуется и вытекает. Так как скорость вблизи источника очень велика, то по теореме Бернулли давление должно быть большой *отрицательной* величиной.

Один этот факт показывает, что источник в вышеуказанном смысле не может физически существовать. Однако расширяющийся пузырек газа отталкивает окружающую жидкость и, таким образом, приближенно имитирует источник. Если мощность источника с течением времени не изменяется, то источник называется *установившимся*.

Определение. *Стоком* называется отрицательный источник. Таким образом, сток — это точка, в которую радиально втекает поток и в которой жидкость непрерывно поглощается.

Если u_r — радиальная скорость на расстоянии r от источника, то полное количество жидкости, вытекающее в единицу времени через окружность радиуса r, равно

$$2\pi r u_r = 2\pi m.$$

Таким образом,

$$u_r = \frac{m}{r};$$

[1]) Некоторые авторы обозначают через m объемный расход. Тогда мощность равна $m/2\pi$. Цель настоящего обозначения состоит в том, чтобы избежать повторения множителя 2π в последующем исследовании (ср. интенсивность циркуляции в п. 7.10).

это выражение представляет собой полную скорость для изолированного источника.

8.12. Комплексный потенциал для простого источника. Если источник мощности m находится в начале координат, то радиальная скорость в точке с координатами (r, θ) равна m/r. Следовательно,

$$-\frac{dw}{dz} = u - iv = \frac{m}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{m}{z},$$

$$w = -m\ln z.$$

Функция тока имеет вид $\psi = -m\theta$.

Если источник находится в точке z_0, то, перенося в нее начало координат, получаем

$$w = -m\ln(z - z_0).$$

Интересно сравнить этот результат с комплексным потенциалом для вихря интенсивности $\varkappa$, данным в п. 13.21. Математически вихрь является источником с мнимой мощностью.

Следует заметить, что с увеличением радиуса r скорость уменьшается, так что на большом расстоянии от источника жидкость почти неподвижна.

Характерным для источника (или стока) является то, что скорость стремится к бесконечности, когда мы приближаемся к источнику, и, следовательно, в непосредственной близости от источника скорость всегда радиальна, как бы жидкость ни двигалась в далеких точках.

8.20. Комбинация источника и стока. Движения, обусловленные равномерным потоком и любым числом источников, можно получить сложением соответствующих комплексных потенциалов, если жидкость безгранична.

Для доказательства рассмотрим комплексный потенциал

$$w = -Uz - m_1\ln z - m_2\ln(z - z_0).$$

Покажем, что этот потенциал задает равномерный поток в бесконечности и источники мощности m_1, m_2 в точках $z = 0$, $z = z_0$.

Так как

$$u - iv = -\frac{dw}{dz} = U + \frac{m_1}{z} + \frac{m_2}{z - z_0},$$

то при $|z| \to \infty$ получаем $u = U$, $v = 0$, так что имеется равномерный поток. С другой стороны, в окрестности точки $z = z_0$ положим $z = z_0 + re^{i\theta}$; здесь r мало. Тогда

$$u - iv = U + \frac{m_1}{z_0 + re^{i\theta}} + \frac{m_2}{r}e^{-i\theta}.$$

Первые два члена в правой части этого соотношения малы по сравнению с третьим, следовательно,

$$u = \frac{m_2}{r}\cos\theta, \quad v = \frac{m_2}{r}\sin\theta,$$

так что в точке z_0 имеется направленный наружу радиальный поток, обусловленный источником мощности m_2 в этой точке.

Таким же путем доказывается, что в начале координат имеется источник мощности m_1. Это доказательство может быть распространено на любое число источников и стоков.

Мы намеренно доказали свойство аддитивности потоков, так как оно не очевидно для источников и вообще не выполнимо в других случаях.

Например, обтекание кругового цилиндра с центром в начале координат задается комплексным потенциалом

$$U\left(z+\frac{a^2}{z}\right).$$

Движение, обусловленное источником в точке z_0, задается функцией $-m\ln(z-z_0)$.

Если оба эти потенциала сложить, то получим

$$U\left(z+\frac{a^2}{z}\right)-m\ln(z-z_0).$$

Эта функция является комплексным потенциалом некоторого движения, но не соответствует обтеканию цилиндра при наличии источника. Нарушение свойства аддитивности здесь очевидно, так как функция тока не равна постоянной величине на окружности $r=a$, поэтому цилиндр не является линией тока.

8.21. Источник в равномерном потоке. Рассмотрим комбинацию источника мощности m, расположенного в начале координат, и равномерного потока

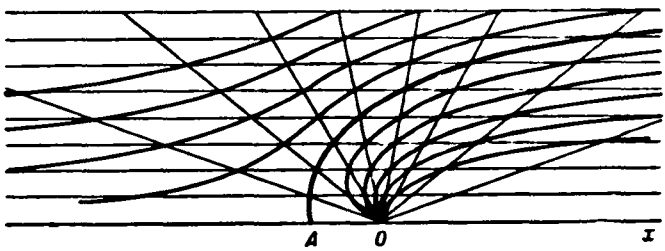


Рис. 142.

скорости U, параллельного оси x. Тогда, сложив соответствующие потенциалы (п. 8.20), получим

$$w=-Uz-m\ln z,$$

$$\frac{dw}{dz}=-U-\frac{m}{z}.$$

Здесь $z=-m/U$ является единственной критической точкой. Она расположена на действительной оси в точке, где скорость потока и скорость, обусловленная источником, уничтожают друг друга. Функция тока имеет вид

$$\psi=-Uy-m\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=-Uy-m\theta; \qquad (1)$$

линии тока легко провести по методу Рэнкина, как показано на рис. 142.

Мы видим, что линии тока симметричны относительно оси x, через которую нет потока жидкости. Разветвляющаяся линия тока проходит через критическую точку A и делит поток на две части. Следовательно, можно предположить, что эта кривая заменена твердой стенкой. Тогда функция тока (1) задает возмущение в равномерном потоке, обусловленное присутствнем этой стенки; источник расположен вне жидкости, и, таким образом, мы получили представление действительного движения жидкости.

Рассмотрим часть потока, для которой $y\geqslant 0$. Если мы будем отсчитывать угол θ против часовой стрелки от нулевого значения для точек, находящихся на положительной части оси x, то на отрицательной части оси x имеем $y=0$ и $\theta=\pi$. Следовательно, для этой части потока

формула (1) дает $\psi = -m\pi$ и разветвляющаяся линия тока имеет уравнение

$$-m\pi = -Uy - m\theta.$$

Она включает стенку и отрицательную часть оси x. Далее, $y \to m\pi/U = h$ при $\theta \to 0$, следовательно, имеется асимптота $y = h$ (рис. 143). В силу

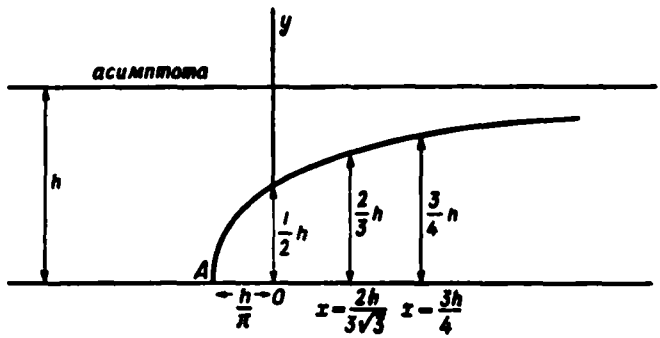


Рис. 143.

симметрии имеется вторая асимптота $y = -h$. Тогда из формулы (1) находим уравнение стенки в виде

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{y}\operatorname{tg}\frac{\pi y}{h}, \quad OA = \frac{h}{\pi}.$$

Например, найдем, что $x/h = 31{,}9$ при $y/h = 0{,}99$.

Полученный результат допускает некоторые интересные физические интерпретации.

Мы можем рассматривать соотношение (1) как функцию тока для потока в окрестности одного конца длинного затупленного тела, обращенного передней частью к потоку, например длинный остров в широкой реке.

С другой стороны, если мы сосредоточим внимание на части кривой выше оси x, то получим картину течения у дна океана; при этом ординаты дна изменяются от 0 до h достаточно постепенно.

Эту картину можно также рассматривать как поток ветра, встречающий отвесную скалу. В этой связи интересно отметить, что критическая точка A будет наиболее защищенным местом.

Кроме того, мы можем рассматривать любую линию тока как твердую стенку и тогда получим поток ветра над более пологой поверхностью земли, но здесь уже не имеется критической точки.

8.22. Источник и сток одинаковой мощности. Пусть имеются соответственно источник и сток (каждый мощности m) в точках A и B с аффиксами

$$ae^{i\alpha}, \; -ae^{i\alpha}.$$

Тогда комплексный потенциал имеет вид

$$w = -m\ln(z - ae^{i\alpha}) + m\ln(z + ae^{i\alpha}),$$

так что для произвольной точки P с координатой z функция тока имеет вид

$$\psi = -m \cdot (\angle APB).$$

Линии тока задаются уравнением $\psi = \text{const}$, или $\angle APB = \text{const}$, и, следовательно, они представляют собой соосные окружности, проходящие через точки A и B.

Поток направлен от источника к стоку, так что дуги одной окружности, расположенные по разные стороны линии AB, описываются в противоположных направлениях. Линия тока, совпадающая с прямой AB, является предельным случаем окружности. Направление течения на этой линии указано на рис. 144.

8.23. Диполь, или двойной источник. Предположим, что в только что рассмотренном случае течения жидкости точки A и B расположены очень близко друг к двугу, так что a мало. Тогда, используя разложение в ряд функции $\ln(1+k)$, можем записать равенства

$$w = -m\ln\left[z\left(1-\frac{ae^{i\alpha}}{z}\right)\right]+m\ln\left[z\left(1+\frac{ae^{i\alpha}}{z}\right)\right]=$$

$$=-m\ln\left(1-\frac{ae^{i\alpha}}{z}\right)+m\ln\left(1+\frac{ae^{i\alpha}}{z}\right)=$$

$$=\frac{2mae^{i\alpha}}{z}+\frac{2ma^3e^{3i\alpha}}{3z^3}+\ldots.$$

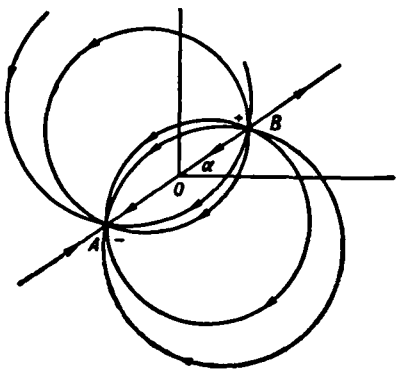
Пусть $2ma=\mu$, тогда

$$w=\frac{\mu e^{i\alpha}}{z}+\frac{\mu a^2e^{3i\alpha}}{3z^3}+\ldots.$$

Пусть теперь $a\to 0$, но величина μ остается постоянной, так что $m\to\infty$. Тогда, если точкн A и B совпадут, мы получим

$$w=\frac{\mu e^{i\alpha}}{z}.$$

Эта комбинация источника и стока бесконечной мощности, находящихся на бесконечно малом расстоянии друг от друга, называется *диполем* с моментом μ. Линиями тока по-прежнему являются окружностн (см. рис. 101), имеющие общую касательную, образующую с осью x угол α. Эта общая касательная называется *осью* диполя, при этом положительным направлением вдоль оси считается направление от стока к источнику. Для лучшего физического понимания диполя можно рассматривать его приближенно как короткую двумерную трубку, в один конец которой жидкость втекает и тотчас же вытекает с другого конца; при этом направление трубки является осью диполя.



Р и с. 144.

Комплексный потенциал можно получить другим путем, который является весьма поучительным. Рассмотрим сток в точке z_0 и источник в точке $z_0+\delta z_0$; в этом случае имеем

$$w=-m\ln(z-z_0-\delta z_0)+m\ln(z-z_0).$$

Отсюда можно получить приближенное равенство

$$w=-m\delta z_0\frac{\partial}{\partial z_0}\ln(z-z_0).$$

Пусть $\delta z_0=re^{i\alpha}$. Тогда, если $mr=\mu$ и остается константой при $r\to 0$, то мы получаем для комплексного потенциала диполя с моментом μ

в точке z_0 следующее выражение:

$$w=\frac{\mu e^{i\alpha}}{z-z_0}.$$

При этом ось диполя имеет направление α.

8.24. Эквивалентный слой диполей по Грину. Рассмотрим безвихревое движение жидкости в области L, ограниченной контуром C (см. рис. 88). Пусть движение жидкости задано комплексным потенциалом $w(z)$, аналитическим во всей области. Это условие исключает особенности и циркуляцию. Тогда по формуле Коши из п. 5.59 имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C)}\frac{w(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=w(z) \text{ или } 0, \tag{1}$$

смотря по тому, будет ли z внутри или вне области L.

Если ds обозначает элемент дуги C, проведенный в положительном направлении обхода, то мы можем написать $d\zeta=ds\,e^{i\theta}$ и, следовательно, для точки z области L формула (1) запишется в виде

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C)}\frac{w(\zeta)e^{i\theta}\,ds}{\zeta-z}=\int\limits_{(C)}\frac{\mu e^{i\chi}\,ds}{z-\zeta}, \tag{2}$$

где

$$\mu e^{i\chi}=w(\zeta)\,e^{i\left(\theta+\frac{1}{2}\pi\right)}/(2\pi). \tag{3}$$

Это уравнение определяет действительное положительное число μ и угол χ. Заметим теперь, что $\mu e^{i\chi}\,ds/(z-\zeta)$ является комплексным потенциалом в точке z для диполя мощности $\mu\,ds$, расположенного в точке ζ, ось которого имеет направление χ. Следовательно, формула (2) показывает, что комплексный потенциал $w(z)$ можно рассматривать как непрерывное распределение диполей вдоль контура C; при этом плотность распределения на единицу длины дуги дается формулой (3). Это распределение известно как *эквивалентный слой диполей по Грину*. Относительно другого вида эквивалентного слоя, также данного Грином, см. п. 13.64.

Заметим, что если точка z находится вне области L, то скорость, обусловленная распределением, равна нулю, поскольку, как это видно из формулы (1), $w(z)$ тогда является константой, а именно нулем.

Если область L двусвязная (как на рис. 161), то мы можем сделать ее односвязной, проводя воображаемый барьер AB. Тогда можно применить предыдущие соображения, если, кроме того, поместить диполи с каждой стороны барьера AB.

8.30. Источник и сток в равномерном потоке. Пусть имеется источник мощности m в точке $A(a, 0)$, сток мощности m в точке $B(-a, 0)$ и равномерный поток скорости U, параллельный действительной оси. Интересен случай, когда поток направлен от источника к стоку, т. е. в направлении отрицательных значений x.

Тогда имеем

$$w=Uz-m\ln(z-a)+m\ln(z+a).$$

Критические точки определяются из уравнения

$$U-\frac{m}{z-a}+\frac{m}{z+a}=0,$$

и, следовательно, даются формулой

$$z = \pm \sqrt{a^2 + \frac{2am}{U}}.$$

Пусть

$$\frac{2am}{U} = b^2 - a^2,$$

тогда имеем

$$z = \pm b,$$

так что критическими точками являются точки L и M, где $OL = OM = b$.

Функция тока имеет вид

$$\psi = Uy - m \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} + m \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} = Uy - m \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}.$$

Функция тока $\psi = 0$ содержит действительную ось $y = 0$ и, следовательно, разветвляющаяся линия тока имеет вид

$$\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2} = \operatorname{tg} \frac{Uy}{m}.$$

После преобразования получаем

$$x^2 + y^2 - a^2 = 2ay \operatorname{ctg} \frac{Uy}{m} = 2ay \operatorname{ctg} \frac{2ay}{b^2-a^2}.$$

Это уравнение представляет кривую, симметричную относительно обеих осей, так как если на ней находится точка с координатами (x, y), то на ней также находятся точки $(\pm x, \pm y)$.

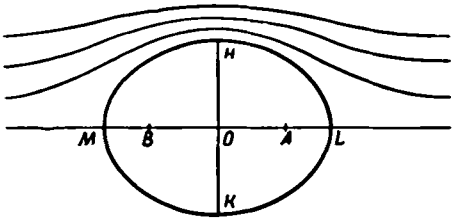


Рис. 145.

Значение y не может быть бесконечным на этой кривой, так как, когда мы удаляемся от AB, поток становится параллельным оси x. Следовательно, кривая имеет вид замкнутого овала типа, указанного на рис. 145.

Пусть $OH = c$, тогда $y = c$ при $x = 0$ и поэтому

$$c^2 - a^2 = 2ac \operatorname{ctg} \frac{2ac}{b^2-a^2};$$

величину c можно найти графически.

Если мы возьмем эту кривую в качестве фиксированной границы, то получим обтекание цилиндра, поперечным сечением которого является вышеупомянутая кривая.

Когда a мало, то приближенно имеем

$$\operatorname{ctg} \frac{2ac}{b^2-a^2} = \frac{b^2-a^2}{2ac},$$

следовательно,

$$c^2 = b^2.$$

Таким образом, $c \to b$ при $a \to 0$ и овал становится окружностью. В этом случае источник и сток образуют диполь и мы снова имеем обтекание кругового цилиндра радиуса b. Момент диполя $2am = \mu$, и, следовательно, имеем

$$\psi = Uy - \frac{b^2 Uy}{x^2+y^2},$$

что совпадает с результатом, уже полученным в п. 6.22.

Комплексный потенциал обтекания кругового цилиндра имеет вид

$$w = Uz + \frac{Ua^2}{z}.$$

Первый член представляет собой равномерный поток, второй — возмущение, обусловленное цилиндром. Таким образом, цилиндр радиуса a, помещенный в поток скорости U, ведет себя как диполь с моментом Ua^2 на оси цилиндра.

8.31. Два равных по мощности источника. Источники одинаковой мощности m, расположенные в точках $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$, характеризуются комплексным потенциалом

$$w = -m\ln(z-a) - m\ln(z+a), \quad \varphi + i\psi = -m\ln(x^2 - y^2 - a^2 + 2ixy). \quad (1)$$

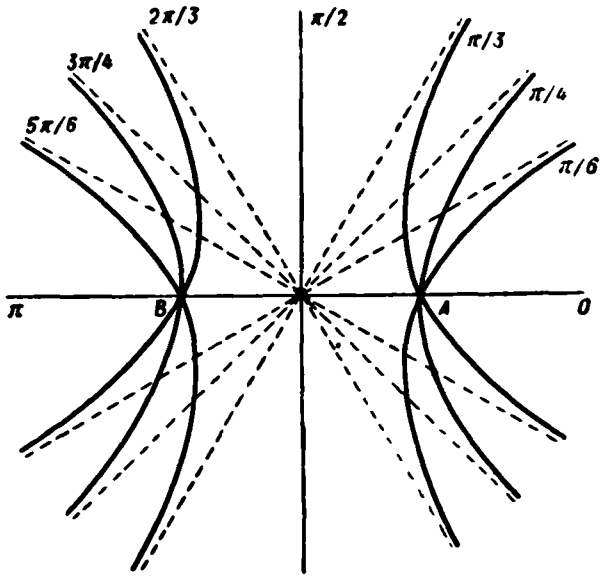


Рис. 146.

Следовательно, функция тока выражается в виде

$$\psi = -m\operatorname{arctg}\frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2},$$

откуда

$$x^2 + 2xy\operatorname{ctg}\frac{\psi}{m} - y^2 = a^2. \quad (2)$$

Таким образом, линиями тока являются равносторонние гиперболы с центрами в начале координат. Это видно, если уравнение (2) записать в форме

$$\left(x + y\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2m}\right)\left(x - y\operatorname{tg}\frac{\psi}{2m}\right) = a^2.$$

Отсюда также видно, что асимптоты, полученные приравниванием нулю каждого множителя, стоящего в левой части, пересекаются под прямыми углами.

Задавая величине $\psi/(2m)$ последовательно значения

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi,$$

мы получим картину, представленную на рис. 146, на которой пунктирные линии являются асимптотами.

Оси координат представляют собой линии тока, пересекающиеся под прямым углом в начале координат, которое является критической точкой.

Так как поток все-таки направлен вдоль асимптот, то на большом расстоянии от начала координат два источника ведут себя как один источник мощности $2m$, помещенный посредине между ними.

Если мы заменим линии тока Ox и Oy твердыми стенками, то формула (1) дает поток в бесконечной области, ограниченной двумя прямоугольными стенками, вытекающий через узкую щель в одной из стенок, как указано на рис. 147.

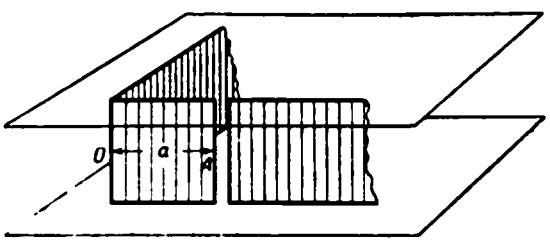


Рис. 147.

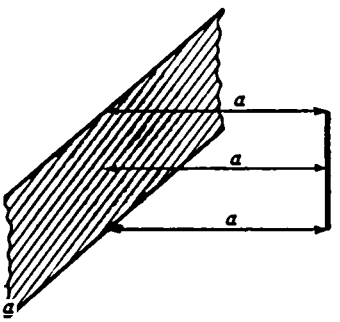


Рис. 148.

Если в качестве твердой границы взята одна ось y, то тогда формула (1) дает поток, обусловленный источником, параллельным плоскости, ограничивающей жидкость с одной стороны, как показано на рис. 148, где, как обычно, мы предполагаем, что жидкость ограничена также параллельными плоскостями, находящимися на единичном расстоянии друг от друга.

Этот последний результат имеет большое теоретическое значение, так как он дает основы метода отображений, к изложению которого мы переходим.

8.40. Метод отображений. В предыдущем пункте мы видели, что поток, обусловленный источником мощности m в точке A $(a, 0)$, при наличии плоскости $x = 0$ дается формулой

$$w = -m \ln(z-a) - m \ln(z+a).$$

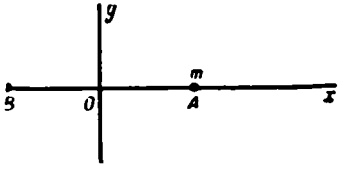


Рис. 149.

Это есть тот самый комплексный потенциал, который мы получили бы, если бы поместили источник мощностью m в точку B $(-a, 0)$ и представили бы себе, что жидкость имеет доступ во всю область по обе стороны от плоскости $x = 0$. Если ось y является линией тока для этой системы, то плоскость можно считать удаленной. Источник мощности m в точке B называется отображением источника мощности m в точке A относительно данного плоского барьера. Это простейший случай метода отображений, который кратко можно описать следующим образом.

Предположим, что в жидкости, имеющей одну или более границ C, находится система S источников и стоков. Далее, если поместить систему S' источников и стоков вне области, занятой жидкостью, и затем дать возможность жидкости иметь доступ во всю область и если при этом мы получим C как линию тока, то говорят, что система S' является отображением системы S относительно границы C. В случае плоского точечного источника система состоит из единственного источника, находящегося в точке A, граница C состоит из

плоскости $x = 0$ и отображенная система S' состоит из источника в точке B (рис. 149).

Заметим, что точка B является оптическим отражением точки A относительно данной плоскости, рассматриваемой как отражающая поверхность.

8.41. Действие на стенку точечного источника. Пусть источник находится в точке A $(a, 0)$, а стенка представляет собой плоскость $x = 0$. Отображением источника относительно стенки является источник той же мощности, расположенной в точке B $(-a,0)$, и, следовательно,

$$w = -m \ln (z-a) - m \ln (z+a) = -m \ln (z^2 - a^2),$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{-2mz}{z^2-a^2}.$$

На стенке $x = 0$, и поэтому

$$\frac{dw}{dz} = \frac{-2miy}{-y^2-a^2}, \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} = \frac{2miy}{-y^2-a^2},$$

отсюда находим

$$q^2 = \frac{4m^2y^2}{(y^2+a^2)^2}, \tag{1}$$

где q — скорость, направленная вдоль стенки, которая является линией тока.

Следовательно, давление на стенку задается формулой

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\Pi}{\varrho} - \frac{1}{2} q^2 = \frac{\Pi}{\varrho} - \frac{2m^2y^2}{(y^2+a^2)^2},$$

где Π — давление в бесконечности.

Если жидкость находится в покое, то давление повсюду равно Π. Таким образом, эффект движения состоит в уменьшении давления на стенку. Следовательно, стенка действует на источник с силой (на единицу ширины стенки), определяемой формулой

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varrho \cdot 2m^2y^2}{(y^2+a^2)^2} dy = \frac{\pi \varrho m^2}{a}. \tag{2}$$

Полагая $y = a \operatorname{tg} \theta$ (рис. 150), из формулы (1) мы получим, что на стенке имеет место выражение

$$q = \frac{2ma \operatorname{tg} \theta}{a^2 \sec^2 \theta} = \frac{m}{a} \sin 2\theta,$$

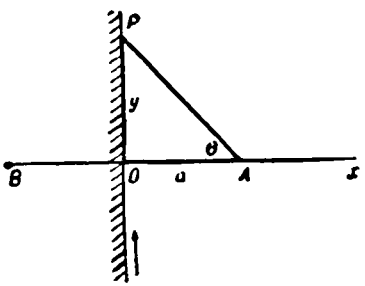


Рис. 150.

так что наибольшая скорость на стенке достигается при $\theta = \pm \pi/4$.

8.42. Общий метод отображений относительно плоскости. Мы можем поступать почти так же, как в случае теоремы о круге, рассмотренной в п. 6.21. Так, если функция

$$f(z) = -\Sigma m_r \ln (z - z_r)$$

является комплексным потенциалом источников и стоков, которые находятся в полуплоскости $y > 0$, то наличие плоского барьера вдоль прямой $y = 0$ приводит к комплексному потенциалу вида

$$w = f(z) + \bar{f}(z) = -\Sigma m_r \ln (z - z_r) - \Sigma m_r \ln (z - \bar{z}_r),$$

поскольку при $y=0$ мы имеем $z=\bar{z}$, так что w действительно и $y=0$ является линией тока $\psi=0$. Кроме того, если точки z_r лежат в области $y>0$, то точки $\bar{z}_r$ расположены в области $y<0$, так что этот прием не вводит новых особенностей в область $y>0$.

Аналогично, если все источники и стоки лежат в полуплоскости $x>0$, то наличие плоского барьера вдоль прямой $x=0$ приводит к комплексному потенциалу вида

$$w=f(z)+\bar{f}(-z)=-\Sigma m_r \ln(z-z_r)-\Sigma m_r \ln(-z-\bar{z}_r),$$

так как здесь при $x=0$ мы имеем $-z=\bar{z}$ и $\psi=0$. Этот метод также применим к прямолинейным вихрям (гл. 13).

8.43. Отображение диполя относительно плоскости. Если взять двумерный диполь с моментом μ, наклоненный под углом α к оси x, то его можно рассматривать как предельный случай стока в точке A и источника в точке B, причем прямая AB образует угол α с осью x.

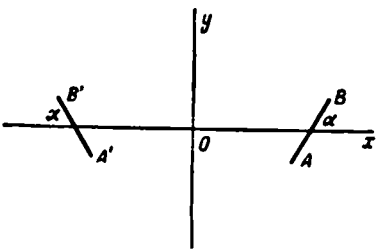


Рис. 151.

Отображениями источника и стока являются точки B' и A'; они получаются как оптические отражения точек B и A относительно оси y, представляющей данную плоскость. Переходя к пределу при $A\to B$, мы имеем $A'\to B'$, и, следовательно, отображение представляет собой диполь с моментом μ, ось которого образует с осью x угол $\pi-\alpha$ (рис. 151).

Используя метод п. 8.42, мы имеем для изолированного диполя в точке z_0 комплексный потенциал $f(z)=\mu e^{i\alpha}/(z-z_0)$, и, следовательно, при наличии плоскости $x=0$ получаем

$$w=\frac{\mu e^{i\alpha}}{z-z_0}-\frac{\mu e^{-i\alpha}}{z+\bar{z}_0}.$$

8.50. Источники при конформном преобразовании. Если отобразить плоскость z на плоскость ζ с помощью конформного преобразования

$$\zeta=f(z),$$

то источник в плоскости z преобразуется в источник в соответствующей точке плоскости ζ.

Доказательство. Пусть имеется источник мощности m в точке P с координатой $z=z_0$ в плоскости z и пусть точка Π с координатой $\zeta=\zeta_0$ в плоскости ζ соответствует точке P. Проведем малую окружность c с центром в точке z_0, и пусть γ — кривая в плоскости ζ, соответствующая этой окружности. Эта кривая γ должна окружать точку Π.

Поскольку функция тока ψ имеет одинаковое значение в соответствующих точках обеих плоскостей, то

$$-2\pi m=\int_{(c)} d\psi=\int_{(\gamma)} d\psi.$$

Мы можем брать окружность c сколь угодно малой, и кривая γ также будет уменьшаться, но интеграл от $d\psi$ вдоль кривой γ будет оставаться постоянным и, следовательно, в точке Π имеется источник. Если кривая γ охватывает точку Π только один раз (обычный случай), то источники в обеих плоскостях будут одинаковой мощности.

Если кривая γ охватывает n раз точку П, когда окружность c охватывает точку P один раз, то источник в точке П имеет мощность m/n.

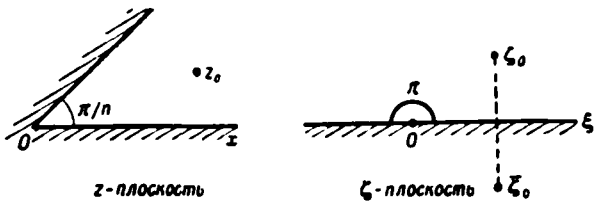
Для примера предположим, что $\zeta = z^3$ и что в точке $z = 0$ имеется источник мощности m.

Так как

$$\arg \zeta = 3 \arg z,$$

то, когда величина $\arg z$ увеличивается на 2π, величина $\arg \zeta$ увеличивается на 6π и, следовательно, кривая γ будет охватывать точку $\zeta = 0$ три раза. Таким образом, в точке $\zeta = 0$ имеется источник мощности $m/3$. С другой стороны, если $\zeta^3 = z$, то кривая γ охватывает точку $\zeta = 0$ один раз, когда окружность c охватывает точку $z = 0$ три раза; поэтому в точке $\zeta = 0$ имеется источник мощности $3m$.

8.51. Источник, расположенный в углу между двумя стенками. Пусть источник мощности m находится в точке z_0 между двумя стенками, накло-



Р и с. 152.

ненными друг к другу под углом π/n, и пусть одна стенка совпадает с осью x (рис. 152).

Рассмотрим преобразование

$$\zeta = z^n,$$

тогда

$$\arg \zeta = n \arg z,$$

и, следовательно, когда величина $\arg z$ увеличивается от 0 до π/n, величина $\arg \zeta$ увеличивается от 0 до π, а внутренняя область угла отображается на верхнюю половину плоскости ζ.

Источнику в точке z_0 соответствует равный по мощности источник в точке

$$\zeta_0 = z_0^n.$$

Отображением этого источника является равный по мощности источник в точке $\bar{\zeta}_0$, и, следовательно, комплексный потенциал источника вместе с его отображением выразится в виде

$$w = -m \ln (\zeta - \zeta_0) - m \ln (\zeta - \bar{\zeta}_0).$$

Таким образом, в плоскости z имеем

$$w = -m \ln (z^n - z_0^n) - m \ln (z^n - \bar{z}_0^n).$$

8.60. Источник вне кругового цилиндра. Пусть в точке $z = f$, где f — действительная величина, имеется источник мощности m, расположенный вне цилиндра радиуса a с центром в начале координат. Если источник один, то комплексный потенциал равен $-m \ln (z - f)$. Если цилиндр поместить

в поток, то, согласно теореме об окружности (см. п. 6.21), получим следующий потенциал:

$$w = -m\ln(z-f) - m\ln\left(\frac{a^2}{z} - f\right).$$

8.61. Отображение источника, расположенного вне кругового цилиндра. Если к комплексному потенциалу из предыдущего пункта добавить константу $m\ln(-1/f)$, то получим потенциал

$$w = -m\ln(z-f) - m\ln\left(z - \frac{a^2}{f}\right) + m\ln z.$$

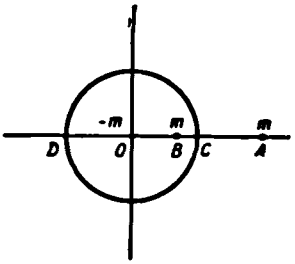


Рис. 153.

Этот комплексный потенциал (рис. 153) дает:
1) источник мощности m в точке A, $z = f$;
2) источник мощности m в точке B, $z = a^2/f$;
3) сток мощности $-m$ в начале координат.

Так как $OA \cdot OB = a^2$, то точки A и B являются инверсиями относительно кругового сечения цилиндра и, следовательно, точка B находится внутри цилиндра.

Таким образом, отображение источника, расположенного вне кругового цилиндра, дает систему, состоящую из одинакового по мощности источника

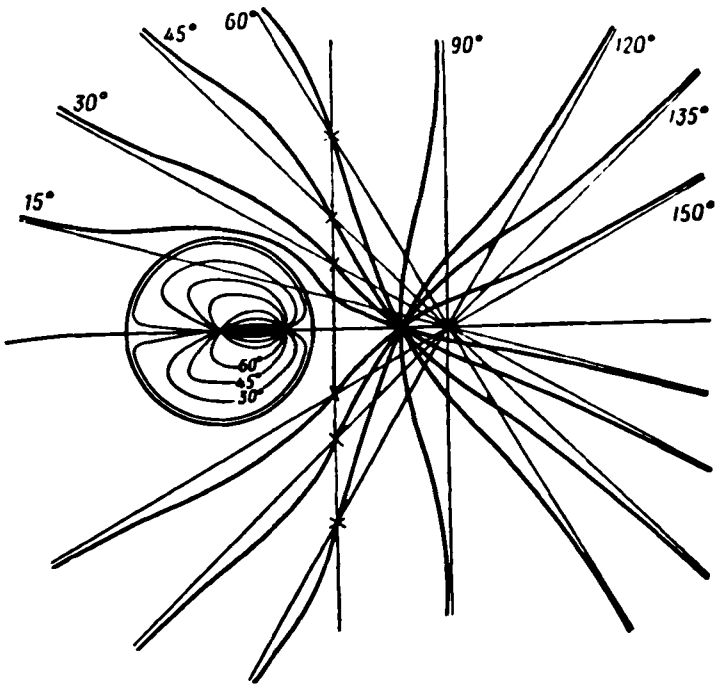


Рис. 154.

в точке инверсии и равного по мощности стока в центре цилиндра. Линии тока изображены на рис. 154. Отсюда следует, что источник внутри цилиндра и равный по мощности сток в центре цилиндра имеют в качестве отраженной системы равный по мощности источник в точке инверсии данного источника.

Скорость в любой точке P дается формулой

$$q = \left|\frac{dw}{dz}\right| = m\left|\frac{z^2 - a^2}{(z-f)\,z\,(z - a^2/f)}\right| = m\,\frac{PC \cdot PD}{PA \cdot PO \cdot PB},$$

где C и D — точки, в которых прямая AB пересекает окружность.

Если точка P находится на окружности, то треугольники OBP и OPA подобны и поэтому

$$PB : PA = a : f.$$

8.62. Сила, действующая на круговой цилиндр от источника. Если взять, как это показано на рис. 153, обтекаемый цилиндр с источником в точке A на оси x, то по теореме Чаплыгина — Блазиуса имеем

$$X - iY = \frac{1}{2} i\varrho \int \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz,$$

где интеграл берется по контуру цилиндра. Теперь заметим, что

$$w = m \ln z - m \ln (z - f) - m \ln (z - f'),$$

где

$$OA = f, \quad OB = f' = \frac{a^2}{f},$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{m}{z} - \frac{m}{z-f} - \frac{m}{z-f'}.$$

Возводя в квадрат последнее соотношение и выражая результат в виде суммы дробей, получаем

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \frac{m^2}{z^2} + \frac{m^2}{(z-f)^2} + \frac{m^2}{(z-f')^2} + \frac{2m^2}{zf} - \frac{2m^2}{f(z-f)} + \\ + \frac{2m^2}{(z-f)(f-f')} + \frac{2m^2}{(z-f')(f'-f)} + \frac{2m^2}{zf'} - \frac{2m^2}{(z-f')f'}.$$

Внутри контура имеются такие полюсы: $z = 0$, $z = f'$, следовательно, сумма вычетов равна

$$\frac{2m^2}{f} + \frac{2m^2}{f'-f} + \frac{2m^2}{f'} - \frac{2m^2}{f'} = \frac{2m^2 f'}{f(f'-f)} = \frac{2m^2 a^2}{f(a^2-f^2)}.$$

Поэтому

$$X - iY = \frac{1}{2} i\varrho \cdot 2\pi i \cdot \frac{2m^2 a^2}{f(a^2-f^2)},$$

отсюда

$$Y = 0, \quad X = \frac{2\pi\varrho m^2 a^2}{f(f^2-a^2)}.$$

Следовательно, результирующая сила притягивает цилиндр к источнику. Исследование линий тока показывает, что давление имеет большее значение со стороны, наиболее удаленной от источника. То же самое верно для стока.

8.63. Теорема Лагалли. Рассмотрим равномерный поток и источник; комплексный потенциал для потока с компонентами скорости $(-U, -V)$ в бесконечности и при наличии источника мощности m в точке $z = a$ имеет вид

$$(U - iV) z - m \ln (z - a).$$

Если в поток поместить цилиндр, то комплексный потенциал изменится из-за добавления функции, которая должна равняться нулю в бесконечности, так как присутствие цилиндра не может оказывать воздействия на удаленные части жидкости. Для общности предположим, что вокруг цилиндра имеет место циркуляция $\varkappa$. Тогда полный комплексный потенциал на достаточно большом расстоянии от цилиндра имеет вид

$$w = (U - iV) z - m \ln (z - a) + ik \ln z + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \ldots, \qquad (1)$$

причем последние члены выражают наличие циркуляции и возмущение, вносимое цилиндром.

Комплексную скорость запишем следующим образом:

$$-\frac{dw}{dz}=-(U-iV)+\frac{m}{z-a}-\frac{i\varkappa}{z}+\frac{A}{z^2}+\frac{2B}{z^3}+\ldots. \qquad (2)$$

Для нахождения силы, действующей на цилиндр, по теореме Чаплыгина — Блазиуса имеем

$$X-iY=\frac{i\varrho}{2}\int\limits_{(C)}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz.$$

Пусть S — окружность большого радиуса, содержащая внутри себя цилиндр и источник (рис. 155). По методу п. 5.54 мы можем расширить контур цилиндра до S и, таким образом, написать

$$\int\limits_{(S)}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz=\int\limits_{(C)}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz+\int\limits_{(\gamma)}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz,$$

где γ — малый контур, проведенный вокруг источника. Поэтому находим

$$X-iY=\frac{i\varrho}{2}\int\limits_{(S)}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz-\frac{i\varrho}{2}\int\limits_{(\gamma)}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz. \qquad (3)$$

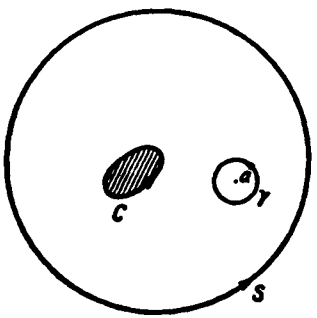


Рис. 155.

Далее, на окружности S в силу того, что $|z|$ велик, мы можем разложить $1/(z-a)$ по степеням $1/z$. Следовательно, из формулы (2) получим

$$-\frac{dw}{dz}=-(U-iV)+\frac{m}{z}\left(1+\frac{a}{z}+\frac{a^2}{z^2}+\ldots\right)-\frac{i\varkappa}{z}+\frac{A}{z^2}+\ldots,$$

а отсюда

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=(U-iV)^2-\frac{2(U-iV)(m-i\varkappa)}{z}+\frac{A'}{z^2}+\frac{B'}{z^3}+\ldots,$$

где A', B', ... — некоторые константы. Таким образом по теореме о вычетах находим

$$\frac{1}{2}i\varrho\int\limits_{(S)}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz=2\pi\varrho(U-iV)(m-i\varkappa). \qquad (4)$$

Для вычисления второго интеграла в формуле (3) мы заметим, что, согласно формуле (2),

$$-\frac{dw}{dz}=f(z)+\frac{m}{z-a},$$

где

$$f(z)=-\frac{d}{dz}[w-(-m\ln(z-a))].$$

Следовательно, функция $f(z)$ представляет собой комплексную скорость, полученную при исключении источника из первоначального комплексного потенциала; функция $f(z)$ аналитична внутри контура γ. Далее имеем

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=(f(z))^2+\frac{m^2}{(z-a)^2}+\frac{2mf(z)}{z-a}. \qquad (5)$$

По теореме Тейлора находим

$$f(z)=f[(z-a)+a]=f(a)+(z-a)f'(a)+\ldots.$$

Отсюда вычет выражения $\left(\frac{dw}{dz}\right)^2$ в точке $z=a$ равен $2mf(a)$. Используя еще раз теорему о вычетах, из формул (3) и (4) получаем

$$X-iY=2\pi\varrho(U-iV)(m-i\varkappa)+2\pi\varrho mf(a)=$$
$$=-2\pi\varrho i\varkappa(U-iV)+2\pi\varrho m(U-iV+f(a)). \quad (6)$$

Здесь величина $f(a)$ является комплексной скоростью в точке a, «индуцированной» той частью комплексного потенциала, которая остается после удаления источника мощности m. Таким образом, обозначая эту «индуцированную» скорость через u_m-iv_m, мы окончательно получаем

$$X-iY=-2\pi\varrho i\varkappa(U-iV)+2\pi\varrho m(U-iV+u_m-iv_m). \quad (7)$$

Эта формула выражает теорему Лагалли, которую можно распространить на любое число источников, добавляя каждый раз член такого же вида, как последний член в формуле (7). Чтобы найти соответствующее выражение для момента M, имеем

$$M+iN=-\tfrac{1}{2}\varrho\int_{(S)}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z\,dz+\tfrac{1}{2}\varrho\int_{(\gamma)}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z\,dz.$$

Вычислив вычеты по предыдущей формуле, получим

$$M+iN=-\pi\varrho i\left[(m-i\varkappa)^2-m^2-2(U-iV)(A+ma)-2amf(a)\right]=$$
$$=2\pi\varrho iA(U-iV)+\pi\varrho i\varkappa(\varkappa+2im)+2\pi\varrho ima(U-iV+u_m-iv_m). \quad (8)$$

Момент M является действительной частью этого выражения. Теорема Лагалли принимает интересную форму в случае, когда поток и циркуляция отсутствуют, так что в поле источника находится только один цилиндр. В этом случае формула (7) принимает вид

$$X+iY=2\pi\varrho m(u_m+iv_m), \quad (9)$$

в то время как выражение, определяющее момент

$$M+iN=2\pi\varrho ima(u_m-iv_m),$$

показывает, что M является моментом силы (X, Y), действующей в точке a. Следовательно, на цилиндр действует сила (X, Y) по линии, проходящей через источник и в том же направлении, что и скорость, индуцированная в источнике.

Таким образом, мы получили следующую теорему.

Теорема. *Источник мощности m при наличии цилиндра действует на цилиндр с комплексной силой $2\pi\varrho m(u_m+iv_m)$, линия действия которой проходит через источник, где u_m+iv_m — комплексная скорость, индуцированная той частью комплексного потенциала, которая остается после удаления источника.*

Когда имеется несколько источников, то каждому из них соответствует своя сила (9) со своей линией действия [1]). Эту теорему мы можем применить сразу же для нахождения силы, действующей на круглый цилиндр от источника.

Таким образом, в обозначениях п. 8.62 имеем

$$w=m\ln z-m\ln(z-f)-m\ln(z-f').$$

Отсюда находим

$$f(z)=-\frac{m}{z}+\frac{m}{z-f'},$$

$$u_m-iv_m=-\frac{m}{f}+\frac{m}{f-f'}=\frac{ma^2}{f(f^2-a^2)}.$$

[1]) Соответствующая трехмерная теорема доказывается в п. 15.42.

следовательно,

$$X - iY = \frac{2\pi\rho m^2 a^2}{f(f^2 - a^2)},$$

как это уже было получено ранее.

8.64. Источник вне эллиптического цилиндра. В п. 6.31 преобразование Жуковского было использовано для получения потока вокруг эллиптического цилиндра, после того как был получен соответствующий поток вокруг кругового цилиндра. Подобным же образом комплексный потенциал, обусловленный источником вне кругового цилиндра, может быть использован для получения комплексного потенциала источника вне эллиптического цилиндра. Рассмотрим круговой цилиндр радиуса $(a+b)/2$ с источником в точке Z_0. Тогда в плоскости Z имеем

$$w = +m \ln Z - m \ln (Z - Z_0) - m \ln (Z - Z_0'),$$

где Z_0' — инверсия точки Z_0, и, следовательно, если

$$Z_0 = re^{i\alpha},$$

то мы получим

$$Z_0' = \frac{(a+b)^2}{4r} e^{i\alpha}.$$

С помощью преобразования п. 6.31

$$Z = \frac{1}{2}\left[z + \sqrt{(z^2 - c^2)}\right],$$

$$Z_0 = \frac{1}{2}\left[z_0 + \sqrt{(z_0^2 - c^2)}\right],$$

мы получим комплексный потенциал для источника мощности m в точке z_0 при наличии в потоке эллиптического цилиндра с полуосями a и b.

8.70. Отображение на единичный круг. Рассмотрим в плоскости Z круг единичного радиуса с центром в начале координат. Координаты любой точки окружности этого круга можно представить в форме $X = \cos\theta$,

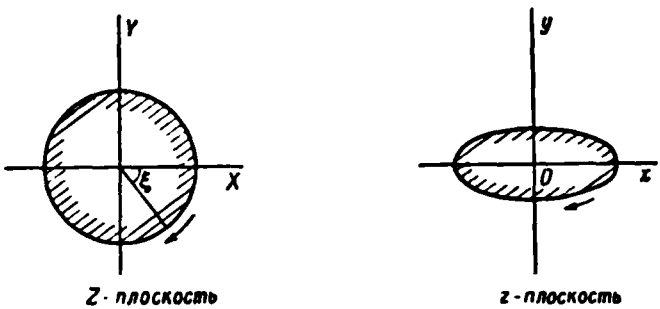


Рис. 156.

$Y = \sin\theta$. Так как угол θ увеличивается от 0 до 2π, то точка (X, Y) описывает окружность в направлении против часовой стрелки. Поскольку мы будем рассматривать область вне этой окружности, то удобно написать $\theta = -\xi$, так что при увеличении ξ от 0 до 2π точка (X, Y) описывает окружность по часовой стрелке и, следовательно, область, внешняя по отношению к окружности, остается слева (рис. 156). Таким образом, каждая точка окружности может быть выражена в виде

$$Z = X + iY = \cos\xi - i\sin\xi = e^{-i\xi}. \qquad (1)$$

Если координаты точки заданной кривой можно представить в виде

$$z = a_0 e^{-i\xi} + b_0 + b_1 e^{i\xi} + b_2 e^{2i\xi} + \dots, \tag{2}$$

где кривая описывается по часовой стрелке при увеличении ξ от 0 до 2π, то область, внешняя относительно данной кривой, отображается на область, внешнюю относительно единичного круга, с помощью формулы

$$z = f(Z) = a_0 Z + b_0 + \frac{b_1}{Z} + \frac{b_2}{Z^2} + \dots. \tag{3}$$

Этот результат получается путем исключения ξ из формул (1) и (2), так как направления обхода кривых одинаковы.

Например, в случае эллипса с полуосями (a, b) мы имеем

$$z = a\cos\xi - ib\sin\xi = \frac{1}{2}(a+b)\,e^{-i\xi} + \frac{1}{2}(a-b)\,e^{i\xi}, \tag{4}$$

так что требуемое отображение

$$z = \frac{a+b}{2} Z + \frac{a-b}{2Z} \tag{5}$$

является преобразованием Жуковского.

Семейство кривых, обладающих этим свойством, было изучено Рингом [1]); оно описывается уравнением

$$z = \frac{a+b}{2} e^{-i\xi} + \frac{a-b}{2} e^{i\xi} + \frac{1}{2} b e^{2i\xi}, \qquad 0 < b < a. \tag{6}$$

Рассматриваемые кривые отображаются на единичную окружность $|Z| = 1$ с помощью формулы

$$z = \frac{a+b}{2} Z + \frac{a-b}{2Z} + \frac{b}{2Z^2}, \tag{7}$$

которую следует сравнить с формулой (5).

Это семейство состоит из кривых, начиная от гипоциклоид с тремя точками возврата, если $a = b$, и кончая симметричными профилями крыльев, если $b < \frac{1}{2}a$.

8.71. Источники вне цилиндра. Пусть область в плоскости z, внешняя относительно кривой C, отображается на область, внешнюю относительно окружности $|Z| = 1$ в плоскости Z, с помощью функции

$$z = f(Z). \tag{1}$$

Если в рассматриваемой области вне кривой C в плоскости z имеется источник мощности m в точке z_0, то в соответствующей точке Z_0 вне окружности имеется источник мощности m и, следовательно, по теореме об окружности имеем

$$w = -m\ln(Z - Z_0) - m\ln\left(\frac{1}{Z} - \bar{Z}_0\right), \tag{2}$$

что вместе с формулой (1) определяет комплексный потенциал w в плоскости z.

В случае диполя имеем, как в п. 8.23,

$$m = -m\delta Z_0 \frac{\partial}{\partial Z_0} \ln(Z - Z_0) - m\delta\bar{Z}_0 \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_0} \ln\left(\frac{1}{Z} - \bar{Z}_0\right).$$

---

[1]) Wrinch D., *Phil. Mag.* (6), 48 (1924).

Далее, если положим $\mu e^{i\alpha} = m\delta z_0$, то из формулы (1) получим

$$m\delta Z_0 = \frac{\mu e^{i\alpha}}{f'(Z_0)}, \quad m\delta \bar{Z}_0 = \frac{\mu e^{-i\alpha}}{f'(Z_0)},$$

таким образом,

$$w = \frac{\mu e^{i\alpha}}{(Z - Z_0) f'(Z_0)} + \frac{\mu e^{-i\alpha} Z}{(1 - Z\bar{Z}_0) \bar{f}'(Z_0)}.$$

8.72. Сила, действующая на цилиндр. Воспользуемся теоремой Лагалли из п. 8.63, согласно которой

$$X - iY = 2\pi\varrho m (u_m - iv_m),$$

где индуцированная скорость вычисляется путем отбрасывания источника в комплексном потенциале. Таким образом, $u_m - iv_m = F'(z_0)$, где $F(z) = -w - m \ln(z - z_0)$; $z = f(Z)$.

Следовательно, воспользовавшись формулой (2) п. 8.71, получим

$$F(z) = m \ln(Z - Z_0) + m \ln\left(Z - \frac{1}{\bar{Z}_0}\right) - m \ln Z - m \ln\{f(Z) - f(Z_0)\}.$$

Таким образом, имеем

$$u_m - iv_m = \left\{\frac{m}{Z - Z_0} - \frac{mf'(Z)}{f(Z) - f(Z_0)} + \frac{m\bar{Z}_0}{Z\bar{Z}_0 - 1} - \frac{m}{Z}\right\}_{Z=Z_0} \cdot \left(\frac{dZ}{dz}\right)_{Z=Z_0}.$$

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора,

$$f(Z) = f(Z_0) + (Z - Z_0) f'(Z_0) + \frac{1}{2}(Z - Z_0)^2 f''(Z_0) + \ldots,$$

откуда после приведения к одному знаменателю получим

$$X - iY = \frac{2\pi\varrho m^2}{f'(Z_0)} \left\{-\frac{f''(Z_0)}{2f'(Z_0)} + \frac{1}{Z_0(Z_0\bar{Z}_0 - 1)}\right\}.$$

По теореме, доказанной в п. 8.63, линия действия этой силы проходит через точку z_0, так что нет необходимости отдельно вычислять момент этой силы.

Простой иллюстрацией этого результата является применение к эллиптическому цилиндру, отображение которого дается преобразованием Жуковского (5) п. 8.70. Анализ этого случая предлагается выполнить в качестве упражнения.

8.80. Источник и сток вне кругового цилиндра. Рассмотрим сток мощности m в точке S_1 и равный с ним по мощности источник в точке S_2, оба расположенные вне кругового цилиндра с центром O. Если S_1' и S_2' — точки инверсии, то отображенная относительно окружности система состоит из стока мощности $-m$ в точке S_1', источника мощности m в точке O, источника мощности m в точке S_2' и стока мощности $-m$ в точке O. Она сводится к стоку мощности $-m$ в точке S_1' и источнику мощности m в точке S_2', так как источник и сток в точке O нейтрализуют друг друга.

Поскольку

$$OS_1 \cdot OS_1' = a^2 = OS_2 \cdot OS_2',$$

точки S_1, S_2, S_1', S_2' являются циклически сопряженными.

Так как линиями тока для источника и равного по мощности стока являются окружности, то окружность, проходящая через вышеуказанные четыре точки, является линией тока. Следовательно, окружности пересекаются в критических точках A и B.

Поскольку $OA^2 = OS_1 \cdot OS_1'$, то прямая OA касается окружности $S_1S_2S_2'S_1'$ и, следовательно, две окружности пересекаются ортогонально в точках A и B (ср. п. 4.6).

Направление потока на разветвляющейся линии тока указано на рис. 157.

8.81. Отображение диполя относительно кругового цилиндра. Пусть точка S_1 на рис. 157 приближается к точке S_2, тогда как произведение $m \cdot S_1S_2 = \mu$ остается конечным. В пределе мы получим диполь с моментом μ; построим его отображение относительно окружности.

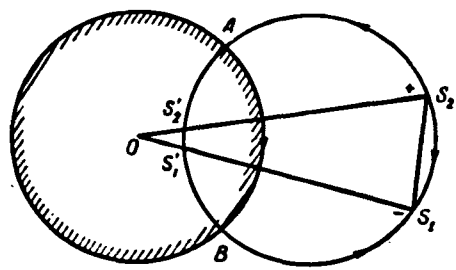


Рис. 157.

Так как треугольники $OS_1'S_2'$ и OS_2S_1 подобны, то

$$\frac{S_1'S_2'}{S_1S_2} = \frac{OS_1'}{OS_2}.$$

Следовательно, момент отраженного диполя равен

$$\mu' = \mu \cdot \lim_{s_1 \to s_2} \frac{OS_1'}{OS_2} = \mu \cdot \frac{OD}{OC},$$

где точка C характеризует положение диполя с моментом μ, а точка D характеризует положение диполя с моментом μ' (рис. 158). Поскольку C и D — есть инверсии, то если $OC = f$, то $OD = a^2/f$ и поэтому

$$\mu' = \mu a^2/f^2.$$

Обращаясь снова к рис. 157, мы видим, что если точка S_1 в пределе совпадает с точкой S_2, то окружность, проходящая через точки $S_1S_2S_2'S_1'$, пересечет оси диполей в точках C и D. Следовательно, отображением диполя с моментом μ, находящегося на расстоянии f от центра цилиндра радиуса a, является диполь в точке инверсии с моментом $\mu a^2/f^2$. Оси диполя и его отображения одинаково наклонены к соединяющей их линии, но не параллельны. (Такие линии удобно называть *антипараллельными*.)

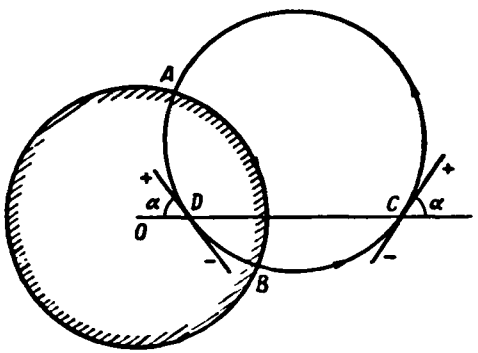


Рис. 158.

Вышеуказанная окружность, которая касается осей диполя в точках C и D, по-прежнему является линией тока и пересекает цилиндр в точках A и B.

8.82. Сила, действующая на цилиндр, обусловленная диполем. Пусть диполь находится на расстоянии f от центра цилиндра радиуса a и помещается на действительной оси, как показано на рис. 158.

Пусть μ и α обозначают момент и угол наклона диполя. Тогда если $ff' = a^2$, то мы имеем (см. п. 8.23) комплексный потенциал вида

$$w = \frac{\mu e^{i\alpha}}{z-f} - \frac{\mu a^2}{f^2} \frac{e^{-i\alpha}}{z-f'},$$

причем второй член обусловлен наличием в точке D отображения диполя, находящегося в точке C. Отсюда получаем следующее соотношение:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \frac{\mu^2 e^{2i\alpha}}{(z-f)^2} + \frac{\mu^2 a^4 e^{-2i\alpha}}{f^4 (z-f')^4} - \frac{2\mu^2 a^2}{f^2 (z-f)^2 (z-f')^2}.$$

Согласно теореме Чаплыгина — Блазиуса, результирующую силу можно записать в виде

$$X - iY = \frac{1}{2} i\varrho \int \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz.$$

Здесь интеграл берется по окружности. Единственным полюсом внутри контура является точка $z = f'$. Следовательно, вычет представляет собой коэффициент при $(z-f')^{-1}$, если третий член вышеприведенного соотношения записать в виде суммы простых дробей или разложить по возрастающим степеням $(z-f')$. Положим $y = z - f'$, тогда искомое разложение можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{(z-f')^2(z-f)^2} = \frac{1}{y^2(y+f'-f)^2} = \frac{1}{y^2(f-f')^2}\left(1 - \frac{y}{f-f'}\right)^{-2} =$$
$$= \frac{1}{y^2(f-f')^2}\left(1 + \frac{2y}{f-f'} + \frac{3y^2}{(f-f')^2} + \dots\right).$$

Отсюда коэффициент при $(z-f')^{-1}$, или y^{-1} равен

$$\frac{2}{(f-f')^3} = \frac{2f^3}{(f^2-a^2)^3}.$$

Следовательно,

$$X - iY = \frac{1}{2} i\varrho \cdot 2\pi i \cdot \frac{-2\mu^2 a^2}{f^2} \cdot \frac{2f^3}{(f^2-a^2)^3},$$

$$X = \frac{4\pi\varrho\mu^2 a^2 f}{(f^2-a^2)^3}, \quad Y = 0.$$

Полученное выражение для силы, действующей на единицу длины цилиндра, показывает, что цилиндр движется по направлению к диполю. Интересно отметить, что сила не зависит от ориентации диполя.

Так как все силы давления, действующие на границу, проходят через центр цилиндра, то момент этих сил относительно центра равен нулю.

8.83. Распространение теоремы Лагалли на диполи. Диполю в комплексном потенциале будет соответствовать член $\mu e^{i\alpha}/(z-a)$. Таким образом, в обозначениях п. 8.63 имеем

$$\int_{(S)} \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = -2\pi\varrho i\varkappa (U - iV);$$

члены, содержащие множитель m, теперь исчезнут.

Формула (5) п. 8.63 примет вид

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = (f(z))^2 + \frac{\mu^2 e^{2i\alpha}}{(z-a)^4} + \frac{2\mu e^{i\alpha} f(z)}{(z-a)^2},$$

где $f(z)$ снова обозначает часть комплексной скорости, полученной отбрасыванием диполя в комплексном потенциале. По теореме Тейлора имеем

$$f(z) = f[(z-a)+a] = f(a) + (z-a) f'(a) + \dots.$$

Вычет в точке $z = a$ оказывается равным $2\mu e^{i\alpha} f'(a)$.

Таким образом, формула (6) п. 8.63 принимает вид

$$X - iY = -2\pi\varrho i\varkappa (U - iV) + 2\pi\varrho\mu e^{i\alpha} f'(a).$$

Это и есть искомое обобщение теоремы Лагалли.

Для того чтобы применить эту формулу к случаю п. 8.82, отбросим в комплексном потенциале w член, обусловленный диполем в точке $z = f$. Тогда получим

$$f(z) = -\frac{\mu a^2}{f^2} \frac{e^{-i\alpha}}{(z-f')^2}.$$

Следовательно, как прежде, получим формулу

$$X - iY = 2\pi\varrho\mu e^{i\alpha}\frac{\mu a^2}{f^2}\cdot\frac{2e^{-i\alpha}}{(f-f')^3}\cdot\frac{4\pi\varrho\mu^2a^2f}{(f^2-a^2)^3}.$$

8.90. Источник в сжимаемом потоке. Пусть имеется двумерный источник мощности $2\pi m$ в единицу времени и пусть q обозначает скорость на расстоянии r от источника (рис. 159). Тогда уравнение неразрывности дает

$$2\pi r\varrho q = 2\pi m,$$

откуда, используя обозначения п. 1.63 и формулу (7) п. 1.63, получаем

$$r = \frac{m}{c_0\varrho_0 M}\frac{c_0\varrho_0}{c\varrho} =$$

$$= \frac{m}{c_0\varrho_0 M}\left[1+\frac{1}{2}(\gamma-1)M^2\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \qquad (1)$$

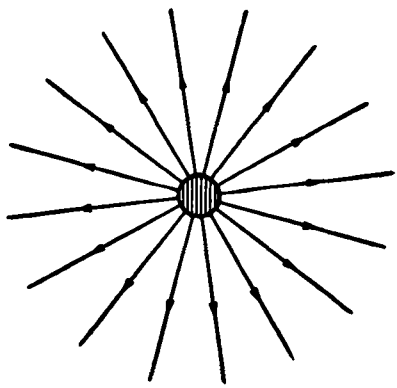


Рис. 159.

где M — число Маха.

Дифференцируя это соотношение по M, легко показать, что r имеет минимальное значение при $M=1$, и, следовательно, по формуле (1) получаем

$$\frac{r}{r_{\min}} = \left(\frac{2}{\gamma+1}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}M^2\right)^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}\Big/ M. \qquad (2)$$

Таким образом, движение жидкости имеется только вне окружности радиуса $r_{\min}$ и не может быть продолжено внутрь окружности. Следовательно, для размера источника имеется физическая нижняя грань. Источник не может сжаться в точку. Вне окружности мы имеем или чисто дозвуковой поток, в котором q постепенно уменьшается до тех пор, пока число M не станет равным нулю в бесконечности, или сверхзвуковой поток, в котором q постоянно увеличивается до тех пор, пока число M не станет равным бесконечности в бесконечности. Такие потоки могут иметь место между двумя твердыми плоскостями, наклоненными под углом, как показано на рис. 152, при этом источник находится в угловой точке.

ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ 8

1. Построить по методу Рэнкина линии тока для течения, обусловленного двумя равными по мощности источниками.

2. Провести линии тока для течения, обусловленного равными по мощности источником и стоком в двух случаях:

(I) когда только они одни находятся в жидкости;

(II) когда они расположены в течении, перпендикулярном к линии, соединяющей источник и сток.

3. Источник и сток одинаковой мощности помещены на данном расстоянии друг от друга в бесконечной покоящейся жидкости. Показать, что линиями тока являются окружности и что скорость жидкости вдоль любой линии тока обратно пропорциональна расстоянию до линии, соединяющей источник и сток.

4. Два источника одинаковой мощности расположены соответственно в точках $(\pm a, 0)$ неограниченной жидкости. Показать, что в любой точке окружности $x^2+y^2=a^2$ скорость движения жидкости параллельна оси y и обратно пропорциональна координате точки. Требуется также определить точку оси y, в которой скорость наибольшая.

Показать, что если равномерный поток, параллельный оси y, скомбинировать с двумя источниками, то обязательно существуют две точки, в которых скорость обращается в нуль.

5. Пусть в точке A имеется источник мощности m, а в точке B — сток мощности $-m$. Пусть равномерный поток со скоростью U направлен по BA. Найти критические точки и доказать, что они лежат на линии AB или на перпендикуляре к ней, проведенном в ее середине, в зависимости от величины скорости потока. Провести в каждом случае линии тока.

6. Имеется источник в точке A и равный ему по мощности сток в точке B. Линия AB совпадает с направлением равномерного потока. Определить форму линий тока. Пусть точка A имеет координаты $(a, 0)$, точка B — координаты $(-a, 0)$; пусть отношение величины потока жидкости, вытекающего из точки A в единицу времени к скорости потока, равно $2\pi b$. Показать, что функция тока имеет вид

$$\psi = Vy - Vb \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}.$$

Доказать, что характерные размеры овала (длина $2l$, ширина $2d$), который представляет собой часть разветвляющейся линии тока, определяются формулами

$$l = \sqrt{a^2+2ab}, \quad \operatorname{tg} \frac{d}{b} = \frac{2ad}{d^2-a^2}.$$

Доказать также, что геометрическое место точек, в которых скорость равна скорости равномерного потока, имеет следующий вид

$$x^2 - y^2 = a^2 + ab.$$

7. Двумерный источник мощности m расположен в точке $(a, 0)$; при этом ось y является неподвижной границей. Найти на границе точки, в которых скорость жидкости имеет максимальное значение.

Показать, что результирующее давление на ту часть оси y, которая находится между точками $y = \pm b$, равно

$$2p_0 b - 2m^2\varrho \left\{ \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \frac{b}{a^2+b^2} \right\},$$

где p_0 — давление в бесконечности.

8. Определить действующую на стенку силу, вызванную диполем с моментом μ, находящимся на расстоянии a от стенки и с осью, наклоненной к ней под углом α. По какому направлению действует эта сила на стенку?

9. Доказать, что при конформном преобразовании диполь преобразуется в диполь, но что моменты этих диполей будут различны.

10. Два источника, каждый мощности m, помещены в точках $(-a, 0)$ и $(a, 0)$; сток мощности $2m$ помещен в начале координат. Показать, что линиями тока являются кривые

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 + \lambda xy),$$

где λ — переменный параметр.

Показать также, что скорость жидкости в любой точке равна

$$\frac{2ma^2}{r_1 r_2 r_3},$$

где r_1, r_2, r_3 — соответственно расстояния точки от источников и стока.

11. Если в точках $(a, 0)$, $(-a, 0)$ имеются источники и в точках $(0, a)$, $(0, -a)$ стоки, причем все одинаковой мощности, то показать, что окружность, проходящая через эти четыре точки, является линией тока.

12. Пусть оси Ox, Oy являются неподвижными твердыми границами и пусть в точке (a, b) находится источник. Найти вид линии тока и показать, что разветвляющаяся линия тока определяется уравнением

$$xy(x^2 - y^2 - a^2 + b^2) = 0.$$

13. В жидкости, ограниченной осями x и y, в первом квадранте на биссектрисе угла xOy на расстоянии a от начала координат имеется источник мощности m. Доказать, что комплексный потенциал течения имеет вид $-m \ln(a^4+z^4)$.

14. Между неподвижными границами $\theta = \pi/4$ и $\theta = -\pi/4$ имеется двумерное движение, которое создается источником мощности m в точке $r = a$, $\theta = 0$ и равным по мощности стоком в точке $r = b$, $\theta = 0$. Показать, что функция тока имеет вид

$$\psi = -m \operatorname{arctg} \frac{r^4(a^4 - b^4)\sin 4\theta}{r^8 - r^4(a^4+b^4)\cos 4\theta + a^4b^4}.$$

15. Показать, что компоненты скорости, задаваемые формулами

$$u = U\left(1 - \frac{ay}{x^2+y^2} + \frac{b^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right),$$

$$v = U\left(\frac{ax}{x^2+y^2} + \frac{2b^2xy}{(x^2+y^2)^2}\right),$$

представляют возможное двумерное движение жидкости. Показать, что это движение безвихревое, и выяснить смысл членов, входящих в выражение комплексного потенциала.

16. Пусть дан равносторонний треугольник ABC. Имеются источник мощности 2 единицы в точке A и стоки мощности 1 единица в точках B и C. Пусть имеется равномерный поток, направленный от точки A перпендикулярно к BC. Определить вид линий тока, если относительные мощности таковы, что разветвляющаяся линия тока частично состоит из преграждающей стенки.

17. Показать, что комплексный потенциал $w=\varkappa \ln(z^2-l^2)$ задает движение жидкости, обусловленное двумерным источником при наличии неподвижной стенки. С помощью преобразования, определяемого формулой

$$\frac{d\zeta}{dz}=\frac{A}{(z^2-1)^{1/2}},$$

получить решение для такого источника в полубесконечном прямоугольнике.

18. Используя преобразование $z'=e^{\pi z/a}$, найти линии тока двумерного движения, обусловленного источником, находящимся посредине между двумя бесконечно длинными параллельными границами, предполагая, что жидкость вытекает через стоки в конце области. Если давление стремится к нулю на концах потока, то доказать, что на плоскости действуют силы, изменяющиеся обратно пропорционально расстоянию между плоскостями.

19. Источник помещен посредине между двумя плоскостями, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. Найти уравнение линий тока в двумерном движении и показать, что те частицы, которые в бесконечности находятся на расстоянии $^1/_2a$ от одной из границ, вытекают из источника в направлении, образующем угол $\pi/4$ с этой границей.

20. Безвихревое двумерное движение жидкости, ограниченное линиями $y=\pm b$, обусловлено диполем с моментом μ, находящимся в начале координат, при этом ось диполя совпадает с положительным направлением оси x. Доказать, что движение дается формулой

$$\varphi+i\psi=\frac{\pi\mu}{2b}\operatorname{cth}[\pi(x+iy)/2b].$$

Показать также, что кривая $\operatorname{ch}(\pi x/b)=\sec(\pi y/b)$ является геометрическим местом точек, скорости которых параллельны оси y.

21. Пространство с одной стороны бесконечно длинной плоской стены $y=0$ заполнено невязкой несжимаемой жидкостью, движущейся в бесконечности со скоростью U в направлении оси x. Движение двумерное и происходит в плоскости (x, y). Диполь с моментом μ находится на расстоянии a от стенки, ось диполя направлена вдоль отрицательной части оси x. Показать, что если μ меньше, чем $4a^2U$, то давление жидкости на стенку максимально в точках, находящихся на расстоянии $a\sqrt{3}$ от точки O — основания перпендикуляра, опущенного из центра диполя на стенку; показать также, что давление минимально в точке O.

Если $\mu=4a^2U$, то найти критические точки и показать, что семейство линий тока содержит в себе окружность $x^2+(y-a)^2=4a^2$, причем начало координат находится в точке O.

22. Рассмотрим двумерное движение жидкости. Имеются источники полной мощности $2\pi m$, равномерно распределенные вдоль действительной оси на отрезке от $x=0$ до $x=a$. Показать, что соответствующий комплексный потенциал равен

$$w=-\frac{m}{a}\int_0^a \ln(z-\xi)\,d\xi=-m\left\{\frac{z}{a}\ln z-\frac{z-a}{a}\ln(z-a)\right\}.$$

Скомбинировать это движение с равномерным потоком скорости U, параллельным оси x, и показать, что разветвляющаяся линия тока задается уравнением

$$Uy+\frac{m}{a}\left\{x(\theta_2-\theta_1)+a\theta_2+y\ln\frac{r_1}{r_2}-\pi a\right\}=0,$$

где r_1, r_2 — расстояния и θ_1, θ_2 — соответствующие углы, которые образуют лучи, проведенные из точек этой линии к крайним источникам. Изобразить графически вид этих линий.

23. Вдоль оси x на каждом участке от $x=2na$ до $x=(2n+1)a$ имеется двумерный источник мощности k на единицу длины, а на каждом участке от $x=(2n-1)a$ до $x=2na$ — двумерный сток такой же мощности, причем n принимает все положительные и отрицательные целые значения. Если w — комплексный потенциал, то найти $-dw/dz$.

Если в канале, ограниченном стенками $x=a$ и $x=-a$, имеются равномерно распределенные источники, расположенные на отрезке от $x=0$ до $x=a$, и равной мощности стоки, расположенные на отрезке от $x=0$ до $x=-a$, то требуется найти скорость в любой точке вдоль стенок канала.

24. Доказать непосредственным расчетом, что радиальная скорость на круговом цилиндре, обусловленная источником и его отображением, равна нулю.

25. Проверить, что источник и его отображение относительно кругового цилиндра имеют окружность цилиндра в качестве линии тока.

26. Доказать, что в случае источника, расположенного вне кругового цилиндра, уравнение линий тока $\psi = \text{const}$ имеет вид

$$(x^2+y^2)(cx+y)-(x^2+y^2)c(f+f')+a^2(cx-y)=0,$$

где $c=\operatorname{tg}(\psi/m)$; $ff'=a^2$.

27. В примере 26 доказать, что:

(1) асимптотой линий тока является прямая $cx+y-c(f+f')=0$;

(2) все асимптоты проходят через точку $(f+f', 0)$;

(3) каждой линии тока внутри цилиндра соответствует замкнутая кривая, целиком лежащая внутри цилиндра.

28. Доказать, что при наличии источника в точке A вне круглого диска скорость обтекания на окружности диска наибольшая в точках, где окружность пересекается линиями, соединяющими точку A с концами диаметра, перпендикулярного к линии OA. Доказать также, что величина этой скорости равна $\dfrac{2m\cdot OA}{OA^2-a^2}$; здесь точка O — центр окружности диска, a — радиус этой окружности.

29. Пусть ось y и окружность $x^2+y^2=a^2$ являются неподвижными границами. Пусть в точке $(c, 0)$, причем $c>a$, находится двумерный источник. Показать, что радиус, проведенный из начала координат до той точки окружности, где скорость максимальна, составляет с осью x угол, равный

$$\arccos\frac{a^2+c^2}{\sqrt{2(a^4+c^4)}}.$$

30. Двумерный источник I мощности m расположен вне неподвижной окружности с центром в точке C. Доказать, что скорость q в любой точке P равна mr_3r_4/rr_1r_2, где через r, r_1, r_2, r_3, r_4 обозначены расстояния точки соответственно до точек C, I, J, A, B; при этом J — центр источника, J — инверсия точки I, A и B — точки, в которых прямая CI пересекает окружность.

31. Пусть окружность, рассеченная пополам осью y, образует вместе с этой осью твердую границу и пусть на оси x помещен источник мощности m на расстоянии a от центра, равном половине радиуса. Доказать, что уравнение линий тока имеет вид

$$(16a^4+r^4)\cos 2\theta-17a^2r^2=(16a^4-r^4)\sin 2\theta\operatorname{ctg}\left(\frac{\psi}{m}\right),$$

где ψ — значения функции тока.

Показать, что линия тока $\psi=m\pi/2$ выходит из источника в направлении, перпендикулярном оси Ox, а входит в сток под углом $\pi/4$ к оси Ox; начертить линии тока.

32. При двумерном движении бесконечной жидкости имеется твердая граница, состоящая из части окружности $x^2+y^2=a^2$, занимающей первый и четвертый квадранты, и части оси y, лежащей вне окружности. Простой источник мощности m расположен в точке $(f, 0)$, причем $f>a$. Доказать, что скорость жидкости в точках $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ на граничной полуокружности равна

$$\frac{4maf^2\sin 2\theta}{a^4+f^4-2a^2f^2\cos 2\theta}.$$

Определить, в каких точках границы давление будет наименьшим.

33. Внутрь круга радиуса a с твердой границей поступает вода через центр круга O. Через небольшое отверстие в точке A окружности вода вытекает во внешнюю неограниченную область, также занятую водой. Движение предполагается двумерным. Доказать следующее: 1) асимптоты линий тока проходят через фиксированную точку; 2) касательные в точке O к линии тока и к соответствующей асимптоте одинаково наклонены к линии OA; 3) точка A является двойной точкой линии тока, касательные к которой взаимно перпендикулярны. Начертить одну из линий тока.

34. Внутри круга радиуса a помещен источник мощности m на расстоянии f от центра и сток такой же мощности расположен в центре. Найти соответствующий комплексный потенциал и показать, что результирующее воздействие на границу равно

$$\frac{2\pi\rho m^2f^3}{a^2(a^2-f^2)}.$$

Найти направление этой силы. Как предельный случай получить комплексный потенциал скоростей, обусловленный диполем, помещенным в центре.

35. Источник помещен в точке (c, c) в области, ограниченной осью x и окружностью $x^2+y^2=a^2$, причем источник находится вне окружности. Показать, что скорость равна

нулю в точках $(\pm a, 0)$ и что она будет обращаться в нуль еще в одной точке на окружности, если $2c < (2+\sqrt{2})\,a$.

36. Граница полубесконечной жидкости состоит из неограниченной плоскости, на которой помещен цилиндрический выступ с поперечным сечением в виде полуокружности радиуса a; в жидкости помещена линия источников на расстоянии c от плоскости и от оси выступа, причем $c = a\operatorname{tg}\lambda$. Показать, что в точках на поверхности выступа скорости достигают наибольшей величины вдоль образующих, лежащих в осевых плоскостях, которые составляют угол θ с осевой плоскостью. Последняя содержит линию источников, задаваемую уравнением $\operatorname{tg}\theta = \pm\cos 2\lambda$.

37. Показать, что комплексный потенциал

$$w = m \ln\{(z-z_1)(z-z_2)/z\},$$

где $z_2 : z_1$ — действительное число, задает движение жидкости, соответствующее двумерному стоку мощности m, расположенному в точке $z = z_1$ при наличии неподвижного цилиндра с центром в начале координат и с радиусом a, причем $a^2 = |z_1 z_2|$.

Применяя преобразование

$$z' = z + c^2/z, \qquad (c < a < |z_1|),$$

получить решение для движения жидкости, обусловленного наличием стока вне неподвижного эллипса, и найти результирующую силу давления, действующего на эллипс.

38. Источники равной мощности m расположены в точках $z = nia$; при этом n принимает значения

$$n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Доказать, что соответствующий комплексный потенциал равен

$$w = -m \ln \operatorname{sh}(\pi z/a).$$

Исходя из этого показать, что комплексный потенциал диполей с осями, параллельными оси x, и моментами μ, расположенными в тех же точках, задается формулой

$$w = \mu \operatorname{cth}(\pi z/a).$$

39. Если последовательность диполей, рассмотренная в примере 38, расположена в равномерном потоке, имеющем скорость $-U$, параллельную оси x, то доказать, что линия тока $\psi = 0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{ay}{\pi b^2} = \frac{\sin(2\pi y/a)}{\operatorname{ch}(2\pi x/a) - \cos(2\pi y/a)}.$$

Показать, что эта линия состоит из части оси x и из овальной кривой, близкой к окружности (диаметра $2b$), если величина b мала по сравнению с величиной a. Показать, что полученный результат дает решение задачи обтекания последовательности равноотстоящих параллельных профилей, близких к круговым.

40. Доказать или проверить, что комплексный потенциал, задаваемый формулой

$$\frac{z}{a} = \exp\left(-\frac{nw}{m}\right) + \exp\left(\frac{(1-n)w}{m}\right),$$

имеет в качестве линий тока $\psi = \pm m\pi$ прямые, выходящие из начала координат. Доказать, что поток втекает в начало координат под одним углом, а вытекает под другим.

41. Пусть $w = f(z)$ и $v = -dz/dw$. Показать, что точки v и $\bar{v}$ являются точками инверсии на векторной диаграмме. Показать, что если v можно определить как функцию от w, то

$$z = -\int v\, dw.$$

Доказать, что предположение о наличии в плоскости v источника с комплексным потенциалом

$$w = -\frac{aU}{\pi}\ln\left(v - \frac{1}{U}\right) + \frac{aU}{\pi}\ln\frac{1}{U}$$

приводит к формуле

$$Uz = -w + \frac{aU}{\pi}\exp\left(-\frac{\pi w}{aU}\right).$$

Доказать также, что определяемый отсюда комплексный потенциал задает течение воды из открытого пространства в канал ширины $2a$, причем скорость внутри канала в бесконечности равна U.

42. Исследовать результаты примера 41 для доказательства того, что комплексный потенциал течения, имеющего скорость U в бесконечности и вытекающего из устья кана-

ла бесконечной длины и ширины $2a$, имеет вид

$$\frac{\pi z}{a}=\frac{\pi w}{aU}+\ln\frac{\pi w}{aU}.$$

43. Две бесконечные плоскости сходятся под углом $2\alpha=2n\pi$, но они не пересекаются, а образуют насадок, через который течет жидкость. Показать, что соответствующая векторная диаграмма в плоскости $v\,(v=-dz/dw)$ соответствует диаграмме, рассмотренной в примере 40, и вывести, что для течения в насадке выполняется соотношение

$$z=-\frac{!m}{nU}\exp\left(-\frac{nw}{m}\right)+\frac{m}{(1-n)U}\exp\left(\frac{(1-n)w}{m}\right)+C.$$

Положив $C=m/(nU)$, показать, что отсюда можно вывести результаты примера 42.

44. Пусть жидкость движется внутри тонкой оболочки, состоящей из двух плоских пластинок. Показать, что соответствующее движение внутри тонкой сферической оболочки можно получить путем инверсии линий тока первого движения относительно некоторого центра; определить множитель, на который нужно помножить скорости первого движения, чтобы преобразовать одно движение в другое.

Одинаковые по мощности источник и сток помещены в двух точках тонкой сферической оболочки. Показать, что линиями тока и равного потенциала на сфере будут малые окружности.

Глава 9

ДВИЖЕНИЕ ЦИЛИНДРОВ

9.10. Кинетическая энергия ациклического безвихревого движения. Рассмотрим двумерное ациклическое безвихревое движение жидкости, ограниченной изнутри цилиндром C_1, а снаружи цилиндром C_2 (рис. 160). Слой жидкости имеет единичную толщину, т. е. жидкость расположена между двумя плоскостями, параллельными плоскостям течения и отстоящими друг от друга на единицу длины. Из теоремы (1) п. 3.77 следует, что, для того чтобы такое течение существовало, один или оба цилиндра должны двигаться.

Если обозначить область, ограниченную кривыми C_1 и C_2, через S, то выражение для кинетической энергии жидкости в данном случае имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\varrho \int\limits_{(S)} q^2\, dS = \frac{1}{2}\varrho \int\limits_{(S)} \frac{dw}{dz}\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\, dS = \frac{1}{2}\varrho \int\limits_{(S)} \frac{\partial}{\partial z}\left(w\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right) dS.$$

Использовав теорему Стокса в комплексной форме (см. п. 5. 43), мы получим соотношение

$$T = -\frac{1}{4} i\varrho \int\limits_{(C_1)} w\, d\bar{w} + \frac{1}{4} i\varrho \int\limits_{(C_2)} w\, d\bar{w},$$

в котором оба контура интегрирования обходятся против часовой стрелки.

9.11. Кинетическая энергия циклического движения. Рассмотрим циклическое безвихревое движение жидкости, заключенной в двусвязной области между *неподвижными* цилиндрами C_1 и C_2.

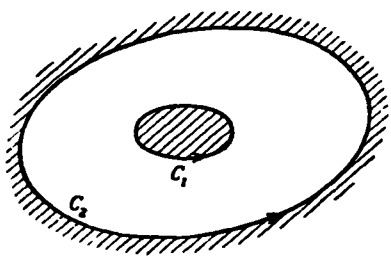


Рис. 160.

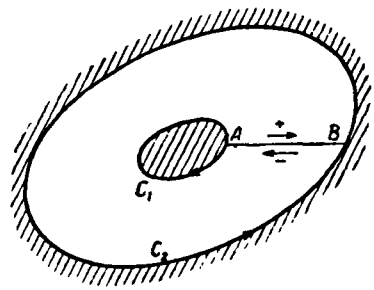


Рис. 161.

Обозначим через w_0 комплексный потенциал. По предположению, существует циркуляция интенсивности $\varkappa$, поэтому при обходе контура C_1 против часовой стрелки функция w_0 умеиьшается до величины $w_0 - 2\pi\varkappa$.

Проведем мысленно перегородку AB между цилиндрами, превратив таким образом область, занятую жидкостью, в односвязную (рис. 161). Перегородка AB является лишь геометрическим понятием и не влияет на движение жидкости; это будет иметь место в том случае, если AB состоит

все время из одних и тех же частиц жидкости. Перегородка позволяет образовать односвязную область, в которой функция w_0 является однозначной.

Обозначим через C контур C_2+BA+C_1+AB, где кривая C_2 обходится против часовой стрелки, а кривая C_1 по часовой стрелке. Так как $\overline{w}_0 = w_0 - 2i\psi$ и, следовательно, $d\overline{w}_0 = dw_0 - 2id\psi$, то кинетическую энергию жидкости можно записать в виде

$$T_0 = \frac{1}{4} i\varrho \int_{(C)} w_0 d\overline{w}_0 = \frac{1}{4} i\varrho \int_{(C)} w_0 dw_0 + \frac{1}{2}\varrho \int_{(C)} w_0 d\psi_0. \tag{1}$$

Функция w_0 является однозначной в области, ограниченной контуром C, поэтому первый интеграл вследствие теоремы Коши обращается в нуль. Так как функция ψ_0 постоянна на линиях тока C_1 и C_2, то последний интеграл сводится к интегралу вдоль кривой $AB+BA$. На дуге AB комплексный потенциал имеет значение w_0, а на дуге BA он имеет значение $w_0 - 2\pi\varkappa$. Следовательно,

$$T_0 = \frac{1}{2}\varrho \int_{AB} w_0 d\psi_0 + \frac{1}{2}\varrho \int_{BA} (w_0 - 2\pi\varkappa) d\psi_0 = \pi\varkappa\varrho [(\psi_0)_B - (\psi_0)_A], \tag{2}$$

где $(\psi_0)_B$ и $(\psi_0)_A$ — значения функции ψ_0 в точках B и A. Таким образом,

$$T_0 = \pi\varkappa\varrho m, \tag{3}$$

где m — расход жидкости, протекающей справа налево через перегородку AB.

Из формулы (3) следует также, что

$$T_0 = \frac{1}{2}\varrho \int_{(AB)} 2\pi\varkappa \frac{\partial\psi_0}{\partial s} ds = \int \pi\varkappa\varrho q_n ds, \tag{4}$$

где q_n — составляющая скорости, нормальная к перегородке AB. Последнее выражение представляет собой работу, совершенную импульсивным давлением величины $2\pi\varkappa\varrho$, приложенным к перегородке AB, если жидкость первоначально покоилась.

Таким образом, данное циклическое движение могло бы возникнуть из состояния покоя под действием импульса $2\pi\varkappa\varrho$, приложенного к перегородке, если предположить, что перегородка немедленно исчезает после приложения импульса. Обратно, если установилось циклическое движение, жидкость можно было бы привести в состояние покоя путем приложения импульсивного давления противоположного знака к перегородке, подобной AB. Отсюда следует, что циклическое движение не может быть создано или остановлено импульсивным давлением, приложенным только к границам C_1 и C_2.

Итак, мы можем обобщить теорему II п. 3.77 следующим образом (по крайней мере для двумерного движения).

Если жидкость, занимающая двусвязную область, ограниченную твердыми стенками, совершает ациклическое движение, то движение мгновенно прекращается, если границы приводятся в состояние покоя. Однако если движение является циклическим, то циклическая часть будет сохраняться при остановке границ.

Теорема VI допускает подобное же обобщение. И вообще, если задана интенсивность циркуляции, то безвихревое движение в двусвязной области полностью определено.

Эти теоремы, доказанные здесь для случая двумерных двусвязных областей, приложимы к областям любой связности в трехмерном пространстве.

Мы можем теперь выполнить обобщение на случай произвольного двумерного безвихревого движения жидкости между двумя твердыми цилиндрами C_1 и C_2. Комплексный потенциал любого такого движения может быть выражен в виде суммы $w+w_0$, где w — потеициал ациклического движения, а w_0 — потенциал циклического движения с неподвижными границами. В этом случае полиая кинетическая эиергия жидкости (иа единицу толщины) выражается следующей формулой:

$$T=\frac{1}{4}i\varrho\int\limits_{(C)}(w+w_0)(d\bar{w}+d\bar{w}_0)=\frac{1}{4}i\varrho\int\limits_{(C)}w\,d\bar{w}+\frac{1}{4}i\varrho\int\limits_{(C)}w_0\,d\bar{w}_0+T', \quad (5)$$

где

$$T'=\frac{1}{4}i\varrho\int\limits_{(C)}(w\,d\bar{w}_0+w_0\,d\bar{w})=\frac{1}{4}i\varrho\int\limits_{(C)}\{w(dw_0-2i\,d\psi_0)+(\bar{w}_0+2i\psi_0)\,d\bar{w}\}.$$

Далее, по теореме Коши $\int\limits_{(C)}w\,dw_0=\int\limits_{(C)}\bar{w}_0\,d\bar{w}=0$; фуикция ψ_0, как и прежде, постояниа на границах C_1 и C_2. Следовательно,

$$T'=\frac{1}{2}\varrho\int\limits_{AB+BA}(w\,d\psi_0-\psi_0\,d\bar{w})=0,$$

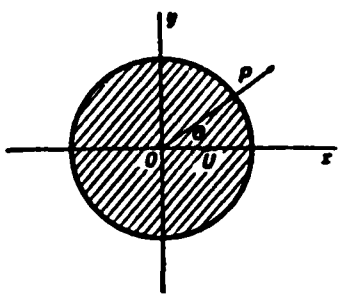
так как функции w и ψ_0 являются одиозначиыми и интегралы вдоль линий AB и BA сокращаются. Таким образом,

$$T=\frac{1}{4}i\varrho\int\limits_{(C)}w\,d\bar{w}+\pi\varkappa\varrho[(\psi_0)_B-(\psi_0)_A], \quad (6)$$

другими словами, кинетическая эиергия T является суммой кинетических энергий каждого движения, если их рассматривать независимо. Так как функция w однозначна, то интеграл в формуле (6) ие зависит от перегородки AB.

В качестве примера вычисления кинетической энергии циклического движения рассмотрим случай движения с циркуляцией интеисивности $\varkappa$ между двумя круговыми цилиндрами радиусов a и b (п. 7.11). В этом случае

$$T=\pi\varkappa\varrho(\varkappa\ln b-\varkappa\ln a)=\pi\varkappa^2\varrho\ln\frac{b}{a}.$$



Р и с. 162.

9.20. Круговой цилиндр, движущийся поступательно. Рассмотрим цилиндр радиуса a, помещенный в поток жидкости, у которого скорость на бесконечности направлена вдоль отрицательной части оси x и равна U (рис. 162). Возьмем начало координат в центре цилиндра, тогда, согласно п. 6.22, комплексный потенциал течения имеет вид

$$Uz+\frac{Ua^2}{z}.$$

Если мы наложим на наше течение поток, скорость которого равна U и направлена вдоль положительной части оси x, то получим цилиндр, движущийся со скоростью U в жидкости, которая покоится на бесконечиости. Потенциал этого течения задается формулой

$$w=\frac{Ua^2}{z}. \quad (1)$$

Сравнивая эту формулу с результатами п. 8.23, мы видим, что комплексный потенциал нашего течения в точности совпадает с потенциалом

плоского диполя, помещенного в центр цилиндра. Ось этого диполя направлена вдоль положительной части оси x, а интенсивность равна Ua^2.

Из формулы (1) получаем комплексную скорость течения

$$u - iv = \frac{Ua^2}{z^2}, \qquad u + iv = \frac{Ua^2 e^{2i\theta}}{r^2}.$$

Отсюда радиальная и трансверсальная компоненты скорости в точке с координатами (r, θ) выражаются формулами

$$\frac{Ua^2 \cos\theta}{r^2}, \qquad \frac{Ua^2 \sin\theta}{r^2}.$$

Следует подчеркнуть, что эти выражения являются компонентами абсолютной скорости жидкости в движущихся осях для фиксированной точки пространства, координаты которой в рассматриваемый момент времени равны r и θ. Единственное свойство, которое требуется от комплексного потенциала, это то, чтобы его производная давала бы выражение для скорости. Учитывая также, что

$$q^2 = \frac{U^2 a^4}{r^4},$$

получаем, что скорость имеет одну и ту же величину во всех точках, равноудаленных от центра цилиндра. В частности, $q = U$ при $r = a$, т. е. скорость на поверхности цилиндра равна U.

9.21. Траектории частиц. Рассмотрим фиксированные оси Ox и Oy в тот момент времени, когда центр цилиндра совпадает с точкой O (рис. 163). Частица, находящаяся в точке $P(x, y)$, движется со скоростью Ua^2/r^2,

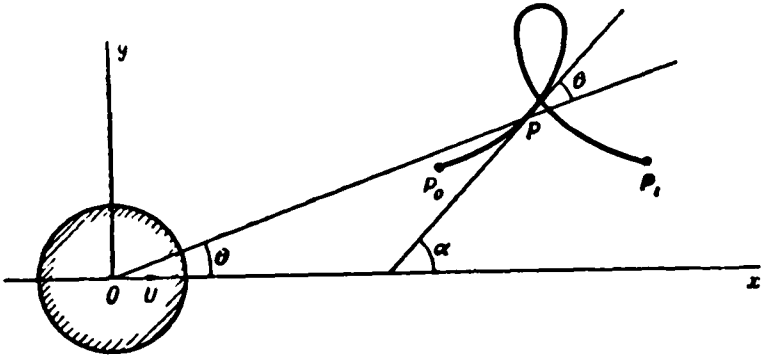


Рис. 163.

направленной под углом θ к радиусу-вектору (п. 9.20). Следовательно, касательная к траектории в точке P составляет с осью Ox угол $\alpha = 2\theta$. Отсюда, если R — радиус кривизны траектории в точке P, то

$$\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d(2\theta)}{dy}\frac{dy}{ds} = 2\frac{d\theta}{dy}\sin 2\theta.$$

Далее, когда жидкость обтекает неподвижный цилиндр, то частица P движется вдоль линии тока, уравнение которой (п. 6.22)[1]) имеет вид

$$\eta = y\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) = y\left(1 - \frac{a^2 \sin^2\theta}{y^2}\right). \qquad (1)$$

[1]) Это соотношение между y и θ имеет место для наблюдателя, движущегося вместе с цилиндром. Когда цилиндр неподвижен, данное соотношение является уравнением линии тока.

Продифференцируем последнее равенство по y; после несложных преобразований получим

$$2\frac{d\theta}{dy}\sin 2\theta = \frac{4}{a^2}\left(y - \frac{1}{2}\eta\right).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{R} = \frac{4}{a^2}\left(y - \frac{1}{2}\eta\right).$$

Мы получили уравнение *эластики*, т. е. кривой, форму которой принимает абсолютно гибкий прут, подверженный продольному сжатию. Когда цилиндр движется из $-\infty$ в $+\infty$, точка P движется из точки P_0 в точку P_1, которые являются точками эластики и в которых касательная параллельна оси x.

Теперь вычислим *дрейф*[1]) точки P, т. е. длину отрезка $\xi = P_0P_1$ (см. рис. 163).

В дальнейшем мы будем рассматривать движение жидкости по отношению к цилиндру, который будем считать неподвижным, т. е. жидкость будет двигаться справа налево со скоростью U. Используя выражение для радиальной и трансверсальной компонент скорости из п. 9.20, мы получаем следующие уравнения для относительного движения:

$$\frac{1}{U}\frac{dr}{dt} = \cos\theta\left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right), \quad \frac{1}{U}\frac{r\,d\theta}{dt} = \sin\theta\left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right). \tag{2}$$

Один из интегралов этих уравнений есть функция тока (1), где постоянная η задает начальное и конечное расстояние частицы от линии движения центра цилиндра. Тогда из формул (1) и (2) находим величину дрейфа в виде

$$\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{dx}{dt} + U\right)dt = \int_0^{\pi}\frac{a^2\cos 2\theta\,d\theta}{(\eta^2 + 4a^2\sin^2\theta)^{1/2}}. \tag{3}$$

Это движение может быть описано эллиптическими функциями, если положить

$$m = k^2 = \frac{4a^2}{\eta^2 + 4a^2} \tag{4}$$

и $\cos\theta = -\operatorname{sn} v$, откуда следует, что v изменяется от $-K$ до K, где K — полный эллиптический интеграл первого рода. Тогда все движение выразится через параметр v с помощью формул

$$y(v) = \frac{a}{k}(k' + \operatorname{dn} v), \quad \xi(v) = \frac{a}{k}\left\{\left(1 - \frac{1}{2}k^2\right)v - E(v)\right\},$$

$$Ut(v) = \frac{a}{k}\operatorname{sc} v\,(k' + \operatorname{dn} v) + \xi(v),$$

где $\xi(v)$, $y(v)$ — декартовы координаты частицы в момент времени $t(v)$ относительно первоначального невозмущенного положения.

Эти уравнения дают нам возможность построить траектории[2]) и вычислить величину дрейфа

$$\xi = \frac{2a}{k}\left\{\left(1 - \frac{1}{2}k^2\right)K - E\right\}. \tag{5}$$

---

[1]) Этот термин и соответствующее исследование, изложенное ниже появились благодаря Дарвину, который, по-видимому, был первым, кто дал физически удовлетворительную интуитивную картину этого явления и ввел понятие виртуальной массы. См. Darwin C., *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 49 (1953), 342—354.

[2]) Milne-Thomson L. M., Jacobian elliptic function tables, N.Y., 1958.

Некоторые из этих траекторий показаны на рис. 164, взятом из статьи Дарвина. Начало отсчета времени соответствует моменту положения цилиндра в начале координат. Цифры на кривых отмечают выбранные в подходящем масштабе моменты времени, в которые частицы находились в данных положениях. Так, например, точка на кривой, отмеченная цифрой 2, дает положение жидкой частицы, когда цилиндр продвинулся вперед на 2 радиуса от начального положения. Для рассматриваемых частиц жидкости штриховая кривая в левой части рисуика показывает начальные положения частиц, когда цилиндр находился в $-\infty$, а штриховая кривая в правой части — конечные положения частиц, когда цилиндр ушел в $+\infty$.

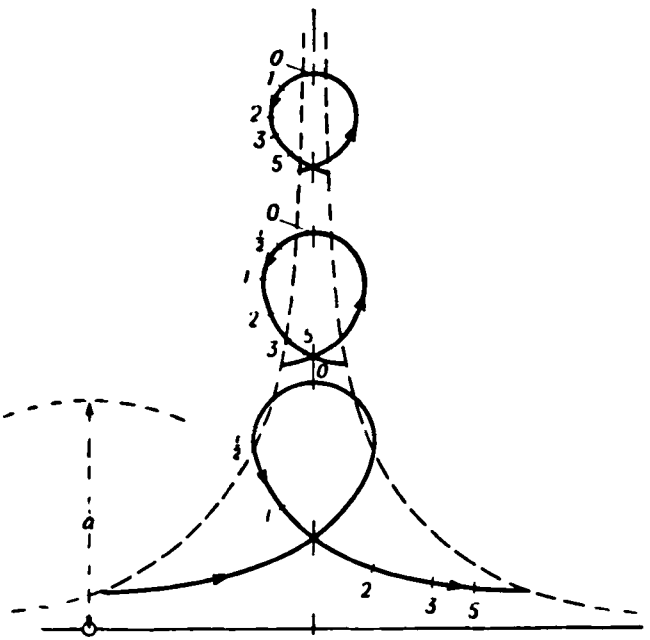


Рис. 164.

Таким образом, в самом деле существует дрейф жидкости слева направо. Масса жидкости между начальным и конечным положением частиц (берется слой жидкости единичной толщины) может быть названа *дрейф-массой* ϱD и вычислена по формуле

$$\varrho D = \varrho \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \, d\eta. \tag{6}$$

Непосредственным интегрированием можно показать, что $\varrho D = \pi a^2 \varrho = M'$, т. е. массе жидкости, вытесненной цилиндром.

9.22. Кинетическая энергия. Если круговой цилиндр радиуса a движется в жидкости поступательно со скоростью U, то кинетическая энергия жидкости определяется по формуле

$$T_f = -\frac{1}{4} i\varrho \int w \, d\bar{w}.$$

Кроме того,

$$w = \frac{Ua^2}{z}, \quad \bar{w} = \frac{Ua^2}{\bar{z}}, \quad d\bar{w} = -\frac{Ua^2}{\bar{z}^2} d\bar{z}.$$

Далее, на поверхности цилиндра $z = ae^{i\theta}$, $\bar{z} = ae^{-i\theta}$, $d\bar{z} = -iae^{-i\theta}\,d\theta$, так что

$$T_f = -\frac{1}{4} i\varrho \int_0^{2\pi} \frac{U^2a^4}{a^3e^{-i\theta}} iae^{-i\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\pi\varrho a^2 U^2.$$

Пусть $M' = \pi\varrho a^2$. Очевидно, M' есть масса жидкости (приходящаяся на единицу толщины), вытесненная цилиндром.

Тогда если M — масса цилиндра, приходящаяся на единицу толщины, то общая кинетическая энергия жидкости и цилиндра равна

$$T = \frac{1}{2}(M + M')U^2.$$

Обозначим через F внешнюю силу, действующую в направлении движения цилиндра и необходимую для поддержания его движения. Тогда мощность силы F должна быть равна скорости увеличения общей кинетической энергии и, следовательно,

$$FU = \frac{dT}{dt} = (M + M')U\frac{dU}{dt},$$

$$F - M'\frac{dU}{dt} = M\frac{dU}{dt}.$$

Если бы жидкость отсутствовала, второй член в левой части последнего уравнения обратился бы в нуль. Таким образом, вследствие присутствия жидкости цилиндр при движении испытывает сопротивление, величина которого (приходящаяся на единицу толщины жидкости) равна

$$M'\frac{dU}{dt}.$$

9.221. Виртуальная масса. Из последнего уравнения п. 9.22 следует, что присутствие жидкости увеличивает массу движущегося цилиндра от M до $M + M'$, где M' — масса вытесненной жидкости. Масса $M + M'$ называется *виртуальной массой* цилиндра[1]). Виртуальная масса получается увеличением массы цилиндра M на *присоединенную массу*, или *гидродинамическую массу*, которая в случае кругового цилиндра равна M'. Заметим, что эта гидродинамическая масса M' равна дрейф-массе ϱD, вычисленной в п. 9.21. Оказывается, что все движущиеся тела, если движение происходит в некоторой сплошной среде, как бы приобретают добавочную массу, так что во всех динамических экспериментах массы проявляются как виртуальные массы типа $M + kM'$, где коэффициент k зависит от формы тела и типа движения. Дарвин в цитированной выше статье доказал, что для тела, движущегося прямолинейно в неограниченной жидкости, гидродинамическая масса равна дрейф-массе, т. е.

$$kM' = \varrho D,$$

а в случае кругового цилиндра $k = 1$.

9.222. Виртуальная масса в двумерном движении. Рассмотрим цилиндр произвольной формы, совершающий в неограниченной жидкости прямолинейное плоское движение со скоростью U. В системе координат, связанной с цилиндром, течение описывается комплексным потенциалом $w = Uz + (f + ig)$. Если ввести потенциал скорости φ и функцию тока ψ, то

[1]) В отечественной литературе обычно рассматривается масса M', называемая присоединенной массой цилиндра.—*Прим. перев.*

получим

$$\varphi = Ux + f, \quad \psi = Uy + g \tag{1}$$

Так как функция $f + ig$ описывает возмущение, вносимое в течение присутствием цилиндра, то эта функция должна стремиться к нулю на бесконечности и, следовательно, может быть разложена в ряд по отрицательным степеням z. Отсюда следует, что и функции φ и g могут быть разложены в ряды по отрицательным степеням r, причем члены рядов будут стремиться к нулю на бесконечности. Таким образом, мы имеем

$$\varphi = Ux + \frac{Ax}{r^2} + \frac{By}{r^2} + \frac{C(x^2 - y^2)}{r^4} + \ldots, \tag{2}$$

$$\psi = Uy - \frac{Ay}{r^2} + \frac{Bx}{r^2} - \frac{2Cxy}{r^4} + \ldots. \tag{3}$$

Граничные условия могут быть выражены или в виде

$$\psi = \text{const} \quad \text{на границе тела,} \tag{4}$$

или в виде

$$lf_x + mf_y = -Ul \quad \text{на границе тела,} \tag{5}$$

где (l, m) — направляющие косинусы внешней нормали на границе тела, а индексы означают частное дифференцирование.

Движение частицы задается уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = -U - f_x, \quad \frac{dy}{dt} = -f_y. \tag{6}$$

Функция тока дает один интеграл этих уравнений вида

$$\psi = Uy + g = U\eta, \tag{7}$$

где постоянная η определяет асимптоты к линиям тока в $+\infty$ и $-\infty$. Кроме того, вследствие уравнений Коши — Римана (1) п. 6.0 имеют место равенства

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi_x^2 - \psi_y^2 = -\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)},$$

где $\partial(\varphi, \psi)/\partial(x, y)$ — якобиан. Таким образом, величина дрейфа ξ задается формулой

$$\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dx}{dt} + U\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (-f_x) \left(\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}\right)^{-1} d\varphi. \tag{8}$$

Здесь в подинтегральном выражении необходимо перейти от переменных x, y к переменным φ, ψ. Тогда интегрирование должно производиться по переменной φ при постоянной ψ.

Дрейф-объем D определяется теперь по формуле

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi\, d\eta = \frac{1}{U} \int d\psi \int (-f_x) \left(\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}\right)^{-1} d\varphi = \frac{1}{U} \int\int (-f_x)\, dx\, dy. \tag{9}$$

Здесь область интегрирования распространяется на всю плоскость движения, кроме поперечного сечения цилиндра. Но важно заметить, что интеграл сходится не абсолютно и может принимать разные значения в зависимости от порядка интегрирования. В настоящем случае, без сомнения, должно быть выполнено сначала интегрирование по φ, а после — по ψ. Так как вдали от цилиндра функция $\varphi \to Ux$, $\psi \to Uy$ [что видно из формул (2) и (3)], то в последнем интеграле формулы (9) первым должно быть выполнено интегрирование по x. Это означает, что величина D

вычисляется следующим образом: надо взять интеграл по области $x=\pm\lambda$ и $y=\pm\mu$, затем λ и μ устремить к бесконечности. Тогда порядок стремления λ к бесконечности должен быть больше, чем порядок стремления μ. Рассмотрим возможные значения интеграла

$$J=\int\int(-f_x)\,dx\,dy=\int\int(U-\varphi_x)\,dx\,dy. \tag{10}$$

Применим теорему Стока и введем функцию тока ψ, тогда рассматриваемый интеграл преобразуется к виду

$$J=\int\int(U-\psi_y)\,dx\,dy=-\overset{(0)}{\int}(Uy-\psi)\,m\,ds-\overset{(\infty)}{\int}(Uy-\psi)\,m\,ds, \tag{11}$$

где (0) обозначает интегрирование по поверхности тела, а (∞) — интегрирование по поверхности, удаленной на бесконечность. Далее, вследствие условия (4) величина ψ постоянна на поверхности тела, поэтому соответствующий интеграл обращается в нуль, тогда как

$$\overset{(0)}{\int}ym\,ds=V, \tag{12}$$

где V — объем тела.

Таким образом, первый член правой части равенства (11) всегда дает $-VU$. Что касается второго члена, то определим область интегрирования как «ящик» $x=\pm\lambda$, $y=\pm\mu$, где и λ и μ должны быть устремлены в бесконечность. Подставим формулу (3) в последний член равенства (11), тогда легко видеть, что только один член ряда дает интеграл, отличный от нуля. В результате получим

$$J=-VU+4A\operatorname{arctg}\frac{\lambda}{\mu}. \tag{13}$$

Таким образом, крайними значениями, которые может принимать интеграл J, являются величины

$$J=-VU, \text{ когда } \mu \text{ велико по сравнению с } \lambda, \tag{14}$$

$$J=2\pi A-VU, \text{ когда } \mu \text{ мало по сравнению с } \lambda. \tag{15}$$

Покажем, что величина (15) пропорциональна гидродинамической массе. Мы уже видели, что когда λ велико по сравнению с μ, то формула (9) определяет дрейф-объем, так что в этом случае $J=DU$. Однако существуют и другие интерпретации. В системе координат, в которой движется тело, скорость жидкости в направлении оси x равна $u=U-\varphi_x$. Общий расход жидкости через любую трансверсальную плоскость равен $\int u\,dy$. Полный перенос жидкости равен интегралу по времени от последнего выражения; интеграл по времени, умноженный на величину U, есть интеграл по x, который равен интегралу J. Отсюда следует, что интеграл по времени равен J/U. Здесь интегрирование по y проводится первым, т. е. мы должны взять μ по порядку бо́льшим, чем λ, и в результате интегрирования [см. формулу (14)] мы получаем величину $-V$, количество жидкости, вытесненной телом.

Если ϱ — плотность жидкости, то количество движения жидкости выражается интегралом

$$\int\int\varrho u\,dx\,dy=\varrho J. \tag{16}$$

Кинетическая энергия жидкости равна

$$\tfrac{1}{2}HU^2=\int\int\tfrac{1}{2}\varrho\{(U-\varphi_x)^2+\varphi_y^2\}\,dx\,dy. \tag{17}$$

Этот интеграл является абсолютно сходящимся и определяет *гидродинамическую массу H*. Но если гидродинамическая масса H входит в выражение для кинетической энергии, то она должна также входить в выражение для количества движения. Поэтому равенства (16) и (17) должны быть взаимосвязаны. Это и на самом деле следует из равенств (16) и (17). Составим разность

$$HU^2 - J\varrho U = \varrho \int\int \{\varphi_x(\varphi_x - U) + \varphi_y^2\}\, dx\, dy =$$

$$= \varrho \int\int \left\{\frac{\partial}{\partial x}(\varphi - xU)\varphi_x + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi - xU)\varphi_y\right\} dx\, dy = \tag{18}$$

$$= -\varrho \overset{(0)}{\int} (\varphi - Ux)(l\varphi_x + m\varphi_y)\, ds - \varrho \overset{(\infty)}{\int} (\varphi - Ux)(l\varphi_x + m\varphi_y)\, ds.$$

Здесь мы воспользовались теоремой Стокса и равенством $u = U - \varphi_x$.

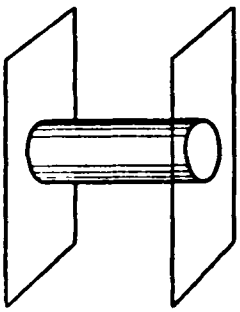
Далее, вследствие формулы (5) на поверхности тела $l\varphi_x + m\varphi_y = 0$, тогда как на бесконечности, как следует из формулы (2), $\varphi_x \to U$, а $\varphi_y \to 0$. Поэтому только главный член в разложении (2) дает отличный от нуля интеграл в формуле (18), который равен $4A\operatorname{arctg}\mu/\lambda$. Таким образом, если μ мало по сравнению с λ, то из формул (15) и (18) следует

$$HU - J\varrho = 0, \quad J = 2\pi A - VU,$$

т. е. гидродинамическая масса равна

$$H = \frac{(2\pi A - VU)\varrho}{U}.$$

Это доказывает, что в безграничной жидкости дрейф-объем определяет гидродинамическую массу. Таким образом, присоединенная масса действительно представляет собой массу жидкости, заключенную в цилиндре.



Р и с. 165.

9.23. Круговой цилиндр, падающий под действием силы тяжести. Предположим, что цилиндр радиуса a и плотности σ, ось которого остается горизонтальной, падает в жидкости плотности ϱ. Будем рассматривать цилиндр единичной длины, ограниченный гладкими вертикальными стенками (рис. 165); тогда его вес равен $\pi a^2\sigma g$.

По закону Архимеда со стороны жидкости на цилиндр действует подъемная сила, равная $\pi a^2\varrho g$. Отсюда следует, что действующая на цилиндр вертикальная сила равна $\pi a^2(\sigma - \varrho)g$ и направлена вниз.

Если обозначить через y глубину жидкости, отсчитываемую по вертикали от поверхности, то, согласно п. 9.22, уравнение движения цилиндра имеет вид

$$\pi a^2\sigma \frac{d^2y}{dt^2} = \pi a^2(\sigma - \varrho)g - \pi a^2\varrho \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Отсюда

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\sigma - \varrho}{\sigma + \varrho} g,$$

т. е. цилиндр падает с постоянным ускорением при условии, что величина y достаточно велика, чтобы можно было не учитывать условия на поверхности жидкости. Когда $\sigma < \varrho$, что имеет место в случае баллона, цилиндр поднимается с ускорением $\frac{\varrho - \sigma}{\varrho + \sigma} g$.

9.24. Круговой цилиндр с циркуляцией. Пусть цилиндр поперечного кругового сечения радиуса a с центром C движется со скоростью $U+iV$ и пусть в момент времени t центр C находится в точке z. Тогда

$$\dot{z}=U+iV, \tag{1}$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени. Если циркуляция равна $2\pi\varkappa$, то на цилиндр действует подъемная сила, равная $2\pi\varkappa\varrho i\dot{z}$ (см. п. 7.45). Кроме того, так как ускорение центра $\ddot{z}$ отлично от нуля, то существует еще сила сопротивления, равная $-M'\ddot{z}$ (п. 9.22).

Таким образом, со стороны жидкости на цилиндр действует сила

$$X+iY=-M'\ddot{z}+2\pi\varkappa\varrho i\dot{z}.$$

Если больше нет никаких внешних сил, то уравнение движения цилиндра массы M имеет вид

$$M\ddot{z}=X+iY.$$

Отсюда

$$(M+M')\ddot{z}-2\pi\varkappa\varrho i\dot{z}=0. \tag{2}$$

Интеграл этого линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами может быть найден или подобран в виде

$$z=z_0+Ae^{i(\omega t+\varepsilon)},\quad \omega=\frac{2\pi\varkappa\varrho}{M+M'},$$

где $Ae^{i\varepsilon}$ и z_0 — произвольные постоянные, причем A — действительная величина. Отсюда получим

$$|z-z_0|=A,$$

т. е. центр цилиндра описывает окружность с центром в точке z_0. Кроме того,

$$U+iV=\dot{z}=i\omega Ae^{i(\omega t+\varepsilon)}.$$

Отсюда

$$U^2+V^2=\omega^2A^2,$$

т. е. эта окружность описывается с постоянной скоростью, причем один оборот совершается за время $2\pi/\omega$, а радиус этой окружности равен

$$A=\frac{(M+M')(U^2+V^2)^{1/2}}{2\pi\varkappa\varrho}.$$

9.25. Цилиндр с циркуляцией, движущийся под действием силы тяжести. Пусть на цилиндр, рассмотренный в п. 9.24, действует еще сила тяжести. Пусть ось цилиндра направлена горизонтально, а ось y вертикально вверх. Сила тяжести, действующая на цилиндр, направлена вниз и равна Mg; кроме того, на цилиндр действует архимедова сила $M'g$, направленная вертикально вверх. Следовательно, уравнение (1) п. 9.24 принимает вид

$$(M+M')\ddot{z}-2\pi\varkappa\varrho i\dot{z}=-i(M-M')g,$$

или

$$\ddot{z}-i\omega\dot{z}=-ig_0,$$

где

$$\omega=\frac{2\pi\varkappa\varrho}{M+M'},\qquad g_0=\frac{M-M'}{M+M'}g.$$

Ясно, что частное решение этого уравнения имеет вид $z = g_0 t/\omega$ и, следовательно, общее решение уравнения задается формулой

$$z = z_0 + Ae^{i(\omega t+\varepsilon)} + \frac{g_0 t}{\omega}.$$

Отсюда $x = x_0 + \frac{g_0 t}{\omega} + A\cos(\omega t + \varepsilon)$, $y = y_0 + A\sin(\omega t + \varepsilon)$.

Таким образом, траекторией центра цилиндра является трохоида, описываемая точкой, расположенной на окружности круга радиуса A, который

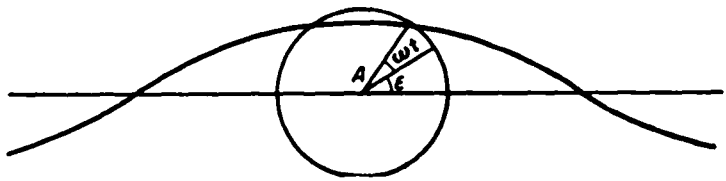


Рис. 166.

вращается с угловой скоростью ω, в то время как центр круга движется вдоль горизонтальной прямой с постоянной скоростью g_0/ω (рис. 166).

Точная величина радиуса A будет зависеть от начальной скорости и направления движения центра цилиндра. Эти величины можно подобрать так, что $A = 0$, тогда траектория центра будет прямой линией. Кроме того, когда траектория является трохоидой, движение в среднем направлено горизонтально. Другими словами, цилиндр не проявляет тенденции погрузиться под действием силы тяжести. Это явление может быть выдвинуто в качестве некоторого объяснения наблюдающегося поведения теннисного мяча.

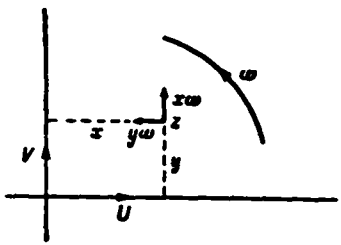


Рис. 167.

9.30. Уравнение для давления в движущейся системе координат. Пусть начало координат имеет составляющие скорости U и V вдоль мгновенного положения осей, и пусть ω — угловая скорость вращения системы координат. Уравнение для давления было выведено в п. 3.61. Чтобы применить его к нашему случаю, мы должны вычислить квадрат скорости в точке z (рис. 167). В данном случае, сохраняя обозначения пп. 3.61 и 5.10, для скорости в точке z мы получаем следующее выражение:

$$\mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{i}U + \mathbf{j}V + \omega\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = \mathbf{i}[(U - y\omega) + (V + x\omega)\,\mathbf{k} \times \mathbf{i}] = (W + i\omega z)\,\mathbf{i},$$

где $W = U + iV$. Таким образом, квадрат скорости в точке z равен

$$(W + i\omega z)\,(\overline{W} - i\omega\bar{z}),$$

а уравнение, определяющее давление, имеет вид

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}q_r^2 + \Omega - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}(W + i\omega z)\,(\overline{W} - i\omega\bar{z}) = C(t),$$

где q_r — скорость жидкости относительно движущихся осей.

Если относительное движение установившееся, как, например, в случае наблюдателя, находящегося на корабле, который движется с постоянной скоростью по постоянному курсу, то уравнение для давления принимает вид

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}q_r^2 + \Omega - \frac{1}{2}(W + i\omega z)\,(\overline{W} - i\omega\bar{z}) = C,$$

где C — теперь некоторая постоянная.

9.40. Функция тока на границе. Рассмотрим оси координат, связанные с цилиндром, который вращается и совершает поступательное движение. Пусть U и V — компоненты скорости начала системы координат O, а ω — угловая скорость системы координат. Тогда компоненты скорости точки $P(x, y)$ границы цилиндра равняются $U - y\omega$, $V + x\omega$. Проектируя скорость на направление внешней нормали к границе в точке P, мы получаем выражение

$$(U - y\omega)\sin\theta - (V + x\omega)\cos\theta,$$

где θ — угол наклона касательной к оси x.

Далее, $\sin\theta = dy/ds$, $\cos\theta = dy/ds$, а нормальная скорость жидкости равна $-\partial\psi/\partial s$ (рис. 168). Выписывая выражение для нормальной скорости, мы получаем

$$-\frac{\partial\psi}{\partial s} = (U - y\omega)\frac{dy}{ds} - (V + x\omega)\frac{dx}{ds}.$$

Интегрируя это равенство вдоль границы, находим

$$\psi = Vx - Uy + \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2) + B,$$

где B — произвольная постоянная. Таким образом, мы нашли значение функции тока на границе. Мы теперь видим, что с точностью до аддитивной постоянной функция тока ψ является мнимой частью функции

$$f(z, \bar{z}) = -(U - iV)z + \frac{1}{2}i\omega z\bar{z}. \quad (1)$$

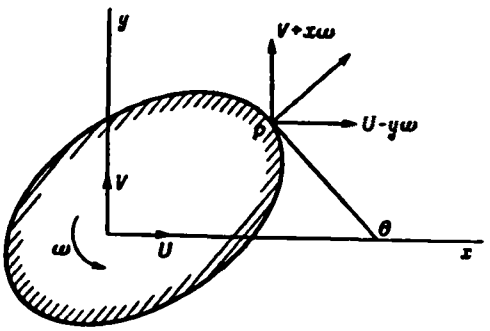


Рис. 168.

Если мы обозначим U, V соответственно через $U\cos\alpha$ и $U\sin\alpha$, так что полная скорость будет равна U и направлена под углом α к оси Ox, то мы получим равенство

$$f(z, \bar{z}) = -Uze^{-i\alpha} + \frac{1}{2}i\omega z\bar{z}. \quad (2)$$

Функция, сопряженная с функцией $f(z, \bar{z})$, равна

$$\bar{f}(\bar{z}, z) = -U\bar{z}e^{+i\alpha} - \frac{1}{2}i\omega\bar{z}z. \quad (3)$$

Так как ψ является мнимой частью равенства (2), то $-\psi$ является мнимой частью равенства (3). Следовательно, вычитая из равенства (2) равенство (3), получаем выражение для функции тока на границе в виде

$$2i\psi = -Uze^{-i\alpha} + U\bar{z}e^{i\alpha} + i\omega z\bar{z}. \quad (4)$$

9.50. Сила, действующая на движущийся цилиндр. В п. 6.41 мы получили выражение для воздействия жидкости на элемент ds границы цилиндра

$$dX - idY = -ipd\bar{z}, \qquad dM + idN = pzd\bar{z}.$$

Далее, пусть $dz = ds\,e^{i\alpha}$, тогда $d\bar{z} = dze^{-2i\alpha}$. Следовательно,

$$X - iY = -i\int_{(C)} pe^{-2i\alpha}dz, \qquad M + iN = \int_{(C)} pze^{-2i\alpha}dz, \quad (1)$$

где интегралы берутся по контуру C поперечного сечения цилиндра. Теперь, если скорость начала координат по отношению к осям, связанным с цилиндром, обозначить через $W = U + iV$, а угловую скорость — через ω, то урав-

нение для давления запишется в виде (п. 9.30)

$$\frac{p}{\varrho}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2}q_r^2+\frac{1}{2}(W+i\omega z)(\overline{W}-i\omega\bar{z}), \tag{2}$$

где q_r — относительная скорость. Далее, на границе цилиндра жидкость движется по касательной к поверхности цилиндра, и, следовательно, комплексная скорость такого относительного движения равна

$$q_r e^{-i\alpha}=-\frac{dw}{dz}-\overline{W}+i\omega\bar{z}.$$

Из левой части равенства видно, что вектор относительной скорости касается цилиндра. В правой части равенства дана относительная скорость, представленная в виде суммы соответствующих слагаемых.

Подставим выражение для скорости q_r из последнего равенства в формулу (2), а потом подставим выражение для давления p в формулу (1). Кроме того, учтем, что в точках на поверхности цилиндра выполняется равенство $d\bar{z}=e^{-2i\alpha}dz$. Таким путем мы получим следующие формулы для силы и момента, действующих на цилиндр:

$$X-iY=\frac{1}{2}i\varrho\int_{(C)}\left(\frac{dw}{dz}+\overline{W}-i\omega\bar{z}\right)^2dz-$$

$$-\frac{1}{2}i\varrho\int_{C)}(W+i\omega z)(\overline{W}-i\omega\bar{z})\,d\bar{z}-i\varrho\int_{(C)}\frac{\partial\varphi}{\partial t}d\bar{z}, \tag{3}$$

$$M+iN=-\frac{1}{2}\varrho\int_{(C)}z\left(\frac{dw}{dz}+\overline{W}-i\omega\bar{z}\right)^2dz+$$

$$+\frac{1}{2}\varrho\int_{(C)}z(W+i\omega z)(\overline{W}-i\omega\bar{z})\,d\bar{z}+\varrho\int_{(C)}z\frac{\partial\varphi}{\partial t}d\bar{z}. \tag{4}$$

Эти равенства являются обобщением теоремы Чаплыгина — Блазиуса; в случае установившегося движения жидкости относительно покоящегося цилиндра отсюда получается обычная теорема. Полученные выражения являются довольно громоздкими. Их можно легко упростить, если использовать комплексную форму теоремы Стокса (п. 5.43), согласно которой имеют место равенства

$$\int_{(C)}(\overline{W}-i\omega\bar{z})^2dz=2i\int_{)}-2i\omega(\overline{W}-i\omega\bar{z})\,dS=4\omega A(\overline{W}-i\omega\bar{z}_c), \tag{5}$$

где A — площадь, ограниченная контуром, а $z_c=x_c+iy_c$ — положение центра тяжести этой площади. Кроме того, справедливы следующие равенства:

$$\int_{(C)}(W+i\omega z)(\overline{W}-i\omega\bar{z})\,d\bar{z}=-2i\int_{(S)}i\omega(\overline{W}-i\omega\bar{z})\,dS=2\omega A(\overline{W}-i\omega\bar{z}_c), \tag{6}$$

$$\int_{(C)}(-\overline{W}z+W\bar{z}+i\omega z\bar{z})\,d\bar{z}=-2i\int_{(S)}(-\overline{W}+i\omega\bar{z})\,dS=2iA(\overline{W}-i\omega z_c). \tag{7}$$

9.52. Обобщение теоремы Чаплыгина — Блазиуса. Формула (3) п. 9.50 дает силу, действующую на движущийся цилиндр. Она может быть записана в виде

$$X-iY=\frac{1}{2}i\varrho\int\left(\frac{dw}{dz}\right)^2dz+i\varrho\int\left(\overline{W}\frac{dw}{dz}-i\omega\bar{z}\frac{dw}{dz}\right)dz+$$

$$+\frac{1}{2}i\varrho\int(\overline{W}-i\omega\bar{z})^2dz-\frac{1}{2}i\varrho\int(W+i\omega z)(\overline{W}-i\omega\bar{z})\,d\bar{z}-i\varrho\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi\,d\bar{z},$$

где интегралы берутся вдоль контура цилиндра. Используя формулы (5) и (6) предыдущего пункта, мы получаем

$$X-iY=\frac{1}{2}i\varrho\int\left(\frac{dw}{dz}\right)^2dz+i\varrho\overline{W}\int dw+\omega\varrho\int\bar{z}\,dw+$$
$$+2i\varrho\omega A(\overline{W}-i\omega\bar{z}_c)-i\varrho\omega A(\overline{W}-i\omega\bar{z}_c)-i\varrho\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi\,d\bar{z}. \qquad (1)$$

Далее, $\int dw$ равен приращению величины w при обходе цилиндра и, следовательно, равен $-2\pi\varkappa$, где $\varkappa$ — интенсивность циркуляции (которая может быть равна нулю).

Кроме того, очевидно, имеет место равенство $\int\bar{z}\,dw=\int\bar{z}\,(d\bar{w}+2i\,d\psi)$, поэтому, интегрируя по частям, находим, что

$$\int\bar{z}\,d\psi=[\bar{z}\psi]_C-\int\psi\,d\bar{z}.$$

Так как произведение $\bar{z}\psi$ не изменяется при обходе контура цилиндра, то $[\bar{z}\psi]_C=0$ и, следовательно,

$$\int\bar{z}\,dw=\int\bar{z}\,d\bar{w}-2i\int\psi\,d\bar{z}.$$

Далее, из формулы (4) п. 9.40 на поверхности цилиндра мы имеем

$$2i\psi=-\overline{W}z+W\bar{z}+i\omega z\bar{z}.$$

Следовательно, из формулы (7) п. 9.50 получим

$$\int\psi\,d\bar{z}=A(\overline{W}-i\omega z_c). \qquad (2)$$

Отсюда

$$\int\bar{z}\,dw=\int\bar{z}\,d\bar{w}-2iA(\overline{W}-i\omega\bar{z}_c). \qquad (3)$$

Кроме того, на основании формулы (2), находим

$$\int\varphi\,d\bar{z}=\int(\bar{w}+i\psi)\,d\bar{z}=\int\bar{w}\,d\bar{z}+Ai(\overline{W}-i\omega\bar{z}_c). \qquad (4)$$

Подставляя формулы (3) и (4) в формулу (1), мы получаем

$$X-iY=\frac{1}{2}i\varrho\int\left(\frac{dw}{dz}\right)^2dz+\omega\varrho\int\bar{z}\,d\bar{w}-i\varrho\frac{\partial}{\partial t}\int\bar{w}\,d\bar{z}-$$
$$-2\pi\varkappa\varrho i\overline{W}-i\varrho A\left\{\omega(\overline{W}-i\omega\bar{z}_c)+i\left(\frac{d\overline{W}}{dt}-i\bar{z}_c\frac{d\omega}{dt}\right)\right\}. \qquad (5)$$

Это соотношение можно рассматривать как обобщенную форму теоремы Чаплыгина — Блазиуса для силы, действующей на движущийся цилиндр. Преимущество этой формы теоремы состоит в том, что все интегралы берутся по контуру цилиндра или по любому бо́льшему контуру, который стягивается к нему, не пересекая особенностей, таких, как источники, стоки или вихри.

Аналогичными вычислениями можно показать, что момент сил давления относительно начала координат является действительной частью выражения

$$-\frac{1}{2}\varrho\int z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2dz-\varrho\overline{W}\int z\,dw+\omega\varrho A\overline{W}z_c+$$
$$+\varrho\frac{\partial}{\partial t}\int zw\,d\bar{z}-A\varrho\left\{3iz_c\frac{d\overline{W}}{dt}+2k^2\frac{d\omega}{dt}\right\}, \qquad (6)$$

где k — радиус инерции сечения цилиндра относительно точки O.

Приведение формулы (4) п. 9.50 к предыдущему выражению с помощью результатов п. 5.43 оставляем читателю в качестве упражнения.

Легко видеть, что начало координат удобно брать в центре тяжести сечения цилиндра, так как в таком случае $z_c = 0$.

Полученные результаты интересны тем, что они являются совершенно общими, так как могут быть применены как к установившемуся, так и к неустановившемуся движению.

В случае установившегося движения члены, содержащие производные по времени, исчезают.

9.53. Цилиндр, движущийся в безграничной жидкости. Если цилиндр движется в безграничной жидкости, которая покоится на бесконечности, то возмущения вследствие движения цилиндра должны исчезать на большом расстоянии от цилиндра. Таким образом, для больших значений z мы должны иметь $dw/dz = 0$.

Наиболее общий вид функции w, удовлетворяющей этому условию и условию непрерывности движения жидкости и потенциала, для больших значений $|z|$ дается формулой

$$w = i\varkappa \ln z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots, \tag{1}$$

где $\varkappa$ — интенсивность циркуляции.

Тогда

$$\begin{gathered} \frac{dw}{dz} = \frac{i\varkappa}{z} - \frac{a_1}{z^2} - \frac{2a_2}{z^3} - \dots, \\ \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = -\frac{\varkappa^2}{z^2} - \frac{2a_1 i\varkappa}{z^3} - \dots. \end{gathered} \tag{2}$$

Отсюда следует, что первый интеграл в формуле Чаплыгина — Блазиуса (5) п. 9.52 равен нулю.

Изменим везде знак перед величиной i и выберем начало координат в центре тяжести сечения, тогда мы получим следующее выражение для силы:

$$X + iY = \omega\varrho \int z\,dw + i\varrho \frac{\partial}{\partial t} \int w\,dz + 2\pi\varkappa\varrho i W + i\varrho A\left(\omega W - i\frac{dW}{dt}\right). \tag{3}$$

Из формулы (2), применив теорему о вычетах, получим

$$\int z\,dw = \int \left(i\varkappa - \frac{a_1}{z} - \frac{2a_2}{z^2} - \dots\right) dz = -2\pi i a_1.$$

Кроме того,

$$\int w\,dz = i\varkappa\,[z \ln z] + 2\pi i a_1,$$

где $[z \ln z]$ представляет собой приращение функции $z \ln z$ при однократном обходе контура. Если циркуляция остается постоянной, то частная производная от этого выражения по времени t равна нулю. Тогда из формулы (3) мы получаем

$$X + iY = -2\pi\varrho\omega i a_1 + 2\pi\varkappa\varrho i W + i\varrho A\left(\omega W - i\frac{dW}{dt}\right) - 2\pi\varrho \frac{da_1}{dt}. \tag{4}$$

Эта формула очень удобна тем, что не содержит интегралов. Пусть $a_1 = a + ib$ в выражении для комплексного потенциала (1). Тогда, вспоминая, что $W = U + iV$, где U, V — компоненты скорости начала координат, мы придем к следующим формулам:

$$X = 2\pi\varrho b\omega - 2\pi\varkappa\varrho V - A\varrho\omega V + A\varrho \frac{dU}{dt} - 2\pi\varrho \frac{da}{dt},$$

$$Y = -2\pi\varrho a\omega + 2\pi\varkappa\varrho U + A\varrho\omega U + A\varrho \frac{dV}{dt} - 2\pi\varrho \frac{db}{dt}.$$

Можно также заметить, что $A\varrho = M'$, где M' — масса жидкости, вытесненная цилиндром (на единицу толщины). Кроме того, если $\omega = 0$, то последние два члена в формуле (4) определяют присоединенную массу поступательного движения.

Последние формулы могут быть применены для получения результатов пп. 9.24, 9.25. Это мы предлагаем выполнить читателю в качестве упражнений.

Теорема Кутта — Жуковского (п. 7.45) следует как частный случай из формулы (4), потому что, положив $\omega = 0$, $W = \text{const}$, мы получим

$$X + iY = 2\pi\varkappa\varrho i W,$$

т. е. силу, действующую под прямым углом к направлению вектора W. Величина этой силы равна $2\pi\varkappa\varrho\sqrt{U^2+V^2}$ и не зависит от формы или площади поперечного сечения цилиндра. Уравнение (4) можно рассматривать, следовательно, как обобщение теоремы Кутта — Жуковского.

Соответствующие обобщения теоремы Лагалли, когда имеются источники и стоки, не представляют трудности.

9.62. Общий случай движения цилиндра. Комплексный потенциал в случае кругового цилиндра, движущегося перпендикулярно своей оси, был получен в п. 9.20 из комплексного потенциала обтекания неподвижного цилиндра путем наложения на это течение потока, скорость которого противоположна скорости потока, обтекающего неподвижный цилиндр. Случай аналогичного движения эллиптического цилиндра можно получить подобным способом из обтекания неподвижного цилиндра с использованием результатов п. 6.33. Однако теперь мы изложим более общий метод, с помощью которого может быть непосредственно решена задача о поступательном и вращательном движении произвольного цилиндра в жидкости, покоящейся на бесконечности.

В этом методе существенно используется конформное отображение области, внешней по отношению к поперечному сечению цилиндра в плоскости z, на внешность единичной окружности $|\zeta| = 1$ в плоскости ζ. Кроме того, используется формула (4) п. 9.40.

9.63. Комплексный потенциал движущегося цилиндра. Обозначим через C контур поперечного сечения цилиндра, который совершает двумерное движение в безграничной жидкости, покоящейся на бесконечности. Циркуляция около цилиндра отсутствует. Движение цилиндра определяется угловой скоростью ω и скоростью U точки O поперечного сечения цилиндра, причем скорость направлена под углом α к оси x (рис. 169). Предположим, что область вне цилиндра C в плоскости z (система координат имеет начало в точке O, связанной с цилиндром) может быть конформно отображена на внешность единичной окружности $|\zeta| = 1$ в плоскости комплексной переменной ζ с помощью функции

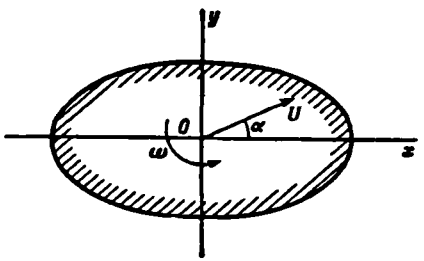


Рис. 169.

$$z = f(\zeta), \qquad (1)$$

причем бесконечно удаленная точка z переходит в бесконечно удаленную точку плоскости ζ. Тогда для жидкости, покоящейся на бесконечности, комплексный потенциал w не может содержать положительных степеней z (или ζ) в разложении в степенной ряд по z (или ζ).

Кроме того, на границе C цилиндра функция тока удовлетворяет соотношению [см. формулу (4) п. 9.40]

$$2i\psi = -Uze^{-i\alpha} + U\bar{z}e^{i\alpha} + i\omega z\bar{z}. \qquad (2)$$

Обозначим точку на единичной окружности через σ, тогда

$$\sigma = e^{i\theta}, \quad \bar{\sigma} = e^{-i\theta} = \frac{1}{\sigma}. \tag{3}$$

Следовательно, на единичной окружности формула (2) принимает вид

$$2i\psi = B(\sigma) = -Uf(\sigma)e^{-i\alpha} + U\bar{f}\left(\frac{1}{\sigma}\right)e^{i\alpha} + i\omega f(\sigma)\bar{f}\left(\frac{1}{\sigma}\right). \tag{4}$$

Функцию $B(\sigma)$ удобно назвать *граничной функцией*. Если разложить ее в ряд по σ, то можно записать

$$B(\sigma) = B_1(\sigma) + B_2(\sigma), \tag{5}$$

где функция $B_1(\sigma)$ содержит все отрицательные спепени σ и не содержит неотрицательных степеней. Таким образом, функция $B_1(\zeta)$ является аналитической вне единичного круга и обращается в нуль на бесконечности.

Граничные условия (4) можно записать теперь в виде

$$w(\sigma) - \bar{w}\left(\frac{1}{\sigma}\right) = B_1(\sigma) + B_2(\sigma). \tag{6}$$

Умножая это равенство на $d\sigma/2\pi i(\sigma - \zeta)$ и интегрируя по окружности единичного круга γ, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\gamma)}\frac{w(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_{(\gamma)}\frac{\bar{w}\left(\frac{1}{\sigma}\right)d\sigma}{\sigma-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\gamma)}\frac{B_1(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{(\gamma)}\frac{B_2(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}. \tag{7}$$

Далее, функции $w(\zeta)$ и $B_1(\zeta)$ являются аналитическими вне γ, в то время как функции $\bar{w}(1/\zeta)$ и $B_2(\zeta)$ аналитичны внутри γ. Следовательно, если точка ζ лежит вне окружности γ, то, применяя формулу Коши (п. 5.59), найдем, что второй и четвертый интегралы обращаются в нуль. Вычисляя первый и третий интегралы, получаем равенство

$$w = B_1(\zeta). \tag{8}$$

Так как функция $B_1(\zeta)$ содержит только отрицательные степени ζ, то условие обращения скорости в нуль на бесконечности также удовлетворено.

Чтобы показать, что найденная скорость жидкости всюду физически допустима, рассмотрим соотношение

$$-u + iv = w'(z) = \frac{B_1'(\zeta)}{f'(\zeta)}.$$

Преобразование (1) является конформным во всех точках вне контура, поэтому в жидкости не существует нулей функции $f'(\zeta)$ и скорость жидкости всюду конечна.

Итак, с помощью преобразования (1) мы составляем граничную функцию (2), отделяем члены с отрицательными степенями ζ, которые стремятся к нулю, когда $|\zeta| \to \infty$. В результате получаем комплексный потенциал (8) как функцию ζ.

Если бы удалось с помощью формул (1) и (8) исключить ζ, то мы получили бы, конечно, комплексный потенциал как функцию z. Но во многих случаях проводить такое исключение или невозможно, или нежелательно.

Наконец, мы можем получить комплексный потенциал w обтекания цилиндра, положив в формуле (2) $\omega = 0$ и наложив противоположно направленной поток со скоростью U. В результате этого можно получить соотношение

$$w = B_1(\zeta) + Uf(\zeta)e^{-i\alpha}.$$

9.64. Круговой цилиндр (общий метод). Простейшей иллюстрацией общего метода является случай кругового цилиндра радиуса a, движущегося

со скоростью U, направленной под углом α к действительной оси. Если взять начало координат в центре поперечного сечения кругового цилиндра, то отображающая функция примет вид [см. формулу (1) п. 9.63]

$$z = a\zeta.$$

Граничная функция в этом случае выражается формулой

$$B(\zeta) = -Ua\zeta e^{-i\alpha} + U\frac{a}{\zeta}e^{i\alpha} + i\omega a^2,$$

так что

$$B_1(\zeta) = Uae^{i\alpha}\frac{1}{\zeta};$$

следовательно,

$$w = Uae^{i\alpha}\frac{1}{\zeta} = Ua^2e^{i\alpha}\frac{1}{z}.$$

Как и следовало ожидать, в выражение комплексного потенциала не входит угловая скорость.

9.65. Эллиптический цилиндр. Если единичная окружность в комплексной плоскости ζ задана уравнением $\zeta = e^{i\eta}$, то преобразование

$$z = c\left(\zeta + \frac{\lambda}{\zeta}\right), \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \tag{1}$$

конформно отображает область, внешнюю к границе C, заданной уравнением

$$z = a\cos\eta + ib\sin\eta, \tag{2}$$

где

$$a = c(1+\lambda), \quad b = c(1-\lambda), \tag{3}$$

на область, внешнюю к единичной окружности, причем так, что бесконечно удаленная точка переходит в бесконечно удаленную точку. Ясно, что кривая C является эллипсом с осями $2a$, $2b$. Эксцентрический угол точки z равен η. Заметим, что $f'(\zeta) = 0$ только в точке

$$\zeta = \lambda^{1/2} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{1/2} < 1,$$

которая лежит внутри единичной окружности, так что отображение внешней области всюду конформно.

Граничная функция в данном случае имеет вид

$$B(\zeta) = -Uce^{-i\alpha}\left(\zeta + \frac{\lambda}{\zeta}\right) + Uce^{i\alpha}\left(\frac{1}{\zeta} + \lambda\zeta\right) + i\omega c^2\left\{1 + \lambda^2 + \lambda\left(\zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2}\right)\right\},$$

откуда следует, что

$$B_1(\zeta) = -U\lambda ce^{-i\alpha}\frac{1}{\zeta} + Uce^{i\alpha}\frac{1}{\zeta} + i\omega\lambda c^2\frac{1}{\zeta^2}.$$

Таким образом, согласно формуле (8) п. 9.63, течение описывается комплексным потенциалом

$$w = A\frac{1}{\zeta} + B\frac{1}{\zeta^2}, \tag{4}$$

где вследствие формул (3)

$$A = U(b\cos\alpha + ia\sin\alpha), \quad B = \frac{i}{4}\omega(a^2 - b^2). \tag{5}$$

Если $a = b$, то мы снова получаем движение кругового цилиндра.

Кинетическая энергия жидкости (приходящаяся на единицу толщины) дается интегралом (п. 9.10)

$$T = -\frac{1}{4} i\varrho \int_{(C)} w\, d\bar{w},$$

который берется по эллипсу C. Отсюда

$$T = -\frac{1}{4} i\varrho \int_{(C)} \left(\frac{A}{\zeta} + \frac{B}{\zeta^2}\right)(\bar{A} + 2\bar{B}\zeta)\, d\zeta = -\frac{1}{4} i\varrho 2\pi i\,(A\bar{A} + 2B\bar{B}),$$

или

$$T = \frac{1}{2}\varrho\pi U^2 (b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha) + \frac{1}{16}\varrho\pi\omega^2 (a^2 - b^2)^2.$$

Если $U = 0$ (цилиндр вращается вокруг неподвижной оси), то

$$T = \frac{1}{16}\varrho\pi\omega^2 (a^2 - b^2)^2,$$

т. е. кинетическая энергия остается одинаковой для всех софокусных эллипсов. В частности, последнее равенство дает кинетическую энергию жидкости в случае, когда эллипс вырождается в прямую линию, соединяющую фокусы. Тогда мы имеем случай вращающейся пластинки, однако скорость на концах пластинки обращается в бесконечность, так что это решение не может быть непосредственно применено к реальной жидкости.

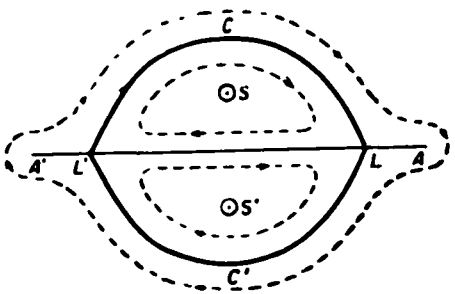


Рис. 170.

Случай вращающейся пластинки имеет особый интерес[1]). Для такой пластинки мы имеем $b = 0$, поэтому $\lambda = 1$, $a = 2c$; длина пластинки, согласно формуле (3), равна $4c$. Таким образом, из формулы (4) видно, что $\psi = {}^1/_2\omega c^2\left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\bar{\zeta}^2}\right)$. Чтобы найти линии тока относительно пластинки, наложим на движение угловую скорость $-\omega$, добавив к величине ψ функцию тока $-{}^1/_2\omega(x^2 + y^2) = -\frac{1}{2}\omega z\bar{z}$. Полученная в результате функция тока относительного движения имеет вид

$$\Psi = \frac{1}{2}\omega c^2\left\{\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\bar{\zeta}^2} - \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\left(\bar{\zeta} + \frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\right\}. \qquad (6)$$

Линиями тока относительно пластинки являются линии $\Psi = \text{const}$. На самой пластинке $\zeta\bar{\zeta} = 1$, так как пластинка отображается в окружность единичного радиуса. Поэтому на пластинке $\Psi = -\omega c^2$. Следовательно, разветвляющаяся линия тока в относительном движении задается уравнением $\Psi + \omega c^2 = 0$, которое можно привести к виду

$$(\zeta\bar{\zeta} - 1)(\zeta^2\bar{\zeta}^2 - \zeta\bar{\zeta} + \zeta^2 + \bar{\zeta}^2) = 0.$$

Первый множитель дает окружность, т. е. вращающуюся пластинку, а оставшаяся часть разветвляющейся линии тока описывается уравнением

$$\zeta^2\bar{\zeta}^2 - \zeta\bar{\zeta} + \zeta^2 + \bar{\zeta}^2 = 0. \qquad (7)$$

Эта линия тока подходит к пластинке в точках $\zeta\bar{\zeta} = 1$, т. е. $\zeta^4 = -1$, поэтому $z = \pm\frac{2}{\sqrt{2}}c$. На рис. 170 эти точки обозначены буквами L и L', а концы

[1]) См. цитированную статью на стр. 227.

пластинки — буквами A и A'. Пластинка вращается *против часовой стрелки*.

Кривая (7) пересекает ось в точке, где величина ζ становится чисто мнимой, т. е. $\zeta = -\bar{\zeta}$, откуда $\zeta^2 = -3$, а $z = \pm i\frac{2}{\sqrt{3}}c$. На рис. 170 эти точки обозначены буквами C и C'. Таким образом, вместе с пластинкой разветвляющаяся линия тока образует две замкнутые петли, обозначенные на рисунке $L'CL$ и $L'C'L$.

Жидкость не может выйти из этих петель и должна по необходимости вращаться вместе с вращающейся пластинкой, причем распределение скорости соответствует условию потенциальности движения. Внутри этих петель существуют *относительные* критические точки S и S' (они получаются из условия $\partial\Psi/\partial\zeta = 0$). Эти точки лежат на оси y на расстоянии, равном $c\,(3^{1/4} - 3^{-1/4}) = 0{,}556\,c$ от центра пластины. Частицы в этих точках движутся так, как если бы они были жестко связаны с пластиной. На рис. 170 штриховые линии показывают относительные траектории других частиц.

Относительное движение частиц происходит по часовой стрелке, т. е. против направления вращения пластинки. В действительности относительная угловая скорость радиуса, проведенного из центра пластинки к жидкой частице, меньше ω, так что существует общий дрейф жидкости против часовой стрелки, приводящий к появлению вращательной присоединенной массы (см. пример 8 к гл. 9).

Задачи, связанные с эллиптическими цилиндрами, могут быть также решены прямым методом, изложенным в п. 6.35. Так, если цилиндр движется поступательно со скоростью $Ue^{i\alpha}$, то на границе мы имеем условие

$$\psi = Im\{-Uze^{-i\alpha}\} = Im\{-Uce^{-i\alpha}\operatorname{ch}\zeta\},$$

записанное в эллиптических координатах. Следовательно, мы должны положить

$$w = -Uce^{-i\alpha}\operatorname{ch}\zeta + F(\zeta);$$

функцию $F(\zeta)$ надо выбрать так, чтобы на границе она обращалась в действительную функцию и чтобы $w \to 0$, когда $|\zeta| \to \infty$. Если эллипс определен уравнением $\xi = \xi_0$, т. е. на границе $\bar{\zeta} = 2\xi_0 - \zeta$, то легко видеть, что функцию $F(\zeta)$ можно взять в виде

$$\frac{1}{2}Uce^{-i\alpha}e^{\zeta} + \frac{1}{2}Uce^{i\alpha}e^{2\xi_0 - \zeta},$$

откуда

$$w = U(a+b)\operatorname{sh}(\xi_0 + i\alpha)\,e^{-\zeta}.$$

Подобно этому для вращающегося эллиптического цилиндра на границе имеем

$$\psi = \frac{1}{2}\omega c^2 \operatorname{ch}\zeta \operatorname{ch}\bar{\zeta} = \frac{1}{4}\omega c^2 \operatorname{ch}(\zeta - \bar{\zeta}) + \text{const}.$$

Аналогичным образом можно получить, что

$$w = \frac{1}{4}i\omega c^2 \operatorname{ch}(2\zeta - 2\xi_0) - \frac{1}{4}i\omega c^2 \operatorname{sh}(2\zeta - 2\xi_0) = \frac{1}{4}i\omega(a+b)^2 e^{-2\zeta}.$$

В общем случае если ψ на границе является мнимой частью комплексного потенциала $F_1(\zeta) + F_2(\zeta)$, где $F_1(\zeta) \to \infty$, а $F_2(\zeta) \to 0$ на бесконечности, то $w = -\overline{F}_1(2\xi_0 - \zeta) + F_2(\zeta)$ при условии, что функция $\overline{F}_1(2\xi_0 - \zeta) \to 0$ на бесконечности.

9.66. Цилиндр с циркуляцией. Чтобы наложить циркуляцию на цилиндр произвольной формы, заметим, что мнимая часть комплексного потенциала

$$w = i\varkappa \ln \zeta \qquad (1)$$

на единичной окружности $\zeta = e^{i\eta}$ обращается в нуль, $\psi = \varkappa \ln|\zeta| = 0$, т. е. граница C при этом остается линией тока. Кроме того, потенциал скорости $\varphi = -\varkappa\eta$, так что φ уменьшается на $2\pi\varkappa$, когда мы обходим вокруг цилиндра в положительном направлении (против часовой стрелки). Таким образом, комплексный потенциал (1) дает циркуляцию $2\pi\varkappa$ вокруг цилиндра любой формы, который может быть отображен на единичную окружность. В частности, для эллиптического цилиндра (п.9.65) комплексный потенциал равен

$$w = i\varkappa \ln \zeta + U\frac{b\cos\alpha + ia\sin\alpha}{\zeta} + i\frac{\omega}{4}\frac{a^2-b^2}{\zeta^2}. \qquad (2)$$

9.70. Вращающийся цилиндр. Пусть цилиндр, содержащий жидкость, вращается вокруг оси, проходящей через начало координат параллельно образующей цилиндра; тогда можно использовать следующие соображения.

Пусть уравнение границы поперечного сечения записано в виде

$$z\bar{z} = f(z) + \bar{f}(\bar{z}), \qquad (1)$$

где функция $f'(z)$ не имеет особенностей внутри контура поперечного сечения цилиндра; тогда задача решается комплексным потенциалом

$$w = i\omega f(z), \qquad (2)$$

так как в этом случае на границе $\psi = \frac{1}{2}\omega z\bar{z}$.

Если все особенности функции $f'(z)$ лежат внутри контура, то формула (2) дает решение задачи о цилиндре, вращающемся в жидкости.

В общем случае если уравнение $z = F(\zeta)$ определяет некоторую систему координат, например эллиптическую, такую, что на границе

$$z\bar{z} = f(\zeta) + \bar{f}(\bar{\zeta}),$$

то функция $w = i\omega f(\zeta)$ является комплексным потенциалом для жидкости, движущейся внутри или вне цилиндра в зависимости от того, вне или внутри контура цилиндра находятся особенности функции dw/dz, т. е. функции $f'(\zeta)/F'(\zeta)$.

9.71. Вращающийся эллиптический цилиндр, содержащий жидкость. Возьмем поперечное сечение цилиндра в виде эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{(z+\bar{z})^2}{4a^2} - \frac{(z-\bar{z})^2}{4b^2} = 1.$$

Сравнивая последнее равенство с формулой (1) п. 9.70, получаем

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}z^2 + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Константа в этом соотношении не является существенной, поэтому

$$w = \frac{1}{2}i\omega\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)z^2.$$

Чтобы найти траектории частиц относительно цилиндра, мы можем наложить на движение угловую скорость $-\omega$, добавив к функции тока ψ член $-\frac{1}{2}\omega(x^2+y^2)$. Искомая функция тока получится в виде

$$\Psi = -\frac{a^2b^2\omega}{a^2+b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + A.$$

Когда $\Psi = \text{const}$, относительные траектории являются эллипсами

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \text{const},$$

которые подобны контуру поперечного сечения цилиндра.

Для относительной скорости мы имеем уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -\Psi_y = \frac{2a^2\omega y}{a^2+b^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \Psi_x = -\frac{2b^2\omega x}{a^2+b^2}.$$

Рассмотрим частицу, которая в момент времени $t=0$ находится в точке $(ka, 0)$ на главной оси. Тогда в момент времени t координаты этой точки равны

$$x = ka\cos\Omega t, \quad y = -kb\sin\Omega t, \quad \Omega = \frac{2ab}{a^2+b^2}\omega.$$

Таким образом, в момент времени t частица находится в точке эллипса, эксцентрический угол которой равен $-\Omega t$. Это относится к движущимся осям. Если рассматривать движение в неподвижных осях, то частица будет иметь угловую скорость дрейфа, равную $\omega - \Omega = (a-b)^2\omega/(a^2+b^2)$, наложенную на ее колебательное движение.

Предположим, например, что в начальный момент времени положительная половина главной оси эллипса отмечена краской. Эта линия будет оставаться радиусом эллипса и периодически будет снова совпадать с главной осью. Если цилиндр совершает число полных оборотов, равное $(a^2+b^2)/(a-b)^2$, то главная ось совершит полный оборот. Тем не менее движение остается безвихревым.

9.72. Вращающаяся равносторонняя призма, содержащая жидкость. Прямые

$$x-a=0, \quad x-y\sqrt{3}+2a=0, \qquad x+y\sqrt{3}+2a=0$$

образуют равносторонний треугольник ABC, центр тяжести которого находится в начале координат (рис. 171). Длина стороны треугольника равна $2a/\sqrt{3}$. Комбинируя эти уравнения в одно, мы получим уравнение границы в виде

$$F(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 3a(x^2+y^2) - 4a^3 = 0,$$

или

$$\frac{1}{2}(z^3+\bar{z}^3) + 3az\bar{z} - 4a^3 = 0.$$

Сравнивая последнее выражение с формулой (1) п. 9.70, мы находим

$$f(z) = -\frac{1}{6}\frac{z^3}{a} + \frac{2a^2}{3},$$

отсюда сразу получаем

$$w = -\frac{i\omega z^3}{6a}.$$

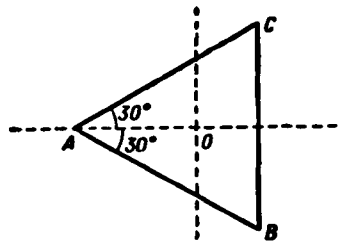


Рис. 171.

Добавляя в функцию тока член $\psi = -\frac{1}{2}\omega(x^2+y^2)$, мы найдем уравнение линий тока в относительном движении $F(x, y) = \text{const}$, или

$$(x-a)(x-y\sqrt{3}+2a)(x+y\sqrt{3}+2a) = c^3,$$

где c — некоторая постоянная. Это уравнение определяет кубические кривые, имеющие стороны нашего треугольника в качестве асимптот, а петли

кривых, ограниченные этими асимптотами, находятся внутри треугольника ABC. В частности, если $c=0$, то ломаная линия ABC является относительной линией тока.

9.73. Круговой цилиндр с вырезом. Пусть поперечное сечение цилиндра имеет форму лунки, ограниченной окружностями

$$x^2+y^2-b^2=0, \qquad x^2+y^2-2ax=0,$$

как показано на рис. 172. Жидкость находится внутри цилиндра. Центр первой окружности лежит на второй окружности.

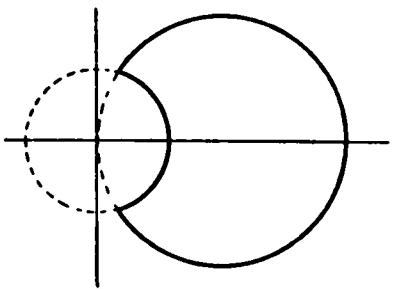


Рис. 172.

Перемножая последние два уравнения, мы получаем

$$z\bar{z}=a(z+\bar{z})+b^2-ab^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right),$$

откуда

$$w=i\omega\left(az-\frac{ab^2}{z}\right).$$

Заметим, что особая точка $z=0$ находится вне контура поперечного сечения цилиндра.

9.74. Метод конформного отображения для комплексного потенциала. Пусть кривая C является контуром поперечного сечения цилиндра, содержащего жидкость и вращающегося с угловой скоростью ω вокруг точки O, лежащей внутри поперечного сечения. Предположим, что *внутренняя* область, ограниченная этой кривой, может быть конформно отображена на *внутренность* единичного круга в плоскости ζ с помощью функции

$$z=f(\zeta). \tag{1}$$

Тогда мы можем, согласно формуле (7) п. 9.63, получить комплексный потенциал в виде

$$w=B_2(\zeta). \tag{2}$$

Так как разложение этой функции в ряд содержит только положительные степени ζ, то мы получим конечные скорости в начале координат и вообще в любой точке области течения.

В самом деле,

$$-u+iv=\frac{dw}{dz}=\frac{B_2'(\zeta)}{f'(\zeta)},$$

а это выражение не может обращаться в бесконечность, потому что функция $f'(\zeta)$ не имеет нулей в области, занятой движущейся жидкостью.

9.75. Криволинейная многоугольная граница. Преобразование

$$z=c\zeta(1+\lambda\zeta^n), \tag{1}$$

где c и n — некоторые действительные положительные постоянные, конформно отображает внутренность единичной окружности в плоскости ζ на внутренность правильного криволинейного многоугольника [1]), имеющего n сторон. Преобразование является конформным во всех точках внутри единичной окружности, если функция $f'(\zeta)$ не обращается в нуль или беско-

[1]) Кривая, ограничивающая этот многоугольник, называется эпитрохоидой.

нечность в единичном круге. Это имеет место, если выполнено условие

$$0 \leqslant \lambda (n+1) \leqslant 1. \tag{2}$$

Теперь положим $\zeta = e^{i\eta}$ и $z = re^{i\theta}$; тогда легко получить соотношения

$$r^2 = z\bar{z} = c^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos n\eta), \tag{3}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\eta + \lambda \sin (n+1)\eta}{\cos\eta + \lambda \cos (n+1)\eta}. \tag{4}$$

Отсюда следует, что на граничной кривой C величина r принимает экстремальные значения в том случае, когда $\sin n\eta = 0$, т. е. когда

$$\eta = \theta = s\frac{\pi}{n}, \qquad s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1.$$

Таким образом,

$$1 - \lambda \leqslant \frac{r}{c} \leqslant 1 + \lambda.$$

Кривая C имеет n осей симметрии, если n — нечетное число, и $2n$ осей симметрии, если n — четное число. В случае $n = 1$ простым переносом начала координат по формуле $z' = z + \lambda c = r'e^{i\theta'}$ можно убедиться, что кривая C является эллиптической улиткой

$$r' = a + b\cos\theta', \qquad b \leqslant a \left(a = c,\ \frac{b}{a} = 2\lambda\right). \tag{5}$$

Для заполненного жидкостью вращающегося цилиндра, поперечное сечение которого задается формулами (3) и (4), граничная функция имеет вид

$$B(\zeta) = i\omega c^2 \{1 + \lambda^2 + \lambda (\zeta^n + \zeta^{-n})\},$$

следовательно, формула (2) п. 9.74 дает

$$w = i\omega c^2 \lambda \zeta^n. \tag{6}$$

Для кинетической энергии жидкости мы имеем выражение

$$T = \frac{1}{4} i\varrho \int_{(C)} w d\bar{w} = \frac{1}{4} i\varrho \int_{(C)} i\omega c^2 \lambda \zeta^n (ni\omega c^2 \lambda \zeta^{-n-1} d\zeta),$$

или

$$T = -\frac{i}{4} \varrho \omega^2 c^4 \lambda^2 n \int_{(C)} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2} \varrho \pi \omega^2 c^4 \lambda^2 n.$$

9.76. Вращение вокруг эксцентрической точки. Если ось вращения проходит через точку z_0, а не через начало координат, то начало координат можно выбрать в качестве полюса и движение будет эквивалентно вращению вокруг начала координат с угловой скоростью ω и поступательному движению вместе с началом координат с комплексной скоростью $i\bar{z}_0\omega$. Новые граничные условия (п. 9.40) тогда удовлетворяются комплексным потенциалом

$$w - i\omega \bar{z}_0 z,$$

где w — комплексный потенциал, когда вращение происходит вокруг начала координат.

ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ 9

1. Круговой цилиндр радиуса a движется со скоростью U перпендикулярно своей оси в безграничной несжимаемой жидкости плотности ϱ. На цилиндр наложена циркуляция I. Показать, что если (u, v) — компоненты скорости точки $z=x+iy$, то

$$-u+iv=-\frac{a^2U}{z^2}+i\frac{I}{2\pi z}.$$

Пусть цилиндр вращается с угловой скоростью ω, а циркуляция I выбрана так, чтобы сделать среднюю квадратичную скорость жидкости на границе цилиндра минимальной. Доказать, что в этом случае $I=2\pi a^2\omega$, и вычислить силу, действующую со стороны жидкости на цилиндр.

2. Пусть жидкость, обтекающая неподвижный круговой диск, имеет скорость на бесконечности, равную V. Найти распределение скорости. Показать, что максимальная скорость в жидкости равна $2V$. Показать также, что если цилиндр движется поступательно в покоящейся жидкости, то скорость жидкости изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от центра сечения цилиндра.

3. Если вся граница области, занятой жидкостью, покоится, то не может существовать чисто безвихревого движения жидкости. Доказать эту теорему, введя и объяснив необходимое ограничение на вид области.

Пусть пространство между двумя неподвижными коаксиальными цилиндрами радиусов a и b и двумя плоскостями, перпендикулярными к оси цилиндров и отстоящими друг от друга на величину c, занято жидкостью плотности ϱ. Найти потенциал скорости движения, кинетическая энергия которого равна T.

4. Пусть φ и ψ — потенциал скорости и функция тока для эллиптического цилиндра, движущегося поступательно в направлении большой оси. Показать, что

$$x=\frac{1}{2}c\varphi\left\{\frac{1}{k}+\frac{k}{\varphi^2+\psi^2}\right\},\quad y=\frac{1}{2}c\psi\left\{\frac{1}{k}-\frac{k}{\varphi^2+\psi^2}\right\},$$

где $k=Vce^{\xi}\operatorname{sh}\xi$. Пользуясь этими формулами, нарисовать кривые $\varphi=\text{const}$, $\psi=\text{const}$.

5. Очень длинная тонкая твердая доска шириной $2c$, плавающая по поверхности глубокой воды, получает удар, направленный вертикально вниз, импульс которого равен I. Удар приложен в центре доски. Показать, что скорость воды, направленная вверх, на расстоянии x от оси доски равна

$$\frac{2I}{\{\pi\varrho\sqrt{x^2-c^2}\}\{x+\sqrt{x^2-c^2}\}},$$

где ϱ — плотность воды.

6. К погруженному в жидкость эллиптическому цилиндру, масса которого равна M, а полуоси равны a и b, приложен импульс сил. Показать, что начальное движение цилиндра задается формулами

$$u(M+\pi\varrho b^2)=I,\quad v(M+\pi\varrho a^2)=J,\quad \omega\left[Mk^2+\frac{1}{8}\pi\varrho(a^2-b^2)^2\right]=G,$$

где I, J, G — компоненты импульса.

7. Эллиптический цилиндр, полуоси поперечного сечения которого равны a и b, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Цилиндр находится в жидкости, которая покоится на бесконечности. Найти потенциал скорости и функцию тока движущейся жидкости и вычислить кинетическую энергию единичного слоя жидкости. Кроме того, найти точки на границе цилиндра, в которых скорость жидкости достигает максимальной и минимальной величины. Показать, что в этих точках давление принимает соответственно минимальное и максимальное значение.

8. Пусть бесконечно длинный цилиндр плотности σ, поперечное сечение которого представляет собой эллипс с полуосями a и b, вращается вокруг своей продольной оси в безграничной жидкости плотности ϱ. Показать, что при этом квадрат радиуса инерции цилиндра относительно оси вращения эффективно возрастает на величину

$$\frac{\varrho}{8\sigma}\frac{(a^2-b^2)^2}{ab}.$$

9. Бесконечная плоская пластинка шириной $2l$ вращается с угловой скоростью ω в жидкости плотности ϱ. Показать, что момент силы (приходящийся на единицу толщины), необходимый для поддержания вращения пластинки, равен

$$\frac{1}{8}\pi\varrho l^4\frac{d\omega}{dt}.$$

10. Пустотелый цилиндр, ограниченный эллипсом $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, содержит в себе жидкость и вращается с угловой скоростью ω вокруг своей продольной оси. Показать, что функция тока движения жидкости имеет вид

$$\psi=\frac{\omega}{2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,(x^2-y^2).$$

Доказать, что частицы жидкости пробегают эллипс один раз за время

$$\frac{\pi(a^2+b^2)}{\omega ab}.$$

11. Жидкость плотности ρ полностью заполняет сосуд в форме длинного эллиптического цилиндра; полуоси поперечного сечения цилиндра равны a и b; массой цилиндра можно пренебречь. Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Вычислить кинетическую энергию жидкости на единицу длины цилиндра и выразить ее через эффективный момент инерции цилиндра.

12. Эллиптический цилиндр, содержащий жидкость, вращается вокруг своей продольной оси. Доказать, что отношение кинетической энергии жидкости в данном движении и кинетической энергии той же жидкости, движущейся как твердое тело, равно

$$\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2$$

13. Эллиптический цилиндр, полуоси которого равны a и b, заполнен несжимаемой жидкостью. Цилиндр вращается вокруг своей продольной оси с угловой скоростью ω. Показать, что компоненты скорости (u, v), параллельные осям Ox и Oy эллипса, задаются формулами

$$u=\omega y\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}, \qquad v=\omega x\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Показать, что координаты X и Y (относительно неподвижных осей в точке O) произвольной частицы жидкости в момент времени t выражаются формулами

$$X=\lambda\left\{(a+b)\cos\left[\frac{(a-b)^2\omega t}{a^2+b^2}\right]+(a-b)\cos\left[\frac{(a+b)^2\omega t}{a^2+b^2}\right]\right\},$$

$$Y=\lambda\left\{(a+b)\sin\left[\frac{(a-b)^2\omega t}{a^2+b^2}\right]+(a-b)\sin\left[\frac{(a+b)^2\omega t}{a^2+b^2}\right]\right\},$$

где λ — некоторая постоянная, зависящая от частицы жидкости. В момент $t=0$ частица находится на оси OX.

14. Тонкая оболочка в форме эллиптического цилиндра, оси поперечного сечения которого равны $2a$ и $2b$, вращается вокруг своей оси в покоящейся жидкости. Оболочка заполнена жидкостью той же плотности. Показать, что отношение кинетической энергии жидкости внутри цилиндра и кинетической энергии жидкости вне цилиндра равно $2ab/(a^2+b^2)$.

15. Эллипс

$$a(x^2-y^2)+2bxy-\frac{1}{2}\,\omega(x^2+y^2)+c=0,$$

заполненный жидкостью, вращается вокруг начала координат с угловой скоростью ω. Показать, что функция тока движения жидкости имеет вид

$$\psi=a(x^2-y^2)+2bxy.$$

16. Пусть функция тока задана в виде $\psi=C(x^3-3xy^2)$. Подобрать постоянную C так, чтобы функция тока описывала движение жидкости во вращающейся призме, стороны которой заданы уравнениями

$$x=a, \qquad x+2a=\pm\sqrt{3}\,y.$$

Показать, что время, необходимое частице, чтобы продвинуться из начала стороны поперечного сечения до середины той же стороны, равно $\ln 3/\omega\sqrt{3}$.

Вычислить эффективный радиус инерции призмы относительно оси вращения.

17. Цилиндрический сосуд, поперечное сечение которого является сегментом параболы $2(x^2-3y^2)+x+ay=0$, отсекаемым осью $x=0$, заполнен жидкостью и вращается с постоянной угловой скоростью, равной единице, вокруг оси, проходящей через начало координат и параллельной образующей цилиндра. Доказать, что функция тока течения имеет вид

$$-\psi=2(x^3-3xy^2)+\frac{1}{2}\,(x^2-y^2)+axy.$$

18. Уравнение

$$x^4-6x^2y^2+y^4+2a^2(x^2+y^2)-a^4=0$$

приводится к виду

$$[(\sqrt{2}+1)x^2-(\sqrt{2}-1)y^2-a^2][(\sqrt{2}-1)x^2-(\sqrt{2}+1)y^2+a^2]=0.$$

Цилиндр, поперечное сечение которого ограничено этими двумя параболами, вращается вокруг начала координат с угловой скоростью ω. Доказать, что функция тока движения жидкости внутри цилиндра задается формулой

$$\psi=-\frac{(x^4-6x^2y^2+y^4)\,\omega}{4a^2}.$$

19. Полый цилиндр с поперечным сечением S наполнен невязкой жидкостью и вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, параллельной его образующей. Показать, что если функция χ удовлетворяет уравнению $\nabla^2\chi=-1$ внутри поперечного сечения цилиндра и обращается в нуль на его границе, то кинетическая энергия T и момент количества движения G относительно оси вращения на единицу длины цилиндра задаются формулами

$$2T=\varrho\omega^2(I-J),\qquad G=\varrho\omega(I-J),$$

где I — момент инерции поперечного сечения относительно оси вращения, $J=4\int\limits_{(S)}\chi\,dS$, ϱ — плотность жидкости.

Доказать, что для эллиптического цилиндра, вращающегося вокруг фокуса, имеет место соотношение

$$I-J=\frac{\pi ab(a^2-b^2)(5a^2+3b^2)}{4(a^2+b^2)}.$$

20. Цилиндрический сосуд, заполненный несжимаемой жидкостью плотности ϱ, вращается с угловой скоростью ω вокруг некоторой оси, параллельной образующей. Пусть поперечное сечение сосуда ограничено окружностью радиуса a, центр которой O лежит на оси вращения, и радиусами $\theta=\pm\alpha$. Показать, что в этом случае функция тока имеет вид

$$\psi=\frac{1}{2}\omega r^2\frac{\cos 2\theta}{\cos 2\alpha}-32\omega a^2\alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{(2n+1)\pi}{2\alpha}}\cos\frac{(2n+1)\pi\theta}{2\alpha}}{(2n+1)\pi[(2n+1)^2\pi^2-16\alpha^2]}.$$

Вычислить кинетическую энергию слоя жидкости единичной толщины.

21. Прямоугольная призма, стороны поперечного сечения которой равны $2a$ и $2b$, вращается с угловой скоростью Ω вокруг своей оси Oz. Призма содержит несжимаемую жидкость плоскости ϱ, которая совершает безвихревое движение. Показать, что с точностью до несущественной постоянной функция тока течения имеет вид

$$\psi=-\frac{16\Omega}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\left\{a^2\frac{\operatorname{ch}\frac{(2n+1)\pi y}{2a}}{\operatorname{ch}\frac{(2n+1)\pi b}{2a}}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2a}+\right.$$
$$\left.+b^2\frac{\operatorname{ch}\frac{(2n+1)\pi x}{2b}}{\operatorname{ch}\frac{(2n+1)\pi a}{2b}}\cos\frac{(2n+1)\pi y}{2b}\right\}.$$

Найти выражение для потенциала скорости φ и вывести выражение для кинетической энергии жидкости, приходящейся на единицу длины призмы.

22. Твердый цилиндр движется в жидкости перпендикулярно своей образующей. Задана линейная скорость $Q=U+iV$ центра тяжести сечения цилиндра относительно осей, связанных с сечением, и угловая скорость ω. Доказать, что на границе цилиндра функция тока с точностью до постоянной величины имеет вид

$$\psi=\frac{1}{2}(i\bar{Q}z-iQ\bar{z}+\omega z\bar{z}),$$

где черта над буквой обозначает комплексно-сопряженную функцию.

Жидкость заключена между двумя цилиндрами, движение которых определено, как и выше, величинами Q, ω и Q', ω'. Доказать, что количество движения жидкости равно $M'Q'-MQ$, где M' и M — массы жидкости (приходящиеся на единицу толщины), которые могли бы содержать соответственно внешний и внутренний цилиндры.

23. Круговой цилиндр, содержащий невязкую несжимаемую жидкость, приводится во вращение с постоянно возрастающей угловой скоростью вокруг эксцентрической оси, параллельной оси цилиндра. Найти движение жидкости.

Найти также движение жидкости, если цилиндр твердый и окружен бесконечной массой жидкости. Рассмотреть два случая: а) первоначально циркуляция вокруг цилиндра отсутствует; б) в начальный момент времени вокруг цилиндра существует циркуляция интенсивности I.

24. Найти линии тока двумерного течения жидкости, заданного комплексным потенциалом

$$\varphi+i\psi=-\frac{n}{2}(x+iy)^2 e^{2int}.$$

Показать или проверить, что траектории частиц жидкости (в полярных координатах) могут быть получены исключением t из равенств

$$r\cos(nt+\theta)-x_0=r\sin(nt+\theta)-y_0=nt(x_0-y_0).$$

25. Жидкость содержится между эллиптическими цилиндрами

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k^2,$$

где a, b и k — некоторые постоянные, и вся система вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью Ω. Показать, что потенциал скорости φ, отнесенный к осям Ox и Oy, задается формулой

$$\varphi=-\Omega\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}xy$$

и что поверхности равного давления являются гиперболическими цилиндрами

$$\frac{x^2}{3a^2+b^2}-\frac{y^2}{a^2+3b^2}=\text{const}.$$

Определить также кинетическую энергию и момент количества движения относительно оси Oz.

26. Невязкая несжимаемая жидкость постоянной плотности ρ совершает двумерное безвихревое движение между двумя цилиндрами, поперечное сечение которых ограничено кривыми C_1 и C_2, причем кривая C_1 полностью лежит внутри кривой C_2. Доказать равенство

$$\int\limits_{(C_1)} l\varphi\,ds-\int\limits_{(C_2)} l\varphi\,ds=\int\limits_{(C_1)} x\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds-\int\limits_{(C_2)} x\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds,$$

где φ — потенциал скорости, предполагаемый однозначной функцией, l — косинус угла между внешней нормалью и осью x, дифференцирование производится вдоль внешней нормали.

Бесконечный твердый цилиндр, поперечное сечение которого ограничено кривой C, движется в жидкости вдоль оси x со скоростью U. Пусть для больших значений $|z|$ комплексный потенциал задается формулой

$$w=\varphi+i\psi=\frac{U(\lambda+i\mu)}{z}+O\left(\frac{1}{|z|^2}\right),$$ [1]

где λ и μ действительны, а $z=x+iy$. Доказать, что кинетическая энергия жидкости, приходящаяся на единицу длины, равна

$$\frac{1}{2}\rho U^2(2\pi\lambda-A),$$

где A — площадь, ограниченная кривой C.

---

[1]) Знак O читается как «величина порядка» и означает, что существуют такие положительные числа K, R, что абсолютное значение рассматриваемой величины меньше чем K/r^2 при условии, что $|z|=r>R$.

Пусть бесконечный прямой цилиндр, поперечное сечение которого ограничено кривой $r_1r_2=b^2$, где r_1 и r_2 — расстояния от двух точек P и Q, удаленных друг от друга на расстояние $2a$ $(b>a)$, движется со скоростью U вдоль прямой PQ в жидкости, покоящейся на бесконечности. Показать, что кинетическая энергия жидкости, приходящаяся на единицу длины, равна

$$\rho U^2b^2\left\{\pi-\frac{\pi a^2}{2b^2}-E\left(\frac{a^2}{b^2}\right)\right\},$$

где

$$E(k)=\int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2x)^{1/2}\,dx.$$

27. Два концентрических цилиндра, радиусы которых равны a и b, движутся со скоростями U и V вдоль линии, соединяющей их центры. Доказать равенство

$$\varphi=\frac{Ua^2-Vb^2}{b^2-a^2}r\cos\theta+(U-V)\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}\frac{\cos\theta}{r}.$$

Доказать также, что когда скорость V направлена перпендикулярно скорости U, то имеет место равенство

$$\varphi=-\frac{b^2V}{b^2-a^2}\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\sin\theta+\frac{a^2U}{b^2-a^2}\left(r+\frac{b^2}{r}\right)\cos\theta,$$

причем в обоих случаях через a обозначен радиус внутреннего цилиндра.

28. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрическими оболочками радиусов a и b заполнено жидкостью плотности ρ. Внешняя оболочка радиуса a внезапно приводится в движение со скоростью U.

Показать, что импульс сил, приходящихся на единицу длины оболочки, который необходимо приложить к внутреннему цилиндру, чтобы удержать его в покое, равен

$$\frac{2\pi\rho a^2b^2U}{a^2-b^2}.$$

Показать также, что импульс сил, который необходим, чтобы привести в движение со скоростью U внутренний цилиндр, когда внешний цилиндр покоится, равен

$$\frac{\pi b^2}{a^2-b^2}\{(\sigma+\rho)a^2-(\sigma-\rho)b^2\}U,$$

где σ — плотность цилиндра.

29. Два круговых цилиндра радиусов a и a' движутся со скоростями V и V' в направлении, перпендикулярном прямой, соединяющей их центры. Определить приближенно потенциал скорости течения жидкости. Вывести также потенциал скорости в случае, когда эти цилиндры неподвижны и обтекаются потоком, перпендикулярным прямой, соединяющей их центры.

Пусть V — скорость равномерного потока, обтекающего два неподвижных цилиндра в направлении, перпендикулярном прямой, соединяющей их центры. Радиус каждого цилиндра равен a, а расстояние между центрами равно c.

Показать, что если отношение c/a не мало, то среднее значение скорости на прямой, соединяющей ближайшие точки цилиндров, равно приблизительно

$$V\frac{c+a}{c-a}.$$

Глава 10

ТЕОРЕМА ШВАРЦА — КРИСТОФФЕЛЯ

10.10. Простые замкнутые многоугольники. Примерами обычных многоугольников являются, скажем, прямоугольник или правильный шестиугольник. Для гидродинамических приложений необходимо расширить это понятие до прямолинейных конфигураций, которые на первый взгляд ничего общего не имеют с многоугольниками элементарной геометрии. Рассмотрим два свойства прямоугольника (или правильного шестиугольника).

а) Можно перейти от одной определенной точки границы к другой определенной точке границы, следуя по пути, который никогда не покидает границу. Граница является связной.

б) Граница области делит точки плоскости на два типа: одни точки можно назвать *внутренними*, а другие *внешними*. Внутренними точками являются такие точки, что любые две из них можно соединить линией, нигде не пересекающей границу. То же справедливо для внешних точек. С другой стороны, невозможно перейти от внутренней точки к внешней, не пересекая где-либо границу.

Любая конфигурация прямых линий в плоскости, которая обладает свойствами (а) и (б), называется *простым замкнутым многоугольником*. Термин «простой» означает, что каждая точка плоскости является либо внутренней точкой, либо точкой границы, либо внешней точкой, причем точки каждого класса образуют связную систему.

Во многих важных гидродинамических задачах границы многоугольника простираются до бесконечности.

Мы будем рассматривать в качестве внутренних точек многоугольника (см. п. 5.71) такие точки, которые находятся в области, расположенной слева от наблюдателя, описывающего границу в заданном направлении. Некоторые из таких многоугольников изображены на рис. 173. Точки, удаленные на бесконечно большое расстояние, отмечены индексом ∞; внешние области многоугольников заштрихованы. В каждом случае буква P обозначает внутреннюю точку.

На рис. 173 (*I*) показан прямоугольник с двумя вершинами в бесконечности. Этот прямоугольник можно было бы рассматривать как треугольник с одной вершиной в бесконечности (соответствующей точкам A_∞ и D_∞). На рис. 173 (*II*) все вершины четырехугольника $ABCD$ находятся в бесконечности.

На рис. 173 (*III*), (*IV*) показан треугольник с двумя вершинами в бесконечности, причем внутренней областью считается внутренняя или внешняя сторона треугольника $A_\infty BC_\infty$ в соответствии с направлением обхода границы. Диаграмму на рис. 173 (*V*) можно рассматривать как прямоугольник, в котором две вершины совпадают в точке B, C, а другие две совпадают в бесконечности. Эту диаграмму можно рассматривать как полубесконечную прямую линию, описываемую дважды в указанных направлениях. Этот пример имеет много приложений; мы отметим лишь ту особенность, что данный прямоугольник не содержит внешних точек. Все точки плоскости принадлежат либо границе, либо внутренней области в соответствии с нашим определением внутренней области. Для более глубокого понимания рассмотренного примера

на рис. 173 (*VI*) показана та же диаграмма в виде двух линий, причем считается, что прямые линии $A_\infty B$ и $D_\infty B$ не совпадают.

Теперь покажем, что граница любого простого замкнутого многоугольника на плоскости z может быть преобразована в действительную ось плоскости ζ с помощью конформного отображения; при этом внутренним точкам многоугольника будут соответствовать точки, расположенные только с одной

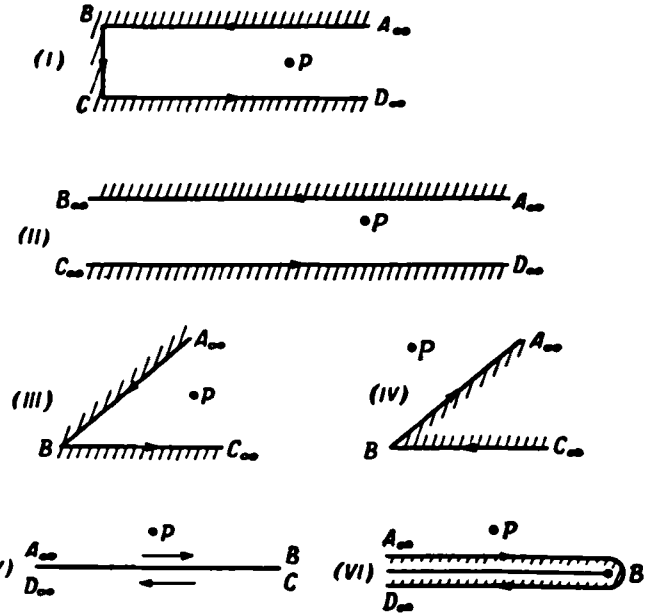


Рис. 173.

стороны действительной оси плоскости ζ; течение жидкости внутри многоугольника преобразуется в течение на полуплоскости ζ.

Допустим, что такое отображение осуществлено; тогда ясно, что вершины углов многоугольника перейдут в точки действительной оси плоскости ζ.

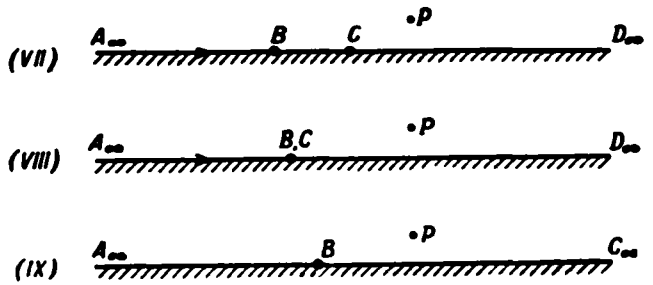


Рис. 174.

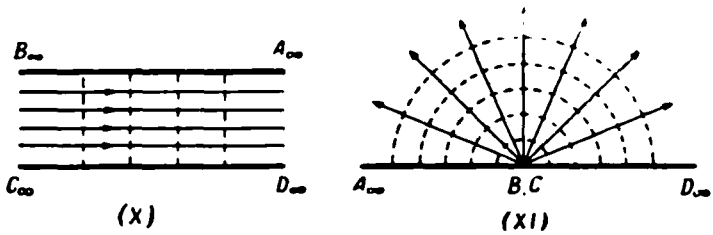
Это отображение можно интуитивно рассматривать как развертывание многоугольника до тех пор, пока его граница не перейдет в бесконечную прямую линию; при этом произойдут локальные изменения размеров, необходимые для соблюдения конформности отображения.

Если многоугольники, изображенные на рис. 173 (*I*—*VI*), отобразить указанным путем, то в результате мы получим полуплоскости, изображенные на рис. 174 (*VII*—*IX*). В случае, изображенном на рис. 174 (*II*), можно считать, что точки B_∞ и C_∞ переходят или в одну конечную точку B, C, или в две

различные конечные точки B и C; в последнем случае мы получим полуплоскость, аналогичную той, которая получается из диаграммы рис. 173 (*I*).

Этот интуитивный метод может быть применен для изучения конкретных задач только в простейших случаях, однако он позволяет выяснить картину преобразования потока.

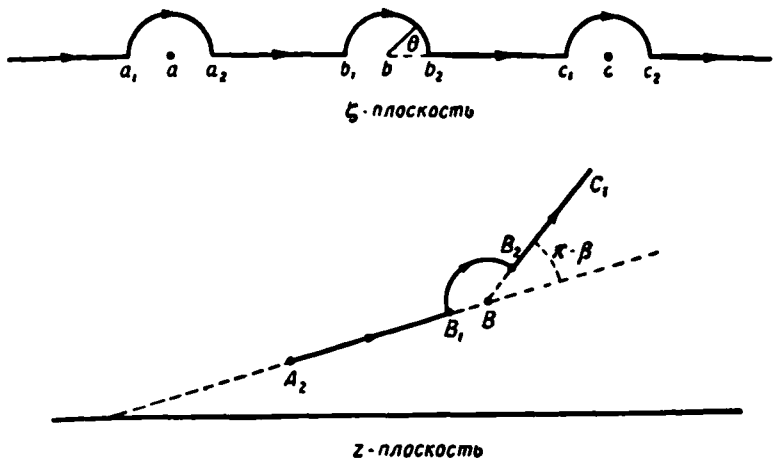
Таким образом, если мы имеем равномерный поток в канале с параллельными плоскими стенками, то линиями тока являются прямые, парал-



Р и с. 175.

лельные стенкам, а линиями равного потенциала скоростей являются прямые, перпендикулярные стенкам. Равномерный поток можно рассматривать как поток, обусловленный источником в $-\infty$ и стоком в $+\infty$. Если мы развернем канал, считая, что точки B_∞ и C_∞ совпадают, то получим источник в точке B, C и сток в бесконечности [рис. 175 (*X*—*XI*)]. Хотя этот результат вполне очевиден, он хорошо иллюстрирует процесс преобразования потока.

10.20. Теорема Шварца — Кристоффеля. Пусть a, b, c, ... представляют собой n точек действительной оси плоскости ζ, причем $a < b < c$ ... .



Р и с. 176.

Пусть α, β, γ, ... — внутренние углы простого замкнутого многоугольника с n вершинами (рис. 176), при этом

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots=(n-2)\,\pi.$$

Тогда теорема Шварца — Кристоффеля формулируется следующим образом.

Отображение плоскости ζ на плоскость z, определяемое соотношением

$$\frac{dz}{d\zeta} = K(\zeta - a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}(\zeta - b)^{\frac{\beta}{\pi}-1}(\zeta - c)^{\frac{\gamma}{\pi}-1}\ldots,$$

преобразует действительную ось плоскости ζ в границу замкнутого многоугольника плоскости z так, что вершинам многоугольника отвечают точки a, b, c, ..., а внутренними углами многоугольника являются α, β, γ .... Кроме того, если многоугольник простой, то его внутренняя часть соответствует при этом верхней половине плоскости ζ. Постоянная величина K может быть и комплексной.

Доказательство. Доказательство теоремы в основном заключается в установлении следующих утверждений:

1) Когда величина ζ увеличивается, например, от a до b, то величина z описывает прямую линию.

2) Когда величина ζ проходит через точку b, эта прямая поворачивается на угол $\pi - \beta$.

3) Точки, расположенные внутри многоугольника, образованного указанными прямыми, соответствуют точкам, лежащим в верхней половине плоскости ζ.

Так как разность $\zeta - a$ обращается в нуль при $\zeta = a$, то производная $dz/d\zeta$ в этой точке равна нулю или бесконечности (в соответствии с тем, будет ли $\alpha > \pi$ или $\alpha < \pi$). Поэтому мы исключаем точки a, b, c, ... на действительной оси ζ, проводя около этих точек, как из центров, полуокружности с малыми радиусами r, расположенные в *верхней полуплоскости* ζ.

Полуокружность с центром в точке a пересекает действительную ось в точках a_1 и a_2, как показано на рис. 176. Будем предполагать, что точка ζ пробегает действительную ось в направлении возрастания величины ζ (так что $d\zeta$ — величина положительная). При этом точки a, b, c, ... обходятся по полуокружностям.

Пусть A_2, B_1, B_2, C_1 — точки плоскости z, соответствующие точкам a_2, b_1, b_2, c_1. Пусть $K = Ce^{i\lambda}$; здесь C — действительная положительная константа, λ — действительное число. Тогда, приравнивая аргументы в левой и правой частях вышеприведенного соотношения, получаем равенство

$$\arg(dz) - \arg(d\zeta) = \lambda + \left(\frac{\alpha}{\pi} - 1\right)\arg(\zeta - a) +$$
$$+ \left(\frac{\beta}{\pi} - 1\right)\arg(\zeta - b) + \left(\frac{\gamma}{\pi} - 1\right)\arg(\zeta - c) + \ldots.$$

Когда точка ζ перемещается от точки a_2 к точке b_1, то $\arg(d\zeta)$ остается равным нулю; далее, $\arg(\zeta - a) = 0$, так как величина $(\zeta - a)$ действительна и положительна; $\arg(\zeta - b) = \arg(\zeta - c) = \ldots = \pi$, так как все величины $(\zeta - b)$, $(\zeta - c)$, ... действительны и отрицательны.

Таким образом, имеем

$$\arg(dz) = \lambda + (\beta - \pi) + (\gamma - \pi) + \ldots.$$

Это означает, что $\arg(dz)$ остается постоянным, пока точка ζ движется от точки a_2 к точке b_1, поэтому точка z описывает прямую линию A_2B_1. Такие же рассуждения показывают, что если величина ζ увеличивается от b_2 до c_1, то

$$\arg(dz) = \lambda + (\gamma - \pi) + \ldots.$$

При этом z описывает прямую линию B_2C_1. Кроме того, значение $\arg(dz)$ на прямой A_2B_1 превосходит значение $\arg(dz)$ на прямой A_2B_1 на

величину $(\pi-\beta)$. Таким образом, направление движения точки z повернулось на угол $(\pi-\beta)$ в положительном направлении. Итак, утверждения (1) и (2) доказаны. Далее, на полуокружности b_1b_2 имеем

$$\zeta - b = re^{i\theta}, \quad d\zeta = ire^{i\theta}\,d\theta.$$

Считая радиус r малым, с достаточной точностью можем записать соотношение

$$\frac{dz}{ire^{i\theta}\,d\theta} = Ce^{i\lambda}(b-a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1} r^{\frac{\beta}{\pi}-1} e^{i\theta\left(\frac{\beta}{\pi}-1\right)} (b-c)^{\frac{\gamma}{\pi}-1} \ldots; \qquad (1)$$

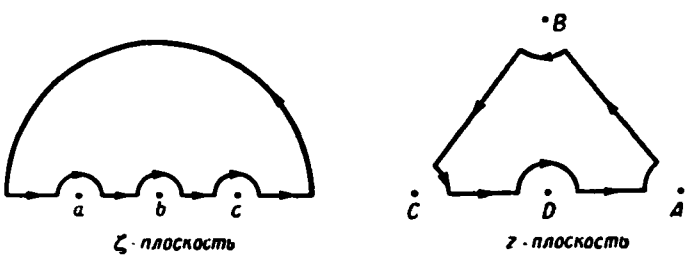
отсюда

$$\frac{dz}{d\theta} = ir^{\frac{\beta}{\pi}} e^{i\left(\lambda+\frac{\theta\beta}{\pi}\right)} F,$$

где множитель F не зависит от r и θ. После интегрирования находим

$$z = z_1 + \frac{\pi}{\beta} r^{\frac{\beta}{\pi}} e^{i\left(\lambda+\frac{\theta\beta}{\pi}\right)} F; \qquad (2)$$

здесь z_1 — константа. Кроме того, так как угол β является положительным, то мы видим, что $z \to z_1$, когда $r \to 0$, поэтому точка z_1 соответствует точке B, в которой пересекаются линии A_2B_1 и B_2C_1.



Р и с. 177.

Таким образом, точка z описывает многоугольник, вершины которого соответствуют точкам a, b, c, ..., а внутренние углы равны α, β, γ, ... соответственно. Кроме того, из формулы (2) следует

$$\arg(z-z_1) = \lambda + \frac{\theta\beta}{\pi} + \arg F.$$

Таким образом, когда точка ζ описывает полуокружность, причем угол θ уменьшается от π до 0, то значение $\arg(z-z_1)$ убывает на величину β и поэтому точка z опишет дугу окружности с центром в точке B, расположенную внутри многоугольника, если многоугольник простой. Таким образом, точки верхней половины плоскости ζ соответствуют внутренним точкам многоугольника. Итак, утверждение (3) доказано.

Остается рассмотреть, как замыкается многоугольник при изменении величины ζ вдоль действительной оси от $-\infty$ до $+\infty$. Для этого рассмотрим рис. 177, на котором показана действительная ось плоскости ζ с вырезами только в трех точках a, b, c, а также полуокружность большого радиуса с центром в начале координат. Когда точка ζ перемещается по действительной оси, обходя точки a, b, c по полуокружностям, то соответствующая точка плоскости z опишет стороны AB и BC треугольника ABC с вырезами в точках A, B и C.

На большой полуокружности $\zeta = Re^{\theta}$; если радиус R достаточно велик, то мы можем с достаточной точностью заменить разности $(\zeta - a)$, $(\zeta - b)$, $(\zeta - c)$ величиной $Re^{i\theta}$. Тогда из уравнения, определяющего преобразование, получаем соотношение, аналогичное формуле (1),

$$\frac{dz}{iRe^{i\theta}\,d\theta} = Ce^{i\lambda}(Re^{i\theta})^{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\pi}-3}.$$

Так как $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то получим

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{iC}{R}e^{i(\lambda-\theta)},$$

отсюда, интегрируя, находим

$$z = z_D - \frac{C}{R}e^{i(\lambda-\theta)},$$

где z_D — константа, к которой стремится точка z при $R \to \infty$.

С другой стороны,

$$\arg(z - z_D) = \pi + \lambda - \theta.$$

Поэтому, когда точка ζ описывает большую полуокружность, угол θ изменяется от 0 до π, а значение $\arg(z - z_D)$ изменяется от $\pi+\lambda$ до λ. Таким образом, точка z описывает полуокружность малого радиуса C/R с центром в точке D, как показано на рис. 177. Когда $R \to \infty$, то полуокружность в плоскости z стягивается в точку. Мы видим опять, что область внутри треугольника с вырезами преобразуется на верхнюю половину плоскости ζ.

Интегрируя уравнение преобразования, получаем

$$z = Ce^{i\lambda}f(\zeta) + L,$$

где L — произвольная константа, от которой можно освободиться соответствующим выбором положения начала координат на плоскости z.

Изменение угла λ приводит к изменению ориентации многоугольника, а изменение константы C изменяет масштаб. Отсюда следует, что все многоугольники, соответствующие заданным значениям a, b, c, ..., α, β, γ, ..., подобны между собой. В гидродинамических приложениях мы будем иметь дело только с простыми многоугольниками, обычно простирающимися до бесконечности. Три величины a, b, c могут быть выбраны произвольно, но так, чтобы они соответствовали трем вершинам заданного многоугольника; остальные величины следует подобрать так, чтобы получился многоугольник правильного вида. Надлежащим подбором констант C и λ устанавливаются затем масштаб и ориентация.

Если преобразование дает простой многоугольник, то отображение является конформным, так как в таком случае удовлетворяются условия (а) и (б) п. 5.62 для действительной оси с вырезами, которые можно сделать бесконечно малыми.

Наконец, остается рассмотреть случай, когда вершина многоугольника соответствует бесконечно удаленной точке действительной оси плоскости ζ. Если, например, точка $a \to -\infty$, то, выбирая константу K, можно написать уравнение, определяющее преобразование, в форме

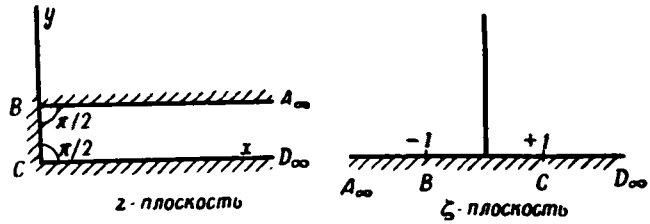
$$\frac{dz}{d\zeta} = Ce^{i\lambda}(-a)^{-\frac{\alpha}{\pi}+1}(\zeta-a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}(\zeta-b)^{\frac{\beta}{\pi}-1}\ldots.$$

Когда $a \to -\infty$, то $\left(\frac{\zeta-a}{-a}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}-1} \to 1$; тогда это уравнение принимает вид

$$\frac{dz}{d\zeta} = Ce^{i\lambda}(\zeta-b)^{\frac{\beta}{\pi}-1}(\zeta-c)^{\frac{\gamma}{\pi}-1}\ldots.$$

Таким образом, множитель, соответствующий $a=-\infty$, в уравнении пропадает и угол α в уравнение не входит.

10.31. Отображение полубесконечной полосы. Полубесконечную полосу $A_\infty BCD_\infty$ ширины a будем рассматривать как прямоугольник с двумя вершинами в бесконечности. Пусть точки A_∞, B, C преобразуются в точки



Р и с. 178.

$\zeta=-\infty$, $\zeta=-1$, $\zeta=1$ на действительной оси плоскости ζ. Если мы развернем границу полуполосы и расположим ее вдоль действительной оси плоскости ζ, то вершины A_∞ и D_∞ перейдут в бесконечно удаленную точку плоскости ζ.

Таким образом, в соответствии с теоремой Шварца — Кристоффеля единственными внутренними углами при таком отображении будут углы B и C, равные $\pi/2$ каждый. Беря оси координат, как указано на рис. 178, получаем

$$\frac{dz}{d\zeta}=K(\zeta+1)^{-\frac{1}{2}}(\zeta-1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{K}{(\zeta^2-1)^{1/2}},$$

отсюда имеем

$$z=K\operatorname{Arch}\zeta+L.$$

Если положить $\operatorname{Arch}1=0$, то получим $\operatorname{Arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$, отсюда $\operatorname{Arch}(-1)=i\pi$. Таким образом, $L=0$, $ai=K(i\pi)$, поэтому

$$z=\frac{a}{\pi}\operatorname{Arch}\zeta \quad \text{или} \quad \zeta=\operatorname{ch}\frac{\pi z}{a}.$$

10.32. Отображение бесконечной полосы. Возьмем бесконечную полосу $A_\infty B_\infty C_\infty D_\infty$ ширины a и предположим, что точки B_∞ и C_∞, рассматриваемые как совпадающие, переходят при отображении в точку $\zeta=0$. Предположим также, что начало координат O переходит в точку $\zeta=1$, а точка $F(z=ai)$ переходит в точку $\zeta=-1$ (рис. 179). Тогда точка D_∞ будет, очевидно, соответствовать точке $\zeta=\infty$.

Угол в вершине $B_\infty C_\infty$ равен нулю, и поэтому получим

$$\frac{dz}{d\zeta}=K\zeta^{-1}, \quad z=K\ln\zeta+L.$$

Возьмем оси координат, как показано на рис. 179. Определим логарифм так, чтобы величина z обращалась в нуль при $\zeta=1$.

Тогда получим

$$0=K\ln 1+L, \quad ai=K\ln(-1)+L.$$

Таким образом, имеем $L=0$, $iK\pi=ia$. Поэтому

$$z=\frac{a}{\pi}\ln\zeta, \quad \text{или} \quad \zeta=e^{\pi z/a}. \tag{1}$$

Соответствующие линии на обеих плоскостях показаны на рис. 175 (X, XI). Прямые $x=\text{const}$ преобразуются в окружности $|\zeta|=\text{const}$, линии $y=\text{const}$ переходят в лучи $\arg\zeta=\text{const}$, выходящие из начала координат плоскости ζ. Если точки A_∞ и D_∞ переходят в точку $\zeta=0$, то преобразование принимает вид

$$\zeta=-e^{-\pi z/a}.$$

В некоторых случаях удобно располагать начало координат плоскости z в точке E на средней линии полосы. Соответствующее преобразование

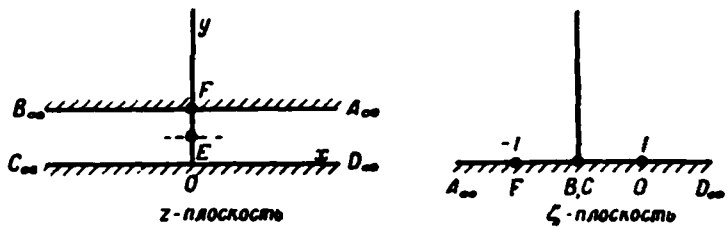


Рис. 179.

получается заменой величины z на величину $z+ia/2$ в формуле (1), так что в этом случае получим формулу

$$z=\frac{a}{\pi}\ln\zeta-\frac{ia}{2},\quad \text{или}\quad \zeta=ie^{\pi z/a}. \tag{2}$$

10.40. Источник, расположенный в стенке канала (рис. 180). Пусть начало координат расположено в щели канала, а действительная ось поме-

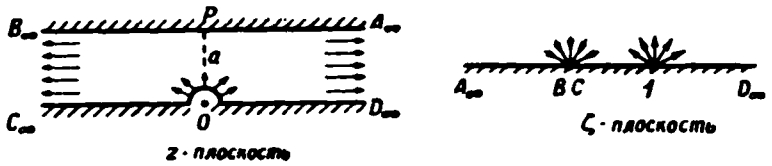


Рис. 180.

щена на одной стороне канала $A_\infty B_\infty C_\infty D_\infty$, ширина которого равна a (рис. 180).

Пусть πm — объем жидкости, втекающей в канал в точке O в единицу времени через щель единичной длины. Таким образом, в точке O имеется источник мощности m. Условимся, что на бесконечно большом расстоянии от источника O поток в канале будет равномерным. Для этого в точках A_∞ и B_∞ должны находиться стоки мощности $^1/_4 m$.

Будем считать точки B_∞, C_∞ совпадающими; развернув границу канала, совместим ее с действительной осью плоскости ζ так, чтобы точки B_∞, C_∞ перешли в точку $\zeta=0$.

Тогда по формуле Шварца — Кристоффеля (п. 10.32) получим

$$\zeta=e^{\pi z/},$$

причем точка $z=0$ соответствует точке $\zeta=1$.

Таким образом, в плоскости ζ мы имеем сток мощности $^1/_2 m$ в точке $\zeta=0$ и источник мощности m в точке $\zeta=1$. Этому течению соответствует

следующий комплексный потенциал:

$$w = -m \ln(\zeta - 1) + \frac{1}{2} m \ln(\zeta) = -m \ln(\zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2}).$$

Учитывая равенство

$$\zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2} = e^{\pi z/(2a)} - e^{-\pi z/(2a)} = 2 \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2a},$$

получаем комплексный потенциал в виде

$$w = -m \ln \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2a}.$$

Физически очевидно, что разветвляющаяся линия тока представляет собой прямую, выходящую из точки O и упирающуюся в противоположную стенку канала в точке $P(z = ai)$, являющейся критической. Действительно, производная

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{m\pi}{2a} \operatorname{cth} \frac{\pi z}{2a}$$

обращается в нуль в точке $z = ai$. Следовательно, давление на линии $A_\infty B_\infty$ достигает максимума в точке P, и поэтому в остальных точках стенки оно будет меньше.

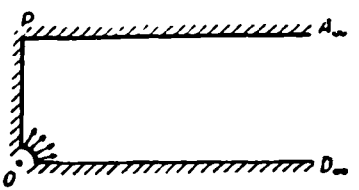


Рис. 181.

Таким образом, рассматриваемое движение жидкости оказывает воздействие на стенку в окрестности точки P; при отсутствии упора стенка в этой точке выпучивается в наружную сторону. Скорость течения вдали от начала координат равна $m\pi/2a$.

Кроме того, если линию тока OP принять за твердую стенку, то получим течение в полубесконечном прямоугольном канале, вызванное источником, помещенным в одном его угле, как изображено на рис. 181. Иначе говоря, мы имеем двумерный поток, образующийся при истечении жидкости из большого прямоугольного сосуда через небольшое отверстие в его угле.

10.50. Источник, расположенный посередине между двумя плоскостями. Решение этой задачи можно получить, используя результаты п. 10.40 и применяя принцип отражения.

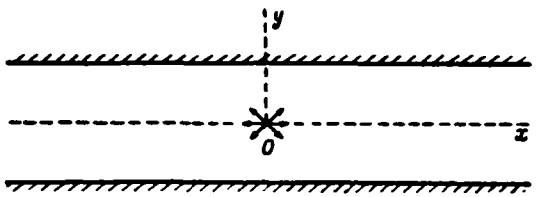


Рис. 182.

Располагая оси координат, как указано на рис. 182, допустим, что в начале координат имеется источник мощности m, расположенный посередине между двумя плоскостями, расстояние между которыми равно $2a$. Тогда

$$w = -m \ln \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2a}. \qquad (1)$$

Эта функция удовлетворяет требуемым условиям в области между верхней стенкой и действительной осью и принимает действительные значения на действительной оси. Таким образом, условия п. 5.53 выполнены и функ-

цию w можно аналитически продолжить ниже действительной оси, давая ей комплексно-сопряженные значения в комплексно-сопряженных точках, что вполне согласуется с формулой (1).

Можно также отметить, что формула (1) дает комплексный потенциал бесконечной последовательности источников, расположеиных вдоль оси y на расстояниях $2a$ между собой, так как имеем

$$\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2a}=0 \quad \text{при} \quad z=0,\ \pm 2ai,\ \pm 4ai,\ \pm 6ai,\ \ldots.$$

10.60. Бесконечно глубокий поток с уступом на дне. Пусть имеется вертикальный уступ BC на горизонтальном дне потока, скорость которого в бесконечности равна U (рис. 183).

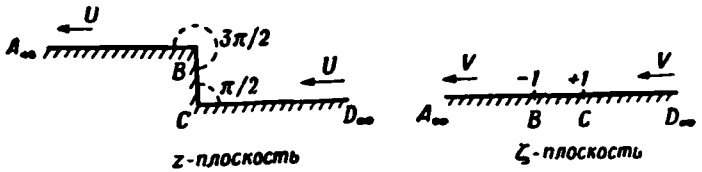


Рис. 183.

Дно потока $A_\infty BCD_\infty$ является простым многоугольником и, следовательно, может быть отображено на действительную ось плоскости ζ, причем так, чтобы точки B и C перешли соответственно в точки $\zeta=-1$ и $\zeta=1$. Применяя преобразование Шварца—Кристоффеля, имеем

$$\frac{dz}{d\zeta}=K(\zeta+1)^{1/2}(\zeta-1)^{-1/2}=K\frac{\zeta+1}{(\zeta^2-1)^{1/2}}=\frac{K\zeta}{(\zeta^2-1)^{1/2}}+\frac{K}{(\zeta^2-1)^{1/2}},$$

отсюда

$$z=K\{\sqrt{\zeta^2-1}+\operatorname{Arch}\zeta\}+L.$$

Так как функции $\sqrt{\zeta^2-1}$ и $\operatorname{Arch}\zeta$ являются многозначными функциями, определим их в различных частях плоскости.

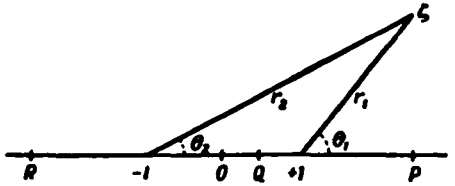


Рис. 184.

На рис. 184 изображена произвольная точка плоскости ζ, отстоящая на расстояниях r_1 и r_2 соответственно от точек $+1$ и -1. В этом случае имеем

$$\zeta-1=r_1e^{i\theta_1},\quad \zeta+1=r_2e^{i\theta_2},$$

$$\sqrt{\zeta^2-1}=\sqrt{r_1r_2}\cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)/2};$$

здесь $\sqrt{r_1r_2}$ обозначает арифметический квадратный корень из произведения. Для точек на действительной оси положим $\zeta=\xi$. Тогда если $\xi>1$, то мы должны положить $\theta_1=0$, $\theta_2=0$. Если $-1<\xi<1$, то $\theta_1=\pi$, $\theta_2=0$, поэтому

$$\sqrt{\zeta^2-1}=\sqrt{r_1r_2}\cdot e^{i\pi/2}=i\sqrt{r_1r_2}.$$

Кроме того, $\theta_1=\pi$, $\theta_2=\pi$, когда $\xi<-1$, в силу этого

$$\sqrt{\zeta^2-1}=\sqrt{r_1r_2}\,e^{i\pi}=-\sqrt{r_1r_2}.$$

Далее,

$$\operatorname{Arch}\zeta=\ln\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right).$$

Поэтому мы получаем

$$z=\{-\sqrt{(\xi^2-1)}+\ln[\xi-\sqrt{(\xi^2-1)}]\}K+L=$$
$$=\{-\sqrt{(\xi^2-1)}+\ln[-\xi+\sqrt{(\xi^2-1)}]+i\pi\}K+L \text{ на линии } A_\infty B\,(\xi<-1),$$
$$z=\{i\sqrt{(1-\xi^2)}+\ln[\xi+i\sqrt{(1-\xi^2)}]\}K+L \text{ на линии } BC,$$
$$z=\{\sqrt{(\xi^2-1)}+\ln[\xi+\sqrt{(\xi^2-1)}]\}K+L \text{ на линии } CD_\infty.$$

Если мы положим $z=0$ в точке C, а также $z=ih$ в точке B, то получим $L=0$, $ih=i\pi K$, так что $K=h/\pi$ и поэтому

$$z=\frac{h}{\pi}\{\sqrt{(\zeta^2-1)}+\operatorname{Arch}\zeta\}.$$

Теперь рассмотрим комплексный потеициал. Равномерный поток в плоскости z можно получить, поместив источник в точке D_∞ и одинаковый по мощности сток в точке A_∞. Таким образом, в плоскости ζ мы должны также иметь источиик и сток в соответствующих точках, так что в этой плоскости также будет равномерный поток, скорость которого пусть будет V. Следовательно, $w=V\zeta$, поэтому

$$\frac{dw}{dz}=V\cdot\frac{d\zeta}{dz}=\frac{V}{K}\sqrt{\frac{\zeta-1}{\zeta+1}}.$$

Но в бесконечно удаленной точке имеем

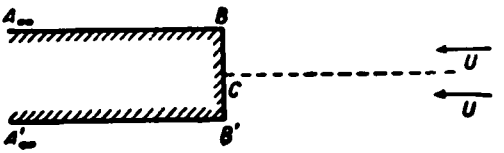
$$dw/dz=U,\ \zeta=\infty.$$

Отсюда $U=V/K=V\pi/h$. Таким образом,

$$w=\frac{hU}{\pi}\zeta.$$

Заметим, что в точке B скорость равна бесконечности, а в точке C равна нулю. Более удобная форма решеиия получится, если положить $\zeta=\operatorname{ch}t$. Тогда имеем

$$z=\frac{h}{\pi}(t+\operatorname{sh}t),\ w=\frac{hU}{\pi}\operatorname{ch}t.$$



Р и с. 185.

Принцип отражения позволяет нам применить тот же комплексный потенциал к потоку бесконечной ширины, обтекающему полубесконечное цилиндрическое тело прямоугольного сечения, изображенное на рис. 185; при этом иачало координат расположеио в точке C, а действительная ось иаправлена против течения.

Читатель может убедиться, интегрируя выражение $^1/_2\varrho q^2$ вдоль линии BB', что сила, приходящаяся на единицу длины линии BB', является конечиой величиной.

10.70. Канал с резко изменяющейся шириной. Рассмотрим изображенный на рис. 186 канал с параллельными стенками и с шириной, резко меняющейся от величины h до величины k.

Если скорость в точке A_∞ равна U, то в силу уравиения иеразрывиости скорость в точке B_∞ равна Uh/k.

Развернем граничную ломаную $A_\infty B_\infty C_\infty DEF_\infty$ иа действительную ось плоскости ζ, считая, что точки B_∞ и C_∞ совпадают и переходят в точку $\zeta=0$.

Пусть точке D соответствует точка $\zeta = 1$ и точке E пусть соответствует точка $\zeta = a$; действительное число a мы определим далее; этому числу нельзя давать произвольное значение, так как значения ζ, соответствующие точками B_∞, C_∞ и D, уже были выбраны.

В вершине $B_\infty C_\infty$ многоугольника угол равен нулю, поэтому преобразование Шварца—Кристоффеля имеет вид

$$\frac{dz}{d\zeta} = K\zeta^{-1}(\zeta - 1)^{1/2}(\zeta - a)^{-1/2}. \tag{1}$$

Далее, поток в плоскости z вытекает *из* источника мощности Uh в точке A_∞ и втекает в сток мощности Uh в точке B_∞. Следовательно,

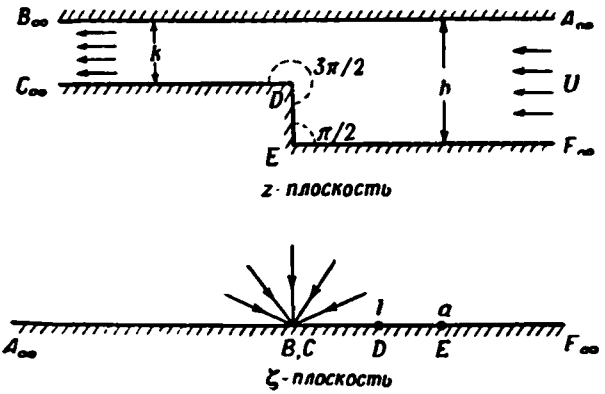


Рис. 186.

в плоскости ζ мы имеем в начале координат сток, который поглощает в единицу времени объем Uh, приходящийся на угол π. Поэтому мощность стока равна Uh/π, следовательно,

$$w = \frac{Uh}{\pi}\ln\zeta, \tag{2}$$

так что $\frac{dw}{d\zeta} = \frac{Uh}{\pi\zeta}$. Отсюда в силу формулы (1) имеем

$$\frac{dw}{dz} = \frac{Uh}{\pi K}\sqrt{\frac{\zeta - a}{\zeta - 1}}.$$

Далее, в точке $A_\infty(\zeta = \infty)$ получаем, что $\frac{dw}{dz} = U$, если действительная ось параллельна прямой $A_\infty B_\infty$. Поэтому

$$U = \frac{Uh}{\pi K}, \qquad K = \frac{h}{\pi}.$$

Кроме того, в точке $B_\infty(\zeta = 0)$ находим, что $\frac{dw}{dz} = \frac{Uh}{k}$. Поэтому

$$\frac{Uh}{k} = \frac{Uh}{\pi K}\sqrt{a},$$

так что

$$a = \frac{h^2}{k^2}.$$

Для получения явной зависимости между величинами z и w следует проинтегрировать соотношение (1).

Интегрирование упрощается, если положить

$$\zeta = \frac{b^2 - t^2}{1 - t^2}, \qquad b^2 = \frac{h^2}{k^2} = a,$$

отсюда

$$\frac{\zeta - 1}{\zeta - b^2} = \frac{1}{t^2}, \quad \frac{d\zeta}{\zeta} = \left(\frac{2t}{1 - t^2} - \frac{2t}{b^2 - t^2}\right) dt,$$

так что

$$\frac{dz}{dt} = K\left(\frac{2}{1 - t^2} - \frac{2}{b^2 - t^2}\right),$$

откуда находим

$$z = \frac{h}{\pi}\left(\ln\frac{1+t}{1-t} - \frac{1}{b}\ln\frac{b+t}{b-t}\right) + L, \tag{3}$$

где L — произвольная постоянная. Если допустить, что точка $z = 0$ соответствует точке $E(\zeta = a)$, то тогда $t = 0$ и поэтому $L = 0$.

Подставив значение ζ в формулу (2), получим

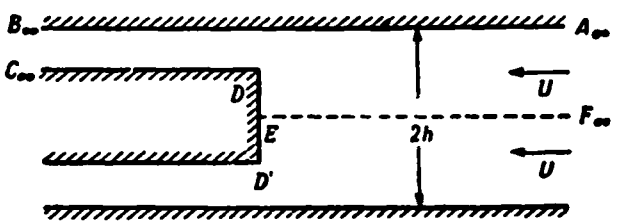
$$w = \frac{Uh}{\pi}\ln\frac{b^2 - t^2}{1 - t^2},$$

откуда

$$t^2 = \frac{e^{w\pi/(Uh)} - b^2}{e^{w\pi/(Uh)} - 1}. \tag{4}$$

Исключая перемеиное t из формул (3) и (4), мы получаем связь между величинами w и z.

Принцип отражения позволяет, кроме того, примеиить тот же комплексный потенциал для построения потока, обтекающего бесконечный твердый



Р и с. 187

цилиндр с прямоугольным поперечным сечением, расположенный симметрично между двумя параллельными стенками, как показано на рис. 187.

Чнтатель может убедиться, интегрируя выражение $\frac{1}{2}\varrho q^2$ вдоль отрезка DD', что сила, действующая на этот отрезок, будет конечной. Это можно сравнить с соответствующим результатом, полученным в конце п. 10.60.

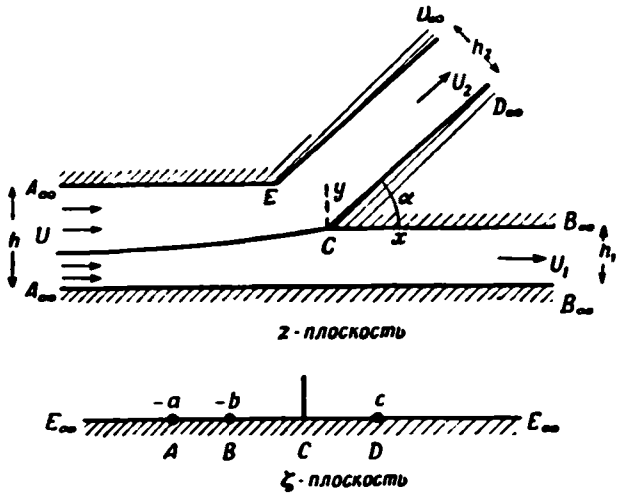
10.80. Канал с разветвляющимся руслом. На рис. 188 изображен канал с разветвляющимся руслом, причем стенки основного и ответвляющегося русла являются прямыми параллельными линиями. Стенки ответвления образуют угол α со стенками основного каиала.

Ширина канала и его ответвления обозначены соответственно через h, h_1, h_2; скорость течения в бесконечности в верхнем бьефе основного канала равна U. Наша задача состоит в определении скоростей течения U_1 и U_2 в нижием бьефе основного канала и в его ответвлении.

Линия тока l, идущая из бесконечностн, разветвляется в критической точке C на две линии, CB_∞ и CD_∞. Жидкость слева от l втекает в ответвле-

ние, а справа от l течет по осиовному каналу. На линии тока $A_\infty E D_\infty$ поток претерпевает резкое изменение направления в точке E, где скорость соответственно обращается в бескоиечность.

Отобразим теперь внутреннюю область канала на плоскость ζ так, чтобы точка E перешла в бесконечиость, а точка C перешла в точку $\zeta = 0$.



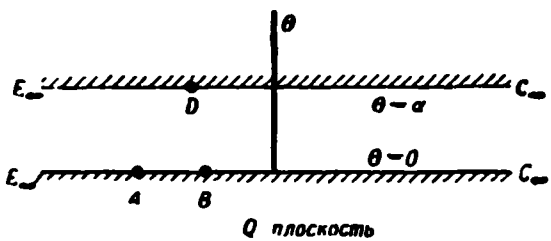
Р и с. 188.

Пусть точкам A_∞, B_∞, D_∞ соответствуют точки $\zeta = -a$, $-b$, c соответственно. Заметим, что граиице основиого канала соответствуют отрицательные значения ζ.

Рассмотрим теперь формулу

$$Q = \ln \frac{U}{v} = \ln \frac{U}{q} + i\theta, \qquad \text{где } v = qe^{-i\theta}.$$

Вдоль сторои основного канала $\theta = 0$; вдоль сторон ответвления $\theta = \alpha$. В точке C имеем $q = 0$, следовательно, величина Q обращается в бесконечность в этой точке. Таким образом, в комплексной плоскости Q мы получим область, изображенную иа рис. 189.



Р и с. 189.

Отображая плоскость Q иа плоскость ζ, согласно п. 10.32, получим

$$\zeta = -e^{-Q\pi/\alpha} = -\left(\frac{v}{U}\right)^{\pi/\alpha}. \qquad (1)$$

В этом случае мы имеем следующее соответствие между величинами ζ и v:

ζ	$-a$	$-b$	c
v	U	U_1	$U_2 e^{-i\alpha}$.

Таким образом, получаем

$$a=1, \quad b=\left(\frac{U_1}{U}\right)^{\pi/\alpha}, \quad c=\left(\frac{U_2}{U}\right)^{\pi/\alpha}. \tag{2}$$

Для построения соответствующей области в плоскости w примем, что прямой $\psi=0$ соответствует линия $A_\infty E D_\infty$. Тогда получим

$$\begin{aligned} &\psi = Uh && \text{на } A_\infty B_\infty,\\ &\psi = U_2 h_2 && \text{на } CD_\infty,\\ &\psi = U_2 h_2 && \text{на } CB_\infty,\\ &\psi = U_2 h_2 + U_1 h_1 && \text{на } A_\infty B_\infty, \end{aligned}$$

поэтому

$$Uh = U_1 h_1 + U_2 h_2. \tag{3}$$

Этот результат можно получить также из уравнения неразрывности.

Положив $\varphi=\infty$ в точке A_∞, получим, что $\varphi=-\infty$ в точках B_∞ и D_∞.

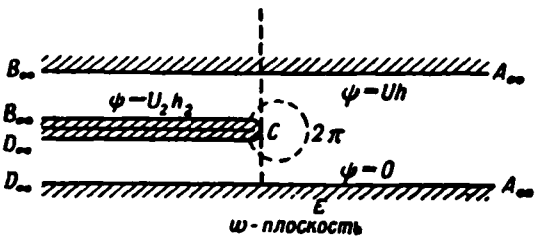


Рис. 190.

Таким образом, мы получаем требуемую область, которая изображена на рис. 190.

Для отображения плоскости w на плоскость ζ находим

$$\frac{dw}{d\zeta} = K_1 \zeta (\zeta+a)^{-1} (\zeta+b)^{-1} (\zeta-c)^{-1} =$$

$$= -\frac{K_1 a}{(a-b)(a+c)} \cdot \frac{1}{\zeta+a} + \frac{K_1 b}{(a-b)(b+c)} \cdot \frac{1}{\zeta+b} + \frac{K_1 c}{(a+c)(b+c)} \cdot \frac{1}{\zeta-c},$$

отсюда, интегрируя и делая небольшие преобразования, получаем формулу

$$w = -\frac{K_1 a}{(a-b)(a+c)} \ln \frac{\zeta+a}{\zeta-c} + \frac{K_1 b}{(a-b)(b+c)} \ln \frac{\zeta+b}{\zeta-c} + L_1.$$

Далее на линии $D_\infty E$ функция $\psi=0$, а величины $(\zeta+a)$, $(\zeta+b)$, $(\zeta-c)$ имеют одинаковый знак. Поэтому соответствующие значения логарифмов будут действительными и величина L_1 также должна быть действительной. Кроме того, $\varphi=0$, $\psi=U_2 h_2$ и $\zeta=0$ в точке C. Таким образом, константа L_1 должна быть величиной чисто мнимой. Отсюда заключаем, что $L_1=0$; полагая $\zeta=0$, получаем

$$-U_2 h_2 = \frac{K_1 a \pi}{(a-b)(a+c)} - \frac{K_1 b \pi}{(a-b)(b+c)}.$$

Наконец, вдоль линии $A_\infty B_\infty$ имеем $\psi=Uh$, в то время как величина $(\zeta+a)$ положительна, а величины $(\zeta+b)$, $(\zeta-c)$ принимают отрицательные значения. Поэтому

$$-Uh = \frac{K_1 a \pi}{(a-b)(a+c)}.$$

Отсюда и из формулы (3) имеем

$$\frac{K_1 b\pi}{(a-b)(b+c)} = U_2h_2 - Uh = -U_1h_1,$$

следовательно,

$$w = \frac{Uh}{\pi}\ln\frac{\zeta+a}{\zeta-c} - \frac{U_1h_1}{\pi}\ln\frac{\zeta+b}{\zeta-c}. \tag{4}$$

Далее, из формулы (1) получаем

$$-\frac{dw}{dz} = v = Ue^{-i\alpha}\zeta^{\alpha/\pi}, \tag{5}$$

из формулы (4) находим

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{Uh}{\pi}\cdot\frac{1}{\zeta+a} - \frac{U_1h_1}{\pi}\cdot\frac{1}{\zeta+b} + \frac{U_1h_1-Uh}{\pi}\cdot\frac{1}{\zeta-c}, \tag{6}$$

отсюда путем деления получим производиую $dz/d\zeta$ как функцию величины ζ. Теперь уже обычным путем определяем выражение w, которое дает распределение скоростей в зависимости от z.

Так как $v=0$ при $\zeta=0$, то производная $dw/d\zeta$ также обращается в нуль при $\zeta=0$, следовательно, из формулы (6) имеем

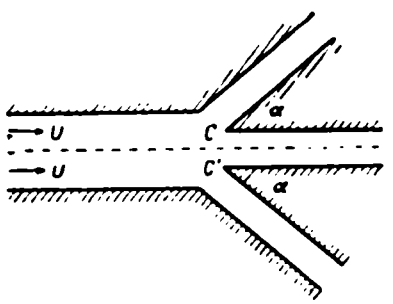


Рис. 191.

$$\frac{Uh}{a} - \frac{U_1h_1}{b} + \frac{Uh-U_1h_1}{c} = 0.$$

Отсюда, применяя формулы (3) и (2), находим

$$Uh = U_1h_1\left(\frac{U_1}{U}\right)^{-\pi/\alpha} - U_2h_2\left(\frac{U_2}{U}\right)^{-\pi/\alpha},$$

или

$$\left(\frac{U_1}{U}\right)^{1-\pi/\alpha}\frac{h_1}{h} - \left(\frac{U_2}{U}\right)^{1-\pi/\alpha}\frac{h_2}{h} = 1. \tag{7}$$

Пусть $\frac{h_1}{h}=\lambda$, $\frac{h_2}{h}=\mu$, $\frac{h_1U_1}{hU}=\chi$, тогда

$$\chi + \mu\frac{U_2}{U} = 1,\quad \frac{U_2}{U} = \frac{1-\chi}{\mu},\quad \frac{U_1}{U} = \frac{\chi}{\lambda}.$$

Первый из этих результатов получается из формулы (3). Подстановка двух последних соотношений в формулу (7) дает равенство

$$\lambda\left(\frac{\chi}{\lambda}\right)^{1-\pi/\alpha} - \mu\left(\frac{1-\chi}{\mu}\right)^{1-\pi/\alpha} = 1.$$

В рассматриваемой задаче величины λ, μ, α являются заданными, а значение χ приближенно определяется из последнего трансцендентного уравнения.

Применение принципа отражения показывает, что полученное решение дает возможность решить задачу о прямолинейном канале с двумя ответвлениями в точках C и C' (рис. 191). В данном случае начало координат удобнее перенести в среднюю точку отрезка CC'.

ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ 10

1. Применяя преобразование Шварца—Кристоффеля, показать, что комплексный потенциал w, определяемый формулой

$$w^2 = U^2(z^2 + c^2),$$

дает решение задачи обтекания неограниченным потоком, имеющим на бесконечности скорость U, бесконечно тонкого препятствия длины c, перпендикулярного прямолинейному берегу бесконечной длины.

Найти давление в произвольной точке препятствия и показать, что оно становится отрицательным, если $y > c(1+k)^{1/2}(1+2k)^{-1/2}$; при этом $k = \varrho U^2/2p_0$, где p_0 — давление в бесконечности.

2. Доказать, что комплексный потенциал вида

$$w = -im\pi + m \ln\left(\operatorname{ch}^2 \frac{\pi z}{2a} - \operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{2a}\right)$$

описывает течение жидкости в сосуде, если в стенке сосуда имеется небольшое отверстие, через которое жидкость вытекает. Отверстие расположено на высоте h от дна сосуда. Сосуд имеет бесконечную высоту и ширину a. Линия тока $\psi = 0$ идет по стенке, на которой нет отверстия, по дну и по второй стенке до отверстия. Показать, что на достаточно большом расстоянии от отверстия имеет место поток, параллельный стенке.

3. Показать, что комплексный потенциал вида

$$w = m \ln \operatorname{sh}\{\pi z/(2a)\}$$

дает поток в бесконечно большом сосуде шириной $2a$, если в сосуде имеется небольшое отверстие, сделанное в середине дна сосуда, через которое вытекает жидкость. Изобразить общий вид линий тока и доказать, что на расстоянии, превышающем ширину сосуда и отсчитываемом от дна, поток будет в основном параллельным стенкам сосуда.

4. Доказать теорему Шварца—Кристоффеля об отображении многоугольника на полуплоскость. Что будет в случае, когда один из внешних углов многоугольника больше 2π?

Жидкость течет по насадку шириной $2b$, к которому симметрично примыкают два клинообразных канала, ограниченных прямолинейными стенками, заданными уравнениями

$$\pm y = b + x \operatorname{tg} \beta\pi, \qquad x > 0;$$
$$\pm y = b - x \operatorname{tg} \beta\pi, \qquad x < 0.$$

Если расход жидкости (отнесенный к единице толщины) в насадке равен $2bV$, то показать, что течение определяется соотношениями

$$w = \frac{bV}{\pi} \ln \frac{t-1}{t+1}; \quad \frac{dz}{dt} = +\frac{Ct^{2\beta}}{(t^2-1)^{\alpha}},$$

где

$$b = C \int_0^{\infty} \frac{u^{2\beta}}{(1+u^2)^{\alpha}}\, du,$$

и

$$\alpha = 1 + \beta.$$

5. Решение какой задачи задается формулами

$$\frac{d}{dt}(x+iy) = \frac{1}{t-a}\left(\frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t-1}}\right)^{1/2},$$
$$\varphi + i\psi = \ln(t-a),$$

где x и y — декартовы прямолинейные координаты, а φ и ψ — соответственно потенциал скоростей и функция тока?

6. Найти формулы преобразования для двумерного течения в реке, русло которой делает поворот на девяносто градусов. Русло образовано положительными полуосями координат x и y и прямыми линиями

$$x = a, \quad y > a \quad \text{и} \quad y = a, \quad x > a.$$

Скорость течения в бесконечности равна $2U$.

7. Показать, что формулы преобразования

$$z = \frac{a}{\pi}\{\sqrt{t^2-1} - \operatorname{Arcsec} t\}; \qquad t = e^{-\frac{\pi w}{aV}},$$

где $z = x + iy$, $w = \varphi + i\psi$, дают потенциал скоростей φ и функцию тока ψ, соответствующие течению в реке шириной a с прямолинейными берегами, имеющему скорость V в бесконечности и впадающему под прямым углом в поток, ограниченный только прямолинейным берегом. Считая поток двумерным, показать, что действительная ось в плоскости t соответствует всей границе жидкости.

8. Показать, что решение задачи о потоке, имеющем скорость V в бесконечности и ограниченном только одним прямолинейным берегом с прямоугольным выступом, дается формулой

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{V}\frac{(w^2 - c^2)^{1/2}}{(w^2 - b^2)^{1/2}},$$

где b и c — константы, определяемые уравнениями

$$\frac{F(c/b)}{F(\sqrt{b^2 - c^2}/b)} = \frac{k}{h}$$

и

$$\frac{k}{b} = \frac{1}{V}F(c/b).$$

Здесь

$$F(\varkappa) = \varkappa^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{(1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi)^{1/2}},$$

где h и $2k$ — длина и ширина прямоугольного выступа. Получить полное решение задачи без использования эллиптических функций, считая $k = 0$.

Глава 11

СТРУИ И СТРУЙНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

11.10. Свободные линии тока. Линия тока μ в двумерном движении делит жидкость на две области A и B. Если пренебречь внешними силами, то для невязкой жидкости в случае устаиовившегося движения на линиях тока обеих областей имеют место равенства

$$\frac{p_A}{\varrho_A}+\frac{1}{2}q_A^2=C_A, \quad \frac{p_B}{\varrho_B}+\frac{1}{2}q_B^2=C_B.$$

Здесь индекс обозначает данную область. Рассмотрим точку P линии тока μ. Если мы будем приближаться к точке P из области A, то значение давления в этой точке будет равно p_1, а значение скорости будет равно q_1. Точно так же, если будем приближаться к точке P из области B, то получим значения p_2 и q_2. Таким образом, имеем

$$\frac{p_1}{\varrho_A}+\frac{1}{2}q_1^2=C_1, \quad \frac{p_2}{\varrho_B}+\frac{1}{2}q_2^2=C_2.$$

Далее, в силу непрерывности давления (см. п. 3.31) имеем $p_1 = p_2$. Отсюда следует равенство

$$\varrho_A q_1^2-\varrho_B q_2^2=\text{const}.$$

В случаях, которые мы рассматривали до сих пор, скорость была непрерывна, т. е. $q_1 = q_2$.

Теперь мы рассмотрим класс движений, для которых скорость жидкости разрывна, например слой нефти (масла), плавающий по слою воды, при этом скорости в обоих слоях различны.

Уточняя характер разрывного движения, предположим, что жидкость в области A находится *в покое*, т. е. $q_1 = 0$.

Тогда мы видим, что вдоль линии μ скорость $q_2 = \text{const}$. Таким образом, мы приходим к следующему определению. Линия тока, отделяющая движущуюся жидкость от покоящейся, называется *свободной линией тока*.

Если пренебречь внешними силами, то в этом случае свободная линия тока обладает следующими свойствами:

1) Вдоль свободной линии тока функция тока ψ постоянна. Это, конечно, общее свойство всех линий тока.

2) Свободные линии тока являются изотахами, или линиями постояниой скорости. Скорость вдоль свободной линии тоже будем называть поверхностиой скоростью.

3) Вдоль свободной линии тока давление постоянно. Таким образом, свободные линии тока являются *изобарическими линиями*, или *изобарами*, т. е. линиями постоянного давления.

Доказательство. Так как давление непрерывно, то его значение на свободной поверхности равно значению в той части примыкающей жидкости, которая находится в покое, а это значение постоянно, если пренебречь внешними силами.

Из свойства 3) следует, что свободные линии тока могут существовать, когда покоящаяся жидкость отсутствует.

Пример. Жидкость, вытекающая в виде струи из отверстия в сосуде, имеет границы в виде свободных линий тока, причем постоянное давление вдоль свободных линий тока поддерживается благодаря наличию атмосферы. Если бы не было атмосферы, то постоянное давление равнялось бы нулю.

11.11. Струи и струйные течения. Пренебрегая внешними силами, предположим, что мы имеем жидкость, движущуюся в двух измерениях, ограниченную свободными линиями тока μ_1, μ_2. Эти линии тока делят плоскость на три области A, B, C, причем движущаяся жидкость занимает область B. Если

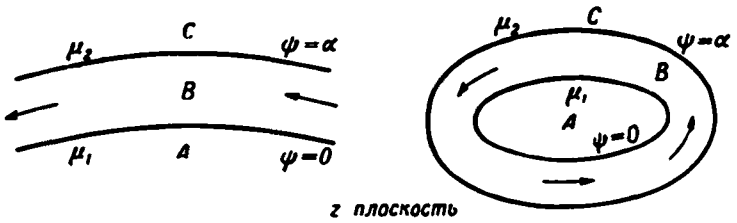


Рис. 192.

области A и C не содержат жидкости, то мы имеем струю; если области A и C заняты покоящейся жидкостью, то мы имеем *струйное течение*. Дым, выходящий из трубы, или вода, вытекающая из шланга, являются примерами (трехмерных) струй. Примерами струйных течений являются вытекание жидкости в бассейн из затопленных труб или океанские течения, например Гольфстрим.

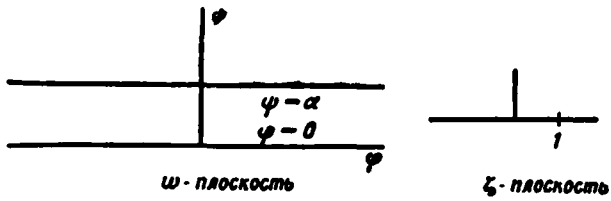


Рис. 193.

Струя или струйное течение могут быть замкнуты и могут распространяться до бесконечности (рис. 192).

На свободных линиях тока величины ψ и q постоянны.

Пусть $\psi = 0$, $q = U$ на линии тока μ_1 и пусть $\psi = \alpha$, $q = V$ на линии тока μ_2.

Тогда область в плоскости w представляет собой бесконечную полоску, заключенную между прямыми $\psi = 0$ и $\psi = \alpha$ (рис. 193).

Если мы отобразим область плоскости w на верхнюю половину плоскости ζ таким образом, чтобы точке $w = 0$ соответствовала точка $\zeta = 1$, то, согласно п. 10.32, мы получим

$$w = \frac{\alpha}{\pi} \ln \zeta, \tag{1}$$

причем ветвь логарифма выбрана так, что значение логарифма обращается в нуль при $\zeta = 1$.

Рассмотрим теперь функцию ω, положив

$$e^{-i\omega} = -\frac{1}{U}\frac{dw}{dz} = \frac{q}{U}e^{-i\theta}, \tag{2}$$

так что

$$\omega = \theta + i \ln \frac{q}{U}.$$

Мы имеем $q = U$ на линии μ_1 и $q = V$ на линии μ_2; следовательно, $\omega = \theta$ на линии μ_1 и $\omega = \theta + i\beta$ на линии μ_2, где

$$\beta = \ln \frac{V}{U}.$$

Таким образом, область в плоскости ω имеет почти такой же вид, как и область в плоскости w; она состоит из полосы шириной β, которая ограничена с одной стороны действительной осью (рис. 194).

Отображая эту полосу на плоскость ζ, получаем (см. п. 10.32)

$$\omega = \frac{\beta}{\pi} \ln \zeta, \qquad (3)$$

где $\omega = 0$ соответствует значению $\zeta = 1$.

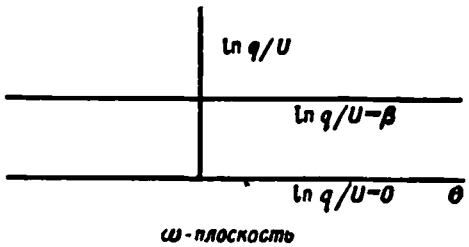


Рис. 194.

Следовательно, из формул (1) и (3) находим

$$\omega = \frac{\beta w}{\alpha},$$

учитывая формулу (2), получаем

$$-\frac{1}{U}\frac{dw}{dz} = \exp\left(-\frac{i\beta w}{\alpha}\right). \qquad (4)$$

Если $U = V$, то $\beta = 0$ и, таким образом,

$$w = -Uz.$$

Это означает, что струя, имеющая одинаковую скорость на обеих границах, должна быть прямолинейной.

Если $\beta \neq 0$, то из формулы (4) получим

$$z - z_0 = -\frac{\alpha}{i\beta U}\exp\left(\frac{i\beta w}{\alpha}\right) = -\frac{\alpha}{i\beta U}\exp\left(\frac{i\beta\varphi}{\alpha}\right)\exp\left(-\frac{\beta\psi}{\alpha}\right).$$

Следовательно,

$$|z - z_0| = \frac{\alpha}{\beta U}\exp\left(-\frac{\beta\psi}{\alpha}\right).$$

Это значит, что если величина ψ постоянна, то $|z - z_0|$ постоянен и точка z описывает окружность с центром в точке z_0. Радиус этой окружности равен

$$\frac{\alpha}{\beta U}\exp\left(-\frac{\beta\psi}{\alpha}\right).$$

Следовательно, если r_1 и r_2 — радиусы окружностей μ_1 и μ_2, то имеем

$$\frac{r_1}{r_2} = \exp(\beta) = \frac{V}{U},$$

т. е. скорости течений на свободных линиях тока обратно пропорциональны их радиусам.

Таким образом, оказывается, что могут существовать течения, ограниченные свободными линиями тока, причем эти линии тока представляют

собой либо параллельные друг другу линии, либо концентрические окружности. Следует заметить, что в последнем случае при безвихревом движении жидкость не вращается подобно твердому кольцу.

11.20. Формула Шварца. Если дан круг радиуса R с центром в точке $z=0$, то функция $f(z)$, аналитическая внутри данного круга, действительная часть которой принимает на окружности значение $\varphi(\theta)$, определяется с точностью до значения мнимой постоянной формулой

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\,d\theta. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\zeta=Re^{i\theta}$ обозначает точку на окружности C круга.

Тогда $\bar{\zeta}=Re^{-i\theta}=R^2/\zeta$. Так как $\theta=-i\ln(\zeta/R)$, то мы можем написать

$$\varphi(\theta)=\psi(\zeta), \tag{2}$$

где $\psi(\zeta)$ — известная функция от ζ.

Тогда на окружности имеем

$$f(\zeta)+\bar{f}(R^2/\zeta)=2\varphi(\theta)=2\psi(\zeta) \tag{3}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{\bar{f}(R^2/\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{2\psi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{4}$$

Если точка z находится внутри окружности C, то, используя формулу Коши (п. 5.59) и теорему о вычетах, получаем

$$f(z)+\bar{f}(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{2\psi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{5}$$

Пусть $f(0)=a+ib$, тогда $\bar{f}(0)=a-ib$; таким образом, полагая в формуле (5) $z=0$, получаем

$$2a=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{2\psi(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta, \tag{6}$$

следовательно, из формулы (5) находим

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\psi(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta(\zeta-z)}\,d\zeta+ib. \tag{7}$$

Полагая $\zeta=Re^{i\theta}$, мы имеем $d\zeta/\zeta=i\,d\theta$, отсюда вытекает требуемый результат.

Часто бывает полезно применять формулу (5) вместо формулы (7).

11.30. Соударяющиеся струи. На рис. 195 показаны две равномерные струи A_1 и A_2, имеющие в бесконечности одинаковую скорость U, встречающиеся и распадающиеся на две другие струи B_1 и B_2. Предположим, что установившееся движение описанного типа существует, задача состоит в том, чтобы определить струи B_1 и B_2, если струи A_1 и A_2 полностью известны.

Если предположить, что струи A_1 и A_2 набегают из бесконечности, то физически возможно, что они встретятся в критической точке O. Следовательно, если движение остается установившимся, то критическая точка

будет существовать. Возьмем эту точку за начало координат, ось x направим параллельно направлению потока A_1.

Свободные линии тока A_1B_1, B_1A_2 A_2B_2, B_2A_1 являются линиями постоянной скорости, и, следовательно, скорость всех четырех струй в бесконечности должна быть одинаковой и равной U. Пусть h_1, h_2, k_1, k_2 обозначают ширину на бесконечности каждой струи A_1, A_2, B_1, B_2. Из условия непрерывности получаем

$$h_1+h_2=k_1+k_2. \tag{1}$$

Здесь величины h_1 и h_2 заданы, величины k_1 и k_2 неизвестны.

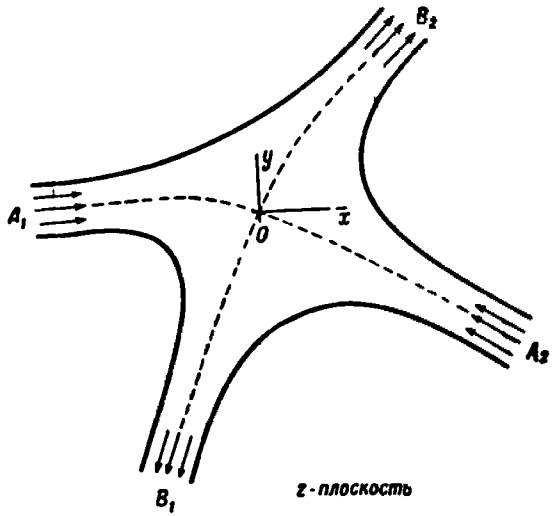


Рис. 195.

11.31. Комплексная скорость. Если написать, как обычно,

$$v=qe^{-i\theta}=u-iv,$$

где q — величина скорости, а угол θ определяет направление скорости, то на свободной линии тока выполняется равенство

$$v=Ue^{-i\theta}. \tag{2}$$

Следовательно, когда мы обходим свободные линии тока, выходя из точки A_1 и описывая по очереди линии A_1B_1, B_1A_2, A_2B_2, B_2A_1, то угол θ при этом изменяется от 0 до -2π; значит, угол $-\theta$ при этом изменяется от 0 до 2π.

Следовательно, изображающая точка v будет описывать на векторной диаграмме в плоскости v окружность радиуса U с центром в начале координат (рис. 196).

Тогда точки A_1, A_2, B_1, B_2 можно представить в виде

$$a_1=U, \quad a_2=Ue^{i\alpha}, \quad b_1=Ue^{i\beta}, \quad b_2=Ue^{i\gamma}, \tag{3}$$

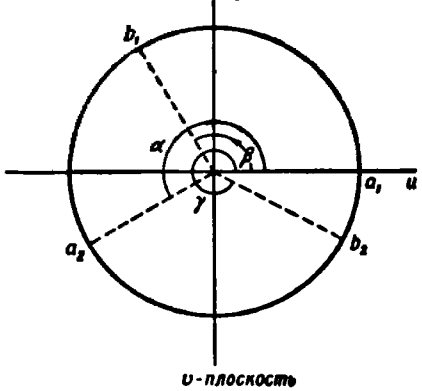


Рис. 196.

где $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ — углы, определяющие направления струй A_2, B_1, B_2 в бесконечности. Здесь величина α задана, а величины β и γ неизвестны.

Величины расходов жидкости в струях A_1, A_2, B_1, B_2 соответственно равны

$$h_1U,\quad h_2U,\quad k_1U,\quad k_2U,$$

следовательно, если положить $\psi=0$ на линии A_1B_2, т. е. на дуге a_1b_2, то будем иметь

$$\begin{aligned}
&\psi=h_1U && \text{на дуге } a_1b_1,\\
&\psi=(k_2-h_2)\,U && \text{на дуге } b_1a_2,\\
&\psi=k_2U && \text{на дуге } a_2b_2.
\end{aligned}$$

11.32. Выражение комплексного потенциала через комплексную скорость v. Для определения комплексного потенциала $w=\varphi+i\psi$, удовлетворяющего полученным выше условиям, воспользуемся тем, что ψ является действительной частью величины $-iw$. Следовательно, можно применить формулу Шварца (см. п. 11.20), согласно которой получаем соотношение

$$-2\pi iw=\int_0^{\beta} h_1U\frac{Ue^{i\theta}+v}{e^{i\theta}-v}\,d\theta+\int_{\beta}^{\alpha}(k_2-h_2)\,U\,\frac{Ue^{i\theta}+v}{Ue^{i\theta}-v}\,d\theta+\int_{\alpha}^{\gamma}k_2U\,\frac{Ue^{i\theta}+v}{Ue^{i\theta}-v}\,d\theta.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\int\frac{Ue^{i\theta}+v}{Ue^{i\theta}-v}\,d\theta&=\int\left(-1+\frac{2Ue^{i\theta}}{Ue^{i\theta}-v}\right)d\theta=\\
&=-\theta-2i\ln(Ue^{i\theta}-v)=\\
&=-\theta-2i\ln Ue^{i\theta}-2i\ln\left(1-\frac{v}{Ue^{i\theta}}\right)=\\
&=\theta-2i\ln\left(1-\frac{v}{Ue^{i\theta}}\right)-2i\ln U,
\end{aligned}$$

где логарифм определен таким образом, чтобы при $v=0$ он обращался в нуль. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\frac{-2\pi iw}{U}&=h_1\left\{\beta-2i\ln\left(1-\frac{v}{b_1}\right)+2i\ln\left(1-\frac{v}{U}\right)\right\}+\\
&+(k_2-h_2)\left\{(\alpha-\beta)-2i\ln\left(1-\frac{v}{a_2}\right)+2i\ln\left(1-\frac{v}{b_1}\right)\right\}+\\
&+k_2\left\{(\gamma-\alpha)-2i\ln\left(1-\frac{v}{b_2}\right)+2i\ln\left(1-\frac{v}{a_2}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Поэтому, отбрасывая константу, получаем

$$\begin{aligned}
w=-\frac{U}{\pi}\Big\{&h_1\ln\left(1-\frac{v}{a_1}\right)+h_2\ln\left(1-\frac{v}{a_2}\right)-\\
&-k_1\ln\left(1-\frac{v}{b_1}\right)-k_2\ln\left(1-\frac{v}{b_2}\right)\Big\},
\end{aligned}$$

что представляет собой искомое выражение комплексного потенциала через комплексную скорость v.

11.33. Соотношения между шириной и направлением струй. Так как количество движения жидкости в проекциях на оси x и y сохраняется, то мы имеем

$$\begin{aligned}
h_1+h_2\cos\alpha-k_1\cos\beta-k_2\cos\gamma&=0,\\
h_2\sin\alpha-k_1\sin\beta-k_2\sin\gamma&=0.
\end{aligned}$$

11.34. Выражение величины z через комплексную скорость v. Так как

$$v = -\frac{dw}{dz},$$

то мы получаем

$$dz = -\frac{1}{v}\,dw = -\frac{1}{v}\frac{dw}{dv}\,dv.$$

Далее, из п. 11.33 имеем

$$\frac{1}{v}\frac{dw}{dv} = \frac{U}{\pi}\left\{\frac{h_1}{v(a_1-v)} + \frac{h_2}{v(a_2-v)} - \frac{k_1}{v(b_1-v)} - \frac{k_2}{v(b_2-v)}\right\} =$$
$$= \frac{U}{\pi}\left\{\frac{h_1}{a_1}\frac{1}{a_1-v} + \frac{h_2}{a_2}\frac{1}{a_2-v} - \frac{k_1}{b_1}\frac{1}{b_1-v} - \frac{k_2}{b_2}\frac{1}{b_2-v}\right\} +$$
$$+ \frac{U}{\pi v}\left\{\frac{h_1}{a_1} + \frac{h_2}{a_2} - \frac{k_1}{b_1} - \frac{k_2}{b_2}\right\}.$$

Согласно п. 11.33, второй член в правой части этого равенства обращается в нуль. Учитывая, что $z=0$ при $v=0$, мы получаем после интегрирования формулу

$$z = \frac{U}{\pi}\left\{\frac{h_1}{a_1}\ln\left(1-\frac{v}{a_1}\right) + \frac{h_2}{a_2}\ln\left(1-\frac{v}{a_2}\right) - \frac{k_1}{b_1}\ln\left(1-\frac{v}{b_1}\right) - \frac{k_2}{b_2}\ln\left(1-\frac{v}{b_2}\right)\right\},$$

где

$$a_1 = U,\quad a_2 = Ue^{i\alpha},\quad b_1 = Ue^{i\beta},\quad b_2 = Ue^{i\gamma}.$$

Отсюда следует, что движение обратимо, так как полученная формула для величины z не изменится, если изменить знаки у величин U, a_1, a_2, b_1, b_2, v.

11.35. Уравнения свободных линий тока. На свободной линии тока

$$v = Ue^{-i\theta}.$$

Подставив это выражение в вышеполученную формулу для величины z, мы находим

$$\pi z = h_1\ln(1-e^{-i\theta}) + h_2e^{-i\alpha}\ln(1-e^{-i\theta-i\alpha}) -$$
$$- k_1e^{-i\beta}\ln(1-e^{-i\theta-i\beta}) - k_2e^{-i\gamma}\ln(1-e^{-i\theta-i\gamma}).$$

Далее,

$$1-e^{-i\chi} = e^{-\frac{i\chi}{2}}\left(e^{\frac{i\chi}{2}} - e^{-\frac{i\chi}{2}}\right) = 2i\sin\frac{\chi}{2}\cdot e^{-\frac{i\chi}{2}}.$$

Следовательно,

$$\pi z = h_1\left\{\ln 2i + \ln\sin\frac{\theta}{2} - \frac{i\theta}{2}\right\} + h_2e^{-i\alpha}\left\{\ln 2i + \ln\sin\frac{\theta+\alpha}{2} - i\frac{\theta+\alpha}{2}\right\} -$$
$$- k_1e^{-i\beta}\left\{\ln 2i + \ln\sin\frac{\theta+\beta}{2} - i\frac{\theta+\beta}{2}\right\} -$$
$$- k_2e^{-i\gamma}\left\{\ln 2i + \ln\sin\frac{\theta+\gamma}{2} - i\frac{\theta+\gamma}{2}\right\}.$$

Теперь, согласно п. 11.33, получаем

$$h_1 + h_2e^{-i\alpha} - k_1e^{-i\beta} - k_2e^{-i\gamma} = 0.$$

Таким образом, находим

$$\pi z = \frac{i}{2}\left(-h_2\alpha e^{-i\alpha} + k_1\beta e^{-i\beta} + k_2\gamma e^{-i\gamma}\right) +$$
$$+ h_1\ln\sin\frac{\theta}{2} + h_2e^{-i\lambda}\ln\sin\frac{\theta+\alpha}{2} - k_1e^{-i\beta}\ln\sin\frac{\theta+\beta}{2} - k_2e^{-i\gamma}\ln\sin\frac{\theta+\gamma}{2}.$$

Приравнивая действительные и мнимые части в обеих сторонах уравнения, мы получаем координаты (x, y) точки свободной линии тока, выраженные через параметр θ.

11.40. Неопределенность задачи. При решении задачи о двух соударяющихся струях мы ввели четыре неизвестные величины, а именно: k_1, k_2, β, γ — асимптотические значения ширины и направления струй, получающихся в результате соударения двух струй. Были найдены три соотношения в пп. 11.30 и 11.33, связывающие эти постоянные величины, так что задача содержит одну неопределенную величину. Таким образом, в общем случае единственного решения не существует. Эта неопределенность, несомненно, связана с тем, что мы рассматриваем уже сформировавшееся установившееся движение, не учитывая начальных условий, которые приводят к изучаемому установившемуся движению.

В самом деле, мы можем предположить, например, что изучаемое движение формируется в результате пуска струй в различных точках в различные моменты времени с промежутком времени t. Несомненно, что различным значениям времени t будут соответствовать различные установившиеся движения, хотя и нет основания предполагать, что все они будут устойчивыми.

11.41. Прямой удар двух одинаковых струй. В этом случае имеется симметрия относительно обеих осей координат (рис. 197), так что мы можем положить

$$\alpha = \pi, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma = \frac{3\pi}{2}, \quad h_1 = h_2 = k_1 = k_2 = h.$$

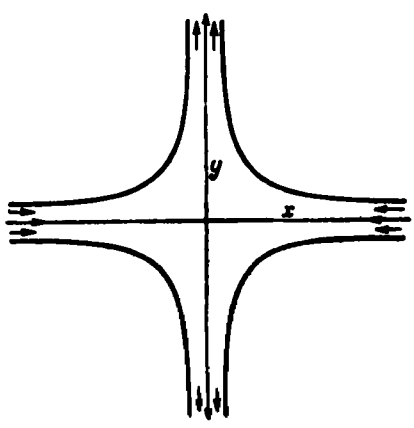


Рис. 197.

Из последней формулы п. 11.32 следует

$$w = -\frac{Uh}{\pi}\left[\ln\left(1-\frac{v}{U}\right)+\ln\left(1+\frac{v}{U}\right)-\right.$$
$$\left.-\ln\left(1-\frac{v}{iU}\right)-\ln\left(1+\frac{v}{iU}\right)\right],$$

так что

$$\exp\left(-\frac{\pi w}{Uh}\right) = \frac{U^2-v^2}{U^2+v^2}. \qquad (1)$$

Далее, из последней формулы п. 11.34 находим

$$z = \frac{h}{\pi}\left[\ln\frac{U-v}{U+v} + i\ln\frac{U+iv}{U-iv}\right]. \qquad (2)$$

Исключая величину v из формул (1) и (2), получаем соотношение между величинами w и z.

На свободной линии тока $v = Ue^{-i\theta}$. Следовательно,

$$\frac{\pi z}{h} = \ln\frac{1-e^{-i\theta}}{1+e^{-i\theta}} - i\ln\frac{1-e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}{1+e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}} =$$

$$= \ln\frac{-2i\cdot e^{-\frac{i\theta}{2}}\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)}{2e^{-\frac{i\theta}{2}}\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right)} - i\ln\frac{-2ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{2e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)} =$$

$$= \ln\left(-i\,\mathrm{tg}\frac{-\theta}{2}\right) - i\ln\left(-i\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

Далее, на линии тока в первом квадранте имеем

$$-\frac{3\pi}{2} < \theta < -\pi.$$

Если положить $\theta = -\pi - \chi$, то $0 < \chi < \frac{\pi}{2}$, тогда

$$\frac{\pi z}{h} = \ln\left\{-i\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\chi}{2}\right)\right\} - i\ln\left\{-i\,\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\chi}{2}\right)\right\} =$$

$$= \ln\left(i\,\mathrm{ctg}\frac{\chi}{2}\right) - i\ln\left\{i\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\chi}{2}\right)\right\} =$$

$$= \ln i - i\ln i + \ln\mathrm{ctg}\frac{\chi}{2} - i\ln\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\chi}{2}\right) =$$

$$= \frac{i\pi}{2} - i\cdot\frac{i\pi}{2} + \ln\mathrm{ctg}\frac{\chi}{2} + i\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\chi}{2}\right).$$

Таким образом, если $t = \mathrm{tg}\frac{\chi}{2}$, то

$$\frac{\pi x}{h} = \frac{\pi}{2} + \ln\frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} - \ln t, \quad \frac{\pi y}{h} = \frac{\pi}{2} + \ln\frac{1+t}{1-t},$$

откуда

$$t = \exp\left\{\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2x}{h}\right)\right\}, \quad \frac{1-t}{1+t} = \exp\left\{\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2y}{h}\right)\right\},$$

следовательно, после исключения t имеем

$$\exp\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2y}{h}\right) = \frac{1-\exp\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2x}{h}\right)}{1+\exp\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2x}{h}\right)} = -\mathrm{th}\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{2x}{h}\right) = \mathrm{th}\frac{\pi}{4}\left(\frac{2x}{h}-1\right).$$

Таким образом,

$$\left(\frac{2y}{h}-1\right)\frac{\pi}{2} = \ln\mathrm{cth}\frac{\pi}{4}\left(\frac{2x}{h}-1\right), \quad y = \frac{h}{2} + \frac{h}{\pi}\ln\mathrm{cth}\frac{\pi}{4}\left(\frac{2x}{h}-1\right).$$

Если рассматривать линию тока $x = 0$ как твердый барьер, то мы имеем решение задачи о прямом ударе струи о бесконечную плоскость (рис. 198).

Полную силу давления на плоскость (на жидкий элемент единичной толщины) можно получить путем интегрирования давления. С другой стороны, полную силу давления жидкости можно получить иным путем. Количество движения, переносимое в единицу времени струей, перпендикулярной стенке,

равно ρhU^2, а количество движения жидкости, текущей вдоль стенки, не имеет составляющей по нормали к стенке. Таким образом, полная сила давления равна ρhU^2.

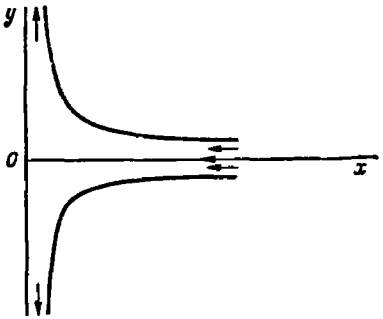


Рис. 198.

Следует заметить, что в вышеуказанном решении нет неопределенности, так как условие симметрии дает для неизвестных величин четвертое соотношение.

11.42. Прямой удар двух неодинаковых струй. Если сталкиваются две струи с различной скоростью, но с одинаковыми асимптотами, как это изображено на рис. 199, то ясно, что должно существовать симметричное решение. В данном случае

$$k_1 = k_2, \quad \alpha = \pi, \quad \gamma = 2\pi - \beta.$$

Отсюда, согласно п. 11.33, получим

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}(h_1 + h_2), \quad h_1 - h_2 - k_1 \cos\beta - k_2 \cos\beta = 0.$$

Таким образом,

$$\cos\beta = \frac{h_1 - h_2}{k_1 + k_2} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}.$$

Параметрические уравнения свободных линий тока могут быть найдены указанным ранее способом.

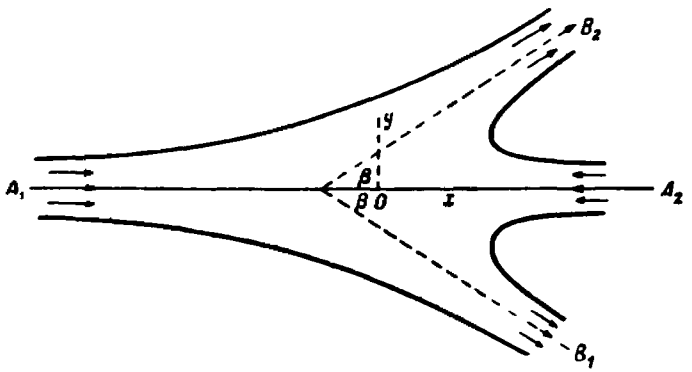


Рис. 199.

11.43. Косой удар двух одинаковых струй. Если две струи одинаковой ширины с асимптотами, наклоненными под углом 2β, были выпущены одновременно, то физически ясно, что существует решение, симметричное относительно биссектрисы угла между двумя асимптотами. Далее, из принципа обратимости (см. п. 11.34) следует, что решение будет таким же, как в предыдущем пункте, если мы повернем все скорости на 180° (рис. 199). В данном случае $k_1 = k_2$, β задано, а величины h_1, h_2 требуется определить.

Теперь мы имеем

$$h_1 + h_2 = 2k_1,$$
$$h_1 - h_2 = (h_1 + h_2)\cos\beta = 2k_1 \cos\beta.$$

Таким образом,

$$h_1 = k_1(1 + \cos\beta),$$
$$h_2 = k_1(1 - \cos\beta).$$

11.50. Твердые границы. Рассмотрим теперь движение жидкости, при котором движущаяся жидкость ограничена частично свободными линиями тока, частично неподвижными твердыми стенками.

Твердая стенка, служащая границей, конечно, является линией тока, вдоль которой $\psi = \text{const}$, но не обязательно является изобарической или изотахической линией.

Те задачи, в которых твердые границы прямолинейны, можно исследовать по методу Кирхгофа. В этом методе в основном используется следующая функция:

$$Q = \ln\left(-U\frac{dz}{dw}\right),$$

где U — характерная скорость, обычно равная поверхностной скорости на свободной линии тока.

Так как

$$-\frac{dw}{dz} = u - iv = qe^{-i\theta} = v,$$

то

$$Q = \ln\left(\frac{U}{v}\right) = \ln\left(\frac{U}{q}\right) + i\theta.$$

Вдоль свободной линии тока скорость U постоянна, следовательно, величина $\ln(U/q)$ также постоянна.

Вдоль неподвижной прямолинейной границы направление движения, задаваемое углом θ, постоянно, так как оно совпадает с направлением границы.

Следовательно, если мы изобразим границы и свободные линии тока в плоскости Q, то годограф будет состоять из прямых линий и образует многоугольник, внутренняя область которого может быть отображена с помощью преобразования Шварца — Кристоффеля на верхнюю половину плоскости ζ. Таким образом, получается соотношение между величинами Q и ζ, т. е. между величинами dw/dz и ζ.

С другой стороны, границы и свободные линии тока, изображенные в плоскости w, соответствуют прямым линиям $\psi = \text{const}$; полученный многоугольник также можно отобразить на верхнюю половину плоскости ζ. Это приводит к соотношению между w и ζ.

Если из двух найденных таким путем соотношений исключить величину ζ, то мы получим соотношение между dw/dz и w, откуда после интегрирования получим соотношение между величинами w и z, которое характеризует движение.

Часто бывает удобно оставлять величину ζ в качестве параметра, через который выражаются w и z.

В последующих пунктах вышеуказанный метод будет применен для решения частных задач.

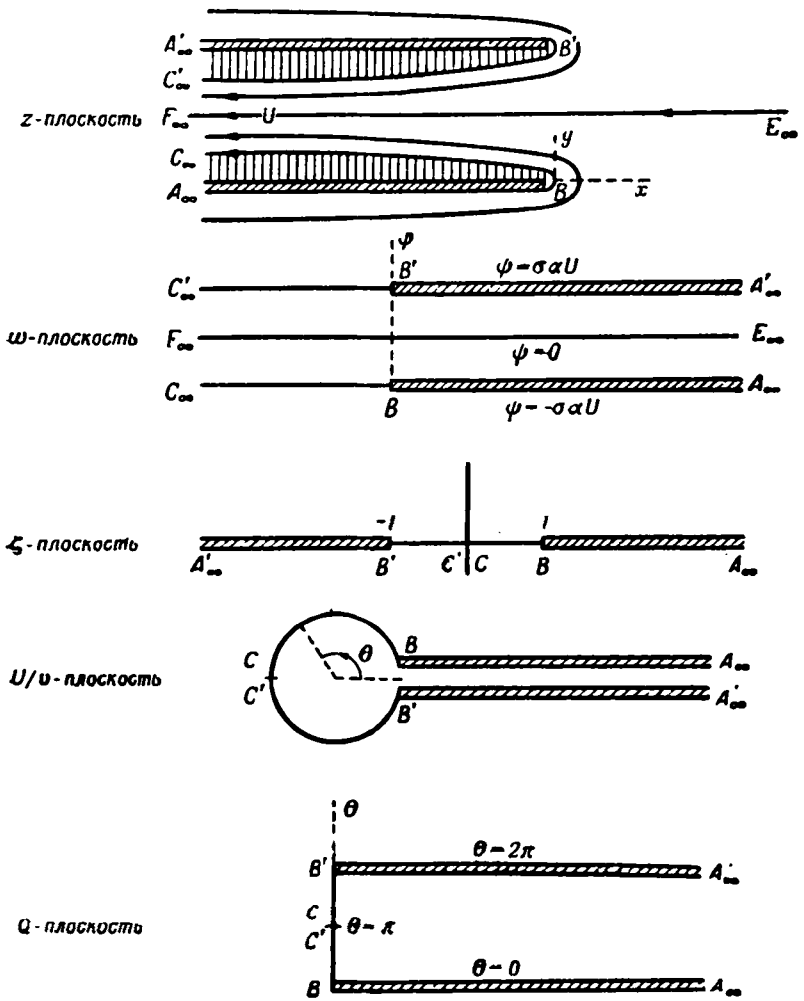
11.51. Плоская форма насадка Борда. Насадок Борда состоит из длинной прямолинейной трубки, вдающейся внутрь большого сосуда.

Если пренебречь силой тяжести, то отношение площади сечения текущей воды в самом сжатом месте к площади сечения трубки равно $\frac{1}{2}$. Следовательно, насадок Борда плоской формы состоит из длинного канала, параллельные стороны которого вдаются внутрь сосуда. Будем считать канал настолько длинным, что стенки сосуда не оказывают влияния на поток жидкости; фактически мы рассматриваем бесконечно длинный канал.

На диаграмме в плоскости z (рис. 200) показано сечение насадка, имеющего стенки $A_\infty B$, $A'_\infty B'$. Стенка $A_\infty B$ частично является линией тока. Жидкость течет вдоль линии $A_\infty B$, поворачивается в точке B и вытекает из трубки вдоль

линии BC_∞. В заштрихованной области между линиями $A_\infty B$ и BC_∞ находится неподвижная жидкость или совсем нет жидкости. Линии, соответствующие омываемым стенкам в плоскости z, отмечены на всех диаграммах специальной штриховкой.

В сечении $C_\infty C'_\infty$ имеется равномерный параллельный поток, текущий, допустим, со скоростью U. Пусть ширина насадка в сечении BB равна $2a$.



Р и с. 200.

Если σ — коэффициент сжатия, то ширина вытекающей струи равна $2\sigma a$, и поток, вытекающий из насадка, равен $2\sigma aU$.

Центральная линия тока $E_\infty F_\infty$ является прямой линией. Если на $E_\infty F_\infty$ мы возьмем $\psi = 0$, то на линии тока $A_\infty BC_\infty$ будем иметь $\psi = -\sigma aU$, и на линии тока $A'_\infty BC'_\infty$ будем иметь $\psi = \sigma aU$.

Пусть $\varphi = 0$ в точках B и B'. Это всегда возможно, так как потенциал скорости определен с точностью до аддитивной постоянной. Тогда в точках A'_∞, A_∞, E_∞ и во всех точках сосуда на большом расстоянии от BB' получим $\varphi = +\infty$, в то время как в точках C_∞, C'_∞ получим $\varphi = -\infty$. Таким образом, плоскость w имеет вид, изображенный на рис. 200.

Отобразим внутреннюю область многоугольника $A'_\infty C'_\infty C_\infty A_\infty$ плоскости w на верхнюю половину плоскости ζ. Причем точкам B', B соответствуют точки $\zeta=-1$, $\zeta=1$, а точкам C'_∞, C_∞, которые совпадают в бесконечности, соответствует точка $\zeta=0$. Тогда из формулы (2) п. 10.32 получим

$$w=\frac{2\sigma aU}{\pi}\ln\zeta-i\sigma aU, \tag{1}$$

при этом предполагается, что при $\zeta=1$ логарифм обращается в нуль.

Следующий шаг состоит в том, чтобы построить многоугольник, соответствующий формуле

$$Q=\ln\left(-U\frac{dz}{dw}\right)=\ln\left(\frac{Ue^{i\theta}}{q}\right)=\ln\frac{U}{q}+i\theta,$$

когда точка z описывает границу в плоскости z. Далее следует отобразить этот многоугольник на плоскость ζ.

Для того чтобы проследить изменение угла θ, когда точка z описывает границу, изобразим диаграмму на вспомогательной плоскости, задаваемой формулой

$$-U\frac{dz}{dw}=\frac{U}{v}.$$

На свободной линии тока $q=U$, следовательно,

$$\frac{U}{v}=e^{i\theta}.$$

Таким образом, когда мы движемся вдоль линии $BC_\infty C'_\infty B'$, комплексная величина U/v описывает окружность единичного радиуса. Вдоль линии $A_\infty B$ мы имеем $\theta=0$, на той же линии величина q увеличивается от 0 в точке A_∞ до U в точке B. Следовательно, величина U/v уменьшается от ∞ в точке A_∞ до единицы в точке B.

Соответствующая диаграмма изображена на рис. 200. Линии $A_\infty B$, $A'_\infty B'$ в действительности совпадают, но для ясности они изображены в виде двойных линий. Теперь оказывается, что $\theta=2\pi$ вдоль линии $A'_\infty B'$, следовательно,

$$\begin{aligned}\theta&=0 \quad \text{на} \quad A_\infty B,\\ Q&=i\theta\ (0<\theta<\pi) \quad \text{на} \quad B_\infty C,\\ Q&=i\theta\ (\pi<\theta<2\pi) \quad \text{на} \quad C'_\infty B',\\ \theta&=2\pi \quad \text{на} \quad B'A'_\infty.\end{aligned}$$

Соответствующая диаграмма в плоскости q изображена на том же рисунке.

Отобразим многоугольник, расположенный на плоскости ζ, с помощью формулы п. 10.31, которая дает

$$Q=2\operatorname{Arch}\zeta=2\ln\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right), \tag{2}$$

так что

$$-U\frac{dz}{dw}=\left[\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right]^2. \tag{3}$$

Формулы (1) и (3) дают решение рассматриваемой задачи. Мы можем исключить величину ζ из этих формул, а потом с помощью интегрирования получить соотношение между величинами w и z. Представляет интерес определить вид свободных линий тока, что будет сделано в следующем пункте.

Относительно вышеуказанного решения следует заметить, что в соответствующем потоке нет точек, в которых скорость становилась бы бесконечной. Жидкость обтекает углы в точках B и B' с конечной скоростью; получаемое решение оказывается физически приемлемым.

В реальной жидкости застойная область обычно заполнена жидкостью, имеющей вихревое движение. Следовательно, вышеуказанное исследование можно рассматривать только как первое приближение. С другой стороны, полученное решение дает представление о вытекающей струе, если область вне свободной линии тока заполнена воздухом или водяным паром.

11.52. Уравнение свободных линий тока. Сделаем следующие общие замечания.

(I) На свободной линии тока величина ζ действительна, так как линия тока отображается на действительную ось плоскости ζ.

(II) На свободной линии тока $dz = ds e^{i\theta}$, где угол θ, как обычно, указывает направление касательной, а ds — элемент дуги линии тока.

(III) Если (x, y) — точка на свободной линии тока, то

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\theta.$$

(IV) На свободной линии тока $Q = i\theta$.

(V) Если U — постоянная скорость вдоль свободной линии тока, то

$$\left| -U\frac{dz}{dw} \right| = |e^{i\theta}| = 1.$$

Из замечаний (V) и (I) следует, что на свободной линии тока выполняются равенства

$$1 = \left| U\frac{dz}{dw} \right| = \left| \frac{dz}{d\zeta}\frac{U\,d\zeta}{dw} \right| = \left| \frac{e^{i\theta}\,ds}{d\zeta}\frac{U\,d\zeta}{dw} \right| = \pm\frac{ds}{d\zeta}\left| U\frac{d\zeta}{dw} \right|,$$

причем берется знак $+$ или $-$, смотря по тому, увеличивается ли величина s вместе с увеличением ζ или нет.

Вышеуказанные замечания применимы ко всем задачам, которые решаются так же, как и задача о насадке Борда.

Для применения этих замечаний к данной задаче возьмем за начало координат точку B плоскости z и рассмотрим свободную линию тока BC_∞. Когда мы идем вдоль этой линии от точки B в плоскости z, то величина ζ уменьшается от 1 до 0 в плоскости ζ. Следовательно, производная $ds/d\zeta$ отрицательна. В силу формулы (1) п. 11.51 имеем

$$1 = -\frac{ds}{d\zeta}\left| U\frac{d\zeta}{dw} \right| = -\frac{\pi\zeta}{2\sigma a}\frac{ds}{d\zeta}. \qquad (1)$$

Далее в силу замечания (IV) из формулы (2) п. 11.51 получим

$$i\theta = 2\operatorname{Arch}\zeta.$$

Таким образом,

$$\zeta = \operatorname{ch}\frac{i\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2} \quad \text{и} \quad d\zeta = -\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta.$$

Следовательно, в силу формулы (1) имеем

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{\sigma a}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

Подставляя это соотношение в формулы замечания (III) и учитывая, что обе координаты x и y обращаются в нуль при $\theta = 0$, находим следующие выражения:

$$x = \frac{\sigma a}{\pi} \int_0^\theta \cos\theta \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\, d\theta, \quad y = \frac{\sigma a}{\pi} \int_0^\theta \sin\theta \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\, d\theta.$$

После интегрирования получаем

$$x = \frac{2\sigma a}{\pi}\left(\sin^2 \frac{\theta}{2} - \ln \sec \frac{\theta}{2}\right), \quad y = \frac{\sigma a}{\pi}(\theta - \sin\theta).$$

Эти уравнения позволяют начертить линию тока BC_∞.

Теперь в точке C_∞ имеем $\theta = \pi$ и, следовательно, $y = \sigma a$.

Таким образом, согласно рис. 200, на плоскости z имеем

$$2a = 2\sigma a + \sigma a + \sigma a,$$

откуда $\sigma = 1/2$. Этот результат был получен Борда.

11.53. Истечение через отверстие. Рассмотрим жидкость, вытекающую из большого сосуда через отверстие в одной из его стенок. Жидкость будет вытекать в виде струи, ограниченной свободными линиями тока, вдоль которых скорость постоянна, а в бесконечности течение в струе будет равномерным, т. е. скорости течения будут одинаковы по величине и направлению.

На рис. 201 показано такое движение.

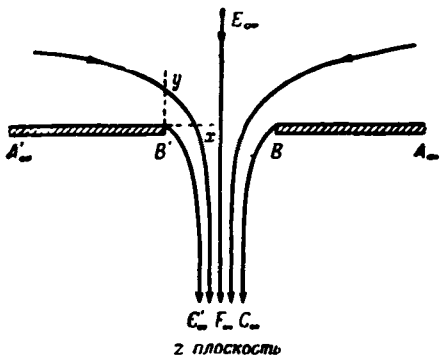


Рис. 201.

Если в точках B и B' положить $\varphi = 0$, то будем иметь $\varphi = -\infty$ в точке C_∞ и $\varphi = +\infty$ в точке E_∞, где $E_\infty F_\infty$ — центральная (прямая) линия тока, на которой $\psi = 0$.

Пусть $BB' = 2a$ и пусть U — постоянная скорость в точке C_∞. Тогда расход в струе в сечении $C_\infty C'_\infty$ равняется $2\sigma a U$, где σ — коэффициент сжатия струи. Следовательно, линия $A_\infty BC_\infty$ является линией тока, соответствующей $\psi = -\sigma a U$, а линия $A'_\infty B' C'_\infty$ является линией тока для $\psi = \sigma a U$.

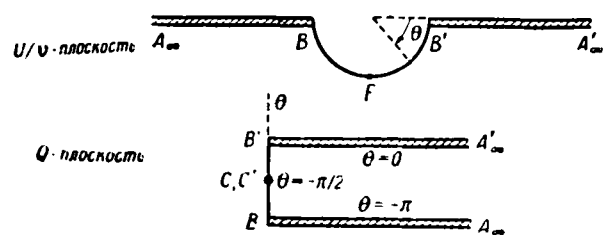


Рис. 202.

Таким образом, область течения в плоскости w будет такой, как изображено на рис. 200; после отображения на плоскость ζ этой области получим

$$w = \frac{2\sigma a U}{\pi} \ln \zeta - i\sigma a U. \qquad (1)$$

Однако диаграмма в плоскости U/v будет отличаться.

Когда точка z движется вдоль границы $BC_\infty C'_\infty B'$, то мы получаем диаграмму, изображенную на рис. 202. Когда мы идем от точки B' к точке B, то $\arg(U/v)$ *уменьшается* на π, так что

$$Q = i\theta\left(0 > \theta > -\frac{1}{2}\pi\right) \quad \text{на } B'C'_\infty,$$

$$Q = i\theta\left(-\frac{1}{2}\pi > \theta > -\pi\right) \quad \text{на } BC_\infty.$$

После отображения плоскости Q на плоскость ζ, согласно п. 10.31 (при этом начало координат передвинуто в точку $Q=-i\pi$), мы получим

$$Q=\operatorname{Arch}\zeta-i\pi. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) дают решение рассматриваемой задачи.

Для определения коэффициента сжатия струи используем общий метод п. 11.52. Возьмем начало координат в точке B' и рассмотрим свободную линию тока $B'C'_\infty$, на которой величина ζ действительна и увеличивается от -1 до 0. Тогда из формулы (1) п. 11.52 получаем

$$1=-\frac{\pi\zeta}{2\sigma a}\frac{ds}{d\zeta},$$

так как теперь производная $ds/d\zeta$ положительна, в то время как величина ζ отрицательна.

С другой стороны, на линии $B'C'_\infty$ имеем $Q=i\theta$, и, следовательно, из формулы (2) находим

$$i\theta=\operatorname{Arch}\zeta-i\pi,\quad \zeta=-\cos\theta,\quad d\zeta=\sin\theta\,d\theta.$$

Таким образом,

$$\frac{ds}{d\theta}=\frac{2\sigma a}{\pi}\operatorname{tg}\theta.$$

Используя замечание (III) п. 11.52, получаем

$$x=\frac{2\sigma a}{\pi}\int_0^\theta\cos\theta\operatorname{tg}\theta\,d\theta=\frac{2\sigma a}{\pi}(1-\cos\theta).$$

В точке C'_∞ имеем $\theta=-\frac{1}{2}\pi$, $x=2\sigma a/\pi$; здесь величина x является горизонтальным расстоянием между точками B' и C'_∞. Следовательно,

$$2a=2\sigma a+\frac{4\pi\sigma a}{\pi},\quad \sigma=\frac{\pi}{\pi+2}=0{,}611.$$

11.54. Криволинейные границы. Метод решения задачи Борда в п. 11.51 показывает, что успех решения зависит исключительно от того, что диаграммы течения в плоскостях w и Q ограничены прямыми линиями. Это дает возможность применить теорему Шварца — Кристоффеля.

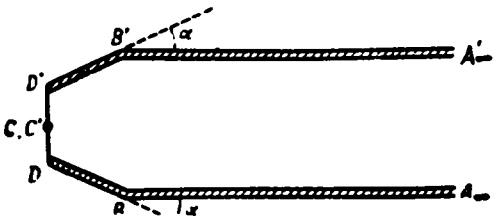


Рис. 203.

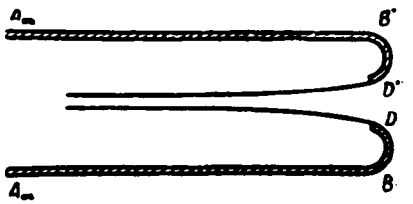


Рис. 204.

Как было установлено Шильдропом, решение, соответствующее закруглению насадка Борда у входа в точках BB', можно получить путем незначительного изменения диаграммы в плоскости Q, остающейся все еще многоугольником (рис. 200).

В самом деле, заменим диаграмму в плоскости Q диаграммой, изображенной на рис. 203 и полученной путем скругления углов диаграммы рис. 200 прямыми линиями, наклоненными под углом α к параллельным прямым. Теперь, возвращаясь к плоскости z с помощью обратного преобразования, мы получим насадок с закругленным входом, изображенный на рис. 204.

Практические расчеты обычно проводятся с помощью графических или приближенных методов. Интересно отметить, что такое простое видоизменение диаграммы позволяет получить решение для насадка, близкого к реальному. Этот метод применим ко всем задачам, которые имеют в плоскостях Q и w диаграммы в виде многоугольников. С подробностями читатель может ознакомиться по оригинальной статье[1]).

11.60. Поток со свободной поверхностью под действием силы тяжести. Свободная поверхность является поверхностью, которая всегда состоит из одних и тех же частиц жидкости и вдоль которой давление жидкости постоянно.

В случае двумерного движения такая свободная поверхность является цилиндрической; мы будем рассматривать кривую, представляющую собой сечение этого цилиндра плоскостью движения жидкости.

Пусть кривая C является сечением свободной поверхности. Вид кривой C зависит от времени t, параметрически эту линию можно представить в виде

$$z = f(\alpha, t) \quad \text{на линии } C, \tag{1}$$

где α — действительное значение координаты Лагранжа (см. п. 3.44) для частицы жидкости на кривой C, так что полная производная по времени от z совпадает с частной производной по времени от f, т. е.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} = f_t, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = f_{tt}. \tag{2}$$

Если $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести, то уравнение движения можно представить в виде

$$d\mathbf{q}/dt - \mathbf{g} = -(\nabla p)/\varrho. \tag{3}$$

Поскольку вектор ∇p перпендикулярен поверхности постоянного давления, то условие постоянства давления на свободной поверхности состоит в том, чтобы вектор $d\mathbf{q}/dt - \mathbf{g}$ был перпендикулярен свободной поверхности[2]).

В случае двумерного движения жидкости это условие равносильно тому, что вектор $d^2z/dt^2 + ig$ перпендикулярен кривой C, когда конец вектора z находится на кривой C. Так как f_α имеет направление касательной к кривой C, то из формул (2) мы видим, что на линии C имеет место уравнение

$$f_{tt} + ig = ir(\alpha, t) f_\alpha, \tag{4}$$

где $r(\alpha, t)$ — действительная величина, если α — действительная. Таким образом, самый общий вид двумерной свободной поверхности может быть представлен формулой (1), где функция $f(\alpha, t)$ для действительных значений α есть решение уравнения (4), которое является дифференциальным уравнением в частных производных параболического типа.

Заметим, что сомножитель $ir(\alpha, t)$ указывает направление уменьшения давления.

Определение соответствующего вида функции $r(\alpha, t)$ составляет основную трудность общей задачи (ср. п. 11.63).

Если функция $r(\alpha, t)$ *задана*, то задача сводится к решению уравнения (4) при определенных граничных условиях. Заметим также, что если функция $r(\alpha, t)$ задана, то уравнение (4) является линейным уравнением относительно $f(\alpha, t)$. Следовательно, решение можно получить с помощью принципа суперпозиции.

---

[1]) Schieldrop E. B., Skrifter Oslo, № 6, 1928.

[2]) Это условие может быть положено в основу при решении трехмерной задачи.

11.61. Потенциальный поток со свободной поверхностью. Обращаясь к формулам (1), (4) п. 11.60, определим комплексный потенциал $w(z, t)$, предполагая, что движение жидкости безвихревое.

Мы имеем $u+iv=\frac{dz}{dt}$, поэтому

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{d\overline{w}(\bar{z}, t)}{d\bar{z}}=-\overline{w}_{\bar{z}}=-\overline{w}_z. \tag{1}$$

Отсюда и из формулы (2) п. 11.60 получим

$$f_t(\alpha, t)=-\overline{w_z(z, t)} \text{ на кривой } C. \tag{2}$$

Используя формулу (1) п. 11.60, мы можем выразить $w(z, t)$ в виде функции от α и t, поэтому на кривой C получим

$$w_\alpha(\alpha, t)=w_z(z, t)z_\alpha=-\overline{f_t(\alpha, t)}f_\alpha(\alpha, t).$$

Так как величина α действительна на C, то это соотношение можно записать в форме

$$w_\alpha(\alpha, t)=-\overline{f_t(\alpha, t)}f_\alpha(\alpha, t). \tag{3}$$

Если предположить, что $f(\alpha, t)$ и $f_t(\alpha, t)$ — аналитические функции от α, то правая часть равенства (3) также является аналитической функцией от α. Таким образом, мы можем использовать формулу (3) для определения комплексного потенциала w как аналитической функции комплексного переменного α и, следовательно, аналитической функции комплексной переменной z. Определенный таким образом комплексный потенциал $w(z, t)$ является комплексным потенциалом потока, который имеет свободную поверхность, совпадающую со свободной поверхностью, задаваемой уравнением $z=f(\alpha, t)$.

Следовательно, всякое аналитическое решение $f(\alpha, t)$ уравнения (4) п. 11.60, где коэффициент $r(\alpha, t)$ является действительной функцией для действительных значений α, описывает возможное движение жидкости со свободной поверхностью, для которого соответствующая свободная поверхность имеет вид $z=f(\alpha, t)$, а комплексный потенциал определяется из формулы (3) с помощью квадратуры [1]).

11.62. Установившийся поток со свободной поверхностью. Зафиксируем оси x_0, y_0. Пусть $z_0=x_0+iy_0$, пусть комплексный потенциал $w_0=w_0(z_0)=\varphi_0+i\psi_0$. Пусть свободная поверхность является линией тока $\psi_0=0$, так что на свободной поверхности

$$\psi_0=0, \quad w_0(z_0)=\overline{w}_0(\bar{z}_0). \tag{1}$$

Следовательно, на свободной поверхности мы имеем

$$q_0^2=\frac{dw_0}{dz_0}\frac{d\overline{w}_0}{d\bar{z}_0}=\frac{d\varphi_0}{dz_0}\frac{d\varphi_0}{d\bar{z}_0}. \tag{2}$$

Учитывая, что давление постоянно на свободной поверхности, по теореме Бернулли получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d\varphi_0}{dz_0}\frac{d\varphi_0}{d\bar{z}_0}+\Omega_0=\frac{1}{2}V^2, \tag{3}$$

где Ω_0 — потенциал силы тяжести, V — постоянная, имеющая размерность скорости. Подбирая подходящим образом начало отсчета, мы можем всегда

[1]) Описанный здесь метод см. в работе: John F., *Communications on Pure and Applied Mathematics*, VI (1953), 497—503.

добиться того, чтобы постоянная V^2 была положительна. Из уравнения (3) находим

$$\frac{dz_0}{d\varphi_0}\frac{d\bar{z}_0}{d\varphi_0}=\frac{1}{V^2-2\Omega_0} \text{ на свободной поверхности.} \tag{4}$$

Пусть компонентами силы тяжести являются $(g\sin\alpha,\ -g\cos\alpha)$. Тогда

$$\Omega_0=-\frac{1}{2}ig\left(z_0e^{-i\alpha}-\bar{z}_0e^{i\alpha}\right), \tag{5}$$

это выражение равно gy_0, когда $\alpha=0$, и равно $-gx_0$, когда $\alpha=\frac{1}{2}\pi$.

Пусть a обозначает фиксированную (характерную) длину, введем безразмерные величины z, w, Ω, F^2, определяемые формулами

$$z_0=az,\quad w_0=aVw(z),\quad \Omega_0=ag\Omega,\quad F^2=V^2/(ag). \tag{6}$$

Тогда уравнение (4) можно записать в виде

$$\frac{dz}{d\varphi}\frac{d\bar{z}}{d\varphi}=\frac{F^2}{F^2-2\Omega(\varphi)} \text{ на свободной поверхности.} \tag{7}$$

Здесь F^2 — число Фруда (ср. п. 12.10), которое обращается в бесконечность при $g=0$. Уравнение (5) при этом приводится к виду

$$\Omega=-\frac{1}{2}i\left(ze^{-i\alpha}-\bar{z}e^{i\alpha}\right). \tag{8}$$

Дифференцируя его по φ, получаем

$$\frac{d\bar{z}}{d\varphi}e^{i\alpha}=\frac{dz}{d\varphi}e^{-i\alpha}-2i\frac{d\Omega(\varphi)}{d\varphi} \text{ на свободной поверхности.} \tag{9}$$

В связи с этим замечаем, что на свободной поверхности величины z и $\bar{z}$ связаны функциональной зависимостью и, следовательно, величина Ω, определяемая формулой (8), есть функция от φ, т. е.

$$\Omega=\Omega(\varphi) \text{ на свободной поверхности.} \tag{10}$$

Далее, исключая $d\bar{z}/d\varphi$ из формул (7) и (9), получим

$$\frac{dz}{d\varphi}\left(\frac{dz}{d\varphi}e^{-i\alpha}-2i\frac{d\Omega(\varphi)}{d\varphi}\right)=\frac{F^2e^{i\alpha}}{F^2-2\Omega(\varphi)} \text{ на свободной поверхности.} \tag{11}$$

Это уравнение определяет z как аналитическую функцию от φ. Следовательно, поскольку $w=\varphi$ на свободной поверхности, где удовлетворяется соотношение (11), то мы имеем уравнение

$$\frac{dz}{dw}\left(\frac{dz}{dw}e^{-i\alpha}-2i\frac{d\Omega(w)}{dw}\right)=\frac{F^2e^{i\alpha}}{F^2-2\Omega(w)}. \tag{12}$$

Это уравнение определяет z как функции от w и содержит произвольную аналитическую функцию $\Omega(w)$, которая принимает действительное значение $\Omega(\varphi)$ при $\psi=0$.

Заметим, что функция $\Omega(\varphi)$ вначале не известна, так как она может быть определена из соотношения (8) только в том случае, если определено функциональное соотношение между z и $\bar{z}$.

Если мы зададим вид функции $\Omega(\varphi)$ или $\Omega(w)$, то мы сможем найти соответствующий поток. Это соображение принадлежит М. Сотро[1]).

[1]) Sautreaux M. C., «Sur une question d'hydrodynamique», Ann. Scient. de l' École, Supérieure, 10 (1893), 95—182.

Если обозначить штрихами дифференцирование по w, то уравнение (12) может быть записано в виде уравнения

$$z'^2 - 2i\Omega' e^{i\alpha} z' + \frac{F^2 e^{2i\alpha}}{2\Omega - F^2} = 0, \tag{13}$$

которое также равносильно соотношению (11) на свободной поверхности.

При $\alpha = 0$, т. е. в том случае, когда ось y направлена вертикально вверх, имеем

$$z'^2 - 2i\Omega' z' + \frac{F^2}{2\Omega - F^2} = 0. \tag{14}$$

Если $g = 0$, то величина F^2 равна бесконечности и уравнение (14) принимает вид

$$z'^2 - 2i\Omega' z' - 1 = 0. \tag{15}$$

Следовательно, это уравнение может быть использовано для определения всех потоков со свободными линиями тока, если гравитационное поле отсутствует.

Решая уравнение (14) относительно z', получаем

$$\frac{dz}{dw} = i\Omega'(w) \pm \sqrt{\left(-\Omega'^2(w) - \frac{F^2}{2\Omega(w) - F^2}\right)}. \tag{16}$$

Так как $dz/dw = -1/(u - iv) = -u/q^2 - iv/q^2$, то мы найдем величины u и v как действительную и мнимую части выражения, стоящего в правой части формулы (16).

Интегрируя выражение, стоящее в формуле (16), находим

$$x + iy = z = i\Omega(w) \pm \int \sqrt{\left(-\Omega'^2(w) - \frac{F^2}{2\Omega(w) - F^2}\right)}\, dw. \tag{17}$$

Если в формуле (17) положить $\psi = 0$, то получим уравнение линии тока $\psi = 0$, при этом x и y выражаются в зависимости от параметра φ. Для тех значений φ, при которых подкоренное выражение отрицательно, мы получим $x = \text{const}$, так что часть линии тока $\psi = 0$ будет состоять из вертикальной линии, которую можно заменить твердой стенкой или границей. Следовательно, свободная линия тока будет соответствовать тому случаю, когда подкоренное выражение положительно. Учитывая также уравнение (7), в котором выражение, стоящее в левой части, обязательно положительно, мы увидим, что на свободной линии тока выполняется условие

$$-\frac{1}{\Omega'^2(\varphi)} < \frac{2\Omega(\varphi) - F^2}{F^2} < 0. \tag{18}$$

Таким образом, это неравенство ограничивает область значений φ, соответствующих точкам на свободной линии тока.

Пример 1. Имеем

$$F^2 = 1, \quad 2\Omega(w) - 1 = 2w, \quad \alpha = 0.$$

Тогда из формулы (17) находим

$$x + iy = z = i\left(w + \frac{1}{2}\right) \pm \int \sqrt{\left(-1 - \frac{1}{2w}\right)}\, dw. \tag{19}$$

Линия тока $\psi = 0$ определяется из уравнения

$$x + iy = i\left(\varphi + \frac{1}{2}\right) - \int \sqrt{\left(-1 - \frac{1}{2\varphi}\right)}\, d\varphi, \tag{20}$$

где для корня мы выбрали отрицательный знак.

Подкоренное выражение имеет отрицательный знак для значений φ, лежащих в интервале $(-1/2, 0)$. Для значений φ вне этого интервала имеем $x = \text{const}$. Таким образом, линия $\psi = 0$ частично состоит из вертикальной стенки. Если $-1/2 < \varphi < 0$, то, полагая $\varphi = -1/4(1 + \cos 2\theta)$, получаем

$$x + iy = \frac{1}{4} i (1 - \cos 2\theta) - \int \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{4} i (1 - \cos 2\theta) - \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + C. \quad (21)$$

Здесь постоянная C произвольна, однако будет удобно (но не обязательно) придать ей значение $1/4\pi$. Тогда мы получим

$$x = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta, \qquad y = \frac{1}{4}(1 - \cos 2\theta). \quad (22)$$

Это уравнение является уравнением циклоиды, точками возврата которой являются точки $\theta = 0$, $(1/4\pi, 0)$, $\theta = \pi$, $\left(-\frac{1}{4}\pi, 0\right)$, а вершина циклоиды находится в точке $\theta = \frac{1}{2}\pi$, $(0, 1/2)$.

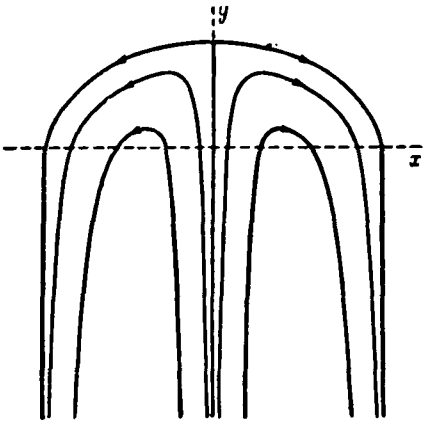


Рис. 205.

Из уравнения (16) при $\psi = 0$ имеем

$$-\frac{u}{q^2} - \frac{iv}{q^2} = i - \operatorname{tg}\theta.$$

Таким образом, $u = q^2 \operatorname{tg}\theta$, $v = -q^2$. Если $\theta = \frac{1}{2}\pi$, то $u/q^2 = \infty$ и, следовательно, $u = v = q = 0$. Это означает, что вершиной циклоиды является критическая точка. Когда величина θ изменяется от $1/2\pi$ до 0, то величина u положительна, в то время как при изменении величины θ от $\pi/2$ до 0, величина u — отрицательна. Таким образом, циклоида описывается в противоположном направлении, когда частица движется от вершины к точкам возврата; фактически поток симметричен относительно вертикали $x = 0$.

Следовательно, используя эту симметрию, мы получаем поток, изображенный на рис. 205.

Для внутренних линий тока имеет место соотношение

$$w = -\frac{1}{4}[1 + \cos(2\theta + 2i\eta)], \quad (23)$$

которое сводится к равенству $\varphi = -\frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta)$, когда $\eta = 0$.

Из формулы (23) получаем равенство

$$\psi = \frac{1}{4}\sin 2\theta \operatorname{sh} 2\eta, \quad (24)$$

которое определяет линии тока $\psi = \text{const}$. В частности, $\psi = 0$ либо при $\eta = 0$ (только что рассмотренный случай), либо при $\theta = 0$, $1/2\pi$, π, ... Таким образом, поток является периодическим повторением потока, изображенного на рис. 205.

Пример II. Имеем

$$F^2 = \infty, \quad \Omega'(w) = e^w, \quad \alpha = -\frac{1}{2}\pi.$$

В этом случае сила тяжести отсутствует; таким образом, мы получаем поток через отверстие, который был рассмотрен в п. 11.53.

Уравнение (13) в данном случае примет вид

$$z'^2 - 2e^w z' + 1 = 0. \tag{25}$$

Полагая здесь $\psi = 0$ и затем решая полученное уравнение относительно производной, получаем

$$\frac{dz}{d\varphi} = e^{\varphi} + \sqrt{(e^{2\varphi} - 1)}, \tag{26}$$

где взято положительное значение корня.

Если $\varphi > 0$, то выражение, стоящее в правой части, действительно, и так как $-d\varphi/dz = u - iv$, то $v = 0$. Это означает, что имеется твердая стенка, параллельная оси x, с которой при подходящем выборе начала координат она будет совпадать.

При $\varphi < 0$ положим

$$e^{\varphi} = \sin\theta, \tag{27}$$

тогда уравнение (26) принимает вид

$$\frac{dz}{d\theta} = \operatorname{ctg}\theta(\sin\theta + i\cos\theta) = \cos\theta + i\left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right).$$

В результате интегрирования получим

$$z = \tfrac{1}{2}\pi + \sin\theta + i\left(\cos\theta + \ln\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta\right), \tag{28}$$

где произвольная постоянная взята равной $^1/_2\pi$. Отсюда находим свободную линию тока в виде

$$x = \tfrac{1}{2}\pi + \sin\theta, \qquad y = \cos\theta + \ln\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta.$$

Если в уравнении (25) мы напишем $\psi = \pi$ вместо $\psi = 0$, то получим вторую свободную линию тока, для которой формула (27) приводится к виду $e^{\varphi} = -\sin\theta$. Для получения уравнения мы просто изменим знак у величины θ в формуле (28). Так как $\ln\left[-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\right] = i\pi + \ln\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$, то для второй свободной линии тока мы получаем следующую формулу:

$$z = -\tfrac{1}{2}\pi - \sin\theta + i\left(\cos\theta + \ln\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta\right).$$

Вторая свободная линия тока является зеркальным отражением линии, определяемой формулой (27), относительно оси y.

Построенный поток изображен на рис. 201, но здесь начало координат расположено посредине между точками B и B'.

Ширина отверстия в наших безразмерных координатах равна $2(^1/_2\pi + \sin\pi/2)$, а ширина струи в бесконечности равна $2(\pi/2 + \sin 0)$. Следовательно, коэффициент сжатия равен $\pi/(\pi + 2)$.

11.63. Касательные потоки. Пусть в формуле (1) п. 11.60 точка z_0 обозначает точку свободной поверхности. При этом предполагается, что движение установившееся. Определим лагранжеву координату α частицы, находящейся на поверхности, из того условия, что $-\alpha$ является временем, в которое частица занимает положение z_0. Чтобы перейти от положения z_0 к z, для всех частиц требуется одно и то же время β при установившемся движении. Следовательно, функция $z = f(\alpha, \beta - \alpha)$ не должна зависеть от α для каждого β. Отсюда

$$z = f(\alpha, t) = z(\beta), \qquad \beta = \alpha + t. \tag{1}$$

Тогда из формулы (4) п. 11.60 следует, что величина $r(\alpha, t) = (f_{tt} + ig)/if_\alpha$ должна быть функцией только от β, т. е., например,

$$r(\alpha, t) = S'(\beta). \tag{2}$$

Тогда уравнение (4) п. 11.60 сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению вида

$$z''(\beta) + ig = iS'(\beta)\, z'(\beta), \tag{3}$$

где $S'(\beta)$, а следовательно, и $S(\beta)$ являются действительными для действительных значений β. Это линейное дифференциальное уравнение можно решить относительно $z(\beta)$ двумя квадратурами.

Если движение безвихревое, то из формулы (3) п. 11.61 следует, что w также является функцией от $\beta = \alpha + t$. Эта функция определяется с помощью квадратуры из уравнения

$$\frac{dw}{d\beta} = -\overline{z'(\beta)}\, z'(\beta). \tag{4}$$

Таким образом, можно сделать важное замечание. Если в уравнении (3) положить $g = 0$, то получим задачу, в которой отсутствует сила тяжести; такого вида задача уже рассматривалась в этой главе. Найдя функцию $z_0(\beta)$ — решение этой задачи без силы тяжести, мы получим дополнительную функцию из линейного уравнения (3), когда $g = 0$, а именно

$$iS'(\beta) = z_0''(\beta)/z_0'(\beta), \quad \text{когда } g = 0. \tag{5}$$

Подставив эту функцию в уравнение (3), получим уравнение

$$z''(\beta) + ig = \frac{z_0''(\beta)}{z_0'(\beta)}\, z'(\beta), \tag{6}$$

решение которого можно представить в виде

$$z_1(\beta) = z_0(\beta) + g\{F(\beta) - F(0)\}, \tag{7}$$

где $F(\beta)$ — частный интеграл уравнения (6). Так как уравнение (6) аналогично уравнению (3), то функция $z_1(\beta)$ задает свободную поверхность постоянного давления, которая сводится к функции $z_0(\beta)$ при $g = 0$.

Точно так же решение $z_1(\beta)$ содержит свободный параметр, а именно поверхностную скорость в решении $z_0(\beta)$.

Будем называть $z_1(\beta)$ *касательным решением*[1]) данной задачи, так как она сводится к задаче без силы тяжести, когда $g = 0$.

11.64. Касательное решение для струи, направленной вертикально вниз. Рассмотрим струю, направленную вертикально вниз и вытекающую из отверстия шириной $2a$ в плоской горизонтальной бесконечно длинной пластинке, как изображено на рис. 201. Выберем начало координат не в точке B', а в середине отрезка BB' и рассмотрим свободную линию тока BC_∞.

Для этой свободной линии тока мы имеем на основании формулы (28) п. 11.62 параметрические уравнения

$$x_0 = k\left(\frac{1}{2}\pi + \sin\theta\right), \qquad y_0 = k\left(-\ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta + \cos\theta\right), \qquad k = 2a/(\pi+2), \tag{1}$$

где через θ обозначен острый угол между направлением движения и вертикалью, так что $\theta = {}^1/_2\pi$ в точке B и $\theta = 0$ в точке C_∞.

---

[1]) Milne-Thomson L. M., Proc. Midwestern Conference on Solid and Fluid Mechanics, 1959.

Пусть U — скорость частиц на поверхности струи и β — время, необходимое для того, чтобы частица передвинулась вдоль свободной линии тока от точки B к точке P. Тогда

$$U^2 = z_0'(\beta)\,\overline{z_0'}(\beta), \tag{2}$$

и из формул (1) получим

$$z_0(\theta) = k\left\{\frac{1}{2}\pi + \sin\theta + i\cos\theta - i\ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta\right\}. \tag{3}$$

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет касательное решение (6) п. 11.63, можно с учетом формулы (2) записать в виде

$$\frac{d}{d\beta}\left(\frac{z'(\beta)}{z_0'(\beta)}\right) = -\frac{ig}{z_0'(\beta)} = \frac{-ig}{U^2}\overline{z_0'}(\beta).$$

Заменяя переменное β на θ, получаем

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{z'(\theta)}{z_0'(\theta)}\right) = -\frac{ig}{U^2}\overline{z_0'}(\theta), \tag{4}$$

откуда

$$\frac{z'(\theta)}{z_0'(\theta)} = A - \frac{ig}{U^2}\overline{z}_0(\theta),$$

таким образом, находим

$$z(\theta) = Az_0(\theta) + B - \frac{ig}{U^2}\int\limits_{1/2\pi}^{\theta} z_0'(\theta)\,\overline{z}_0(\theta)\,d\theta. \tag{5}$$

Мы должны положить $A=1$, $B=0$, и поэтому

$$z_1(\theta) = z_0(\theta) - ig\left[F(\theta) - F\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right]. \tag{6}$$

После интегрирования получаем

$$z_1(\theta) = z_0(\theta) + \frac{gk^2}{U^2}\left\{\theta - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}i\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)^2 + ie^{-i\theta}\ln\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right\}. \tag{7}$$

Замечаем, что $\ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta = \infty$ при $\theta = 0$, но

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\sin\theta\ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta\right) = 0. \tag{8}$$

Из формулы (7) имеем

$$x = x_0 + \frac{gk^2}{U^2}\left\{\theta - \frac{\pi}{2} + \sin\theta\ln\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right\} =$$

$$= k\left\{\frac{\pi}{2} + \sin\theta\right\} + \frac{gk^2}{U^2}\left(\theta - \frac{\pi}{2} + \sin\theta\ln\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right),$$

следовательно,

$$\lim_{\theta\to 0} x = \frac{\pi}{2}\left\{k - \frac{gk^2}{U^2}\right\}. \tag{9}$$

Это уравнение определяет асимптоту свободной линии тока касательного потока.

Согласно уравнению неразрывности, через каждое поперечное сечение струи в одно и то же время должно протекать одинаковое количество жидкости, и так как скорость стремится к бесконечности, когда $\theta \to 0$, то в бесконечности поверхность струи будет стремиться совпасть с этой асимптотой.

В частности, выберем поверхностную скорость такой, чтобы выражение (9) обращалось в нуль, т. е. чтобы

$$U^2 = gk. \tag{10}$$

Введем в формулу (7) это выражение, а также подставим значение $z_0(\theta)$ из формулы (3). Тогда для свободной линии тока касательного решения получим уравнение

$$z_1 = \frac{U^2}{g}\left\{\theta + \lambda\sin\theta + i\left[\lambda\cos\theta + \frac{1}{2}(1-\lambda^2)\right]\right\}, \qquad (11)$$

где $\lambda = 1 + \ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta$.

Если $\theta = \frac{1}{2}\pi$, то мы имеем $\lambda = 1$ и

$$z_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{U^2}{g}\left(\frac{\pi}{2}+1\right) = k\left(\frac{\pi}{2}+1\right) = a.$$

В бесконечности $\theta = 0$, $\lambda = \infty$; учитывая, что $\lambda\sin\theta \to 0$, получаем

$$z_1(0) = \frac{U^2}{g}\{i\,(-\infty)\} = -i\infty.$$

Мы легко можем показать, что давление на свободной линии тока постоянно. Действительно, из формулы (11) следует

$$2gy_1 = U^2\{2\lambda\cos\theta + 1 - \lambda^2\}. \qquad (12)$$

Кроме того, из формулы (4) п. 11.63 имеем

$$\frac{dw}{d\beta} = -\overline{z'(\beta)}\,z'(\beta).$$

Следовательно,

$$\frac{dw}{dz} = -\overline{z'(\beta)} = \frac{U}{k}\,\frac{\overline{z'(\theta)}}{\operatorname{ctg}\theta}.$$

Таким образом,

$$q^2 = \frac{U^2}{k^2}\,\frac{z_1'(\theta)\cdot\overline{z_1'(\theta)}}{\operatorname{ctg}^2\theta} = U^2(\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1).$$

Складывая это равенство с равенством (12), получаем

$$q^2 + 2gy_1 = 2U^2.$$

Согласно теореме Бернулли, это уравнение показывает, что давление на поверхности струи постоянно.

ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ 11

1. Несжимаемая невесомая идеальная жидкость занимает всю плоскость, кроме следующей границы:

$$-a \leqslant y \leqslant +a, \quad 0 \leqslant x \leqslant \infty.$$

Жидкость втекает в точке $x = 0$ и вытекает в точке $x = \infty$. Показать, что, после того как достигнуто установившееся состояние, асимптотами свободных линий тока будут линии $y = \pm a/2$.

2. Рассмотрим течение, изображенное на рис. 201; если ширина отверстия равна $\pi + 2$, то доказать, что скорость q на центральной линии струи на расстоянии h от отверстия определяется из формулы

$$h = \frac{U}{q} - \ln\frac{U+q}{U-q}.$$

3. Показать, что в случае насадка Борда (см. п. 11.51) справедливо равенство

$$x = 2\sigma a\left(\sin^2\frac{1}{2}\theta - \ln\sec\frac{1}{2}\theta\right)\Big/\pi;$$

нарисовать свободные линии тока.

4. Жидкость течет в отрицательном направлении оси y между двумя плоскостями: $x = \pm a$, $y > b$. Жидкость встречает барьер, определяемый уравнением $y = 0$, $l > x > -l$.

Скорость для больших положительных значений y равна V. Определить наибольшую скорость двух струй и результирующее давление на барьер.

5. Плоская безвихревая струя несжимаемой жидкости вытекает из воронкообразного отверстия, стенки которого образуют угол 2α, причем ширина отверстия на выходе равна $2c$. После выхода струя ограничивается «свободными линиями тока» $\psi=\pm\beta$, причем скорость вдоль каждой из них равна V.

Доказать, что движение определяется следующими уравнениями:

$$w=\frac{2\beta}{\pi}\ln t-i\beta, \quad t=-\sin\frac{\pi u}{2\alpha}, \quad \frac{dz}{du}=-\frac{\beta}{\alpha V}e^{iu}\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{2\alpha},$$

причем

$$c=\frac{\beta}{V}\left[1+\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{2\alpha}\sin u\,du\right].$$

Найти в этом случае коэффициент максимального сжатия струи и показать, что он равен $\pi/(\pi+2)$, если $\alpha=\pi/2$.

6. Показать, что преобразования

$$w=A\ln(t-1)+D,$$
$$t=\operatorname{ch}\{(\Omega-C)/B\}$$

(где $\Omega=\ln(-dz/dw)$, величины A, B, C, D являются постоянными, значения которых надо найти) дают двумерное струйное течение жидкости, вытекающей из отверстия шириной $2a$ в плоской стенке.

Доказать, что предельная ширина струи равна $2\pi a/(\pi+2)$ и что уравнение одной из ее границ может быть представлено в виде

$$x=-\frac{2a}{\pi+2}\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right), \qquad y=\frac{2a}{\pi+2}(1-\sin\theta),$$

если за начало координат взять край отверстия. Здесь θ — угол наклона границы струи к вектору скорости на бесконечности.

7. Жидкость вытекает из отверстия, расположенного в середине дна сосуда с вертикальными стенками бесконечной высоты. Будем считать движение двумерным и пренебрежем действием силы тяжести. Считая, что область в плоскости z, занимаемая жидкостью, ограниченная указанным выше образом, изобразить соответствующие области в плоскостях w и Ω, где $\Omega=\ln(-dz/dw)$.

Получить уравнения вида

$$\frac{dw}{dt}=f_1(t), \quad \frac{d\Omega}{dt}=f_2(t),$$

согласно которым каждую из указанных областей можно было бы конформно отобразить на верхнюю полуплоскость плоскости вспомогательного переменного t. Показать, как можно определить все константы, встречающиеся в выражениях функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

(Граница области z состоит из следующих частей: (1) полубесконечная линия $x=0$, $y\geqslant 0$; (2) отрезок $y=0$, $a\geqslant x\geqslant 0$; (3) свободная линия тока, выходящая из точки $z=a$ и имеющая асимптоту $x=b$, которую требуется определить; (4) бесконечная линия $x=c$, где $c>b>a$.)

8. Исследовать движение, задаваемое конформными отображениями вида

$$\frac{dw}{dt}=-\frac{m}{\pi t}, \quad t=e^{-\pi w/m},$$

$$\frac{d\Omega}{dt}=-\frac{1}{2n}\frac{\sqrt{(b-a)(b-a')}}{(t-b)\sqrt{(t-a)(t-a')}},$$

$$e^{\Omega}=-Q\frac{dz}{dw}=\frac{Q}{q}e^{i\theta}=\left[\frac{\sqrt{(b-a')(t-a)}+\sqrt{(b-a)(t-a')}}{\sqrt{(a-a')(t-b)}}\right]^{1/n}.$$

Вычислить ширину сосуда, выразив ее через окончательную ширину струи, при которой скорость равна Q; определить также уравнения кривых, ограничивающих струю и ее окончательное направление.

Показать, что в случае, когда $n=1$, $b=0$ и $a=\infty$ или $a'=-\infty$, мы получим струю Гельмгольца с профилем в виде трактрисы (линия погони). Описать любой другой простой случай, например соответствующий значениям $a=\infty$, $a'=0$.

9. Неподвижные границы жидкости, движущейся в плоскости (x, y), заданы уравнениями

$$y=x-a \quad (y<-a), \quad y=-x+a \quad (y>a).$$

Полуплоскость, содержащая отрицательную часть оси x, полностью заполнена жидкостью, покоящейся в бесконечности и вытекающей из отверстия между точками $(0, a)$ и $(0, -a)$. Показать, что предельная ширина струи на бесконечности равна

$$\frac{\pi a}{\left\{\ln(\sqrt{2}-1)+\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}\right\}}.$$

Определить вид свободных линий тока.

10. Двумерная струя жидкости вытекает симметрично из области, ограниченной двумя плоскими стенками, наклоненными друг к другу под углом 2α. Концы стенок находятся на равных расстояниях от точки пересечения. Показать, что конформное преобразование, приводящее к решению задачи, определяется формулами

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{2b}{\pi t}e^{-i\alpha}\left(t+\sqrt{(t^2-1)}\right)^{\frac{2\alpha}{\pi}},$$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{2bV}{\pi t},$$

где $2b$ — предельная ширина, а V — предельная скорость струи на бесконечности.

Доказать, что если $2c$ — ширина отверстия между стенками, то

$$c=b\left[1+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\operatorname{tg}\theta\sin\left\{\alpha\left(1-\frac{2\theta}{\pi}\right)\right\}d\theta\right].$$

11. Поток, ширина и скорость которого в бесконечности соответственно равны a и V, течет по стороне $y>0$ препятствия, задаваемого формулами

$$y=0, \quad -\infty<x<0, \quad x=0, \quad 0<y<a.$$

Показать, что двумерное безвихревое движение жидкости при отсутствии массовых сил задается уравнениями вида

$$\frac{dw}{dt}=\frac{A}{(t-1)(t-\lambda)}, \quad \frac{d\Omega}{dt}=\frac{B}{\sqrt{(t^2-1)}}, \quad \Omega=\ln\left(-V\frac{dz}{dw}\right),$$

где $-1<\lambda<+1$. Найти величины A и B и затем найти уравнение для определения угла α, на который поток отклоняется.

12. Насадок Борда шириной a симметрично установлен в основании широкого прямоугольного сосуда шириной ka и простирается внутрь на большое расстояние от основания. Доказать, что внутри сосуда на некотором расстоянии от насадка течение практически представляет собой параллельный поток. Доказать также, что коэффициент сжатия равен $k-(k^2-k)^{1/2}$. Получить результат п. 11.51 в качестве предельного случая.

13. Если на рис. 203 точки D, D' соответствуют значениям $\zeta=-a$, $\zeta=a$ $(a<1)$, то показать, что

$$\frac{dQ}{d\zeta}=2(\zeta^2-a^2)^{\frac{\alpha}{\pi}-\frac{1}{2}}(\zeta^2-1)^{-\frac{\alpha}{\pi}}.$$

Изобразить общий вид соответствующей диаграммы в плоскости U/v. Если $U=ve^{i\theta}$ на участке диаграммы, соответствующем линням BD, $B'D'$, то показать, что

$$\ln r=\ln r_0+\theta\operatorname{ctg}\alpha,$$

где величина r_0 равна r при $\theta=0$.

14. Показать, что в п. 11.54 вдоль линии $B'D'$ справедливы равенства

$$w=(2b/\pi)\ln\zeta-ib, \quad -\frac{1}{U}e^{Q}=\frac{\pi\zeta}{2b}\frac{dz}{d\zeta},$$

и, следовательно,

$$ds=-\frac{2b}{\pi}\frac{r}{\zeta}d\zeta.$$

Вывести формулы

$$x=-\frac{2b}{\pi}\int_1^{\zeta} r\cos\theta\frac{d\zeta}{\zeta},\quad y=-\frac{2b}{\pi}\int_1^{\zeta} r\sin\theta\frac{d\zeta}{\zeta},$$

где

$$\theta=2\sin\alpha\int_{\zeta}^{1}\left(\frac{\zeta^2-a^2}{1-\zeta^2}\right)^{\alpha/\pi}\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-a^2)}},\quad a\leqslant\zeta\leqslant 1.$$

15. Показать, что если положить $\alpha=\pi/4$ в условиях п. 11.54, то имеют место равенства

$$Q=2\int_0^{\zeta}\frac{d\zeta}{\sqrt[4]{(\zeta^2-1)(\zeta^2-a^2)}}+i\pi,\quad \theta=\sqrt{2}\int_{\zeta}^{1}\frac{d\zeta}{\sqrt[4]{(\zeta^2-1)(\zeta^2-a^2)}}.$$

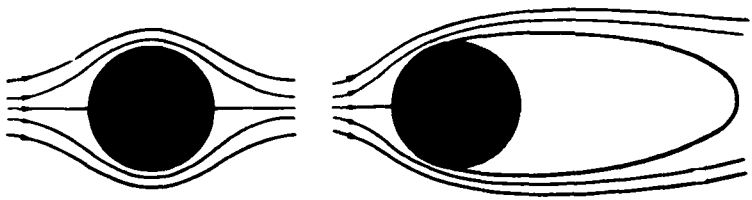
Вычислить координаты (x, y) для значений $a=0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8$ и, таким образом, изобразить вид насадка.

16. Выяснить применимость метода, приведенного в п. 11.54, для нахождения потока через отверстие, в котором края соответствующим образом закруглены.

Глава 12

ДВИЖЕНИЕ ПО СХЕМЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

12.10. Кавитация. Рассмотрим цилиндр, полностью погруженный в несжимаемую жидкость, покоящуюся на бесконечности, например в воду, и движущийся справа налево со скоростью U. На рис. 206, (*I*) показана начальная стадия движения цилиндра (см. также фото 1), когда скорость движения невелика и вся поверхность цилиндра смочена жидкостью. В этом случае точки минимального давления находятся на концах диаметра, перпендикулярного направлению движения.



Р и с. 206.

На рис. 206, (*II*) показано движение цилиндра с достаточно большой скоростью[1]). В этом случае было обнаружено, что жидкость отделяется от поверхности цилиндра в его кормовой части. Происходит образование пузырей, или каверн, ограниченных свободными линиями тока и заполненных парами жидкости.

Пусть Π — давление жидкости в бесконечности, p_c — давление пара в каверне. Тогда, следуя Прандтлю, определим *число кавитации* σ следующим образом:

$$\sigma = \frac{\Pi - p_c}{{}^1/_2 \varrho U^2} = \frac{V^2 - U^2}{U^2}, \tag{1}$$

где второе равенство получено путем использования теоремы Бернулли, причем V — скорость жидкости на границе каверны.

В случае двумерного движения установлено, что ширина каверны имеет порядок σ^{-1}, а ее длина — порядок σ^{-2}. Таким образом, и ширина и длина каверны увелнчиваются вместе с уменьшением величины σ. Пусть атмосферное давлеине поддерживается постоянным и скорость течения воды достаточно велика. В этом случае для каверны в воде величина σ будет положительной, так как давление водяного пара p_c меньше атмосферного давления. Если скорость U увелнчивается, то из формулы (1) следует, что число σ убывает и поэтому $\sigma \to 0$, когда $U \to \infty$; при этом соответственно неограниченно возрастают ширина и длина каверны.

В настоящей главе мы будем рассматривать главным образом так называемое *плоское течение Гельмгольца*, который впервые изучил это течение. Данное движение характеризуется следующими свойствами:

---

[1]) Точнее, с достаточно большим числом Рейнольдса (см. п. 19.62).

(1) течение жидкости происходит без учета силы тяжести;
(2) течение установившееся, т. е. справедливо равенство

$$p+\frac{1}{2}\varrho q^2=\text{const};$$

(3) давление в каверне равно давлению в невозмущенном потоке, т. е. $p_c = \Pi$, и поэтому число кавитации равно нулю.

Что касается свойства (1), то различие между течением без учета силы тяжести (например, течение жидкости в свободно падающем баке) и течением с учетом силы тяжести будет незначительным, если объект, вызывающий кавитацию, движется горизонтально и с большой скоростью. Результат действия силы тяжести существенно зависит от числа Фруда, определяемого выражением

$$\frac{U^2}{g\cdot(\text{Длина каверны})},$$

которое стремится к нулю при $\sigma \to 0$. В этом случае эффект силы тяжести незначителен.

Так как рассматриваемое течение установившееся [свойство (2)], то можно считать, что тело остается неподвижным, а жидкость обтекает это тело.

12.12. Правильная кавитация. Правильной кавитацией называют такое разрывное течение жидкости, при котором минимум давления достигается на свободных линиях тока. При неправильной кавитации минимум давления имеет место на поверхности препятствия.

Различие между правильной и неправильной кавитацией представляет интерес в силу следующих свойств установившегося течения.

(1) *При правильной кавитации свободные линии тока обращены выпуклостью в сторону жидкости.*

Доказательство. Градиент давления вдоль нормали, проведенной к линии тока внутрь жидкости, будет положительным. Поэтому ускорение частицы, нормальное к ее траектории (к линии тока), будет направлено внутрь каверны. Следовательно, граница каверны будет выпуклой в сторону жидкости.

Аналогично доказывается (без учета силы тяжести), что скорость достигает минимума в точке, где граница обращена выпусклостью в сторону жидкости.

Следствие. В случае прямолинейных препятствий правильная кавитация не отличается от неправильной.

(2) *Скорость течения равна нулю или бесконечности в тех точках линии тока, при подходе к которым с разных сторон направление скорости стремится к разным пределам.*

Следствие. В точках отрыва от препятствия линия тока имеет непрерывную касательную.

(3) *Пусть в точке P линия тока разделяется на две ветви λ_1 и λ_2, так, что касательная в точке P непрерывна, а кривизна в этой точке зависит от того, вдоль какой ветви λ_1 или λ_2 следует приближаться к точке P. В этом случае скорость не может быть постоянной на линиях λ_1 и λ_2.*

Доказательство. Сохраняя обозначения п. 12.43, будем рассматривать θ и τ как функции комплексного потенциала w на линии, например, $\psi = 0$. Кривизна выражается следующей формулой:

$$\frac{d\theta}{d\lambda}=\frac{d\theta}{dw}\frac{dw}{d\lambda}=-Ue^{\tau}\frac{d\theta}{dw}.$$

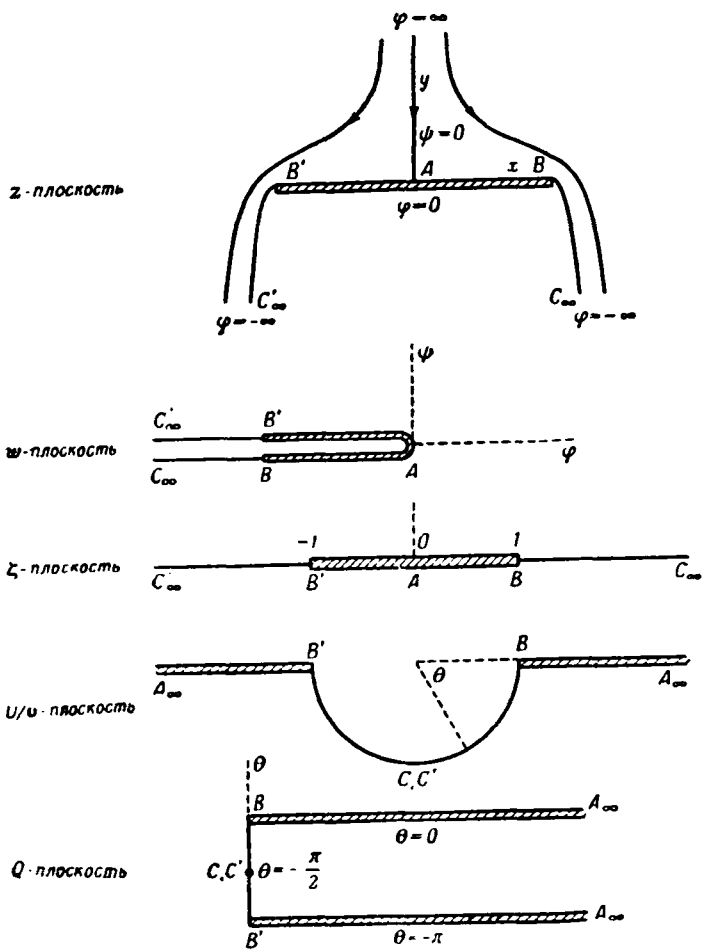
Функция e^{τ} непрерывна вблизи дуги кривой, на которой скорость постоянна по величине, поэтому разрыв производной $d\theta/d\lambda$ влечет необходимость разрыва множителя $d\theta/dw$. Следовательно, производная $d\tau/dw$ имеет

логарифмическую особенность. Поэтому величина τ не может оставаться постоянной на линии тока в двухсторонней окрестности точки разрыва ее кривизны.

Следствие (I). В точке отрыва от препятствия кривизна линии тока или непрерывна, или обращается в бесконечность.

Следствие (II). В случае правильной кавитации кривизна линии тока будет непрерывной в точке отрыва от препятствия, ограниченного линией конечной кривизны; действительно, согласно свойству (1), линия тока не может быть вогнутой, а выпуклая линия тока с бесконечной кривизной должна была бы пересечь препятствие.

12.20. Прямой удар струи о пластинку. Предположим, что струя конечной ширины, имеющая скорость U, встречает неподвижную пластинку BB' шириной l, расположенную под прямым углом к потоку, как изображено на



Р и с. 207.

рис. 207. Точку A в середине пластинки примем за начало координат, а ось x направим по линии AB. Линия тока, попадающая на пластинку в точке A, разветвляется на две линии, которые идут по пластинке к точкам B и B' и затем переходят в свободные линии тока BC_∞ и $B'C'_\infty$. Область вакуума между свободными линиями тока является каверной.

Предположим, что разветвляющаяся линия тока соответствует значению $\psi=0$ и что $\varphi=0$ в точке A. Тогда в точках C_∞ и C'_∞ имеем $\varphi=-\infty$. Плоскость w изображена на рис. 207, где для ясности части границы $C'_\infty B'A$ и $C_\infty BA$ расположены на некотором расстоянии друг от друга, хотя в действительности они совпадают с отрицательным направлением оси φ.

Диаграмму в плоскости w следует рассматривать как многоугольник, у которого границей является $C'_\infty B'ABC_\infty$, внутренняя область совпадает со всей плоскостью w, внутренний угол в точке A равен 2π. С помощью преобразования Шварца—Кристоффеля отобразим такой многоугольник на верхнюю половину плоскости ζ так, чтобы точки B', A, B соответственно переходили в точки $\zeta=-1$, 0, 1. Это преобразование определяется формулами

$$\frac{dw}{d\zeta}=K\zeta, \quad w=\frac{1}{2}K\zeta^2, \tag{1}$$

так как $w=0$ при $\zeta=0$.

Рассмотрим теперь соотношение

$$-U\,dz/dw=U/v.$$

Представим это соотношение на векторной диаграмме; считая, что z описывает линию $ABC_\infty C'_\infty B'A$, на плоскости U/v мы получим фигуру, показывающую, что $\arg(-U\,dz/dw)$ уменьшается на π, когда мы идем от точки A вдоль линии $ABC_\infty C'_\infty B'A$. Поэтому плоскость Q имеет вид, изображенный на рис. 207 (см. также рис. 202).

Полуполосу плоскости Q отобразим на верхнюю половину плоскости ζ, при этом точки B', B, A_∞, которые являются вершинами внутренних углов, равных соответственно $^1/_2\pi$, $^1/_2\pi$, 0, должны перейти в точки $\zeta=-1$, 1, 0. Для такого отображения по формуле Шварца—Кристоффеля имеем

$$\frac{dQ}{d\zeta}=\frac{K'}{\zeta\sqrt{\zeta^2-1}},$$

$$Q=-iK'\operatorname{Arch}\left(-\frac{1}{\zeta}\right)+L.$$

Далее, если $\zeta=-1$, то $Q=-i\pi$; если $\zeta=1$, то $Q=0$. Поэтому имеем

$$L=-i\pi, \quad -iK'(i\pi)+L=0,$$

и, следовательно,

$$Q=\operatorname{Arch}\left(-\frac{1}{\zeta}\right)-i\pi.$$

Отсюда получаем

$$-\frac{1}{\zeta}=\operatorname{ch}(i\pi+Q)=-\operatorname{ch}Q.$$

Поэтому

$$Q=\operatorname{Arch}\frac{1}{\zeta}=\ln\left(\frac{1}{\zeta}+\sqrt{\frac{1}{\zeta^2}-1}\right).$$

Но

$$Q=\ln\left(-U\frac{dz}{dw}\right).$$

Таким образом, находим

$$-U\frac{dz}{dw}=\frac{1}{\zeta}+\sqrt{\frac{1}{\zeta^2}-1},$$

$$-\frac{dw}{U\,dz}=\frac{1}{\zeta}-\sqrt{\frac{1}{\zeta^2}-1}. \tag{2}$$

Выбор знака перед корнем производился из условия, что в точке A при $\zeta=0$ имеется критическая точка, так что производная dw/dz должна обращаться в нуль при $\zeta=0$. Но при малых значениях $|\zeta|$ квадратный корень в формуле (2) очень мало отличается от $1/\zeta$, так что $dw/dz\to 0$ при $\zeta\to 0$.

Далее, из формулы (1) следует, что $dw/d\zeta=K\zeta$. Поэтому

$$\frac{U\,dz}{d\zeta}=K\left[-1-\sqrt{(1-\zeta^2)}\right]. \tag{3}$$

Интегрируя это соотношение от точки B' до B, т. е. от $\zeta=-1$ до $\zeta=1$, мы получим

$$Ul=-K\int\limits_{-1}^{1}\left[1+\sqrt{(1-\zeta^2)}\right]d\zeta=-K\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos\theta)\cos\theta\,d\theta=-K\left(2+\frac{1}{2}\pi\right). \tag{4}$$

Определив из этого соотношения величиину K и подставив ее в (1), мы получим формулу

$$w=-\frac{Ul\zeta^2}{\pi+4}. \tag{5}$$

Таким образом, решение задачи выражается формулами (2) и (5).

12.21. Лобовое сопротивление пластинки. В случае прямого удара струи о пластинку полное давление на пластинку, или *лобовое сопротивление*, определяется путем применения теоремы Бернулли

$$\frac{p}{\varrho}+\frac{1}{2}q^2=\frac{\Pi}{\varrho}+\frac{1}{2}U^2,$$

где p и q — давление и скорость на обтекаемой стороне пластинки; Π — давление в каверне.

Отсюда лобовое сопротивление D выражается формулой

$$D=\int(p-\Pi)\,dx=\frac{1}{2}\varrho\int(U^2-q^2)\,dx,$$

где интеграл вычисляется по пластинке от точки B' до точки B.

Так как отрезок AB совпадает с осью x, то, следовательно,

$$q^2=\left(\frac{dw}{dz}\right)^2,\quad dx=dz.$$

Поэтому

$$D=\frac{1}{2}\varrho\int\left\{U^2-\left(\frac{dw}{dz}\right)^2\right\}dz=\frac{1}{2}\varrho lU^2-\frac{1}{2}\varrho\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)^2\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^2\frac{dz}{d\zeta}\,d\zeta.$$

Применив формулы (1) и (3) из п. 12.20, получим для последнего интеграла следующее выражение:

$$\frac{1}{2}\varrho UK\int\limits_{-1}^{1}(1-\sqrt{1-\zeta^2})\,d\zeta=-\frac{\varrho lU^2}{\pi+4}\left(2-\frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, имеем

$$D=\frac{\pi\varrho lU^2}{\pi+4}.$$

Эта формула дает лобовое сопротивление (отнесенное к единице толщины потока).

12.22. Коэффициент лобового сопротивления. В экспериментальных работах принято выражать лобовое сопротивление посредством *коэффициента лобового сопротивления* C_D, определяемого равенством

$$D = C_D \cdot \frac{1}{2} \varrho U^2 S,$$

где S — площадь проекции обтекаемого тела на плоскость, перпендикулярную к потоку. В только что рассмотренном случае обтекания пластинки, перпендикулярной к потоку, коэффициент лобового сопротивления равен

$$C_D = \frac{2\pi}{\pi + 4} = 0{,}88.$$

Эта величина коэффициента согласуется с экспериментальными значениями для движений с хорошо развитой кавитацией.

12.23. Задача Рябушинского. Пусть в равномерный поток скорости U помещены две (вместо одной) параллельные пластинки. При этом концы пластинок соединены свободными линиями тока (рис. 208). Полученная схема течения впервые была исследована Рябушинским[1]).

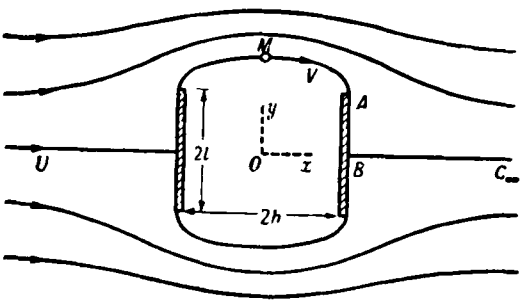


Рис. 208.

В этой схеме пластинки расположены перпендикулярно направлению невозмущенного потока, которое совпадает с линией, соединяющей середины пластинок. Здесь точка M обозначает середину свободной линии тока, соединяющей концы пластинок. Поток имеет две оси симметрии, с которыми совмещены координатные оси Ox и Oy. Комплексная скорость v имеет значения V, iV, 0, U соответственно в точках M, A, B, C_∞, где V — постоянная величина скорости на свободной линии тока.

На рис. 209 изображена четвертая часть потока на плоскости v/V (плоскость годографа), а также на плоскости v^2/V^2. На первой плоскости свободная линия тока переходит в дугу четверти окружности, так как на ней $|v| = V$. На второй плоскости свободная линия тока переходит в дугу полуокружности. Эту полуокружность отобразим на верхнюю половину плоскости ζ, изображенной на рис. 210, с помощью преобразования

$$\zeta = -\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{V^2} + \frac{V^2}{v^2}\right), \qquad (1)$$

которое переводит точку A в точку $\zeta = 1$ и точку M — в точку $\zeta = -1$. Для определения отображения на плоскости w можно положить в силу симметрии $\varphi = 0$ на оси y, а также $\psi = 0$ на свободной линии тока. Рассматриваемая здесь часть потока отображается на третий квадрант плоскости w и, следовательно, на верхнюю половину плоскости w^2 (рис. 211).

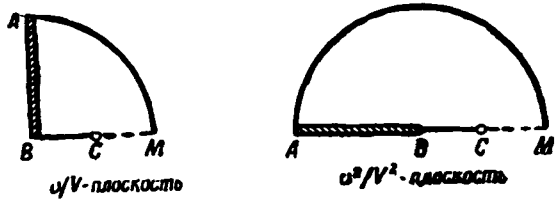


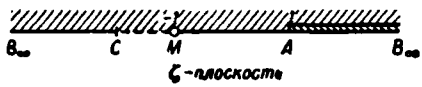
Рис. 209.

С помощью преобразования Мебиуса (см. пример 14, гл. 5)

$$w^2 = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \qquad (2)$$

[1]) Riabouchinsky, *Proc. Lnd. Math. Soc.* (2), 19 (1921), 206—215.

отобразим верхнюю половину плоскости w^2 на верхнюю половину плоскости ζ, при этом α, β, γ, δ — соответствующим образом выбранные действительные константы (константы действительны, так как при отображении действительные оси соответствуют друг другу). Подставляя ζ из формулы (1) в формулу (2), получаем следующую формулу для отображения плоскости w^2 на плоскость годографа:



Р и с. 210

$$w^2 = G^2\,\frac{v^4+\varepsilon v^2V^2+V^4}{v^4+\eta v^2V^2+V^4},$$

где G, ε, η являются константами. Так как в точке M имеем $w=0$ и $v=V$, то $\varepsilon=-2$. Таким образом, числитель принимает вид $(v^2-V^2)^2$. В точке C_∞ имеем $w=-\infty$ и $v=U$, так что

$$\eta=-(U^4+V^4)/V^2.$$

Таким образом, в знаменателе получим выражение

$$(v^2-U^2)\,(v^2-V^4/U^2).$$

Следовательно, мы можем написать

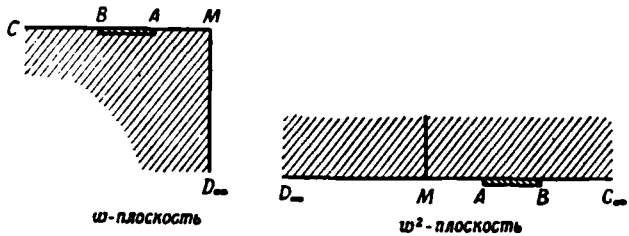
$$w=G\,\frac{t^2-1}{(a^2-t^2)^{1/2}\,(t^2-b^2)^{1/2}},\qquad t=\frac{v}{V},\qquad a^2=\frac{V^2}{U^2},\qquad ab=1. \tag{3}$$

Заметим, что в силу формулы (1) п. 12.10

$$a^2=\frac{V^2}{U^2}=1+\sigma,\qquad b^2=\frac{U^2}{V^2}=\frac{1}{1+\sigma}, \tag{4}$$

где σ — число кавитации.

Формула (3) дает соотношение между w и dw/dz и, таким образом, сводит решение задачи к квадратуре.



Р и с. 211.

Применяя обозначения эллиптических функций [1]), напишем

$$t=v/V=b\,\mathrm{nd}\,(u\,|\,m),\qquad m=1-\frac{b^2}{a^2},\quad m_1=\frac{b^2}{a^2}; \tag{5}$$

здесь m — квадрат модуля, m_1 — дополнение до квадрата модуля. Значения комплексной скорости v в точках M, C, A, B равны соответственно V, U, iV, 0, и, следовательно, соответствующие значения величины u равны $\frac{1}{2}K$, 0, $\frac{1}{2}K+iK'$, iK'.

Поэтому область в комплексной плоскости u имеет вид, изображенный на рис. 212.

Из формулы (3) после некоторых преобразований получаем

$$w=\frac{G\,(m_1^{1/2}\,\mathrm{nd}^2\,u-1)\,\mathrm{nd}^2u}{m\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}. \tag{6}$$

[1]) Относительно обозначений см. работу Милн-Томсона, на стр. 227. Уиттекер Э., Ватсон Дж., Курс современного анализа, ч. II, Физматгиз, М., 1963.

Теперь имеем

$$dz/du = (dw/du) : (dw/dz) = -(dw/du) : v,$$

и поэтому в силу формул (5) и (6) находим

$$\frac{dz}{du} = -\frac{G}{U(1+m_1^{1/2})}\{\mathrm{ds}^2 u + m_1^{1/2}\,\mathrm{dc}^2 u\}.$$

Отсюда путем интегрирования получим

$$z = -\frac{G}{U(1+m_1^{1/2})} f(u) + H, \tag{7}$$

$$f(u) = \mathrm{Ds}\,u + m_1^{1/2}\,\mathrm{Dc}\,u, \tag{8}$$

здесь H — произвольная константа, $\mathrm{Ds}\,u$, $\mathrm{Dc}\,u$ — эллиптические интегралы второго рода в обозначениях Невилля [1]). Константы G и H определяются условиями

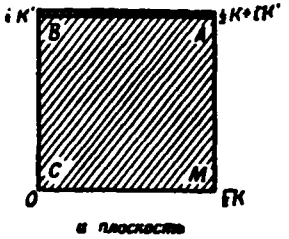


Рис. 212.

$$z = h + il \text{ при } u = \frac{1}{2}K + iK', \quad z = h \text{ при } u = iK',$$

где $2l$ — ширина пластинки и $2h$ — расстояние между пластинками.

Обозначим через $C_D(\sigma)$ коэффициент лобового сопротивления одной пластинки как функцию от числа кавитации σ. Можно доказать, что при малых σ приближенно выполняется равенство

$$C_D(\sigma) = (1+\sigma)C_D(0),$$

значение числа кавитации $\sigma = 0$ соответствует бесконечно большому значению h, т. е. случаю, когда одна из пластинок удалена в бесконечность. Тогда, согласно п. 12.22, имеем

$$C_D(0) = 2\pi/(\pi+4).$$

Так как на практике приходится иметь дело с малыми числами кавитации, то схема Рябушинского приобретает важное значение благодаря удобству ее применения в случае переменных, но малых чисел кавитации [2]).

12.25. Скольжение и глиссирование. Эта задача возникает при изучении поведения на поверхности воды гидроплана, быстроходных судов и в других подобных случаях.

При скольжении и глиссировании по свободной поверхности давление вдоль свободной линии тока близко к атмосферному (оно постоянно), а число кавитации практически равно нулю.

При скольжении вблизи свободной поверхности силой тяжести можно пренебречь, если обе величины gl/U^2 и gh/U^2 малы по сравнению с единицей; здесь l — длина движущегося тела и h — глубина жидкости.

Однако при расчете брызговой струи, создаваемой телом, движущимся вблизи свободной поверхности в случае глубокой воды, эффектом силы тяжести пренебрегать нельзя. В самом деле, можно получить целый ряд различных течений жидкости, например при движении пластинки с заданным углом наклона и заданной скоростью.

Ниже, в п. 12.26, будет рассмотрена задача, которая возникает при следующих условиях. Пусть задана глубина воды, скорость течения и положение пластинки. Тогда существует наибольшая высота кромки над свободной поверхностью воды (впереди по движению пластинки), при которой возможно

---

[1]) Neville E. H., Jacobian elliptic functions, 2-е издание, Оксфорд, 1951, гл. 14.

непрерывное обтекание пластинки. Иначе, допустим, что установилась брызговая струя около пластинки, погруженной в поток; тогда эта пластинка может быть выдвинута выше уровня жидкости без нарушения непрерывности струи. Работа, изложенная в п. 12.26, касается формы струи при аналогичном движении на очень глубокой воде.

12.26. Глиссирование пластинки по поверхности потока[1]). Рассмотрим изображенную на рис. 213 неподвижную пластинку BB' ширины l, на которую набегает поток бесконечной глубины со скоростью U в бесконечности. Предполагается, что у задней кромки пластинки в точке B поток сходит по свобод-

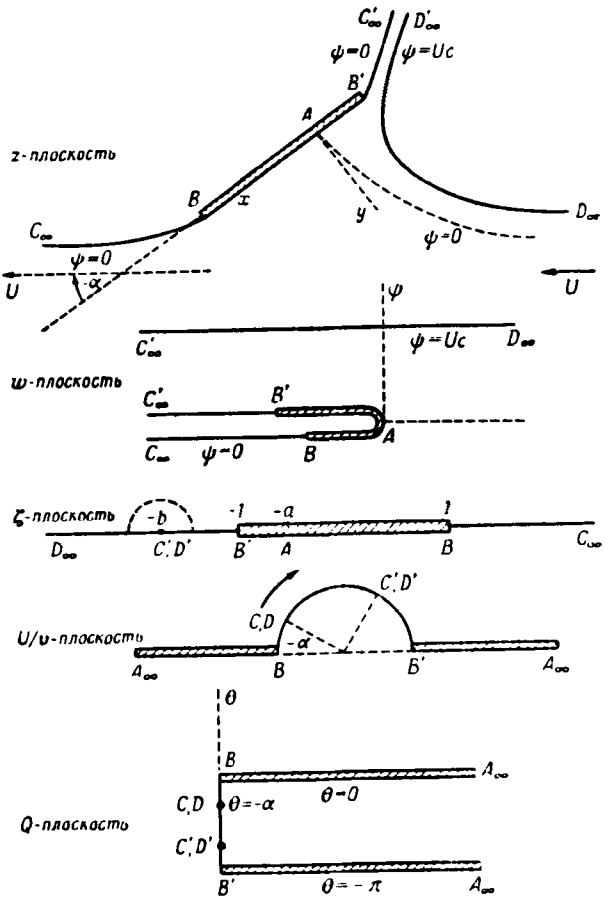


Рис. 213.

ной поверхности вдоль линии тока BC_∞, а у передней кромки в точке B' образуется струя воды. Эта струя ограничена свободными линиями тока $B'C'_\infty$

[1]) Green A. E., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 32 (1936). [Впервые эта задача была решена в работе Гуревича М. И. и Ямпольского А. Р., «О движении глиссирующей пластинки», *Техника воздушного флота*, № 10 (1933). Конечность глубины учтена в работе Ю. С. Чаплыгина, «Глиссирование плоской пластинки бесконечного размаха по поверхности невесомой жидкости конечной глубины», *Прикл. мат. и мех.*, V, вып. 2 (1941). Действие силы тяжести учтено в работе: Седов Л. И., Плоская задача о глиссировании на поверхности тяжелой жидкости, Труды конференции по теории волнового сопротивления, ЦАГИ (1937). Числовые расчеты см.: Чаплыгин Ю. С., Труды ЦАГИ, 506 (1940). — *Прим. ред.*]

и $D_\infty D'_\infty$. Область за пластинкой между линиями BC_∞ и $B'C'_\infty$ занята атмосферным воздухом при давлении П, такая же область находится выше и правее линии $D_\infty D'_\infty$. Следовательно, вдоль всех этих свободных линий тока величина скорости постоянна и равна U — скорости потока в точке D_∞.

Существует линия тока, которая встречается с пластинкой в некоторой точке A и разделяется на две свободные линии тока BC_∞ и $B'C'_\infty$. Предположим, что эта разветвляющаяся линия тока отвечает значению $\psi = 0$. Выберем начало координат в точке A и ось x направим по линии AB. Предположим также, что направление потока в бесконечности составляет угол $-\alpha$ с отрезком AB.

Если c — ширина струи в бесконечности, то вдоль линии $D'_\infty D_\infty$ мы должны иметь $\psi = Uc$.

Диаграмма течения в плоскости w показана на рис. 213, который следует сравнить с рис. 207. Отобразим область плоскости w на верхнюю половину плоскости ζ, ставя точкам B', B в соответствии значения $\zeta = -1, +1$, а точкам A, C'_∞ — значения $\zeta = -a$, $-b$. Так как многоугольник на плоскости w имеет внутренний угол в вершине A, равный 2π, и в вершине C'_∞, равный 0, то преобразование Шварца — Кристоффеля дает

$$\frac{dw}{d\zeta} = K\frac{\zeta+a}{\zeta+b} = K - K\frac{b-a}{\zeta+b}, \tag{1}$$

так что

$$w = K\zeta - K(b-a)\ln(\zeta+b) + L.$$

При обходе вокруг точки $\zeta = -b$ в плоскости ζ аргумент величины $(\zeta + b)$ убывает от π до 0 и поэтому величина $\ln(\zeta + b)$ убывает на $i\pi$; таким образом, функция ψ (мнимая часть w) убывает на величину $K(b - a)\pi$. Но при обходе вокруг точки C', как показывает диаграмма на плоскости w, функция ψ убывает от значения Uc до 0. Таким образом, находим

$$K = -\frac{Uc}{\pi(b-a)}. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь поведение функции $-U\,dz/dw$, когда точка z описывает контур $ABC_\infty D_\infty D'_\infty C'_\infty B'A$. Вдоль свободных линий тока величина скорости постоянна. Следовательно, соответствующий контур, описанный на плоскости, будет иметь вид, изображенный на рис. 213; величина аргумента при этом убывает от 0 до $-\pi$.

Соответствующая область в плоскости Q изображена на том же рисунке. Для получения отображения этой области на плоскость ζ используем преобразование Шварца — Кристоффеля, которое дает

$$\frac{dQ}{d\zeta} = \frac{K_0}{(\zeta+a)\sqrt{(\zeta^2-1)}},$$

так что

$$Q = K'\operatorname{Arch}\frac{1+a\zeta}{\zeta+a} + L', \quad K_0 = K'\sqrt{(a^2-1)}.$$

В точках B', B функция Q принимает значения $-i\pi$, 0, а величина ζ принимает значения -1, 1. Поэтому имеем

$$-i\pi = K'\operatorname{Arch}(-1) + L', \quad 0 = K'\operatorname{Arch}(1) + L'.$$

Таким образом, получим

$$L' = 0, \quad K' = -1 \quad \text{и} \quad Q = -\operatorname{Arch}\frac{1+a\zeta}{\zeta+a},$$

так что

$$\operatorname{Arch}\frac{1+a\zeta}{\zeta+a} = \ln\left(-\frac{dw}{U\,dz}\right).$$

Отсюда иаходим

$$-\frac{dw}{U\,dz}=\frac{1+a\zeta}{\zeta+a}-\sqrt{\left(\frac{1+a\zeta}{\zeta+a}\right)^2-1}.$$

Здесь перед квадратным корнем взят отрицательный знак, так как $dw/dz=0$ в критической точке $A(\zeta=-a)$.

Из последней формулы получаем

$$-\frac{U\,dz}{dw}=\frac{1+a\zeta+\sqrt{(1-a^2)\,(1-\zeta^2)}}{\zeta+a}. \tag{3}$$

Теперь можно найти значение a, учитывая, что в точке D_∞ имеем $-U\,dz/dw=e^{-i\alpha}$ (рис. 213) и $\zeta=-\infty$. Таким образом, формула (3) дает

$$e^{-i\alpha}=a-\sqrt{a^2-1}=a-i\sqrt{1-a^2},$$

отсюда $a=\cos\alpha$, так как $e^{-i\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha$.

Кроме того, из формул (1) и (3) получаем

$$\frac{dz}{d\zeta}=-\frac{K}{U}\,\frac{1+a\zeta+\sqrt{(1-a^2)\,(1-\zeta^2)}}{\zeta+b}.$$

Интегрируя это выражение по ζ от $\zeta=-1$ до $\zeta=1$, после некоторых преобразований получаем следующую формулу для ширины пластинки:

$$l=\frac{c\sin\alpha}{(b-a)}[b-\sqrt{b^2-1}]+\frac{c}{\pi\,(b-a)}\left(2a+(ab-1)\ln\frac{b-1}{b+1}\right). \tag{4}$$

Для величины полного давления T на пластинку, как и в п. 12.21, получаем выражение

$$T=\frac{1}{2}\,\varrho\int_{-1}^{1}\left\{U^2-\left(\frac{dw}{dz}\right)^2\right\}\frac{dz}{d\zeta}\,d\zeta=\frac{\varrho U^2 c\sin\alpha}{b-a}[b-\sqrt{b^2-1}].$$

Вывод этой формулы предоставляем выполнить читателю. При больших значениях b приближенно находим

$$T=\frac{c\varrho U^2\sin\alpha}{2b\,(b-a)}. \tag{5}$$

Сила T перпендикулярна к пластинке; поэтому ее можно разложить на лобовое сопротивление D и подъемную силу L; тогда

$$D=T\sin\alpha,\qquad L=T\cos\alpha.$$

Комбинируя формулы (4) и (5), получаем соотношение

$$\frac{\varrho U^2 l}{T}=2b[b-\sqrt{b^2-1}]+\frac{2b}{\pi\sin\alpha}\left(2a+(ab-1)\ln\frac{b-1}{b+1}\right).$$

Отсюда, считая, что величина b велика, можно найти следующее разложение в степенной ряд:

$$\frac{\varrho U^2 l}{T}=2b^2\left\{1-\left(1-\frac{1}{2b^2}+\cdots\right)\right\}+\frac{2b}{\pi\sin\alpha}\left\{2a+(ab-1)\left(-\frac{2}{b}-\cdots\right)\right\}.$$

Если в последнем выражении считать, что $b\to\infty$, то получаем формулу Рэлея

$$T=\varrho U^2 l\,\frac{\pi\sin\alpha}{4+\pi\sin\alpha}. \tag{6}$$

Так как при $b\to\infty$ точки D_∞ и D'_∞ сливаются, то эта формула дает величину полного давления на пластинку, когда неограниченный поток под углом α

ударяется о пластинку, набегая на нее и обтекая ее с отрывом струи, как изображено на рис. 214. Случай, когда $\alpha = \pi/2$, был нами рассмотрен в п. 12.21.

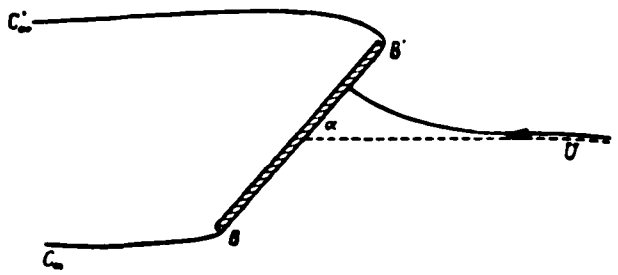


Рис. 214.

12.30. Отображение относительно свободных линий тока. Мы опишем теперь совершенно иной подход, предложенный Шиффманом [1]). Этот подход состоит в том, что переменные величины, описывающие течение, продолжаются через свободные линии тока. При этом определяются границы и особые точки области течений. Этот процесс называется *принципом отображения относительно свободных линий тока*. Результат продолжения течения через

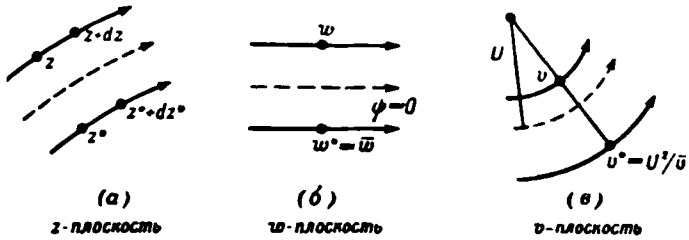


Рис. 215.

свободные линии тока называется *образом*, или *отображением*, действительного течения. Будем отмечать звездочками наверху параметры z^*, w^*, υ^* для отображенного течения; соответствующие параметры для действительного течения обозначаются через z, w, υ.

Рассмотрим течения с одной свободной линией тока. Для этого обозначим через U величину скорости вдоль свободной линии тока; тогда в плоскости υ, или плоскости годографа, свободные линии тока изобразятся дугами окружности

$$\upsilon\bar{\upsilon} = U^2. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь в плоскостях z, w и υ линии тока, изображенные на рис. 215; при этом свободные линии тока изображены пуиктиром. Не нарушая общности, примем, что $\psi = 0$ на свободной линии тока.

Так как функции w и $\upsilon = -dw/dz$ являются аналитическими функциями от z, отсюда следует, что переменные z, w, υ являются аналитическими функциями относительно друг друга.

Согласно п. 5.53, функцию w можно путем зеркального отражения аналитически продолжить через прямую линию $\psi = 0$, на которой она принимает

[1]) Shiffman M., *Communications on Pure and Applied Mathematics* I (1948), 89—99, II (1949), 1—11.

действительные значения; поэтому имеем

$$w^* = \bar{w}. \tag{2}$$

Так как в плоскости w линия тока представляется линией, параллельной линии $\psi = 0$, и ее зеркальное отражение относительно $\psi = 0$ является ее образом, то отсюда следует, что *порядок расположения образов будет обратным относительно порядка линий тока* (рис. 216).

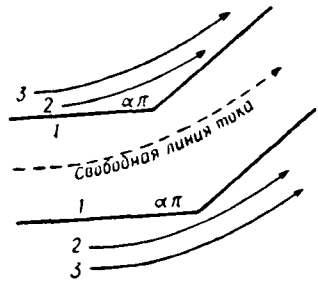


Рис. 216.

Далее, в силу формулы (1) величины v и $U^2/\bar{v}$ принимают одинаковые значения на дуге окружности $|v| = U$. Отсюда, согласно принципу аналитического продолжения (см. п. 5.52), имеем

$$v^* = \frac{U^2}{\bar{v}} = \frac{U^2}{q^2} v, \tag{3}$$

причем точки v и v^* являются точками инверсии относительно окружности $|v| = U$.

Поэтому *комплексная скорость и ее отображение параллельны друг другу*, но модули скорости изменяются в отношении U^2/q^2. Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема. *Отображение элемента линии тока является элементом, измененным по величине, но прежним по направлению. Порядок линий тока при их отображении меняется на обратный.*

Пусть dz — элемент линии тока, а dz^* — элемент ее отображения. Так как

$$v = -\frac{dw}{dz}, \quad v^* = -\frac{dw^*}{dz^*}, \quad \bar{v} = -\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}},$$

то, используя формулу (2) и учитывая, что на линии тока $d\bar{w} = dw$ и $\bar{v}d\bar{z} = vdz$, получаем

$$v^* dz^* = -\,-dw^* = -d\bar{w} = -dw = v\,dz.$$

Из этих соотношений и из формулы (3) находим

$$dz^* = \frac{\bar{v}^2}{U^2} d\bar{z} = \frac{q^2}{U^2} dz. \tag{4}$$

Эта формула дает второе доказательство предыдущей теоремы. Отсюда следует, что длина дуги при отображении меняется в отношении q^2/U^2.

Рассмотрим несколько частных случаев.

Обтекание угла. Пусть поток обтекает внутреннюю сторону угла $\alpha\pi$. При отображении получится поток, обтекающий тот же угол, но с *внешней стороны*, как это показано на рис. 216.

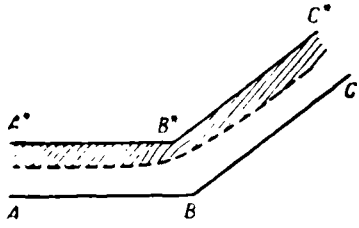


Рис. 217.

В качестве приложения рассмотрим струю, текущую вдоль стенки, состоящей из двух плоскостей, которые образуют угол ABC (рис. 217).

Поток, являющийся отображением, показан на рисунке в виде заштрихованной области. Полный поток, состоящий из действительного потока и его отображения, представляет собой течение в канале, ограниченном стенками ABC и $A^*B^*C^*$. Линия тока, которая делит пополам канал в бесконечности, есть свободная линия тока, вдоль нее величина скорости постоянна и равна V. Таким образом, A^*B^* и B^*C^* являются прямыми, параллельными соответственно прямым AB и BC

и отстоящими от них на расстоянии $2h$; причем h — ширина исходной струи в бесконечности; точка B^* расположена на биссектрисе угла ABC.

Критическая точка. При отображении потока, обтекающего внутреннюю область прямого угла в окрестности критической точки O, получается поток, обтекающий *внутреннюю область* угла $3\pi/2$; таким образом, отображением потоков, обтекающих прямые углы внутри всей окрестности критической точки, являются потоки на трех листах с точкой ветвления O^* (рис. 218).

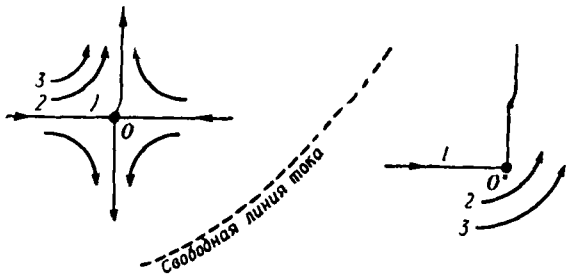


Рис. 218.

Равномерный поток в бесконечности. Пусть поток определяется выражением $v = Ve^{-i\alpha}$, тогда из формулы (3) имеем

$$v^* \frac{U^2}{V} e^{-i\alpha},$$

так что отображением также является равномерный поток. Из формулы (4) получим

$$z^* = -\frac{V^2}{U^2} z = \text{const}, \tag{5}$$

и поэтому z^* неограниченно возрастает вместе с возрастанием z. Таким отображением является равномерный в бесконечности поток, параллельный исходному, но скорость его изменена в отношении U^2/V^2, равном единице, так как $V = U$.

Свободные линии тока. Если в потоке есть вторая свободная линия тока, на которой скорость равна V, то формула (4) приводит к уравнению (5), так что отображением является геометрически подобная свободная линия тока. Если $V = U$, то отображение получается в результате поступательного перемещения исходного потока.

Отображение окрестности произвольной точки. Пусть поток в окрестности точки z_0 задается формулой

$$v = \alpha (z - z_0)^\beta + \text{высшие степени } (z - z_0), \tag{6}$$

где показатель степени β — действительное число.

Из формул (6) и (4) находим

$$dz^* = \frac{\bar{\alpha}^2 (\bar{z} - \bar{z}_0)^{2\beta}}{U^2} d\bar{z} + \ldots .$$

Отсюда, интегрируя и сохраняя только главный член разложения, получаем

$$z^* - z_0^* = \frac{\bar{\alpha}^2}{U^2 (2\beta + 1)} (\bar{z} - \bar{z}_0)^{2\beta+1} + \ldots , \tag{7}$$

где z_0^* — отображение точки z_0.

Комбинируя этот результат с формулой (3), получаем

$$v^* = \frac{A}{(z^* - z_0^*)^{\frac{\beta}{2\beta+1}}} + \ldots , \quad A = \left(\frac{U^{2\beta+2}}{(2\beta+1)^\beta \bar{\alpha}} \right)^{\frac{1}{2\beta+1}} . \tag{8}$$

Из формулы (7) мы видим, что если $2\beta + 1 > 0$, то отображением точки z_0 является конечная точка; если же $2\beta + 1 < 0$, то отображением точки z_0 является точка в бесконечности.

Простой источник. Пусть в формуле (6) $\alpha = m$ — мощность источника и пусть $\beta = -1$. Так как $A = -m$, то отображением является равный по мощности источник в бесконечности, но противоположный по направлению. Обратно, отображением простого источника в бесконечности является равный по мощности источник в конечной точке.

12.31. Насадок Борда. Этот насадок был описан в п. 11.51. В силу симметрии течения достаточно рассмотреть половину течения, как это изображено на рис. 219.

Для простоты рассмотрения верхняя стенка AB_∞ дублирована линией $A^*C^*_\infty$. Если M — расход, поступающий в насадок, то в бесконечности (в точке B_∞)

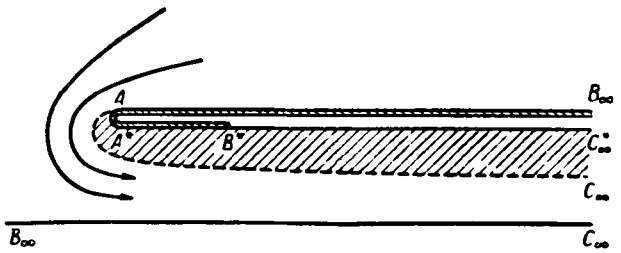


Рис. 219.

имеется источник производительности M. Отображение A точки A^* совпадает с A, и поэтому отображением линии AB_∞ является A^*B^*, причем в точке B^* имеется источник производительности M. Отображением линии $B_\infty C_\infty$ является линия, параллельная $B^*C^*_\infty$. Так как скорости в точках C_∞ и C^*_∞ одинаковы и равны по величине скорости на свободной линии тока, то, не производя вычислений, мы видим, что коэффициент сжатия равен 0,5.

Таким образом, мы имеем простую интуитивную картину течения. Из источника в бесконечности жидкость поступает в область между двумя неподвижными стенками AB_∞ и $B_\infty C_\infty$. С ней сталкивается жидкость, вытекающая из равного по мощности источника B, помещенного в точке B^*; в результате этого образуется свободная линия тока (или линия постоянного давления) AC_∞.

12.32. Истечение из отверстия. Эта задача была рассмотрена в п. 11.53. Линия $B_\infty C_\infty$, служащая осью симметрии струи, является линией тока; поэтому достаточно рассмотреть половину течения, показанную на рис. 220.

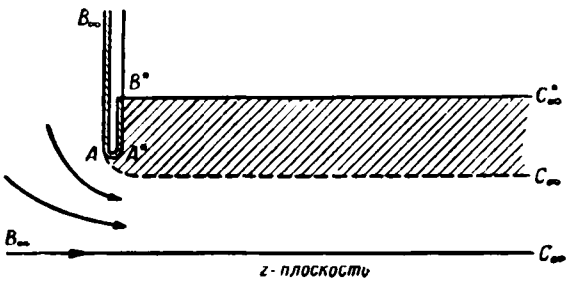


Рис. 220.

Отображением относительно свободной линии тока этой части течения является область, расположенная выше свободной линии тока AC_∞, ограни-

ченная ею и изображениями линий AB_∞ и $B_\infty C_\infty$. Отображением точки отрыва A является совпадающая с ней точка A^*; поэтому отображением линии AB_∞ служит конечный прямолинейный отрезок A^*B^*, совпадающий по направлению с линией AB_∞. При этом в точке B^* помещается источник с такой же

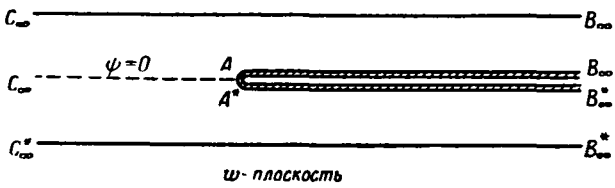


Рис. 221.

мощностью, как источник в точке B_∞, т. е. соответствующей потоку, вытекающему из рассматриваемой половины отверстия. Изображением границы $B_\infty C_\infty$ является параллельная ей прямая $B^*C^*_\infty$.

Так как скорость течения в бесконечной части струи равна по величине скорости на свободной линии тока, то толщина струи в бесконечности сохраняется при отображении. Таким образом, не производя вычислений, мы видим, что коэффициент сжатия струи превосходит 0,5. Следовательно, интуитивно течение можно рассматривать как течение жидкости между стенками $B_\infty AB^*C^*_\infty$ и $B_\infty C_\infty$; свободная линия тока образуется при столкновении потоков, вытекающих из источника в бесконечно удаленной точке B_∞ и из равного по мощности источника в точке B^*.



Рис. 222.

Положение отображенной точки B^* не является произвольным. Оно полностью определяется условием симметрии в плоскости w (рис. 221); в этой плоскости линия $B^*_\infty C^*_\infty$ является зеркальным отражением линии $B_\infty C_\infty$ относительно действительной оси $\psi = 0$; при этом точка A соответствует точке отрыва потока.

Попытаемся теперь получить аналитические выражения для рассматриваемого течения. Отобразим область течения на верхнюю полуплоскость ζ, как показано на рис. 222.

Преобразование Шварца — Кристоффеля дает

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{-K\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+1)}, \quad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{L\zeta}{(\zeta-1)^{3/2}(\zeta+1)^{1/2}},$$

здесь K и L — константы, подлежащие определению. Отсюда путем деления находим

$$v = -\frac{dw}{dz} = \frac{K}{L}\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^{1/2},$$

и поэтому $K = LU$, так как $v \to U$ при $\zeta \to \infty$.

Сделав в предыдущих формулах подстановку $\zeta = -\cos\lambda$ и выполнив интегрирование, получим

$$w = -K \ln \sin\lambda + M,$$

$$z = iL\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} - \lambda\right) + N,$$

$$v = iU \operatorname{ctg}\frac{\lambda}{2},$$

здесь M и N — константы.

Соответствующая область в комплексной плоскости λ изображена на рис. 223.

Все константы можно определить, устанавливая взаимосвязь между точками, соответствующими точкам A, B, C в разных плоскостях.

Если $2l$ — ширина отверстия, то мы получим

$$\lambda = \pi/2, \quad z = li, \quad w = 0 \text{ в точке } A,$$
$$\lambda = \pi \text{ в точке } B,$$
$$\lambda = \pi + i\infty, \quad z = +\infty \text{ в точке } C;$$

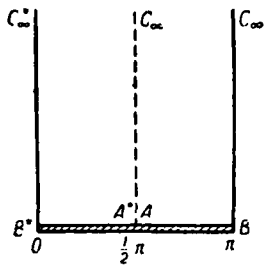


Рис. 223.

отсюда, учитывая равенство $K = LU$, получаем

$$w = -\frac{2lU}{\pi+2} \ln \sin \lambda, \quad z = \frac{2li}{\pi+2}\left\{\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} - \lambda + \pi\right\},$$
$$v = iU \operatorname{ctg}\frac{\lambda}{2}.$$

Для определения положения точки B^* положим $\lambda = 0$; тогда для z получим значение $2\pi li/(\pi+2)$.

Ширина струи в бесконечности равна половине модуля этой величины, т. е. $\pi l/(\pi+2)$; отсюда коэффициент сжатия равняется $\pi/(\pi+2) = 0{,}611$.

Для получения уравнения свободных линий тока в выражении для z полагаем $\lambda = \pi/2 + iv$. Тогда

$$x = \frac{2l}{\pi+2}(v - \operatorname{th} v), \quad y = \frac{2l}{\pi+2}(\operatorname{sch} v + \pi/2), \quad 0 \leqslant v \leqslant \infty.$$

12.33. Поток, ударяющийся о пластинку. Эта задача была рассмотрена в п. 12.20. Для применения метода отображений достаточно рассмотреть

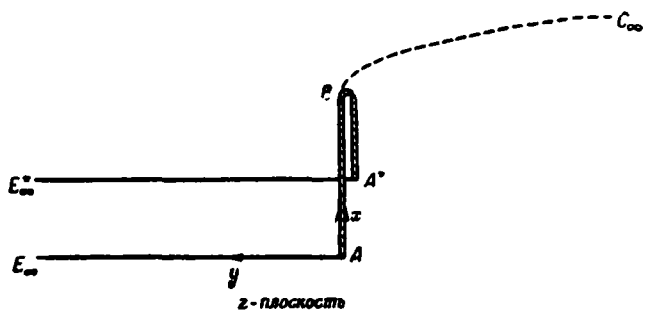


Рис. 224.

половину потока. Соответствующее отображение потока показано на рис. 224.

Заметим, что в точке A^* угол равен $3\pi/2$ и является отображением угла $\pi/2$ в точке A. Отображением линии AE_∞ является параллельная ей прямая $A^*E^*_\infty$.

Пусть ds и ds^* — соответственно элементы дуги AB и ее отображения A^*B^* (т. е. A^*B). Тогда из формулы (4) п. 12.30 мы получим $ds^* = dsq^2/U^2$; так как на AB скорость q изменяется от нуля в точке A до U в точке B, то отрезок A^*B^* короче отрезка AB (рис. 225).

Отображенный поток частично перекрывается с исходным потоком, и поэтому его следует рассматривать на отдельном листе поверхности Римана.

Для определения формул отображений имеем

$$w = K\zeta^2, \quad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{L\zeta\,(1-\zeta)^{1/2}}{(1+\zeta)^{1/2}}. \tag{1}$$

Подстановка $\zeta = -\cos\lambda$ дает

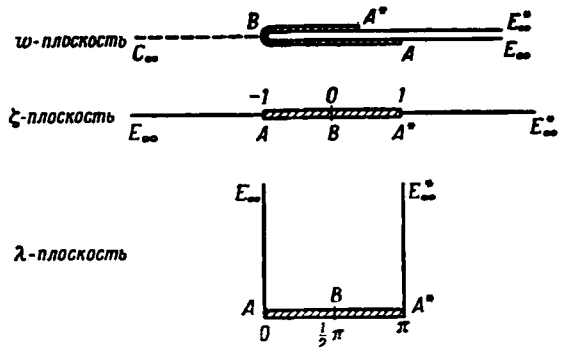
$$\frac{dz}{d\lambda} = -L\cos\lambda\,(1+\cos\lambda), \tag{2}$$

отсюда

$$z = -L\left(\frac{1}{2}\lambda + \sin\lambda + \frac{1}{4}\sin 2\lambda\right). \tag{3}$$

Здесь мы положили, что $w=0$ в точке B, т. е. при $\zeta=0$, и что $z=0$ в точке A. Из формул (1) и (2) находим

$$dw/dz = -v = 2K\sin\lambda/\{L\,(1+\cos\lambda)\}.$$



Р и с. 225.

В точке B имеем $\lambda=\pi/2$, $z=l$, $v=U$, здесь $2l$ — ширина пластинки Отсюда

$$L = -\frac{4l}{\pi+4}, \quad K = -\frac{1}{2}LU.$$

Окончательно

$$w = \frac{2lU}{\pi+4}\cos^2\lambda, \qquad z = \frac{4l}{\pi+4}\left(\frac{1}{2}\lambda + \sin\lambda + \frac{1}{4}\sin 2\lambda\right).$$

В точке A^*, где $\lambda=\pi$, величина z равна $2\pi l/(\pi+4)$. В п. 12.22 было найдено, что коэффициент лобового сопротивления равен $2\pi/(\pi+4)$. Соотношение между этими значениями не является случайным, как сейчас будет показано.

12.34. Геометрическая интерпретация силы, действующей на препятствие. Рассмотрим поток, обтекающий препятствие AB. Пусть BC_∞ — свободная линия тока (рис. 226). При отображении относительно линии BC_∞ образом дуги препятствия будет линия BA^*. Пусть вектор $X+iY=F$ является силой, действующей на единицу толщины препятствия. Тогда, согласно п. 6.41, имеем

$$F = \int_A^B -i\,(p-p_c)\,dz,$$

здесь p_c — давление в каверне. По теореме Бернулли находим

$$\frac{p}{\varrho}+\frac{1}{2}q^2=\frac{p_c}{\varrho}+\frac{1}{2}U^2,$$

отсюда в силу формулы (4) п. 12.30 получаем

$$F=\frac{1}{2}\varrho U^2(-i)\int_A^B\left(1-\frac{q^2}{U^2}\right)dz=\frac{1}{2}\varrho U^2(-i)\int_A^B(dz-dz^*)=$$

$$=-\frac{1}{2}\varrho U^2 i(a^*-a),$$

где a^* и a — комплексные числа, соответствующие точкам A^* и A.

Таким образом, результирующая сила по величине и направлению такая же, как если бы избыточное давление застойной области действовало вдоль всей линии, соединяющей точки A и A^*.

Если тело и поток симметричны, то сила совпадает с направлением потока и прямая линия AA^* перпендикулярна к этому направлению. В этом случае величина силы равна $\frac{1}{2}\varrho U^2 AA^*$ и коэффициент лобового сопротивления равен AA^*/AB, как показано в этом пункте.

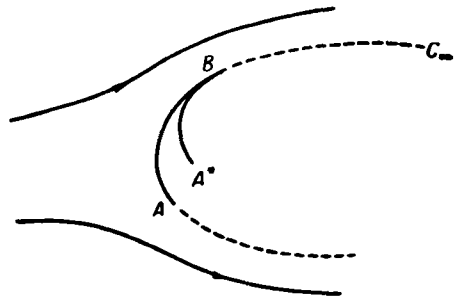


Рис. 226.

12.35. Обратная струя. Возможный тип каверны, наблюдаемый при входе препятствия в жидкость, состоит в том, что непосредственно за препятствием образуется струя, направленная в сторону препятствия; позади струи возникает критическая точка потока. На рис. 227 изображен такой симметричный поток, обтекающий согнутую пластинку; при этом свободные линии тока, как обычно, показаны пунктиром; точка E является критической.

Математически обратную струю можно рассматривать как простирающееся до бесконечности воображаемое продолжение *набегающего потока*, но

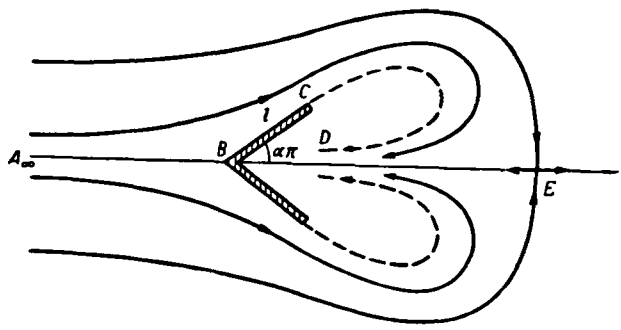


Рис. 227.

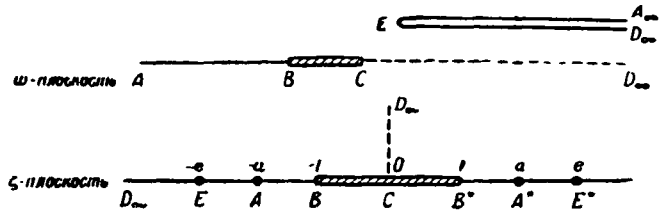
уже переходящее на второй лист плоскости потока. В действительных потоках обратная струя может разрушаться, не достигнув препятствия, или может сначала удариться о препятствие, а затем исчезнуть.

Рассмотрим только верхнюю половину потока и отобразим эту часть потока и ее отображение на верхнюю половину плоскости ζ. Плоскости w и ζ показаны на рис. 228.

Пусть $\alpha\pi$ — угол наклона части BC пластинки к направлению потока в бесконечности и пусть точки B, B^* соответственно отображаются в точки $\zeta = -1, 1$, а точки E, A, E^*, A^* — в $\zeta = -e, -a, e, a$. Тогда мы имеем

$$\frac{dz}{d\zeta} = K\zeta\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^{\alpha}\frac{1}{(\zeta+a)^2(\zeta-a)^2}(\zeta-e)^2. \qquad (1)$$

При получении этой формулы было учтено, что, согласно принципу отображения, угол с вершиной C в плоскости z равен 2π, угол с вершиной



Р и с. 228.

в точке B равен $(1-\alpha)\pi$, в точке B^* угол равен $(1+\alpha)\pi$, в точках A_∞ и A^*_∞ углы равны $-\pi$, а в точках E и E^* равны π и 3π соответственно.

В плоскости w отображение является простым зеркальным отражением относительно прямой CD_∞ и поэтому

$$\frac{dw}{d\zeta} = -L\zeta\frac{(\zeta+e)(\zeta-e)}{(\zeta+a)^2(\zeta-a)^2}. \qquad (2)$$

Комплексная скорость имеет вид

$$v = -\frac{dw}{dz} = \frac{L}{K}\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right)^{\alpha}\frac{\zeta+e}{\zeta-e}. \qquad (3)$$

Константы K, L, a, e можно определить из следующих пяти условий:

(I) Если $BC = l$, то $le^{\alpha\pi i} = z_C - z_B = K\int_{-1}^{0}\zeta\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^{\alpha}\frac{(\zeta-e)^2}{(\zeta^2-a^2)^2}d\zeta$.

(II) Мы обозначаем через z_{A+} предельное значение z при приближении к точке A справа вдоль действительной оси плоскости ζ. Аналогично через z_{A-} обозначим предельное значение z при подходе к точке A слева. Тогда имеем, что $Im(z_{A-}) - Im(z_{A+}) = 0$, так как

$$Im(z_{A-}) - Im(z_{A+}) = Im(\pi ir),$$

где r — вычет функции $dz/d\zeta$ при $\zeta = -a$.

(III) Функция w вблизи точки C принимает действительные значения, так что величина L — действительная.

(IV) Скорость $v_D = -V$, где V — скорость на свободной линии тока.

(V) Скорость $v_{A_\infty} = U$, где U — скорость потока в бесконечности.

Эти условия позволяют выразить константы K, L, a, e через величины V, U, l; при этом все интегралы вычисляются в явном виде [1]). Величины V и U

[1]) Рассматриваемый здесь поток был исследован другим методом Гилбаргом и Роком (Gilbarg D., Rock D. H., Naval Ordnance Laboratory Memo. 8718, 1945).

[Рассматриваемая здесь схема течения была также предложена в работе Д. А. Эфроса «Гидродинамическая теория плоско-параллельного квазистационарного течения», *ДАН СССР*, **51**, № 14 (1946). Соответствующая задача для случая $\alpha = 1/2$ была решена М. И. Гуревичем в статье «Об одной схеме струйного обтекания плоской пластинки», Труды ЦАГИ, № 612 (1947). — *Прим. перев.*]

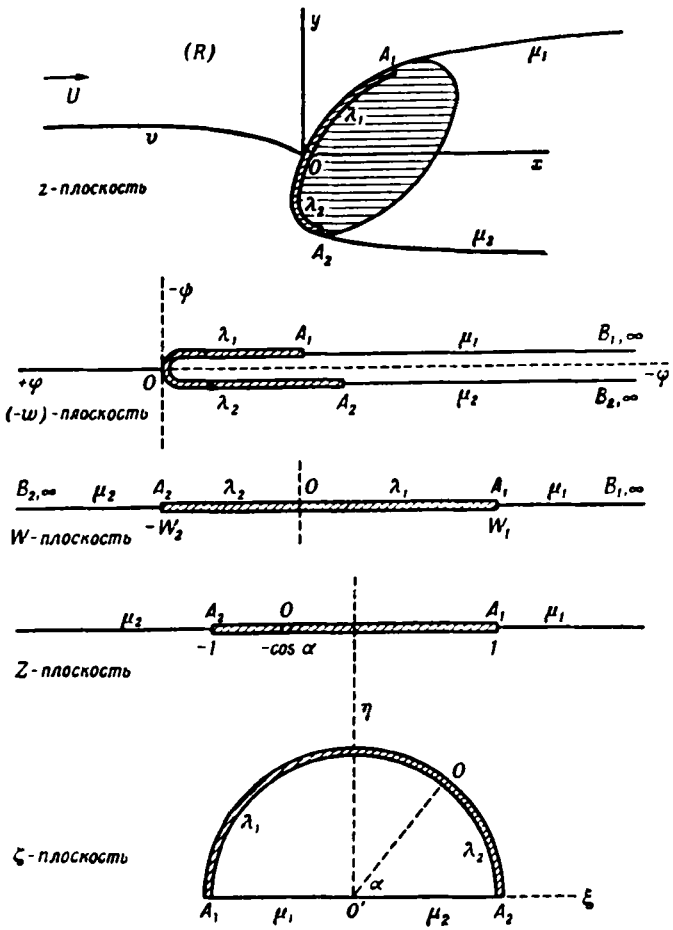
связаны соотношением

$$\Pi + \frac{1}{2}\varrho U^2 = p_c + \frac{1}{2}\varrho V^2,$$

где Π — давление в бесконечности, p_c — давление в каверне. Применив метод п. 12.34, находим, что коэффициент лобового сопротивления равен $\frac{1}{2}\pi K$.

12.40. Метод Леви-Чивита. Изложим теперь общий метод построения течения, обтекающего препятствие. Предполагается, что течение установившееся, безвихревое, двумерное и что каверна образуется за препятствием. Существенной чертой данного метода является отображение области плоскости w на *внутренность* единичного полукруга плоскости ζ, при котором свободные линии тока переходят в диаметр полукруга. Далее в методе используется функция $\omega(\zeta)$, которая уже была применена в теории струй (п. 11.11).

12.41. Отображение плоскости z. Предположим, что препятствие S расположено в бесконечном потоке, имеющем скорость U в бесконечности (рис. 229).



Р и с. 229.

Одна из линий тока v, идущая из бесконечности, подходит к препятствию по направлению его нормали (в критической точке O); здесь она разветвляется, следуя далее по препятствию вдоль дуг λ_1 и λ_2, и затем покидает тело в точках

A_1 и A_2, переходя в две свободные линии тока μ_1 и μ_2, между которыми расположена каверна. Положим в точке O $\varphi = 0$, $\psi = 0$, так что разветвляющейся линии тока будет соответствовать значение $\psi = 0$. Начало координат возьмем в точке O, ось x направим по потоку параллельно скорости потока в бесконечности. Область, занятую движущейся жидкостью, обозначим через R.

Для удобства здесь рассматривается диаграмма переменного $(-w)$ вместо w, которая и изображена на плоскости $(-w)$. Линии $\mu_1 + \lambda_1$, $\mu_2 + \lambda_2$ совпадают с положительной действительной осью; они, как и в других подобных случаях, изображены в виде двух слегка разделенных кривых. Область плоскости $(-w)$ отобразим на верхнюю половину вспомогательной плоскости W с помощью следующего преобразования, легко получаемого по теореме Шварца — Кристоффеля:

$$w = -W^2.$$

Точки, соответствующие точкам A_1 и A_2, обозначены через W_1 и $-W_2$. Для этих точек имеем $W_1 = \sqrt{(-\varphi_1)}$, $W_2 = \sqrt{(-\varphi_2)}$, где φ_1, φ_2 — значения потенциала скоростей в точках A_1, A_2.

Далее, верхнюю половину плоскости W отобразим на верхнюю половину плоскости Z, так что точке A_1 будет соответствовать значение $Z = 1$, а точке A_2 — значение $Z = -1$. Как легко убедиться, необходимое преобразование имеет вид

$$W = \frac{1}{2} Z (W_1 + W_2) + \frac{1}{2} (W_1 - W_2) = a (Z + \cos\alpha),$$

где

$$a = \frac{1}{2} (W_1 + W_2), \quad \cos\alpha = \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2}.$$

Заметим, что точка $W = 0$ соответствует значению $Z = -\cos\alpha$.

Отобразим теперь верхнюю половину плоскости Z на внутренность полукруга плоскости ζ, радиус которого равен единице, центром которого служит начало координат и диаметр которого направлен по оси x, как изображено на рис. 229.

Необходимое преобразование является преобразованием Жуковского

$$Z = -\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right).$$

Для того чтобы убедиться в этом, на дуге полукруга положим $\zeta = e^{i\chi}$; тогда $Z = -\cos\chi$. Следовательно, когда χ изменяется от 0 до π, точка ζ описывает полуокружность, а величина Z изменяется от -1 через значение $-\cos\alpha$ до 1. Дуга полукруга соответствует отрезку A_1A_2 действительной оси плоскости Z; дуга A_1O соответствует линии λ_1, а дуга A_2O — линии λ_2. С другой стороны, когда ζ изменяется от -1 через 0 до $+1$, величина Z изменяется от 1 до ∞ и затем от $-\infty$ до -1. Таким образом, радиусы $O'A_1$, $O'A_2$ будут соответствовать линиям μ_1, μ_2. Так как при конформном отображении направления обхода не меняются, то верхняя полуплоскость Z перейдет во внутренность полукруга.

Исключая величины Z и W, получаем следующую формулу:

$$w = -a^2\left[\cos\alpha - \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right]^2,$$

которая дает конформное отображение области плоскости w на внутренность полукруга. Кроме того, критическая точка O соответствует значению $\zeta = e^{i\alpha}$.

12.42. Линии тока. Для функции тока имеем

$$2i\psi = w - \bar{w} = a^2\left[\cos\alpha - \frac{1}{2}\left(\bar{\zeta} + \frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\right]^2 - a^2\left[\cos\alpha - \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{4}a^2\left(4\cos\alpha - \zeta - \bar{\zeta} - \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\left(\zeta - \bar{\zeta} + \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\bar{\zeta}}\right).$$

Кроме того,

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \frac{1}{\zeta} = \frac{\xi - i\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Отсюда находим, что уравнение линии тока $\psi = 0$ имеет вид

$$\{2\cos\alpha\,(\xi^2 + \eta^2) - \xi\,(\xi^2 + \eta^2 + 1)\}\;\eta\,(\xi^2 + \eta^2 - 1) = 0.$$

Рассмотрим подробнее это уравнение. Так как линия $\eta = 0$ соответствует диаметру полукруга, а линия $\xi^2 + \eta^2 - 1 = 0$ — его окружности, то составная линия является разветвляющейся линией тока; уравнение оставшейся кривой дает кубическую кривую

$$\xi\,(\xi^2 + \eta^2 + 1) - 2\cos\alpha\,(\xi^2 + \eta^2) = 0,$$

которая проходит через критическую точку $O(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ и касается оси η в начале координат. Мы рассматриваем только ту часть этой кривой, которая расположена внутри полукруга. Эта кривая изображена на рис. 230; вид линий был определен по методу п. 6.23.

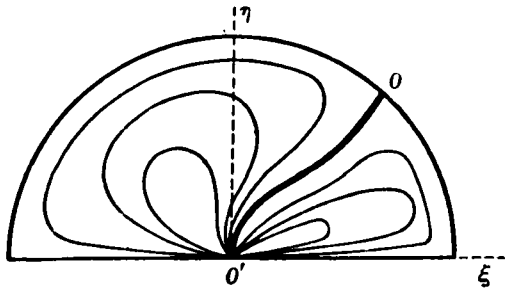


Рис. 230.

12.43. Функция $\omega(\zeta)$. Функция $\omega(\zeta)$ определяется уравнением

$$e^{-i\omega(\zeta)} = -\frac{1}{U}\frac{dw}{dz} = \frac{v}{U} = \frac{qe^{-i\theta}}{U}.$$

Таким образом, имеем

$$\omega(\zeta) = \theta + i\ln\frac{q}{U} = \theta + i\tau.$$

Следовательно, $\theta(\zeta)$ — действительная часть функции $\omega(\zeta)$ — определяет угол между вектором скорости жидкости и осью x в плоскости z, а мнимая часть τ определяет величину скорости, так как

$$q = Ue^{\tau}.$$

На свободных линиях тока $q = U$, поэтому $\tau = 0$.

Таким образом, функция $\omega(\zeta)$ на линиях μ_1, μ_2, т. е. на действительной оси плоскости ζ, принимает действительные значения. Кроме того, $\theta = 0$ в бесконечно удаленной точке плоскости z и поэтому

$$\omega(0) = 0.$$

Функция $\omega(\zeta)$ должна быть аналитической функцией во всех точках внутри полукруга, так как они соответствуют области R плоскости z, где движение непрерывно. Кроме того, мы видели, что функция $\omega(\zeta)$ принимает действительное значение на действительной оси плоскости ζ. Поэтому функцию $\omega(\zeta)$ можно продолжить (см. п. 5.53) на вторую половину единичного круга, давая этой функции значения $\omega(\bar{\zeta})$ в точках $\bar{\zeta}$, и, следова-

тельно, в симметричных точках значения не изменяются. Изменяется только знак у величины τ. Функция $\omega(\zeta)$, как мы теперь покажем, определяет все свойства движения.

12.44. Фиксированные линии тока. Рассмотрим линии тока λ_1, λ_2 (см. рис. 229), совпадающие с границей обтекаемого тела. Они изображаются дугами A_1O, A_2O в плоскости ζ. Теперь из определения функции $\omega(\zeta)$ и из выражения функции w через ζ (п. 12.41) мы получаем

$$U\,dz = -e^{i\omega}\,dw = \frac{1}{2}a^2e^{i\omega}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}-2\cos\alpha\right)\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}. \qquad (1)$$

Далее, на дуге A_1O мы имеем

$$\zeta = e^{i\chi}.$$

Подставим это выражение в формулу (1) и проинтегрируем по χ от $\chi=\alpha$ до некоторого значения χ на дуге OA_1; учитывая, что точка O соответствует значению $z=0$, получаем в результате

$$Uz = -2a^2\int_{\alpha}^{\chi} e^{i\omega}(\cos\chi-\cos\alpha)\sin\chi\,d\chi. \qquad (2)$$

Сравнение действительных и мнимых частей в этой формуле дает

$$x = -\frac{2a^2}{U}\int_{\alpha}^{\chi} e^{-\tau}\cos\theta\,(\cos\chi-\cos\alpha)\sin\chi\,d\chi,$$

$$y = -\frac{2a^2}{U}\int_{\alpha}^{\chi} e^{-\tau}\sin\theta\,(\cos\chi-\cos\alpha)\sin\chi\,d\chi.$$

Полученные уравнения представляют собой параметрические уравнения омываемой стенки λ_2, если изменять χ от 0 до α, и стенки λ_1, если брать значения χ в промежутке от α до π.

В частности, если в формуле (2) положить $\chi=0$, то получим значение z_2, соответствующее точке A_2.

Если через $d\lambda$ обозначить элемент дуги λ_1 или λ_2, то имеем

$$U\,d\lambda = U\,|\,dz\,| = 2a^2e^{-\tau}\,|\cos\chi-\cos\alpha\,|\sin\chi\,d\chi$$

и поэтому

$$\lambda = \frac{2a^2}{U}\int_{0,\pi}^{\alpha} e^{-\tau}(\cos\chi-\cos\alpha)\sin\chi\,d\chi. \qquad (3)$$

Здесь нижний предел 0 соответствует дуге λ_2, а нижний предел π — дуге λ_1, так как $d\chi$ является отрицательным при изменении χ от π до α, то и разность $\cos\chi-\cos\alpha$ будет того же знака.

Радиус кривизны r омываемой стенки выражается формулой

$$r = \frac{d\lambda}{d\theta} = \frac{2a^2e^{-\tau}}{U}\,|\cos\chi-\cos\alpha\,|\sin\chi\,\frac{d\chi}{d\theta}. \qquad (4)$$

12.45. Свободные линии тока. Параметрические уравнения свободной линии тока μ_2 получаются интегрированием уравнения (1) п. 12.44 по ζ от $\zeta=1$ до $\zeta=\xi$, где ξ — точка на дуге $O'A_2$. При этом надо учитывать, что в точ-

ке A_2 величина z принимает значение z_2, найденное в п. 12.44. Таким образом, получим

$$U(z-z_2)=\frac{a^2}{2}\int_1^{\xi} e^{i\omega}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}-2\cos\alpha\right)\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta},$$

где ζ — действительная величина. Сравнение действительных и мнимых частей в этом уравнении дает искомый результат.

Комплексная скорость задается выражением

$$v=Ue^{-i\omega}.$$

Давление. Воспользовавшись уравнением для давления и обозначив через Π давление в каверне, получим

$$\frac{p}{\varrho}+\frac{1}{2}q^2=\frac{\Pi}{\varrho}+\frac{1}{2}U^2.$$

Таким образом,

$$p-\Pi=\frac{1}{2}\varrho(U^2-q^2)=\frac{1}{2}\varrho U^2(1-e^{2\tau}).$$

Эта формула выражает гидродинамическое давление.

12.46. Лобовое сопротивление, подъемная сила и момент. Пусть результирующая сила, действующая со стороны жидкости, имеет компоненты X, Y вдоль осей координат, имеющих начало в точке O плоскости z. Тогда, согласно теореме Чаплыгина—Блазиуса, имеем

$$X+iY=i\int_{(A_1OA_2)}(p-\Pi)\,dz=\frac{i}{2}\varrho U^2\int_{(A_1OA_2)}(1-e^{2\tau})\,dz.$$

Так как $U\,dz=-e^{i\omega(\zeta)}\,dw$, то отсюда получаем

$$X+iY=\frac{i}{2}\varrho U\int_{(A_2OA_1)}e^{i\omega(\zeta)}\frac{dw}{d\zeta}\,d\zeta-\frac{i}{2}\varrho U\int_{(A_2OA_1)}e^{i\omega(\zeta)+2\tau}\frac{dw}{d\zeta}\,d\zeta.$$

Здесь интеграл берется по дуге полукруга в плоскости ζ.

Рассмотрим теперь аналитическое продолжение (см. п. 5.53) функции $\omega(\zeta)$ на всю область внутри круга Γ, изображенного на рис. 231.

Имеем

$$i\omega(\bar{\zeta})=i(\theta-i\tau)=i(\theta+i\tau)+2\tau=i\omega(\zeta)+2\tau.$$

С другой стороны, величина w принимает действительные значения, когда ζ описывает дугу A_1OA_2 (см. рис. 229) и поэтому $dw=d\bar{w}$. Кроме того, когда ζ описывает дугу A_1OA_2 окружности круга Γ против часовой стрелки, то $\bar{\zeta}$ описывает дугу $A_1P'A_2$ по часовой стрелке. Таким образом, мы имеем

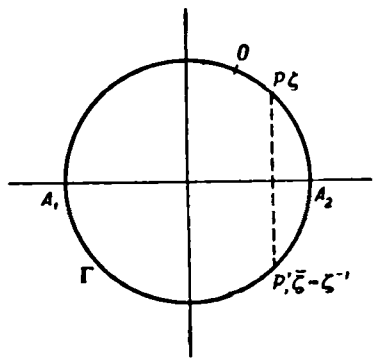


Рис. 231.

$$X+iY=\frac{i}{2}\varrho U\int_{(A_2OA_1)}e^{i\omega(\zeta)}\frac{dw}{d\zeta}\,d\zeta-\frac{i}{2}\varrho U\int_{(A_2P'A_1)}e^{i\omega(\bar{\zeta})}\frac{d\bar{w}}{d\bar{\zeta}}\,d\bar{\zeta}=$$

$$=\frac{i}{2}\varrho U\int_{(\Gamma)}e^{i\omega(\zeta)}\frac{dw}{d\zeta}\,d\zeta.$$

Следовательно, остается вычислить вычет подинтегральной функции относительно единственного внутри круга Γ полюса; этот полюс находится в точке $\zeta = 0$.

Применяя разложение в ряд Маклорена и учитывая, что $\omega(0) = 0$ (п. 12.43), получаем

$$e^{i\omega(\zeta)} = 1 + i\zeta\omega'(0) + \frac{1}{2}\zeta^2[i\omega''(0) - (\omega'(0))^2] + \ldots.$$

Кроме того,

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{a^2}{2}\left(-\zeta - \frac{2}{\zeta^2}\cos\alpha + \frac{1}{\zeta^3} + 2\cos\alpha\right).$$

Перемножив эти два выражения и выделив в результате коэффициент при $1/\zeta$, находим вычет в следующем виде:

$$\frac{1}{2}a^2\left\{\frac{1}{2}i\omega''(0) - 2i\cos\alpha\omega'(0) - \frac{1}{2}[\omega'(0)]^2\right\}.$$

Таким образом, применяя теорему о вычетах, мы имеем

$$X + iY = \frac{1}{4}\pi\rho U a^2(\omega'(0))^2 + \frac{1}{4}\pi\rho U a^2 i[4\omega'(0)\cos\alpha - \omega''(0)],$$

отсюда

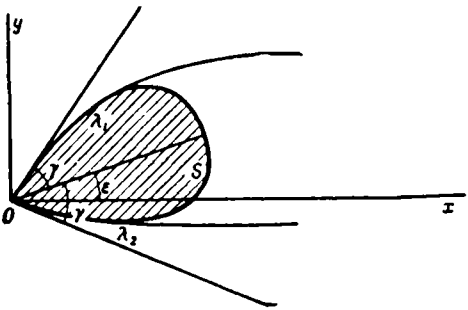
$$X = \frac{1}{4}\pi\rho U a^2[\omega'(0)]^2, \quad Y = \frac{1}{4}\pi\rho U a^2[4\omega'(0)\cos\alpha - \omega''(0)],$$

где X — лобовое сопротивление, Y — подъемная сила. Эти изящные результаты принадлежат Леви — Чивита.

Момент M действующих сил относительно критической точки O находится с помощью аналогичных вычислений и равняется действительной части следующего интеграла:

$$M + iN = \frac{1}{2}\rho U \int\limits_{(A_2OA_1)} z\left\{e^{-i\omega(\zeta)} - e^{-i\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\right\}\frac{dw}{d\zeta}\,d\zeta,$$

который берется по полуокружности A_2OA_1 в плоскости ζ и который должен быть вычислен в каждом частном случае. Знание величин X, Y, M позволяет методами статики найти одну силу, эквивалентную действию жидкости на препятствие. Эта сила всегда существует, если только X и Y не равны нулю.



Р и с. 232.

12.47. Точка разрыва функции $\omega(\zeta)$. Функция $\omega(\zeta) = \theta + i\tau$ имеет разрыв в критической точке O, так как ее действительная часть θ имеет в этой точке два значения, соответствующие двум направлениям потока вдоль касательной в точке O; кроме того, $\tau \to -\infty$ при приближении к точке O, так как точка O является критической и скорость в этой точке обращается в нуль.

Пусть в точке O касательные к контуру препятствия образуют между собой угол 2γ, как это изображено на рис. 232, и пусть внутренняя биссектриса этого угла составляет угол ε с осью x.

Если точка O является обыкновенной точкой контура, то $2\gamma=\pi$ и касательные служат частями одной линии. Если контур симметричен относительно оси x, то $\varepsilon=0$.

Если приближаться к точке O вдоль линии λ_1, то $\theta\to\gamma+\varepsilon$; но если приближаться к точке O вдоль λ_2, то $\theta\to-\gamma+\varepsilon$. Кроме того, когда $\zeta\to e^{i\alpha}$, функция $\omega(\zeta)$ стремится к бесконечности; то же происходит при $\zeta\to e^{-i\alpha}$.

Единственной функцией, удовлетворяющей этим условиям, является функция

$$\omega_0(\zeta)=\varepsilon-\gamma+\frac{2i\gamma}{\pi}\ln\frac{\zeta-e^{i\alpha}}{1-\zeta e^{i\alpha}}\ .$$

Для доказательства этого рассмотрим поведение следующей функции:

$$f(\zeta)=\frac{\zeta-e^{i\alpha}}{\zeta-e^{-i\alpha}},$$

когда точка ζ движется внутри или вдоль полуокружности в плоскости ζ. Если мы определим логарифм так, чтобы $\ln f(0)=2i(\alpha-\pi)$, то функция

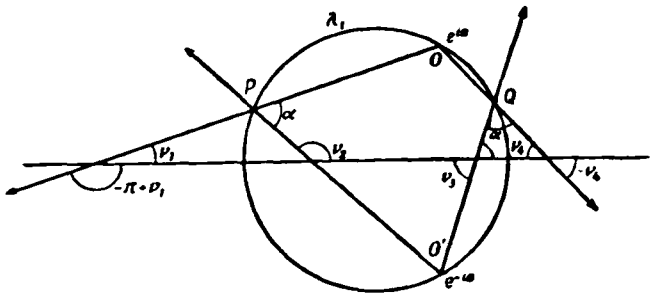


Рис. 233.

$\ln f(\zeta)$ будет однозначной и аналитической во всех точках внутри полукруга.

Далее, рассмотрим точку ζ, совпадающую с точкой P на дуге λ_1 (рис. 233). Мы имеем

$$\arg f(\zeta)=\arg(\zeta-e^{i\alpha})-\arg(\zeta-e^{-i\alpha})=$$
$$=-\pi+\nu_1-\nu_2=-\pi-(\pi-\alpha)=-2\pi+\alpha.$$

Если значение ζ берется в точке Q на дуге λ_2, то

$$\arg f(\zeta)=-\nu_4-\nu_3=-\pi+\alpha.$$

Таким образом, $\arg f(\zeta)$ имеет постоянное значение $\alpha-2\pi$ на линии λ_1 и постоянное значение $\alpha-\pi$ на линии λ_2. Если величина ζ проходит через точку O, переходя с линии λ_2 на линию λ_1, то $\arg f(\zeta)$ убывает на величину π. Далее, имеем

$$\omega_0(\zeta)=\varepsilon-\gamma+\frac{2i\gamma}{\pi}\ln(-e^{-i\alpha})\frac{\zeta-e^{i\alpha}}{\zeta-e^{-i\alpha}}=$$
$$=\varepsilon-\gamma+\frac{2i\gamma}{\pi}\left\{\ln(-e^{-i\alpha})+\ln f(\zeta)\right\}.$$

Но $\ln(-e^{-i\alpha}) = i(\pi - \alpha)$. Поэтому, если точка ζ находится на линии λ_2, то

$$\theta = \varepsilon - \gamma + \frac{2i\gamma}{\pi}\{i(\pi - \alpha) + i(\alpha - \pi)\} = \varepsilon - \gamma,$$

а если точка ζ находится на линии λ_1, то

$$\theta = \varepsilon - \gamma + \frac{2i\gamma}{\pi}\{i(\pi - \alpha) + i(\alpha - 2\pi)\} = \varepsilon + \gamma.$$

Кроме того, очевидно, что $\omega_0(\zeta) \to \infty$, когда $\zeta \to e^{i\alpha}$ или когда $\zeta \to e^{-i\alpha}$. Таким образом, функция $\omega_0(\zeta)$ обладает всеми требуемыми свойствами. Кроме того, функция $\omega_0(\zeta)$ принимает действительные значения при действительных значениях ζ, и поэтому ее можно продолжить на нижнюю половину круга с помощью зеркального отражения. Отметим также, что

$$\omega_0(0) = \varepsilon - \frac{2\gamma}{\pi}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, мы выделили особенности функции $\omega(\zeta)$ в точке O и в ее отображении O'. Если положим

$$\omega(\zeta) = \omega_0(\zeta) + \Omega(\zeta),$$

где

$$\Omega(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots,$$

то получим общее решение задачи о струйном обтекании препятствия. При этом функция $\omega(\zeta)$ имеет один разрыв на полукруге плоскости ζ. Задавая функцию $\Omega(\zeta)$, можно получить те контуры, для которых функции $\Omega(\zeta)$ будут давать решение задачи. Обратная задача определения функции $\omega(\zeta)$ по заданному контуру является, конечно, более трудной и лишь в немногих случаях она была решена полностью[1]).

12.50. Решение для случая $\Omega(\zeta) = 0$. В этом случае, согласно п. 12.47, имеем

$$\omega(\zeta) = \omega_0(\zeta) = \varepsilon - \gamma + \frac{2i\gamma}{\pi}\ln\frac{\zeta - e^{i\alpha}}{1 - \zeta e^{i\alpha}}. \qquad (1)$$

Так как в силу п. 12.43 $\omega(0) = 0$, для определения α получаем

$$\varepsilon = \frac{2\gamma}{\pi}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right), \quad \alpha = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{\gamma}\right). \qquad (2)$$

Кроме того, угол θ имеет постоянное значение вдоль λ_1 и λ_2. Следовательно, функция $\omega(\zeta)$ соответствует потоку, обтекающему по схеме

---

[1]) Задача о симметричном обтекании дуги круга с отрывом струй впервые была точно решена А. И. Некрасовым в 1921 г. в его работе «О прерывном теченни жидкости в двух измерениях вокруг препятствия в форме дуги круга», Собр. соч., т. I, стр. 52—69, Изд-во АН СССР, М., 1961.

Обзор основных работ, посвященных отысканию обтекания с отрывом струй заданной криволинейной дуги, можно найти в книгах: Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, М., 1950; Биркгоф Г., Сарантонелло Э., Струи, следы и каверны (готовится русский перевод в ИЛ, М.); Гуревич М. И., Теория струй идеальной жидкости, Физматгиз, М., 1961.

Систематическое обобщение метода Кирхгофа для решения весьма широкого класса задач в случае препятствий с прямолинейными стенками дано в известной монографии: Жуковский Н. Е., Видоизменение метода Кирхгофа, Избр. соч., т. I, Гостехиздат, М., 1948. — *Прим. перев.*

Кирхгофа пластинку, согнутую под углом 2γ, как это изображено на рис. 234.

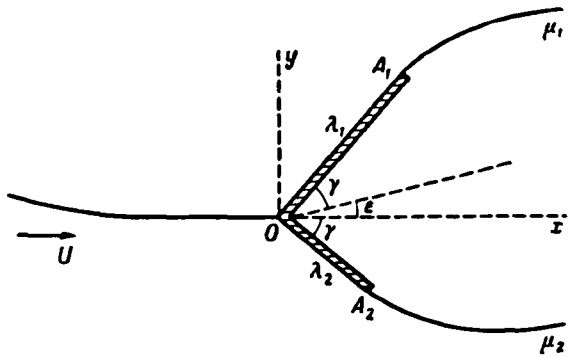
Так как

$$e^{i\chi}-e^{i\alpha}=e^{\frac{1}{2}i(\chi+\alpha)}\left(e^{\frac{1}{2}i(\chi-\alpha)}-e^{\frac{-1}{2}i(\chi-\alpha)}\right)=2ie^{\frac{1}{2}i(\chi+\alpha)}\sin\frac{1}{2}(\chi-\alpha),$$

из формулы (1) получим мнимую часть функции $\omega(\zeta)$ в виде

$$\tau=\frac{\gamma}{\pi}\ln\left(\frac{\sin^2\frac{1}{2}(\chi-\alpha)}{\sin^2\frac{1}{2}(\chi+\alpha)}\right).$$

Подставляя это выражение в формулу (3) п. 12.44, получаем длины отрезков OA_1, OA_2, отсюда заключаем, что эти длины не произвольны. Это



Р и с. 234.

означает, что критическая точка расположена на сгибе пластинки только тогда, когда пластинка ориентирована соответствующим образом к потоку. Иначе на сгибе произойдет резкое изменение направления скорости; физически приемлемые решения можно получить путем изменения положения каверны так, чтобы она охватывала или одну часть пластинки, или обе части.

Следует отметить, что небольшое изменение угла γ может вызвать сильные колебания положения критической точки и соответственно вибрации пластинки.

Для вычисления подъемной силы находим

$$\omega'(\zeta)=\frac{2i\gamma}{\pi}\left\{\frac{1}{\zeta-e^{i\alpha}}+\frac{e^{i\alpha}}{1-\zeta e^{i\alpha}}\right\},$$

$$\omega''(\zeta)=-\frac{2i\gamma}{\pi}\left\{\frac{1}{(\zeta-e^{i\alpha})^2}-\frac{e^{2i\alpha}}{(1-\zeta e^{i\alpha})^2}\right\}.$$

Отсюда получаем

$$\omega'(0)=-\frac{4\gamma}{\pi}\sin\alpha,\qquad \omega''(0)=-\frac{4\gamma}{\pi}\sin 2\alpha.$$

Здесь величина α задается формулой (2).

Применяя формулы п. 12.46 для нахождения лобового сопротивления и подъемной силы, получим

$$X=\frac{4a^2\rho U\gamma^2}{\pi}\cos^2\frac{\pi\varepsilon}{2\gamma},\qquad Y=a^2\rho U\gamma\sin\frac{\pi\varepsilon}{\gamma}.$$

12.51. Удар потока о пластинку. Если положить $2\gamma=\pi$, то изгиб пластинки исчезает; мы получаем случай потока, ударяющегося о неподвижную пластинку, как это изображено на рис. 213. Тогда из формулы (2) п. 12.50 получаем $\alpha=\varepsilon+{}^1/_2\pi$, так что α является углом, под которым пластинка наклонена к асимптотическому направлению потока в бесконечности. Формулы п. 12.50 для лобового сопротивления и подъемной силы дают тогда результаты, уже полученные в п. 12.26[1]). Когда $\alpha={}^1/_2\pi$, мы получаем результаты п. 12.21.

12.52. Симметричный случай. Если в задаче п. 12.50 положить $\varepsilon=0$, то получаем симметричный случай прямого удара о пластинку, согнутую посередине (см. рис. 235). Эта задача может служить моделью струйного

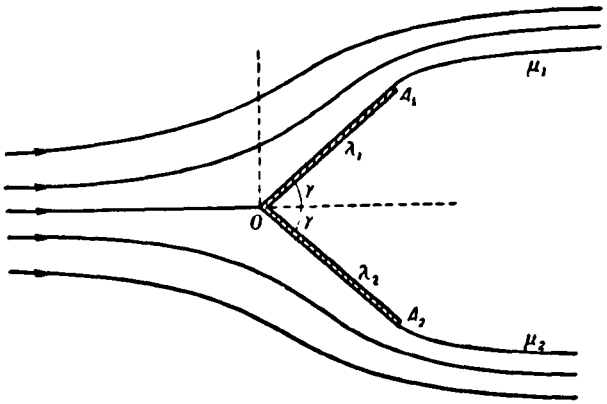


Рис. 235.

обтекания корабля с острым носом. В случае $\alpha={}^1/_2\pi$ лобовое сопротивление, согласно п. 12.50, равно $4a^2\varrho U\gamma^2/\pi$, а подъемная сила обращается в нуль. Указанная величина содержит константу a, которую можно выразить через ${}^1/_2l$ — длину отрезка OA_1 следующим образом. Так как $\varepsilon=0$, то из формулы (1) п. 12.50 имеем

$$\omega(\zeta)=\theta+i\tau=\frac{2i\gamma}{\pi}\ln\frac{1+i\zeta}{1-i\zeta}.$$

Отсюда, положив

$$t=\operatorname{tg}^2\left(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\chi\right),\quad \zeta=e^{i\chi},$$

получим

$$\tau=\frac{\gamma}{\pi}\ln t,$$

поэтому формула (3) п. 12.44 дает

$$\frac{l}{2}=\frac{2a^2}{U}\int_0^{1/2\pi} t^{-\frac{\gamma}{\pi}}\cos\chi\sin\chi\,d\chi=\frac{4a^2}{U}\int_0^1 t^{-\frac{\gamma}{\pi}}\left\{-\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{2}{(1+t)^3}\right\}dt.$$

Обозначая величину определенного интеграла через f, получаем

$$8a^2=Ul/f,$$

и, следовательно, лобовое сопротивление равно ${}^1/_2\varrho U^2l\gamma^2/(\pi f)$.

---

[1]) Для проверки этого утверждения надо выразить величину a^2 через скорость U и длину пластинки l. Детали вычислений объяснены в п. 12.52.

Для вычисления f полагаем

$$f_n(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{(1+t)^n}\, dt.$$

Тогда

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{x}{2}\right),$$

где $\Psi(x)$ — логарифмическая производная от Г-функции[1]).

Для функции f имеем

$$f = 2f_3\left(1 - \frac{\gamma}{\pi}\right) - f_2\left(1 - \frac{\gamma}{\pi}\right).$$

Далее легко установить следующую рекуррентную формулу:

$$f_{n+1}(x) - \frac{n-x}{n} f_n(x) = \frac{1}{n2^n}.$$

Пользуясь этой формулой, получаем

$$f = \frac{1}{4} + \frac{\gamma}{2\pi} + \frac{\gamma^2}{\pi^2} f_1\left(1 - \frac{\gamma}{\pi}\right),$$

и величину f можно вычислить, пользуясь таблицами[2]) функции Ψ.

ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ 12

1. Бесконечно широкий поток со скоростью U в бесконечности, параллельной прямолинейному берегу, ударяется об уступ высоты h, перпендикулярный к берегу. Найти свободные линии тока и определить силу, с которой поток действует на уступ.

2. Поток конечной ширины c имеет скорость в бесконечности с проекциями

$$(-V\cos\alpha,\ -V\sin\alpha).$$

Поток ударяется о плоский неограниченный барьер $y=0$. Показать, что двумерное безвихревое течение в струе при отсутствии массовых сил определяется формулами

$$\frac{dw}{dt} = \frac{A(t-\lambda)}{(t^2-1)},\quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{B}{(t-\lambda)(t^2-1)^{1/2}},\quad \Omega = \ln\left(-V\frac{dz}{dw}\right),$$

где $-1 < \lambda < +1$.

Показать, что поток разбивается на две ветви с наибольшими толщинами, равными $c\cos^2\frac{\alpha}{2}$ и $c\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Предполагая, что давление на барьер со стороны, противоположной потоку, равно давлению на свободных линиях тока, показать, что силы, действующие на части барьера по обе стороны от точки с нулевой скоростью, относятся как $(\pi-\alpha):\alpha$.

3. Показать, что в случае, когда поток ударяется о пластинку под углом α, критическая точка делит пластинку на две части в отношении, равном

$$\frac{2+2\cos\alpha+(\pi-\alpha)\sin\alpha+2\cos\alpha\sin^2\alpha}{2-2\cos\alpha+\alpha\sin\alpha-2\cos\alpha\sin^2\alpha}.$$

Отсюда вывести, что критическая точка всегда находится между серединой пластинки и ее концом, более удаленным по отношению к набегающему потоку.

---

[1]) Milne-Thomson L. M., Calculus of Finite Differences, Lnd., 1959, § 9.3.

[2]) British Association Tables, vol. I. Lnd., 1931 (на русском языке см., например, Лебедев А. В., Федорова Р. М., Справочник по математическим таблицам, Изд. АН СССР, 1956. — *Прим. ред.*).

4. Показать, что преобразования

$$w=-\zeta^2,\quad \frac{dQ}{d\zeta}=\frac{-i\,(\varkappa\varkappa')^{1/4}}{\zeta\,(\zeta-\sqrt{\varkappa'})^{1/2}\,(\zeta+\sqrt{\varkappa})^{1/2}}$$

приводят к решению задачи о пластинке, расположенной наклонно в потоке жидкости, ограниченном с обеих сторон свободными линиями тока.

Если $2b$ — ширина пластинки, α — угол ее наклона к потоку, то показать, что выполняются соотношения

$$\varkappa=\frac{2bV}{1+\frac{\pi}{4}\sin\alpha}\cos^4\frac{\alpha}{2},\quad \varkappa'=\frac{2bV}{1+\frac{\pi}{4}\sin\alpha}\sin^4\frac{\alpha}{2},$$

где V — скорость потока в бесконечности.

5. Жидкость из области $y=+\infty$ течет между двумя плоскими стенками $x=\pm a$, $y>b$ и симметрично ударяется о плоскость $y=0$. Объяснить, как можно найти вид свободных линий тока, и показать, что если d — наибольшая ширина потока, ударяющегося о плоскость $y=0$, то

$$b-d=\frac{(a^2+d^2)}{\pi a}\ln\left(\frac{a+d}{a-d}\right).$$

6. Поток конечной ширины ударяется о бесконечное плоское препятствие; предполагается, что движение двумерное и поток ограничен кривыми, вдоль которых величина скорости постоянна. Пусть скорость невозмущенного потока в бесконечности составляет угол $\frac{1}{2}\pi-\alpha$ с препятствием. Показать, что расстояние от критической точки на поверхности препятствия до границы потока так относится к ширине невозмущенного потока, как

$$\left[\frac{\pi}{2}(1+\sin\alpha)+\alpha\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha\ln(2\cos\alpha)+2\cos\alpha\,\mathrm{Arth}\left(\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)\right]:\pi.$$

Показать, что результирующие величины давлений, действующих на каждую из двух частей препятствия, разделенных критической точкой, относятся как $(\pi+2\alpha):(\pi-2\alpha)$.

7. Поток несжимаемой жидкости, имеющий в бесконечности скорость U, ударяется симметрично о согнутую пластинку. Поперечное сечение пластинки состоит из двух прямолинейных отрезков, образующих прямой угол. Длина каждого отрезка равна a. Поток омывает пластинку с выпуклой стороны, а за пластинкой с внутренней стороны ограничен двумя свободными линиями тока. Показать, что результирующая величина давления на пластинку равна $\sqrt{2}\,\pi\rho aU^2/\{6\sqrt{2}+\pi+2\ln(\sqrt{2}-1)\}$ и что в естественных координатах уравнение каждой из свободных линий тока можно представить в виде $s=A\,\mathrm{ctg}^2\,2\theta$, где A — константа; s — длина дуги, измеряемая от края пластинки, и θ — угол, образуемый касательной свободной линии тока с осью симметрии.

8. Перпендикулярная к плоскости xy согнутая пластинка, поперечное сечение которой состоит из двух прямолинейных отрезков AB и BC, образующих прямой угол между собой, помещена в поток несжимаемой жидкости. Поток имеет в бесконечности единичную скорость, направленную в сторону отрицательной оси Ox, так что центральная линия тока является прямой, совпадающей с осью Ox, встречающей пластинку в точке B с выпуклой стороны и делящей пополам угол ABC. Применяя обычные обозначения, показать, что всем условиям течения можно удовлетворить, положив

$$\Omega=\ln\frac{\sqrt{(t-a)(c-b)}+\sqrt{(c-t)(b-a)}}{\sqrt{(t-b)(c-a)}},\quad w=(t-b)^2.$$

Выбирая масштаб измерений так, чтобы $c-a=1$, и полагая $c-t=\cos^2 U$, показать, что справедливы равенства

$$L=2\int_B^{\pi/2}\sin^{3/2}(U+B)\sin^{1/2}(U-B)\sin 2U\,dU,$$

$$P=2\int_B^{\pi/2}\sin^{3/2}(U-B)\sin^{1/2}(U+B)\sin 2U\,dU,$$

где B — значение U при $t=b$; L — длина половины пластинки; P — результирующая величина давления на пластинку.

9. Доказать, что в случае потока, изображенного на рис. 234, длина омываемой части пластинки λ_1 задается формулой

$$\lambda_1 = k \int_{\pi}^{\alpha} \left(\frac{\sin \frac{\chi - \alpha}{2}}{\sin \frac{\chi + \alpha}{2}} \right)^{-\frac{2\gamma}{\pi}} (\cos \chi - \cos \alpha) \sin \chi \, d\chi,$$

а формула для части пластинки λ_2 получается путем замены на нуль нижнего предела в последнем интеграле. Исходя из этого, показать, что если длина λ_1 задана, то имеется только одно значение длины λ_2, при котором рассматриваемое здесь течение возможно.

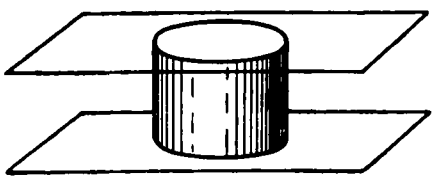
Глава 13

ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ВИХРИ

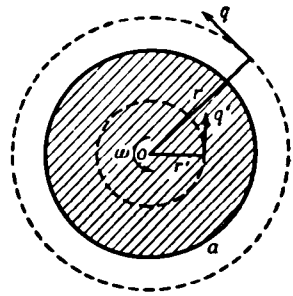
13.00. В этой главе рассматриваются некоторые вопросы двумерного вихревого движения жидкости. При таком движении вектор вихря направлен всегда перпендикулярно плоскости движения. Мы, как обычно, рассматриваем слой жидкости единичной толщины, т. е. предполагаем, что жидкость ограничена двумя плоскостями, параллельными плоскости движения и отстоящими друг от друга на расстояние, равное единице длины. Вихревыми линиями являются прямые, параллельные друг другу; все вихревые трубки являются цилиндрами, образующие которых перпендикулярны плоскости движения. Такие вихри называют *прямолинейными вихрями*. Как и прежде, мы будем использовать понятия плоской геометрии.

13.10. Круговой вихрь. Пусть в безграничной жидкости имеется цилиндрическая вихревая трубка, поперечным сечением которой является круг радиуса a.

Сечение вихря плоскостью движения представляет собой круг, следовательно, такое течение можно рассматривать как *круговой вихрь* (рис. 236).



Р и с. 236.



Р и с. 237.

Мы будем предполагать, что завихренность в области, ограниченной окружностью этого круга, имеет постоянную величину ω. Вне окружности завихренность равна нулю. Проведем окружности радиусов r' и r, концентрические с той, которая ограничивает вихрь, причем $r' < a < r$ (рис. 237). Пусть q' и q — скорости движения жидкости на окружностях с радиусами r' и r. В силу симметрии ясно, что скорости любых точек на окружности одинаковы по величине и направлены по касательным к этой окружности. В противном случае радиальные составляющие скоростей давали бы расход через окружность, а в ее центре O должен был бы быть источник или сток. Аналогично этому скорость в любой точке на окружности r направлена по касательной к ней.

Применим к этим окружностям теорему Стокса о циркуляции (п. 2.50). В результате получим равенства

$$\int q'\,ds = \omega\pi r'^2, \quad \text{если} \quad r' < a,$$

$$\int q\,ds = \omega\pi a^2, \quad \text{если} \quad r > a.$$

Так как величины q' и q постоянны на соответствующих окружностях, то мы получаем

$$2\pi r'q' = \omega\pi r'^2, \quad 2\pi rq = \omega\pi a^2.$$

Отсюда следует, что $q' = \frac{1}{2}\omega r'$ при $r' < a$; $q = \frac{1}{2}\omega\frac{a}{r}$ при $r > a$. Когда $r' = r = a$, мы имеем $q' = q = \frac{1}{2}a\omega$, т. е. скорость непрерывно меняется при переходе через окружность радиуса a.

Таким образом, оказывается, что описанный нами вихрь образует некоторое *поле скоростей*. Это поле скоростей, вызванное вихрем, называется *индуцированным полем скоростей*, а скорость любой точки поля называется *индуцированной скоростью*.

Обычно скорость в некоторой точке поля называют *скоростью, индуцированной вихрем*, но это название следует понимать как удобное сокращение следующего более полного утверждения: если бы в жидкости существовал только один этот вихрь, то скорость в точке имела бы такую величину. В этом смысле, когда существует несколько вихрей, поле каждого вихря будет вносить свой вклад в величину скорости в рассматриваемой точке.

Возвращаясь к круговому вихрю, рассмотрим точку, расположенную вне вихря, причем радиус-вектор этой точки, проведенной из центра вихря, имеет величину r. Тогда оказывается, что индуцированная скорость обратно пропорциональна r и перпендикулярна радиус-вектору. Таким образом, индуцированная скорость стремится к нулю, когда модуль радиус-вектора точки стремится к бесконечности.

Что касается жидкости внутри вихря, то ее скорость пропорциональна r и, следовательно, жидкость внутри вихря движется, как твердое тело, вращающееся вокруг точки O с угловой скоростью $^1/_2\,\omega$. В центре вихря скорость равна нулю. Этот важный факт может быть установлен следующим образом.

Круговой вихрь не индуцирует скорости в своем центре. Это утверждение следует понимать так: центр кругового вихря, существующего в покоящейся жидкости, остается неподвижным.

Из вышесказанного следует, что скорости точек, лежащих на концах некоторого диаметра внутри вихря, равны по величине, но направлены в противоположные стороны, так что средняя скорость жидкости внутри вихря равна нулю. Таким образом, если круговой вихрь малого радиуса помещен в точку некоторого потока, где скорость равна $\mathbf{u}$, то средняя скорость в его центре будет равна $\mathbf{u}$ и жидкость, заключенная в вихре, будет двигаться со скоростью $\mathbf{u}$; это означает, что вихрь движется вместе с потоком жидкости.

Примерами круговых вихрей в природе могут служить тропические циклоны (ураган, тайфун), которые достигают в диаметре [1]) от 100 до 500 миль и перемещаются со скоростью, редко превышающей 15 миль в час. Внутри циклона ветер может достигать ураганной силы, в то время как существует центр области диаметром от 10 до 20 миль, где условия могут быть относительно спокойнее.

Из полученных выше результатов мы можем вывести следующие формулы:

$$\frac{q}{\frac{1}{2}\omega a} = \frac{r}{a}, \quad \text{если} \quad r < a, \qquad \frac{q}{\frac{1}{2}\omega a} = \frac{a}{r}, \quad \text{если} \quad r > a,$$

откуда следует, что скорость q стремится к нулю на бесконечности и максимальна на границе вихря.

На рис. 238 графически иллюстрируются последние формулы. Заметим, что кривая на этом графике является частью гиперболы.

---

[1]) Brunt D., Weather study, London, 1942.

Вне вихря движение является безвихревым, а скорость задается выражением $qe^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$, так что

$$-\frac{dw}{dz}=\frac{\frac{1}{2}a^2\omega e^{-i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}}{r}=-\frac{1}{2}i\frac{a^2\omega}{z}.$$

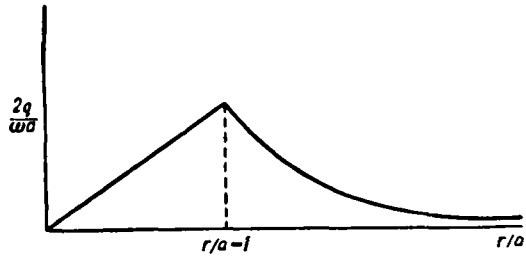
Интегрируя это соотношение, находим комплексный потенциал

$$w=\frac{1}{2}i\omega a^2\ln z.$$

Отсюда видно, что существует циркуляция интенсивности $\varkappa=\frac{1}{2}\omega a^2$. Следовательно, величину $\varkappa$ мы можем назвать *интенсивностью вихря* [1]); действительная циркуляция будет тогда равна $2\pi\varkappa$.

Таким образом, комплексный потенциал течения жидкости вне вихря интенсивности $\varkappa$, центр которого находится в точке z_0, задается формулой

$$w=i\varkappa\ln(z-z_0).$$



Р и с. 238.

13.11. Давление в поле кругового вихря. Обозначим через p_1 и p соответственно давление внутри и вне вихря. Давление должно быть непрерывно на границе вихря, следовательно,

$$p_1=p \quad \text{при } r=a. \tag{1}$$

Внутри вихря уравнение движения жидкости имеет вид

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp_1}{dr}=\frac{r\omega^2}{4}=\frac{\varkappa^2 r}{a^4},$$

так как жидкость вращается с постоянной угловой скоростью $\omega/2$, следовательно, ускорение жидкости равно $r\omega^2/4$ и направлено к точке O.

Интегрируя последнее уравнение, мы получаем формулу

$$p_1=\frac{\varkappa^2 r^2\varrho}{2a^4}+p_0,$$

где p_0 — давление в центре вихря.

Вне вихря мы можем использовать уравнение для давления в виде

$$\frac{p}{\varrho}+\frac{\varkappa^2}{2r^2}\text{const}=\frac{\Pi}{\varrho},$$

---

[1]) Это обозначение позволяет избежать повторения лишнего множителя 2π, подобное обозначение было введено при определении источника в п. 8.10.

где Π — давление на бесконечности. Используя формулу (1), найдем, что

$$p_0+\frac{\varkappa^2\varrho}{2a^2}=\Pi-\frac{\varkappa^2\varrho}{2a^2}, \quad \text{или} \quad p_0=\Pi-\frac{\varkappa^2\varrho}{a^2}. \tag{2}$$

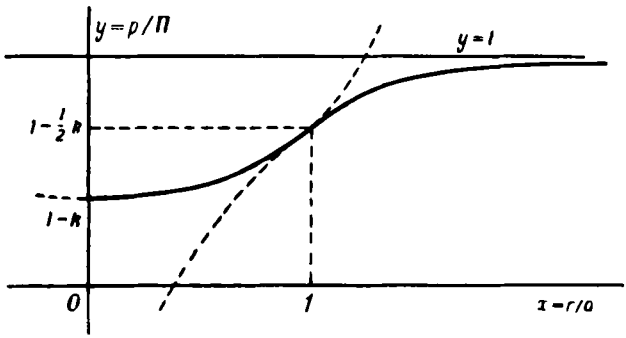
Отсюда

$$p_1=\Pi-\frac{\varkappa^2\varrho}{a^2}\left(1-\frac{r^2}{2a^2}\right), \quad p=\Pi-\frac{\varkappa^2\varrho}{2r^2}.$$

График зависимости давления от радиуса показан на рис. 239, где через y обозначено отношение давления p в данной точке и давления Π на бесконечности, через x обозначено отношение r/a, $k=\varkappa^2\varrho/a^2\Pi$. Кривые являются параболами

$$y-(1-k)=\frac{1}{2}kx^2 \quad \text{и} \quad (y-1)x^2=-\frac{1}{2}k.$$

Последняя парабола имеет асимптотой прямую $y=1$. Кривые касаются в точке $x=1$, которая соответствует границе вихря. Штриховыми линиями нарисованы продолжения этих кривых. Можно видеть, что давление непрерывно возрастает, начиная от величины $\Pi(1-k)$, и стремится к Π на бесконечности.



Р и с. 239.

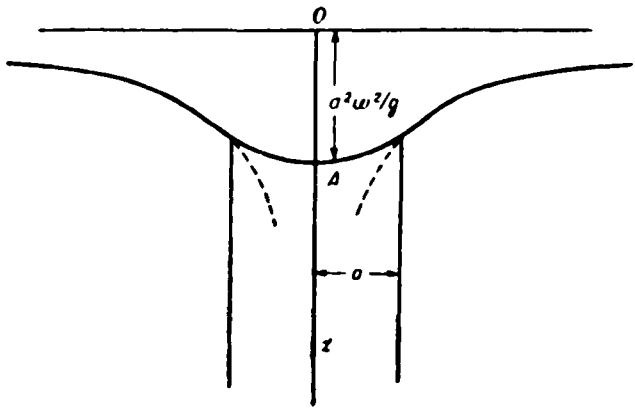
13.12. Кольцевой круговой вихрь. Мы только что видели, что давление в центре вихря минимально и имеет величину $\Pi(1-k)$. При $k>1$ давление было бы отрицательным, однако это физически не выполнимо. Поэтому внутри вихря будет образовываться концентрическая область, не содержащая жидкости. Диаграмма давления, приведенная на рис. 239, теперь должна быть изменена путем переноса начала координат в соответствующую точку между точками $y=1-k$ и $y=1-\frac{1}{2}k$. В качестве крайнего случая мы можем положить $k=2$, т. е. $\varkappa^2\varrho=2a^2\Pi$. Тогда мы получим незаполненную жидкостью цилиндрическую область, вокруг которой существует циклическое безвихревое движение.

Кроме того, оказывается, что если задана циркуляция $2\pi\varkappa$ и давление на бесконечности Π, то круговой вихрь, внутренность которого полностью заполнена жидкостью, имеет *минимальный радиус*. Величина этого радиуса определяется по формуле $a^2=\varkappa^2\varrho/\Pi$ (ср. п. 13.80).

13.13. Комбинированный вихрь Рэнкина. Комбинированным вихрем называется вертикальный цилиндрический вихрь, существующий в жидкости, движущейся под действием силы тяжести. Давление Π на верхней поверхности жидкости равно атмосферному. Эта задача является трехмерной, но ее удобно рассмотреть здесь.

Выберем начало координат в точке пересечения оси вихря с плоскостью уровня жидкости на бесконечности (рис. 240). Ось z направим вертикально

вниз. Очевидно, что кинематические условия на границе жидкости удовлетворяются системой скоростей, найденной в п. 13.10, а именно (мы будем писать 2ω вместо ω) мы можем принять $q = \omega r$, если $r < a$, и $q = \omega\frac{a^2}{r}$, если $r > a$.



Р и с. 240.

И в том и в другом случае векторы скорости жидкости горизонтальны и перпендикулярны радиусу r. При $r > a$ движение безвихревое, так как имеется потенциал скорости $\varphi = -a^2\omega\theta$. Следовательно, уравнение для давления имеет вид

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}\frac{\omega^2 a^4}{r^2} - gz = \text{const},$$

где $-gz$ — потенциал гравитационного поля. Чтобы определить константу, положим $r = \infty$, $z = 0$. Тогда получим $p = \Pi$, где Π — давление на поверхности жидкости на бесконечности, следовательно,

$$p = \Pi + g\varrho z - \frac{\omega^2 a^4 \varrho}{2r^2}. \tag{1}$$

Для определения давления p_1 внутри вихря мы имеем уравнения движения

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p_1}{\partial r} = r\omega^2, \quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p_1}{\partial z} = g.$$

Таким образом,

$$\frac{dp_1}{\varrho} = r\omega^2\,dr + g\,dz, \qquad \frac{p_1}{\varrho} = \frac{r^2\omega^2}{2} + gz + C.$$

Чтобы определить постоянную C, мы должны положить $p = p_1$ при $r = a$. Тогда мы получим

$$p_1 = \Pi + g\varrho z - a^2\omega^2\varrho\left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right). \tag{2}$$

На свободной поверхности $p = p_1 = \Pi$, следовательно, из формул (1) и (2) находим

$$z = \frac{a^4\omega^2}{2gr^2}, \quad \text{если } r > a \tag{3}$$

$$z = \frac{a^2\omega^2}{g}\left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right), \quad \text{если } r < a.$$

Эти формулы определяют форму свободной поверхности.

Кроме того, оказывается, что поверхности постоянного давления получаются путем переноса по вертикали свободной поверхности, которая соответствует значению

$$p = p_1 = \Pi.$$

Чтобы получить глубину впадины в точке A относительно уровня жидкости на бесконечности, положим в формуле (3) $r = 0$. Тогда мы получим

$$OA = \frac{a^2\omega^2}{g}.$$

13.20. Прямолинейная вихревая нить. Интенсивность кругового вихря была определена в п. 13.10 формулой

$$\varkappa = \frac{1}{2}\omega a^2 = \frac{\omega}{2\pi}\pi a^2,$$

где πa^2 — площадь поперечного сечения вихря. Если мы устремим величину a к нулю, а величину ω к бесконечности так, чтобы интенсивность оставалась постоянной, то мы получим *прямолинейную вихревую нить*, т. е. двумерный вихрь, поперечное сечение которого является бесконечно малым кругом (ср. п. 1.12).

В п. 13.12 установлено, что при заданных значениях циркуляции и давлении на бесконечности вихрь имеет некоторый минимальный радиус, поэтому введенная нами вихревая нить должна рассматриваться лишь как удобная абстракция (ср. п. 8.10).

Прямолинейная вихревая нить представляется точкой в плоскости движения, точно так же, как двумерный источник. Из п. 13.10 следует, что комплексный потенциал течения, индуцированного вихревой нитью интенсивности $\varkappa$, расположенной в точке z_0, задается формулой

$$w = i\varkappa \ln (z - z_0).$$

Интенсивность $\varkappa$ положительна, если циркуляция вокруг нити направлена против часовой стрелки. Мы можем называть такую нить точечным вихрем или просто вихрем, если это не повлечет за собой неясностей.

13.21. Изолированная вихревая нить. Пусть через точку A с координатой z_0 проходит вихревая нить интенсивности $\varkappa$ (рис. 241). Тогда $w = i\varkappa \ln (z - z_0)$, следовательно, скорость в точке P с координатой z находится по формуле

$$v - u - iv = -\frac{dw}{dz} = \frac{-i\varkappa}{z - z_0} = \frac{-i\varkappa}{Re^{i\theta}},$$

где $R = AP$, а $\arg (z - z_0) = \theta$. Отсюда

$$v = u + iv = \frac{\varkappa e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}}{R}.$$

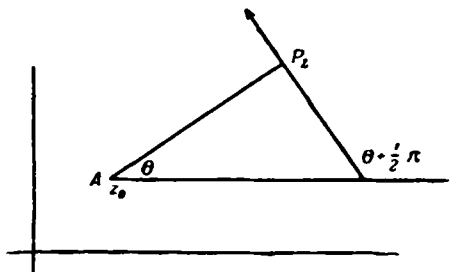


Рис. 241.

Таким образом, направление движения в точке P перпендикулярно отрезку AP, а скорость $q = \varkappa/R$ имеет направление вращения жидкости, созданного вихрем в точке A.

Следует заметить, что функция тока выражается формулой

$$\psi = -\frac{1}{2}\varkappa \ln (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = \varkappa \ln |z - z_0| = \varkappa \ln R.$$

Кроме того, так как $2i\psi = w(z) - \overline{w}(\bar{z})$, мы получим соотношение $v = -2i\frac{\partial \psi}{\partial z}$.

13.22. Движение вихревых нитей. Мы уже видели (п. 13.10), что изолированный круговой вихрь не может перемещаться в жидкости, то же самое, следовательно, справедливо и в случае вихревой нити. Таким образом, если существует несколько вихревых нитей, то движение нити, расположенной в точке P, совпадает с движением, которое создавали бы в точке P остальные вихри, если бы вихрь в точке P отсутствовал. Однако следует заметить, что общее движение жидкости может существовать не только вследствие наличия вихрей, но также вследствие наличия источников, потоков или других причин. Тогда скорость в точке P будет равна сумме скорости, индуцированной другими вихрями, как только что было описано, и общей скорости жидкости в точке P вследствие всех причин.

Пусть через w обозначен комплексный потенциал течения, содержащего несколько вихревых нитей. Тогда комплексная скорость вихря интенсивности $\varkappa$ в точке z_0 равна

$$u_0 - iv_0 = -\left\{\frac{d}{dz}[w - i\varkappa \ln(z - z_0)]\right\}_0 = -2i\left\{\frac{\partial}{\partial z}[\psi - \varkappa \ln|z - z_0|]\right\}_0,$$

где индекс 0 указывает, что после дифференцирования мы полагаем $z = z_0$, а $\bar{z} = \bar{z}_0$.

13.23. Две вихревые нити. Рассмотрим вихревые нити интенсивности $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, представленные в плоскости движения точками A_1 и A_2 (рис. 242). Если обозначить координаты точек A_1 и A_2 через z_1 и z_2, то комплексный потенциал запишется в виде

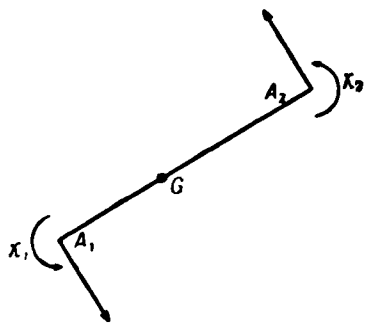


Рис. 242.

$$w = i\varkappa_1 \ln(z - z_1) + i\varkappa_2 \ln(z - z_2).$$

Скорость, индуцированная вихрем $\varkappa_2$ в точке A_1, равна

$$u_1 - iv_1 = -\frac{i\varkappa_2}{z_1 - z_2}. \qquad (1)$$

Аналогично скорость в точке A_2 равна

$$u_2 - iv_2 = -\frac{i\varkappa_1}{z_2 - z_1}. \qquad (2)$$

Отсюда

$$\varkappa_1(u_1 - iv_1) + \varkappa_2(u_2 - iv_2) = 0. \qquad (3)$$

Если поместить в точки A_1 и A_2 материальные точки, массы которых равны $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, то координата центра тяжести G этих точек будет равна $(\varkappa_1 z_1 + \varkappa_2 z_2)/(\varkappa_1 + \varkappa_2)$ при условии, что $\varkappa_1 + \varkappa_2 \neq 0$. Мы назовем точку G *центром тяжести вихрей*. Из формулы (3) следует, что центр тяжести вихрей остается неподвижным.

Скорость в точке A_1 равна

$$\frac{\varkappa_2}{A_1A_2} = \frac{\varkappa_2 A_1A_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2} \cdot \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{A_1A_2^2} = GA_1 \cdot \omega,$$

где

$$\omega = \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{A_1A_2^2}$$

Следовательно, прямая A_1A_2 вращается с угловой скоростью ω. Так как ни один вихрь не индуцирует скорости, направленной вдоль прямой A_1A_2, то длина отрезка A_1A_2 остается постоянной. Отсюда следует, что угловая скорость ω постоянна и каждый вихрь описывает с постоянной скоростью некоторую окружность.

Если $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa$, $A_1A_2 = a$, то каждый вихрь описывает с угловой скоростью $2\varkappa/a^2$ окружность, диаметром которой является отрезок A_1A_2.

13.24. Движение системы вихревых нитей. Если мы рассмотрим систему вихревых нитей интенсивности $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$, помещенных в точки $z_1, z_2, z_3, \ldots$, то из предыдущего пункта сразу увидим, что функция

$$W = i\Sigma\varkappa_r\varkappa_s \ln(z_r - z_s),\ r \neq s,$$

дает скорость, индуцированную в точке любого вихря всеми остальными вихрями.

Если для простоты рассмотреть три нити, то можно записать

$$W = i\{\varkappa_1\varkappa_2 \ln(z_1 - z_2) + \varkappa_2\varkappa_3 \ln(z_2 - z_3) + \varkappa_3\varkappa_1 \ln(z_3 - z_1)\}.$$

Скорость, индуцированная на первой нити, равна

$$u_1 - iv_1 = -\frac{1}{\varkappa_1}\frac{\partial W}{\partial z_1} = -i\left\{\frac{\varkappa_2}{z_1 - z_2} + \frac{\varkappa_3}{z_1 - z_3}\right\}.$$

Выписав соответствующие скорости вихревых нитей интенсивности $\varkappa_2$ и $\varkappa_3$, после элементарных операций умножения и сложения мы получим формулы

$$\varkappa_1u_1 + \varkappa_2u_2 + \varkappa_3u_3 = 0, \quad \varkappa_1v_1 + \varkappa_2v_2 + \varkappa_3v_3 = 0, \tag{1}$$

откуда следует, что центр тяжести трех вихревых нитей остается в покое. Легко видеть, что этот результат можно обобщить на любое число нитей.

Если мы запишем функцию W в виде

$$W = \Phi + i\Psi,$$

то получим

$$\varkappa_1(u_1 - iv_1) = -\frac{\partial W}{\partial z_1} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - i\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}.$$

Отсюда непосредственно следуют формулы

$$\varkappa_1u_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y_1}, \quad \varkappa_1v_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}.$$

Следовательно, компоненты скорости самого вихря получаются из функции Ψ таким же путем, как компоненты скорости течения получаются из функции тока. Кроме того,

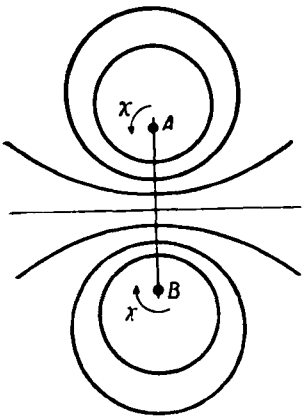
$$\frac{d\Psi}{dt} = \sum_{r=1}^{3}\left\{\frac{\partial \Psi}{\partial x_r}\frac{dx_r}{dt} + \frac{d\Psi}{dy_r}\frac{dy_r}{dt}\right\}.$$

Но

$$\frac{dx_r}{dt} = u_r = -\frac{1}{\varkappa_r}\frac{\partial \Psi}{\partial y_r}, \qquad \frac{dy_r}{dt} = v_r = \frac{1}{\varkappa_r}\frac{\partial \Psi}{\partial x_r}.$$

Следовательно, $\frac{d\Psi}{dt} = 0$ и функция Ψ остается постоянной во все время движения.

13.30. Пара вихрей. Два вихря, интенсивности которых одинаковы по величине, но противоположны по знаку, называются *парой вихрей*. Рассмотрим такую пару: вихрь интенсивности $\varkappa$ помещен в точку A, вихрь интенсивности $-\varkappa$ помещен в точку B, причем $AB=2a$. Расположим ось x посредине между точками A и B и направим ее перпендикулярно отрезку AB (рис. 243). Вихрь в точке A индуцирует в точке B скорость, параллельную оси x и равную $\varkappa/(2a)$; вихрь в точке B индуцирует в точке A такую же скорость. Отсюда следует, что пара вихрей движется в направлении оси Ox с постоянной скоростью, равной $\varkappa/(2a)$. Комплексный потенциал течения имеет вид $\varkappa/(2a)$



Р и с. 243.

$$w=i\varkappa \ln\frac{z-ai}{z+ai},$$

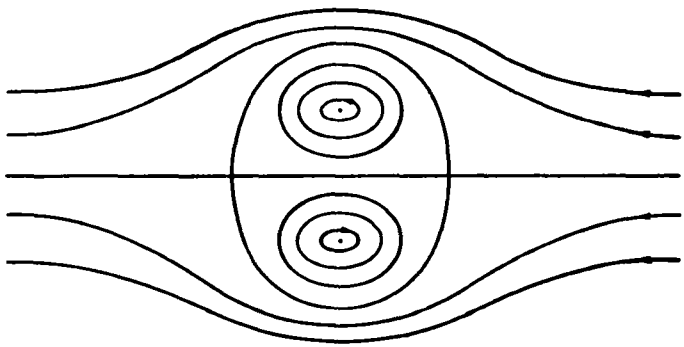
если начало координат O выбрано в середине отрезка AB.

Следовательно, функция тока имеет вид

$$\psi=\varkappa \ln\frac{PA}{PB},$$

где через P обозначена произвольная точка. Таким образом, мгновенное положение линий тока задается равенством $PA/PB=\text{const}$; линии тока являются окружностями, имеющими точки A и B предельными точками, а ось x основной осью [1]).

Скорость в любой точке на оси Ox направлена вдоль этой оси, и, следовательно, через эту линию нет расхода жидкости. Скорость в точке O равна $2\varkappa/a$, т. е. в четыре раза больше скорости движения пары вихрей.



Р и с. 244.

Чтобы найти линии тока движения жидкости относительно пары вихрей, надо на все течение наложить скорость, равную скорости движения вихрей, но направленную в противоположную сторону. Тогда можно показать, что функция тока должна иметь вид

$$\psi=\varkappa\left(\frac{y}{2a}+\ln\frac{r_1}{r_2}\right),$$

где $r_1=PA$, $r_2=PB$. Вид линий тока в относительном движении показан на рис. 244.

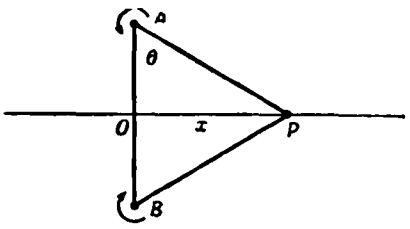
[1]) В биполярных координатах (п. 6.50) комплексный потенциал пары вихрей имеет вид $w=-\varkappa\zeta$ при условии, что координаты точек A и B суть $z=\pm c$. Связь между задачей, рассмотренной в п. 6.53, и излагаемой здесь теорией теперь становится очевидной.

Полуоси овала приближенно равны $2{,}09a$ и $1{,}73a$ (Кельвин).

Кроме того, течение, показанное на рис. 244, может быть интерпретировано, как обтекание цилиндра, поперечным сечением которого является данный овал.

Если обозначить скорость потока на бесконечности через U, то мы имеем $U = \varkappa/2a$, и, следовательно, мы можем считать это движение обтеканием вихрей A и B интенсивности $\pm 2aU$ потоком, скорость которого на бесконечности равна U.

13.31. Вихревая нить, параллельная плоскости. Пусть в точке A, отстоящей от плоскости OX на расстоянии a, помещена вихревая нить, $AO = a$ (рис. 245). Интенсивность вихревой нити равна $\varkappa$. Если мы продолжим область течения через плоскость OX и поместим в точке B, расположенной на расстоянии $2a$ от точки A, вторую вихревую нить интенсивности $-\varkappa$, то получим пару вихрей, которая не создает потока жидкости через плоскость OX. Саму плоскость тогда можно убрать. Таким образом, вихрь B является зеркальным отражением вихря A относительно плоскости OX.



Р и с. 245.

Так как пара вихрей движется параллельно оси OX со скоростью $\varkappa/(2a)$, то, следовательно, один вихрь A в присутствии плоскости будет двигаться параллельно этой плоскости с той же скоростью. Если вихри расположены так, как показано на рис. 245, то комплексный потенциал течения имеет вид

$$w = i\varkappa \ln \frac{z-ai}{z+ai}.$$

Отсюда видно, что в момент времени t комплексным потенциалом является функция

$$w = i\varkappa \ln \frac{z-ai-Vt}{z+ai-Vt},$$

где $V = \varkappa/(2a)$.

Из этого соотношения находим

$$\frac{dw}{dt} = -i\varkappa V\left(\frac{1}{z-ai-Vt} - \frac{1}{z+ai-Vt}\right),$$

следовательно, в произвольной точке плоскости OX в момент времени $t = 0$ имеем соотношение

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0} = \frac{2aV\varkappa}{x^2+a^2} = \frac{\varkappa^2\cos^2\theta}{a^2}.$$

Кроме того, при $t = 0$ скорость точки P на оси Ox равна сумме скоростей $\varkappa/PA$ и $\varkappa/PB$, перпендикулярных отрезкам PA и PB, т. е. равна $q = 2\varkappa\cos^2\theta/a$. Таким образом, давление в точке P дается формулой

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{2\varkappa^2\cos^4\theta}{a^2} - \frac{\varkappa^2\cos^2\theta}{a^2} = \frac{\Pi}{\varrho},$$

где Π — давление на бесконечности (при $\theta = \pi/2$).

Отсюда

$$p = \Pi - \frac{\varkappa^2\varrho}{a^2}\cos^2\theta\cdot\cos 2\theta.$$

Сила, действующая на плоскость вследствие движения вихря, равна

$$\frac{\varkappa^2\varrho}{a^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\cos 2\theta\cdot\sec^2\theta\,d\theta=0.$$

13.32. Вихревой диполь. Рассмотрим пару вихрей: один интенсивности $\varkappa$ в точке $ae^{i\alpha}$, другой интенсивности $-\varkappa$ в точке $-ae^{-i\alpha}$ (рис. 246). Если мы устремим величину a к нулю, а величину $\varkappa$ к бесконечности так, чтобы $2a\varkappa=\mu$, мы получим вихревой диполь, ось которого наклонена под углом α к оси x (ср. п. 8.23).

Направление диполя считается от вихря с отрицательной интенсивностью к вихрю с положительной интенсивностью. Комплексный потенциал этого течения имеет вид

$$w=\lim_{a\to 0} i\varkappa\left[\ln(z-ae^{i\alpha})-\ln(z+ae^{i\alpha})\right]=$$

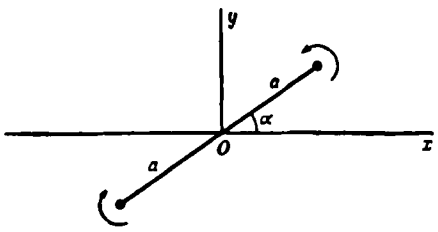
$$=\lim_{a\to 0} i\varkappa\left(-\frac{ae^{i\alpha}}{z}+\frac{a^2e^{2i\alpha}}{2z^2}-\ldots-\frac{ae^{i\alpha}}{z}-\frac{a^2e^{2i\alpha}}{2z^2}-\ldots\right)=-\frac{i\mu e^{i\alpha}}{z}.$$

Функция тока течения равна $\psi=-\mu\cos(\alpha-\theta)/r$.

Если, в частности, мы возьмем диполь в начале координат и ось диполя направим вдоль оси y, то получим $\psi=-\mu\sin\theta/r$. Если мы положим $\mu=Ub^2$, то получим выражение

$$\psi=-\frac{Ub^2\sin\theta}{r},$$

которое является функцией тока для кругового цилиндра радиуса b, движущегося со скоростью U вдоль оси x.



Р и с. 246.

Таким образом, движение жидкости, вызванное круговым цилиндром, совпадает с течением, индуцированным вихревым диполем данной интенсивности, помещенным в центр цилиндра, причем ось диполя перпендикулярна направлению движения.

Циркуляцию вокруг цилиндра мы получим в том случае, если в центр цилиндра поместим вихревую нить нужной интенсивности.

13.33. Вихреисточник. Результаты предыдущего пункта приводят нас к вопросу, как комбинировать источник и вихрь. Комплексный потенциал

$$w=(-m+i\varkappa)\ln z$$

уменьшается на величину $2\pi(im+\varkappa)$ при одном обходе вокруг начала координат. Следовательно, потенциал скорости φ уменьшается на величину $2\pi\varkappa$, а функция тока ψ уменьшается на величину $2\pi m$ при одном обходе вокруг начала координат. Таким образом, функция w удовлетворяет условиям для вихря и источника.

Функция тока этого течения имеет вид

$$\psi=-m\theta+\varkappa\ln r.$$

Если функция ψ имеет постоянную величину $\varkappa\ln C$, то мы отсюда получаем соотношение

$$r=Ce^{\frac{m\theta}{\varkappa}},$$

из которого следует, что линии тока являются логарифмическими спиралями.

Линии тока могут быть легко нарисованы с помощью диагонального метода (см. п. 4.32) путем наложения линий

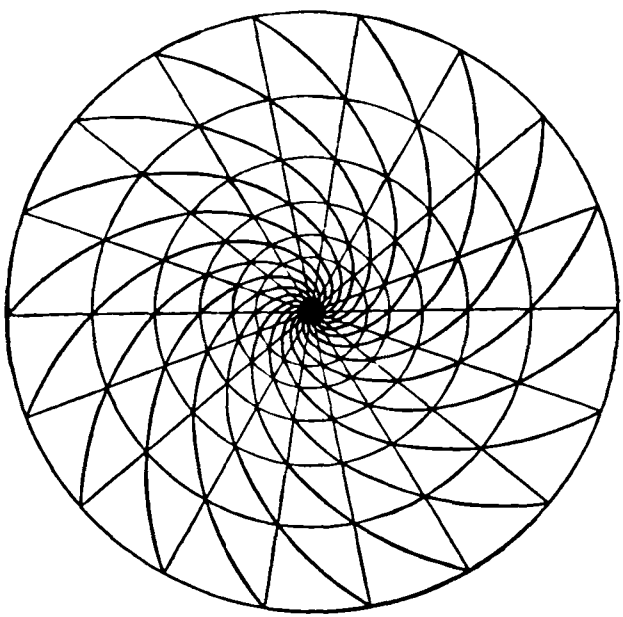
$$m\theta = n\omega,$$
$$\varkappa \ln r = n\omega, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

или

$$\theta = \frac{n}{m}\omega, \qquad r = e^{\frac{n\omega}{\varkappa}}.$$

Полученная картина называется спиральным вихрем (рис. 247).

Мы могли бы наложить еще продольную скорость, перпендикулярную плоскости течения. Получающуюся картину течения можно интерпретировать двояко: 1) как винтовое движение газа в выхлопной струе и 2) как втекание жидкости в пустой сосуд, если источник заменен стоком.



Р и с. 247.

13.40. Вихревая нить, параллельная двум перпендикулярным плоскостям. Возьмем в качестве координатных осей линии пересечения перпендикулярных плоскостей с плоскостью течения. Пусть вихрь находится в точке (x, y). Тогда система вихрей, отраженных относительно заданных плоскостей, будет состоять из вихря $-\varkappa$ в точке $(x, -y)$, вихря $-\varkappa$ в точке $(-x, y)$ и вихря $\varkappa$ в точке $(-x, -y)$. В точке, в которой находится сам вихрь, скорости индуцированы только его отражениями. Эти компоненты скорости показаны на рис. 248. Так как $x = r\cos\theta$, а $y = r\sin\theta$, то радиальная и трансверсальная компоненты скорости вихря имеют вид

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\varkappa\cos\theta}{2r\sin\theta} - \frac{\varkappa\sin\theta}{2r\cos\theta} = \frac{\varkappa\cos 2\theta}{r\sin 2\theta},$$

$$r\frac{d\theta}{dt} = \frac{\varkappa}{2r} - \frac{\varkappa\sin\theta}{2r\sin\theta} - \frac{\varkappa\cos\theta}{2r\cos\theta} = -\frac{\varkappa}{2r}.$$

Отсюда, разделив первое равенство на второе, мы получим

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dt} = -\frac{2\cos 2\theta}{\sin 2\theta}\frac{d\theta}{dt}.$$

Интегрируя последнее выражение, придем к равенству

$$r \sin 2\theta = a,$$

где a — некоторая постоянная. Форма траектории вихря и направление движения вихря по этой траектории показаны на рис. 248.

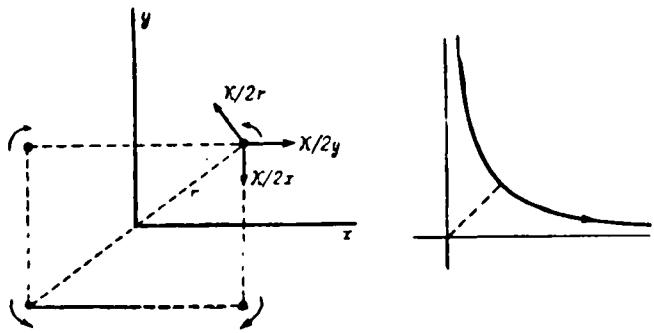


Рис. 248.

13.50. Вихрь внутри или вне кругового цилиндра. Пусть вне цилиндра $|z| = a$ в точке $Z = X + iY$ существует вихрь интенсивности $\varkappa$. Если движение жидкости происходит только вследствие этого вихря, то в силу теоремы об окружности мы имеем следующее выражение для комплексного потенциала течения:

$$i\varkappa \ln(z - Z) - i\varkappa \ln\left(\frac{a^2}{z} - \bar{Z}\right), \tag{1}$$

которое с точностью до несущественной постоянной эквивалентно выражению

$$i\varkappa \ln(z - Z) - i\varkappa \ln\left(z - \frac{a^2}{Z}\right) + i\varkappa \ln z.$$

Отсюда следует (ср. п. 8.61), что система отраженных вихрей состоит из вихря интенсивности $-\varkappa$ в точке, сопряженной с данной относительно окружности, и вихря интенсивности $\varkappa$ в центре этой окружности.

Если к сумме (1) прибавить член $i\varkappa \ln(-\bar{Z})$, не зависящий от z, то комплексный потенциал течения примет вид

$$w = i\varkappa \ln(z - Z) - i\varkappa \ln\left(1 - \frac{a^2}{z\bar{Z}}\right) = \varphi + i\varkappa G, \tag{2}$$

где функция тока $\varkappa G$ постоянна на границе цилиндра и выражается формулой $2i\varkappa G = w - \bar{w}$. Отсюда следует

$$G = G(z, \bar{z}; Z, \bar{Z}) = \ln|z - Z| - \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{a^2}{z\bar{Z}}\right)\left(1 - \frac{a^2}{\bar{z}Z}\right). \tag{3}$$

Теперь ясно, что функция G обладает *свойством симметрии*

$$G(z, \bar{z}; Z, \bar{Z}) = G(Z, \bar{Z}; z, \bar{z}), \tag{4}$$

которое означает, что функция не изменяется при перемене местами пар переменных [1]). Теперь запишем

$$g(z, \bar{z}; Z, \bar{Z}) = G(z, \bar{z}; Z, \bar{Z}) - \ln|z - Z| = -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{a^2}{z\bar{Z}}\right)\left(1 - \frac{a^2}{\bar{z}Z}\right). \tag{5}$$

Функция g обладает следующими свойствами:

(1) Функция $g(z, \bar{z}; Z, \bar{Z})$ является гармонической функцией переменных (x, y), не имеющей особенностей в точке $z = Z$ или в любой точке области, занятой жидкостью.

[1]) Функция G является фактически функцией Грина.

(II) Функция g обладает свойством симметрии

$$g(z, \bar{z}; Z, \bar{Z}) = g(Z, \bar{Z}; z, \bar{z}).$$

Далее,

$$\frac{\partial}{\partial Z} g(Z, \bar{Z}; Z, \bar{Z}) = \left(\frac{\partial}{\partial z} g(z, \bar{z}; Z, \bar{Z}) + \frac{\partial}{\partial z} g(Z, \bar{Z}; z, \bar{z})\right)_1, \tag{6}$$

где индекс 1 означает, что после дифференцирования нужно положить $z = Z$, $\bar{z} = \bar{Z}$. Из свойства (II) следует равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} g(z, \bar{z}; Z, \bar{Z})\right)_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial Z} g(Z, \bar{Z}; Z, \bar{Z}). \tag{7}$$

Этот результат является основным для настоящей задачи. Он получается непосредственно из свойства (II). В нашем случае из формулы (5) находим

$$g(Z, \bar{Z}; Z, \bar{Z}) = -\ln\left(1 - \frac{a^2}{Z\bar{Z}}\right). \tag{8}$$

Дифференцированием формул (5) и (8) легко показать, что эта функция удовлетворяет условию (7).

Теперь наложим на течение, индуцированное вихрем около цилиндра, некоторое другое течение, функция тока $\psi_0(z, \bar{z})$ которого постоянна на границе цилиндра и не имеет особенности в точке $z = Z$ (таким течением может быть, например, некоторый равномерный поток или циркуляция вокруг цилиндра). Функция тока полученного таким образом течения имеет вид

$$\psi(z, \bar{z}) = \psi_0(z, \bar{z}) + \varkappa G(z, \bar{z}; Z\bar{Z}). \tag{9}$$

Чтобы определить комплексную скорость вихря, мы воспользуемся принципом, установленным в п. 13.22; для этого образуем функцию

$$\chi = \psi - \varkappa \ln|z - Z|,$$

т. е. вычтем функцию тока вихря, действующего в безграничной жидкости. Тогда комплексная скорость вихря получится в виде (см. п. 13.22)

$$u_1 - iv_1 = -2i\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)_1.$$

Далее, из формул (5) и (9) следует равенство

$$\chi = \psi_0(z, \bar{z}) + \varkappa g(z, \bar{z}; Z, \bar{Z}). \tag{10}$$

Отсюда находим комплексную скорость вихря

$$u_1 - iv_1 = -2i \frac{\partial \chi_1}{\partial Z}, \tag{11}$$

где

$$\chi_1 = \psi_0(Z, \bar{Z}) + \frac{1}{2} \varkappa g(Z, \bar{Z}; Z, \bar{Z}). \tag{12}$$

Сравнивая формулы (10) и (12), мы видим, что множитель $\varkappa$ в последнем члене выражения для χ вследствие равенства (7) заменяется в последнем члене выражения для χ_1 множителем $^1/_2\varkappa$. Заметим также, что функция $\chi_1 = \chi_1(Z, \bar{Z})$ является функцией только величин $Z, \bar{Z}$ и не зависит от величины z. Из формулы (11) мы получаем соотношения

$$\frac{dX}{dt} = u_1 = -\frac{\partial \chi_1}{\partial Y}, \qquad \frac{dY}{dt} = v_1 = \frac{\partial \chi_1}{\partial X}. \tag{13}$$

Функция χ_1 называется функцией тока Рауса.

В частности, если вихрь в точке (X, Y) является единственной особенностью течения и если $\psi_0(Z, \bar{Z})$ зависит от времени посредством величин (X, Y),

то вследствие соотношений (13) мы получим уравнение

$$\frac{d\chi_1}{dt} = \frac{\partial \chi_1}{\partial X} \cdot \frac{dX}{dt} + \frac{\partial \chi_1}{\partial Y} \cdot \frac{dY}{dt} = 0.$$

Следовательно,

$$\chi_1(Z, \bar{Z}) = \text{const}.$$

Это уравнение является уравнением траектории вихря (рис. 249).

В том случае, когда вихрь интенсивности $\varkappa$ находится вне цилиндра, а на цилиндр наложена циркуляция $\varkappa'$, функция тока $\psi_0 = \varkappa' \ln r$, где $r = |z|$.

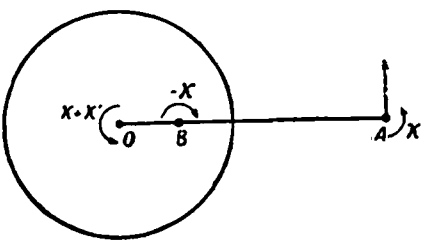


Рис. 249.

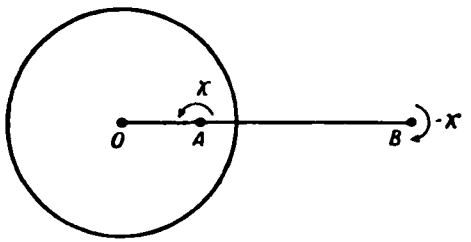


Рис. 250.

Из формулы (8) следует, что $g(Z, \bar{Z}; Z, \bar{Z}) = -\ln(1 - a^2/R^2)$, где $R = |Z|$. Тогда траектория вихря определяется формулой

$$\chi_1 = \varkappa' \ln R - \frac{1}{2} \varkappa \ln\left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right) = \text{const}, \tag{14}$$

откуда следует, что радиус R остается постоянным и вихрь описывает окружность, концентрическую с цилиндром, со скоростью

$$\frac{\varkappa + \varkappa'}{R} - \frac{\varkappa R}{R^2 - a^2}.$$

Если вихрь находится *внутри* цилиндра, то функция, определенная формулой (8), оказывается непригодной, так как она имеет особенность в области течения в точке $Z = 0$. Однако и в этом случае комплексный потенциал можно получить из теоремы об окружности; он имеет вид

$$w = i\varkappa' \ln z - i\varkappa \ln\left(\frac{a^2}{z} - \bar{Z}\right) + i\varkappa \ln(z - Z).$$

Положим $\varkappa + \varkappa' = 0$, тогда мы получим течение, показанное на рис. 250, комплексный потенциал которого равен

$$w = i\varkappa \ln(z - Z) - i\varkappa \ln(a^2 - z\bar{Z}).$$

Мы теперь видим, что функция g, обладающая свойством симметрии, должна иметь вид

$$g(z, \bar{z}; Z, \bar{Z}) = -\frac{1}{2} \ln(a^2 - z\bar{Z})(a^2 - \bar{z}Z).$$

Отсюда следует равенство

$$g(Z, \bar{Z}; Z\bar{Z}) = -\ln(a^2 - R^2). \tag{15}$$

Таким образом, $\psi_0 = 0$; траектория вихря задается уравнением

$$\chi_1 = -\frac{1}{2} \varkappa \ln(a^2 - R^2) = \text{const},$$

откуда следует, что вихрь снова описывает концентрическую окружность со скоростью $\varkappa R/(a^2 - R^2)$. Из наших рассуждений видно, что отражением

внутреннего вихря интенсивности $\varkappa$ является вихрь интенсивности $-\varkappa$, сопряженный с ним относительно окружности, и циркуляция вокруг цилиндра интенсивности $-\varkappa$.

В качестве последнего примера[1]) рассмотрим вихрь интенсивности $\varkappa$, находящийся в точке Z вне цилиндра, который обтекается равномерным потоком, комплексный потенциал которого равен $-Uze^{-i\alpha}$. На цилиндр наложена циркуляция интенсивности $\varkappa'$. Если обозначить через (R, Θ) полярные координаты вихря, то мы получим

$$\psi_0(Z, \bar{Z}) = -U\left(R - \frac{a^2}{R}\right)\sin(\Theta - \alpha) + \varkappa' \ln R. \tag{16}$$

Траектория вихря определяется формулой

$$\chi_1 = -U\left(R - \frac{a^2}{R}\right)\sin(\Theta - \alpha) + \varkappa' \ln R - \frac{\varkappa}{2}\ln\left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right) = \text{const}. \tag{17}$$

Если на течение, индуцированное n вихрями интенсивности $\varkappa_r$ в точках z_r, $r = 1, 2, \ldots, n$, наложить поток с функцией тока $\psi_0(z, \bar{z})$, то вследствие формулы (9) функция тока полученного течения примет вид

$$\psi(z, \bar{z}) = \psi_0(z, \bar{z}) + \sum \varkappa_r G(z, \bar{z}; z_r, \bar{z}_r), \tag{18}$$

где суммирование производится по r от 1 до n. Составим выражения

$$\psi_s = \psi_0(z_s, \bar{z}_s) + \frac{1}{2}\sum_{r \neq s} \varkappa_r G(z_r, \bar{z}_r; z_s, \bar{z}_s), \quad g_s = g(z_s, \bar{z}_s; z_s, \bar{z}_s), \tag{19}$$

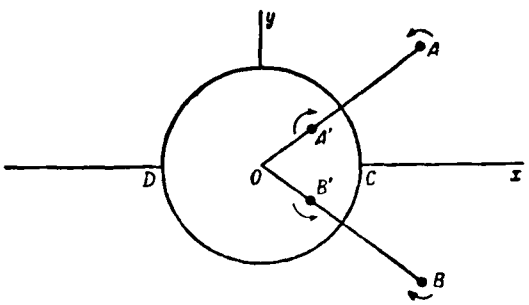
$$\Psi = \sum \varkappa_s \left(\psi_s + \frac{1}{2} k_s g_s\right), \tag{20}$$

в которых суммирование проводится по s от 1 до n.

Тогда из формулы (11) следует, что комплексная скорость вихря в точке z_s равна v_s, где

$$\varkappa_s v_s = -2i \frac{\partial \Psi}{\partial z_s}. \tag{21}$$

Таким образом, функция (20) вполне аналогична функции Ψ из п. 13.24 и остается постоянной во все время движения, если ψ_0 не зависит явно от времени. Функция g была найдена для внешности круга в виде (5) и для внутренности круга в виде (15). Если же граница области движения не является окружностью, то конформным отображением области движения на внутренность или внешность круга эту задачу можно свести к одной из рассмотренных здесь задач. Выражение для функции g в новых переменных, полученных из старых конформным отображением, получается с помощью формул (4) и (5) п. 13.60.



Р и с. 251.

13.51. Вихри около кругового цилиндра. Рассмотрим вихрь $\varkappa$ в точке A с координатой z_1 и вихрь $-\varkappa$ в точке B с координатой z_1, которые расположены вне кругового цилиндра $|z| = a$ (рис. 251). Если бы цилиндра не было, то комплексный потенциал течения имел бы вид $i\varkappa \ln(z - z_1)/(z - \bar{z}_1)$. Если же в области течения имеется круговой цилиндр $|z| = a$, то из теоремы об

[1]) Для детального изучения кратко описанного здесь метода отсылаем читателя к статье: Lin C. C., On the motion of vortices in two—dimensions, Univ. Toronto Press, 1943. В этой статье задача решается в наиболее общей постановке.

окружности получим комплексный потенциал

$$w = i\varkappa \ln \frac{z-z_1}{z-\bar{z}_1} - i\varkappa \ln \left(\frac{a^2}{z} - \bar{z}_1\right) \Big/ \left(\frac{a^2}{z} - z_1\right).$$

Отсюда следует, что отраженная система состоит из вихрей противоположных знаков, расположенных в точках, сопряженных относительно окружности с точками A и B. Можно записать $w = i\varkappa \ln(z-z_1) + w_z$, где с точностью до постоянной

$$w_z = -i\varkappa \ln \frac{(z-\bar{z}_1)\left(z - \dfrac{a^2}{\bar{z}_1}\right)}{\left(z - \dfrac{a^2}{z_1}\right)}. \qquad (1)$$

Комплексная скорость вихря в точке A равна $-dw_z/dz$ при $z = z_1$.

Если записать, как в п. 13.50,

$$w = \varphi + i\varkappa G = \varphi + i\varkappa (g + \ln|z - z_1|),$$

так что

$$g(z, \bar{z}; z_1, \bar{z}_1) = -\ln|z-\bar{z}_1| - \ln\left|\frac{a^2}{z} - \bar{z}_1\right| + \ln\left|\frac{a^2}{z} - z_1\right|,$$

то траектория вихря в точке A может быть получена в виде

$$\text{const} = \frac{1}{2}\varkappa g(z_1, \bar{z}_1; z_1, \bar{z}_1) = \frac{1}{2}\varkappa \ln \frac{AB'}{AB \cdot AA'}.$$

Отсюда следует равенство

$$AB \cdot AA' = 2k \cdot AB',$$

где k — некоторая постоянная, зависящая от начальных условий.

Если (x, y) или (r, θ) — координаты точки A, то имеет место соотношение

$$r \sin\theta \left(r - \frac{a^2}{r}\right) = k\left[r^2 + \frac{a^4}{r^2} - 2a^2 \cos 2\theta\right]^{1/2},$$

которое в декартовых координатах имеет вид

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 y^2 = k^2[(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2].$$

Если положить $k = 0$, то получим уравнение цилиндра и оси x, т. е. разветвляющуюся линию тока.

Следовательно, теперь мы можем нарисовать вид траекторий (рис. 252). Траектории состоят из двух петель внутри цилиндра и кривых вне цилиндра, имеющих асимптотами прямые $y = \pm k$, так как при $x \to \infty$, $y^2 \to k^2$.

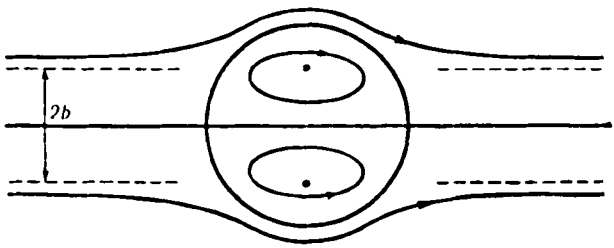


Рис. 252.

Внешние кривые описываются парой вихрей, расстояние между которыми на бесконечности равно $2b$, где b есть значение постоянной k. Внутренние петли описываются парой вихрей внутри цилиндра. Движения внутри и вне

цилиндра могут существовать вместе, но линия, соединяющая соответствующие вихри внутри и вне цилиндра, не может проходить через центр круга.

Петли траектории могут вырождаться в точки. В этом случае внутри цилиндра будет находиться пара неподвижных вихрей. Чтобы получить условие этого вырождения, поместим все четыре вихря на оси y и обозначим расстояние точки A' от центра через r. Точка A' будет неподвижной в том случае, если индуцированная в ней скорость будет равна нулю, т. е. если

$$-\frac{1}{2r}+\frac{1}{-r+\frac{a^2}{r}}+\frac{1}{r+\frac{a^2}{r}}=0.$$

Отсюда получаем уравнение $r^4+4a^2r^2-a^4=0$, которое дает

$$\frac{r^2}{a^2}=\sqrt{5}-2=0{,}236067, \quad \frac{r}{a}=0{,}486.$$

В этом случае пара вихрей, расположенная внутри цилиндра, будет оставаться неподвижной.

13.52. Стационарные вихревые нити около цилиндра. Если в течении, изображенном на рис. 251, мы поменяем направление вращения всех вихрей, то движение вихря A будет задаваться формулой (1) последнего пункта, в которой всюду изменен знак перед величиной $\varkappa$.

Наложим на это течение равномерный поток, скорость которого на бесконечности равна U и направлена вдоль оси OX. Комплексный потенциал обтекания цилиндра равномерным потоком имеет вид

$$-U\left(z+\frac{a^2}{z}\right).$$

Следовательно, движение вихря A определяется функцией

$$w_z=-U\left(z+\frac{a^2}{z}\right)+i\varkappa\ln\frac{(z-\bar{z}_1)\left(z-\frac{a^2}{z_1}\right)}{z-\frac{a^2}{z_1}}. \tag{1}$$

Отсюда видно, что вихрь A будет находиться в покое, если $dw_z/dz=0$ при $z=z_1$. Выполняя дифференцирование и опуская для простоты индекс 1, мы получаем соотношение

$$U\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)=i\varkappa\frac{(z^2-a^2)(z\bar{z}-a^2)+a^2(z-\bar{z})^2}{(z\bar{z}-a^2)(z-\bar{z})(z^2-a^2)}. \tag{2}$$

Если два комплексных числа равны, то равны и сопряженные им числа. Выпишем сопряженное соотношение для соотношения (2) и разделим одно на другое, тогда получим равенство

$$\frac{(z^2-a^2)^2\bar{z}^2}{(z^2-a^2)^2z^2}=\frac{(z^2-a^2)(\bar{z}z-a^2)+a^2(z-\bar{z})^2}{(\bar{z}^2-a^2)(z\bar{z}-a^2)+a^2(z-\bar{z})^2}.$$

Это равенство легко привести к виду

$$(z\bar{z}-a^2)^2+z\bar{z}(z-\bar{z})^2=0. \tag{3}$$

Отсюда, полагая $z=re^{i\theta}$, где $0<\theta<\pi/2$, получаем

$$(r^2-a^2)^2=4r^4\sin^2\theta, \quad \text{или} \quad \left(r-\frac{a^2}{r}\right)=2r\sin\theta.$$

Следовательно, $AA'=AB$; если это условие выполняется, то вихри позади цилиндра могут находиться в покое.

Из формул (2) и (3) получаем для этого случая

$$\varkappa = U\frac{(r^2-a^2)^2(r^2+a^2)}{r^5}.$$

Из соображений симметрии ясно, что если вихрь A неподвижен, то вихрь B тоже будет неподвижен. Таким образом, оказывается, что вихри, интенсивность которых отличается знаком, а величина интенсивности определена полученной выше формулой, могут покоиться позади кругового цилиндра, помещенного в равномерный поток, скорость которого U, причем вихри находятся в точках, являющихся отражением точек A и B, и, кроме того, $AA' = AB$.

Этот результат очень интересен, так как такие вихри часто наблюдаются при обтекании цилиндра потоком с малой скоростью (см. фото 1—6).

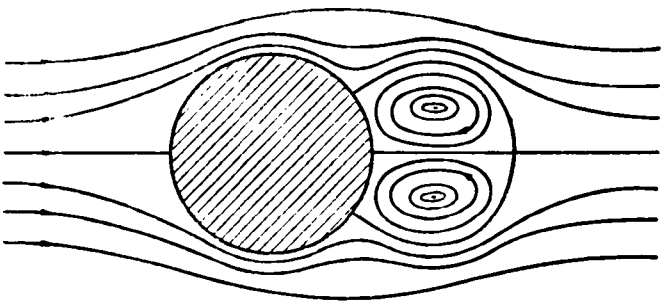


Рис. 253.

Общий вид линий тока рассматриваемого течения показан на рис. 253. Из этого рисунка видно, что в области течения существует пять критических точек. Четыре из них находятся на цилиндре и одна находится на оси потока.

Комплексный потенциал течения жидкости получается из формулы (1) добавлением члена $-i\varkappa \ln(z-z_1)$, который является комплексным потенциалом вихря A.

13.60. Конформное отображение. Пусть в точке Π плоскости ζ существует вихрь и пусть точка P в плоскости z соответствует точке Π при конформном отображении

$$z = f(\zeta). \tag{1}$$

Обозначим через γ некоторую замкнутую кривую, содержащую малую окрестность точки Π, а через c — некоторую кривую, являющуюся отображением кривой γ и, следовательно, охватывающую точку P (рис. 254). Если функция

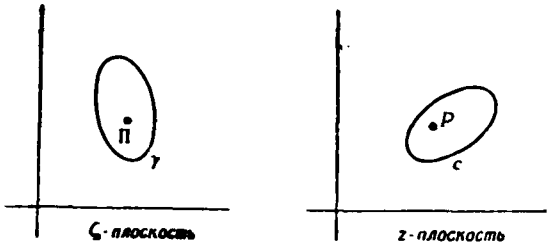
$$w = \varphi + i\psi \tag{2}$$

является комплексным потенциалом некоторого безвихревого течения жидкости в плоскости ζ, то будет существовать соответствующее ему безвихревое течение в плоскости z, которое получится исключением ζ из формул (1) и (2). При этом величины φ, ψ и w в соответствующих точках будут равны. Следовательно, будут равны и циркуляции вдоль кривых γ и c, т. е.

$$\int\limits_{(\gamma)} -d\varphi = \int\limits_{(c)} -d\varphi.$$

Таким образом, если в точке Π существует вихревая нить интенсивности $\varkappa$, то в соответствующей ей точке P также будет существовать

вихревая нить интенсивности $\varkappa$ [1]). Однако ниоткуда не следует, что при движении эти нити будут оставаться в точках, соответствующих друг другу при конформном отображении. Тем не менее если мы знаем движение одной вихревой нити, то можем определить движение другой с помощью теоремы Рауса. Эту теорему можно получить следующим образом.



Р и с. 254.

Обозначим через ζ_1 координату точки П, а через z_1 координату точки P (рис. 254). Предположим, что преобразование (1) конформно отображает внешность профиля A в плоскости z на внешность цилиндра C или круга $|\zeta| = a$ в плоскости ζ (см. рис. 109).

Метод конформного отображения позволяет нам установить соответствие между течениями в этих двух плоскостях с помощью их функций тока, например:

$$\psi(z, \bar{z}) = \omega(\zeta, \bar{\zeta}). \tag{3}$$

Если одна из этих функций задается, то другая определяется из последнего равенства.

Если единственной особенностью в области течения в плоскости z является вихрь интенсивноси $\varkappa$ в точке z_1 и, следовательно, вихрь интенсивности $\varkappa$ в точке ζ_1, то траектория вихря в плоскости ζ задается функцией χ_1, определяемой формулой (12) п. 13.50. Эта формула с очевидным изменением обозначений имеет вид

$$\chi_1 = \omega_0(\zeta_1, \bar{\zeta}_1) + \frac{1}{2}\varkappa\gamma(\zeta_1, \bar{\zeta}_1; \zeta_1, \bar{\zeta}_1),$$

где функция γ задается формулой (5) п. 13. 50 в виде

$$\gamma(\zeta, \bar{\zeta}; \zeta_1, \bar{\zeta}_1) = \Gamma(\zeta, \bar{\zeta}; \zeta_1, \bar{\zeta}_1) - \ln|\zeta - \zeta_1|.$$

Тогда в плоскости z мы имеем

$$g(z, \bar{z}; z_1, \bar{z}_1) = G(z, \bar{z}; z_1, \bar{z}_1) - \ln|z - z_1|,$$

где G — неизвестная функция, имеющая особенность в области течения только в точке $z = z_1$ и обладающая свойством симметрии [см. формулу (4) п. 13.50]. С другой стороны, функции Γ и G являются функциями тока, одна переходит в другую при конформном преобразовании (1). Следовательно, функции Γ и G принимают одни и те же значения в соответствующих точках. Таким образом, вычитая из функции g функцию γ, получаем

$$g(z, \bar{z}; z_1, z_1) = \gamma(\zeta, \bar{\zeta}; \zeta_1, \bar{\zeta}_1) + \ln\left|\frac{\zeta - \zeta_1}{z - z_1}\right|. \tag{4}$$

Следовательно, устремляя z к z_1, получаем равенство

$$g(z_1, \bar{z}_1; z_1, \bar{z}_1) = \gamma(\zeta_1, \bar{\zeta}_1; \zeta_1, \bar{\zeta}_1) + \ln\left|\frac{d\zeta_1}{dz_1}\right|. \tag{5}$$

[1]) Ср. п. 8.50. Предполагается, что одному обходу кривой γ соответствует один обход кривой c.

Это равенство определяет функцию g через известную функцию γ; следовательно, траектория вихря в плоскости z задается равенством $\chi = \text{const}$, где

$$\chi = \chi_1 + \frac{1}{2}\varkappa \ln \left| \frac{d\zeta_1}{dz_1} \right| .$$

Это и есть утверждение теоремы Рауса.

В качестве иллюстрации теоремы найдем траекторию вихря интенсивности $\varkappa$, движущегося в плоскости z около плоской пластины $(-2a, 2a)$. Такая пластина отображается на окружность $|\zeta| = a$ преобразованием Жуковского

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} .$$

Но соответствующая задача для круга уже решена [см. формулу (14) п. 13.50], и мы воспользуемся этим решением. Для простоты положим $\varkappa' = 0$, так что если $\zeta_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, то

$$\chi_1 = -\frac{1}{2}\varkappa \ln\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \quad \frac{dz_1}{d\zeta_1} = 1 - \frac{a^2}{r^2}(\cos 2\theta - i \sin 2\theta).$$

Таким образом, в плоскости z получим

$$\chi = -\frac{1}{2}\varkappa \ln\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{1}{4}\varkappa \ln\left(1 - \frac{2a^2}{r^2}\cos 2\theta + \frac{a^4}{r^4}\right),$$

причем

$$x_1 = \left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta, \quad y_1 = \left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta.$$

Траектория вихря определяется равенством $\chi = \text{const}$. На это течение можно наложить равномерный поток и циркуляцию вокруг пластины [см. формулу (16) п. 13. 50]. Решение такой задачи не представляет дополнительных трудностей.

13.61. Вихрь вне произвольного цилиндра. Как и в случае источника, описанного в п. 8.71, комплексный потенциал искомого течения может быть выписан с помощью отображающей функции

$$z = f(Z),$$

которая переводит внешность контура C цилиндра в плоскости z во внешность единичной окружности $|Z| = 1$ в плоскости Z. Таким образом, если в точке z_0 вне контура C существует вихрь интенсивности $\varkappa$, то в соответствующей ей точке Z_0 вне единичной окружности в плоскости Z существует вихрь интенсивности $\varkappa$. В силу теоремы об окружности комплексный потенциал выражается формулой

$$w = i\varkappa \ln(Z - Z_0) - i\varkappa \ln\left(\frac{1}{Z} - \bar{Z}_0\right),$$

которая вместе с формулой (1) определяет w как функцию z. Таким способом может быть исследовано любое распределение вихрей (см. пп. 8.70, 8.71).

13.62. Эквивалентный слой Грина из источников и вихрей. Будем использовать обозначения п. 8.24. Так как комплексная скорость $u - iv = -dw/dz$ является аналитической функцией переменной z в области течения L, ограниченной контуром C, то по формуле Коши (п. 5.59) получим следующие равенства:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{(u - iv)_C\, d\zeta}{\zeta - z} = u - iv \quad \text{или} \quad 0, \tag{1}$$

в зависимости от того, где находится точка z — внутри контура L или вне его. Здесь через $(u-iv)_C$ мы обозначаем значение комплексной скорости $u-iv$ в точках контура C. Пусть q_s — тангенциальная составляющая скорости на контуре, направленная в сторону положительного обхода контура C, q_n — нормальная составляющая скорости, направленная внутрь области L. Тогда

$$(u-iv)_C\, d\zeta = (u-iv)_C\, ds e^{i\theta} = (q_s - iq_n)\, ds, \tag{2}$$

следовательно, в точке z области течения по формуле (1) получим равенство

$$u-iv = \int_{(C)} \frac{\left(\frac{q_n}{2\pi}\right) ds}{z-\zeta} + i \int_{(C)} \frac{\left(\frac{q_s}{2\pi}\right) ds}{z-\zeta}.$$

Это равенство является комплексной скоростью в точке z, обусловленной источниками и вихрями, распределенными на контуре C с плотностью соответственно $q_n/2\pi$ и $q_s/2\pi$ на единицу длины. Формула (1) показывает, что эта система не индуцирует поля скоростей вне области L.

13.70. Вихревая пелена. В п. 13.20 мы определили прямолинейный вихрь как предельный случай цилиндрической вихревой трубки, когда поперечное сечение ее стягивается в точку, а поток вихря остается постоянным. Теперь мы используем аналогичный прием, чтобы определить вихревую пелену.

На рис. 255 через $\mathbf{n}$ обозначен вектор единичной нормали в точке P поверхности Σ. Пусть ε — положительная бесконечно малая скалярная величина; рассмотрим точки P_0 и P_1, радиусы-векторы которых проведены из точки P и равны $^1/_2\varepsilon\mathbf{n}$ и $-^1/_2\,\varepsilon\mathbf{n}$.

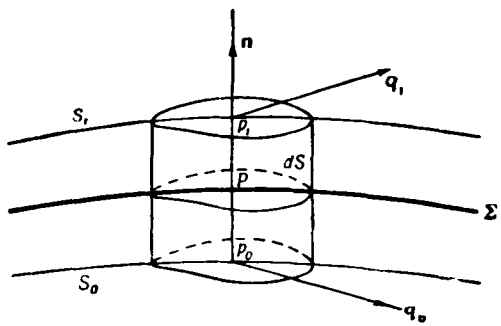


Рис. 255.

Когда точка P описывает поверхность Σ, точки P_0 и P_1 описывают поверхности S_0 и S_1, эквидистантные поверхности Σ. Рассмотрим элемент поверхности Σ, площадь которого равна ds, а центр тяжести находится в точке P. Нормали к поверхности Σ на границе элемента ds и касательная плоскости к поверхностям S_0 и S_1 ограничивают малый цилиндр, объем которого равен $d\tau = \varepsilon\, dS$.

Представим себе, что наши поверхности находятся в движущейся жидкости, завихренность которой всюду равна нулю, за исключением области, расположенной между поверхностями S_1 и S_0. Обозначим через $\boldsymbol{\zeta}$ вектор вихря в точке P. Тогда мы можем записать $\boldsymbol{\zeta}\, d\tau = \boldsymbol{\zeta}\varepsilon\, dS = \boldsymbol{\omega}\, dS$, где

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\zeta}\varepsilon. \tag{1}$$

Если теперь устремить величину ε к нулю, а величину завихренности $\boldsymbol{\zeta}$ к бесконечности так, чтобы вектор $\boldsymbol{\omega}$ оставался постоянным, то мы получим поверхность Σ, называемую *вихревой пеленой*, интенсивность которой на единицу площади равна $\boldsymbol{\omega}$.

Прежде чем переходить к пределу, заметим, что скорость жидкости всюду непрерывна и имеют место равенства

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q} + \frac{1}{2}\varepsilon\,(\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{q}, \quad \mathbf{q}_0 = \mathbf{q} - \frac{1}{2}\varepsilon\,(\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{q}, \tag{2}$$

где через $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_0$ обозначена скорость в точках P, P_1 и P_0. Складывая эти два равенства, получаем

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2}(\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1). \tag{3}$$

Этот результат верен при малых значениях величины ε. Таким образом, скорость в точке P вихревой пелены является средним арифметическим скоростей в точках, близких к точке P и лежащих на нормали к поверхности Σ по разные стороны от поверхности.

Если мы применим теорему Гаусса [см. формулу (2) п. 2.61] к элементарному цилиндру объема $d\tau$ (рис. 255), положив $\mathbf{a} = \mathbf{q}$, то получим приближенное равенство

$$\zeta\varepsilon\, dS = \mathbf{n} \times (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0)\, dS.$$

При этом мы опустили члены более высокого порядка малости, получающиеся за счет искривленной части поверхности цилиндра. Если последнее равенство разделить на dS и устремить ε к нулю, то с помощью формулы (1) получим точное равенство

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{n} \times (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0) \tag{4}$$

для поверхностной интенсивности вихревой пелены $\boldsymbol{\omega}$.

Ясно, что отличное от нуля значение вектора $\boldsymbol{\omega}$ связано с разрывом компонент скоростей $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{q}_1$, перпендикулярных вектору $\mathbf{n}$. Следовательно, *поверхность, на которой тангенциальная составляющая скорости терпит разрыв, является вихревой пеленой.*

Из формулы (4) видно также, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{n}$ и, следовательно, направлен по касательной к вихревой пелене. Двумерная вихревая пелена представляется в плоскости течения линией AB, на которой тангенциальная составляющая скорости терпит разрыв. Нормальная составляющая скорости при этом разрыва не терпит.

Например, при гребле лопасть погруженного весла разделяет жидкость, движущуюся в противоположных направлениях вдоль поверхности весла (ср. рис. 114). Когда гребец быстро вынимает лопасть из воды, в жидкости образуется тонкая пленка, в которой касательная составляющая скорости резко изменяется; эту пленку можно считать вихревой пеленой. Эта пелена неустойчива и свертывается в вихрь, который обычно и наблюдается. Подобное объяснение можно предложить и для вихрей, которые образуются за краем ложки в чашке с чаем.

Важно заметить, что образование вихревой пелены, например, в следе движущегося крылового профиля не противоречит теореме об отсутствии вихрей в жидкости, которая начала двигаться из состояния покоя под действием приложенного импульса.

В некоторых случаях (см. фото 11, 12) вихревой след за телом состоит из двух цепочек вихрей. Его можно рассматривать как части вихревой пелены, свернувшиеся в сосредоточенные вихри. В связи с этим мы должны будем развить теорию двух цепочек вихрей.

13.71. Одна бесконечная цепочка вихрей. Рассмотрим бесконечную цепочку вихрей, интенсивность каждого из которых равна $\varkappa$, расположенных в точках

$$0,\ \pm a,\ \pm 2a,\ \ldots,\ \pm na,\ \ldots .$$

Комплексный потенциал $2n+1$ вихрей, расположенных по обе стороны от начала координат (рис. 256), имеет вид:

$$\begin{aligned} w_n &= i\varkappa \ln z + i\varkappa \ln (z-a) + \ldots + i\varkappa \ln (z-na) + \\ &+ i\varkappa \ln (z+a) + \ldots + i\varkappa \ln (z+na) = \\ &= i\varkappa \ln \{z\,(z^2-a^2)\,(z^2-2^2a^2)\ldots(z^2-n^2a^2)\} = \end{aligned}$$

$$= i\varkappa \ln\left\{\frac{\pi z}{a}\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{n^2a^2}\right)\right\}\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2a^2}\right)\Big\} +$$

$$+ i\varkappa \ln\left\{\frac{a}{\pi}a^2\cdot 2^2a^2\ldots n^2a^2\right\}.$$

Константу в этой формуле можно опустить, поэтому

$$w_n = i\varkappa \ln\left\{\frac{\pi z}{a}\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2a^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2a^2}\right)\right\}.$$

Далее, функцию $\sin x$ можно разложить в бесконечное произведение по формуле [1])

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots.$$

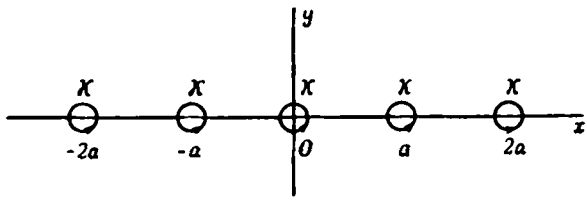
Если теперь устремить n к бесконечности, то мы получим комплексный потенциал бесконечной цепочки вихрей в форме

$$w = i\varkappa \ln\sin\frac{\pi z}{a}.$$

Рассмотрим вихрь в точке $z=0$. Комплексная скорость этого вихря равна

$$-\frac{d}{dz}\left\{i\varkappa\ln\sin\frac{\pi z}{a} - i\varkappa\ln z\right\}_{z=0} = -i\varkappa\left(\frac{\pi}{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{a}-\frac{1}{z}\right)_{z=0} = 0.$$

Таким образом, вихрь, расположенный в начале координат, покоится. Следовательно, покоятся все вихри рассматриваемой цепочки. Это значит,



Р и с. 256.

что сама цепочка вихрей не индуцирует скорости, которая могла бы привести в движение цепочку.

Функция тока получающегося течения дается формулой

$$2i\psi = w(z) - \overline{w}(\bar{z}) = i\varkappa\ln\left(\sin\frac{\pi z}{a}\sin\frac{\pi\bar{z}}{a}\right),$$

или

$$\psi = \frac{1}{2}\varkappa\ln\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{2\pi y}{a}-\cos\frac{2\pi x}{a}\right).$$

При больших значениях отношения y/a мы можем пренебречь членом $\cos 2\pi x/a$, так как модуль его не превосходит единицы. Следовательно, вдоль линии тока $\psi = \text{const}$ мы можем считать $y = \text{const}$. Таким образом, на большом расстоянии от цепочки вихрей линии тока параллельны цепочке.

Кроме того, для комплексных скоростей v_1 и v_2 соответственно в точках z и $\bar{z}$ справедливо соотношение

$$v_1 + v_2 = -\frac{i\varkappa\pi}{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{a} - \frac{i\varkappa\pi}{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi\bar{z}}{a} = -\frac{i\varkappa\pi}{a}\frac{2\sin\dfrac{2\pi x}{a}}{\operatorname{ch}\dfrac{2\pi y}{a}-\cos\dfrac{2\pi x}{a}},$$

---

[1]) См., например, Hobson, Plane Trigonometry, § 282. (На русском языке см., например, Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, М., 1958. — *Прим. перев.*)

правая часть которого является чисто мнимой величиной и стремится к нулю при $y \to \infty$. Таким образом, скорости на удаленных линиях тока по обе стороны от цепочки параллельны цепочке, но направлены в противоположные стороны. Таким образом, цепочка вихрей на больших расстояниях ведет себя подобно вихревому слою.

13.72. Вихревая дорожка Кармана. Вихревая дорожка Кармана состоит из двух параллельных вихревых цепочек, в которых расстояние между вихрями одинаково и равно a. Одна цепочка состоит из вихрей интенсивности $\varkappa$, а другая — из вихрей интенсивности $-\varkappa$. Вихри в верхней цепочке расположены над серединой отрезков, соединяющих соседние вихри в нижней цепочке

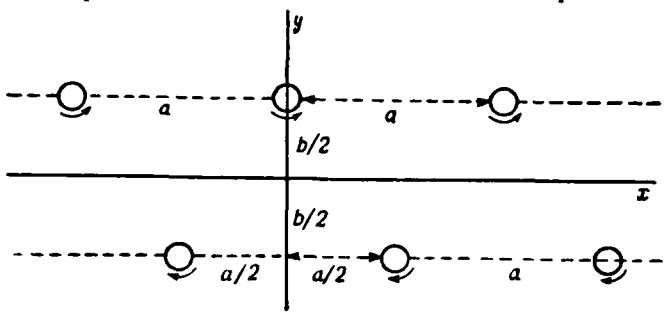


Рис. 257.

(рис. 257). Рассмотрим эту конфигурацию при $t = 0$ и выберем систему координат, как показано на рисунке: ось x расположим посредине между цепочками, отстоящими друг от друга на расстояние b, и направим ее параллельно цепочкам. Пусть в этот момент времени вихри верхней цепочки находятся в точках $ma + \frac{1}{2}ib$, а вихри нижней цепочки — в точках $(m + \frac{1}{2})a - \frac{1}{2}ib$, где $m = 0 \pm 1, \pm 2 \ldots$.

Из предыдущего пункта следует, что при $t = 0$ комплексный потенциал этого течения имеет вид

$$w = i\varkappa \ln \sin \frac{\pi}{a}\left(z - \frac{ib}{2}\right) - i\varkappa \ln \sin \frac{\pi}{a}\left(z - \frac{a}{2} + \frac{ib}{2}\right).$$

Так как ни одна цепочка не индуцирует скорости сама на себя, то скорость вихря в точке $z = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}ib$ определяется формулой

$$-u_1 + iv_1 = \left[\frac{d}{dz} i\varkappa \ln \sin \frac{\pi}{a}\left(z - \frac{1}{2}ib\right)\right]_{z=\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}ib} =$$

$$= \frac{i\varkappa\pi}{a} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi b}{a}\right) = -\frac{\varkappa\pi}{a} \operatorname{th} \frac{\pi b}{a}.$$

Таким образом, нижняя вихревая цепочка перемещается вдоль оси x со скоростью

$$V = \frac{\varkappa\pi}{a} \operatorname{th} \frac{\pi b}{a}.$$

Аналогично можно показать, что и верхняя цепочка перемещается с такой же скоростью. За время $\tau = a/V$ цепочки сместятся на расстояние a и конфигурация станет той же самой, что и в начале движения.

Чтобы исследовать устойчивость вихревой дорожки, заметим, что в некоторый момент времени t вихри верхней цепочки будут находиться в точках $ma + Vt + \frac{1}{2}ib$, а вихри нижней цепочки — в точках $\left(n + \frac{1}{2}\right)a + Vt - \frac{1}{2}ib$, где m и n пробегают весь ряд целых чисел от $-\infty$ до $+\infty$,

включая нуль. Если мы слегка сместим каждый вихрь, то вихри верхней цепочки расположатся в точках $ma+Vt+\frac{1}{2}ib+z_m$, а вихри нижней цепочки — в точках $\left(n+\frac{1}{2}\right)a+Vt-\frac{1}{2}ib+z'_n$, где $|z_m|$ и $|z'_n|$ — бесконечно малые величины. Дорожка будет устойчивой, если эти величины останутся малыми в течение всего времени движения. Теперь комплексная скорость вихря, который соответствует значению $m=0$, равна

$$V+\frac{d\bar{z}_0}{dt}. \tag{1}$$

Составляющие этой скорости от вихрей верхней цепочки, соответствующих $\pm m$, и вихрей нижней цепочки, соответствующих $-n-1$ и n, выражаются в виде суммы

$$-i\varkappa\left(\frac{1}{z_0-z_m-ma}+\frac{1}{z_0-z_{-m}+ma}\right)+$$
$$+i\varkappa\left(\frac{1}{z_0-z'_n-\left(n+\frac{1}{2}\right)a+ib}+\frac{1}{z_0-z'_{-n-1}+\left(n+\frac{1}{2}\right)a+ib}\right).$$

Разлагая последнее выражение в ряд и сохраняя только члены первого порядка малости относительно z_0, z_m, z_{-m}, z'_{-n-1}, z'_n, мы получим

$$i\varkappa\left\{\frac{z_0-z_m+z_0-z_{-m}}{m^2a^2}-\frac{z_0-z'_{-n-1}}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)a+ib\right]^2}-\frac{z_0-z'_n}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)a-ib\right]^2}\right\}-$$
$$-i\varkappa\left\{\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)a-ib}-\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)a+ib}\right\}.$$

Если мы положим $z_m=\gamma\cos m\theta$, $z'_n=\gamma'\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta$, где γ и γ' — некоторые малые по модулю комплексные числа[1]), то последнее выражение можно будет привести к виду

$$\frac{2\varkappa i}{a^2}\,\frac{\gamma(1-\cos m\theta)}{m^2}-\frac{2\varkappa i\left(\gamma-\gamma'\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-k^2\right)}{a^2\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+k^2\right)^2}+$$
$$+\frac{\varkappa}{a^2}\cdot\frac{2ka}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+k^2},\qquad k=\frac{b}{a}.$$

Далее, известно[2]), что имеют место равенства

$$\sum_0^\infty{}'\,\frac{\varkappa}{a^2}\,\frac{2ka}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+k^2}=\frac{\varkappa\pi}{a}\,\mathrm{th}\,k\pi=V,\qquad \frac{d\bar{z}_0}{dt}=\frac{d\bar{\gamma}}{dt}. \tag{2}$$

Таким образом, суммируя действие всех вихрей на вихрь, соответствующий значению $m=0$, и принимая во внимание формулу (1), получим уравнение

$$\frac{d\bar{\gamma}}{dt}=\frac{2i\varkappa}{a^2}(A\gamma+C\gamma'), \tag{3}$$

---

[1]) Это соответствует колебательному смещению цепочки.
[2]) См. примечание на стр. 355.

где

$$A=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-\cos m\theta}{m^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-k^2}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+k^2\right]^2},$$

$$C=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-k^2\right]\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+k^2\right]^2}.$$

Чтобы получить уравнение для вихря из нижнего ряда, поменяем величину $-\varkappa$ на $\varkappa$, а величину γ на γ', тогда получим

$$\frac{d\bar{\gamma}'}{dt}=\frac{-2i\varkappa}{a^2}(A\gamma'+C\gamma). \tag{4}$$

Для решения этих уравнений заменим в уравнении (3) все величины на комплексно-сопряженные, продифференцируем полученное уравнение по t и используем снова уравнения (3) и (4). Тогда мы получим уравнение относительно γ

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2}=\frac{-2i\varkappa}{a^2}\left(A\frac{d\bar{\gamma}}{dt}+C\frac{d\bar{\gamma}'}{dt}\right)=\frac{4\varkappa^2}{a^4}(A^2-C^2)\gamma.$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\gamma=h\exp\left(\frac{2\varkappa\lambda t}{a^2}\right).$$

После подстановки этого выражения в уравнение получаем

$$\lambda^2+C^2=A^2.$$

Отсюда следует, что при $A^2>C^2$ величина λ будет принимать действительные значения и движение будет неустойчивым.

С другой стороны, если $A^2<C^2$, то величина λ будет принимать чисто мнимые значения и движение будет периодическим, следовательно, устойчивым. Кроме того, при $\theta=\pi$ мы получим $C=0$, т. е. каждый член ряда обращается в нуль.

Таким образом, при $\theta=\pi$ мы должны иметь равенство $A=0$ в качестве *необходимого* условия устойчивости по отношению к такого типа смещениям.

Чтобы найти величину A, продифференцируем равенство (2) по k, тогда получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-k^2}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+k^2\right]^2}=\frac{\pi^2}{2\operatorname{ch}^2 k\pi}.$$

Кроме того, путем разложения функции в ряды Фурье, легко получить равенство

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-\cos\theta}{m^2}=\frac{1}{4}\theta(2\pi-\theta).$$

Отсюда при $\theta=\pi$ получаем

$$A=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{2\operatorname{ch}^2 k\pi}.$$

Таким образом, $A=0$, если $\operatorname{ch} k\pi=\sqrt{2}$, т. е.

$$k\pi=0{,}8814 \text{ или } b=0{,}281a.$$

Вихревая дорожка не будет устойчивой до тех пор, пока не будет выполнено это условие. Для более детального ознакомления с этим вопросом отсылаем читателя к книге Г. Ламба «Гидродинамика»[1]).

13.73. Сопротивление, вызываемое вихревым следом. В случае обтекания цилиндрического тела потоком при достаточно малых числах Рейнольдса (см. п. 19.62) обнаружено, что через определенный промежуток времени попеременно то с верхней, то с нижней кромки тела срываются вихри, и на

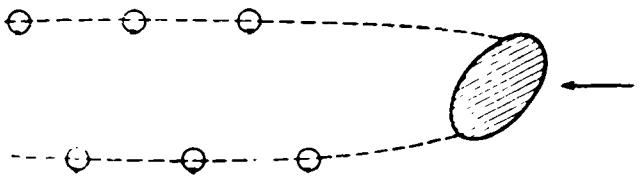


Рис. 258.

некотором расстоянии за телом существует развитая вихревая дорожка[2]) (рис. 258). В непосредственной близости за телом форма вихревого следа неясна, на больших расстояниях от тела вниз по потоку вихри затухают вследствие вязкости, а в средней части существует описанная выше вихревая дорожка. Теперь мы получим приближенное выражение для сопротивления вследствие образования такого вихревого следа.

Сделаем следующие предположения.

1) Вихри в следе могут быть представлены точечнымм вихрями.

2) В системе координат, начало которой выбрано посредине регулярной части следа, комплексный потенциал течения может быть приближенно заменен комплексным потенциалом бесконечной вихревой дорожки, выведенным в предыдущем пункте.

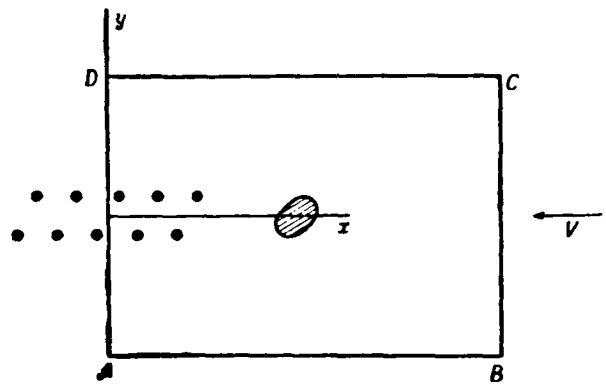


Рис. 259.

3) Если мы окружим цилиндр контуром, который перемещается с той же скоростью, что и вихревой след, и размеры которого велики по сравнению с размерами цилиндра, расстоянием между соседними вихрями в цепочке и расстоянием между цепочками, то движение жидкости на границах контура будет установившимся.

---

[1]) См. также Rosenhead L., *Proc. Roy. Soc.* (A), **127** (1930), где исследуется устойчивость в случае, когда вихри имеют конечную площадь поперечного сечения.

[2]) См. фото 11—12.

4) Образование вихрей в потоке происходит строго периодически.

Мы будем рассматривать цилиндр, который движется со скоростью U в покоящейся жидкости. Положим, что расстояние между вихрями в цепочке равно a, а расстояние между цепочками равно b (рис. 259). Тогда вихревая дорожка будет перемещаться со скоростью

$$V = \frac{\varkappa\pi}{a} \operatorname{th} \frac{\pi b}{a}, \tag{1}$$

где $\varkappa$ — интенсивность каждого вихря. Так как вихри непрерывно срываются с тела через промежуток времени τ, то период движения будет равен τ и мы будем иметь $V < U$ и $(U - V)\tau = a$.

Расположим ось x посредине между цепочками и направим ее в сторону движения. Если на наше течение наложить равномерный поток, скорость которого равна $-V$, то вихревая дорожка будет покоиться, цилиндр будет двигаться со скоростью $U - V$, а жидкость на бесконечности будет иметь скорость $-V$ (исключая окрестность вихревого следа). Динамические условия при этом не изменяются.

Проведем теперь прямоугольный контур $ABCD$, размеры которого велики по сравнению с a, b и размерами цилиндра. Пусть сторона AD прямоугольника совпадает с осью y, выбранной так, чтобы начало координат было в центре параллелограмма, вершинами которого являются четыре ближайшие к началу координат вихря. Таким образом, на границе прямоугольника вихрей нет. Тогда комплексный потенциал течения будет иметь вид

$$w_1 = Vz + ik \ln \frac{\sin \frac{\pi (z - z_0)}{a}}{\sin \frac{\pi (z + z_0)}{a}} = Vz + w, \tag{2}$$

где

$$z_0 = \frac{1}{4} a + \frac{1}{2} ib. \tag{3}$$

В формуле (2) член Vz является комплексным потенциалом равномерного потока, наложенного на наше течение. Обозначим через $-X - iY$ величину суммарной силы, действующей со стороны жидкости на цилиндр. Тогда на жидкость, заключенную в прямоугольнике $ABCD$, со стороны цилиндра действует сила $X + iY$ и давление со стороны жидкости, окружающей прямоугольник.

Если обозначить через $H_x + iH_y$ количество движения жидкости, находящейся внутри контура $ABCD$, а через $F_x + iF_y$ обозначить количество движения жидкости, втекающей через контур $ABCD$, то по теореме Эйлера об изменении количества движения жидкости имеем

$$X - iY - i \int_{(c)} p\, d\bar{z} = \frac{\partial}{\partial t} (H_x - iH_y) + F_x - iF_y, \tag{4}$$

где через c обозначен контур прямоугольника $ABCD$.

Далее, нормальная скорость жидкости, втекающей через элемент ds контура, равна $-\partial\psi/\partial s$ и, следовательно,

$$F_x = -\int_{(c)} \varrho u \frac{\partial \psi}{\partial s}\, ds, \quad F_y = -\int_{(c)} \varrho v \frac{\partial \psi}{\partial s}\, ds,$$

откуда

$$F_x - iF_y = -\int_{(c)} \varrho \frac{dw_1}{dz}\, d\psi. \tag{5}$$

Поскольку течение на контуре $ABCD$ установившееся, то из уравнения Бернулли следует

$$-i\int_{(c)} p\,d\bar{z} = -i\int_{(c)}\left(C-\tfrac{1}{2}\varrho q^2\right)dz.$$

Интеграл от постоянной C равен нулю и, кроме того,

$$q^2\,dz = \frac{dw_1}{dz}\cdot\frac{d\bar{w}_1}{d\bar{z}}\,dz = \frac{dw_1}{dz}(d\bar{w}_1 - 2i\,d\psi).$$

Таким образом,

$$-i\int_{(c)} p\,dz = \tfrac{1}{2}i\varrho\int_{(c)}\left(\frac{dw_1}{dz}\right)^2 dz + \varrho\int_{(c)}\frac{dw_1}{dz}\,d\psi.$$

Подставив это выражение в формулу (4) и использовав формулу (5), мы получим

$$X - iY = -\tfrac{1}{2}i\varrho\int_{(c)}\left(\frac{dw_1}{dz}\right)^2 dz + \frac{\partial}{\partial t}(H_x - iH_y).$$

Далее, из формулы (2) следует, что

$$\left(\frac{dw_1}{dz}\right)^2 = V^2 + 2V\frac{dw}{dz} + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2,$$

поэтому интеграл по контуру c от первого члена этого выражения обращается в нуль, а интеграл от второго члена является действительной величиной. Таким образом, величина сопротивления X является действительной частью функции

$$-\tfrac{1}{2}i\varrho\int_{(c)}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz + \frac{\partial}{\partial t}(H_x - iH_y)$$

и зависит от времени. Мы будем вычислять среднюю величину сопротивления.

Так как функция dw/dz на контуре не зависит от времени вследствие предположения 3), а рассматриваемое движение периодическое с периодом τ, то после интегрирования по t от 0 до τ и выделения действительной части получаем следующую формулу для среднего по времени сопротивления D:

$$\tau D = (H_x)_\tau - (H_x)_0 - Re\left\{\frac{i\varrho\tau}{2}\int_{(c)}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz\right\}. \qquad (6)$$

В правой части формулы (6) первые два члена представляют собой увеличение количества движения жидкости вдоль оси x вследствие появления за время τ внутри контура двух новых вихрей.

Следовательно, для того чтобы найти первые члены в формуле (6), надо вычислить увеличение количества движения жидкости внутри большого контура $ABCD$ вследствие появления в ней пары вихрей.

Рассмотрим выражение

$$H_x' - iH_y' = \int \varrho(u - iv)\,dS = -\varrho\int\frac{dw'}{dz}\,dS,$$

где $w' = i\varkappa\ln(z - z_0) - i\varkappa\ln(z - \bar{z}_0)$. Таким образом, если мы выберем для удобства вычислений $z_0 = ih$, $\bar{z}_0 = -ih$, то мы получим H_x' и H_y' в виде

$$H_x' - iH_y' = -\varrho\int_{-\infty}^{\infty} dy\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\frac{i\varkappa}{z - ih} - \frac{i\varkappa}{z + ih}\right) =$$

$$= -i\varrho\varkappa\int_{-\infty}^{\infty} dy\,[\ln(z - ih) - \ln(z + ih)]_{x=-\infty}^{x=+\infty}.$$

При изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ функция $\ln(z-ih)$ получает приращение $-i\pi$ или $i\pi$ в зависимости от того, $y>h$ или $y<h$.

Таким образом, выражение в квадратных скобках под знаком интеграла равно $2\pi i$ или 0 в зависимости от того, лежит ли величина y внутри отрезка $-h$ и h или вне его. Следовательно,

$$H'_x \quad iH_y = -i\rho\varkappa \int_{-h}^{h} dy\,(2\pi i) = 4\pi\rho\varkappa h, \quad H'_x = 4\pi\rho\varkappa h.$$

Применяя этот результат к нашей задаче, мы найдем, что первые два члена в выражении (6) равны

$$2\pi\rho\varkappa b. \tag{7}$$

Для вычисления интеграла в выражении (6) мы из формулы (2) находим

$$-\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \frac{\varkappa^2\pi^2}{a^2}\left\{\operatorname{ctg}^2\frac{\pi(z-z_0)}{a} + \operatorname{ctg}^2\frac{\pi(z+z_0)}{a} - 2\operatorname{ctg}\frac{\pi(z-z_0)}{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi(z+z_0)}{a}\right\}.$$

Следовательно,

$$\int\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = \frac{\varkappa^2\pi}{a}\left\{\operatorname{ctg}\frac{\pi(z-z_0)}{a} + \operatorname{ctg}\frac{\pi(z+z_0)}{a} + \right.$$

$$\left. + 2\operatorname{ctg}\frac{2\pi z_0}{a}\ln\frac{\sin\frac{\pi(z-z_0)}{a}}{\sin\frac{\pi(z+z_0)}{a}}\right\}.$$

Заметим, что $dw/dz=0$ всюду на контуре, за исключением стороны DA. Следовательно, интеграл берется в пределах $z=iy=+i\infty$ и $z=iy=-i\infty$.

Положим

$$\ln\zeta_1 = \frac{i\pi(z-z_0)}{a} = -\frac{\pi}{a}\left(y-\frac{b}{2}\right)-\frac{i\pi}{4},$$

$$\ln\zeta_2 = \frac{i\pi(z+z_0)}{a} = -\frac{\pi}{a}\left(y+\frac{b}{2}\right)+\frac{i\pi}{4}.$$

Тогда

$$\int_{(DA)}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = \frac{\varkappa^2\pi}{a}\left[\frac{i(\zeta_1^2+1)}{\zeta_1^2-1} + \frac{i(\zeta_2^2+1)}{\zeta_2^2-1} - 2i\operatorname{th}\frac{\pi b}{a}\cdot\ln\frac{\zeta_2(\zeta_1^2-1)}{\zeta_1(\zeta_2^2-1)}\right]_{y=-\infty}^{y=\infty} =$$

$$= \frac{\varkappa^2\pi}{a}\left\{4i - 4i\operatorname{th}\frac{\pi b}{a}\left(-\frac{\pi i}{2}+\frac{\pi b}{a}\right)\right\}.$$

Подставляя это выражение в формулу (6) и используя формулу (7), мы получим формулу Кармана для сопротивления, которое обусловлено появлением вихревого следа

$$D = \frac{2\pi\varkappa\rho b}{\tau} + \frac{2\pi\varkappa^2\rho}{a}\left(1-\frac{\pi b}{a}\operatorname{th}\frac{\pi b}{a}\right).$$

Сопротивление может быть выражено через скорость V в виде

$$D = \frac{2\pi\varkappa\rho b}{a}\{U-2V\} + \frac{2\pi\varkappa^2\rho}{a};$$

при этом надо учесть, что $a=\tau(U-V)$.

Следует подчеркнуть, что вычисления были проведены при некоторых предположениях, сформулированных выше, и результаты носят приближенный характер.

13.8. Вихрь в сжимаемом газе. Предположим, что линии тока течения являются окружностями и что на каждой такой окружности циркуляция равна $2\pi\varkappa$.

Тогда если обозначить через q скорость на окружности радиуса r, то циркуляция $2\pi rq = 2\pi\varkappa$, откуда, используя обозначения п. 1.67 и формулу (7) п. 1.63, получим

$$r = \frac{\varkappa}{q} = \frac{\varkappa}{Mc_0}\frac{c_0}{c} = \varkappa\left\{\frac{1}{M^2} + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\right\}^{1/2}.$$

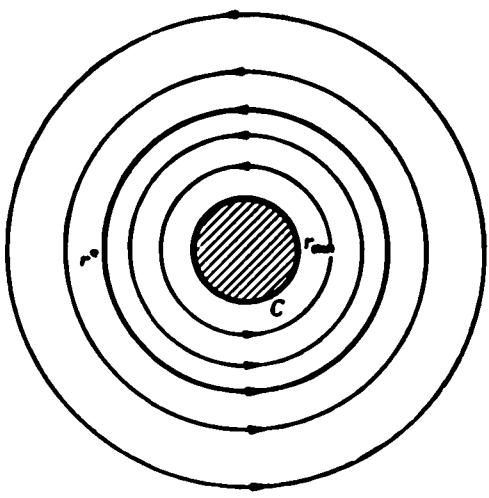
Очевидно, что величина r достигает минимума $r_{\min}$ при $M = \infty$. Поэтому

$$\frac{r}{r_{\min}} = \left\{1 + \frac{2}{(\gamma - 1)M^2}\right\}^{1/2},$$

и при увеличении r число M должно монотонно уменьшаться. Число Маха достигает критической величины $M = 1$ при

$$r = r^* = r_{\min}\sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}.$$

Таким образом, если на окружности C (рис. 260) $r = r_{\min}$, то внутри C не может существовать движение жидкости, так что эта область должна



Р и с. 260.

быть свободной от жидкости или занятой центральным твердым ядром. В области между окружностью C и окружностью радиуса r^* число $M > 1$ и течение является сверхзвуковым. При $r > r^*$ течение будет дозвуковым.

ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ 13

1. Прямолинейный вихрь движется в жидкости, ограниченной неподвижной плоскостью. Считая движение жидкости плоскопараллельным, доказать, что линии тока не могут совпадать с линиями постоянного давления.

2. Доказать, что распределение давления от вихреисточника такое же, как и распределение давления от источника подходящей интенсивности.

3. Область плоскости x, y ограничена прямыми $y = \pm c$. В этой области существует плоское движение жидкости вследствие вихря, помещенного в начале координат. Доказать, что функция тока течения имеет вид

$$\frac{\varkappa}{2}\ln\frac{1 - t}{1 + t},$$

где

$$t=\cos\left(\frac{\pi y}{2c}\right)-\frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2c}\right)},$$

а $2\pi\varkappa$ — циркуляция вихря.

4. Исследовать движение двух бесконечных параллельных прямолинейных вихрей одинаковой интенсивности в безграничной жидкости.

Показать, что уравнение линий тока жидкости в системе координат, движущейся так, что координаты вихрей суть $(\pm c, 0)$, имеет вид

$$\ln\{[(x-c)^2+y^2]\,[(x+c)^2+y^2]\}-\frac{x^2+y^2}{2c^2}=\text{const}.$$

5. Три параллельных прямолинейных вихря, интенсивность которых одинакова и имеет один и тот же знак, пересекают перпендикулярную им плоскость в точках, являющихся вершинами равностороннего треугольника со стороной a. Показать, что все эти вихри движутся по одной и той же цилиндрической поверхности с постоянной скоростью, и время одного оборота равно $2\pi a^2/3\varkappa$.

6. Бесконечная вихревая нить интенсивности m находится около угла большого прямоугольного бака, заполненного идеальной жидкостью, и параллельна ребру бака.

Показать, что эта нить при движении вычерчивает в плоскости течения кривую $r\sin 2\theta=\text{const}$ и что это движение будет описываться уравнением $r^2\theta=m/2$.

7. Определить движение прямолинейной вихревой нити интенсивности $\varkappa$ в бесконечной жидкости, ограниченной двумя перпендикулярными бесконечными плоскостями, линия пересечения которых параллельна этой нити. Показать, что вихрь перемещается из точки, равноудаленной от этих двух плоскостей, в любую другую точку за время, пропорциональное $\operatorname{ctg}2\theta$, где θ — угол между одной из неподвижных плоскостей и плоскостью, проходящей через нить и линию пересечения неподвижных плоскостей.

Найти давления в точке P на неподвижной плоскости в тот момент времени, когда плоскость, содержащая точку P и вихревую нить, перпендикулярна неподвижной плоскости.

8. Два параллельных прямолинейных вихря интенсивности k_1 и k_2 движутся в идеальной безграничной жидкости и пересекают плоскость, перпендикулярную им, в точках A и B. Пусть G — центр тяжести масс k_1 и k_2, находящихся в точках A и B, а C — центр тяжести этих масс, если их поменять местами. Показать, что вихри движутся вокруг точки G по окружностям с угловой скоростью, равной $\frac{k_1+k_2}{(AB)^2}$, и что скорость частицы жидкости в точке P этой плоскости равна $\frac{(k_1+k_2)\,CP}{AP\cdot BP}$.

Доказать, что, когда треугольник ABP является равносторонним, частица жидкости в точке P движется так, как если бы она была жестко связана с вихрями. Кроме того, доказать, что это утверждение справедливо, когда точка P лежит на линии AB и

$$-\frac{k_2}{k_1}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\left(x-\frac{3}{2}\right)\Big/\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(x+\frac{3}{2}\right),$$

где $x=OP/AB$, а точка O — середина отрезка AB.

9. Вихрь интенсивности m находится внутри неподвижного цилиндра радиуса a, заполненного жидкостью, на расстоянии $b\,(b<a)$ от оси цилиндра. Считая движение жидкости безвихревым, найти движение вихря и сравнить его с движением вихря, находящегося в безграничной жидкости вне этого цилиндра $(b>a)$, причем считать, что циркуляция вокруг цилиндра отсутствует.

В обоих случаях определить производную $\partial\varphi/\partial t$ от потенциала скорости φ.

10. Тонкий прямолинейный вихрь находится внутри цилиндрического сосуда, образующая которого параллельна вихрю. Поперечное сечение сосуда ограничено полуокружностью радиуса a и диаметром, соединяющим концы полуокружности. Определить скорость вихря и доказать, что на радиусе, делящем полуокружность пополам, на расстоянии от центра, примерно равном $0{,}49\,a$, существует точка равновесия.

11. Прямолинейный вихрь интенсивности $\varkappa$ расположен в безграничной жидкости вне неподвижного кругового цилиндра радиуса a. Вихрь параллелен оси цилиндра и находится от нее на расстоянии f. Циркуляция по любому контуру, не охватывающему вихря, равна нулю. Показать, что вихрь движется вокруг оси цилиндра с постоянной угловой скоростью, равной

$$\frac{\varkappa a^2}{f^2(f^2-a^2)}.$$

Найти скорость жидкости в точке цилиндра, которая лежит в плоскости, проходящей через ось цилиндра и составляющей угол θ с плоскостью, проведенной через ось

цилиндра и вихрь. Указать, каким способом можно вычислить суммарное давление жидкости на цилиндр.

12. Неподвижный цилиндр радиуса a окружен безграничной идеальной несжимаемой жидкостью. В жидкости имеется вихрь интенсивности m, ось которого параллельна оси цилиндра и который отстоит от оси цилиндра на расстоянии $c\,(c>a)$. Считая, что циркуляция по любому контуру, охватывающему цилиндр, но не охватывающему вихрь, равна нулю, показать, что скорость жидкости q на поверхности цилиндра равна

$$\frac{m}{a}\left(1-\frac{c^2-a^2}{r^2}\right),$$

где r — расстояние рассматриваемой точки от вихревой нити.

Показать далее, что давление на поверхности цилиндра

$$p=p_0-\frac{m^2\varrho}{2a^2}\left\{1-\frac{2\,(a^4+c^4-a^2c^2)}{c^2r^2}+\frac{(c^2-a^2)^2}{r^4}\right\},$$

где p_0 — давление на бесконечности.

13. Прямолинейный вихрь находится в однородной идеальной несжимаемой жидкости, заключенной между двумя соосными прямыми круговыми цилиндрами, образующие которых параллельны вихрю. Радиусы цилиндров равны r_0 и r_1, расстояние вихря от оси цилиндров равно c. Найти функцию тока течения и показать, что при $c^2=r_0r_1$ вихрь будет покоиться; в противном же случае траекторией вихря будет окружность.

14. Неподвижный круговой цилиндр обтекается равномерным потоком идеальной несжимаемой жидкости, скорость которого на бесконечности равна V и направлена вдоль оси x. Движение жидкости считается плоским, начало системы координат выбрано в центре поперечного сечения цилиндра O. За цилиндром имеется пара вихрей, расположенных симметрично относительно оси x. Доказать, что вихри будут неподвижны относительно цилиндра, если они лежат на кривой

$$2ry=r^2-a^2,$$

и что интенсивность вихрей в этом случае равна

$$\pm 4Vy^2\left(\frac{1}{r}+\frac{a^2}{r^3}\right),$$

где r — расстояние от точки O. Установить без доказательства, будет ли эта система устойчивой или нет, коротко объяснить связь этого теоретического результата с течением, наблюдаемым при обтекании кругового цилиндра жидкостью с малой вязкостью.

15. Вихревые нити интенсивности $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ... параллельны оси Oz, пересекают плоскость $z=0$ в точках (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... Доказать, что

$$\sum \varkappa_i x_i=A,\quad \sum \varkappa_i y_i=B,\quad \sum \varkappa_i r_i^2=C,\quad \sum \varkappa_i r_i^2\theta_i=2\pi\sum \varkappa_i \varkappa_j.$$

Пусть пара вихревых нитей, интенсивности которых равны по величине, но противоположны по знаку, расположена внутри или вне кругового цилиндра радиуса a на одинаковом расстоянии от оси цилиндра. Доказать, что уравнение цилиндра, описываемого каждым из вихрей, есть

$$(r^2-a^2)^2\,(r^2\sin^2\theta-b^2)=4a^2b^2r^2\sin^2\theta,$$

где b — некоторая постоянная.

16. Вихрь интенсивности $\varkappa$ расположен в точке $\zeta=id$ вне окружности $|\zeta|=c$. Применить конформное преобразование $iz=\zeta+c^2/\zeta$ для определения комплексного потенциала течения от вихря в точке $z=f$ около плоской пластины длины $4c$, на которую наложена циркуляция $2\pi\varkappa(\lambda-1)$. Показать, что для того чтобы скорость вихря обратилась в нуль, необходимо, чтобы $\lambda=(d^4+c^4)/(d^4-c^4)$, а для того, чтобы скорость на конце пластины была конечной, необходимо, чтобы $\lambda=(d^2-c^2)/(d^2+c^2)$, т. е. показать, что скорость на конце пластины не может быть конечной, если вихрь находится в покое. Величины d и f считать действительными.

17. Три вихревые нити, каждая интенсивности m, симметрично расположены внутри неподвижного кругового цилиндра радиуса a. Вихри проходят через вершины равностороннего треугольника со стороной $\sqrt{3}\,b$. Считая, что в отсутствие этих вихрей циркуляция в жидкости равна нулю, показать, что вихри будут вращаться вокруг оси цилиндра с угловой скоростью

$$\frac{m}{b^2}\left[\frac{a^6+2b^6}{a^6-b^6}\right].$$

18. Показать, что бесконечный жидкий цилиндр, поперечное сечение которого является эллипсом и внутри которого вектор вихря ζ постоянен и параллелен образующей, может сохранять свою форму, если он вращается как твердое тело (центр поперечного сечения неподвижен) с угловой скоростью $\omega=\lambda\zeta$, где параметр λ зависит только от эксцентриситета поперечного сечения.

Найти траектории жидких частиц внутри цилиндра: 1) относительно вращающегося поперечного сечения, 2) относительно неподвижной системы координат.

19. Доказать, что цилиндрический вихрь постоянной интенсивности, поперечным сечением которого является эллипс с полуосями a и b, может существовать в несжимаемой идеальной жидкости постоянной плотности ϱ и постоянного давления P на бесконечности при условии, что этот вихрь вращается вокруг своей оси с некоторой определенной постоянной угловой скоростью n.

Показать, что на концах малой полуоси возникает кавитация, если не выполняется условие $P > \varrho n^2 (a+b)\, a$, и что при отсутствии кавитации линии тока в относительном движении жидкости совпадают с линиями постоянного давления внутри вихря.

20. Показать, что при установившемся плоском движении жидкости с постоянной завихренностью ζ имеет место равенство

$$\frac{p}{\varrho} = C - \frac{1}{2} q^2 + \zeta\psi.$$

Доказать, что при $\zeta = 0$ суммарная сила давления равномерного потока со скоростью V на неподвижный цилиндр с произвольным поперечным сечением равна $\varkappa\varrho V$ и действует под прямым углом к направлению потока. Через $\varkappa$ здесь обозначена циркуляция по любому контуру, охватывающему цилиндр.

Найти вид функции ψ, если $\zeta \neq 0$, а цилиндр круговой. Показать, что если движение жидкости на бесконечности представляет собой поступательный поток, параллельный оси Ox, то предыдущий результат справедлив при условии, что в формуле величина $\varkappa$ заменяется на $\varkappa' + \pi a^2 \zeta$, где $\varkappa'$ — циркуляция на поверхности цилиндра, а V — скорость в бесконечно удаленной точке на линии тока, проходящей через центр цилиндра.

21. В безграничной жидкости имеется бесконечная цепочка прямолинейных вихрей, расположенных на одинаковом расстоянии a друг от друга. Величина интенсивности каждого вихря равна $\varkappa$, а знак интенсивности чередуется от вихря к вихрю. Пусть начало координат совпадает с одним из вихрей положительной интенсивности. Показать, что комплексный потенциал течения имеет вид

$$w = i\varkappa \ln \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2a},$$

и, следовательно, такая цепочка вихрей не движется.

Показать, далее, что если радиус поперечного сечения каждой вихревой нити равен εa, где ε — бесконечно малая величина, то расход жидкости между двумя соседними вихрями равен приближенно $2\varkappa \ln \dfrac{2}{\pi\varepsilon}$.

22. Показать, что комплексный потенциал w бесконечной цепочки вихрей интенсивности $\varkappa$, расположенных в точках с координатами

$$z_r = ra, \quad (r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

задается формулой

$$w = i\varkappa \ln \sin \frac{\pi z}{a}.$$

Пусть вихри в цепочке получили малые смещения, так что

$$z_r = ra + (\xi + i\eta)\, e^{ir\alpha}, \quad (0 < \alpha < 2\pi).$$

Показать, что со временем смещения вихрей возрастают как $e^{\lambda t}$, где

$$\lambda = \frac{\varkappa\alpha\,(2\pi - \alpha)}{2a^2}.$$

23. Бесконечная цепочка состоит из вихрей интенсивности m, расположенных в точках $z = z_0 + na$, где n — любое положительное или отрицательное целое число или нуль. Показать, что скорость (u, v), индуцированная этой цепочкой в точке z, равна

$$-u + iv = \frac{im\pi}{a} \operatorname{ctg} \frac{\pi (z - z_0)}{a}.$$

Пусть теперь вихри в цепочке получили малые смещения

$$\zeta_n = \zeta_0 \cos n\chi,$$

где $0 < \chi < 2\pi$. Получить уравнение движения вихря в виде

$$\frac{d\bar{\zeta}_0}{dt} = \frac{im\pi^2}{2a^2} \zeta_0 \left\{1 - \left(1 - \frac{\chi}{\pi}\right)^2\right\},$$

где через $\bar{\zeta}_0$ обозначена величина, комплексно сопряженная с ζ_0.

Показать, что такая цепочка вихрей неустойчива.

24. Показать, что функция тока бесконечной цепочки прямолинейных вихрей одинаковой интенсивности $\varkappa$, равномерно с интервалом a распределенных на оси x в безграничной жидкости, задается формулой

$$\psi=\frac{\varkappa}{2}\ln\left[\operatorname{ch}\frac{2\pi y}{a}-\cos\frac{2\pi x}{a}\right].$$

Следует иметь в виду, что вихри параллельны оси z.

Пусть вторая цепочка вихрей $-\varkappa$ получена сдвигом первой цепочки как целого на $x=\lambda a$, $y=-\mu a$. Показать, что такая двойная цепочка вихрей, или вихревая дорожка, движется со скоростью

$$\frac{\pi\varkappa}{a}\left(\frac{\operatorname{ch}2\pi\mu+\cos 2\pi\lambda}{\operatorname{ch}2\pi\mu-\cos 2\pi\lambda}\right)^{1/2}$$

в направлении, составляющем с дорожкой угол θ, причем

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin 2\pi\lambda}{\operatorname{sh}2\pi\mu}.$$

25. Две параллельные цепочки состоят из вихрей, расположенных равномерно с интервалом a, и отстоят друг от друга на расстоянии b. Все вихри одной цепочки имеют одинаковую интенсивность K, а все вихри другой — интенсивность $-K$. Найти условия, при которых цепочки будут двигаться вперед с постоянной скоростью, и определить эту скорость. Показать, что система будет неустойчива, если вихри одной цепочки расположены точно под вихрями другой цепочки.

26. Задана бесконечная вихревая дорожка:

$x=ra$, $y=b$, интенсивность каждого вихря m;

$x=ra$, $y=-b$, интенсивность каждого вихря $-m$;

где r — любое положительное или отрицательное целое число или нуль. Показать, что если жидкость на бесконечности покоится, то вихревая дорожка движется как целое, вдоль оси x со скоростью

$$\frac{\pi m}{a}\operatorname{cth}\frac{2\pi b}{a}.$$

Показать, что такая дорожка неустойчива по отношению к малому смещению одного вихря.

27. Вычислить скорость вихревой дорожки Кармана, состоящей из цепочки вихрей интенсивности m и цепочки вихрей интенсивности $-m$; вихри одной цепочки чередуются с вихрями другой цепочки.

Пусть все вихри системы, кроме одного, не меняют своего взаимного расположения. Исследовать устойчивость движения этого вихря и показать, что оно не может быть устойчивым, если не выполняется некоторое соотношение между параметрами, характеризующими взаимное расположение вихрей в дорожке. Найти это соотношение.

Глава 14

ВОЛНЫ

14.10. Волновое движение. *Волновым движением* жидкости, находящейся под действием силы тяжести и имеющей свободную поверхность, называется движение, при котором возвышение свободной поверхности над некоторой выбранной фиксированной горизонтальной плоскостью изменяется.

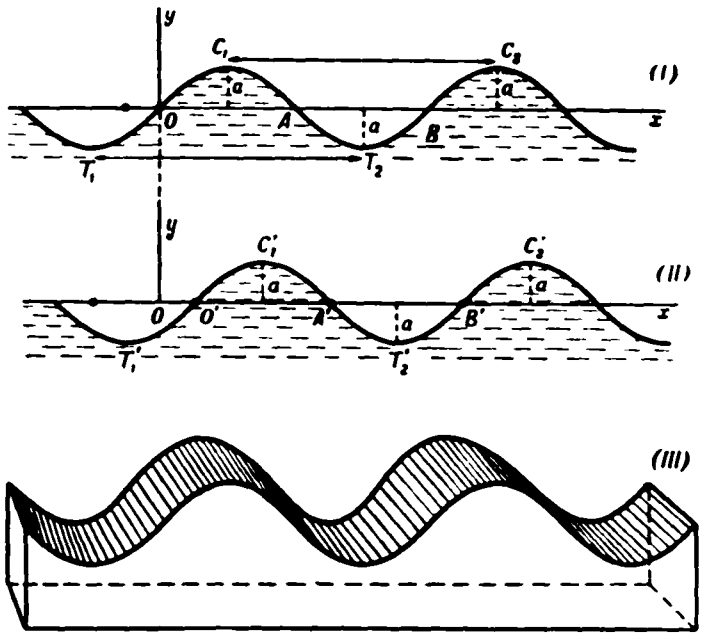


Рис. 261.

Если направить ось x горизонтально, а ось y вертикально вверх, то движение, при котором уравнение вертикального сечения свободной поверхности в момент времени t имеет вид

$$y = a \sin(mx - nt), \tag{1}$$

где a, m, n — постоянные величины, называется *простой гармонической прогрессивной волной.*

Если нарисовать *профиль* свободной поверхности (1) в момент $t = 0$, то получим синусоидальную кривую $y = a \sin mx$, изображенную на рис. 261 (*I*). Так как уравнение (1) может быть записано в форме

$$y = a \sin m\left(x - \frac{nt}{m}\right), \tag{2}$$

то мы видим, что профиль в момент времени t имеет тот же вид, что и в момент $t = 0$ относительно системы координат, начало которой перенесено в точку O', где $OO' = nt/m$ — отрезок, на который сдвинут профиль первоначальной формы (см. рис. 261 (*II*)).

Следовательно, уравнение (1) характеризует движение, при котором кривая

$$y = a \sin mx$$

движется в положительном направлении оси x со скоростью $c = n/m$, называемой *скоростью распространения волны*. Если положить $a = 0$, то получим $y = 0$ — прямолинейный профиль жидкости, являющийся ее *средним уровнем*.

Величина a называется *амплитудой* волны, она измеряет максимальное отклонение действительной свободной поверхности от среднего уровня. Точки C_1, C_2, ..., максимальные возвышения свободной поверхности, называются *гребнями*; точки T_1, T_2, ..., максимальные понижения свободной поверхности, называются *впадинами* волны. Расстояние между двумя последовательными гребнями называется *длиной волны* λ. Таким образом, имеем

$$\lambda = \frac{2\pi}{m}.$$

Форма свободной поверхности одинакова в моменты времени t и $t + 2\pi/n$. Промежуток времени

$$\tau = \frac{2\pi}{n}$$

называется *периодом* волны. Величина, обратная периоду, называется *частотой* $n/2\pi$. Угол $mx - nt$ называется *фазовым углом*, а число n обычно называют *фазовой скоростью*.

Введенные здесь величины связаны соотношением $\lambda = c\tau$. Уравнение профиля волны также может быть записано в виде

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct).$$

Заметим, что уравнение (1) характеризует двумерное движение. В этой главе мы будем рассматривать только двумерные (плоские) волновые движения, которые можно представить как движения жидкости между двумя вертикальными плоскостями, расположенными на единичном расстоянии друг от друга (см. рис. 261 (*III*)). В дальнейшем движение всегда будет считаться двумерным, если нет других указаний.

14.11. Кинематическое условие на свободной поверхности. Рассмотрим слой воды глубины h, в котором распространяются волны высоты $\eta = \eta(x, t)$ над средним уровнем, причем высота измеряется от невозмущенного уровня

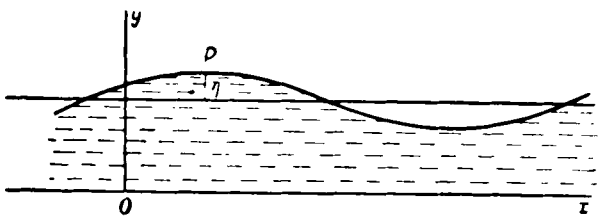


Рис. 262.

и ось x направлена вдоль дна[1]) в направлении распространения волны. Тогда уравнение свободной поверхности будет иметь вид $y - \eta - h = 0$, но так

[1]) Мы рассматриваем задачу только для случая постоянной глубины. Задачу для случая переменной глубины читатель может найти в работе S t o k e r J. J., Surface waves in water of variable depth, *Quart. J. Appl. Math.*, 5 (1947), 154. (Задачу для случая переменной глубины и волнистого дна можно найти также в монографии Дж. Дж. Стокера (см. прим. перев. на стр. 409), в монографии Л. Н. Сретенского и в сборнике переводов (см. там же). *Прим. перев.*)

как поверхность движется вместе с жидкостью, то $d(y-\eta-h)/dt=0$ (рис. 262); отсюда имеем:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+u\frac{\partial\eta}{\partial x}=v.$$

Мы будем в дальнейшем рассматривать *линейную теорию* (если явно не указано противоположное), согласно которой можно пренебречь квадратами и произведениями всех величин и их производных. В частности, величина $\partial\eta/\partial x$, измеряющая наклон профиля волны, будет считаться малой. Тогда на свободной поверхности мы получим равенство

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{1}$$

где ψ — функция тока[1]). Полученное равенство представляет собой *кинематическое условие на свободной поверхности* для волновых профилей *малой высоты и наклона*.

Из уравнения (1) следует, что в случае безвихревых волн, имеющих профиль

$$\eta=a\sin(mx-nt), \tag{2}$$

функция тока ψ при $y=h$ пропорциональна величине $\sin(mx-nt)$. На этом основании попытаемся найти решение уравнения (1) в виде комплексного потенциала $w=b\cos(mz-nt)$.

Тогда на свободной поверхности получим $\psi=-b\sin(mx-nt)\operatorname{sh}mh$ при нашей степени приближения. Подстановка этой величины в уравнение (1) приводит к равенству

$$bm\operatorname{sh}mh=an,$$

так что

$$w=\frac{ac}{\operatorname{sh}mh}\cos(mz-nt), \tag{3}$$

где $c=n/m$ — скорость распространения волны.

Следует заметить, что не было сделано никаких предположений относительно условий, которые имеют место выше профиля волны, следовательно, формула (3) справедлива в том случае, если профиль является *поверхностью раздела* между двумя жидкостями.

14.12. Условие для давления на свободной поверхности. Пусть p_i — давление внутри жидкости в точке P (см. рис. 262) и пусть p_0 — внешнее давление. Мы снова будем предполагать, что движение безвихревое; это предположение выполняется в случае волн, имеющих место в невязкой жидкости. Тогда уравнение для давления (если пренебречь членом $^1/_2q^2$) запишется в виде

$$p_i=\varrho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-g\eta\right)+C(t).$$

Слагаемое $C(t)$ можно брать независимым от t, а зависящие от времени величины можно включить в член $\partial\varphi/\partial t$. Таким образом,

$$p_i-p_0=\varrho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-g\eta\right)-p_0+\text{const}.$$

В случае постоянного (атмосферного) давления с помощью подходящего выбора функции φ мы можем написать

$$p_i-p_0=\varrho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-g\eta\right). \tag{1}$$

[1]) Из тех же соображений линейности следует, что указанное условие должно быть выполнено вдоль плоскости $y=h$. — *Прим. ред.*

В связи с этим заметим, что давления p_i и p_0 могут отличаться друг от друга только на малую величину и, следовательно, $\partial\varphi/\partial t$ должно быть мало. Таким образом, уравнение (1) представляет собой условие для давления на свободной поверхности в случае безвихревых волн малой высоты.

Если пренебречь поверхностным натяжением (см. п. 14.50), то получим $p_i - p_0 = 0$ и, следовательно,

$$g\eta' - \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

Далее, на свободной поверхности имеем

$$\varphi = \varphi(x,\ h+\eta,\ t) = \varphi(x,\ h,\ t) + \eta\left(\frac{\partial\varphi(x,\ y,\ t)}{\partial y}\right)_{y=h} + \dots .$$

Следовательно, в вышеуказанном условии на свободной поверхности мы можем во втором члене принять $y = h$, иными словами, условие на свободной поверхности мы будем писать в форме

$$g\eta = \frac{\partial\varphi(x,\ h,\ t)}{\partial t}. \tag{2}$$

Заметим, что уравнение (2) позволяет определить величину возвышения поверхности, если величина φ известна.

14.13. Поверхностные волны. Комбинируя кинематическое граничное условие (1) п. 14.11 с граничным условием для давления (2) п. 14.12, получаем

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - g\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad y = h. \tag{1}$$

Далее, из п. 14.11 в случае простой гармонической прогрессивной волны (см. рис. 262) имеем

$$w = \frac{ac}{\operatorname{sh} mh}\cos(mz - nt), \quad \eta = a\sin(mx - nt). \tag{2}$$

Таким образом, после простых вычислений из уравнения (1) получим уравнение, определяющее скорость распространения волны длиной $2\pi/m$, в следующем виде:

$$c^2 = \frac{g}{m}\operatorname{th} mh. \tag{3}$$

Уравнения (2) и (3) полностью характеризуют эти волны на поверхности воды глубиной h. Примечательно, что, в то время как уравнение (2) выводится только из кинематических соображений, уравнение (3) устанавливает соотношение между величинами n и m ($c = n/m$), для того чтобы решение было физически удовлетворительным. Скорость распространения в действительности является функцией длины волны.

В более общем случае соответствующими условиями должны быть условие (1) и условие

$$\psi = 0 \text{ при } y = 0, \tag{4}$$

так как через донную часть границы поток отсутствует.

Комплексный потенциал имеет вид

$$w = w(x + iy,\ t) = \varphi(x,\ y,\ t) + i\psi(x,\ y,\ t).$$

Поэтому из условия (4) следует, что функция w действительна, когда $y = 0$. Следовательно, аналитическая функция w может быть продолжена по принципу симметрии (п. 5.53) в область, для которой y отрицательно, точнее, в полосу $-h \leqslant y < 0$. Таким образом,

$$w(x - iy,\ t) = \varphi(x,\ y,\ t) - i\psi(x,\ y,\ t),$$

следовательно, получим

$$\varphi(x,\ y,\ t)=\frac{1}{2}[w(x+iy,\ t)+w(x-iy,\ t)],$$

$$\psi(x,\ y,\ t)=-\frac{1}{2}i[w(x+iy,\ t)-w(x-iy,\ t)].$$

Полагая здесь $y=h$ и подставляя результат в условие (1), мы получаем уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[w(x+ih,\ t)+w(x-ih,\ t)]+ig\frac{\partial}{\partial x}[w(x+ih,\ t)-w(x-ih,\ t)]=0.$$

Так как w — аналитическая функция, то это уравнение должно иметь место для любой точки в области существования этой функции. Таким образом, мы можем написать z вместо x и получить уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[w(z+ih,\ t)+w(z-ih,\ t)]+ig\frac{\partial}{\partial z}[w(z+ih,\ t)-w(z-ih,\ t)]=0. \qquad (5)$$

Это уравнение впервые получил Чизотти [1]).

Отсюда следует, что любая аналитическая функция $w(z,\ t)$, действительная на действительной оси, т. е. действительная при действительном z и удовлетворяющая уравнению (5), является комплексным потенциалом для бесконечно малого движения воды глубины h. Граничные условия (1) и (4) удовлетворяются автоматически.

Читатель может убедиться, что путем подстановки комплексного потенциала (2) в уравнение (5) получается условие (3). Таким образом, уравнение Чизотти полностью описывает волны указанного типа.

14.14. Скорость распространения. Скорость распространения, выраженная через длину волны $\lambda=2\pi/m$, задается формулой (3), п. 14.13 в виде

$$\frac{c^2}{gh}=\frac{\lambda}{2\pi h}\operatorname{th}\frac{2\pi h}{\lambda}.$$

Если отношение λ/h мало, то отношение $2\pi h/\lambda$ велико и, следовательно, приближенно $c^2/gh=\lambda/2\pi h$, так как $\operatorname{th}\theta\to 1$ при $\theta\to\infty$. Таким образом, для малых значений λ/h скорость c пропорциональна $\sqrt{\lambda}$. С другой

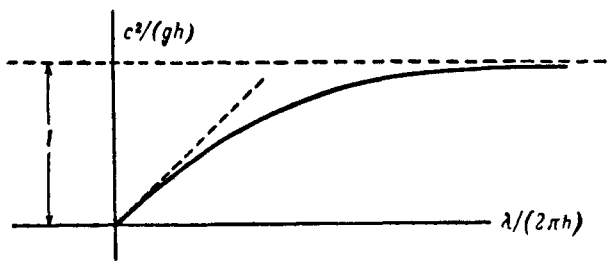


Рис. 263.

стороны, если отношение λ/h велико, то отношение h/λ мало и, следовательно, приближенно $c^2=gh$, так что скорость распространения стремится к постоянному значению $\sqrt{gh}$, которое она не может превзойти. Эти результаты изображены графически на рис. 263, из которого видно, что данному значению $c<\sqrt{(gh)}$ соответствует только одна длина волны

[1]) Cisotti, *Rend. Lincei*, (6), 29 (1920). [См. также монографию Л. Н. Сретенского, § 55 (прим. перев. на стр. 409).— *Прим. перев.*]

и что каждое такое значение является скоростью распространения некоторой волны. Результаты значительно изменяются из-за влияния поверхностного натяжения (см. п. 14.54).

14.15. Траектории частиц. Пусть z — *фиксированная* контрольная точка и пусть $z + z'$ — положение частицы воды в момент времени t; при этом предполагается, что модуль $|z'|$ мал. Тогда для волн малой высоты скорость в точке $z + z'$ будет отличаться от скорости в точке z членами второго порядка малости. Таким образом, из формулы (2) п. 14.13, если отбросим члены второго порядка, получим равенство

$$\frac{d\bar{z}'}{dt} = -\frac{dw}{dz} = \frac{acm}{\operatorname{sh} mh} \sin(mz - nt).$$

Интегрируя это равенство и подставляя фиксированное значение z, выбранное таким образом, чтобы произвольная постоянная интегрирования обращалась в нуль, и учитывая равенство $c = n/m$, получаем соотношение

$$\bar{z}' = \frac{ia}{\operatorname{sh} mh} \cos(mz - nt).$$

Приравнивая действительные и мнимые части, находим равенства

$$x' = \frac{a \cos(mx - nt) \operatorname{ch} my}{\operatorname{sh} mh},$$

$$y' = \frac{a \sin(mx - nt) \operatorname{sh} my}{\operatorname{sh} mh},$$

следовательно,

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} = 1, \quad \alpha = \frac{a \operatorname{ch} my}{\operatorname{sh} mh}, \quad \beta = \frac{a \operatorname{sh} my}{\operatorname{sh} mh}.$$

Поэтому траектория частицы представляет собой эллипс с горизонтальной полуосью α и вертикальной полуосью β и центр эллипса расположен в среднем положении частиц — в точке z.

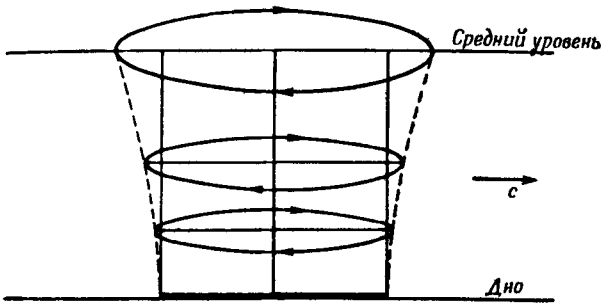


Рис. 264.

Так как $\alpha^2 - \beta^2 = a^2/\operatorname{sh}^2 mh$, то все эллипсы имеют одинаковое расстояние между их фокусами, но длины осей эллипсов уменьшаются с погружением в глубину жидкости. На дне $y = 0$ и, следовательно, $\beta = 0$, так что эллипс вырождается в прямую линию и частицы на дне просто движутся назад и вперед. Общий характер траекторий частиц, средние положения которых соответствуют одной и той же вертикальной линии, изображен на рис. 264.

Мы замечаем также, что фазовый угол $(mx - nt)$ волны является одновременно эксцентрическим углом эллипса, так что каждая частица описывает свой эллипс за время, равное периоду волны, и все они находятся в одной и той же фазе. Вертикальная линия, состоящая из частиц жидкости в начальный

момент, начинает изгибаться при движении жидкости, что иллюстрируется пунктирной линией на рис. 264; эта линия изгибается, подобно стеблю травы под действием ветра; однако жидкая линия, кроме того, и перемещается.

Следует заметить также, что все частицы, расположенные под гребнем или впадиной, движутся горизонтально на той же вертикальной линии. В частности, частица, находящаяся на гребне, движется вперед в наивысшую точку эллипса, в то время как во впадине она движется в обратном направлении в самую низшую точку эллипса. Это замечание относится к приливам и приливным течениям.

14.17. Прогрессивные волны на глубокой воде. Для волн, поверхностное возвышение которых определяется соотношением

$$\eta = a \sin (mx - nt), \tag{1}$$

комплексный потенциал задается формулой (2) п. 14.13 (рис. 265). Если перенести начало координат на невозмущенную поверхность, то получим

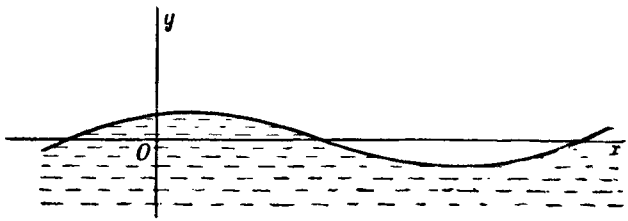


Рис. 265.

комплексный потенциал в виде

$$w = \frac{ac \cos (mz + mih - nt)}{\operatorname{sh} mh} =$$

$$= ac \left[\cos (mz - nt) \operatorname{cth} mh - i \sin (mz - nt)\right].$$

Если $h \to \infty$, то мы получим $\operatorname{cth} mh \to 1$ и, следовательно, для волн на глубокой воде

$$w = ace^{-i(mz - nt)}. \tag{2}$$

Скорость распространения волн на глубокой воде, согласно уравнению (3) п. 14.13, выражается формулой

$$c^2 = \frac{g}{m} = \frac{g\lambda}{2\pi},$$

так что скорость распространения пропорциональна квадратному корню из длины волны.

Для траекторий частиц, согласно результатам п. 14.15, имеют место уравнения

$$\frac{d\bar{z}'}{dt} = -\frac{dw}{dz} = iacme^{-i(mz - nt)},$$

$$\bar{z}' = ae^{-i(mz - nt)} = ae^{-i(mx - nt)}e^{my}.$$

Отсюда $|z'| = ae^{my}$, траектории частиц представляют собой окружности радиуса a. Когда $y \to -\infty$, то радиусы окружностей стремятся к нулю.

Для того чтобы в предыдущем исследовании воду можно было считать глубокой, необходимо только, чтобы выполнялось условие $\operatorname{cth} mh = 1 = \operatorname{th} mh$. Заметим теперь, что $\operatorname{th} 2{,}65 = 0{,}99$; указанное условие выполняется в том

случае, если выполняется неравенство

$$mh = \frac{2\pi h}{\lambda} > 2{,}65.$$

Таким образом, воду можно, несомненно, рассматривать как глубокую, если глубина превышает половину длины волны.

Подводная лодка, расположенная на глубине, равной половине длины волны, почти не будет воспринимать движение воды, обусловленное поверхностными волнами.

14.18. Давление, обусловленное волной на глубокой воде. Если p — давление на частицу, среднее положение которой соответствует точке z, то уравнение давления имеет вид

$$\frac{p}{\varrho} + g(y + y') - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{const}.$$

Теперь, с одной стороны, величина gy' равна мнимой части от выражения $-age^{-i(mz-nt)}$; с другой стороны, величина gy' равна действительной части выражения $iage^{-i(mz-nt)}$; кроме того, величина $\partial\varphi/\partial t$ равна действительной части от выражения $iacne^{-i(mz-nt)}$. Отсюда заключаем, что $\partial\varphi/\partial t = gy'$, так как $c^2 = g/m$.

Таким образом, получаем уравнение $p/\varrho + gy = \text{const}$; иными словами, давление на любую частицу равно давлению в среднем положении этой частицы.

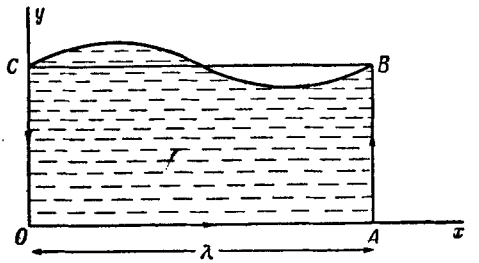


Рис. 266.

14.20. Кинетическая энергия прогрессивных волн. Кинетической энергией прогрессивной волны мы будем называть кинетическую энергию жидкости, отнесенную к единице толщины и заключенную между двумя вертикальными плоскостями, помещенными на расстоянии длины волны друг от друга и перпендикулярными направлению распространения волны (рис. 266).

Проведем одну из плоскостей через ось y, тогда на основании п. 9.10 для жидкости, находящейся внутри контура, справедливо равенство

$$T = +\frac{1}{4} i\varrho \int_{(OABC)} w\, d\bar{w}.$$

В силу периодического характера движения ясно, что величина w имеет одно и то же значение в соответствующих точках линий AB и OC и, следовательно, вклад от этих линий в интеграл равен нулю. Таким образом, для прогрессивной волны п. 14.13 мы имеем

$$T = -\frac{1}{4} i\varrho \frac{a^2c^2m}{\operatorname{sh}^2 mh} \int_{(OA)+(BC)} \cos(mz - nt) \sin(m\bar{z} - nt)\, d\bar{z} =$$

$$= -\frac{1}{8} i\varrho \frac{a^2c^2m}{\operatorname{sh}^2 mh} \int_{(OA)+(BC)} (\sin 2(mx - nt) - i \operatorname{sh} 2my)\, d\bar{z}.$$

Далее, вместо того чтобы интегрировать вдоль профиля волны BC, мы можем интегрировать вдоль прямой линии BC, так как возвышение мало. Таким образом, используя формулу (3) п. 14.13, находим

$$T = -\frac{1}{8} i\varrho \frac{a^2c^2m}{\operatorname{sh}^2 mh} \int_0^{\lambda} i \operatorname{sh} 2mh\, dx = \frac{1}{4} a^2 g \varrho \lambda.$$

14.21. Потенциальная энергия. Потенциальная энергия, отнесенная к единице толщины, обусловлена возвышением воды на интервале длины волны и, следовательно, отсчитывается от невозмущенного уровня; она вычисляется по формуле

$$\int_0^{\lambda} \frac{1}{2}\eta \cdot g\varrho\eta\, dx = \frac{1}{4}a^2 g\varrho \int_0^{\lambda} 2\sin^2(mx-nt)\, dx = \frac{1}{4}a^2 g\varrho\lambda$$

и равна кинетической энергии.

Таким образом, полная энергия прогрессивной синусоидальной волны равна $\frac{1}{2}a^2 g\varrho\lambda$ на единицу длины, причем половина этой энергии является кинетической, а половина — потенциальной энергией, обусловленной возвышением жидкости над невозмущенным уровнем.

Можно также заметить, что *средняя энергия*, приходящаяся на единицу длины волны, равна $\frac{1}{2}a^2 g\varrho$.

14.22. Групповая скорость. Местное возмущение поверхности спокойной воды создает волну, которую можно разложить на ряд простых гармонических компонент, каждая из которых имеет разную длину волны. Мы видели, что скорость распространения зависит от длины волны. Таким образом, волны различной длины постепенно разделяются на группы волн приблизительно одинаковой длины. В общем случае волн на воде групповая скорость меньше, чем скорость отдельных составляющих волн. В этом случае происходит следующее: передние волны выходят из группы, а новые волны сзади входят в группу. Энергия группы остается постоянной.

Для изучения свойств такой группы рассмотрим сначала частный случай возмущения, обусловленного наложением двух волн одинаковой амплитуды

$$\eta_1 = a\sin(mx-nt), \quad \eta_2 = a\sin\{(m+\delta m)x-(n+\delta n)t\},$$

где δm, δn — бесконечно малые величины. Результирующее возмущение будет иметь вид

$$\eta = 2a\cos\frac{1}{2}(x\,\delta m - t\,\delta n)\sin(mx-nt) = A\sin(mx-nt), \qquad (1)$$

где $A=2a\cos(x\,\delta m - t\,\delta n)$. Следовательно, из уравнения (1) мы видим, что результат наложения двух волн можно рассматривать как прогрессивную волну с переменной амплитудой, которая изменяется как волна со скоростью $c_g=\delta n/\delta m$. Эта скорость называется *групповой скоростью*, для волн длины λ она выражается в виде

$$c_g = \frac{dn}{dm} = \frac{d(mc)}{dm} = c + m\frac{dc}{dm} = c - \lambda\frac{dc}{d\lambda}.$$

Используя значение скорости волны c, определяемое формулой (3) п. 14.13, мы получаем для одной группы простых гармонических волн следующее выражение для скорости:

$$c_g = c\left(1+\frac{m}{2c^2}\frac{dc^2}{dm}\right) = \frac{1}{2}c\left(1+\frac{2mh}{\operatorname{sh}2mh}\right).$$

Если $mh=2\pi h/\lambda$ велико, то групповая скорость равна $\frac{1}{2}c$. Таким образом, для волн на глубокой воде групповая скорость равна половине скорости волны. Если вода очень мелкая (h/λ мало), то групповая скорость равна скорости волны.

В более общем случае местное возмущение, такое, как всплеск, будет порождать волны различной длины с малыми амплитудами a, a_1, a_2, ... Если рассматривать только волны приблизительно одинаковой длины $2\pi/m$, то возвышение на расстоянии x в момент времени t будет состоять из

суммы большого числа бесконечно малых членов; таким образом,

$$\eta = a\sin[mx - nt] + a_1\sin[(m+\delta m_1)x - (n+\delta n_1)t + \varepsilon_1] + \ldots =$$
$$= A\sin(mx - nt) + B\cos(mx - nt) = C\sin(mx - nt + \varepsilon),$$

где

$$A = a + a_1\cos(x\,\delta m_1 - t\,\delta n_1 + \varepsilon_1) + a_2\cos(x\,\delta m_2 - t\,\delta n_2 + \varepsilon_2) + \ldots,$$
$$B = a_1\sin(x\,\delta m_1 - t\,\delta n_1 + \varepsilon_1) + a_2\sin(x\,\delta m_2 - t\,\delta n_2 + \varepsilon_2) + \ldots,$$
$$C^2 = A^2 + B^2, \quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{B}{A}.$$

Далее, имеем

$$x\delta m_1 - t\delta n_1 + \varepsilon_1 = \delta m_1\left(x - \frac{\delta n_1}{\delta m_1}t\right) + \varepsilon_1 = \delta m_1(x - c_g t) + \varepsilon_1,$$
$$x\delta m_2 - t\delta n_2 + \varepsilon_2 = \delta m_2(x - c_g t) + \varepsilon_2, \ldots.$$

Следовательно, величины A, B, а значит, и величины C и ε являются функциями от $(x - c_g t)$. Таким образом, огибающая графика амплитуд движется как волна со скоростью c_g (рис. 267).

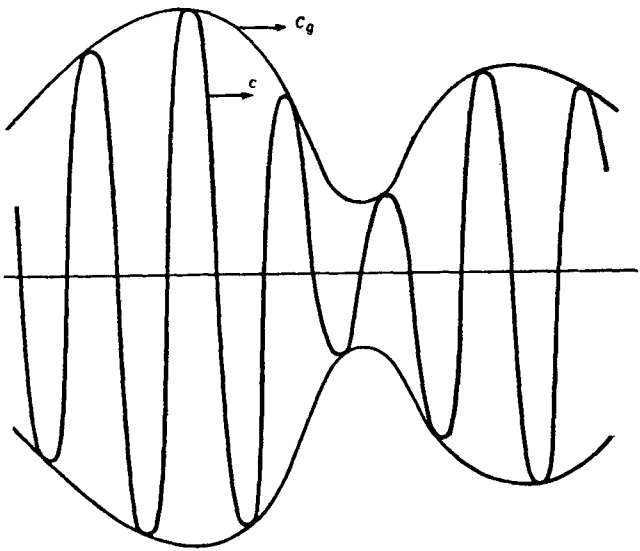


Рис. 267.

14.23. Динамический смысл групповой скорости. *В простой системе гармонических волн энергия переносится через вертикальную плоскость, перпендикулярную направлению распространения волн, со средней скоростью, равной групповой скорости.*

Доказательство. Пусть p — переменная часть давления и пусть u — горизонтальная скорость для фиксированного значения x; тогда работа сил давления, которая совершается в единицу времени и приложена к жидкости, находящейся справа от плоскости x, равна

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_0^h pu\,dy.$$

Далее, поскольку $p = \varrho\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, и равняется действительной части от выражения $\varrho\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\varrho nac}{\operatorname{sh} mh}\sin(mx - nt)\operatorname{ch} my$, а величина u равна действительной

части от выражения $-\frac{dw}{dz}=\frac{mac}{\operatorname{sh} mh}\sin(mx-nt)\operatorname{ch} my$, то имеем соотношение

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{a^2c^2mn\varrho}{\operatorname{sh}^2 mh}\sin^2(mx-nt)\frac{1}{2}\left(h+\frac{\operatorname{sh} 2mh}{2m}\right).$$

Среднее значение выражения $\sin^2(mx-nt)$ за период равно $1/2$. Следовательно, средняя мощность определяется соотношением

$$\frac{a^2c^2mn\varrho}{4\operatorname{sh}^2 mh}\frac{\operatorname{sh} 2mh}{2m}\left(1+\frac{2mh}{\operatorname{sh} 2mh}\right)=\frac{a^2c^2m\varrho}{2}\operatorname{cth} mhc_g=\frac{1}{2}g\varrho a^2c_g,$$

в котором была использована формула (3) п. 14.13. Но величина $\frac{1}{2}g\varrho a^2$ является энергией, отнесенной к единице длины волны. Таким образом, энергия переносится через плоскость со средней скоростью c_g.

14.24. Волновое сопротивление. Твердое тело, такое, например, как корабль, движущийся по поверхности воды, оставляет за собой волновой след. Эти волны обладают энергией, которая уносится жидкостью и рассеивается. Эта энергия возникает за счет энергии движущегося тела, которое вследствие этого испытывает сопротивление R. Если c — скорость тела и, следовательно, скорость волнового следа, то мощность, которая тратится на преодоление сопротивления R, равна Rc. Если мы рассмотрим неподвижную плоскость, проведенную в нижнем бьефе потока (движение считается двумерным), перпендикулярно направлению движения тела, то скорость, с которой длина волнового следа увеличивается впереди этой плоскости, равна c, а, следовательно, скорость возрастания энергии впереди плоскости равна $c\cdot\frac{1}{2}g\varrho a^2$, где a — амплитуда. Но мы знаем, что энергия переносится через неподвижную плоскость со скоростью, равной групповой скорости. Таким образом, получаем

$$c\cdot\frac{1}{2}g\varrho a^2=c_g\cdot\frac{1}{2}g\varrho a^2+Rc,$$

и, следовательно,

$$R=\frac{c-c_g}{c}\cdot\frac{1}{2}g\varrho a^2=\frac{1}{4}g\varrho a^2\left(1-\frac{2mh}{\operatorname{sh} 2mh}\right),$$

если $2\pi/m$ — длина волны, а h — глубина жидкости (см. п. 14.22).

Так как скорость распространения волн не может превышать величину критической скорости, равной $\sqrt{gh}$, то, следовательно, если тело имеет скорость, большую критической скорости, то никакой волновой след не будет сопровождать тело и волновое сопротивление будет равно нулю. Это обстоятельство хорошо подтверждается наблюдениями.

14.30. Стоячие, или стационарные волны[1]). Две системы простых гармонических волн равной амплитуды, распространяющиеся в противоположных

[1]) Здесь, в пп. 14.30—14.34 приведена линейная теория бесконечно малых стоячих волн. Однако в литературе имеются исследования по теории стоячих волн конечной амплитуды, в которых находятся решения полных уравнений гидродинамики, удовлетворяющие нелинейным граничным условиям. При решении применяются ряды по степеням малого параметра и переменные Лагранжа; при этом в качестве первого члена берется данное решение линейной теории. Показано, что, удовлетворяя всем условиям, можно построить любое приближение, однако сходимость рядов не доказана. Установлен ряд свойств стоячей волны конечной амплитуды, отличающих ее от волны линейной теории. Основные результаты в этой теории получены Я. И. Секерж-Зеньковичем в его работах, опубликованных в 1947—1959 гг.; первая из них называется «К теории стоячих волн конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости», *ДАН СССР*, 8, № 4 (1947), 551—553. Темы многих последующих работ того же автора и других авторов можно найти в статье Вейхаузена (см. прим. перев. на стр. 409) и в вводной статье к сборнику переводов (указанных там же). Тот же автор рассмотрел конечные колебания поверхности раздела двух неограниченных жидкостей разных плотностей, расположенных одна над другой (см. *ДАН СССР*, **136**, № 1 (1961), 51—59; *Труды Морского гидрофизического института АН СССР*, **XXIII** (1961), 3—43. — *Прим. перев.*

направлениях, заданы следующими законами изменения возвышений свободной поверхности:

$$\eta_1 = \frac{1}{2} a \sin(mx - nt), \quad \eta_2 = \frac{1}{2} a \sin(mx + nt).$$

В результате наложения этих волн получаем закон изменения возвышения вида

$$\eta = a \sin mx \cos nt.$$

Движение такого типа называется *стоячей*, или *стационарной*, волной. При данном фиксированном значении x поверхность воды движется вверх и вниз. В данный момент времени t форма поверхности представляет собой синусоидальную кривую с амплитудой $a \cos nt$, изменяющейся, следовательно, от 0 до a. Волна такого типа не перемещается в пространстве.

Точки, в которых $mx = s\pi$, где $s = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots$, всегда неподвижны на средней поверхности уровня и называются *узлами*. Точки, в которых $mx = (2s+1)\,\pi/2$, являются точками максимального перемещения для данного значения t и называются *пучностями*. Если $\cos nt = \pm 1$, то поверхность имеет форму синусоидальной кривой $\eta = \pm a \sin mx$, представляющей максимальное отклонение свободной поверхности от среднего уровня. Когда $\cos nt = 0$, свободная поверхность совпадает с плоскостью среднего уровня.

Если ряд прогрессивных волн, представляемых функцией η_1, ударяется о вертикальную стенку и отражается от нее (η_2), то результирующее возмущение после достижения установившейся стадии состоит из стоячих волн.

Такие волны, например, могут быть вызваны легким наклоном прямоугольного сосуда, содержащего воду, и возвращением его в прежнее положение. Уровень воды на краях сосуда движется вверх и вниз вдоль вертикальных стенок, которые являются пучностями. И обратно, прогрессивную волну можно рассматривать как волну, образованную наложением двух стоячих волн.

14.31. Комплексный потенциал стоячих волн. Для получения стоячих волн мы можем подставить в формулу (5) п. 14.13 соответствующую гармоническую по времени функцию для w. Положив

$$w(z, t) = A \sin mz \sin nt,$$

мы получим

$$w(z + ih, t) + w(z - ih, t) = 2A \sin mz \operatorname{ch} mh \sin nt,$$
$$w(z + ih, t) - w(z - ih, t) = 2iA \cos mz \operatorname{sh} mh \sin nt.$$

После подстановки в указанную формулу мы получим $n^2 = mg \operatorname{th} mh$. Это уравнение связывает частоту с длиной волны. Поверхностное возвышение $g\eta$ равно действительной части от выражения (2) п. 14.12,

$$g\eta = Re \frac{\partial w(x+ih, t)}{\partial t} = An \sin mx \operatorname{ch} mh \cos nt.$$

Следовательно, если возвышение равно $\eta = a \sin mx \cos nt$, то мы получаем

$$a = An \operatorname{ch} mh/g = Am \operatorname{sh} mh/n,$$

так что

$$w = \frac{ac}{\operatorname{sh} mh} \sin mz \sin nt, \qquad c = \frac{n}{m}.$$

Этот результат можно получить сразу путем наложения двух решений вида, найденного в п. 14.13; в этом случае имеем

$$w = \frac{1}{2} ac \operatorname{csch} mh \cos(mz - nt) - \frac{1}{2} ac \operatorname{csch} mh \cos(mz + nt).$$

14.32. Траектории частиц в стоячей волне. Будем использовать метод, изложенный в п. 14.15. Пусть $z+z'$— смещенное положение частицы в момент времени t, пусть z — среднее положение частицы. Тогда получаем

$$\frac{d\bar{z}'}{dt} = -\frac{dw}{dz} = -\frac{acm}{\operatorname{sh} mh}\cos mz \sin nt,$$

$$\bar{z}' = \frac{a}{\operatorname{sh} mh}\cos mz \cos nt.$$

Таким образом, $\arg \bar{z}'$ является постоянной величиной и, следовательно, частицы совершают простое гармоническое движение периода $2\pi/n$, равное периоду волны. Амплитуда этого движения равна

$$\frac{a}{\operatorname{sh} mh}|\cos mz| = \frac{a}{\operatorname{sh} mh}\left\{\frac{1}{2}(\cos 2mx + \operatorname{ch} 2my)\right\}^{1/2}.$$

Таким образом, амплитуда уменьшается при перемещении вниз по поверхности. Наклон линии, соответствующей среднему положению z, равен

$$\arg z' = \arg \cos m\bar{z} = \operatorname{arctg}\{\operatorname{tg} mx \operatorname{th} my\}.$$

Следовательно, этот наклон равен нулю для узлов ($mx = s\pi$) и $\frac{1}{2}\pi$ — для пучностей. Таким образом, под узлами частицы движутся горизонтально, под пучностями они движутся вертикально (рис. 268).

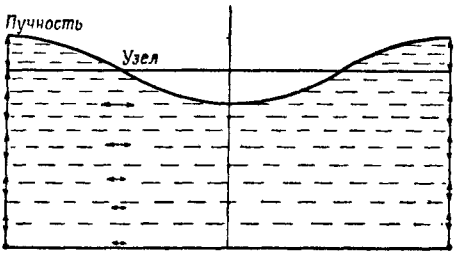


Рис. 268.

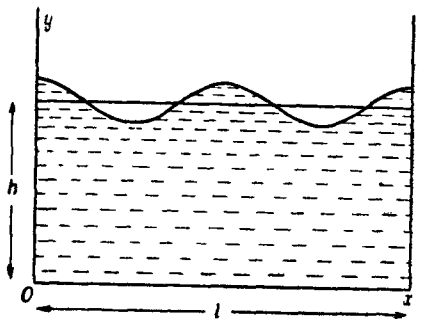


Рис. 269.

14.33. Стоячие волны в прямоугольном бассейне. Так как движение под пучностями в стоячих волнах вертикальное, то движение между двумя данными пучностями не изменится, если в них поместить две неподвижные твердые вертикальные плоскости. Тогда мы получим случай жидкости, колеблющейся в бассейне конечных размеров.

Рассмотрим прямоугольный бассейн длины l. Поместим начало координат на дне у стенки бассейна и ось y направим вертикально вверх. Так как при $x = 0$ мы имеем пучность, то возмущенная поверхность должна иметь вид

$$\eta = a\cos mx \cos nt,$$

и отсюда

$$w = ac\cos mz \sin nt/\operatorname{sh} mh.$$

Так как при $x = l$ также должна быть пучность, то мы получим

$$ml = s\pi,$$

где s — любое целое число. Таким образом, возможные длины волн при колебании принимают значения

$$\lambda = 2l,\ l,\ 2l/3,\ 2l/4,\ \ldots\ .$$

Если фотографическую пластинку проявлять, покачивая ванночку, содержащую проявляющий раствор, то надо позаботиться о том, чтобы изменять

частоту колебаний, иначе части пластинки, расположенные ниже пучности волны, недопроявятся, так как раствор вблизи этих точек имеет очень незначительное движение и химическое действие раствора вскоре прекратится, что приведет к образованию полос на фотопластинке.

14.34. Энергия стоячих волн. Рассмотрим слой единичной толщины; потенциальная энергия этого слоя на интервале длины волны задается формулой

$$V = \int_0^{\lambda} \frac{1}{2} \eta \cdot g\varrho\eta \, dx.$$

Если возьмем $\eta = a \sin mx \cos nt$, то получим $V = \frac{1}{4} g\varrho a^2 \cos^2 nt \cdot \lambda$, и если $\cos nt = 1$, то потенциальная энергия равна $^1/_4 g\varrho a^2\lambda$.

В рассматриваемый момент времени вся энергия является потенциальной, так как кинетическая энергия зависит от скорости, нормальной к границе (см. п. 3.72), которая равна нулю. Кинетическая энергия стоячей волны в момент времени t равна $T = {}^1/_4 g\varrho a^2 \sin^2 nt \cdot \lambda$.

14.40. Установившееся движение[1]). Комплексный потенциал для простой синусоидальной волны, движущейся вперед, был получен в виде уравнения (3) п. 14.11. Если мы будем рассматривать оси координат, движущиеся

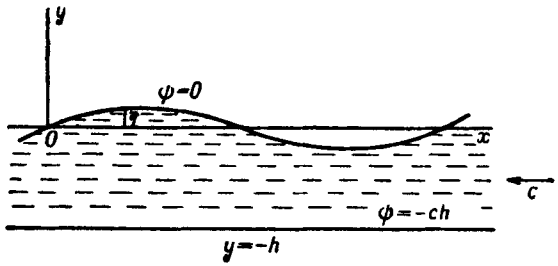


Рис. 270.

вместе с волной, то комплексный потенциал можно получить путем замены величины z суммой $z'+ct$; тогда комплексный потенциал принимает вид (рис. 270)

$$\frac{ac \cos mz'}{\operatorname{sh} mh}.$$

Если всей системе придать скорость c в направлении отрицательной оси x, то оси координат и волновой профиль останутся неподвижными, а жидкость будет иметь общую скорость c, направленную справа налево, причем комплексный потенциал теперь имеет вид

$$w = cz' + \frac{ac \cos mz'}{\operatorname{sh} mh}.$$

Эта измененная формула комплексного потенциала соответствует установившемуся движению, при котором сила, действующая на любую частицу, не изменяется, так как добавление постоянной скорости не оказывает динамического

[1]) В линейной теории установившихся волн на поверхности жидкости бесконечной глубины весьма плодотворен метод М. В. Келдыша (см. Технич. заметки ЦАГИ, № 52, 1935), основанный на применении аналитической функции $F(z) = dw/dz + giw/c^2$ (см. также прим. перев. на стр. 409).— *Прим. перев.*

воздействия. Проведенная замена переменных удобна тем, что в новой системе отсчета профиль волны теперь является линией тока, соответствующей постоянному значению ψ. В приложениях обычно удобнее начало координат брать на невозмущенной поверхности, следовательно, надо написать $z+ih$ вместо z'. Таким образом, окончательно, опуская постоянную cih, получим комплексный потенциал в виде

$$w = cz + \frac{ac\cos m(z+ih)}{\operatorname{sh} mh}. \tag{1}$$

Дно теперь является также линией тока

$$\psi = -ch,$$

в то время как на свободной поверхности имеем

$$\psi = c\eta - \frac{ac}{\operatorname{sh} mh}\operatorname{sh} m(\eta+h)\sin mx = c\eta = ac(\operatorname{ch} m\eta + \operatorname{sh} m\eta \operatorname{cth} mh)\sin mx.$$

Но с принятой точностью поверхность является линией тока $\psi=0$, так что, пренебрегая величиной η^2, получаем формулу

$$\eta = a\sin mx. \tag{2}$$

В случае глубокой воды комплексный потенциал принимает вид

$$w = cz + ace^{-imz}, \tag{3}$$

поэтому для линии тока на поверхности, где $\psi = 0$, имеем

$$\eta = ae^{m\eta}\sin mx, \tag{4}$$

что соответствует формуле (2) с принятой точностью.

14.41. Второе приближение для величины скорости волны. Рассмотрим для простоты случай глубокой воды; в этом случае комплексный потенциал и профиль поверхности задаются формулами (3) и (4) п. 14.40. Замечаем, что формула (4) получается из равенства (3), если в нем положить $\psi = 0$, но при этом не предполагается, что формула (4) обязательно соответствует поверхности постоянного давления. Для квадрата модуля скорости имеем формулу

$$q^2 = \frac{dw}{dz}\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} = c^2(1 - imae^{-miz})(1 + imae^{im\bar{z}}) =$$
$$= c^2(1 - 2ame^{my}\sin mx + a^2m^2e^{2my}).$$

Отсюда на свободной поверхности находим соотношение

$$q^2 = c^2\{1 - 2m\eta + a^2m^2e^{2m\eta}\} = c^2\{1 - 2m\eta + a^2m^2(1 + 2m\eta + 2m^2\eta^2 + \ldots)\}.$$

Если p — давление в жидкости на свободной поверхности, а Π — внешнее давление, то уравнение для давления теперь имеет вид

$$p - \Pi = \varrho\{-g\eta + m\eta c^2 - c^2a^2m^3\eta - c^2a^2m^4\eta^2 - \ldots\} + \text{const} =$$
$$= \varrho\eta\{-g + c^2m - c^2a^2m^3\} - \varrho c^2a^2m^4\eta^2 - \ldots + \text{const}. \tag{1}$$

Если в этих формулах пренебречь членами, содержащими a^2, то получим $p=\Pi$, если $c^2 = g/m$; этот результат был уже получен ранее. Более точное равенство величин p и Π получим, если пренебрежем членами, содержащими $a^2m^4\eta^2$, которые являются величинами четвертого и более высокого порядка малости. В результате этого свободная поверхность будет поверхностью

постоянного давления, если $-g+c^2m-c^2a^2m^3=0$, откуда получаем

$$c^2=\frac{g}{m}(1-a^2m^2)^{-1}=\frac{g}{m}(1+a^2m^2),$$

где были опущены члены четвертого порядка малости. Полученное соотношение является более точным приближением для скорости волны. Заметим, что скорость, найденная таким образом, зависит не только от длины волны, но также и от амплитуды.

Максимальная величина первого члена, которым мы пренебрегали в формуле (1), а именно $-\varrho c^2a^2m^4\eta^2$, равна $-2g\varrho a\,(a^3m^3/2)$, эта величина является правильной дробью от выражения $a^3m^3/2$— разности давления между гребнем и впадиной. Таким образом, для волны с амплитудой 4 фута и длиной 80 футов эта дробь равна

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{80}\cdot 4\right)^3=0{,}015.$$

Следовательно, давление, которым мы пренебрегаем, самое большее равно 0,03456 *м* вод. ст.

14.42. Волны на поверхности раздела. Рассмотрим жидкость, плотности ϱ' и глубины h', текущую с постоянной скоростью V', по слою жидкости

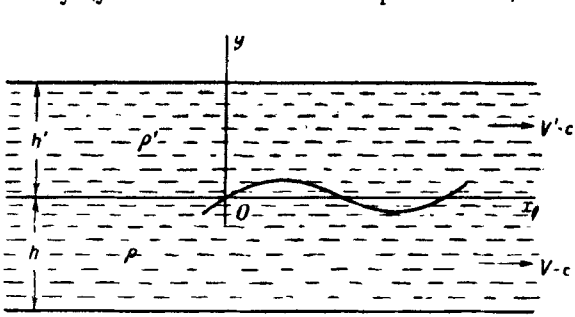


Рис. 271.

плотности ϱ и глубины h, текущей с постоянной скоростью V, причем жидкости сверху и снизу ограничены твердыми горизонтальными плоскостями.

Поместим ось x вдоль (геометрической) поверхности раздела, которая отделяет жидкости и составляет вихревой слой. Для исследования того факта, что волны малого возвышения $\eta=a\sin(mx-nt)$, могут распространяться по поверхности раздела со скоростью $c=n/m$, придадим всей массе жидкости скорость c, противоположную направлению распространения; таким образом, профиль волны станет неподвижным, а скорости потоков относительно профиля будут равны $V'-c$ и $V-c$ (рис. 271). Из п. 14.40 следует, что комплексный потенциал для нижнего слоя жидкости имеет вид

$$w=-(V-c)z-\frac{a(V-c)}{\operatorname{sh} mh}\cos m(z+ih), \qquad (1)$$

тогда линией тока $\psi=0$ является синусоида $\eta=a\sin mx$.

Отсюда сразу получим выражение потенциала для верхнего слоя жидкости, написав $-h'$ вместо h; в результате получим

$$w'=-(V'-c)z+\frac{a(V'-c)}{\operatorname{sh} mh'}\cos m(z-ih'). \qquad (2)$$

Пренебрегая величиной a^2 для скорости в нижнем слое, получаем формулу

$$q^2 = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} = (V-c)^2 - \frac{2ma\,(V-c)^2}{\operatorname{sh} mh} \operatorname{ch} m(y+h) \sin mx,$$

следовательно, на поверхности раздела скорость выражается в виде

$$q_0^2 = (V-c)^2\{1 - 2m\eta \operatorname{cth} mh\},$$

а для верхнего слоя жидкости скорость на той же поверхности равна

$$q_0'^2 = (V'-c)^2\{1 + 2m\eta \operatorname{cth} mh'\}.$$

Теперь на поверхности раздела уравнение давления для обеих жидкостей записывается в виде

$$p' + \tfrac{1}{2}\varrho' q_0'^2 + \varrho' g\eta = \text{const}, \tag{3}$$

$$p + \tfrac{1}{2}\varrho q_0^2 + \varrho g\eta = \text{const}. \tag{4}$$

Но давление должно быть непрерывно и, следовательно, $p = p'$. После почленного вычитания уравнений (3) и (4) получим

$$\tfrac{1}{2}\varrho' q_0'^2 - \tfrac{1}{2}\varrho q_0^2 + g\eta(\varrho' - \varrho) = \text{const}.$$

Подставив сюда значения q_0 и q_0', мы должны будем потребовать, чтобы коэффициент при η в полученном выражении обращался в нуль, следовательно, находим уравнение

$$m\varrho(V-c)^2 \operatorname{cth} mh + m\varrho'(V'-c)^2 \operatorname{cth} mh' = g(\varrho - \varrho').$$

Это уравнение определяет скорость распространения волн. Сделаем следующие замечания:

(I) Если $\varrho' = 0$, $V = 0$, то уравнение сводится к формуле (3) п. 14.13.

(II) Если обе жидкости имеют бесконечную глубину, то уравнение упрощается и принимает вид

$$m\varrho(V-c)^2 + m\varrho'(V'-c)^2 = g(\varrho - \varrho').$$

(III) Условие устойчивости свидетельствует о том, что волны рассматриваемого типа могут распространяться, т. е. величина c будет действительной.

(IV) В общем случае уравнению удовлетворяют два значения велнчины c.

(V) Если $c = 0$, то волна стоячая.

(VI) Если обе жидкости покоятся, за исключением волнового движения, то $V = V' = 0$; если при этом глубина каждой жидкости бесконечна, то

$$c^2 = \frac{g(\varrho - \varrho')}{m(\varrho + \varrho')}.$$

Отсюда следует, что должно быть выполнено условие $\varrho > \varrho'$, т. е. более тяжелая жидкость должна располагаться внизу (см. п. 14.54). В частности, предположим, что верхняя жидкость представляет собой воздух бесконечной глубины с удельным весом s. Тогда, полагая $V = V' = 0$, получаем приближенно

$$c^2 = \frac{g}{m} \frac{\varrho(1-s)}{\varrho(\operatorname{cth} mh + s)} = \frac{g}{m} \operatorname{th} mh\{1 - s(1 + \operatorname{th} mh)\},$$

так как величина s мала. Сравнивая это выражение с формулой (3) п. 14.13, мы видим, что наличие атмосферы стремится уменьшить скорость волны.

Этот результат имеет общее применение, как видно из свойства (VI). Это свойство, с другой стороны, показывает, что если ϱ и ϱ' почти равны то период колебаний общей поверхности будет больше, чем периоды колебания свободной поверхности жидкости.

14.43. Установившийся поток над синусоидальным дном[1]**.** Пусть поток средней глубины h течет со скоростью U по синусоидальному дну, форма которого выражается уравнением $\eta_1 = a \sin mx$, где величина a мала, ось x направлена горизонтально, (рис. 272).

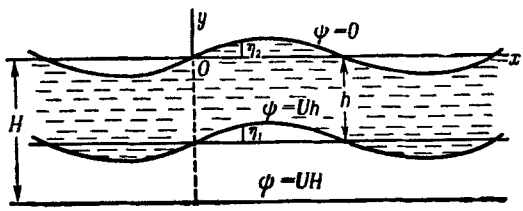


Рис. 272.

Поместим начало координат на свободной поверхности. Рассмотрим комплексный потенциал (п. 14.40) вида

$$w = -U\left\{z + \frac{b}{\operatorname{sh} mH} \cos m(z + iH)\right\}, \tag{1}$$

где H определяется из формулы

$$U^2 = \frac{g}{m} \operatorname{th} mH. \tag{2}$$

Комплексный потенциал (1) дает установившееся волновое движение с поверхностным возвышением $\eta_2 = b \sin mx$ в установившемся потоке глубины H. Свободная поверхность характеризуется линией тока $\psi = 0$, а дно — линией тока $\psi = UH$. Определим величину b таким образом, чтобы линия $\psi = Uh$ была линией тока $y = -h + \eta_1$. Подстановка величины $\psi = Uh$ вместо функции тока в формулу (1) дает

$$\eta_1 = \frac{b}{\operatorname{sh} mH} \sin mx \operatorname{sh} m(H - h),$$

что соответствует значению $\eta_1 = a \sin mx$ при условии

$$a = \frac{b \operatorname{sh} m(H - h)}{\operatorname{sh} mH}.$$

Учитывая формулу (2), получаем

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\operatorname{ch} mh - \dfrac{g}{mU^2} \operatorname{sh} mh}. \tag{3}$$

Эта формула определяет отношение $\eta_2 : \eta_1$ для данного значения x.

Таким образом, гребни и впадины свободной поверхности дна соответствуют или противоположны друг другу в зависимости от выполнения неравенств

$$U^2 \gtrless \frac{g}{m} \operatorname{th} mh, \quad \text{или} \quad U^2 \gtrless c^2,$$

где c — скорость распространения волн длиной $2\pi/m$ в воде глубины h.

Если $U = c$, то отношение $\eta_2 : \eta_1$ становится бесконечным. Это значит, что свободная поверхность тогда не может быть представлена простой синусоидальной кривой и предположение, при котором это решение было получено, в таком случае отпадает.

---

[1]) Литература по теории волн над волнистым дном указана в прим. перев. на стр. 409. — *Прим. перев.*

14.44. Волны на поверхности раздела в случае, когда верхний слой имеет свободную поверхность. Задача, рассмотренная в п. 14.42, допускает интересное обобщение, если считать, что верхняя поверхность является свободной поверхностью, а не ограничена неподвижной горизонтальной плоскостью[1]). Рассмотрим слой жидкости глубины h и плотности ϱ, лежащей на слое жидкости плотности ϱ'. Это соответствует распространению волн на поверхности раздела. Эта задача подобна задаче п. 14.43, если вместо неподвижного синусоидального дна мы рассмотрим жидкость, расположенную под извилинами синусоиды. Используя рисунок и обозначения этого пункта, в верхнем слое жидкости мы получим то же самое значение потенциала (1) и то же самое отношение (3) возвышений на свободной поверхности и на поверхности раздела, причем U обозначает теперь скорость распространения волны. Дополнительным условием, которое должно удовлетворяться, является условие непрерывности давления на поверхности раздела, которое выражается равенством

$$\tfrac{1}{2}\varrho q^2 + g\varrho\eta - \tfrac{1}{2}\varrho' q'^2 - g\varrho'\eta = \text{const},$$

где величины q, η относятся к верхнему слою жидкости на поверхности раздела, а q' — к нижнему. Если глубина нижнего слоя жидкости велика, то мы можем взять $w' = -U(z + ae^{-im(z+ih)})$ подобно формуле (3) п. 14.40; это приводит к уравнению

$$ag(\varrho' - \varrho) + \varrho bmU^2 \operatorname{ch} m(H-h) \operatorname{csch} mH - \varrho' amU^2 = 0.$$

Исключая отношение $b:a$ с помощью соотношения (3) п. 14.43, мы получим после некоторых преобразований

$$\{mU^2(\varrho + \varrho' \operatorname{cth} mh) - g(\varrho' - \varrho)\}\{mU^2 - g\} = 0,$$

отсюда имеем

$$U^2 = \frac{g}{m}, \quad U^2 = \frac{g(\varrho' - \varrho)}{m(\varrho + \varrho' \operatorname{cth} mh)}. \tag{1}$$

Таким образом, для заданной скорости распространения возможны две различные длины волны, первая из которых такая же, как в случае отсутствия верхней жидкости.

Чтобы найти значение m во втором случае, положим

$$\frac{g(\varrho' - \varrho)h}{\varrho' U^2} = l, \qquad \frac{\varrho}{\varrho'} = s, \qquad mh = x.$$

Тогда получим уравнение

$$f(x) = s + \operatorname{cth} x - \frac{l}{x} = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$f(x) = s + \left(\operatorname{cth} x - \frac{1}{x}\right) - \frac{l-1}{x}.$$

Но величина $\operatorname{cth} x - 1/x$ положительна, если $x > 0$, а величина $(l-1)/x$ отрицательна, если $l < 1$. Следовательно, функция $f(x)$ положительна, если $l < 1$ и уравнение не имеет положительных корней. С другой стороны,

---

[1]) Точное решение задачи о плоских установившихся капиллярных волнах на поверхности жидкости конечной глубины дано в работе: Слезкин Н. А., «Об установившихся капиллярных волнах», *Ученые записки МГУ*, вып. VII (1937), 71—102. Точное решение задачи об установившихся капиллярно-гравитационных волнах на поверхности жидкости бесконечной глубины дано в работе Секерж-Зенькович Я. И., «К теории установившихся капиллярно-гравитационных волн конечной амплитуды», *ДАН СССР*, 109, № 5 (1956), 913—915; см. также «Теория волн и течений», сборник статей, Киев, АН УССР, 1963. — *Прим. перев.*

если $l > 1$, то $f(0) = -\infty$, $f(\infty) = 1 + s$, и, следовательно, уравнение имеет действительный положительный корень. Наличие только одного такого корня следует из того факта, что $f'(x)$ положительна, если $l > 1$. Таким образом, если

$$U^2 > \frac{g(\varrho' - \varrho)h}{\varrho'},$$

то создаются волны только одного вида, но если U^2 меньше этой величины, то создаются волны другого типа, для которых отношение возвышения поверхности раздела к возвышению свободной поверхности дается формулой (1). Это отношение равно

$$\frac{a}{b} = -\frac{\varrho e^{mh}}{\varrho' - \varrho},$$

так что при малых значениях разности $(\varrho' - \varrho)$ возвышение волн на поверхности раздела будет очень большим по сравнению с поверхностным возвышением. Этот результат использовался для объяснения аномального сопротивления, которое иногда испытывали корабли вблизи устьев некоторых норвежских фиордов, где имеется слой пресной воды над слоем соленой воды, причем увеличение сопротивления приписывается образованию волн большой амплитуды на поверхности раздела.

14.50. Поверхностное натяжение. Поверхность раздела между двумя жидкостями, которые не перемешиваются, ведет себя так, как если бы она находилась в состоянии равномерного натяжения. Это натяжение называется *поверхностным натяжением* и зависит от природы обеих жидкостей и от температуры (рис. 273).

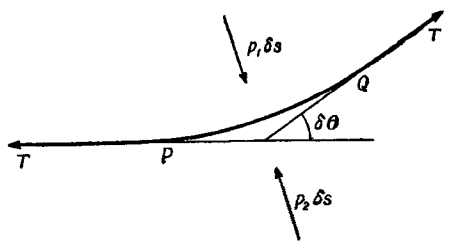


Рис. 273.

Пусть $PQ = \delta s$ — элемент дуги поперечного сечения цилиндрической поверхности, являющейся поверхностью раздела между двумя жидкостями с поверхностным натяжением T. Если p_1 и p_2 — давления с обеих сторон этой поверхности, $\delta\theta$ — угол между касательными в точках P и Q, то, проектируя силы на нормаль в точке P, получаем приближенное уравнение

$$-p_1\delta s + p_2\delta s + T\delta\theta = 0$$

и, следовательно,

$$p_1 - p_2 = \frac{T}{R},$$

где R — радиус кривизны.

Таким образом, если поверхностное натяжение отлично от нуля, то на поверхности раздела имеет место разрыв давления. В общем случае явление поверхностного натяжения описывается с применением понятия *капиллярности*. Используя рис. 262 и обозначения п. 14.12, мы видим, что разность между внутренним и внешним давлениями в точке P поверхности раздела равна

$$\varrho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - g\eta\right).$$

С другой стороны, вследствие малости наклона поверхности кривизна равна $\partial^2\eta/\partial x^2$. Таким образом, граничное условие для давления на поверхности

раздела имеет вид

$$\varrho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-g\eta\right)=-T\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2},$$

причем знак минус означает, что наклон уменьшается, когда координата x увеличивается.

Дифференцируя по t последнее равенство и замечая, что $\partial\eta/\partial t=\partial\psi/\partial x$, получаем

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-g\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{T}{\varrho}\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}=0.$$

Это уравнение заменяет условие на поверхности (1) п. 14.13.

14.51. Уравнение для комплексного потенциала. Применяя результаты п. 14.13, находим уравнение Чизотти в форме

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[w(z+ih,t)+w(z-ih,t)]+ig\frac{\partial}{\partial z}[w(z+ih,t)-w(z-ih,t)]-$$
$$-i\frac{T}{\varrho}\frac{\partial^3}{\partial z^3}[w(z+ih,t)-w(z-ih,t)]=0.$$

14.52. Поверхностные волны. Чтобы получить поверхностные волны в воде глубины h, будем использовать периодическое решение

$$w(z,t)=A\cos(mz-nt),$$

которое является действительным при $y=0$. Подставляя w в уравнение п. 14.51, находим

$$-n^2\operatorname{ch}mh+mg\operatorname{sh}mh+\frac{m^3T}{\varrho}\operatorname{sh}mh=0,$$

отсюда получаем равенства

$$n^2=m\left(g+\frac{Tm^2}{\varrho}\right)\operatorname{th}mh,$$
$$c^2=\left(\frac{g}{m}+\frac{Tm}{\varrho}\right)\operatorname{th}mh,$$

определяющие скорость распространения волн длины $2\pi/m$.

14.53. Влияние капиллярности в случае волн на поверхности раздела. Используя рисунок и обозначения п. 14.42, мы получим в данном случае уравнения (3) и (4) для давления с помощью тех же рассуждений. Действие поверхностного натяжения на поверхность раздела математически выражается тем, что условие $p=p'$ заменяется условием

$$p-p'=-T\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=Tam^2\sin mx,$$

а уравнение для скорости распространения принимает вид

$$m\varrho(V-c)^2\operatorname{cth}mh+m\varrho'(V'-c)^2\operatorname{cth}mh'=g(\varrho-\varrho')+Tm^2.$$

14.54. Скорость распространения. Рассмотрим волны, распространяющиеся по поверхности раздела между двумя слоями покоящейся жидкости большой глубины. Пусть ϱ' — плотность верхнего слоя жидкости, тогда из п. 14.53 мы имеем

$$c^2=\frac{g}{m}\frac{\varrho-\varrho'}{\varrho+\varrho'}+\frac{Tm}{\varrho+\varrho'}.$$

Если длина волны $2\pi/m$ велика, то первый член, стоящий в правой части уравнения, велик по сравнению со вторым и влияние капиллярности незначительно. С другой стороны, при малых длинах волн второй член превосходит первый и можно пренебречь силой тяжести.

Положим

$$s=\frac{\varrho'}{\varrho},\quad T=g\varrho\,(1-s)\,l^2,$$

тогда s обозначает удельный вес верхней жидкости, а l обозначает длину, которую можно рассматривать как меру поверхностного натяжения. Выражая скорость c через s и l, найдем

$$c^2=\frac{g\,(1-s)}{1+s}\left(\frac{1}{m}+ml^2\right).$$

После дифференцирования видно, что c^2 имеет минимальное значение при $m=1/l$, так что скорость распространения наименьшая для волн длины

$$\lambda_0=2\pi l,$$

а наименьшее значение скорости c выражается формулой

$$c_0^2=\frac{2gl\,(1-s)}{1+s}.$$

Таким образом,

$$\frac{c^2}{c_0^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}+\frac{\lambda_0}{\lambda}\right).$$

Это выражение показывает, что если $c>c_0$, то имеется два допустимых значения λ/λ_0 и эти значения являются обратными дробями (рис. 274).

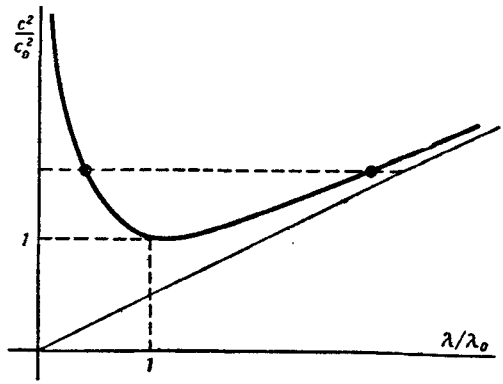


Рис. 274.

Волны длины, меньшей, чем λ_0, называются *рябью*, так что рябь — это такие волны, в распространении которых главную роль играет капиллярность.

Групповая скорость выражается формулой

$$U=c-\lambda\frac{dc}{d\lambda}=c\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{\lambda^2-\lambda_0^2}{\lambda^2+\lambda_0^2}\right).$$

Таким образом, при ряби групповая скорость стремится к величине $3c/2$, превосходящей скорость распространения волны, в то время как для волн, у которых λ больше, чем λ_0 (*гравитационные волны*), групповая скорость стремится к величине $c/2$, как уже было найдено в п. 14.22.

Условие устойчивости состоит в том, чтобы величина c^2 была положительной. Это условие всегда удовлетворяется, если $\varrho>\varrho'$. Однако следует отметить, что это условие также удовлетворяется при $\varrho<\varrho'$, если имеет место неравенство

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2<\frac{T}{g\,(\varrho'-\varrho)}.$$

Этот результат иллюстрируется экспериментом, при котором вода поддерживается за счет атмосферного давления в опрокинутом стакане, если стакан закрыт марлей с мелкими ячейками.

14.55. Действие ветра на глубокой воде. Если вода глубокая и имеется только волновое движение, то из п. 14.53 следует

$$c^2-\frac{2V's}{1+s}c+\frac{V'^2s}{1+s}=\frac{g}{m}\frac{1-s}{1+s}+\frac{Tm}{\varrho(1+s)}=c_1^2, \qquad (1)$$

где $s=\varrho'/\varrho$, c_1 — скорость волны при отсутствии ветра, ϱ' — плотность воздуха. При данной длине волны скорость волны c будет наибольшей, если $dc/dV'=0$, т. е. если $c=V'$, и тогда максимальная скорость выражается формулой

$$c_m=c_1\sqrt{1+s}.$$

Если ветер имеет какую-либо другую скорость, большую или меньшую, чем c_m, то скорость волны будет меньше, чем c_m. С другой стороны, значение скорости c будет мнимым, если

$$V'^2>c_1^2\frac{(1+s)^2}{s}.$$

Учитывая, что c_1 зависит от длины волны $2\pi/m$ и имеет минимальное значение c_0 (п. 14.54), получим

$$V'^2>\frac{1}{2}c_0^2\frac{(1+s)^2}{s}\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}+\frac{\lambda_0}{\lambda}\right).$$

Это неравенство означает, что волны при некоторых значениях длин волны не могут распространяться — они превращаются в брызги и пену. Это означает, что поверхностные волны неустойчивы даже тогда, когда преобладает преимущественно штиль перед началом действия ветра. Как показал Ламб, минимальное значение V' в этом случае равно приблизительно 12,5 узла ($\approx 22{,}57$ *км/час*).

Два значения скорости c, даваемые формулой (1), выражаются в виде

$$c=\frac{V's}{1+s}\pm\sqrt{\left(c_1^2-\frac{sV'^2}{(1+s)^2}\right)}.$$

Эти значения скорости имеют противоположные знаки, если $V'<c_1\,(1+s^{-1})^{1/2}$. Отсюда следует, что волны могут распространяться либо в направлении ветра, либо против него, но быстрее они распространяются по ветру, чем против ветра. Если величина V' превосходит только что полученное значение, то волны не могут распространяться против ветра.

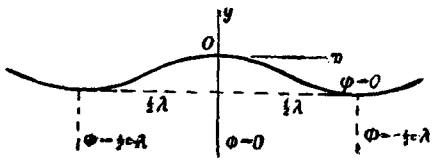


Рис. 275.

Следует напомнить, что вышеуказанные заключения основываются на аргументах, в которых не учитывалась вязкость.

14.58. Условие Леви-Чивита для поверхности жидкости. В п. 14.40 мы видели, что волна, имеющая при распространении постоянную форму профиля, может быть приведена к установившемуся движению. Рассмотрим волновой профиль, распространяющийся справа налево со скоростью c; его можно остановить путем наложения на всю систему скорости c, направленной слева направо, как, например, на рис. 275.

Применяя обозначения п. 12.43, напишем

$$-\frac{dw}{dz}=v=qe^{-i\theta}=ce^{-i\omega}, \qquad (1)$$

$$\omega=\theta+i\tau,\quad q=ce^{\tau}. \qquad (2)$$

В качестве свободной поверхности возьмем линию тока $\psi=0$.

Так как при установившемся движении время в уравнения не входит, то комплексный потенциал w является аналитической функцией только переменного z; мы можем взять в качестве независимого переменного w вместо z. На свободной поверхности $\psi = 0$ и, значит, $w = \varphi$, следовательно, z, q, ω являются функциями только действительного переменного φ. Кроме того, на свободной поверхности по теореме Бернулли величина $\frac{1}{2}q^2 + gy$ постоянна и, следовательно, мы имеем

$$q\frac{\partial q}{\partial \varphi} + g\frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0, \text{ если } \psi = 0. \tag{3}$$

Но из формулы (1) при $\psi = 0$ следует $\partial z/\partial \varphi = -e^{i\theta}/q$, отсюда

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{1}{q}\sin\theta,$$

в то время, как из формулы (2) получаем

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi} = q\frac{\partial \tau}{\partial \varphi}.$$

Таким образом, уравнение (3) можно представить в виде

$$\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = \frac{g}{c^3}e^{-3\tau}\sin\theta.$$

Но ω — аналитическая функция w, следовательно, $\partial\tau/\partial\varphi = -\partial\theta/\partial\psi$. Таким образом, окончательно

$$\frac{\partial \theta}{\partial \psi} = -\frac{g}{c^3}e^{-3\tau}\sin\theta, \quad \psi = 0. \tag{4}$$

В таком виде условие на поверхности было получено Леви-Чивита[1]).

Полученное условие является нелинейным. Линейное приближение можно найти, если предположить, что модуль $|\omega|$ является малой величиной первого порядка. Это означает, что θ и τ малы, так что приближенно $\sin\theta = \theta$ и $q = c$. Таким образом, линеаризированная форма указанного условия имеет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial \psi} = -\frac{g}{c^3}\theta, \quad \psi = 0. \tag{5}$$

Теория, основывающаяся на этом условии, полностью эквивалентна теории, данной в предыдущих пунктах этой главы. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим симметричный волновой профиль длины волны λ и поместим начало координат в гребне (см. рис. 275). Для простоты рассмотрим случай бесконечно глубокой воды.

В силу симметрии величина φ постоянна, а $\theta = 0$ на вертикали, проходящей через гребень или впадину волны. Поскольку на большой глубине $-\partial\varphi/\partial x = c$, $-\partial\varphi/\partial y = 0$, то мы можем положить $\varphi = 0$ на оси y и $\varphi = \pm\frac{1}{2}c\lambda$ на вертикалях, проходящих через соседние впадины, расположенные слева и справа.

Таким образом, граничные условия, которые должны быть удовлетворены, имеют вид

$$\theta = 0, \text{ если } \varphi = \pm\tfrac{1}{2}c\lambda, \tag{6}$$

$$\omega \to 0, \text{ если } \psi \to \infty, \tag{7}$$

$$\text{условие на поверхности.} \tag{8}$$

В данном случае условие на поверхности дается формулой (5).

---

[1]) Levi-Civita, *Math. Ann.*, **93** (1925), 264.

Легко доказать, что указанным условиям удовлетворяют величины

$$\omega = -iAe^{ig w/c^3}, \quad c^2 = g\lambda/2\pi, \tag{9}$$

где A — действительная константа, которая является малой величиной в силу того, что величина ω мала. Если затем положить $m = 2\pi/\lambda$, $A = ma$ и разложить в ряд показательную функцию в формуле (1), то мы получим

$$-\frac{dz}{dw} = \frac{1}{c}e^{i\omega} = \frac{1}{c}(1 + i\omega) = \frac{1}{c}(1 + mae^{imw/c}),$$

откуда, замечая, что $z = 0$ при $w = 0$, найдем после интегрирования

$$w = -c\{(z + ai) - iae^{imw/c}\}.$$

Так как величина a мала, то в первом приближении $w = -c(z + ai)$ и, следовательно, подставляя это значение в показатель показательной функции, получаем

$$w = -c\{(z + ai) + ae^{-im(z+ai+\lambda/4)}\}. \tag{10}$$

Это выражение согласуется с формулой (3) п. 14.40, если начало координат перенести в гребень волны, т. е. если написать $z + ai + \lambda/4$ вместо z. Тогда результат будет отличаться от выражения (10) только постоянной величиной. Таким образом, линейное приближение (5) согласуется с предыдущей теорией и на самом деле дает уточнение предпосылок этой теории.

Однако имеется серьезное ограничение при использовании линейного приближения. Волна у гребня будет разбиваться, если скорость жидкости у гребня превосходит скорость волны. Критическим является тот случай, когда скорость жидкости у гребня равна скорости волны, т. е. случай установившегося движения при $v = 0$. Согласно формуле (2), это означает, что в гребне $e^{\tau} = 0$ и $\tau = -\infty$. Отсюда следует, что приближение, основывающееся на допущении, что величина τ мала, оказывается непригодным в этом случае. Дэвис [1]) предложил приближение к граничному условию (4), которое сохраняет его основные черты и допускает, чтобы τ было велико по модулю. Приближение это имеет вид

$$\frac{\partial\theta}{\partial\psi} = -\frac{g}{3c^3}e^{-3\tau}\sin 3\theta, \quad \psi = 0, \tag{11}$$

оно отличается от условия (4) только подстановкой величины $\frac{1}{3}\sin 3\theta$ вместо $\sin\theta$.

В качестве упражнения читателю предлагается доказать, что граничные условия (6) и (7) и условие (11) на поверхности удовлетворяются равенствами

$$e^{-3i\omega} = 1 - 3Ae^{2\pi i w/c\lambda}, \quad c^2 = g\lambda/2\pi, \tag{12}$$

где $3A$ — произвольная действительная постоянная. Если модуль $|\omega|$ мал, то формула (12) сводится к формуле (9).

Так как $w = 0$ в гребне, то из формул (1) и (12) следует, что v должно быть равно нулю, если $3A = 1$. Это является условием для разрушения гребня.

---

[1]) Davies T. V., *Proc. Roy. Soc.*, **208A** (1951), 475; *Quart. Appl. Math.*, **10** (1952), 57. В работе Packham B. A., *Proc. Roy. Soc.*, **213A** (1952), 238 этот метод был применен к уединенной волне. (Теорию уединенной волны можно найти в цитированной на стр. 409 монографии Дж. Дж. Стокера, § 10.9.—*Прим. перев.*)

Если это условие удовлетворяется, то вблизи гребня, где величина w мала, мы имеем

$$e^{-3i\omega} = 1 - \left(1 + \frac{2\pi i w}{c\lambda}\right) = -\frac{2\pi i w}{c\lambda},$$

и, следовательно, из формулы (1) получим

$$\frac{dz}{dw} \propto w^{-1/3} \quad \text{и} \quad w \propto z^{3/2}.$$

Полученные соотношения означают, что при разрушении волны в окрестности гребня волна имеет форму клина с углом 120°. Это согласуется с наблюдениями разрушающихся волн и с теоретическими результатами Стокса.

14.60. Длинные волны. Факты, которые были рассмотрены в предыдущих пунктах, относились к поверхностным волнам любой длины. Теперь мы рассмотрим волны, длина которых велика по сравнению с глубиной воды. Таким

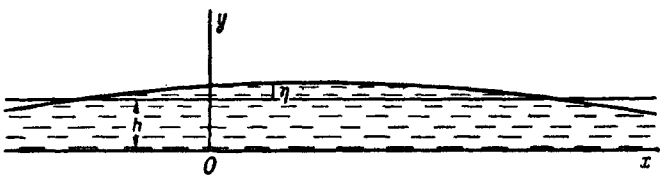


Рис. 276.

образом, для воды глубины h, содержащейся в горизонтальном канале, сделаем предположение, что отношение h/λ мало (где λ — длина волны). Указанные выше ограничения относительно малости поверхностного возвышения и наклона волны, конечно, остаются в силе. В данном случае это означает, что величины η/h и $d\eta/dx$ малы (рис. 276).

В силу предположений теории длинных волн уравнение распространения (5) п. 14.13 упрощается, и поэтому можно легко получить общее решение. В самом деле, если $w(z, t)$ — комплексный потенциал, то мы имеем

$$w(z + ih, t) = w(z, t) + ih\frac{\partial w(z, t)}{\partial z} + \ldots,$$

$$w(z - ih, t) = w(z, t) - ih\frac{\partial w(z, t)}{\partial z} + \ldots,$$

и, следовательно, пренебрегая членами, содержащими h^2, уравнение для w запишем в виде

$$\frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial t^2} - gh\frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Как и прежде, w должно быть действительным на действительной оси $y = 0$.

Для решения этого уравнения введем обозначение $c^2 = gh$ и положим $z_1 = z + ct$, $z_2 = z - ct$.

Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z_1} + \frac{\partial w}{\partial z_2}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = c\frac{\partial w}{\partial z_1} - c\frac{\partial w}{\partial z_2},$$

следовательно, уравнение (1) приводится к виду

$$4\frac{\partial^2 w}{\partial z_1 \partial z_2} = 0.$$

После интегрирования получим

$$\frac{\partial w}{\partial z_1} = w_1'(z_1),$$

где $w_1(z_1)$ — произвольная функция от z_1.

Интегрируя еще раз, получим $w = w_1(z_1) + w_2(z_2)$, где $w_2(z_2)$ — произвольная функция от z_2 и, следовательно, общее решение уравнения (1) имеет вид

$$w = w_1(z + ct) + w_2(z - ct), \tag{2}$$

где аналитические функции w_1, w_2 могут быть выбраны произвольно при единственном условии, чтобы величина w была действительной при $y = 0$.

Сравнивая действительные и мнимые части, из формулы (2) получим для потенциала скорости и функции тока следующие выражения:

$$\varphi = \varphi(x, y, t) = \varphi_1(x + ct, y) + \varphi_2(x - ct, y), \tag{3}$$

$$\psi = \psi(x, y, t) = \psi_1(x + ct, y) + \psi_2(x - ct, y). \tag{4}$$

Поскольку величина w действительна при $y = 0$, то

$$\psi(x, 0, t) = 0. \tag{5}$$

По теореме Маклорена имеем

$$\varphi = \varphi(x, 0, t) + y\left(\frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y}\right)_{y=0} + \ldots. \tag{6}$$

Так как y изменяется от 0 до h, то второй член бесконечно мал по сравнению с первым. Следовательно, мы можем положить $y = 0$, и отсюда

$$\varphi = \varphi_1(x + ct) + \varphi_2(x - ct). \tag{7}$$

С помощью тех же соображений из формулы (4) с учетом соотношения (5) получаем $\psi = 0$.

Таким образом, формула (7) дает полное решение задачи теории длинных волн.

Из формулы (7) следует, что все частицы, находящиеся в одной и той же вертикальной плоскости, имеют одинаковую горизонтальную скорость, равную $-\partial\varphi/\partial x$, и, следовательно, остаются в вертикальной плоскости.

Кроме того, из формулы (6) имеем

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\left(\frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y}\right)_{y=0} - y\left(\frac{\partial^2 \varphi(x, y, t)}{\partial y^2}\right)_{y=0} - \ldots.$$

Так как первый член в правой части последнего равенства представляет собой вертикальную скорость на дне, которая равна нулю, то, следовательно, вертикальная скорость есть величина второго порядка малости и пропорциональна высоте над дном.

14.61. Давление. Если обозначить через Π давление на свободной поверхности, а через η — поверхностное возвышение для данных значений x и t, то уравнение для давления принимает вид

$$\frac{p}{\varrho} + gy - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\Pi}{\varrho} + g(h + \eta) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

При выводе этого уравнения мы пренебрегли величиной q^2 и приняли во внимание, что $\partial\varphi/\partial t$ не зависит от y. Таким образом, получаем уравнение

$$p = \Pi + g\varrho(h + \eta - y),$$

показывающее, что давление на глубине $(h+\eta-y)$ равно гидростатическому давлению. Иначе говоря, вертикальным ускорением можно пренебречь [1]).

14.62. Поверхностное возвышение. Из формулы (7) п. 14.60 для потенциала скорости имеем

$$\varphi=\varphi_1(x+ct)+\varphi_2(x-ct). \tag{1}$$

Следовательно, поверхностное возвышение, согласно п. 14.12, выражается формулой

$$\eta=\frac{c}{g}(\varphi_1'(x+ct)-\varphi_2'(x-ct)). \tag{2}$$

Таким образом, поверхностное возвышение представляет собой сумму возвышений, обусловленных двумя прогрессивными волнами, начальные формы которых имеют вид

$$\frac{c}{g}\varphi_1'(x),\quad -\frac{c}{g}\varphi_2'(x).$$

Эти волны распространяются в противоположных направлениях со скоростью c, определяемой формулой

$$c^2=gh.$$

Характерное свойство длинных волн состоит в том, что скорость волны зависит только от глубины воды, а не от длины волны.

Из формулы (1) также следует, что скорость частиц жидкости u (обязательно горизонтальная при наших предположениях) выражается в виде

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\varphi_1(x+ct)-\varphi_2'(x-ct). \tag{3}$$

14.63. Волны, распространяющиеся только в одном направлении. Рассмотрим волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x. Если u — скорость жидкости, η — соответствующее поверхностное возвышение, то из формул (2) и (3) п. 14.62 получим равенства

$$u=-\varphi'(x-ct),\quad \eta=-\frac{c}{g}\varphi'(x-ct),$$

и, следовательно, $u=g\eta/c=c\eta/h$, так как $c^2=gh$. Таким образом, для волны, распространяющейся в положительном направлении оси x, будет справедлива формула

$$\frac{u}{c}=\frac{\eta}{h}. \tag{1}$$

Чтобы проследить за движением частицы, первоначально находящейся в точке P невозмущенной поверхности воды в прямолинейном канале, мы замечаем, что перемещение равно

$$\int u\,dt=\frac{1}{h}\int \eta c\,dt.$$

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, дает величину заштрихованной площади на рис. 277, и, следовательно, перемещение частицы получается посредством деления величины площади профиля, который проходит точка P, на величину глубины невозмущенной воды. Когда волна

[1]) Такие же соображения о длинных волнах, основанные на применении этого результата, указаны в примерах 68—70 к гл. 14; см. также п. 14.70.

окончательно пройдет, частица окажется перемещенной вперед относительно ее начального положения на расстояние, равное отношению объема поднятой воды к площади поперечного сечения воды в канале.

Из формулы (1) также следует, что $u^2h = g\eta^2$, и, таким образом,

$$\frac{1}{2}\varrho u^2 h\,dx = \frac{1}{2}g\varrho\eta^2\,dx.$$

Это соотношение выражает тот факт, что кинетическая энергия жидкости, находящейся в вертикальном столбе (ширины dx), равна потенциальной

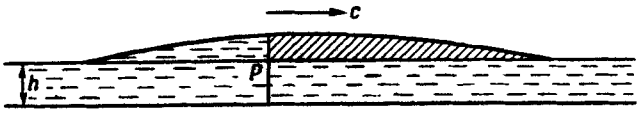


Рис. 277.

энергии, измеряемой от невозмущенного уровня жидкости, заключенной в том же объеме. Этот результат верен только для волн, распространяющихся в одном направлении.

14.64. Изменение профиля в длинных волнах. Случай длинной волны, распространяющейся в одном направлении без изменения профиля, может быть сведен к установившемуся движению путем наложения на всю систему скорости, равной по величине, но противоположной по направлению скорости распространения волны c (рис. 278).

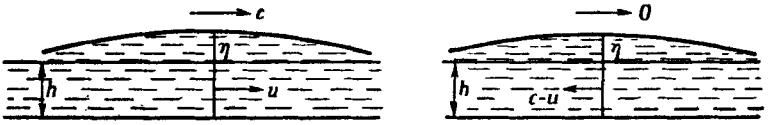


Рис. 278.

Тогда форма волны остается неизменной в пространстве и жидкость течет под ней с местной скоростью $-c+u$, где u — направленная вперед малая скорость в прогрессивной волне с возвышением η.

Тогда уравнение неразрывности принимает вид

$$(c-u)(h+\eta) = ch,$$

откуда приближенно $u = c\eta/h$; этот результат был получен уже ранее.

По указанной ранее причине (см. п. 14.60) вертикальная скорость мала по сравнению с величиной u, и, следовательно, квадрат ее есть величина четвертого порядка малости, если u — величина первого порядка малости; поэтому уравнение для давления на свободной поверхности примет вид

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}(c-u)^2 + g\eta = \frac{\Pi}{\varrho} + \frac{1}{2}c^2.$$

Исключая u с помощью уравнения неразрывности и пренебрегая кубом величины η/h, получаем соотношение

$$\frac{p-\Pi}{\varrho} = \frac{c^2(2h\eta+\eta^2) - 2g\eta(h+\eta)^2}{2(h+\eta)^2} = \left(\frac{c^2}{h} - g\right)\eta - \frac{3\eta^2 c^2}{2h^2}.$$

Условие существования установившегося движения состоит в том, что на свободной поверхности $p = \Pi$. Таким образом, если величиной η^2/h^2 нельзя

пренебречь, то свободная поверхность при $c^2 = gh$ не может существовать. Следовательно, длинная волна конечной высоты не может распространяться без изменения профиля.

Очевидно также, что если величиной η^2/h^2 нельзя пренебречь, то условию $p = \Pi$ можно приближенно удовлетворить, используя несколько большее значение скорости c, если величина η положительна, и несколько меньшее значение, если величина η отрицательна. Таким образом, возвышение стремится распространиться скорее, нежели понижение; волна стремится стать более крутой перед гребнем, и наблюдение показывает, что волна становится все более крутой и в конце концов разрушается [1]).

14.70. Действие малых возмущающих сил. Пусть X и Y обозначают горизонтальную и вертикальную компоненты малой возмущающей силы, действующей на жидкость, находящуюся в горизонтальном канале малой глубины h, причем компонента X действует вдоль канала. Тогда уравнение движения принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Поскольку глубина мала, то практически величина Y постоянна при изменении y от 0 до h и, следовательно, величина Y очень незначительно изменяет величину g; действие этой составляющей будет величиной второго порядка малости. Таким образом, величиной Y можно пренебречь.

Тогда давление выражается формулой

$$p = \Pi + g\varrho\,(h + \eta - y),$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X - g\frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Если ξ обозначает горизонтальное перемещение частицы от ее невозмущенного положения, то имеем

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Уравнение неразрывности принимает вид

$$(h + \eta)\left(dx + \frac{\partial \xi}{\partial x}dx\right) = h\,dx.$$

Оно выражает тот факт, что один и тот же объем жидкости заключен между плоскостями x и $x + dx$ в возмущенном и невозмущенном положениях. Таким образом, имеем

$$\eta = -h\frac{\partial \xi}{\partial x}, \tag{1}$$

и уравнение движения принимает вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = X + c^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Умножая это уравнение на величину $-h$, дифференцируя по x и используя формулу (1), получаем уравнение, определяющее изменение возвышения

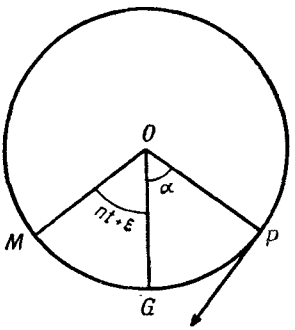
$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - h\frac{\partial X}{\partial x}. \tag{3}$$

---

[1]) См. Stoker J. J., *Commun. Appl. Math.*, I (1948), 1—87. (См. цитированную выше монографию того же автора, стр. 390—410.—*Прим. перев.*)

14.71. Приливы в экваториальном канале. Рассмотрим мелкий канал постоянной глубины, совпадающий с земным экватором, и предположим, что действует единственная приливообразующая сила, обусловленная Луной, движущейся в экваториальной плоскости.

Если через $\mathbf{F}$ обозначена напряженность лунного гравитационного поля в центре Земли, то сила, приложенная к частицам жидкости в двух диаметрально противоположных точках экватора, будет равна $\mathbf{F}+\mathbf{f}$, $\mathbf{F}-\mathbf{f}$, где $\mathbf{f}$ — малое изменение $\mathbf{F}$, если мы движемся от центра вдоль радиуса, длина которого мала по сравнению с расстоянием до Луны. Сила $\mathbf{f}$ представляет собой *приливообразующую силу*, и вышеуказанное объяснение показывает, почему приливы образуются одновременно в противоположных точках Земли.



Р и с. 279.

На рис. 279 изображен схематически экваториальный канал, где O — центр Земли, M — точка, расположенная непосредственно под Луной, G — точка пересечения нулевого Гринвичского меридиана с экватором и P — рассматриваемая точка, которая имеет долготу α.

Луна движется на запад относительно Земли с угловой скоростью n (предполагаемой постоянной) и в момент времени t угол GOM оказывается равным $nt+\varepsilon$. Приливообразующая сила Луны, действующая на единицу массы, имеет в точке P горизонтальную компоненту в направлении, указанном на схеме, равную $f\cdot\sin(2\angle POM)$[1]).

В случае Луны

$$f/g = 8{,}57\times 10^{-8};$$

для Солнца

$$f/g = 3{,}78\times 10^{-8}.$$

Если мы проведем через точку P горизонтальную ось x, т. е. направим ее перпендикулярно отрезку OP, и будем считать, что с увеличением x увеличивается и угол α, то будем иметь $dx = ad\alpha$, где a — радиус Земли. Таким образом, согласно формуле (3) п. 14.70, возвышение η будет определяться уравнением

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \frac{c^2}{a^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2} + \frac{2hf}{a}\cos 2(nt+\varepsilon+\alpha).$$

Полное решение этого уравнения можно рассматривать как сумму произвольного решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Первое слагаемое представляет собой свободные колебания жидкости малой амплитуды, которые быстро затухают под действием сил трения. Частное решение дает вынужденное колебание, которое является приливом. Для того чтобы найти частное решение, предположим теперь, что $\eta = A\cos 2(nt+\varepsilon+\alpha)$; подставив его в уравнение, получаем

$$\eta = \frac{c^2}{2(c^2-n^2a^2)}\frac{af}{g}\cos 2(nt+\varepsilon+\alpha).$$

Полагая $a = 64\times 10^5$ *м*, получим, что величина af/g равна 0,55 *м* в случае Луны и 0,24 *м* в случае Солнца. Отсюда следует, что мы получили полусуточ-

[1]) С подробностями читатель может ознакомиться в книге Ламба «Гидродинамика», из которой взяты данные (см. также цитированную на стр. 409 монографию Л. Н. Сретенского, гл. IV и V. — *Прим. перев.*).

ный прилив, т. е. высокая и низкая вода имеет место дважды в течение лунного дня. Кроме того,

$$\frac{c^2}{n^2a^2}=\frac{g}{n^2a}\cdot\frac{h}{a}=311\,\frac{h}{a},$$

и так как h/a для действительного океана малая величина, то разность $c^2-n^2a^2$ будет отрицательной величиной и, следовательно, по этой теории прилив будет обращенный. Это означает, что низкая вода будет в точке, для которой Луна находится в зените, а также в диаметрально противоположной точке.

14.80. Трохоидальная волна Герстнера. В 1802 г. Герстнер, профессор математики в Праге, показал, что при специально выбранном трохоидальном профиле давление будет постоянно вдоль свободной поверхности глубокой воды. Это единственное известное точное решение задачи о волновом движении. Однако это движение не является безвихревым[1]).

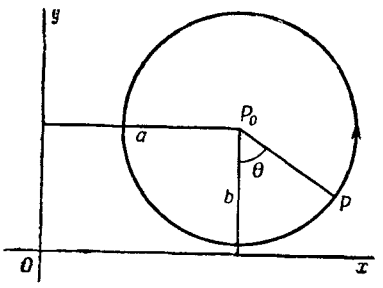


Рис. 280.

Направим ось x горизонтально, а ось y — вертикально вверх. Пусть a, b — параметры Лагранжа, определяющие положение отдельной частицы жидкости при отсутствии волн. Тогда волну Герстнера можно получить, если предположить, что положение этой частицы жидкости определяется формулами

$$x=a+\frac{1}{m}\,e^{mb}\sin m(a+ct),\quad y=b-\frac{1}{m}\,e^{mb}\cos m(a+ct). \tag{1}$$

Отсюда видно, что траекторией этой частицы является окружность с центром (a, b) и радиусом e^{mb}/m (рис. 280).

Угловая скорость радиуса, соединяющего частицу P с центром P_0, равна mc.

Если мы будем рассматривать другие частицы, то в формулах (1) изменятся только значения a, b.

Для доказательства того, что формула (1) дает возможное движение жидкости, надо проверить, удовлетворяется ли уравнение неразрывности. Из формулы (1) мы имеем

$$z=a+ib-\frac{i}{m}\exp\left[m(b+ia+ict)\right]. \tag{2}$$

Согласно п. 3.44, уравнение неразрывности принимает вид

$$\text{const}=\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(a,\,b)}=\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}-\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}=Re\left(i\,\frac{\partial z}{\partial a}\,\frac{\partial\bar z}{\partial b}\right)=1-e^{2mb}.$$

Правая часть здесь является константой, так что движение возможно.

[1]) Обобщая теорию волн Герстнера, Л. Дюбрэйль-Жакотен [Dubreil-Jacotin L., Sur la determination rigoureuse des ondes permanentes periodiques d'ampleur finie, *J. math. pure et appl.*, **XIII**, № 3 (1934), 217—291] методом интегральных уравнений рассмотрела точное решение задачи о вихревых волнах на поверхности тяжелой жидкости как конечной, так и бесконечной глубины, считая интенсивность вихрей распределенной по показательному закону. Более общее решение той же задачи, но другим методом дал Гуйон [Gouyon R., Sur les houles planes en profondeur infinie, *Compt. rend. Acad. Sci.*, **247**, № 1 (1958), 33—35, № 2 (1958), 180—182, № 3 (1958), 266—269]. Существенное обобщение решения задачи о вихревых волнах дано в работе Моисеев Н. Н., «Теоремы существования и неединственности вихревых волн периодического типа», *Прикл. мат. и мех.*, **24**, № 4 (1960), 711—714. Ему удалось построить решение, исходным приближением которого является некоторый вихревой поток, а не состояние покоя, как в других теориях. Задача сведена к некоторому нелинейному интегральному уравнению, к которому применимы хорошо разработанные в общей теории методы исследования.—*Прим. перев.*

Теперь следует получить условие на поверхности. Компонентами ускорения частицы являются $\partial^2 x/dt^2$, $\partial^2 y/\partial t^2$, и, следовательно, уравнения движения принимают вид

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -g - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\varrho} + gy\right) = mc^2 e^{mb} \sin m(a+ct),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\varrho} + gy\right) = -mc^2 e^{mb} \cos m(a+ct).$$

Умножим эти уравнения соответственно на следующие равенства:

$$\frac{\partial x}{\partial a} = 1 + e^{mb} \cos m(a+ct),$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = e^{mb} \sin m(a+ct),$$

и затем сложим. Тогда получаем

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{p}{\varrho} + gy\right) = mc^2 e^{mb} \sin m(a+ct). \tag{3}$$

Точно так же, складывая эти уравнения после их умножения на величины $\partial x/\partial b$, $\partial y/\partial b$, мы получим

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{p}{\varrho} + gy\right) = -mc^2 e^{mb} \cos m(a+ct) + mc^2 c^{2mb}. \tag{4}$$

Умножая уравнения (3) и (4) соответственно на da и db и складывая результат, получаем

$$d\left(\frac{p}{\varrho} + gy\right) = d\left[-c^2 e^{mb} \cos m(a+ct) + \frac{1}{2}c^2 e^{2mb}\right],$$

и, следовательно,

$$\frac{p}{\varrho} = \text{const} - g\left(b - \frac{1}{m}e^{mb} \cos m(a+ct)\right) - c^2 e^{mb} \cos m(a+ct) + \frac{1}{2}c^2 e^{2mb}.$$

Для частицы, находящейся на свободной поверхности, величина p должна быть постоянной, если пренебречь поверхностным натяжением, и, следовательно, коэффициент при $\cos m(a+ct)$ должен обратиться в нуль, что приводит к равенству

$$c^2 = \frac{g}{m} = g\lambda\frac{2}{\pi}. \tag{5}$$

Таким образом, условие на свободной поверхности удовлетворяется точно и давление в окрестности *любой частицы жидкости* с параметрами (a, b) выражается формулой

$$\frac{p}{\varrho} = \text{const} - bg + \frac{1}{2}c^2 e^{2mb},$$

и, следовательно, давление постоянно, если b постоянно. Это означает, что давление имеет постоянное значение для каждой данной частицы при ее движении. В частности, давление постоянно для всех частиц, для которых параметр b одинаков независимо от величины a.

Если для частиц на свободной поверхности возьмем $b=\beta$, через Π обозначим давление на свободной поверхности, то получим

$$\frac{p-\Pi}{\varrho}=g(\beta-b)+\frac{1}{2}c^2(e^{2mb}-e^{2m\beta}).$$

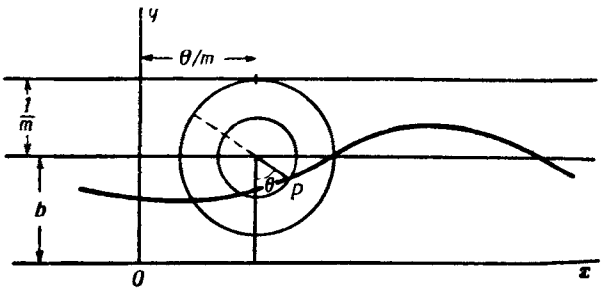
Это соотношение определяет давление в любой другой точке.

Согласно формуле (5), групповая скорость равна

$$c_g=c-\lambda\frac{dc}{d\lambda}=\frac{1}{2}c.$$

14.81. Вид свободной поверхности. При исследовании вида кривых постоянного давления из уравнения (1) следует, что x и y являются периодическими функциями времени t, причем их период равен $2\pi/(mc)$.

Если сохранять величины b и t фиксированными, то значения y повторяются, когда a увеличивается на $2\pi/m$, в то время как x получает линейный



Р и с. 281.

сдвиг на величину $2\pi/m$. Таким образом, наибольшего значения величина y достигает в точках, находящихся на расстоянии $2\pi/m$. Рассматривая одно из этих наибольших значений y, мы видим, что с увеличением времени t требуется меньшее значение величины a, чтобы сохранить постоянным фазовый угол $m(a+ct)$. Таким образом, профили поверхностей равного давления движутся в отрицательном направлении оси x со скоростью, равной частному от деления длины волны $2\pi/m$ на период $2\pi/(mc)$, т. е. со скоростью c. Если мы каждой частице сообщим скорость c противоположного направления, то движение станет установившимся и профили останутся неподвижными. Если написать $\theta=m(a+ct)$, то уравнение профилей поверхностей равного давления будет иметь вид

$$x=\frac{\theta}{m}+\frac{1}{m}e^{mb}\sin\theta,\quad y=b-\frac{1}{m}e^{mb}\cos\theta.$$

Эти кривые являются трохоидами, которые описывает точка, находящаяся на расстоянии e^{mb}/m от центра круга радиуса $1/m$, катящегося по нижней стороне линии $y=b+1/m$ (рис. 281).

Если на свободной поверхности $b=0$, то соответствующий профиль будет иметь вид циклоиды. Кривые равного давления изображены на рис. 282. Любая из них может быть взята в качестве профиля свободной поверхности. Предельная форма кривых — циклоида с остриями, направленными вверх в точках возврата. Вертикальные линии показывают невозмущенные положения столбов воды.

Чтобы найти средний уровень $y=k$, соответствующий любой трохоиде, т. е. уровень, относительно которого одинаковое количество жидкости как

возвышается, так и понижается, мы замечаем, что интеграл, взятый по длине волны $\int (y-k)\,dx$, равен нулю. Таким образом, имеем

$$\int_0^{2\pi}\left(b-k-\frac{1}{m}e^{mb}\cos\theta\right)(1+e^{mb}\cos\theta)\,d\theta=0,$$

что дает

$$b-k=\frac{e^{2mb}}{2m}. \tag{1}$$

Таким образом, средний уровень расположен ниже траектории центра производящего круга на величину $e^{2mb}/2m$.

При движении вниз расстояние рассматриваемой нами точки от центра производящего круга уменьшается.

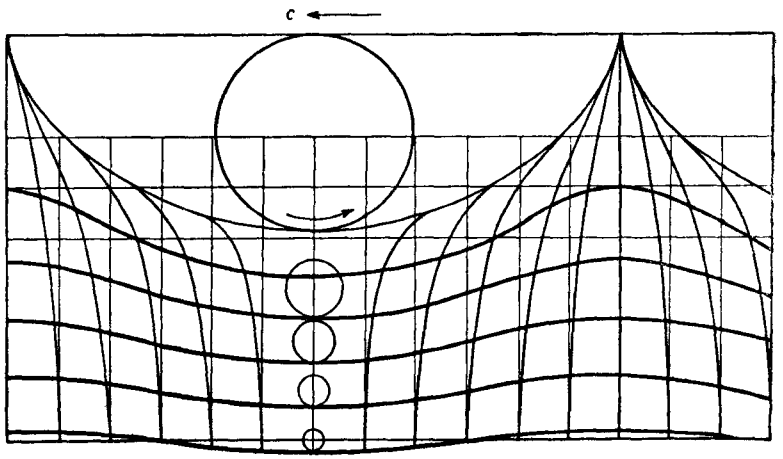


Рис. 282.

Для прогрессивной волны кинетическая энергия (приходящаяся на единицу толщины) находится интегрированием по длине волны кинетической энергии элементарной массы $\varrho(1-e^{2mb})\,da\,db$, определяемой частицей жидкости (a, b). Из формул (1) и (2) п. 14.80 имеем

$$q^2=\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial \bar{z}}{\partial t}=c^2e^{2mb}.$$

Отсюда если для определения свободной поверхности положить $b=\beta$, то кинетическая энергия будет равна

$$T=\frac{1}{2}\varrho c^2\int_{-\infty}^{\beta}\int_{a}^{a+\frac{2\pi}{m}}(e^{2mb}-e^{4mb})\,da\,db=\frac{1}{2}\varrho c^2\cdot\frac{2\pi}{m}\left(\frac{e^{2m\beta}}{2m}-\frac{e^{4m\beta}}{4m}\right).$$

Положим $\lambda=2\pi/m$, $h=2e^{m\beta}/m$, так что h — высота гребня над впадиной. Тогда получим формулу для кинетической энергии, приходящейся на длину волны, в виде

$$T=\frac{g\varrho\lambda h^2}{16}\left(1-\frac{\pi^2h^2}{2\lambda^2}\right).$$

Что касается потенциальной энергии прогрессивной волны или установившегося обтекания профиля, то, считая средний уровень известной величиной и используя формулу (1), получим

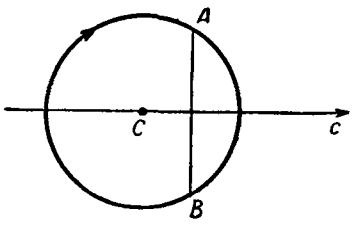
$$V = \int\int g\varrho \frac{e^{2mb}}{2m}(1 - e^{2mb})\,da\,db.$$

Но из формулы (5) п. 14.80 следует $g/m = c^2$, и поэтому

$$T = V.$$

Равенство $T = V$ мы будем использовать для того, чтобы дать интуитивную интерпретацию групповой скорости.

Частицы жидкости описывают окружности с постоянной скоростью, и давление в окрестности частицы одинаково при любом ее положении на орбите. Рассмотрим теперь какую-либо частицу, орбита которой пересекает неподвижную вертикальную плоскость в точках A и B, как изображено на рис. 283. Поток кинетической энергии (или работа сил давления в единицу времени) через эту плоскость за один период равен нулю, так как то количество жидкости, которое перешло слева направо в точке A, вернулось обратно справа налево в точке B. С другой стороны, поток потенциальной энергии не равен нулю, так как потенциальная энергия, отнесенная к единице массы в точке A, превышает потенциальную энергию в точке B на величину $g \cdot AB$. Ясно, что потенциальная энергия движется вместе с волной, т. е. со скоростью c. Но потенциальная энергия равна половине полной энергии. Следовательно, полная энергия переносится со скоростью $\frac{1}{2}c$, т. е. с групповой скоростью.



Р и с. 283.

Для доказательства того, что движение вихревое, заметим, что скалярное произведение скорости и радиуса-вектора $u\,dx + v\,dy$ равняется действительной части от выражения $(\partial z/\partial t)\,d\bar{z}$.

Из формулы (2) п. 14.80 имеем

$$\frac{\partial z}{\partial t}\,d\bar{z} = \{c \exp m(i\bar{l} + ict)\}\{d\bar{l} + dl \exp m(-il - ict)\},$$

где $l = a + ib$. Таким образом,

$$u\,dx + v\,dy = d\left(\frac{c}{m} e^{mb} \sin m(a + ct)\right) + ce^{2mb}\,da.$$

Это выражение не является полным дифференциалом, и, следовательно, рассматриваемое движение вихревое. Циркуляция в элементарном параллелограмме жидкости получается из второго члена в правой части написанного выше выражения (так как первый член есть точный дифференциал) и поэтому равна

$$-\frac{\partial}{\partial b}(ce^{2mb}\delta a)\,\delta b.$$

Разделив эту величину на площадь параллелограмма, получим интенсивность вихря

$$\omega = -\frac{2mce^{2mb}}{1 - e^{2mb}}.$$

Отрицательный знак указывает на то, что вихрь имеет направление, противоположное вращению частиц по их круговым орбитам.

Интенсивность вихря быстро уменьшается с глубиной.

14.82. Точное решение для безвихревой волны. Уравнение Джона (3) п. 11.63 можно применить также к волновому движению.

Рассмотрим установившееся движение, которое получится, если положить

$$S(\beta) = \omega\beta, \tag{1}$$

где ω — постоянная величина с размерностью $[T^{-1}]$. Тогда имеем

$$z(\beta) = B + ae^{i\omega\beta} + g\beta/\omega, \tag{2}$$

где без потери общности можно положить $B = 0$, а величину a считать действительной и положительной, так что

$$z = \frac{g\beta}{\omega} + ae^{i\omega\beta}. \tag{3}$$

Тогда из формулы (4) п. 11.63 получим

$$-\frac{dw}{d\beta} = \left(\frac{g}{\omega} - ai\omega e^{-i\omega\beta}\right)\left(\frac{g}{\omega} + ai\omega e^{i\omega\beta}\right),$$

отсюда

$$w = -\left(\frac{g^2}{\omega^2} + a^2\omega^2\right)\beta - \frac{2ag}{\omega}\cos\omega\beta. \tag{4}$$

Свободная поверхность, определяемая уравнением (3), есть трохоида без двойных точек, если амплитуда $a < g/\omega^2$, причем длина волны равна

$$\lambda = 2\pi g/\omega^2. \tag{5}$$

Таким образом, условие $a < g/\omega^2$ означает, что $2\pi a < \lambda$.

Скорость $-dw/dz$ становится бесконечной, если $dz/d\beta = 0$; это дает

$$\omega\beta = 2\pi\left(n + \frac{1}{4}\right) - i\ln\frac{\lambda}{2\pi a}, \tag{6}$$

где n — любое целое число. Соответствующие значения z являются особыми точками

$$z = \lambda\left\{\left(n + \frac{1}{4}\right) + \frac{i}{2\pi}\left(1 - \ln\frac{\lambda}{2\pi a}\right)\right\}. \tag{7}$$

Такие особенности должны быть исключены из потока. Для осуществления этого можно взять в качестве дна линию тока, проходящую через особые точки или выше особых точек, задаваемых уравнением (7).

На рис. 284 (взятом из статьи Джона) изображена свободная поверхность и поверхность дна, образованная линией тока, проходящей через особые точки для различных значений отношения $A = 2\pi a/\lambda$. Единицы измерения на диаграмме выбраны так, что $\omega = g = 1$ и $\lambda = 2\pi$. При малых значениях отношения a/λ глубина жидкости велика по сравнению с величиной a, величина λ имеет порядок $\lambda\ln(\lambda/a)$, а амплитуда поверхности дна является бесконечно малой величиной порядка a^2/λ по сравнению с амплитудой свободной поверхности. С другой стороны, когда отношение a/λ близко к величине $1/2\pi$, глубина жидкости мала и поверхность дна имеет сходство со свободной поверхностью. При движении, описываемом формулами (3) и (4), свободная поверхность не изменяется со временем и каждая частица имеет горизонтальную скорость, изменяющуюся от $(g/\omega - a\omega)$ до $(g/\omega + a\omega)$.

Введем новую систему координат, движущуюся относительно старой вправо с постоянной горизонтальной скоростью g/ω. Тогда мы получим дви-

жение типа прогрессивной волны. Чтобы сделать это, напишем формулы (3) и (4) в виде

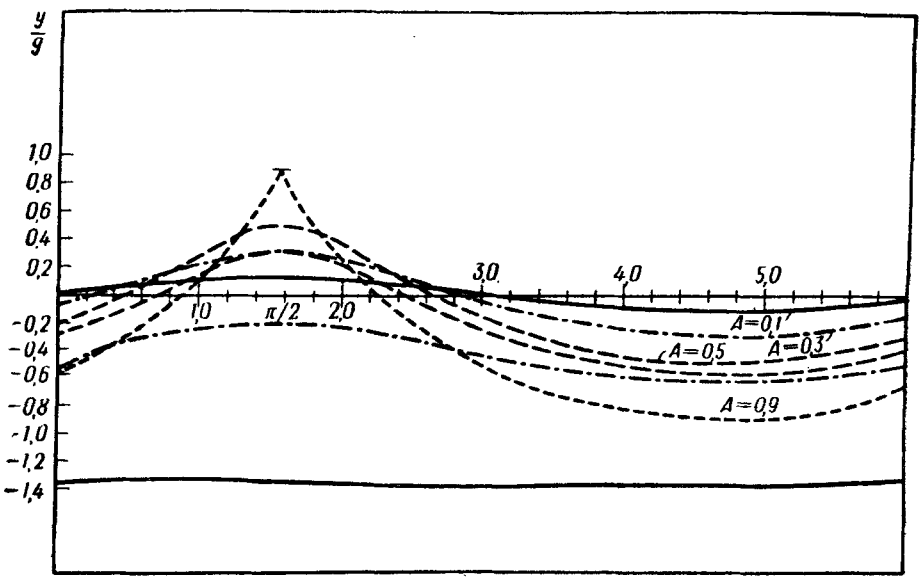
$$z=\frac{gt}{\omega}+Z,\quad w=W-\frac{gz}{\omega},\quad \beta=\alpha+t,$$

отсюда имеем

$$Z=\frac{g\alpha}{\omega}+a\exp\{i\omega(\alpha+t)\},\tag{8}$$

$$W=\omega^2a^2(\alpha+t)+\frac{ag}{\omega}\exp\{-i\omega(\alpha+t)\}.\tag{9}$$

Если исключим величину $(\alpha+t)$, то увидим, что W есть функция только от $(Z+gt/\omega)$, так что волна распространяется налево со скоростью g/ω.



Р и с. 284.

Поскольку особые точки теперь не являются неподвижными, мы должны связывать движущуюся поверхность дна с волной. При малых значениях отношения a/λ поверхность дна может быть взята так глубоко, что движение сведется к бесконечно малому движению жидкости бесконечной глубины. Фазовая скорость g/ω равна $(g\lambda/2\pi)^{1/2}$, как и по классической теории.

При движении, задаваемом формулами (3) и (4), величина α является координатой Лагранжа только для действительных значений, соответствующих частицам, находящимся на свободной поверхности. Движение поверхностных частиц аналогично движению трохоидальной волны Герстнера (п. 14.81), задаваемой формулой

$$z=\frac{g\alpha}{\omega}+a\exp\{i\omega(\bar{\alpha}+t)\},$$

где α — координата Лагранжа даже для комплексных значений, а результирующее движение жидкости является вихревым.

14.84. Точная нелинейная теория волн постоянной формы. Рассмотрим волну постоянной формы, движущуюся справа налево со скоростью c по поверхности бесконечно глубокой жидкости.

Предположим, что волна имеет вертикальную ось симметрии, проходящую через гребень C. Длина волны λ есть расстояние, например, между двумя последовательными впадинами T_1 и T_2, расположенными по обе стороны от гребня C (рис. 285).

Наложим на всю систему координат скорость c, направленную слева направо. В результате форма волны сделается неподвижной, а жидкость в этом движении (т. е. в системе координат, связанной с волной) окажется текущей слева направо с некоторой «средней» скоростью c.

Возьмем ось x в направлении этой «средней» скорости c и ось y направим вертикально вверх через гребень. Пусть H — высота волны, т. е. расстояние по вертикали от гребня до впадины.

Форма профиля свободной поверхности считается неизвестной. Отобразим этот неизвестный профиль T_1CT_2 на известную кривую — окружность единич-

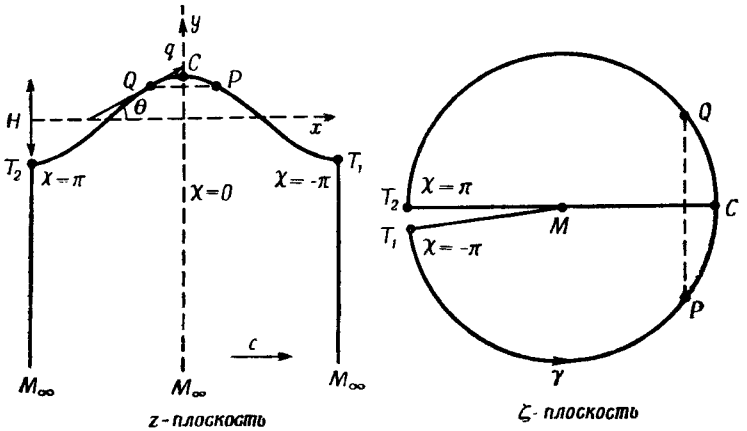


Рис. 285.

ного круга в плоскости ζ. Если T_1M_∞, T_2M_∞ — вертикали, проходящие через впадины, то будет удобно называть областью *одной волны* область, ограниченную этими вертикалями и профилем волны.

Отобразим область одной волны на внутреннюю часть единичного круга с разрезом вдоль некоторого радиуса. Мы утверждаем, что точка M_∞ отобразится в центр M единичного круга, а линии $M_\infty C$ будут соответствовать радиусу MC, который лежит вдоль действительной оси в плоскости ζ. Таким образом, если

$$\zeta = re^{i\chi}, \tag{1}$$

то мы будем иметь $\chi = 0$ на радиусе MC. Тогда разрез MT расположится вдоль радиуса, противоположного радиусу MC. Мы будем представлять себе края разреза находящимися на небольшом расстоянии друг от друга и образованными радиусом MT_1, на котором $\chi = -\pi$, и радиусом MT_2, на котором $\chi = \pi$.

Тогда, если мы движемся по окружности единичного круга γ, изменяя χ от $-\pi$ до π, т. е. следуя по линии T_1CT_2 в плоскости ζ, то точка z будет описывать профиль волны T_1CT_2 и при переходе от T_1 к T_2 величина x уменьшится на длину волны λ. Это может быть достигнуто с помощью отображающей функции

$$z = \frac{i\lambda}{2\pi} \ln \zeta.$$

Та же самая функция преобразует точку $\zeta = 0$ в точку M_∞. Таким образом,

отображение можно осуществить с помощью формулы

$$z=\frac{i\lambda}{2\pi}\left(\ln\zeta+a_1\zeta+\frac{1}{2}a_2\zeta^2+\frac{1}{3}a_3\zeta^3+\ldots\right), \tag{2}$$

где, как окажется, для получения симметричного профиля коэффициенты a_n $(n=1, 2, \ldots)$ должны быть действительны. Далее, получаем

$$\frac{dz}{d\zeta}=\frac{i\lambda}{2\pi}\left(\frac{1}{\zeta}+a_1+a_2\zeta+a_3\zeta^2+\ldots\right)=\frac{i\lambda}{2\pi}\frac{f(\zeta)}{\zeta}, \tag{3}$$

где

$$f(\zeta)=1+a_1\zeta+a_2\zeta^2+a_3\zeta^3+\ldots. \tag{4}$$

На свободной поверхности полагаем

$$\zeta=\sigma=e^{i\chi}, \quad \bar{\sigma}=1/\sigma. \tag{5}$$

Тогда из формулы (2) для точки на свободной поверхности (x, y) имеем

$$\begin{cases} x=-\dfrac{\lambda}{2\pi}\left(\chi+a_1\sin\chi+\dfrac{1}{2}a_2\sin 2\chi+\dfrac{1}{3}a_3\sin 3\chi+\ldots\right), \\ y=\dfrac{\lambda}{2\pi}\left(a_1\cos\chi+\dfrac{1}{2}a_2\cos 2\chi+\dfrac{1}{3}a_3\cos 3\chi+\ldots\right), \end{cases} \tag{6}$$

и это доказывает симметрию относительно радиуса CM или оси $\chi=0$, так как x изменяет знак вместе с χ, а y не изменяет знака. Это утверждение справедливо только в том случае, если все величины a_n действительны.

Далее, из формул (3) и (5) на свободной поверхности получаем

$$\frac{dz}{d\chi}=\frac{dz}{d\sigma}\frac{d\sigma}{d\chi}=\frac{i\lambda}{2\pi}\frac{f(\sigma)}{\sigma}i\sigma=-\frac{\lambda}{2\pi}f(\sigma). \tag{7}$$

Теперь, если положить

$$f(\sigma)=Re^{i\theta}, \tag{8}$$

где R и θ действительны, то мы замечаем в силу формул (5), что R и θ являются функциями от χ, так что имеем

$$R=R(\chi), \quad \theta=\theta(\chi). \tag{9}$$

Кроме того, логарифмируя формулу (8), мы получаем в точке $\sigma=e^{i\varepsilon}$ следующее соотношение:

$$\ln R(\varepsilon)+i\theta(\varepsilon)=\ln f(e^{i\varepsilon})=\ln(1+a_1e^{i\varepsilon}+a_2e^{2i\varepsilon}+\ldots)=$$
$$=b_1e^{i\varepsilon}+b_2e^{2i\varepsilon}+b_3e^{3i\varepsilon}+b_4e^{4i\varepsilon}+\ldots,$$

где

$$b_1=a_1, \quad b_2=a_2-\frac{1}{2}a_1^2, \quad b_3=a_3-a_1a_2+\frac{1}{3}a_1^3, \ldots, \tag{10}$$

так что все величины b_n действительны и известны, если известны величины a_n. Таким образом, находим

$$\ln R(\varepsilon)=b_1\cos\varepsilon+b_2\cos 2\varepsilon+b_3\sin 3\varepsilon+\ldots, \tag{11}$$

$$\theta(\varepsilon)=b_1\sin\varepsilon+b_2\sin 2\varepsilon+b_3\sin 3\varepsilon+\ldots. \tag{12}$$

Для получения соотношения между θ и R можно использовать формулы (11) и (12) следующим образом. Из формулы (11) мы имеем

$$\frac{d}{d\varepsilon}\ln R(\varepsilon)=-b_1\sin\varepsilon-2b_2\sin 2\varepsilon-3b_3\sin 3\varepsilon-\ldots.$$

Но

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin n\varepsilon \sin n\chi}{n} (b_1 \sin\varepsilon + 2b_2 \sin 2\varepsilon + 3b_3 \sin 3\varepsilon + \ldots)\, d\varepsilon = \pi b_n \sin n\chi.$$

Следовательно, получаем

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varepsilon \sin n\chi}{n}\right)\left(\frac{d}{d\varepsilon} \ln R(\varepsilon)\right) d\varepsilon =$$

$$= b_1 \sin\chi + b_2 \sin 2\chi + b_3 \sin 3\chi + \ldots = \theta(\chi). \tag{13}$$

Будет установлено, что формула (13) является ключом к решению нашей задачи. Отметим, что до этого момента мы изучали только свойства отображения. Рассмотрим теперь движение жидкости.

Если на поверхности положить $\psi = 0$, то граничные условия примут вид

$$\psi = 0, \quad r = 1 \quad \text{на поверхности}, \tag{14}$$

$$\psi = 0, \quad r = 0 \quad \text{в точке } M_\infty, \tag{15}$$

$$u - iv = c, \quad \zeta = 0 \quad \text{в точке } M_\infty. \tag{16}$$

Всем этим условиям удовлетворяет комплексный потенциал

$$w = -\frac{ic\lambda}{2\pi} \ln\zeta, \tag{17}$$

что дает $\psi = -(c\lambda/2\pi)\ln r$. Это выражение удовлетворяет условиям (14) и (15). Отсюда, а также из формулы (3) следует соотношение

$$u - iv = -\frac{dw}{dz} = -\frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz} = \frac{c}{f(\zeta)}. \tag{18}$$

При $\zeta = 0$ имеем $f(\zeta) = 1$, так что условие (16) также удовлетворяется. Кроме того, из формул (18) и (8) следует, что на поверхности имеет место равенство

$$u - iv = \frac{c}{f(\sigma)} = \frac{c}{R} e^{-i\theta},$$

и, следовательно,

$$q = c/R, \tag{19}$$

где θ — угол между вектором скорости и горизонталью.

На свободной поверхности давление постоянно, и, следовательно, теорема Бернулли дает $q^2 + 2gy = \text{const}$ или, учитывая (19), $(c^2/R^2) + 2gy = \text{const}$, откуда после дифференцирования и применения формулы (7) находим

$$\frac{d}{d\chi}\left(\frac{1}{R^2(\chi)}\right) = -\frac{2g}{c^2}\frac{dy}{d\chi} = \frac{g\lambda}{\pi c^2} R(\chi) \sin\theta(\chi),$$

что можно записать в виде

$$\frac{d}{d\chi}\left(\frac{1}{R^3(\chi)}\right) = \frac{3}{2}\frac{g\lambda}{\pi c^2} \sin\theta(\chi).$$

Проинтегрировав это уравнение от 0 до ε, получим формулу

$$\frac{1}{R^3(\varepsilon)} = \frac{3g\lambda}{2\pi c^2}\left[\int_0^{\varepsilon} \sin\theta(\omega)\, d\omega + \frac{1}{\mu}\right], \tag{20}$$

где μ — произвольная постоянная.

Сравнивая формулы (13) и (20), мы видим, что величину $R(\varepsilon)$ возможно исключить и, таким образом, получить уравнение для $\theta(\chi)$. Чтобы сделать это, прологарифмируем обе части уравнения (20) и продифференцируем по ε. Тогда получим

$$-3\frac{d}{d\varepsilon}\ln R(\varepsilon)=\frac{\mu\sin\theta(\varepsilon)}{\varepsilon\left(1+\mu\int\limits_0^{\varepsilon}\sin\theta(\omega)\,d\omega\right)}.$$

Подставляя это выражение в формулу (13), находим

$$\theta(\chi)=\frac{\mu}{3\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\theta(\varepsilon)}{\varepsilon\left(1+\mu\int\limits_0^{\varepsilon}\sin\theta(\omega)\,d\omega\right)}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varepsilon\sin n\chi}{n}\right]d\varepsilon. \tag{21}$$

Это — нелинейное интегральное уравнение для $\theta(\chi)$ (наклона волны) как функции χ[1]). После решения этого уравнения величины b_1, b_2, b_3, ... находятся из уравнения (12), затем находятся величины a_1, a_2, a_3, ... из (10) и, наконец, профиль волны из уравнений (6).

Кроме того, если известны величины a_1, a_2, a_3, ..., то, согласно формуле (4), известна функция $f(\zeta)$ и, следовательно, находим скорость в любой точке по формуле (18).

Таким образом, оказывается, что вся точная теория волн постоянной формы[2]) вытекает из решения нелинейного интегрального уравнения (21).

Чтобы найти кинетическую энергию, мы должны вычесть наложенную скорость c, так что в результате имеем

$$q^2=(u-c)^2+v^2=(u-iv-c)\,(u+iv-c).$$

Но из уравнения (18) получаем $u-iv=c/f(\zeta)$.
Следовательно,

$$q^2=c^2\,[1-f(\zeta)]\,[1-\overline{f}(\overline{\zeta})]/[f(\zeta)\overline{f}(\overline{\zeta})].$$

Теперь, если через dS и dA обозначить соответственно элементы площади волны и единичного круга, то из уравнения (3) и п. 6.29 следует равенство

$$\frac{dS}{dA}=\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2=\frac{\lambda^2}{4\pi^2\zeta\overline{\zeta}}f(\zeta)\,\overline{f}(\overline{\zeta}).$$

---

[1]) Это уравнение А. И. Некрасова, *Изв. Иваново-Вознесенского политехн. ин-та*, 3 (1921), 52—65; 6 (1922), 155—171 (см. также переработанное издание этих статей: «Точная теория волн установившегося вида», статья 19 в Собр. соч. А. И. Некрасова, т. I, Изд-во АН СССР, 1961.—*Прим. перев.*).

[2]) Точной теорией установившихся гравитационных безвихревых волн занимались также Т. Леви-Чивита, Н. Е. Кочин, Струик, М. А. Лаврентьев и другие советские и зарубежные авторы. Обзор этих работ и соответствующую литературу можно найти в монографиях: Сретенский Л. Н., Теория волновых движений жидкости, ОНТ, НКТП СССР, М. Л., 1936; Стокер Дж. Дж., Волны на воде. Математическая теория и приложения, ИЛ, М., 1959, а также в статьях: Сретенский Л. Н., Волны. Механика в СССР за тридцать лет (1917—1947), М., 1950, стр. 279—299; Wehausen J. V., Laitone E. V., Handb. d. Phys., Bd. IX, 1960 и др. Перевод ряда иностранных работ последних лет, интересных новыми идеями и методами, помещен в сборнике переводов «Теория поверхностных волн», ИЛ, М, 1959. Весьма интересной в этом сборнике является также вводная статья Н. Н. Моисеева, в которой дан общий обзор работ, помещенных в сборнике, и кратко освещены соответствующие по тематике оригинальные работы советских авторов. См. также Wehausen J. V., Recent developments in free—surface flows, Univ. California, 1963.

В двух монографиях и статьях, упомянутых здесь, дан также обширный материал по линейной теории волн.—*Прим. перев.*

Следовательно, кинетическая энергия одной волны выражается в виде

$$T=\frac{1}{2}\varrho\int\limits_{\text{одна волна}} q^2\,dS=\frac{1}{2}\varrho\int\limits_{\gamma}\frac{\lambda^2}{4\pi^2\zeta\bar{\zeta}}f(\zeta)\bar{f}(\bar{\zeta})\,q^2\,dA,$$

$$T=\frac{1}{8}\frac{\varrho c^2\lambda^2}{\pi^2}\int\limits_{\gamma}\frac{[f(\zeta)-1]\,[\bar{f}(\bar{\zeta})-1]\,dA}{\zeta\bar{\zeta}}. \tag{22}$$

Замечания.

(I) Соотношение (4) п. 14.58 и нелинейное условие Леви-Чивита на поверхности представляют собой постановку задачи для решения уравнения в частных производных. Задача, представленная нелинейным интегральным уравнением (21), совершенно отлична от указанной выше задачи для уравнения в частных производных в том смысле, что она является одной из тех, которые могут быть численно решены на современных быстродействующих вычислительных машинах [1]).

(II) Указанная задача является задачей на собственные значения; действительно, можно показать, что решения, отличного от решения $\theta\equiv 0$, не существует при $\mu<3$ [2]).

(III) Ядро интегрального уравнения (21) можно представить в виде

$$K(\varepsilon,\ \chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varepsilon\sin n\chi}{n}=\frac{1}{4}\ln\frac{1-\cos(\varepsilon+\chi)}{1-\cos(\varepsilon-\chi)}. \tag{23}$$

Это следует из того, что тождество

$$\ln(1-e^{i\omega})=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n\omega+i\sin n\omega}{n}\right)$$

дает

$$\ln 2\sin\frac{\omega}{2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\omega}{n}.$$

Если здесь последовательно положить $\omega=\varepsilon+\chi$ и $\omega=\varepsilon-\chi$ и результаты вычесть один из другого, то получим

$$K(\varepsilon,\ \chi)=\frac{1}{2}\ln\frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\chi)}{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\chi)}=\frac{1}{4}\ln\frac{1-\cos(\varepsilon+\chi)}{1-\cos(\varepsilon-\chi)}.$$

(IV) Обозначив ядро через $K(\varepsilon,\ \chi)$, мы можем записать уравнение (21) в виде

$$\theta(\chi)=\frac{\mu}{3\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta(\varepsilon)}{1+\mu\int\limits_0^{\varepsilon}\sin\theta(\omega)\,d\omega}K(\varepsilon,\ \chi)\,d\varepsilon. \tag{24}$$

Для простоты здесь рассматривался случай бесконечной глубины. В случае конечной глубины h следует поступать аналогично, отображая

[1]) Расчеты проводятся в настоящее время (1959) в Математическом исследовательском центре.

[2]) Более точная формулировка следующая: не существует решения, отличного от решения $\theta\equiv 0$, и регулярного в замкнутом промежутке $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ и $0\leqslant\mu\leqslant 3$ (см. работы А. И. Некрасова в прим. перев. на стр. 409).—*Прим. перев.*

одну волну на кольцевую область, заключенную между двумя концентрическими окружностями и имеющую разрез вдоль радиуса. Это приводит к уравнению типа (24), но с ядром, зависящим теперь не от синуса, а от функции Вейерштрасса σ.

(V) Если в уравнении (21) написать

$$\mu = 3 + \nu, \qquad 0 < \nu < 1$$

и положить

$$\theta(\chi) = \theta(\chi, \nu) = \nu\theta_1(\chi) + \nu^2\theta_2(\chi) + \nu^3\theta_3(\chi) + \ldots,$$

то, приравнивая члены при одинаковых степенях ν в левой и правой частях уравнения, получим бесконечную систему интегральных уравнений для функций $\theta_1(\chi)$, $\theta_2(\chi)$, ..., которую можно решать последовательно.

Учитывая члены, содержащие ν^3, мы получаем сходящийся процесс при $\nu < 1$, что приводит к следующему соотношению[1]):

$$\theta(\chi, \nu) = \left(\frac{1}{9}\nu - \frac{8}{243}\nu^2 + \frac{185}{52488}\nu^3\right)\sin\chi + \left(\frac{1}{54}\nu^2 - \frac{8}{729}\nu^3\right)\sin 2\chi + \frac{17}{4374}\nu^3\sin 3\chi. \tag{25}$$

(VI) Из соотношения (25) видно, что если величиной ν^2 и более высокими степенями ν можно пренебречь, то решение уравнения (21) имеет вид $\theta(\chi) = \beta\sin\chi$, где β — малая постоянная величина.

(VII) Комбинация формул (11) и (20) дает соотношение

$$1 + \mu\int_0^{\varepsilon}\sin\theta(\omega)\,d\omega = \frac{2\pi c^2\mu}{3g\lambda}\exp\left[-3\left(b_1\cos\varepsilon + b_2\cos 2\varepsilon + \ldots\right)\right], \tag{26}$$

где выражение, стоящее справа, никогда не обращается в нуль. Следовательно, выражение, стоящее слева, также никогда не равно нулю, будучи положительным при $\mu > 0$. Заметим, кроме того, что величину c^2 можно получить из уравнения (26).

(VIII) Если в соотношении (26) положить $\varepsilon = 0$, то сразу получаем, что μ является положительным числом.

(IX) Из уравнения (21) следует, что

$$\theta(2\pi - \chi) = \theta(\chi), \qquad \theta(0) = \theta(\pi) = 0.$$

Поэтому достаточно знать величину $\theta(\chi)$ в интервале $0 < \chi < \pi$, и, таким образом, уравнение (21) можно заменить следующим уравнением:

$$\theta(\chi) = \frac{2\mu}{3\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta(\varepsilon)}{1 + \mu\int_0^{\varepsilon}\sin\theta(\omega)\,d\omega}K(\varepsilon, \chi)\,d\varepsilon, \tag{27}$$

что упрощает численные расчеты.

(X) В синусоидальной волне форма профиля вблизи гребня подобна форме профиля вблизи впадины. Так как в силу уравнения (21) $\theta(\pi - \chi) \neq \neq \theta(\chi)$, то это свойство не сохраняется для волны, определяемой точной теорией [см. формулу (4) п. 18.65].

---

[1]) В этом соотношении коэффициент $\frac{185}{52488}$ при $\nu^3\sin\chi$ должен быть заменен его исправленным значением $\frac{115}{13122}$. (Собр. соч. А. И. Некрасова, т. I, Комментарий редакции к статье 19.) — *Прим. перев.*

(XI) Поскольку уравнение (21) не линейно, мы не можем складывать решения.

14.85. Точная линейная теория. Этот термин мы применяем к теории волн малого наклона, получаемой по точному методу п. 14.84. Если $\theta(\chi)$ — малая величина первого порядка, то мы имеем $\sin\theta(\chi)=\theta(\chi)$ и, следовательно,

$$\int_0^{\varepsilon}\sin\theta(\omega)\,d\omega$$

— также малая величина первого порядка.

Таким образом, с точностью до величины первого порядка малости имеем

$$\sin\theta(\varepsilon)\Big/\Big[1+\mu\int_0^{\varepsilon}\sin\theta(\omega)\,d\omega\Big]=\theta(\varepsilon).$$

Поэтому нелинейное интегральное уравнение (21) п. 14.84 сводится к однородному линейному интегральному уравнению

$$\theta(\chi)=\frac{\mu}{3\pi}\int_0^{2\pi}\theta(\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varepsilon\sin n\chi}{n}\,d\varepsilon. \tag{1}$$

Если в этом случае положить $\theta(\varepsilon)=\sin s\varepsilon$, то получим

$$\theta(\chi)=\frac{\mu}{3\pi s}\pi\sin s\chi,$$

и, следовательно, $\theta(\chi)=\sin s\chi$ является решением тогда и только тогда, когда $\mu=3s$. Таким образом, уравнение (1) имеет собственные значения

$$\mu=3,\ 6,\ 9,\ \ldots,\ 3s,\ \ldots$$

и соответствующими собственными функциями будут

$$\sin\chi,\ \sin2\chi,\ \sin3\chi,\ \ldots,\ \sin s\chi,\ \ldots.$$

Ввиду того что полный круг γ на рис. 285 соответствует одной волне, мы должны положить $\mu=3$ [см. п. 14.84, замечание (VI)] и тогда

$$\theta(\chi)=\beta\sin\chi, \tag{2}$$

где β — малая величина первого порядка. Тогда из формулы (12) п. 14.84 мы найдем, что с точностью до величины первого порядка все величины b_s обращаются в нули, за исключением $b_1=\beta$, и, следовательно, все величины a_s обращаются в нули, за исключением $a_1=b_1=\beta$.

Таким образом, из второго уравнения (6) п. 14.84 на свободной поверхности следует $y=(\lambda/2\pi)\beta\cos\chi$.

Если взять разность значений y при $\chi=0$ (в гребне) и $\chi=\pi$ (во впадине), то найдем, что высота волны выражается формулой $H=(\lambda/\pi)\beta$ и, следовательно,

$$\beta=\pi H/\lambda. \tag{3}$$

Возвращаясь к формулам (6) п. 14.84, найдем параметрические уравнения для профиля волны

$$x=-(\lambda/2\pi)\chi-\frac{1}{2}H\sin\chi,\qquad y=\frac{1}{2}H\cos\chi. \tag{4}$$

Это — трохоида, а не синусоидальная кривая, как в обычной линейной теории, рассмотренной ранее в этой главе (см. волна Герстнера, волна Джона).

Можно ввести амплитуду a, положив

$$H = 2a. \tag{5}$$

Чтобы найти скорость распространения, положим в формуле (6) п. 14.84

$$\mu = 3, \quad b_1 = \beta = 2\pi a/\lambda, \quad \varepsilon = 0.$$

Тогда получим

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} e^{6\pi a/\lambda}. \tag{6}$$

Сравнивая эту формулу с формулой $c^2 = g\lambda/2\pi$, полученной по обычной теории, мы видим, что они согласуются при малых значениях a/λ, и замечаем, что скорость поверхностных волн на глубокой воде увеличивается с увеличением отношения амплитуды к длине волны.

Для вычисления кинетической энергии воспользуемся формулой (22) п. 14.84. Из формулы (4) п. 14.84 имеем

$$f(\zeta) - 1 = a_1\zeta = \beta\zeta;$$

здесь площадь единичного круга равна π. Следовательно, использование формул (3), (5), (6) дает

$$T = \frac{1}{8}\frac{\varrho\lambda^2 c^2\beta^2}{\pi^2} = \frac{1}{4}a^2 g\varrho\lambda e^{6\pi a/\lambda} \tag{7}$$

Эта величина T отличается от величины, найденной в п. 14.20, на показательный множитель.

Для потенциальной энергии из формулы (4) мы имеем

$$V = \frac{1}{2}g\varrho\int_0^{\lambda} y^2\,dx = \frac{1}{4}a^2 g\varrho\lambda = Te^{-6\pi a/\lambda}. \tag{8}$$

Таким образом, при используемых здесь данных $V \neq T$.

14.86. Звуковые волны. Будем предполагать, что звуковые волны распространяются в газе посредством малых движений материальной среды, при которых частицы движутся вперед и назад на одно и то же расстояние. Благодаря такому характеру движения возмущение быстро распространяется, не вызывая переноса самой среды. Сделаем следующие основные предположения:

(I) Изменения давления, плотности и скорости от их равновесных значений p_0, ϱ_0, 0 есть бесконечно малые величины первого порядка, степенями и произведениями которых можно пренебречь.

(II) Движение является безвихревым.

(III) Давление есть функция плотности; в частности, примем адиабатический закон $p = \varkappa\varrho^{\gamma}$.

Из предположения (I) следует, что квадратичными членами в уравнении движения мы пренебрегаем, и, следовательно, отбрасывая внешние (массовые) силы, получим

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho}\nabla p.$$

Кроме того, согласно допущению (II), имеем

$$\mathbf{q} = -\nabla\varphi,$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi = \frac{1}{\varrho}\nabla p.$$

Умножив это уравнение скалярно на $d\mathbf{r}$, мы получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(d\varphi) = \frac{1}{\varrho}dp.$$

Отсюда, принимая во внимание, что разность $p - p_0$ бесконечно мала, путем интегрирования находим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\varrho} = \frac{p-p_0}{\varrho_0}.$$

Следовательно,

$$p - p_0 = \varrho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{1}$$

Для плотности мы можем написать соотношение

$$\varrho = \varrho_0(1+s), \tag{2}$$

где s — бесконечно малая величина.

В этих обозначениях уравнение неразрывности (5) п. 3.20 принимает вид

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla\mathbf{q} = 0, \tag{3}$$

или

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla^2\varphi.$$

Пренебрегая более высокими степенями s, из допущения (III) имеем приближенно

$$p = \varkappa\varrho^\gamma = \varkappa\varrho_0^\gamma(1+s)^\gamma = p_0(1+\gamma s).$$

Таким образом, уравнение (1) дает

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = c^2 s, \qquad c^2 = \frac{\gamma p_0}{\varrho_0}. \tag{4}$$

Исключая s из соотношений (3) и (4), получаем

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\nabla^2\varphi. \tag{5}$$

Этому уравнению удовлетворяет потенциал скоростей φ при распространении звуковых волн.

14.87. Плоские волны. Если звуковые волны распространяются только в одном измерении, скажем параллельно оси y, то уравнение (5) п. 14.86 принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}.$$

Решением этого уравнения (см. п. 14.60) является функция

$$\varphi = \varphi_1(x-ct) + \varphi_2(x+ct),$$

где φ_1 и φ_2 — произвольные функции. Это решение представляет собой движение двух систем волн, из которых одна, отвечающая потенциалу скоро-

стей $\varphi_1(x)$, распространяется со скоростью c в положительном направлении оси x; другая, отвечающая потенциалу скоростей φ_2, распространяется в противоположном направлении также со скоростью c.

Таким образом, c есть скорость звука. Так как из формулы (4) п. 14.86

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\varrho_0}},$$

то скорость звука в каждом газе может быть вычислена. Вычисленная скорость звука для воздуха при 0° С равна примерно 330 *м/сек*, что хорошо согласуется с наблюдениями и оправдывает выбор адиабатического закона.

Благодаря сделанному предположению относительно того, что волны распространяются в одном измерении, потенциал скоростей имеет одинаковое значение во всей плоскости, для которой задано значение x. Поэтому такие волны называются плоскими.

Потенциал скоростей плоской простой гармонической прогрессивной волны имеет вид

$$\varphi = A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct),$$

где λ — длина волны. Период равен $\tau = \lambda/c$.

Звуковые волны распространяются со скоростью, не зависящей от длины волны, и, следовательно, в этом отношении они аналогичны длинным волнам на воде.

Если частица, равновесное положение которой соответствует x, занимает в момент времени t положение $x + \xi$, то мы имеем

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{2\pi A}{\lambda}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct), \qquad \xi = \frac{A}{c}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct).$$

Таким образом, $\varphi = c\xi$ и действительная амплитуда перемещения, а именно A/c, пропорциональна амплитуде потенциала скоростей.

В качестве величины *интенсивности* звука мы можем взять величину, пропорциональную средней скорости, с которой переносится энергия через единицу площади волнового фронта. Мощность силы давления выражается в виде

$$I = pu = \left(p_0 + \varrho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) =$$
$$= \frac{2\pi A p_0}{\lambda}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) + \frac{4\pi^2 A^2 c\varrho_0}{\lambda^2}\sin^2\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct),$$

ее среднее значение за период равно

$$I_m = \frac{2\pi^2 A^2 c\varrho_0}{\lambda^2} = 2\pi^2 c\varrho_0\left(\frac{A}{c}\right)^2\frac{1}{\tau^2}.$$

Таким образом, интенсивность звука пропорциональна квадрату амплитуды и обратно пропорциональна квадрату периода.

14.88. Плоские волны в цилиндрической трубе. Пусть l — длина трубы, поперечным сечением которой может быть любая плоская кривая и образующие которой параллельны оси x. Будем искать периодические решения в виде стоячих волн. Для этого предположим, что $\varphi = f(x)\cos nt$. Тогда подстановка в уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

дает

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{n^2}{c^2}f = 0.$$

Таким образом, находим

$$\varphi = \left(A\cos\frac{nx}{c} + B\sin\frac{nx}{c}\right)\cos nt. \qquad (1)$$

Концы трубы могут быть открыты или закрыты. У закрытого конца скорость частиц обращается в нуль, т. е. $\partial\varphi/\partial x = 0$. У открытого конца, сообщающегося с внешним воздухом под давлением p_0, должно приближенно удовлетворяться условие $p = p_0$, если диаметр трубы мал по сравнению с длиной волны. Таким образом, у открытого конца $\partial\varphi/\partial t = 0$.

Если труба закрыта на концах при $x = 0$ и $x = l$, то из формулы (1) мы получим

$$B = 0, \qquad \sin(nl/c) = 0.$$

Последнее условие дает

$$\frac{nl}{c} = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots,$$

следовательно, периоды $2\pi/n$ равны

$$\frac{2l}{c},\ \frac{2l}{2c},\ \frac{2l}{3c},\ \ldots,$$

и

$$\varphi = A\cos\frac{nx}{c}\cos nt,$$

где n принимает любое из вышеуказанных значений.

Эти решения можно сложить, так что в результате найдем

$$\varphi = A_1\cos\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi ct}{l} + A_2\cos\frac{2\pi x}{l}\cos\frac{2\pi ct}{l} + \ldots.$$

Первый из этих членов называется *главным*, или *основным*, *тоном*, другие называются *обертонами*. *Частота* основного тона равна $c/(2l)$. Скорость у каждого конца обращается в нуль, если труба издает основной тон. Кроме того, скорость частиц может обращаться в нуль в других точках, если колебание газа содержит обертоны. Такие точки называются *узлами*, в то время как точки с максимальной скоростью для данного значения t называются *пучностями*, если использовать терминологию волн на воде. В пучностях давление постоянно, в то время как в узлах оно одинаково для данного значения t.

Для трубы, *закрытой с одного конца*, скажем, при $x = 0$, и открытой с другого, мы снова имеем $B = 0$, но поскольку $\partial\varphi/\partial t$ обращается в нуль при $x = l$, то мы получаем $\cos(nl/c) = 0$. Таким образом,

$$\frac{nl}{c} = (2s+1)\frac{\pi}{2}, \quad s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

а частота главного тона равна $n/(2\pi) = c/(4l)$. Открытый конец является пучностью.

Для трубы, открытой с обоих концов, мы получаем $A = 0$ и $\sin(nl/c) = 0$, так что частоты получаются такие же, как если бы оба конца были закрыты, но только открытые концы являются теперь пучностями.

14.89. Сферические волны. Если возмущение симметрично относительно начала координат, то φ будет зависеть только от расстояния r и времени. Тогда из формулы (5) п. 14.86 и п. 2.72 мы получим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right),$$

или

$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2}.$$

Таким образом, так как и в п. 14.60, мы имеем

$$r\varphi = f_1 (r - ct) + f_2 (r + ct),$$

что представляет собой сумму расходящегося и сходящегося возмущений.

В случае волн, расходящихся от начала координат, мы можем написать

$$r\varphi = f\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

и движение можно рассматривать как движение, вызванное источником мощности $f(t)$ в начале координат. Если источник действует в течение конечного промежутка времени, а затем перестает действовать, то путем интегрирования по промежутку времени, который включает в себя все время прохождения возмущения через данную точку, мы получим из формулы (4) п. 14.86 равенство

$$\int s\, dt = 0,$$

так как величина φ равна нулю до и после прохождения волны. Этот результат означает, что s принимает как положительные, так и отрицательные значения. Иначе говоря, расходящаяся волна обязательно должна содержать в себе сжатые и разреженные части. Это замечание принадлежит Стоксу. Отсюда следует, что не может существовать одна расходящаяся волна сжатия.

ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ 14

1. Гребни волн, длина которых равна 66 *м*, распространяются вблизи корабля и достигают его через 16,5 *сек*. Гребню требуется 6 *сек*, чтобы пройти вдоль корабля. Найти длину волны и скорость корабля.

2. Доказать, что

$$w = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z + ih - Vt)$$

является комплексным потенциалом, соответствующим распространению простых гармонических поверхностных волн малой высоты по воде глубины h, причем начало координат расположено на невозмущенной свободной поверхности. Выразить A через амплитуду a свободных колебаний.

Доказать, что

$$V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi h}{\lambda},$$

и установить, что каждое значение скорости V, меньшее, чем $\sqrt{(gh)}$, есть скорость некоторой волны.

Доказать, что каждая частица описывает эллипс относительно своего положения равновесия. Получить соответствующий результат для бесконечно глубокой воды.

3. Жидкость постоянной глубины h, заполняющая сосуд с вертикальными стенками, параллельными оси Oz получила малое возмущение; найти уравнение, определяющее движение жидкости.

Показать, что потенциал скорости имеет вид

$$\varphi = f(x, y) \operatorname{ch} k(z + h) \cos(\sigma t + \varepsilon),$$

и объяснить, как найти функцию $f(x, y)$ и константы k и σ. Рассмотреть случай, когда горизонтальное сечение сосуда представляет собой прямоугольник со сторонами a и b.

4. Рассмотреть кинетическую и потенциальную энергии, связанные с одной системой прогрессивных волн на глубокой воде. Предполагая, что эти величины равны, получить формулу

$$V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi},$$

где V — скорость распространения волны.

Показать, как изменится этот результат, если длина волны настолько мала, что потенциальной энергией, обусловленной поверхностным натяжением, нельзя пренебрегать.

5. Система простых гармонических волн длины λ проходит по поверхности воды большой глубины. Доказать, что в точке, лежащей под невозмущенной поверхностью на глубине h, давление в момент времени, при котором глубина точки равна $h+\eta$, относится к давлению в той же точке в невозмущенном состоянии как

$$\left[1+\frac{\eta}{h}\exp\left(-\frac{2\pi h}{\lambda}\right)\right]:1.$$

6. Показать, что длина стоячих волн λ в реке глубины h, текущей со скоростью v, определяется формулой

$$v^2=\frac{g\lambda}{2\pi}\operatorname{th}\frac{2\pi h}{\lambda}.$$

Показать, что если скорость потока превышает величину $\sqrt{gh}$, то такие стоячие волны не могут существовать.

7. Показать, что если в системе волн на глубокой воде с потенциалом скоростей

$$\varphi=\frac{1}{2}Vhe^{-\frac{2\pi z}{l}}\cos\frac{2\pi}{l}(x-Vt)$$

величиной $(h/l)^2$ можно пренебречь, то частицы жидкости движутся по окружности с постоянной скоростью.

Доказать, что с точностью до второго приближения поверхностные частицы подвергаются незначительному поверхностному дрейфу в направлении распространения волны.

8. Плоские прогрессивные волны в воде глубины h с потенциалом скоростей

$$\frac{ga}{n}\frac{\operatorname{ch}m(z+h)}{\operatorname{ch}mh}\cos\{m(x\cos\alpha+y\sin\alpha)-nt\}$$

отражаются от твердой вертикальной стенки, совпадающей с плоскостью $x=0$, причем ось z направлена вертикально вверх, а начало координат находится на невозмущенной поверхности. Найти потенциал скоростей отраженных волн и показать, что траектории частиц являются эллипсами, плоскости которых вертикальны только в плоскости $x=0$.

9. Исследовать волновое движение, имеющее место на горизонтальной поверхности раздела между двумя жидкостями, из которых верхняя имеет плотность ϱ_2 и скорость течения U, а нижняя имеет плотность ϱ_1 и покоится, если не считать малого движения, причем обе жидкости простираются неограниченно.

Показать, что скорость волны c длины λ определяется уравнением

$$g(\varrho_1-\varrho_2)=\frac{2\pi}{\lambda}(\varrho_1c^2+\varrho_2(c-U)^2),$$

и доказать, что при данном значении скорости U волны, имеющие длину меньше некоторого значения, не могут существовать.

10. Бесконечная жидкость плотности σ лежит над бесконечной жидкостью плотности ϱ, причем обе жидкости разделяются плоской горизонтальной поверхностью раздела. Показать, что скорость v распространения волн длины λ вдоль поверхности раздела выражается формулой

$$v^2=\frac{g\lambda}{2\pi}\frac{\varrho-\sigma}{\varrho+\sigma}.$$

Доказать, что для любой группы таких волн групповая скорость равна половине скорости волны.

11. Слой жидкости плотности ϱ глубины h лежит над бесконечно глубокой жидкостью плотности σ ($\sigma>\varrho$). Показать, что если пренебречь поверхностным натяжением, то вдоль слоя могут распространяться волны двух типов длины $2\pi/m$ со скоростями, даваемыми формулами

$$V^2=\frac{g}{m}$$

и

$$V^2=\frac{g}{m}\frac{\sigma-\varrho}{\sigma\operatorname{cth}mh+\varrho}.$$

12. Накладываются друг на друга две несжимаемые жидкости с плотностями ϱ_1, ϱ_2 ($\varrho_1>\varrho_2$). Верхняя жидкость движется как целое со скоростью U_2, а нижняя

со скоростью U_1 в направлении горизонтальной оси x; ось y направлена вертикально вверх. Показать, что высота волнового возмущения η, потенциалами скоростей которого соответственно в обеих жидкостях являются φ_1 и φ_2, удовлетворяет следующим уравнениям на границе раздела:

$$\varrho_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+U_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)-\varrho_2\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+U_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)=(\varrho_1-\varrho_2)\,g\eta,$$

$$-\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial t}+U_1\frac{\partial\eta}{\partial x},\quad -\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial t}+U_2\frac{\partial\eta}{\partial x}.$$

Получить скорость распространения волн длины λ на этой поверхности раздела, если $U_1=U_2=0$ и обе жидкости имеют бесконечную глубину.

13. Жидкость плотности ϱ_2, находящаяся в области $0<z<h$, разделяет две жидкости плотностей ϱ_1 и ϱ_3, занимающие соответственно области $h<z<\infty$ и $-\infty<z<0$ и покоящиеся при наличии силы тяжести, причем $\varrho_1<\varrho_2<\varrho_3$. Если волны длины λ, большой по сравнению с h, возникают в среднем слое, то найти две возможные скорости распространения V_1, V_2, показав, что V_1 не зависит от ϱ_2 и является такой величиной, что группа волн приблизительно одинаковой длины распространяется со скоростью $^1/_2 V_1$, в то время как другое значение V_2 не зависит от λ. Ось z направлена вертикально вверх.

14. Если плоскость $z=0$ является горизонтальной поверхностью раздела двух неограниченных несжимаемых жидкостей, из которых верхняя плотности ϱ_1 движется как целое со скоростью U в направлении оси x, в то время как другая жидкость плотности ϱ_2 покоится, то показать, что условия неразрывности, которым удовлетворяют потенциалы скоростей φ_1, φ_2 малых возмущений из установившегося состояния, могут быть записаны для обеих жидкостей в форме

$$\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}(\varphi_1-\varphi_2)=U\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\,\partial z},$$

$$\varrho_1\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}+\frac{U\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial t}\right)-\varrho_2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}=(\varrho_2-\varrho_1)\frac{g\partial\varphi_2}{\partial z}.$$

Доказать, что возмущение в виде волны длины λ будет распространяться вдоль поверхности раздела с действительной скоростью, если только

$$\lambda>\frac{2\pi U^2}{g}\,\frac{\varrho_1\varrho_2}{\varrho_2^2-\varrho_1^2}.$$

15. Получить условия, которым должны удовлетворять малые колебания на горизонтальной поверхности раздела двух полубесконечных жидкостей плотностей ϱ, ϱ' ($\varrho>\varrho'$), текущих со скоростями U, U' в одном и том же горизонтальном направлении, причем принимается во внимание поверхностное натяжение T.

Показать, что возможны два значения для скорости волны длины λ, а именно

$$V=\frac{\varrho U+\varrho' U'}{\varrho+\varrho'}\pm\sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}\,\frac{\varrho-\varrho'}{\varrho+\varrho'}+\frac{2\pi T}{\lambda(\varrho+\varrho')}-\frac{\varrho\varrho'\,(U-U')^2}{(\varrho+\varrho')^2}}.$$

16. Две неперемешивающиеся жидкости занимают область между двумя неподвижными горизонтальными плоскостями. Верхняя жидкость плотности ϱ' и средней глубины h' течет с общей скоростью U по нижней жидкости, плотность которой равна ϱ и средняя глубина равна h, причем эта жидкость имеет только волновое движение. Пренебрегая вязкостью, доказать, что скорость V волн длиной $2\pi/k$, распространяющихся по общей поверхности в направлении скорости U, выражается формулой

$$\varrho V^2\operatorname{cth}kh+\varrho'(U-V)^2\operatorname{cth}kh'=T_1k+g(\varrho-\varrho')/k,$$

где T_1 — поверхностное натяжение.

Применить полученный результат для оценки устойчивости поверхности глубокой воды, над которой дует ветер с данной скоростью. (Для числовых расчетов величину g можно взять равной 980, а величину T_1 — равной 74 в системе CGS, а ϱ'/ϱ можно взять равным 0,0013.)

17. Жидкость плотности ϱ глубины h находится над неподвижным горизонтальным дном; над ней имеется слой жидкости плотности ϱ' ($\varrho'<\varrho$) и толщины h'; верхняя поверхность представляет собой неподвижную горизонтальную плоскость. Получить уравнение, определяющее скорость V волн длины $2\pi/m$ на общей поверхности, причем поверхностное натяжение между обеими жидкостями равно T_1.

Доказать, что если h и h' — малые величины по сравнению с величиной $2\pi/m$, то приближенно имеем

$$V^2=hh'\,\frac{(\varrho-\varrho')\,g+T_1m^2}{\varrho h'+\varrho' h}.$$

18. Две части бесконечного равномерного потока жидкости плотности ϱ, текущей со скоростью U, разделены плоской границей из очень эластичного материала, масса которого, отнесенная к единице площади, равна m и который подвержен напряжению T, причем граница параллельна потоку. Показать, что волны длиной λ могут распространяться вдоль границы из указанного материала в направлении потока со скоростью V, задаваемой формулой

$$mV^2-T+\frac{\lambda\varrho}{\pi}(U-V)^2=0,$$

при условии, что

$$T\left(1+\frac{m\pi}{\lambda\varrho}\right)>mU^2.$$

19. Объяснить, почему флаг колышется на ветру, построив необходимую теорию.

20. Найти скорость системы простых гармонических волн длины λ, движущихся под влиянием силы тяжести и капиллярности по общей поверхности двух жидкостей с плотностями ϱ и ϱ', если T—поверхностное натяжение. Показать, что имеется минимальная скорость волны; найти ее величину и величину соответствующей длины волны. Доказать, что групповая скорость группы волн почти одинаковой амплитуды, длины и фазы больше или меньше скорости одной волны, смотря по тому, будет ли длина волны в группе меньше или больше, чем длина волны, имеющей минимальную скорость. Указать, какие явления можно объяснить этим результатом.

21. Слой жидкости плотности ϱ_1 и высоты h находится на горизонтальной поверхности неограниченной жидкости плотности ϱ_2 ($\varrho_2>\varrho_1$). Если T_1, T_2—поверхностные натяжения на верхней и нижней границах слоя, то доказать, что скорость V, с которой волны распространяются вдоль слоя, удовлетворяет уравнению

$$V^4k^2\varrho_1(\varrho_2+\varrho_1\operatorname{th}kh)-$$
$$-V^2k\left[k^2\{\varrho_1(T_1+T_2)+\varrho_2T_1\operatorname{th}kh\}+\varrho_1\varrho_2g(1+\operatorname{th}kh)\right]+$$
$$+\{k^2T_1+\varrho_1g\}\{k^2T_2+(\varrho_2-\varrho_1)g\}\operatorname{th}kh=0,$$

где $2\pi/k$—длина волны.

22. К свободной поверхности глубокой покоящейся воды приложено импульсивное давление $\tilde{\omega}_0+\tilde{\omega}_1\sin mx$. Найти импульсивное давление в любой точке воды. Показать, что начальная кинетическая энергия воды, отнесенная к единице площади свободной поверхности, равна $m\tilde{\omega}_1^2/4\varrho$.

23. К свободной поверхности глубокой покоящейся воды приложено импульсивное давление $\tilde{\omega}\sin mx$, причем начало координат находится на свободной поверхности, а ось z направлена вниз. Определить комплексную скорость начального движения и показать, что комплексная скорость жидкости на глубине z равна $m\tilde{\omega}e^{-mz}/\varrho$.

Получить соответствующие результаты для мелкой воды глубины d.

24. Разработать двумерную приближенную теорию распространения поверхностных волн малой высоты по горизонтальному слою жидкости постоянной глубины.

Показать, что потенциал скорости φ и функция тока ψ уединенной волны[1]) выражаются приближенно формулой

$$\varphi+i\psi=-c(x+iy)+c\alpha\operatorname{th}\frac{1}{2}m(x+iy),$$

где ось x направлена вдоль дна, ось y—вертикально вверх и где

$$mc^2=g\operatorname{th}mh,\quad 3m\alpha=2\operatorname{sh}^2mh,$$

причем h—глубина жидкости.

Доказать, что высота волны на расстоянии x от точки с максимальной высотой равна приближенно

$$\eta=\eta_0\operatorname{sch}^2\frac{1}{2}mx$$

и что с той же степенью приближения

$$c^2=g(h+\eta_0).$$

25. Объем $4lhb$ воды находится в бассейне, ограниченном вертикальными плоскостями $x=\pm l$, $y=\pm b$ и горизонтальной плоскостью $z=-h$. Сначала вода покоится под действием внешнего давления, приложенного к ее верхней поверхности и равного p_0+p_1x/l, где p_0 и p_1—константы и p_1 мало. Внезапно это внешнее давление изменяется

[1]) См. Ламб, Гидродинамика, § 252.

до постоянного значения, равного p_0. Определить форму верхней поверхности в любой последующий момент времени.

26. Прямоугольный лоток длины $2a$ наполнен жидкостью глубины h и колеблется в направлении длины со скоростью $u_0 \cos pt$. Показать, что потенциал скорости вынужденных колебаний выражается формулой

$$\varphi = \left\{ -xu_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a} \operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi(y+h)}{2a} \right\} \cos pt,$$

где

$$A_n = 8au_0 (-1)^n \operatorname{sch} \frac{(2n+1)\pi h}{2a} \Big/ (2n+1)^2 \pi^2 (1 - p_n^2/p^2),$$

причем через p_n обозначены периоды свободных волн длины $4a/(2n+1)$ в жидкости глубины h.

27. Длинный прямоугольный бассейн длиной $2a$, наполненный водой до небольшой высоты h, сначала находится в покое, затем ему задается небольшая продольная скорость $V \sin nt$. Показать, что высота η свободной поверхности над равновесным уровнем в момент времени t и на расстоянии x от того конца бассейна, который первоначально был самым дальним, выражается формулой

$$c\eta/Vh = -\sin n\frac{(x-a)}{c} \cdot \cos nt + \frac{2n}{ca} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\cos\left\{\left(s+\frac{1}{2}\right)\pi x/a\right\} \cos\left\{\left(s+\frac{1}{2}\right)\pi ct/a\right\}}{n^2/c^2 + \left(s+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2/a^2},$$

где $c^2 = gh$, s—какое-либо целое число.

28. Доказать, что если канал прямоугольного сечения ограничен двумя твердыми вертикальными поперечными стенками, расстояние между которыми равно $2a$, и если вода первоначально покоится и имеет плоскую поверхность, наклоненную под углом β к дну канала, то возвышение волны η в любой момент времени t выражается формулой

$$\eta = \frac{8\alpha\beta}{\pi^2} \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cdot \sin (2n+1)\frac{\pi x}{2a} \cdot \cos (2n+1)\frac{\pi ct}{2a},$$

где c—скорость волны длины $4a/(2n+1)$ в бесконечно длинном канале.

29. Прямоугольный бак с четырьмя очень длинными боковыми стенками и двумя ограничивающими его горизонтальными стенками полностью наполнен тремя неперемешивающимися жидкостями, плотность и глубина каждой из которых в положении равновесия соответственно равны σ_1, σ_2, σ_3 и l_1, l_2, l_3. Показать, что скорость c распространения волн малой амплитуды вдоль поверхностей раздела выражается формулой

$$[c^2 m (\sigma_1 \operatorname{cth} ml_1 + \sigma_2 \operatorname{cth} ml_2) - g(\sigma_2 - \sigma_1)] \times$$
$$\times [c^2 m (\sigma_2 \operatorname{cth} ml_2 + \sigma_3 \operatorname{cth} ml_3) - g(\sigma_3 - \sigma_2)] = c^4 m^2 \sigma_2^2 \operatorname{csch}^2 ml_2,$$

где длина волн равна $2\pi/m$.

30. Используя цилиндрические координаты $(z, \tilde{\omega}, \theta)$, показать, что дифференциальному уравнению для функции φ удовлетворяет выражение

$$z\tilde{\omega}^n \sin n\theta \cos \sigma t,$$

причем свободная поверхность невозмущенной жидкости является плоскостью $z = h$. Если ось Oz направлена вверх, то найти частоту σ и показать, что решением могут быть стоячие волны малой амплитуды на поверхности жидкости, ограниченной одной из семейства поверхностей вращения и двумя соответствующими меридиональными плоскостями, которые следует определить.

Найти траекторию, которую описывает частица жидкости, проходящая через точку $(0, \tilde{\omega}_0, 0)$.

31. Найти скорость распространения горизонтальных безвихревых волн длины λ с прямолинейными гребнями на поверхности глубокой воды. Предполагая, что волны обусловлены начальным возвышением вдоль очень узкой полосы поверхности, содержащей линии $x = 0$, $z = 0$, доказать, что в момент времени t форма свободной поверхности определяется уравнением

$$z = \frac{b^2}{x} \sum_{0}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (4n+1)} \left(\frac{gt^2}{2x}\right)^{2n+1} \right\},$$

где b — постоянная величина, зависящая от начального возвышения[1]) (см. Ламб, Гидродинамика, § 238).

32. Если оси x и y горизонтальны, а ось z направлена вертикально вниз, то доказать, что функция

$$\varphi = A \exp\left(\frac{-2\pi z}{b\cos\alpha}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b\operatorname{ctg}\alpha}\right) \cos\frac{2\pi(x-vt)}{b}$$

является потенциалом скоростей для волнового движения на глубокой воде, ограниченной вертикальными плоскостями $y = \pm\frac{1}{4} b \operatorname{ctg}\alpha$, и определить v — скорость распространения волн.

33. Охарактеризовать длинные волны в канале и определить скорость их распространения. Показать, что при распространении волн в одном направлении скорость жидкости в любом сечении канала пропорциональна высоте свободной поверхности над положением равновесия.

34. Получить уравнение движения длинных волн в мелком канале глубины h под действием силы тяжести и найти возможные возмущения горизонтального типа в таком канале длиной $2l$, закрытом с обоих концов вертикальными границами.

35. Поперечное сечение канала имеет вид полуокружности радиуса a. Доказать, что скорость распространения длинных волн равна $\frac{1}{2}(\pi a g)^{1/2}$ при условии, что берега канала вертикальны.

36. Дно прямолинейного постоянной ширины канала с прямоугольным поперечным сечением имеет вертикальное продольное сечение в форме $y = a\sin mx$, где a мало по сравнению со средней глубиной h жидкости, находящейся в канале. Если жидкость движется горизонтально со средней скоростью u в направлении оси x, то показать, что свободная поверхность имеет вид

$$\eta = a\frac{\operatorname{sh} mh'}{\operatorname{sh} m(h'-h)}\sin mx,$$

где h' определяется из формулы $mu^2 = g \operatorname{th} mh'$.

37. Пусть дно канала слегка гофрировано, так что глубина равна $h + c\sin Kx$, где c и Kh малы. Доказать, что если поток течет со скоростью U вдоль канала, то в нем образуются стоячие волны высоты η, определяемые формулой

$$\eta = c\sin Kx \Big/ \left(\frac{gh}{U^2} - 1\right).$$

Оказывает ли влияние волнистость дна на скорость распространения волн вдоль канала?

38. Если ширина на свободной поверхности и количество воды, приходящееся на единицу длины в канале постоянного поперечного сечения, даны, то доказать, что скорость распространения длинных волн одинакова для всех видов поперечного сечения.

Прямая горизонтальная труба длины l, замкнутая с обоих концов, поперечным сечением которой является окружность радиуса a, наполовину наполнена водой. Труба слегка наклоняется, а затем снова принимает горизонтальное положение. Найти период свободных колебаний воды. Доказать также, что формула

$$\frac{nb}{2}\sqrt{\frac{\pi a}{g}}\operatorname{cosec}\frac{2nl}{\sqrt{\pi a g}}$$

определяет амплитуду вынужденных колебаний свободной поверхности, обусловленных колебаниями диафрагмы, помещенной на одном конце трубы и движущейся по закону $b\sin nt$, где величина b мала.

39. Получить уравнение движения длинных волн в мелком лотке глубины h. Такой лоток закрыт с одного конца ($x = 0$) неподвижной вертикальной стенкой, а с другого

---

[1]) Рассматриваемая здесь задача является частным случаем так называемой задачи Коши — Пуассона. В «Гидродинамике» Ламба приведен ряд решений такого рода задач в линейной постановке. Однако в последнее время стали появляться приближенные решения этих задач для волн конечной амплитуды, т. е. в нелинейной постановке. [См. Сретенский Л. Н., Секерж-Зенькович Я. И., Задача Коши — Пуассона для волн конечной амплитуды, *ДАН СССР*, **133**, № 3 (1960), 544—545; Сретенский Л. Н., Задача Коши — Пуассона для волн конечной амплитуды, *Труды Морского гидрофиз. ин-та*, **XXIV** (1961), 3—24.] В этих исследованиях применяются переменные Лагранжа и решение строится путем обобщения известного в небесной механике метода Линдштедта — Пуанкаре. — *Прим. перев.*

конца ($x=l$)—поршнем, перемещающимся по закону $\xi=a\cos pt$. Найти вынужденное колебание в лотке и показать, что у поршня возвышение воды η над невозмущенным ее положением определяется формулой

$$\eta=-\frac{ph\xi}{c}\operatorname{ctg}\frac{pl}{c},$$

где $c^2=gh$.

40. Доказать, что для длинных волн в горизонтальном канале постоянной глубины h и постоянного прямоугольного поперечного сечения справедливы следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=-h\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=-g\frac{\partial\eta}{\partial x},$$

где u—горизонтальная скорость, а η—высота волны над положением равновесия.

Такой канал неограничен в направлении увеличения координаты x и закрыт при $x=0$ поперечной стенкой, движущейся вдоль канала. При $t=0$ вода в канале покоится; затем граница получает малую скорость $u=\psi(t)$, причем функция ψ такова, что полное перемещение границы всегда мало. Показать, что в этом случае в канале создается возмущение, которое является чисто прогрессивным, причем $\eta=0$, если $t<x/c$, но $\eta=(c/g)\,\psi\left(t-\frac{x}{c}\right)$, если $t>x/c$, где $c^2=gh$.

41. Мелкий лоток длины $2l$ наполнен водой до высоты h и закрыт двумя вертикальными поршнями, которые движутся горизонтально по заданному простому гармоническому закону

$$a\sin(nt-\varepsilon),\quad \text{если } x=-l,\quad \text{и}\quad a\sin(nt+\varepsilon),\quad \text{если } x=+l.$$

Найти результирующее вынужденное колебание воды и показать, что амплитуда η равна

$$amh\,(\cos^2\varepsilon\sin^2 mx\sec^2 ml+\sin^2\varepsilon\cos^2 mx\operatorname{cosec}^2 ml)^{1/2},$$

где

$$m=n/\sqrt{(gh)}.$$

42. Вывести уравнение движения длинных волн малой амплитуды в канале глубины h и постоянного поперечного сечения.

Изолированная волна произвольной формы, распространяющаяся в таком канале, ударяется о вертикальную стенку, которая совпадает с поперечным сечением канала. Показать, что волна отражается без изменения вида и что во время столкновения со стенкой вода поднимается до высоты, равной удвоенной нормальной высоте изолированной волны.

Показать также, что горизонтальное количество движения такой волны равно полному избытку массы воды над положением равновесия, умноженному на скорость волны. Получить интеграл по времени добавочного давления, обусловленного ударом волны о стенку.

43. Двумерные длинные волны распространяются параллельно оси x в воде переменной глубины h. Доказать, что высота свободной поверхности над невозмущенным уровнем удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(gh\frac{\partial\eta}{\partial x}\right).$$

Если $h=x^2/2b$, то доказать, что выражение

$$\eta=ax^{-\frac{1}{2}}\cos\left[p\left\{\sqrt{\frac{2b}{g}-\frac{1}{4p^2}}\ln x+t\right\}+\alpha\right]$$

есть решение периода $2\pi/p$; используя этот результат, проиллюстрировать возможный характер изменения амплитуды и длины волны в случае волн, перемещающихся с глубокой воды на наклонную отмель.

44. Получить дифференциальное уравнение движения длинных волн в канале переменной глубины h в форме

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(gh\frac{\partial\eta}{\partial x}\right),$$

где η—высота волны над невозмущенной свободной поверхностью.

Глубина канала соответственно для $x<0$ и $x>0$ равна h_1 и h_2. Прогрессивная волна $\eta=a\sin m(x-V_1t)$, где $V_1^2=gh_1$, распространяется вдоль той части канала, где глубиина равна h_1. Получить амплитуды отраженной и прошедшей волн и рассмотреть их отношение к вышине прилива в реке, отделенной от моря мелкой «полосой».

45. В канале ширина и глубина скачкообразно изменяются, причем ширина изменяется от величины b_1 до b_2. Прогрессивная волна распространяется со скоростью c_1 вдоль части канала ширины b_1 и частично отражается от места разрыва и частично переносится в область за разрывом, причем скорость прошедшей волны равна c_2. Доказать, что в месте разрыва у канала отношение возвышений отраженной и падающей волн равно

$$\frac{b_1c_1-b_2c_2}{b_1c_1+b_2c_2}.$$

46. Волна от землетрясения с прямолинейным гребнем распространяется вдоль дна океана постоянной глубины h, так что возвышение дна равно $a\cos 2\pi(x-ct)/\lambda$, где величина a мала. Показать, что амплитуда последовательных поверхностных волн равна

$$a\left\{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\operatorname{ch}\frac{2\pi h}{\lambda}\right\}^{-1},$$

где V — скорость поверхностных волн длины λ.

47. Дать теорию «длинных волн» в канале постоянной ширины и глубины h при условии, что скорость свободной волны равна $\sqrt{(gh)}$. Волна от землетрясения, определяемая уравнением $\eta_0=C\cos k(ct-x)$, распространяется вдоль дна. Доказать, что соответствующая волна на свободной поверхности воды имеет вид

$$\eta=\frac{Cc^2}{c^2-gh}\cos k(ct-x).$$

48. Получить дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют возвышение η и горизонтальное перемещение ζ для приливных волн в прямолинейном канале постоянной глубины.

Пренебрегая вращением и кривизной Земли и предполагая, что приливообразующее небесное тело движется равномерно в плоскости земного экватора, совершая вокруг Земли один оборот в день, показать, что в экваториальном канале будет распространяться прогрессивная волна, дающая «прямой» или «обратный» прилив, смотря по тому, будет ли глубина канала больше или меньше 7 *км*.

49. Приливные волны в канале обусловлены телом, движущимся в плоскости экватора с постоянной угловой скоростью (один оборот в день) относительно точки Ω, в которой рассматриваемый канал, идущий по большому кругу, пересекает экватор под углом α. Показать, что наклон канала относительно экватора приводит к не зависящему от времени отклонению уровня, пропорциональному величине $\sin^2\alpha\cos 2x/a$, и, кроме того, появляются две полусуточные приливные стоячие волны, амплитуды которых пропорциональны соответственно $(1+\cos^2\alpha)\cos 2x/a$ и $2\cos\alpha\sin 2x/a$; здесь x — расстояние вдоль канала, измеряемое от точки Ω; a — радиус Земли.

50. Вывести уравнение

$$b\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=g\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$$

для возвышения η поверхности при приливном волновом движении в канале переменного сечения, где b обозначает ширину канала у поверхности, S — площадь сечения.

Исходя из этого уравнения, доказать, что амплитуда прогрессивной волны приближенно пропорциональна величине $b^{-1/2}h^{-1/4}$, где h — средняя глубина. Если только относительное изменение величин b и h и их производных по x на расстоянии порядка длины волны малы, то доказать, что это соответствует предположению непрерывного распространения энергии без отражения.

51. Изложить приближениую теорию длинных или приливных волн, объяснив сделанные при этом предположения.

Система таких гармонических волн, распространяющихся со скоростью c_1, встречает отмель, на которой скорость волны равна c_2; показать, что это вызывает отраженную и проходящую волны, и сравнить амплитуды этих волн с амплитудой падающей волны.

Если после прохождения через отмель вновь восстанавливается первоначальная глубина, то показать, что отношение амплитуд волн до и после прохождения через отмель (пренебрегая эффектами кратных отражений) равно

$$4c_1c_2/(c_1+c_2)^2,$$

и что амплитуда всегда уменьшается независимо от того, пересекают ли волны отмель или глубокое место.

52. Вводя некоторые предположения, получить в канале переменного сечения уравнение приливного движения в форме

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=\frac{g}{b}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(hb\frac{\partial\eta}{\partial x}\right),$$

причем ширина канала на поверхности равна b, а средняя глубина при этой ширине равна h.

Устье, для которого $b=\beta x/a$, $h=\gamma x/a$, где $0<x<a$, а β и γ — константы, сообщается с открытым морем при $x=a$, где поддерживаются приливные колебания вида

$$\eta=C\cos(nt+\varepsilon).$$

Показать, что приливные волны в устье определяются формулой

$$\eta=C\frac{J_1(2\varkappa^{1/2}x^{1/2})}{J_1(2\varkappa^{1/2}a^{1/2})}\cdot\frac{a^{1/2}}{x^{1/2}}\cdot\cos(nt+\varepsilon),$$

где $\varkappa=n^2a/g\gamma$ (см. Ламб, Гидродинамика, § 186).

53. Изложить теорию длинных волн в канале постоянной глубины h, обусловленных возмущающим потенциалом $\Omega=H\exp i(\sigma t-Kx)$. Если дно заменить возмущающей силой, вызывающей отклонение $\eta_0=\alpha\exp i(\sigma t-Kx)$, то доказать, что относительная высота волн такая же, как если бы потенциал уменьшился в $(1-\mu)$ раз, где μ обозначает отношение α к «равновесной высоте» $(-H/g)$, обусловленной возмущением. Доказать, что это справедливо не только для простых гармонических волн.

54. Взяв скорость звука $c=335$ *м/сек*, вычислить длину органной трубы, открытой с обоих концов, основной тон которой имеет частоту 128 *гц*. Доказать, что основная частота не изменится, если в середине трубы поместить твердую перегородку. Объяснить физическую причину этого явления.

55. Показать, что возможными периодами воздушных колебаний в трубе, открытой с обоих концов и имеющей длину, равную $2l$, являются

$$T,\ \frac{T}{2},\ \frac{T}{3},\ \ldots,$$

где $T=4l/c$, c — скорость звука в воздухе.

Если в центре трубы помещен без трения тонкий поршень массы M, показать, что периоды $(2\pi/n)$ колебаний, отличных от симметричных, определяются из уравнения

$$\operatorname{ctg}\frac{nl}{c}+\frac{M'c}{Mnl}=0,$$

где M' — полная масса воздуха в трубе.

Показать, что если отношение M'/M мало, то эти периоды приближенно равны

$$T\left(1-\frac{4M'}{\pi^2M}\right),\ \frac{T}{3}\left(1-\frac{4M'}{3^2\pi^2M}\right),\ \frac{T}{5}\left(1-\frac{4M'}{5^2\pi^2M}\right),\ \ldots.$$

56. Прямая трубка длиной l с одного конца сообщается с атмосферой. Через другой конец она сообщается с большим сосудом, в котором давление в момент времени t равно

$$\Pi(1-\alpha\sin nt),$$

где Π — атмосферное давление, α — малая постоянная величина. Найти потенциал скоростей для воздуха внутри трубки.

57. Горизонтальная трубка длиной l жестко закрыта с одного конца и открыта с другого. Показать, что периоды колебаний воздуха в трубке равны $4l/cN$, где N — нечетное целое число, c — скорость звука в воздухе.

Если в середине сечения трубки помещен тонкий поршень массы M (трение не учитывается), то показать, что периоды $(2\pi/n)$ свободных колебаний даются формулой

$$\frac{Mnl}{c}=2M'\operatorname{ctg}\frac{nl}{c},$$

где M' — масса воздуха в трубке.

58. Прямая трубка длиной l жестко закрыта с одного конца, а с другого конца закрыта пробкой массы M, которая может передвигаться без трения в трубке и находиться под действием пружины. Если нет воздуха, то пробка может совершать малые колебания с частотой $n/2\pi$. Если трубка наполнена воздухом массы M' при атмосферном давлении и другой конец пробки также подвержен атмосферному давлению, то доказать, что частота свободных колебаний выражается формулой

$$(\sigma^2-n^2)\operatorname{tg}\frac{\sigma l}{c}=\frac{\sigma c}{l}\frac{M'}{M}.$$

59. Прямая трубка длины l жестко закрыта с одного конца, а на другом конце имеется герметический поршень, который заставляют колебаться, причем его перемещение в момент времени t равно $a\cos nt$, где величина a мала. Найти функцию, определяющую

скорость колебания воздуха в трубке, и показать, что кинетическая энергия находящегося в ней воздуха равна

$$\frac{ma^2}{4}\left\{n^2\operatorname{cosec}^2\frac{nl}{c}-\frac{cn}{l}\operatorname{ctg}\frac{nl}{c}\right\}\sin^2 nt,$$

где m — масса воздуха в трубке, а c — скорость звука.

60. Тонкий поршень массы M, помещенный в середине прямолинейной трубки, открытой с обоих концов, находится под действием пружины, жесткость которой подобрана так, что собственный период колебаний поршня в *вакууме* равен $2\pi/m$. Показать, что если учитывать наличие воздуха, то собственный период $2\pi/n$ дается формулой

$$M(m^2-n^2)=2\varrho cnS\operatorname{tg}\frac{nl}{c},$$

где $2l$ — длина трубки, а S — площадь сечения.

61. Трубка длиной $2l$ закрыта с одного конца, открыта с другого и разделена на две части тонким, плотно пригнанным поршнем, скользящим в трубке без трения, но находящимся под воздействием пружины такой жесткости, что его собственный период колебания равен $2\pi/m$. В положении равновесия поршень находится в середине трубки, и содержащийся в трубке воздух находится под атмосферным давлением. Показать, что период нормального собственного колебания $2\pi/n$ определяется из уравнения

$$a(n^2-m^2)=2cn\operatorname{ctg}\frac{2nl}{c},$$

где a — длина трубки, требуемая для того, чтобы масса воздуха, находящегося в трубке, равнялась массе поршня, а c — скорость распространения звука в воздухе при атмосферном давлении.

62. Определить, что произойдет, если система плоских звуковых волн упадет прямо на поверхность раздела двух газов, в которых скорости звука равны соответственно c и c'. Показать, что часть падающей энергии, равная $(c'-c)^2/(c'+c)^2$, отражается.

63. Если $n/2\pi$ — частота волн, симметричных относительно начала координат внутри твердой сферической оболочки радиуса a, то показать, что имеет место равенство

$$\operatorname{tg}\frac{na}{c}=\frac{na}{c}.$$

64. Доказать, что в звуковых волнах малой амплитуды потенциал скоростей φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=c^2\nabla^2\varphi.$$

Доказать, что величина φ в любой момент времени t в любой точке P неограниченной среды дается формулой

$$4\pi\varphi=\frac{d}{dt}\left[t\int F(ct)\,d\omega\right]+t\int G(ct)\,d\omega,$$

где интегрирование берется относительно телесного угла ω по сфере радиуса ct с центром в точке P, а величины F, G соответственно обозначают начальные значения φ, $\partial\varphi/\partial t$.

Доказать, что в точке, где первоначально нет возмущения, интеграл по времени от величины сжатия по всему интервалу времени, в течение которого волны проходят через точку, в общем случае равен нулю.

65. Центр твердой сферы радиуса a в момент времени t находится в точке $x=b\sin nt$, где b — малая величина. Доказать, что все условия для движения окружающего газа удовлетворяются потенциалом скоростей:

$$\varphi=Re\,A\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{e^{in(t-r/c)}}{r}\right\}\cos\theta,$$

где c — скорость звука, A — постоянная величина. Найти величину A, механическую силу, необходимую для поддержания предписанного движения сферы, и работу, совершенную ею в одном из колебаний.

66. Точечный источник звука вызывает колебательное движение, потенциал скоростей которого равен

$$\varphi=\frac{a\cos k(ct-r)}{r}.$$

Показать, что средняя скорость переноса энергии через концентрическую сферическую поверхность равна $2\pi\varrho ck^2a^2$. Один конец органной трубы открыт, а другой закрыт. Выяснить влияние открытого конца на периоды колебаний и показать, что для колебаний основного тона коэффициент затухания равен $16l^3/\pi\omega c$, где l — длина, а ω — площадь поперечного сечения трубы.

67. Если потенциал скоростей (в сферических полярных координатах) для звуковых волн имеет вид $f(r)\,e^{int}\cos\theta$, то показать, что

$$f(r)=\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\left(Ae^{ikr}+Be^{-ikr}\right)\right\},$$

где $k=n/c$, A и B — произвольные константы.

Твердая сферическая оболочка радиуса a, содержащая воздух, совершает малые колебания, так что ее центр в любой момент времени находится в точке $r=b\sin nt$, $\theta=0$.

Доказать, что потенциал скоростей воздуха внутри сферы равен

$$C\left\{\frac{\cos kr}{kr}-\frac{\sin kr}{k^2r^2}\right\}\cos\theta\cos nt,$$

где

$$C=nk^2a^3b/\{(2-k^2a^2)\sin ka-2ka\cos ka\}.$$

68. На основании результата п. 14.61 доказать, что для длинных волн в канале справедливо уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial x}=g\varrho\frac{\partial\eta}{\partial x}.$$

Используя то обстоятельство, что правая часть не зависит от y, доказать, что частицы, находящиеся в вертикальной плоскости, перпендикулярной направлению распространения волн, остаются в этой вертикальной плоскости.

69. Если (u, v) — малые компоненты скорости для длинной волны, то, используя уравнение движения и предыдущий пример, показать, что

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}=-g\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

и что

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-g\frac{\partial\eta}{\partial x},$$

где

$$\xi=\int_0^t u\,dt.$$

Получить уравнение неразрывности в форме

$$\eta=-h\frac{\partial\xi}{\partial x},$$

где h — средняя глубина.

70. Используя предыдущий пример, показать, что имеет место уравнение

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2},\quad c^2=gh;$$

исходя из этого, доказать, что

$$\eta=f_1(x+ct)+f_2(x-ct).$$

Глава 15

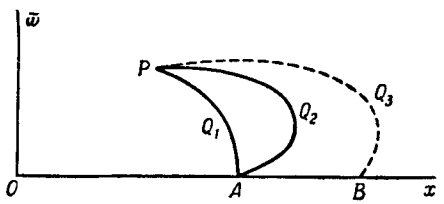
ФУНКЦИЯ ТОКА СТОКСА

15.00. Осесимметричные движения. В предыдущих главах мы могли рассматривать двумерные движения с помощью комплексного переменного и комплексного потенциала. При рассмотрении трехмерного движения мы уже не можем пользоваться комплексным потенциалом. Простейшим примером трехмерного движения является движение, одинаковое в каждой плоскости, проходящей через некоторую прямую, называемую осью. Такое движение, например, имеет место, когда твердое тело вращения движется в направлении своей оси вращения в покоящейся жидкости.

Движение такого вида, называемое *осесимметричным*, в некотором отношении аналогично двумерному движению; в частности, для движения можно определить функцию тока. Если движение безвихревое, то потенциал скорости также всегда существует.

В качестве оси x возьмем ось симметрии. Движение в этом случае удобнее рассматривать в сферических координатах (r, θ, ω) или в цилиндрических $(x, \omega, \widetilde{\omega})$ (рис. 43, 44).

15.10. Функция тока Стокса. Рассмотрим фиксированную точку A на оси симметрии и произвольную точку P. Соединим точки P и A кривыми AQ_1P, AQ_2P, лежащими в одной плоскости (проходящей через ось) которую для удобства назовем *меридиональной плоскостью* (рис. 286). Положение точки в этой плоскости может быть определено цилиндрическими координатами $(x, \widetilde{\omega})$. Если мы будем поворачивать *меридиональные кривые* AQ_1P, AQ_2P относительно оси симметрии, то получится замкнутая поверхность, в которую справа налево через поверхность, образованную линией AQ_2P, втекает такое же количество жидкости, которое вытекает в течение того же промежутка времени через поверхность, образованную линией AQ_1P. Предполагается, что жидкость не создается и не уничтожается внутри поверхности.



Р и с. 286.

Если $2\pi\psi$ обозначает поток через одну из этих поверхностей, то функция ψ называется *функцией тока* Стокса. Если мы сохраним линию AQ_1P неподвижной, а линию AQ_2P заменим другой меридиональной кривой, соединяющей точки A и P, то очевидно, что величина ψ не изменится. Следовательно, функция тока ψ зависит от положения точки P и, возможно, от положения фиксированной точки A. Если мы возьмем другую фиксированную точку B на оси и проведем кривую BQ_3P, то поток через поверхность, образованную линией BQ_3P, будет равен потоку через поверхность, образованную линией AQ_1P, так как вследствие симметрии поток через AB отсутствует. Отсюда следует, что величина ψ не зависит от выбора фиксированной точки при условии, что эта точка лежит на оси симметрии. Поэтому величина функции тока в точке P зависит только от положения точки P, и если точка P лежит на оси, то $\psi = 0$.

Если через ψ_P, $\psi_{P'}$ обозначить значения функции тока в точках P и P', то поток справа налево через поверхность, образованную вращением относительно оси какой-либо линии, соединяющей точки P и P', равен $2\pi\psi_{P'} - 2\pi\psi_P$ (рис. 287). Если считать, что точки P и P' находятся на бесконечно малом расстоянии δs друг от друга, то нормальная скорость *справа налево* через PP' определяется из формулы

$$2\pi\tilde{\omega}\delta s q_n = 2\pi(\psi_{P'} - \psi_P),$$

отсюда, переходя к пределу, получим

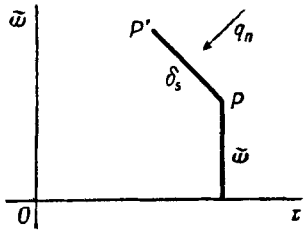
$$q_n = \frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial s}.$$

Как частное применение этого важного результата, полагая ds по очереди равным $d\tilde{\omega}$, dx, $rd\theta$, dr, получим равенства

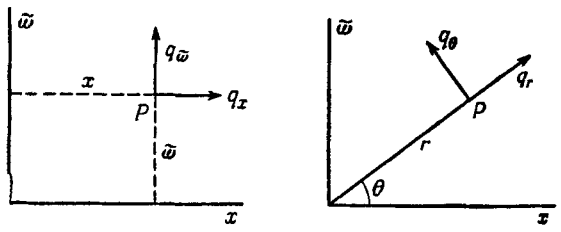
$$q_x = -\frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{\omega}}, \quad q_{\tilde{\omega}} = \frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$q_r = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{r\partial\theta}, \quad q_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

выражающие компоненты скорости в цилиндрической и сферической системах координат (рис. 288). Компоненты скорости, перпендикулярные мери-



Р и с. 287.



Р и с. 288.

диональной плоскости, в таком течении отсутствуют. Линии тока задаются уравнением

$$\psi = \text{const},$$

так как через такие линии течение отсутствует. Величина ψ имеет размерность L^3T^{-1}, а потенциал скоростей φ — размерность L^2T^{-1}.

Следует заметить, что функция тока ψ существует в силу неразрывности движения и, следовательно, уравнение неразрывности автоматически удовлетворяется. Заметим также, что из вышеуказанных значений компонент скорости можно получить соотношение

$$\frac{\partial(\tilde{\omega}q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{\omega}q_{\tilde{\omega}})}{\partial\tilde{\omega}} = 0,$$

которое является другой формой уравнения неразрывности.

Функция тока была определена относительно основной точки на оси. Смещение основной точки изменит значение ψ только на постоянную величину (см. п. 4.30). Поскольку используются только разности и производные от функции ψ, то удобно рассматривать ψ как функцию, содержащую аддитивную произвольную постоянную.

15.20. Простой источник. *Простым источником* называется точка, из которой жидкость вытекает по радиусам во все стороны. Если источник

выделяет в единицу времени объем жидкости, равный $4\pi m$, то m называется *мощностью источника* [1]).

Стоком называется точка, в которую жидкость втекает по радиусам.

Если в начале координат имеется источник мощности m, то направленный наружу поток через сферу радиуса r, центр которой находится в источнике, связан с радиальной скоростью формулой $4\pi m = 4\pi r^2 q_r$ (рис. 289).

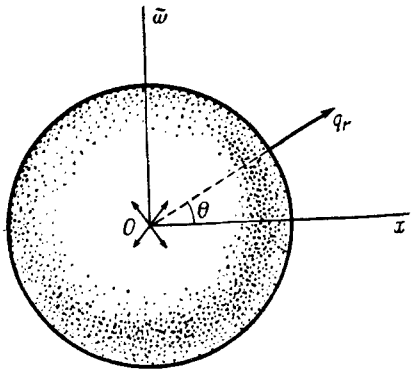
Таким образом, имеем

$$q_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \psi}{r\partial\theta} = \frac{m}{r^2},$$

откуда получаем

$$\varphi = \frac{m}{r}, \quad \psi = m\cos\theta = \frac{mx}{r}.$$

Функцию тока можно получить также, непосредственно рассматривая поток через сферическое тело, пересекаемое плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной оси Ox.



Р и с. 289.

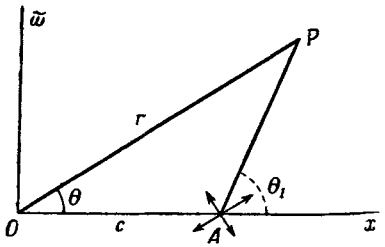


Рис. 290.

Если источник иаходится не в начале координат, а в точке A, то мы получим (рис. 290)

$$\varphi = \frac{m}{AP} = \frac{m}{\sqrt{r^2+c^2-2cr\cos\theta}},$$

$$\psi = m\cos\theta_1 = \frac{m(r\cos\theta - c)}{\sqrt{r^2+c^2-2cr\cos\theta}}.$$

Переходя к координатам x и $\tilde{\omega}$, получаем

$$\varphi = \frac{m}{\sqrt{(x-c)^2+\tilde{\omega}^2}}, \quad \psi = \frac{m(x-c)}{\sqrt{(x-c)^2+\tilde{\omega}^2}}.$$

Заметим, что эти функции содержат x и c только в виде разности $(x-c)$. Отсюда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial c} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Отображением источника относительно плоскости является равный по мощности источник, получающийся оптическим отражением исходного источника относительно плоскости (см. п. 8.40).

[1]) Таким образом, производительность источника $M = 4\pi m$. Некоторые авторы называют величину M мощностью (см. прим. на стр. 196).

15.21. Подводный взрыв. Если полость в форме сферы радиуса R_0, содержащая газ под давлением p_0, начинает быстро расширяться в неограниченной жидкости, то мы имеем имитацию действия подводного взрыва. Пусть R — радиус полости в момент времени t, p_1 — давление газа. Будем считать, что газ расширяется по адиабатическому закону, а силами инерции можно пренебречь. Тогда, согласно закону адиабатического расширения, имеем

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{R_0^3}{R^3}\right)^{\gamma}.$$

Если пренебрегать силой тяжести, то жидкость будет двигаться по радиусам, причем скорость на границе области равна $dR/dt = R'$. Таким образом, это движение будет аналогично движению жидкости в случае источника, и мы можем положить

$$\varphi = \frac{m}{r}, \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{m}{r^2}.$$

Следовательно, если $r = R$, то $m/R^2 = R'$. Отсюда

$$\varphi = \frac{R^2R'}{r}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{R^2R'' + 2RR'^2}{r}.$$

Тогда уравнение для давления запишем в виде

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}\left(\frac{R^2R'}{r^2}\right)^2 - \frac{R^2R'' + 2RR'^2}{r} = F(t).$$

Если давление на бесконечности принять равным нулю, то функция $F(t)$ равна нулю, так как это есть величина, стоящая в левой части уравнения при $r = \infty$. Полагая $r = R$, мы будем иметь $p = p_1$, и, следовательно,

$$RR'' + \frac{3}{2}R'^2 = \frac{R_0^{3\gamma}}{R^{3\gamma}} \cdot \frac{p_0}{\varrho}.$$

Умножим обе части этого уравнения на $2R^2R'$ и введем константу $c^2 = p_0/\varrho$. Тогда получим

$$\frac{d}{dt}(R^3R'^2) = \frac{2c^2R_0^{3\gamma}}{R^{3\gamma-2}}R'.$$

Замечая, что $R' = 0$ при $R = R_0$, после интегрирования найдем

$$\frac{R'^2}{c^2} = \frac{2}{3(\gamma-1)}\left[\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}\right].$$

Если $\gamma = 4/3$, то решение можно получить в замкнутой форме, положив $R = (1+n)R_0$, что дает соотношение

$$\frac{ct}{R_0} = \left(1 + \frac{2}{3}n + \frac{1}{5}n^2\right)\sqrt{2n}.$$

В качестве иллюстрации положим $p_0 = 1000$ *атм* и $R_0 = 50$ *см*, тогда получим $c = 3{,}16 \times 10^4$ *см/сек*, причем радиус полости удваивается за 0,004 *сек* и начальное ускорение точек поверхности равно $2{,}00 \times 10^7$ *см/сек*^{2}, что оправдывает пренебрежение силой тяжести.

15.22. Равномерный поток. Пусть имеется равномерный поток со скоростью U, параллельной оси Ox, причем жидкость течет справа налево через окружность радиуса ω с центром на оси Ox. Плоскость окружности

перпендикулярна оси Ox. Тогда мы имеем $2\pi\psi = -\pi\widetilde{\omega}^2 U$, и, следовательно,

$$\psi = -\frac{1}{2}\widetilde{\omega}^2 U = -\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta. \qquad (1)$$

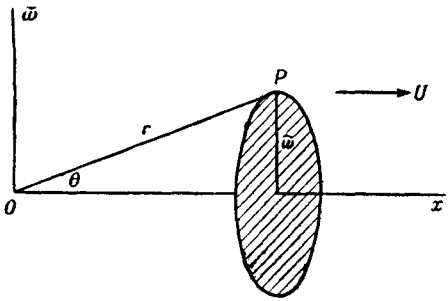


Рис. 291.

Этот результат может быть также получен при интегрировании уравнения

$$-\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\widetilde{\omega}} = U.$$

Потенциал скорости равен

$$\varphi = -Ux = -Ur\cos\theta. \qquad (2)$$

15.23. Источник в равномерном потоке. Если мы поместим источник равномерный поток, то получим (рис. 292)

$$\psi = -\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta + m\cos\theta. \qquad (1)$$

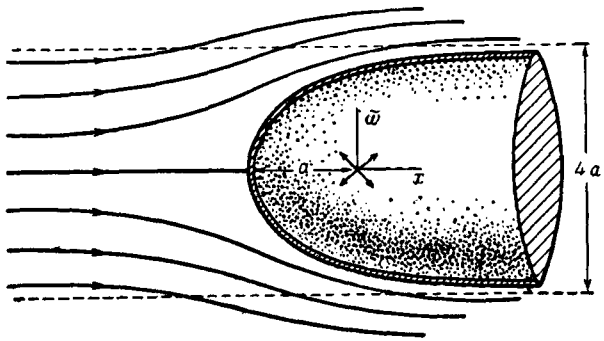


Рис. 292.

Критической точкой называется такая точка, в которой $q_r = 0$, $q_\theta = 0$, или

$$U\cos\theta + \frac{m}{r^2} = 0, \quad -U\sin\theta = 0,$$

откуда следует, например, $\theta = \pi$, $r^2 = m/U = a^2$.

Линия тока, проходящая через критическую точку, удовлетворяет уравнению

$$-\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta + m\cos\theta = -Ua^2.$$

Это разветвляющаяся линия тока, уравнение которой может быть записано в форме

$$\tilde{\omega}^2 = 2a^2(1+\cos\theta),$$

и, следовательно, если $\theta \to 0$, то $\tilde{\omega} \to 2a$, т. е. получаем асимптоты.

Разветвляющаяся линия тока изображена на рис. 292, она легко может быть построена по методу Рэнкина или по уравнению

$$r = a\,\mathrm{cosec}\,\frac{\theta}{2}.$$

Следовательно, уравнение (1) дает обтекание тупоносого цилиндрического тела, диаметр которого равен $4a$.

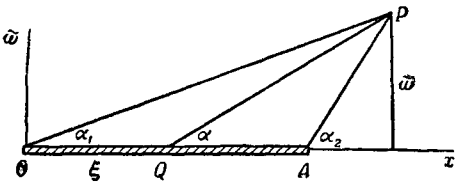
Уравнение для давления имеет вид

$$\frac{p}{\varrho}+\frac{1}{2}U^2\left(1+\frac{2a^2}{r^2}\cos\theta+\frac{a^4}{r^4}\right)=\frac{\Pi}{\varrho}+\frac{1}{2}U^2, \qquad (2)$$

откуда следует, что $p \to \Pi$ с увеличением r.

Это уравнение можно использовать для тарировки трубки Пито при различных положениях боковых отверстий, причем отверстие у носа измеряет величину $\Pi+\frac{1}{2}\varrho U^2$, в то время как боковое отверстие измеряет величину p.

Уравнение (2) также можно использовать для расчета распределения давления вблизи носа дирижабля.



Р и с. 293.

15.24. Линейный источник конечных размеров. Рассмотрим линейный источник, простирающийся вдоль оси от точки O до точки A, при этом мощность источника, отнесенная к единице длины на расстоянии ξ от точки O, равна $m\zeta/a$, где $a = OA$ (рис. 293).

Функция тока получается наложением функций тока ряда элементарных точечных источников мощности $m_\xi \delta\xi/a$, и, следовательно,

$$\psi = \frac{1}{a}\int_0^a m_\xi \cos\alpha\, d\xi.$$

где α — угол PQx, $OQ = \xi$. Так как

$$\xi = x - \tilde{\omega}\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \quad d\xi = \tilde{\omega}\,\mathrm{cosec}^2\alpha\, d\alpha,$$

то мы имеем, что

$$\psi = \frac{1}{a}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} m_\xi \frac{\tilde{\omega}\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\, d\alpha,$$

если m_ξ известная функция от ξ, то можно выполнить интегрирование.

Самым простым случаем является случай, когда $m_\xi = \mathrm{const} = m$, тогда

$$\psi = \frac{m}{a}\left(\frac{\tilde{\omega}}{\sin\alpha_1}-\frac{\tilde{\omega}}{\sin\alpha_2}\right)=\frac{m}{a}(PO-PA).$$

Линиями тока являются гиперболы с фокусами в точках O и A. Если мы наложим равномерный поток скорости U, то получим

$$\psi = -\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta+\frac{m}{a}(PO-PA).$$

Отрицательная часть оси x должна быть частью разветвляющейся линии тока, и, следовательно, она должна соответствовать значению $\psi = -m$. Разветвляющаяся линия тока определяется уравнением

$$\widetilde{\omega}^2 = \frac{2m}{U}\left\{\frac{PO-PA}{a}+1\right\}.$$

Далее,

$$PA^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\alpha_1, \quad PO = r.$$

Отсюда для больших значений r получим

$$PO - PA = r - r\left(1 - \frac{a\cos\alpha_1}{r} - \ldots\right) = a\cos\alpha_1 + O(r^{-1}).$$

Если точку P удалять в бесконечность, то $\alpha_1 \to 0$.

Таким образом, разветвляющиеся линии тока имеют следующие асимптоты:

$$\widetilde{\omega}^2 = 4b^2, \quad b^2 = m/U.$$

Таким образом, мы опять имеем обтекание цилиндрического тела, имеющего более заостренную носовую часть, чем изображено на рис. 292.

15.25. Дирижаблеобразные формы. Рассмотрим совместно равномерный поток в положительном направлении оси x, точечный источник мощности

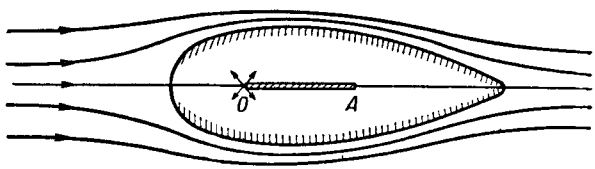


Рис. 294.

m, находящийся в начале координат, и линейный сток с общей постоянной мощностью $-m$, распространяющийся от начала координат до точки $x = a$. Тогда функцию тока можно записать в виде

$$\psi = -\frac{1}{2}U\widetilde{\omega}^2 - \frac{m}{a}(PO - PA) + \frac{mx}{r}.$$

Если точка P расположена на положительной части оси x, то $x = r$, $PO - PA = a$; если P находится на отрицательной части оси x, то $x = -r$, $PO - PA = -a$.

Таким образом, линия $\psi = 0$ содержит всю ось x; разветвляющаяся линия тока состоит из оси x и замкнутой части дирижаблеобразной формы (рис. 294).

Используя другие законы изменения для линейного стока, при условии, что его полная мощность остается равной мощности источника, можно получить обтекание тел различной формы.

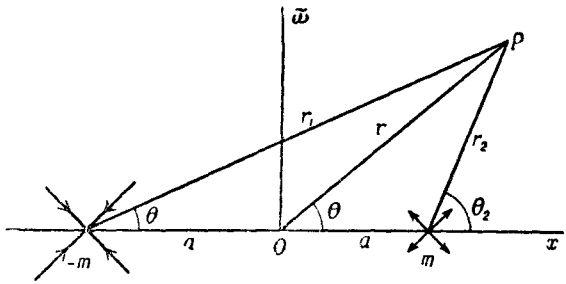
15.26. Равные по мощности источник и сток. Диполь. Другая простая комбинация состоит из источника мощности m в точке $(a, 0)$ и стока мощности $-m$ в точке $(-a, 0)$.

Используя обозначения, указанные на рис. 295, мы получим формулы

$$\varphi = m\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right), \quad \psi = m(\cos\theta_2 - \cos\theta_1),$$

с помощью которых легко можно построить линии тока.

Если произведение $2ma = \mu$ остается постоянным при $m \to \infty$ и $2a \to 0$, то рассматриваемая комбинация становится *двойным источником*, или *диполем*.



Р и с. 295.

Соответствующие значения φ и ψ могут быть легко получены следующим образом.

По теореме синусов мы имеем

$$\frac{r_1}{\sin\theta_2} = \frac{r_2}{\sin\theta_1} = \frac{2a}{\sin(\theta_2-\theta_1)} = \frac{2a}{2\sin\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)\cos\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)}.$$

Отсюда

$$r_1 - r_2 = \frac{a(\sin\theta_2-\sin\theta_1)}{\sin\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)\cos\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)} = \frac{2a\cos\frac{1}{2}(\theta_2+\theta_1)}{\cos\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)}.$$

Следовательно,

$$\varphi = \frac{\mu\cos\frac{1}{2}(\theta_2+\theta_1)}{r_1 r_2\cos\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)},$$

$$\psi = \frac{m(x-a)}{r_2} - \frac{m(x+a)}{r_1} = \frac{\mu x\cos\frac{1}{2}(\theta_2+\theta_1)}{r_1 r_2\cos\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)} - \frac{\mu}{2}\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}\right).$$

Если $a \to 0$, то $\theta_2 \to \theta_1 \to \theta$, $r_2 \to r_1 \to r$. Таким образом, для диполя имеем

$$\varphi = \frac{\mu\cos\theta}{r^2}, \quad \psi = \frac{\mu x\cos\theta}{r^2} - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu(x^2-r^2)}{r^3} = -\frac{\mu\tilde{\omega}^2}{r^3}.$$

Ось диполя направлена от стока к источнику. Эти результаты следуют также из теоремы Маклорена, если использовать замечание в конце п. 15.20. Так, если $\varphi_1 = 1/r$, когда a мало, то

$$\varphi = \frac{m}{r} + am\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial a}\right)_{a=0} - \frac{m}{r} + am\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial a}\right)_{a=0} = -\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\mu x}{r^3}.$$

Точно так же

$$\psi = -\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = -\mu\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right) = -\frac{\mu\tilde{\omega}^2}{r^3}.$$

Линии тока для диполя изображены на рис. 296. Метод их построения изображен на чертеже того же рисунка. Положив $\psi = -n\omega$, где

$n=1, 2, 3, \ldots$, проведем окружность диаметра $OA=\mu/(n\omega)$, касающуюся оси диполя в точке O. Проведем PM перпендикулярно OA и отметим, что

$$OQ=OM=OP\sin\theta=OA\sin^2\theta.$$

Тогда если $OQ=r$, то

$$\frac{\mu\sin^2\theta}{r}=n\omega$$

и, таким образом, Q является точкой, лежащей на линии тока.

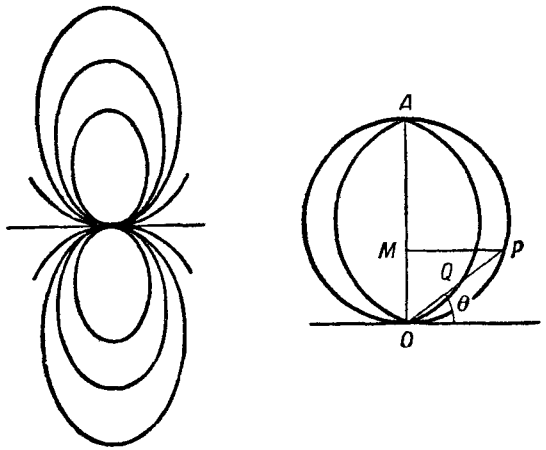


Рис. 296.

Отображением диполя относительно плоскости является равный по мощности, но антипараллельный диполь, который представляет собой оптическое отражение данного диполя, относительно плоскости (см. п. 8.42).

15.27. Твердые тела Рэнкина. Если мы скомбинируем равные по мощности источник и сток из п. 15.26 с равномерным потоком скорости U, направленным в отрицательную сторону оси x, то получим следующую функцию тока:

$$\psi=\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta+m(\cos\theta_2-\cos\theta_1). \qquad (1)$$

Если точка P находится на оси, то $\theta=0$ или π, в то время как $\theta_2-\theta_1=0$, за исключением точек, находящихся между источником и стоком, где $\theta_2-\theta_1=\pi$.

Таким образом, линия $\psi=0$ содержит всю ось x, за исключением части между источником и стоком, и, следовательно, дает разветвляющуюся линию тока, уравнение которой имеет вид

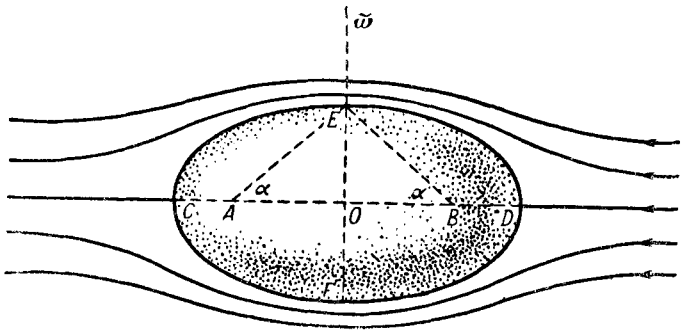
$$\widetilde{\omega}^2+b^2(\cos\theta_2-\cos\theta_1)=0, \qquad b^2=2m/U. \qquad (2)$$

Так как величины $\cos\theta_1$ и $\cos\theta_2$ численно меньше единицы, то, следовательно, $\widetilde{\omega}^2$ не может превышать $2b^2$ и, значит, разветвляющаяся линия тока замкнута.

При вращении разветвляющейся линии тока относительно оси симметрии образуется разветвляющаяся поверхность тока, которая симметрична относительно плоскости $x=0$, так как уравнение не изменится, если у величин m и U изменить знаки на обратные. Поверхность, вдоль которой $\psi=0$, можем заменить твердой стеной. Таким образом, мы построили обтекание

твердого тела вращения, которое в сечении имеет овальную форму (рис. 297), где A — сток, B — источник. Это тело называется твердым телом Рэнкина.

Точки C и D, в которых поток разветвляется, являются критическими точками. Для определения этих точек можно продифференцировать функцию



Р и с. 297.

тока, или еще проще: поток в точке D нейтрализует скорость, обусловленную источником и стоком, так что если $OD = l$, $OB = a$, то имеем

$$-\frac{m}{(l+a)^2}+\frac{m}{(l-a)^2}=U, \tag{3}$$

или

$$(l^2-a^2)^2=2ab^2l.$$

Это соотношение определяет величину l, а следовательно, длину твердого тела. Если $OE = h$, то для определения ширины из уравнения (2) получаем $2b^2\cos\alpha = h^2$, где α — угол EAO. Отсюда находим соотношение

$$\frac{2a}{\sqrt{h^2+a^2}}=\frac{h^2}{b^2}, \tag{4}$$

определяющее ширину.

Твердые тела, построенные вышеуказанным способом с помощью подходящего распределения источников и стоков, имеют как практическое значение, так и представляют интерес для теории, поскольку если известно распределение источников, то легко рассчитать скорость и давление. Сравнение расчетных результатов с наблюдениями показывает, что распределение давления хорошо согласуется с теоретическими расчетами давления на передней части. Отклонение имеет место только вблизи задней критической точки, где наблюдается внезапное падение давления ниже теоретического значения. Это падение давления обусловливает лобовое сопротивление тела, что имеет место на практике.

15.28. Эквивалентный слой Грина. Связная замкнутая поверхность S делит пространство на две области R_1 и R_2. Пусть dn_1 и dn_2 обозначают элементы нормали к поверхности S, проведенные соответственно в областях R_1 и R_2. Тогда имеем

$$\frac{\partial}{\partial n_2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{1}$$

Пусть через φ_1 и φ_2 обозначены потенциалы скоростей ациклического безвихревого движения жидкости соответственно в областях R_1 и R_2.

Рассмотрим движение, задаваемое потенциалом φ_1. Из формулы (2) п. 2.63 мы имеем

$$(\varphi_1)_P = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)} \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_1}\,dS + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{1}{r}\right) dS, \tag{2}$$

если точка P находится в области R_1, и

$$0 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)} \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_1}\,dS + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{1}{r}\right) dS, \tag{3}$$

если точка P находится в области R_2.

Мы можем интерпретировать соотношение (2) следующим образом: в каждой точке области R_1 потенциал скорости действительного движения такой же, как потенциал, который создается распределенным источником мощности $(-\partial\varphi_1/\partial n_1)/4\pi$ на единицу площади по поверхности S и распределенным диполем с моментом, равным $\varphi_1/4\pi$ на единицу площади, по поверхности S.

Эти распределенные источник и диполь составляют *эквивалентный слой источников и диполей Грина*. Они дают действительную скорость в каждой точке области R_1 и нулевую скорость в каждой точке области R_2.

Теперь возвращаемся к потенциалу φ_2. Точка P_1, находящаяся в области R_1, является внешней относительно области R_2, и, следовательно, формула (3) дает

$$0 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)} \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n_2}\,dS + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)} \varphi_2 \frac{\partial}{\partial n_2}\left(\frac{1}{r}\right) dS, \tag{4}$$

если точка P находится в области R_1. Складывая формулы (2) и (4), получаем

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_1} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial n_2}\right) dS + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)} (\varphi_1 - \varphi_2)\frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{1}{r}\right) dS. \tag{5}$$

Опять эту формулу можно интерпретировать как результат действия распределенных источников и диполей. Таким образом, ранее найденный эквивалентный слой не является единственным.

Однако если мы возьмем $\varphi_2 = \varphi_1$ на поверхности S, то второй интеграл в формуле (5) обратится в нуль. Таким образом, если мы мысленно заменим поверхность S мембраной, то будем иметь на поверхности S соотношение $-\partial\varphi_1/\partial s = -\partial\varphi_2/\partial s$, так что касательная скорость непрерывна, но нормальная скорость разрывна. В этом случае мы получаем *единственное распределение источников* мощности

$$-(\partial\varphi_1/\partial n_1 + \partial\varphi_2/\partial n_2)/4\pi$$

на единицу площади, которое создает данное движение жидкости. С другой стороны, выберем φ_2 таким образом, чтобы было $(\partial\varphi_1/\partial n_1 + \partial\varphi_2/\partial n_2) = 0$ на поверхности S. Тогда первый интеграл в формуле (5) обратится в нуль, и мы будем иметь непрерывную нормальную скорость, но разрывную касательную скорость на поверхности S, т. е. вихревой слой. В этом случае мы имеем *единственное распределение диполей* с моментами, равными $(\varphi_1 - \varphi_2)/4\pi$ на единицу площади, которое может создать данное движение жидкости.

Вывод из этого результата состоит в том, что вихревой слой может быть заменен распределением диполей.

Если движение в области R_1 является циклическим с интенсивностями циркуляции $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$, то мы можем использовать диполи, а не источники для получения формулы

$$(\varphi_1)_P = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)} (\varphi_1 - \varphi_2)\frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{1}{r}\right) dS + \frac{\varkappa_1}{4\pi}\int\limits_{\sigma_1} \frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_1 + \ldots.$$

Здесь φ_1 — однозначная функция, определенная в области R_1, видоизмененной в односвязную с помощью введения барьеров σ_1, σ_2, . . .; φ_2 — потенциал скоростей ациклического движения, созданного в области R_2 путем приложения соответствующих нормальных скоростей к каждому элементу dS воображаемой мембраны, совпадающей с первоначальной поверхностью S.

15. 29. Теорема Бутлера для сферы. Для теоремы о круге в п. 6.21 имеется аналогичная теорема, применимая к осесимметричным движениям. Пусть $f(r, \theta)$ — данная функция двух сферических координат r и θ и пусть a — данная положительная константа. Определим функцию

$$f^* = f^*(r, \theta) = \frac{r}{a} f\left(\frac{a^2}{r}, \theta\right). \tag{1}$$

Тогда можно высказать следующую теорему[1]).

Сферическая теорема Бутлера. *Пусть имеется осесимметричный безвихревой поток в несжимаемой невязкой жидкости, не имеющей твердых границ; поток характеризуется функцией тока* $\psi_0 = \psi_0(r, \theta)$, *все особенности которой находятся на расстоянии, большем, чем а от начала координат, причем в начале координат* $\psi_0 = O(r^2)$. *Если в поток ввести твердую сферу радиуса* $r = a$, *то функция тока имеет вид*

$$\psi = \psi_0 - \psi_0^* = \psi_0(r, \theta) - \frac{r}{a}\psi_0\left(\frac{a^2}{r}, \theta\right). \tag{2}$$

Доказательство. Требуется удовлетворить следующим условиям:
(I) поток, заданный посредством функции ψ, должен быть безвихревым;
(II) $\psi = \text{const}$ при $r = a$;
(III) функция ψ_0^* не имеет особенностей вне сферы $r = a$;
(IV) скорость, соответствующая функции ψ_0^*, должна стремиться к нулю, когда r стремится к бесконечности, и функция ψ_0^* не должна определять поток через сферу в бесконечность.

Из п. 15.10 и формулы (4) п. 2.72 видно, что условие равенства нулю вихря, выраженное через функцию тока ψ, имеет вид

$$r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) = 0. \tag{3}$$

Непосредственным дифференцированием легко доказать, что если ψ_0 удовлетворяет уравнению (3), то имеет место равенство

$$\psi_0^* = \frac{r}{a}\psi_0\left(\frac{a^2}{r}, \theta\right). \tag{4}$$

В силу этого выполняется условие (I); условие (II) также удовлетворяется, так как $\psi = 0$ при $r = a$.

Так как r и a^2/r являются точками инверсии относительно сферы $r = a$, отсюда следует, что если одна точка находится внутри сферы, то другая находится вне сферы. Таким образом, если все особенности функции ψ_0 находятся вне сферы, то все особенности функции ψ_0^* находятся внутри сферы. Следовательно, условие (III) удовлетворяется.

Что касается условия (IV), то необходимо отметить, что функция ψ_0 регулярна внутри сферы $r = a$ и вблизи начала координат $\psi_0 = O(r^2)$. Следовательно, в бесконечности имеем $\psi_0^* = O(1/r)$. Тогда из п. 15.10 следует, что скорость в бесконечности, обусловленная функцией ψ_0^*, имеет порядок $O(1/r^3)$,

[1]) Butler S. F. J., *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 49 (1953), 169—174.

т. е. стремится к нулю, когда r стремится к бесконечности. Для величины потока мы имеем $\int q_r dS = O(1/r)$, что также стремится к нулю при $r \to \infty$.

Тот же метод доказательства показывает, что если все особенности функции $\psi_0(r, \theta)$ находятся внутри сферы $r = a$ и если $\psi_0 = O(1/r)$ для больших r, то формула (2) дает поток внутри сферы, если сферу $r = a$ сделать твердой границей. Здесь условие (IV) заменяется тем требованием, чтобы ψ_0^* давало конечную скорость в начале координат. Доказательство предоставляем провести читателю в качестве упражнения.

15.30. Сфера в потоке. Функция тока для равномерного потока, текущего справа налево, имеет вид $\frac{1}{2}Ur^2 \sin^2\theta$. Следовательно, если в поток поместить сферу $r = a$, то, согласно сферической теореме Бутлера, получим

$$\psi = \frac{1}{2}Ur^2 \sin^2\theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right). \tag{1}$$

Замечаем, что эта функция тока обусловлена комбинацией равномерного потока со скоростью $-U$ и диполя с моментом $\frac{1}{2}Ua^3$, находящимся в начале координат. Таким образом, потенциал скоростей имеет вид

$$\varphi = U\left(r\cos\theta + \frac{a^3\cos\theta}{2r^2}\right). \tag{2}$$

Линии тока могут быть построены прямо по формуле (1), однако легче сначала провести линии тока диполя, как указано в п. 15.26, а затем применить

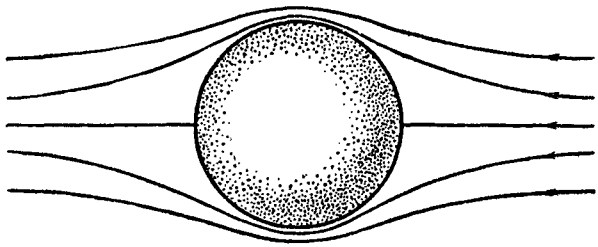


Рис. 298.

диагональный метод Рэнкина к потоку, являющемуся суперпозицией обоих потоков.

Скорость в каждой точке сферы направлена по касательной, и, следовательно, согласно формуле (2), ее величина равна $-\partial\varphi/r\partial\theta = 3U\sin\theta/2$.

Критические точки находятся на оси при $\theta = 0$ или при $\theta = \pi$, и максимальная скорость скольжения равна $3U/2$. Эта скорость достигается в экваториальной плоскости, перпендикулярной к направлению потока (рис. 298).

Давление в каждой точке сферы определяется формулой

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{9U^2\sin^2\theta}{8} = \frac{\Pi}{\varrho} + \frac{1}{2}U^2,$$

где Π — давление в бесконечности. Точки минимального давления находятся в экваториальной плоскости, о которой упоминалось выше, и давление на экваторе равно p_0, причем

$$p_0 = \Pi - \frac{5}{8}\varrho U^2,$$

и, следовательно, условие отсутствия кавитации таково, что $p_0 > 0$, т. е.

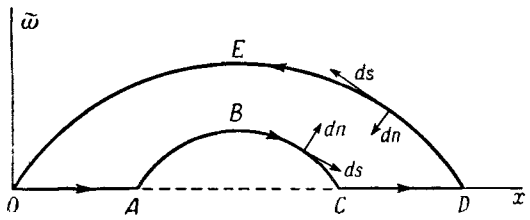
$$\Pi > \frac{5}{8}\varrho U^2.$$

В соответствии с парадоксом Даламбера результирующая сила давления на сферу равна нулю. Сила давления на переднее полушарие выражается формулой

$$F = \int_0^{\pi/2} p\cos\theta \cdot 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta = \pi a^2\left(\Pi - \frac{\varrho U^2}{16}\right).$$

Сила давления на заднее полушарие равна этой силе по величине, но противоположна по знаку.

15. 31. Кинетическая энергия. Если движение безвихревое, то кинетическая энергия жидкости, находящейся в какой-либо области, ограниченной



Р и с. 299.

поверхностью вращения относительно оси, выражается, согласно п. 3.72, формулой

$$T = -\frac{1}{2}\varrho \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS,$$

где dn — элемент нормали, проведенной в жидкости к элементу dS площади, ограничивающей поверхности. В данном случае $dS = 2\pi\tilde{\omega} ds$, где ds — элемент дуги меридиональной криволинейной границы. Очевидно,

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{\partial \psi}{\partial s},$$

так как каждое из этих выражений представляет собой нормальную скорость. Следовательно, имеем

$$T = \pi\varrho \int \varphi\, d\psi, \tag{1}$$

причем интеграл берется по той части меридиональной кривой, которая расположена с одной стороны оси (рис. 299) в направлении, указанном стрелками, при этом жидкость заключена между поверхностями, образуемыми кривыми ABC, DEO.

Если внешняя граница отсутствует, то интеграл тогда берется вдоль дуги ABC в направлении по часовой стрелке. Меняя направление обхода, получаем

$$T = -\pi\varrho \int_{(CBA)} \varphi\, d\psi, \tag{2}$$

где теперь направление обхода берется против часовой стрелки.

Другое выражение для кинетической энергии T только через функцию тока можно получить, если учесть, что интегрирование в формуле (1) по частям дает

$$T = -\pi\varrho \int \psi \, d\varphi,$$

так как обинтегрированная часть обращается в нуль. Далее, поскольку

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{1}{\omega}\frac{\partial\psi}{\partial n},$$

то отсюда имеем

$$T = -\pi\varrho \int \frac{\psi}{\omega}\frac{\partial\psi}{\partial n}\, ds. \tag{3}$$

При этом интеграл берется вдоль границы в направлении, указанном на рис. 299.

15.32. Движущаяся сфера. Если сфера движется со скоростью U в жидкости, покоящейся в бесконечности, то формулы для потенциала скоростей и функция тока выводятся сразу же из соотношений (1) и (2) п. 15.30 посредством наложения постоянной скорости U в положительном направлении оси x, так что получаем

$$\varphi = \frac{1}{2}Ua^3\frac{\cos\theta}{r^2}, \qquad \psi = -\frac{1}{2}Ua^3\frac{\sin^2\theta}{r}.$$

Важно заметить, что эти результаты относятся к началу координат, движущемуся вместе со сферой, так что, даже если U константа, то движение не является установившимся [1]).

Кинетическая энергия жидкости, согласно п. 15.31, выражается формулой

$$T = -\pi\varrho \int \varphi \, d\psi = \frac{1}{2}\pi\varrho U^2a^3 \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{3}\pi\varrho U^2a^3 = \frac{1}{4}M'U^2,$$

где M' — масса жидкости, вытесненной сферой. Таким образом, полная кинетическая энергия системы твердое тело — жидкость равна

$$T_1 = \frac{1}{2}(M + {}^1/_2 M')\, U^2,$$

где M — масса сферы. Следовательно, виртуальная масса равна $(M + {}^1/_2 M')$ (см. п. 9.221).

Если через F обозначить *сопротивление* жидкости, то, приравнивая скорость изменения кинетической энергии мощности, получим

$$FU = \frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}M'U\frac{dU}{dt}$$

и, следовательно,

$$F = \frac{1}{2}M'\frac{dU}{dt},$$

причем сила F обращается в нуль, если U постоянно (рис. 300).

Если сфера падает под действием силы тяжести в бесконечной жидкости, то силами, действующими на нее, являются вес Mg, направленный вертикально вниз, архимедова сила, направленная вертикально вверх,

[1]) Тогда оно является относительно установившимся, см. п. 1.11.

и сопротивление $\frac{1}{2}M'\frac{dU}{dt}$, направленное вверх. Таким образом, получаем уравнение

$$Mg - M'g - \frac{1}{2}M'\frac{dU}{dt} = M\frac{dU}{dt},$$

так что ускорение равно

$$\frac{dU}{dt} = \frac{M-M'}{M+\frac{1}{2}M'}\,g = \frac{s-1}{s+\frac{1}{2}}\,g,$$

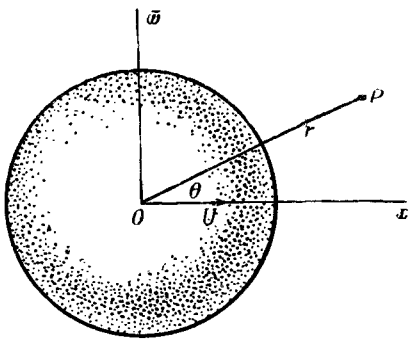
где s — отношение удельных весов сферы и жидкости.

Этот результат показывает, что влияние жидкости сводится к уменьшению ускорения силы тяжести в отношении $(s-1):(s+{}^1/_2)$. В частности, если $s<1$, то сфера поднимается с ускорением, определяемым вышеуказанной формулой. Этот результат имеет очевидное применение к движению воздушного шара.

Дарвин показал (см. стр. 237), что исследование, которое привело к формуле (9) п. 9.222, может быть применено к трехмерному телу, движущемуся в направлении оси x; для присоединенного объема получается соотношение

$$D = \frac{1}{U}\int\int\int(-f_x)\,dx\,dy\,dz,$$

в котором сначала должно производиться интегрирование по x. Величина присоединенной массы равна ϱD.



Р и с. 300.

В случае сферы $D=\frac{2}{3}\pi a^3$ и присоединенная масса, следовательно, равна ${}^1/_2 M'$, как получалось выше.

15.33. Давление на движущуюся сферу. Уравнение для давления имеет вид

$$\frac{p}{\varrho}+\frac{1}{2}q^2-\frac{\partial\varphi}{\partial t}=F(t), \tag{1}$$

$$q^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{r\,\partial\theta}\right)^2=\frac{U^2a^6}{r^6}\left(\cos^2\theta+\frac{\sin^2\theta}{4}\right). \tag{2}$$

Пусть $\mathbf{r}=\overrightarrow{OP}$ — радиус-вектор точки P (фиксированной в пространстве) относительно центра сферы O. Тогда имеем

$$\varphi=\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\mathbf{U}\mathbf{r},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\mathbf{r}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\mathbf{U}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}-\frac{3a^3}{2r^4}\frac{\partial r}{\partial t}\mathbf{U}\mathbf{r},$$

$$\mathbf{U}=\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{PO})=-\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}, \tag{3}$$

и, следовательно, $U\cos\theta$ — скорость точки O вдоль отрезка $OP=-\partial r/\partial t$.

Пусть $\mathbf{f}=\partial\mathbf{U}/\partial t$ — ускорение центра сферы. Подставляя это в (3), получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\mathbf{r}\mathbf{f}-\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}U^2+\frac{3a^3}{2r^3}U^2\cos^2\theta.$$

Подставляя этот результат в уравнение (1), находим

$$\frac{p}{\varrho}-\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\mathbf{rf}+\frac{1}{8}\frac{U^2a^6}{r^6}(3\cos^2\theta+1)-\frac{1}{2}\frac{U^2a^3}{r^3}(3\cos^2\theta-1)=\frac{\Pi}{\varrho},$$

так как все члены, стоящие в левой части, за исключением первого, обращаются в нуль при $r=\infty$.

Таким образом, давление на поверхность сферы выражается формулой

$$\frac{p-\Pi}{\varrho}=\frac{1}{2}\mathbf{af}+\frac{1}{8}U^2(9\cos^2\theta-5),$$

где $\mathbf{a}$ — точка сферы $(\mathbf{r})_{r=a}$. Эти результаты также можно непосредственно получить из п. 3.61.

15.40. Отображение источника относительно сферы. Рассмотрим сферу радиуса a с центром в точке O. Пусть в точке $A(f, 0, 0)$ имеется источник мощности m и пусть P — произвольная точка. Если прямая AP составляет угол θ_1 с положительным направлением оси, то функция тока для источника, подобранная таким образом, чтобы она обращалась в нуль в начале координат, имеет вид

$$\psi_0=m(1+\cos\theta_1);$$

следовательно, по сферической теореме Бутлера, если в жидкость поместить сферу, то для функции тока получим

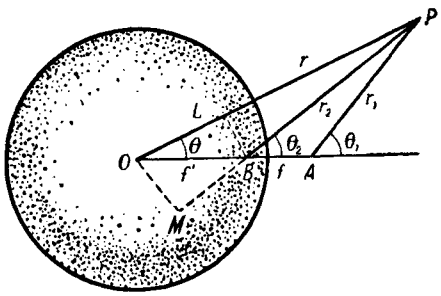


Рис. 301.

$$\psi=m(1+\cos\theta_1)-m(1+\cos\theta_1)^*=$$
$$=m+m\cos\theta_1-\frac{mr}{a}-m(\cos\theta_1)^*. \quad (1)$$

Оценка величины $(\cos\theta_1)^*$ не представляет особых трудностей, но решение этой и подобных задач, связанных со сферой, облегчается еще и некоторыми простыми геометрическими соображениями. На рис. 301 точка B является точкой инверсии для точки A, так что

$$OB=\frac{a^2}{f}=f', \qquad ff'=a^2. \quad (2)$$

Проведем отрезки BL, OM перпендикулярно отрезкам OP, PB. Тогда точки O, M, B, L окажутся циклически сопряженными, так что

$$PO\cdot PL=PB\cdot PM. \quad (3)$$

Далее,

$$r_1^2=r^2+f^2-2fr\cos\theta, \qquad r_2^2=r^2+f'^2-2f'r\cos\theta,$$

следовательно, из формулы (1) п. 15.29 имеем

$$(r_1)^*=\frac{r}{a}\left(\frac{a^4}{r^2}+f^2-\frac{2fa^2}{r}\cos\theta\right)^{1/2}=\frac{r}{a}\cdot\frac{fr_2}{r}=\frac{fr_2}{a}. \quad (4)$$

Кроме того, $\cos\theta_1=(r\cos\theta-f)/r_1$ и, следовательно, из формулы (3) получим

$$(\cos\theta_1)^*=\frac{r}{a}\left(\frac{a^2}{r}\cos\theta-f\right):\frac{fr_2}{r}=-\frac{r}{a}\cdot\frac{PL}{PB}=-\frac{r}{a}\cdot\frac{PM}{PO}.$$

Таким образом,

$$(\cos\theta_1)^*=-\frac{PM}{a}=\frac{-f'\cos\theta_2-r_2}{a}. \quad 5)$$

Поэтому из формулы (1) находим

$$\psi = m + m\cos\theta_1 - \frac{m}{a}(r - r_2) + \frac{ma}{f}\cos\theta_2.$$

Последние два члена дают отображение источника относительно сферы, которое, таким образом, состоит из источника мощности ma/f в точке инверсии и линейного стока мощности m/a на единицу длины, распределенного на отрезке от точки инверсии до центра.

15.41. Отображение радиального диполя относительно сферы. Рассмотрим диполь с моментом μ, помещенный в точке A на радиусе a сферы с центром O. Примем OA в качестве оси момента μ. Тогда при использовании диаграммы и обозначений п. 15.40 функция тока, обусловленная только диполем с моментом μ, запишется в виде $\psi_0 = -\mu\sin^2\theta_1/r_1 = -\mu(1-\cos^2\theta_1)/r_1$. По теореме Бутлера для сферы радиуса a мы имеем

$$\psi = -\frac{\mu\sin^2\theta_1}{r_1} + \frac{\mu r}{a}\frac{1 - PM^2/PO^2}{fr_2/r} = -\frac{\mu\sin^2\theta_1}{r_1} + \frac{\mu OM^2}{afr_2}.$$

Но $OM = f'\sin\theta_2 = (a^2/f)\sin\theta_2$. Следовательно,

$$\psi = -\frac{\mu\widetilde{\omega}^2}{r_1^3} + \left(\frac{a^3}{f^3}\mu\right)\frac{\widetilde{\omega}^2}{r_2^3}.$$

Таким образом, ось требуемого отображения направлена противоположно оси диполя с моментом $\mu a^3/f^3$, и отображение расположено в точке инверсии (см. п. 8.81).

15.42. Сила, действующая на препятствие. Пусть имеется установившееся безвихревое движение жидкости. Пусть, кроме того, имеется n особенностей потока, каждая из которых находится на конечном расстоянии от препятствия. Пусть S_0 — поверхность, ограничивающая препятствие, и пусть S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — сферы бесконечно малого радиуса, каждая из которых окружает одну особенность. Пусть S_{n+1} — сфера большого радиуса, окружающая сферы S_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, и пусть через V обозначен объем сферы, внешней относительно сфер S_i, но внутренней относительно сферы S_{n+1}. Тогда по теореме Гаусса находим

$$\sum_{i=0}^{n+1}\int_{(S_i)}[\mathbf{n}q^2 - 2\mathbf{q}(\mathbf{nq})]\,dS = -\int_{(V)}[\nabla q^2 - 2\mathbf{q}(\nabla\mathbf{q}) - 2(\mathbf{q}\nabla)\,\mathbf{q}]\,d\tau =$$

$$= -\int_{(V)}[2\mathbf{q}\times(\nabla\times\mathbf{q}) - 2\mathbf{q}(\nabla\mathbf{q})]\,d\tau = 0,$$

так как $\nabla\mathbf{q} = 0$ и $\nabla\times\mathbf{q} = 0$, то получим

$$\sum_{i=0}^{n}\int_{(S_i)}[\mathbf{n}q^2 - 2\mathbf{q}(\mathbf{nq})]\,dS = -\int_{(S_{n+1})}[\mathbf{n}q^2 - 2\mathbf{q}(\mathbf{nq})]\,dS.$$

Интеграл, стоящий в левой части этого соотношения, не зависит от сферы S_{n+1}, следовательно, это относится также к интегралу, стоящему справа, и если $\mathbf{q} = O(1/R^2)$, то ясно, что подинтегральное выражение интеграла, стоящего справа, имеет порядок $O(1/R^2)$ и, значит, оно должно стремиться к нулю при $R\to\infty$. Таким образом, интеграл тождественно равен нулю, и, следовательно, положив

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\mathbf{n}q^2 + \mathbf{q}(\mathbf{nq}), \qquad (1)$$

мы будем иметь

$$-\int\limits_{(S_0)} \mathbf{u}\,dS = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{(S_i)} \mathbf{u}\,dS. \tag{2}$$

Точно таким же образом докажем, что

$$-\int\limits_{(S_0)} \mathbf{r}\times\mathbf{u}\,dS = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{(S_i)} \mathbf{r}\times\mathbf{u}\,dS. \tag{3}$$

Таким образом, если $\mathbf{F}$, $\mathbf{L}$ обозначают силу и момент силы, действующей на препятствие, то из п. 3.62 видно, что

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \varrho \int\limits_{(S_i)} \mathbf{u}\,dS, \quad \mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \varrho \int\limits_{(S_i)} \mathbf{r}\times\mathbf{u}\,dS. \tag{4}$$

Следовательно, действие жидкости на препятствие можно рассматривать как результат действия системы сил и моментов (рис. 302)

$$\mathbf{F}_i = \varrho \int\limits_{(S_i)} \mathbf{u}\,dS, \quad \mathbf{L}_i = \varrho \int\limits_{(S_i)} \mathbf{r}\times\mathbf{u}\,dS. \tag{5}$$

Предположим, что i-я особенность является источником мощности m_i, расположенным в точке $\mathbf{r}_i$. Тогда если r — радиус бесконечно малой сферы

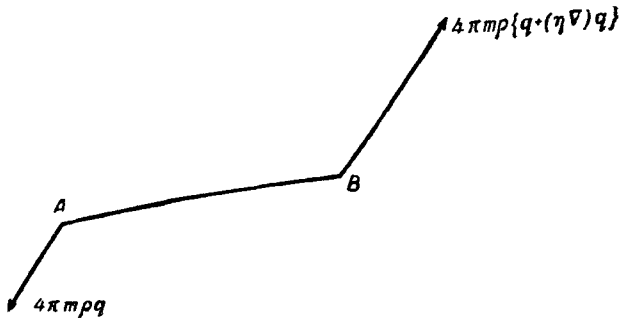


Рис. 302.

S_i, то для точек, находящихся на поверхности этой сферы, мы можем написать равенство

$$\mathbf{q} = \frac{m_i \mathbf{n}}{r^2} + \mathbf{q}_i,$$

где $\mathbf{q}_i$ — скорость в точке $\mathbf{r}_i$, обусловленная всеми причинами, кроме имеющейся там особенности. Подставляя эту величину в формулу (5) и учитывая, что $\int \mathbf{n}\,dS = 0$ по замкнутой поверхности, получим

$$\mathbf{F}_i = 4\pi m_i \varrho \mathbf{q}_i, \qquad \mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times 4\pi m_i \varrho \mathbf{q}_i. \tag{6}$$

Эти формулы показывают, что в случае источника мы можем считать, что действие жидкости на препятствие обусловлено просто силой $\mathbf{F}_i$, действующей в i-м источнике ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Для нахождения действия диполя рассмотрим сток $-m$ в точке A и источник m в точке B, где $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\eta}$.

Если $\mathbf{q}$ — скорость в стоке, обусловленная всеми причинами, за исключением действия *источника и стока*, то скорость в источнике, обусловленная всеми причинами, за исключением источника, равна

$$\mathbf{q}_+=\mathbf{q}+(\boldsymbol{\eta}\nabla)\,\mathbf{q}-m\boldsymbol{\eta}/\eta^3,$$

в то время как скорость в стоке, обусловленная всеми причинами, за исключением стока, равна

$$\mathbf{q}_-=\mathbf{q}-m\boldsymbol{\eta}/\eta^3.$$

Следовательно, из формул (6) получаем, что в источнике действует сила $4\pi m\varrho\mathbf{q}_+$, а в стоке — сила $-4\pi m\varrho\mathbf{q}_-$. Силы, действующие вдоль линии AB, сокращаются и остаются силы, указанные на рис. 302. В пределе, если мы имеем диполь с моментом $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\eta}m$, то в результате получаем силу и пару сил

$$\mathbf{F}=4\pi\varrho\,(\boldsymbol{\mu}\nabla)\,\mathbf{q},\qquad \mathbf{L}=4\pi\varrho\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{q}, \tag{7}$$

где $\mathbf{q}$ — скорость, обусловленная диполем.

15.43. Действие источника на сферу. Из п. 15.40 находим, что система, отображающая источник m, находящийся на расстоянии f от центра сферы радиуса a, вызывает радиальную скорость $ma^3f^{-1}(f^2-a^2)^{-2}$, и, следовательно, сфера притягивается по направлению к источнику силой

$$\frac{4\pi\varrho m^2a^3}{f\,(f^2-a^2)^2}\,.$$

15.44. Действие радиального диполя на сферу. Из п. 15.41 находим, что скорость, обусловленная отображенным диполем в точке $(r,\ \theta)$, равна

$$-\frac{2\mu\cos\theta}{r^3}\,\frac{a^3}{f^3}\,,$$

причем полюсом координат является инверсия положения диполя. Согласно формуле (7) п. 15.42, сфера притягивается по направлению к диполю силой

$$4\pi\varrho\left\{\mu\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{2\mu\cos\theta}{r^3}\,\frac{a^3}{f^3}\right)\right\}_{\theta=0,\ r=f-a^2/f}=\frac{24\pi\varrho\mu^2a^3f}{(f^2-a^2)^4}\,.$$

15.50. Уравнение для функции тока при безвихревом движении. Если поток симметричен относительно оси x, то, согласно формуле (8) п. 2.72, вихрь равен

$$\frac{\partial q_{\widetilde{\omega}}}{\partial x}-\frac{\partial q_x}{\partial\widetilde{\omega}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\widetilde{\omega}}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial\widetilde{\omega}}\left(\frac{1}{\widetilde{\omega}}\,\frac{\partial\psi}{\partial\widetilde{\omega}}\right)=\frac{1}{\sin\omega}\,\nabla^2\left(\frac{\psi\sin\omega}{\widetilde{\omega}}\right).$$

При безвихревом движении имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\widetilde{\omega}}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial\widetilde{\omega}}\left(\frac{1}{\widetilde{\omega}}\,\frac{\partial\psi}{\partial\widetilde{\omega}}\right)=0, \tag{1}$$

что представляет собой искомое уравнение.

Теперь покажем, что конформное отображение

$$z_1=x+i\widetilde{\omega}=f\,(\xi+i\eta)=f\,(\zeta)$$

преобразует вышеуказанное уравнение в следующее:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)=0, \tag{2}$$

где величина $\widetilde{\omega}$ рассматривается как функция переменных ξ, η, определяемая конформным отображением.

Доказательство. Так как

$$2\frac{\partial}{\partial z_1}=\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial\widetilde{\omega}}, \quad 2\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial\xi}-i\frac{\partial}{\partial\eta}, \tag{3}$$

то мы видим[1]), что уравнение (1) эквивалентно обращению в нуль действительной части выражения

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}_1}\right)=\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\bar{z}_1}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\xi}}\right)=\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\bar{z}_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\xi}}\right)=\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\bar{z}_1}\frac{\partial\zeta}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\xi}}\right).$$

Первые два множителя, стоящие в правой части, являются сопряженными мнимыми величинами, произведение которых действительно, и, следовательно, действительная часть выражения

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\xi}}\right)$$

обращается в нуль, а она и представляет собой левую часть уравнения (2).

15.51. Скорость. Мы имеем

$$q_{\widetilde{\omega}}+iq_x=\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{i}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\widetilde{\omega}}=2\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial z_1},$$

и, следовательно,

$$q^2=\frac{4}{\widetilde{\omega}^2}\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}_1}.$$

Тогда конформное преобразование $z_1=f(\zeta)$ дает

$$q^2=\frac{4}{\widetilde{\omega}^2}\frac{\partial\zeta}{\partial z_1}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{z}_1}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\zeta}},$$

и, следовательно,

$$q^2\widetilde{\omega}^2f'(\zeta)\bar{f}'(\bar{\zeta})=4\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\zeta}}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2.$$

Если через ds_ξ и ds_η обозначить элементы дуг, соответствующих увеличению значений ξ и η, то мы получим

$$(ds_\xi)^2+(ds_\eta)^2=(ds)^2=(dx)^2+(d\widetilde{\omega})^2=f'(\zeta)\,d\zeta\cdot\bar{f}'(\bar{\zeta})\,d\bar{\zeta}=$$
$$=J^2[(d\xi)^2+(d\eta)^2],$$

где $J^2=f'(\zeta)\bar{f}'(\bar{\zeta})$. Таким образом, компоненты скорости в направлениях увеличения значений ξ, η выражаются формулами

$$q_\xi=-\frac{\partial\varphi}{\partial s_\xi}=-\frac{1}{J}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}, \quad q_\eta=-\frac{\partial\varphi}{\partial s_\eta}=-\frac{1}{J}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta},$$

---

[1]) Заметим, что ψ можно рассматривать как функцию независимых переменных z, $\bar{z}_1$, или ζ, $\bar{\zeta}_1$. Таким образом, ζ есть функция только от z_1, и, следовательно, $\bar{\zeta}$—функция только от $\bar{z}_1$.

или через функцию тока

$$q_\xi = -\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial s_\eta} = -\frac{1}{J\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}, \quad q_\eta = \frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial s_\xi} = \frac{1}{J\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}.$$

Из этих результатов получаем уравнения (см. п. 5.30)

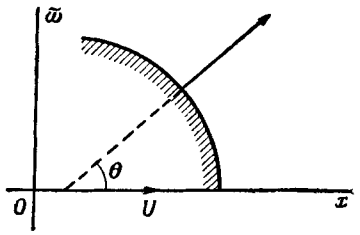
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = -\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}.$$

15.52. Граничные условия для функции тока. Если твердое тело вращения движется в жидкости со скоростью U в направлении своей оси, то скорость, нормальная к твердому телу, и нормальная скорость соприкасающейся с телом жидкости являются одинаковыми (рис. 303). Тогда

$$-\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial s} = U\cos\theta = U\frac{d\widetilde{\omega}}{ds},$$

интегрируя вдоль границы, получим

$$\psi = -\frac{1}{2}U\widetilde{\omega}^2 + \text{const}.$$



Р и с. 303.

Если жидкость покоится в бесконечности, то присутствие твердого тела не будет оказывать никакого влияния на жидкость в бесконечности, поэтому функция тока ψ должна стремиться на бесконечности к постоянному значению. Без потери общности константу можно положить равной нулю.

15.53. Сфера. Одним из простейших примеров применения вышеуказанных результатов является движение сферы. Преобразование

$$z_1 = x + i\widetilde{\omega} = ce^\zeta$$

дает $x = ce^\xi\cos\eta$, $\widetilde{\omega} = ce^\xi\sin\eta$, так что поверхности $\xi = \text{const}$ являются сферами. Для сферы радиуса a мы имеем $a = ce^{\xi_0}$. Уравнение, которому удовлетворяет функция тока, таково:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{e^\xi\sin\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{e^\xi\sin\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) = 0. \tag{1}$$

Если сфера движется со скоростью U в направлении оси x, то на поверхности имеет место равенство

$$\psi = -\frac{1}{2}Uc^2e^{2\xi_0}\sin^2\eta, \tag{2}$$

а в бесконечности, где жидкость не возмущена, имеем

$$\psi \to 0. \tag{3}$$

Решение уравнения ищем в виде $\psi = f(\xi)\sin^2\eta$. Тогда, подставляя это выражение в уравнение (1) и интегрируя, получаем

$$\frac{\partial}{\partial\xi}[e^{-\xi}f'(\xi)] - 2e^{-\xi}f(\xi) = 0,$$

$$f''(\xi) - f'(\xi) - 2f(\xi) = 0, \quad f(\xi) = Be^{2\xi} + Ce^{-\xi}.$$

Из формулы (3) следует, что $B = 0$, и тогда из равенства (2) следует

$$Ce^{-\xi_0} = -\frac{1}{2}c^2Ue^{2\xi_0},$$

откуда находим

$$\psi = -\frac{1}{2} c^2 U e^{3\xi_0} \sin^2\eta / e^{\xi} = -\frac{1}{2} a^3 U \sin^2\theta / r,$$

что уже было получено в п. 15.32.

15.54. Функция тока для сжатого эллипсоида. *Сжатый* (или дискообразный) эллипсоид представляет собой тело, полученное вращением эллипса относительно его малой оси. Это тело известно также как сплющенный у полюсов сфероид. Приблизительно эту форму имеют планеты Земля и Юпитер.

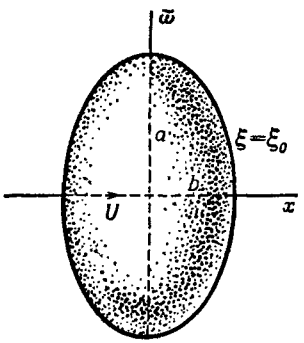


Рис. 304.

Преобразование

$$z_1 = x + i\tilde{\omega} = c \operatorname{sh}\zeta \tag{1}$$

дает $x = c \operatorname{sh}\xi \cos\eta$, $\tilde{\omega} = c \operatorname{ch}\xi \sin\eta$, и, следовательно, кривая $\xi = \xi_0$ является эллипсом в меридиональной плоскости с полуосями

$$a = c \operatorname{ch}\xi_0, \quad b = c \operatorname{sh}\xi_0.$$

Таким образом, $\xi = \xi_0$ представляет собой уравнение эллипсоида (рис. 304).

Функция тока удовлетворяет уравнению (см. п. 15.50)

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\xi \sin\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\xi \sin\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) = 0. \tag{2}$$

Если эллипсоид движется со скоростью U в жидкости, которая покоится в бесконечности, то функция ψ должна удовлетворять следующим условиям:

$$\psi = -\frac{1}{2} U c^2 \operatorname{ch}^2\xi_0 \sin^2\eta \tag{3}$$

на твердой поверхности и

$$\psi \to 0 \tag{4}$$

в бесконечности.

Условие (3) указывает, что решение должно иметь вид $\psi = f(\xi)\sin^2\eta$. Подстановка в уравнение (2) и интегрирование дают

$$f''(\xi)\operatorname{ch}\xi - f'(\xi)\operatorname{sh}(\xi) - 2f(\xi)\operatorname{ch}\xi = 0,$$

$$f'(\xi)\operatorname{ch}\xi - 2f(\xi)\operatorname{sh}\xi = B,$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{f(\xi)}{\operatorname{ch}^2\xi}\right) = \frac{B}{\operatorname{ch}^3\xi},$$

$$f(\xi) = B\operatorname{ch}^2\xi \int \frac{d\xi}{\operatorname{ch}^3\xi} + C\operatorname{ch}^2\xi,$$

где B и C — константы, причем из условия (4) следует, что $C = 0$.

Теперь с помощью интегрирования по частям или непосредственной проверкой находим

$$\int \frac{d\xi}{\operatorname{ch}^3\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}^2\xi} - \operatorname{arcctg}\operatorname{sh}\xi\right) + D,$$

здесь мы полагаем $D = 0$, так как другие члены стремятся к нулю при $\xi \to \infty$. Таким образом, имеем

$$f(\xi) = \frac{1}{2} B\operatorname{ch}^2\xi\left(\frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}^2\xi} - \operatorname{arcctg}\operatorname{sh}\xi\right).$$

Чтобы доказать, что $f(\xi)\to 0$ при $\xi\to\infty$, заметим, что для больших значений ξ

$$\operatorname{sh}\xi-\operatorname{ch}^2\xi\operatorname{arcctg}\operatorname{sh}\xi=\operatorname{sh}\xi-\frac{\operatorname{ch}^2\xi}{\operatorname{sh}\xi}=-\frac{1}{\operatorname{sh}\xi}\to 0.$$

Таким образом, условие (4) удовлетворяется.

Для определения постоянного B из (3) находим

$$B\operatorname{ch}^2\xi_0\left(\frac{\operatorname{sh}\xi_0}{\operatorname{ch}^2\xi_0}-\operatorname{arcctg}\operatorname{sh}\xi_0\right)=-Uc^2\operatorname{ch}^2\xi_0.$$

Далее,

$$a=c\operatorname{ch}\xi_0,\quad b=a\sqrt{1-e^2}=c\operatorname{sh}\xi_0.$$

Следовательно,

$$B=-Uc^2/\left(e\sqrt{1-e^2}-\arcsin e\right).$$

Таким образом, окончательно мы получим следующее выражение для функции тока:

$$\psi=\frac{-\frac{1}{2}Uc^2(\operatorname{sh}\xi-\operatorname{ch}^2\xi\operatorname{arcctg}\operatorname{sh}\xi)}{e\sqrt{1-e^2}-\arcsin e}\sin^2\eta. \tag{5}$$

Для определения потенциала скорости из п. 15.51 находим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=-\frac{1}{c\operatorname{ch}\xi\sin\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}.$$

Следовательно, из формулы (5) получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=\frac{k}{c}(2-2\operatorname{sh}\xi\operatorname{arcctg}\operatorname{sh}\xi)\sin\eta,\quad k=\frac{\frac{1}{2}Uc^2}{e\sqrt{1-e^2}-\arcsin e},$$

$$\varphi=-\frac{Uc(1-\operatorname{sh}\xi\operatorname{arcctg}\operatorname{sh}\xi)}{e\sqrt{1-e^2}-\arcsin e}\cos\eta.$$

Заметим, что величина φ имеет вид $Uf(\xi)x$. Тогда кинетическая энергия и, следовательно, присоединенная масса легко вычисляются по формуле

$$T=-\pi\rho\int_{\eta=0}^{\eta=\pi}\varphi\,d\psi=\frac{2}{3}\pi\rho a^3U^2\frac{e-(\arcsin e)\sqrt{1-e^2}}{\arcsin e-e\sqrt{1-e^2}}.$$

Обтекание сжатого эллипсоида легко получается путем наложения потока $-U$ на найденное выше решение.

15.55. Круглый диск. Для круглого диска, движущегося перпендикулярно своей плоскости, в формулах п. 15.54 мы полагаем $e=1$, $c=a$.

Таким образом, на передней стороне диска ($\xi_0=0$) мы имеем

$$\varphi=\frac{2Ua}{\pi}\cos\eta,\quad \psi=-\frac{1}{2}Ua^2\sin^2\eta,$$

и кинетическая энергия равна

$$T=-\pi\rho\int_{\eta=0}^{\eta=\pi}\varphi\,d\psi=\frac{4}{3}\rho a^3U^2.$$

15.56. Трубка Вентури. Для отыскания решения уравнения (2) п. 15.54, которое не зависит от ξ, мы полагаем $\partial\psi/\partial\xi = 0$, что тотчас же приводит к следующему результату:

$$\psi = Ac\cos\eta,$$

где A — произвольная постоянная. Линии тока $\eta = \text{const}$ представляют собой гиперболы. Следовательно, поверхности тока представляют собой гиперболоиды, образованные вращением этих гипербол вокруг оси x.

Если мы зафиксируем некоторое значение $\eta = \eta_0$, то получим поток жидкости через трубку, стенкой которой является соответствующий гиперболоид, при этом наименьшее сечение, или *горло*, трубки является окружностью радиуса $c\sin\eta_0$. Сечение трубки в окрестности горла может быть сделано сколь угодно малым. Для этого достаточно взять величину η_0 достаточно малой.

Таким образом, мы имеем идеализированное представление потока через горло трубки Вентури (п. 1.70) или через рабочую часть аэродинамической трубы с большими скоростями.

Полагая $\eta_0 = \pi/2$, мы получим как предельный случай поток через круглое отверстие радиуса c в бесконечной плоской стенке ($x = 0$). Как обычно, в таких случаях скорость у края отверстия бесконечна (см. п. 6.10).

По определению функции тока ψ поток через отверстие равен $2\pi Ac\cdot(1-\cos\eta_0)$, откуда определяется величина A.

15.57. Функция тока для вытянутого эллипсоида. *Вытянутый* (или яйцевидный) эллипсоид, называемый также вытянутым сфероидом, образуется при вращении эллипса относительно его большой оси. Метод, указанный в п. 15.54, может быть применен и к этому случаю путем использования преобразования

$$x + i\widetilde{\omega} = c\operatorname{ch}\zeta.$$

Поступая таким же образом, получим

$$\psi = \frac{\frac{1}{2}Ub^2\left(\operatorname{ch}\xi + \operatorname{sh}^2\xi\ln\operatorname{th}\frac{\xi}{2}\right)\sin^2\eta}{\frac{a}{c} + \frac{b^2}{c^2}\ln\frac{a+b-c}{a+b+c}}$$

для сфероида, определяемого формулами $\xi = \xi_0$, $a = c\operatorname{ch}\xi_0$, $b = c\operatorname{sh}\xi_0$, движущегося со скоростью U в направлении оси x.

15.58. Параболоид вращения. Преобразование

$$x + i\widetilde{\omega} = c(\xi + i\eta)^2$$

дает

$$x = c(\xi^2 - \eta^2), \qquad \widetilde{\omega} = 2c\xi\eta,$$

и, следовательно,

$$x - c\xi^2 = -\frac{\widetilde{\omega}^2}{4c\xi^2}.$$

Таким образом, поверхности $\xi = \text{const}$ являются параболоидами вращения с фокусами в начале координат. Рассмотрим движение такого параболоида, перемещающегося со скоростью U в покоящейся жидкости. На границе параболоида $\xi = \xi_0$ должно выполняться следующее условие:

$$\psi = -\frac{1}{2}U\,4c^2\xi_0^2\eta^2, \tag{1}$$

в то время как функция тока должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)=0. \tag{2}$$

Полагаем в этом уравнении $\psi=f(\xi)\eta^2$; в результате последовательного интегрирования находим

$$\frac{f'(\xi)}{\xi}=B, \qquad f(\xi)=\frac{1}{2}B\xi^2+C,$$

и поэтому $\psi=\left(\frac{1}{2}B\xi^2+C\right)\eta^2$. Требование $\psi=0$ теперь не является условием в бесконечности, так как сам параболоид вращения распространяется до бесконечности и возмущает жидкость. Следовательно, это условие должно быть заменено требованием, чтобы скорость обращалась в нуль на бесконечности для точек, не находящихся вблизи параболоида (рис. 305). Из п. 15.51 мы находим

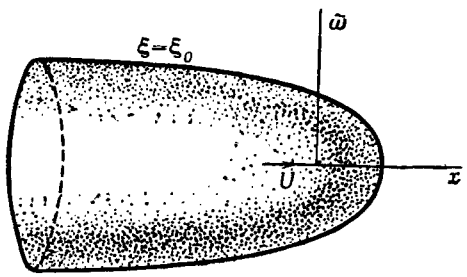
$$q^2\widetilde{\omega}^2c^2\cdot 2\zeta\cdot 2\bar{\zeta}=(B\xi\eta^2)^2+\eta^2(B\xi^2+2C)^2,$$

$$q^2=\frac{B^2}{16c^4}+\frac{BC\xi^2+C^2}{4c^4\xi^2(\xi^2+\eta^2)}.$$

Первый член справа не обратится в нуль до тех пор, пока $B\neq 0$. Следовательно, мы должны положить $B=0$.

Отсюда

$$\psi=C\eta^2.$$



Р и с. 305.

Сравнивая это равенство с формулой (1), получаем соотношение

$$\psi=-2c^2U\xi_0^2\eta^2. \tag{3}$$

В случае обтекания параболоида путем наложения равномерного потока скорости U, направленной справа налево, получаем

$$\psi=2c^2U(\xi^2-\xi_0^2)\eta^2.$$

Соотношение (3) также можно получить как предельный случай движения вытянутого эллипсоида следующим образом. Если поместить начало координат в фокусе, то преобразование п. 15.57 можно записать в виде

$$x+i\widetilde{\omega}=c\operatorname{ch}\zeta-c=2c\operatorname{sh}^2\frac{1}{2}\zeta.$$

Если написать $2k^2c$ вместо c и ζ/k вместо ζ, то получим

$$x+i\widetilde{\omega}=4ck^2\operatorname{sh}^2\frac{\zeta}{2k},$$

и при $k\to\infty$ это выражение переходит в следующее $x+i\widetilde{\omega}=c\zeta^2$.

По сравнению с функцией тока п. 15.57 здесь имеются следующие изменения: величины a, b, c теперь соответственно равны

$$2k^2c\operatorname{ch}\frac{\xi_0}{k}, \qquad 2k^2c\operatorname{sh}\frac{\xi_0}{k}, \qquad 2k^2c,$$

в то время как величины ξ, η переходят в величины ξ/k, η/k. При $k\to\infty$ получаем формулу (3).

15.60. Теоремы сравнения. Рассмотрим безвихревой поток невязкой несжимаемой жидкости, ограниченной линиями тока, в некоторой области R плоскости xy. В области R нет ни источников, ни стоков.

Плоскость может быть плоскостью двумерного потока или меридиональной плоскостью осесимметричного потока, при этом ось x является осью симметрии.

Скорость течения справа налево через элемент dn нормали к линии тока $\psi = \text{const}$ равна $\varepsilon\, \partial\psi/\partial n$, где $\varepsilon = 1$, или $\varepsilon = 1/y$, смотря по тому — плоский поток или осесимметричный, так что величина ε всегда положительна (рис. 306).

Заштрихованная область ограничена двумя непересекающимися линиями тока, каждая из которых имеет при $x = \pm\infty$ концевые точки.

Точку P границы будем называть *регулярной точкой*, если она не лежит на оси (в случае осесимметричного потока), а находится на окружности

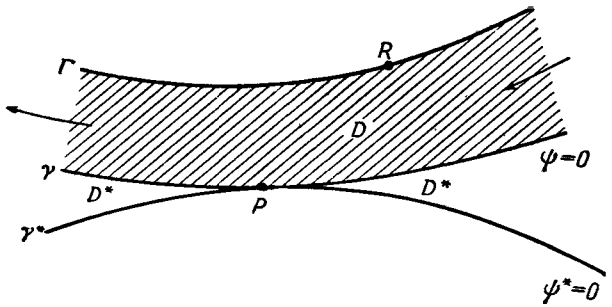


Рис. 306.

некоторого круга, касающегося границы в точке P и внутренняя область которого целиком лежит в области R.

Функция тока ψ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \varepsilon\psi_y. \tag{1}$$

Это уравнение эллиптического типа, и для его решения справедлив *принцип максимума*; а именно: если величина ψ не константа, то она не может иметь ни максимума, ни минимума внутри области определения.

Физически это означает, что наличие такого внутреннего максимума или минимума привело бы к внутренней завихренности, что противоречит гипотезе безвихревого потока.

Таким образом, если ψ равно нулю на одной границе и положительной константе на другой, то $\psi \geqslant 0$ во всей области между границами.

Теорема сравнения 1. *Пусть D, D^* — узкие длинные области, ограниченные соответственно линиями тока γ, Γ и γ^*, Γ, и пусть область D содержится в области D^*. Пусть два различных осесимметричных потока в областях D и D^* определены функциями тока ψ и ψ^*, так что*

$$\psi = 0 \text{ на } \gamma, \qquad \psi^* = 0 \text{ на } \gamma^*, \qquad \psi = Q = \psi^* \text{ на } \Gamma,$$

где Q — положительная константа; т. е. два потока имеют один и тот же расход. Предполагается, что эти потоки не накладываются друг на друга.

Если P — регулярная точка, принадлежащая γ и γ^* и если R — какая-либо регулярная точка на Γ, то тогда для скоростей в точках P и R двух потоков имеем

$$q(P) \leqslant q^*(P), \qquad q(R) \geqslant q^*(R); \tag{2}$$

для удовлетворения обоим неравенствам необходимо и достаточно, чтобы было $D = D^*$, $\psi = \psi^*$.

Доказательство. Пусть $\Omega = \psi^* - \psi$, и предположим, что основное течение направлено справа налево, как показано на рис. 306.

На линии γ имеем

$$\psi = 0 \quad \text{и} \quad \Omega = \psi^* \geqslant 0;$$

на линии Γ имеем

$$\psi = \psi^* \quad \text{и} \quad \Omega = 0.$$

Согласно принципу максимума, если $\Omega = 0$ на γ, то $\Omega \equiv 0$ во всей области D.

Если $\Omega > 0$ на γ, то $\Omega \geqslant 0$ во всей области D.

В точке P имеем $\Omega = 0$. Следовательно, $\varepsilon\, \partial\Omega/\partial n \geqslant 0$, т. е. $q^*(P) - q(P) \geqslant 0$, или $q^*(P) \geqslant q(P)$.

В точке R имеем $\Omega = 0$, следовательно, $\varepsilon\, \partial\Omega/\partial n \geqslant 0$, т. е.

$$-q^*(R) + q(R) \geqslant 0, \quad \text{или} \quad q(R) \geqslant q^*(R).$$

Это доказывает теорему для плоского или осесимметричного потока, для которого $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = 1/y$, причем обе эти величины положительные. Ясно, что для удовлетворения обоим равенствам мы должны иметь $D = D^*$, $\psi = \psi^*$.

Если будем удалять Γ в бесконечность, так чтобы Q бесконечно увеличивалось, то получим $\Omega = 0$ на Γ в каждом ее положении, так что в пределе на бесконечности будем иметь $\Omega = 0$.

Второе заключение относительно скорости потока в точке R теряет смысл, а первое остается в виде следующей теоремы.

Теорема сравнения 2. *Пусть* D *и* D^* *— области, занятые двумя плоскими (или осесимметричными) потоками, имеющими одинаковую ненулевую постоянную скорость в бесконечности. Пусть области* D *и* D^* *ограничены единственными линиями тока* γ *и* γ^*, *простирающимися до значений* $x = \pm\infty$. *Если область* D *является частью области* D^* *и если линии* γ *и* γ^* *имеют общую регулярную точку* P, *то скорости в точке* P *удовлетворяют неравенству*

$$q(P) \leqslant q^*(P). \tag{3}$$

Равенство имеет место только в том случае, если $D = D^*$ *и оба потока идентичны.*

Эти теоремы первоначально были доказаны М. А. Лаврентьевым, а затем в более развернутой форме были даны Гилбаргом[1]).

Теорема сравнения Серрина[2]).

Пусть R_1 *и* R_2 *— две области, занимаемые плоскими или осесимметричными безвихревыми потоками, и пусть* S_1 *и* S_2 *— соответствующие линии тока* $\psi = 0$. *Предполагаем, что в каждом потоке* $\psi \geqslant 0$. *Пусть* S_1 *и* S_2 *имеют общую дугу* MN, *так что каждый поток на дуге* MN *имеет направление от* M *к* N. *Далее, предположим, что дуги* QM *линии* S_1 *и* NQ *линии* S_2, *имеющие только общую точку* Q, *вместе с* MN *ограничивают область*

$$MNQ = R_3,$$

внутреннюю относительно R_1 *и* R_2. *Пусть* M *и* N *— регулярные граничные точки и пусть* $q(M, R_1)$ *— граничная скорость в точке* M *для потока* R_1 *и аналогично для других точек. Тогда получим*

$$\frac{q(M, R_1)}{q(N, R_1)} \leqslant \frac{q(M, R_2)}{q(N, R_2)}, \tag{4}$$

[1]) Gilbarg. *J. Rat. Mech. a. Analysis*, 1 (1952), 309—320. (Лаврентьев М. А., Матем. сб., новая серия, 4 (46) (1938), № 3 (391—458). *—Прим. перев.*)

[2]) Serrin J., *J. Rat. Mech. a. Analysis*, 1 (1952), 563—572. Теоремы сравнения были применены Серрином и Гилбаргом для доказательства различных теорем единственности для плоских осесимметричных потоков.

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда потоки геометрически подобны.

Доказательство. На рис. 307 изображен тот случай, когда Q находится на конечном расстоянии и в бесконечности.

Если потоки подобны, то в теореме, очевидно, имеет место равенство.

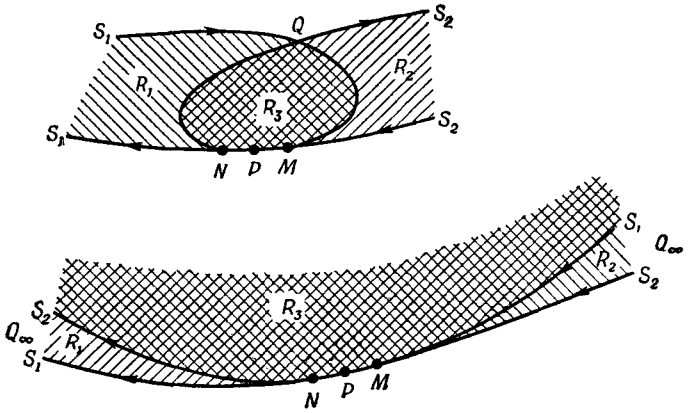


Рис. 307.

Пусть ψ_1, ψ_2 — соответствующие функции тока и пусть P точка на линии MN.

Пусть

$$\Omega_P = q(P, R_1)\,\psi_2 - q(P, R_2)\,\psi_1. \tag{5}$$

На QM

$$\Omega_P = q(P, R_1)\,\psi_2 \geqslant 0;$$

на MN

$$\Omega_P = 0;$$

на NQ

$$\Omega_P = -q(P, R_2)\,\psi_1 \leqslant 0.$$

Если dn — элемент нормали в точке P, проведенный в сторону потока, то

$$\varepsilon \frac{\partial \Omega_P}{\partial n} = q(P, R_1)\,\varepsilon \frac{\partial \psi_2}{\partial n} - q(P, R_2)\,\varepsilon \frac{\partial \psi_1}{\partial n} =$$
$$= q(P, R_1)\,q(P, R_2) - q(P, R_2)\,q(P, R_1) = 0.$$

Таким образом, линия C_P начинается в точке P, в которой $\Omega_P = 0$ (рис. 308).

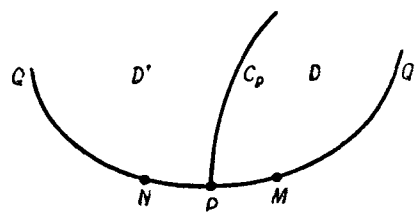


Рис. 308.

Рассмотрим область D, ограниченную линиями QM, MP, C_P.

На QM имеем

$$\Omega_P \geqslant 0;$$

на MP

$$\Omega_P = 0,$$

на C_P

$$\Omega_P = 0.$$

Согласно принципу максимума, либо $\Omega_P \equiv 0$ в области D, либо $\Omega_P > 0$ в области D. Должно иметь место последнее условие. Следовательно, $(\varepsilon\,\partial\Omega_P/\partial n)_M > 0$, т. е.

$$q(P, R_1)\,q(M, R_2) - q(P, R_2)\,q(M, R_1) > 0. \tag{6}$$

Точно так же в области D', ограниченной линиями C_P, PN, NQ, находим, что $\Omega_P < 0$ и $(\partial\Omega_P/\partial n)_N < 0$ или

$$q(P, R_1)\, q(N, R_2) - q(P, R_2)\, q(N, R_1) < 0. \qquad (7)$$

Из неравенств (6) и (7) немедленно следует утверждение теоремы.

Мы предлагаем читателю доказать, что плоская линия C_p проходит через точку Q.

ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ 15

1. Построить графически в трех измерениях линии тока для источника и равного по мощности стока.

2. Источник мощности m помещен в начале координат в поток несжимаемой жидкости, движущейся со скоростью U в отрицательном направлении оси x. Найти уравнение поверхности равного давления и начертить схематически вид меридионального сечения трех таких поверхностей, соответствующих $p \gtreqless p_0$, где p_0—давление в бесконечности.

В случае $p = p_0 + \varrho\varkappa^4$ и $\varkappa^4 < \frac{3}{8} U^2$ доказать, что плоскость $x = 4\varkappa m^{1/2}/6^{3/4} \cdot U$ касается поверхности постоянного давления по окружности, и найти радиус этой окружности.

3. Если AB—постоянной мощности линейный источник и A, B—равные стоки такой мощности, что нет ни притока, ни потери жидкости, то показать, что

$$\psi = C\{(r_1 - r_2)^2 - c^2\}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

где $c = AB$, r_1 и r_2—соответственно расстояния от точек A, B; C—константа, зависящая от мощностей источников.

4. Два источника мощностей m, m' помещены соответственно в двух точках A, B в бесконечном потоке, текущем со скоростью V параллельно AB.

Получить уравнения линий тока в форме

$$m\cos\theta + m'\cos\theta' - V\tilde{\omega}^2/2 = \text{const},$$

где (r, θ), (r', θ')—биполярные координаты с точками A и B в качестве полюсов; AB называется начальной линией, $\tilde{\omega}$—расстояние по перпендикуляру какой-либо точки от линии AB.

Показать, что основной поток,поток, вытекающий из точки A, поток, вытекающий из точки B, разделяются геометрическими кривыми, определяемыми уравнениями

$$m\Big/\left(r\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + m'\Big/\left(r'\sin\frac{\theta'}{2}\right)^2 = V,$$

и

$$-m\Big/\left(r\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 + m'\Big/\left(r'\sin\frac{\theta'}{2}\right)^2 = V.$$

5. Пусть в точках A и B бесконечной жидкости находятся соответственно простой источник и сток мощностей μ и μ'. Показать, что уравнение линий тока имеет вид

$$\mu\cos\theta - \mu'\cos\theta' = \text{const},$$

где θ, θ'—углы, которые отрезки AP, BP образуют с линией AB, причем P—любая точка.

Также доказать, что если $\mu > \mu'$, то конус, определяемый уравнением

$$\cos\theta = 1 - 2\mu'/\mu,$$

делит линии тока, выходящие из точки A, на две серии, одна из которых распространяется до бесконечности, а другая заканчивается в B.

6. Доказать, что если O, C_1, C_2—точки на оси x, так что $OC_1 = c_1$, $OC_2 = c_2$ и $c_1c_2 = a^2$, то функция тока

$$\psi = m\left[\frac{r_2 - r}{a} + \frac{a(x - c_2)}{c_1r_2} + \frac{x - c_1}{r_1}\right]$$

дает движение жидкости, обусловленное простым источником мощности m в C_1 при наличии неподвижной сферы радиуса $r = a$, где r, r_1, r_2—расстояния какой-либо точки соответственно от точек O, C_1, C_2; O—начало координат.

7. Найти выражение потенциала скоростей, обусловленного непрерывным распределением источников и стоков вдоль оси x в идеальной жидкости. Если распределение имеет постоянную интенсивность s от точки $x=0$ до точки $x=a$, то показать, что эквипотенциальные поверхности являются эллипсоидами вращения с фокусами на двух концах линии.

Если в дополнение к вышеуказаиному имеется сток равной мощности в начале координат и установившийся поток со скоростью V в бесконечности, параллельный оси x, то показать, что имеется замкнутая поверхность вращения вида дирижабля, полная длина которой является разностью корней уравнения

$$x^3 \pm x^2 a = sa^2/(4\pi V).$$

8. Интерпретировать движения, для которых функции тока равны

$$\text{(I)}\quad \psi = C\widetilde{\omega}^2\left(\frac{a^3}{r^3}-1\right),$$

$$\text{(II)}\quad \psi = C\widetilde{\omega}^2\left(\frac{a^3}{r^3}-\frac{b^3}{r'^3}\right),$$

где r и r' измеряются от двух фиксированных точек O, O' на оси Ox.

9. Если в начале координат имеется диполь с моментом μ в направлении единичного вектора $\mathbf{a}_1$, то доказать, что его потенциал скоростей имеет вид

$$\varphi = \mu\,(\mathbf{a}_1\nabla)\left(\frac{1}{r}\right),$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, в которой вычисляется φ. Истолковать выражение

$$\mu_1\mu_2\,(\mathbf{a}_1\nabla)\,(\mathbf{b}_1\nabla)\left(\frac{1}{r}\right).$$

10. Определить функцию тока ψ, если скорость выражается в виде

$$x\left\{2+\frac{1}{(x^2+\widetilde{\omega}^2)^{3/2}}\right\}.$$

11. Доказать, что выражение

$$\psi = \left(\frac{A}{r^2}\cos\theta + Br^2\right)\sin^2\theta$$

представляет собой возможную форму функции тока Стокса и найти соответствующий потенциал скоростей.

12. Сферическая масса жидкости радиуса b и плотности ϱ имеет концентрическую сферическую каверну радиуса a, которая содержит газ при давлении p, массой которого можно пренебречь. Жидкость находилась в покое, когда к внешней границе было приложено импульсивное давление $\widetilde{\omega}$.

Показать, что созданная при этом кинетическая энергия равна

$$2\pi\widetilde{\omega}^2 ab/\varrho\,(b-a).$$

Если во время последующего движения газ подчиняется закону Бойля и давление на внешнюю границу отсутствует, то найти радиус каверны, когда жидкость успокоится.

13. Масса жидкости плотности ϱ ограничена двумя концентрическими сферическими поверхностями радиусов r_1 и r_2, и когда жидкость покоится, к этим поверхностям прикладываются импульсивные давления $\widetilde{\omega}_1$ и $\widetilde{\omega}_2$. Показать, что поверхности начинают двигаться со скоростями

$$\frac{\widetilde{\omega}_1-\widetilde{\omega}_2}{\varrho\,(r_2-r_1)}\,\frac{r_2}{r_1} \quad\text{и}\quad \frac{\widetilde{\omega}_1-\widetilde{\omega}_2}{\varrho\,(r_2-r_1)}\,\frac{r_1}{r_2}.$$

14. Масса жидкости плотности ϱ и объема $4\pi c^3/3$ имеет форму сферического слоя. К внешней поверхности приложено давление p, а на внутренней поверхности давление равно нулю. Первоначально жидкость покоится и внешний радиус равен $2nc$. Показать, что если внешний радиус становится равным nc, то скорость U внешней поверхности дается формулой

$$U^2 = \frac{14p}{3\varrho}\,\frac{(n^3-1)^{1/3}}{n-(n^3-1)^{1/3}}.$$

15. Масса жидкости плотности ϱ и объема $4\pi c^3/3$ имеет форму сферического слоя. К внешней поверхности слоя приложено постоянное давление p_0. К внутренней поверхио-

сти не прикладывается никакое давление и никакие другие силы не действуют на жидкость. Первоначально жидкость покоится и внутренний радиус слоя равен $2c$. Доказать, что если радиус внутренней поверхности равен c, то ее скорость равна

$$\left(\frac{14p_0}{3\varrho}\,\frac{2^{1/3}}{2^{1/3}-1}\right)^{1/2}.$$

16. Бесконечная масса жидкости, находящаяся в покое, подвергается действию постоянного давления p_0 и содержит сферическую каверну радиуса a, наполненную газом, находящимся под давлением mp_0. Доказать, что если пренебречь инерцией газа и предположить, что во все время движения справедлив закон Бойля, то радиус сферы колеблется между a и na, где величина n определяется уравнением

$$1+3m\ln n-n^3=0.$$

Если ϱ—плотность жидкости, а величина m приблизительно равна единице, то показать, что период колебания равен $2\pi\,(a^2\varrho/(3p_0))^{1/2}$.

17. Некоторое количество жидкости, частицы которой взаимно притягиваются согласно закону гравитации, окружает твердую сферу радиуса a, причем радиус внешней свободной поверхности равен b. Твердая сфера внезапно уничтожается. Показать, что если радиус внутренней поверхности равен r, то квадрат скорости в каждой точке равен

$$\frac{kR\,[3\,(r^5-a^5)-5\,(r^3R^2-a^3b^2)+2\,(R^5-b^5)]}{r^3\,(R-r)},$$

где $R^3=r^3+b^3-a^3$ и k—константа.

18. Пусть некоторый объем жидкости, находящийся под действием гравитации, первоначально покоится, имея форму сферического слоя очень большого радиуса, и сжимается под действием собственного притяжения, причем ни на какую поверхность слоя не оказывается никакого давления. Доказать, что если внутренний радиус равен x, то справедливо уравнение

$$x^3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{4\pi\gamma\varrho}{15}\,y\,(y-x)\,(3x^3+6x^2y+4xy^2+2y^3),$$

где $y^3=x^3+c^3$, γ—постоянная притяжения, а ϱ—плотность; $4\pi c^3/3$—объем жидкости.

19. Сфера движется по прямой линии со скоростью U. Найти действующую силу путем непосредственного вычисления результирующего давления жидкости.

20. Сфера брошена и падает под действием силы тяжести со скоростью U под углом 45° к горизонту. Если плотность сферы равна удвоенной плотности жидкости, то доказать, что наибольшая высота над точкой бросания, достигаемая сферой, равна $5U^2/(8g)$.

21. Сфера радиуса a помещена в бесконечный поток жидкости, текущей с постоянной скоростью V. Показать, что линии тока задаются уравнением

$$(a^3-r^3)\sin^2\theta/r=\text{const}.$$

Если сферу разделить на две части диаметральной плоскостью, перпендикулярной направлению движения потока, то показать, что результирующая сила между двумя частями меньше, чем в случае, если бы жидкость покоилась, причем давление в бесконечности остается тем же и равным $\pi\varrho a^2V^2/16$.

22. Сфера радиуса a движется с постоянной скоростью V в безграничной жидкости, покоящейся в бесконечности. Если p_0—давление в бесконечности, то доказать, что давление p в любой точке P, находящейся на расстоянии r от центра сферы O, причем OP образует угол θ с направлением скорости сферы, дается формулой

$$p=p_0-\varrho\frac{V^2a^3}{2r^3}\left[\left(1+\frac{a^3}{4r^3}\right)-\frac{3x^2}{r^2}\left(1-\frac{a^3}{4r^3}\right)\right].$$

Далее, показать, что если V превышает величину $\sqrt{8p_0/5\varrho}$, то в жидкости образуется полое кольцо вокруг экватора сферы.

23. Сфера радиуса a движется в бесконечной жидкости с переменной скоростью V в направлении оси x. Показать, что давление на поверхности сферы оказывается наименьшим над малым кругом

$$x=-\frac{2a^2}{9V^2}\,\frac{dV}{dt},$$

причем центр сферы находится в начале координат.

24. Получить решение для безвихревого движения несжимаемой жидкости, в которой сфера радиуса a движется со скоростью U. Найти уравнение линий тока в этом

движении и доказать, что уравнение траектории частицы относительно центра движущейся сферы имеет вид

$$r^2 \sin^2\theta \left(1-\frac{a^3}{r^3}\right)=b^2,$$

где b — константа, зависящая от частицы.

Объяснить, почему это уравнение не тождественно с уравнением линии тока, и показать, что положение частицы на ее траектории выражается в зависимости от времени уравнением

$$Ut=-\int\left\{\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right)\left(1-\frac{a^3}{r^3}-\frac{b^2}{r^2}\right)\right\}^{-1/2}dr.$$

25. Сфера радиуса a движется с постоянной скоростью V в бесконечной жидкости. Найти потенциал скорости и показать, что уравнение траектории частицы получается посредством исключения r, θ из уравнений

$$x=r\cos\theta-\int\frac{r^3dr}{\sqrt{(r^3-a^3)(r^3-a^3-rc^2)}},$$

$$y=r\sin\theta,\quad r^3-a^3=rc^2\operatorname{cosec}^2\theta,$$

где c — произвольная постоянная.

26. Сфера радиуса a является неподвижной в жидкости, которая обтекает ее таким образом, что на большом расстоянии от сферы скорость постоянна. Окрашенную частицу жидкости поместили выше по потоку в точке, лежащей на оси системы, и наблюдают за движением этой частицы. Если, в то время как частица находится выше по течению, ее расстояние от центра изменяется за время T от z_1 до z_2, то показать, что максимальная скорость жидкости на сфере равна

$$\frac{3}{2T}\left[z_1-z_2-\frac{a}{6}\ln\frac{(z_1^3-a^3)(z_2-a)^3}{(z_2^3-a^3)(z_1-a)^3}-\frac{a}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{a(z_1-z_2)\sqrt{3}}{2(z_1z_2+a^2)+a(z_1+z_2)}\right].$$

27. Поток воды на большой глубине вдоль плоского горизонтального дна имеет постоянную скорость V. Полусфера весом w радиуса a расположена основанием на дне. Доказать, что средняя величина давления между основанием полусферы и дном меньше, чем давление жидкости в каждой точке дна на большом расстоянии от полусферы, если $V^2>32w/11\pi a^2\rho$.

28. Однородная полупогруженная сфера массы M плавает в горизонтальных направлениях в безграничной бесконечно глубокой жидкости под действием силы тяжести. Если сфера внезапно начинает двигаться со скоростью U, направленной вертикально вниз, то показать, что требуемый импульс равен $3MU/2$. Доказать, что направленная вверх скорость жидкости, находящейся в соприкосновении со сферой на свободной поверхности, равна $0{,}5\,U$.

29. Сфера радиуса a движется с постоянной скоростью U в бесконечной жидкости, покоящейся в бесконечности. Если p_0 — давление в бесконечности, то показать, что давление p в каждой точке поверхности сферы, радиус которой образует угол θ с направлением движения, выражается формулой

$$p=p_0+\frac{1}{2}\rho U^2\left(1-\frac{9}{4}\sin^2\theta\right).$$

Если сферу разделить на две полусферы плоскостью, наклоненной по углом α к направлению движения, то показать, что нормальная и тангенциальная компоненты сил, действующих между двумя полусферами и обусловленных давлением жидкости, равны соответственно

$$\pi a^2\left[p_0-\rho U^2\frac{(11-9\sin^2\alpha)}{32}\right]$$

и

$$\frac{9}{16}\pi\rho a^2U^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

30. Если два диполя с моментами μ, μ' имеют общую ось, то показать, что один из слоев потока представляет собой сферу.

31. Найти функцию тока для диполя в точке O, находящейся внутри неподвижной сферы радиуса a, центр которой находится на оси двойного источника на расстояний c от точки O. Рассчитать в этом случае давление в каждой точке сферы.

32. Диполь с единичным моментом и осью, параллельной оси x, помещен в точке $(0, 0, c)$ вне неподвижной сферы радиуса a с центром в начале координат и погруженной в неограниченную жидкость. Доказать, что вблизи сферы потенциал скоростей Φ, обусловленный диполем и его отображением, равен

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{c^{n+1}} \left(r^{n-1} + \frac{n-1}{n} \frac{a^{2n-1}}{r^n} \right) \sin\theta \frac{dP_{n-1}(\mu)}{d\mu} \cos\varphi,$$

где r, θ, φ—сферические координаты, $\mu = \cos\theta$, а $P_{n-1}(\mu)$—зональные поверхностные гармоники степени $(n-1)$. При доказательстве можно использовать соотношение

$$\frac{\mu dP_n(\mu)}{d\mu} - nP_n(\mu) = \frac{dP_{n-1}(\mu)}{d\mu}.$$

Показать, что компонента скорости жидкости вдоль оси x в точке $(0, 0, c)$, обусловленная сферой, движущейся с данной скоростью (при отсутствии диполя), равна

$$-\frac{1}{4\pi} \iint \Phi q_\nu dS,$$

где q_ν—нормальная скорость около элемента dS поверхности сферы; интеграл берется по поверхности сферы.

33. Если диполь S помещен вблизи неподвижной сферы радиуса a с центром O, находящимся на расстоянии c от S, то найти функцию тока и показать, что скорость в точке P на поверхности сферы равна

$$\{3m(c^2 - a^2)\sin\Theta\}/r^5,$$

где $r = SP$ и Θ—угол SOP.

Доказать, что давление на сфере имеет результирующую силу

$$24m^2\rho\pi a^3 c/(c^2 - a^2)^4,$$

направленную к диполю.

34. Определить отображение диполя отиосительно сферы, ось которого проходит через центр сферы.

Доказать, что если расстояиие диполя от центра велико по сравнеиию с радиусом, то результирующее давление на сферу приближенно пропорционально обратной величине седьмой степени расстояния.

35. Диполь с моментом μ помещен в центре неподвижной полой сферы радиуса a, которая наполнена несжимаемой невязкой жидкостью. Показать, как получить давление в любой точке, задавая давление p_0 в точке A сферы, которая лежит на оси диполя, и показать, что уравнение одной из поверхностей равного давления имеет вид

$$(r/a)^3 = \left(1 + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\theta\right)/(2 - \operatorname{tg}^2\theta).$$

36. Твердое тело ограннчено внешней частью двух равных сфер радиуса a, которые пересекаются ортогонально и окружены неограниченной жидкостью. Если твердое тело приведено в движение со скоростью u в направлении линии центров, то показать, что потенциал скоростей результирующего движения равен

$$\frac{1}{2} a^3 u \left(\frac{\cos\theta}{r^2} + \frac{\cos\theta'}{r'^2} - \frac{\cos\Theta}{2\sqrt{2R^2}} \right),$$

где r, r', R—радиусы-векторы, отсчитываемые соответственно от центров двух сфер и точки, расположенной посредине между ними; θ, θ', Θ—углы, которые образуют эти радиусы-векторы с иаправлением движения твердого тела.

37. Найти потенциал скоростей, обусловленный простым источником, находящимся вне неподвижной сферы в неограниченной невязкой жидкости.

Доказать, что сфера притягивается по направлению к источнику; доказать также, что если радиус мал по сравнению с расстоянием до источника, то притяжение в первом приближении, обратно пропорционально пятой степени расстояния.

38. Доказать, что потенциал скоростей, обусловленный отображением источиика мощности m относительно сферы радиуса a, равен потенциалу, обусловленному распределением диполей по поверхности сферы, причем оси перпендикулярны к поверхности, и момент, приходящийся на единицу площади, равен

$$m \left(\frac{2a}{cR} - \frac{1}{a} \ln \frac{a + R + a^2/c}{a + R - a^2/c} \right),$$

где c—расстояиие источника от центра и R—расстояние от точки инверсии.

39. Источник мощности m расположен в жидкости, ограниченной изнутри неподвижной сферой радиуса a, на расстоянии c от центра сферы. Доказать, что потенциал скоростей в точке на поверхности равен

$$\frac{2m}{r}-\frac{m}{a}\ln\frac{r+c+a}{r+c-a},$$

где r — расстояние точки от источника.

Найти величину скорости в каждой точке на поверхности.

40. Определить функцию тока Стокса для движения несжимаемой жидкости, симметричной относительно оси; показать, что возможными функциями Стокса являются следующие функции: $r-r'$ и $\cos\theta$; где $r=OP$, $r'=O'P$, $\theta=\angle POO'$, причем OO' — две любые неподвижные точки на оси симметрии. Интерпретировать эти функции.

Доказать, что функция тока

$$\psi=\mu\left\{\cos\theta+\frac{a}{c}\cos\theta'+\frac{r'-R}{a}\right\}$$

дает движение, обусловленное простым источником S мощности μ, помещенным на расстояние c от центра неподвижной сферы радиуса a, причем R отсчитывается от центра сферы, (r, θ) отсчитываются от S и (r', θ') — от инверсии точки S относительно сферы.

41. Источник и сток равных мощностей помещены в точках $(0, 0, \pm c)$ внутри сферы радиуса a с центром в точке $(0, 0, 0)$. Найти выражение для потенциала скоростей в точках внутри сферы.

42. Найти отображение источника относительно сферы; O — центр, P, Q — точки вне сферы на одном и том же радиусе, причем точка Q расположена ближе к сфере, и P', Q' — точки инверсии для P, Q. Доказать что источник мощности μ в точке Q и источник мощности $\mu a/OQ$ в точке Q' создают такой же радиальный поток в каждой части поверхности сферы как и линейный источник, равномерно распределенный вдоль отрезка QP полной мощности μ, вместе с линейным источником, равномерно распределенным вдоль отрезка $P'Q'$ мощности $\mu a/OQ$.

43. Твердая сфера радиуса a колеблется в бесконечной жидкости по простому гармоническому закону $c\cos pt$, где c — малая величина. Определить направление и величину результирующего колебания в любой точке жидкости.

44. Центр сферы радиуса a, находящейся в неограниченной жидкости, совершает малые линейные колебания, причем перемещение за время t равно $c\sin nt$. Доказать, что средняя кинетическая энергия, приходящаяся на единицу объема жидкости в точке (r, θ), равна

$$\frac{\varrho c^2n^2a^6}{32r^6}(5+3\cos 2\theta).$$

Причем полюс находится в центре сферы, полярная ось совпадает с линией движения сферы.

Рассчитать периодическую силу, необходимую для поддержания движения.

45. Сфера переменного радиуса a движется в бесконечной жидкости с переменной скоростью v в указанном направлении. Найти давление в любой точке поверхности сферы и показать, что результирующее давление жидкости на сферу равно

$$\frac{2}{3}\pi\varrho a^2(av+3va).$$

46. Жидкость, простирающаяся до бесконечности, окружает сферическую границу, радиус которой в момент времени t равен $(a+b\sin nt)$, причем центр ее неподвижен. Если внешние силы отсутствуют, то показать, что давление на границу равно

$$p_0+\frac{1}{4}\varrho bn^2(5b\cos 2nt-4a\sin nt+b),$$

где p_0 — давление в бесконечности.

47. Сфера радиуса a, окруженная бесконечной жидкостью, покоящейся на очень большом расстоянии от сферы, находится под давлением p_0. Если сфера вибрирует радиально, так что радиус в любой момент времени равен $(a+b\cos nt)$ и массовые силы отсутствуют, то найти давление на поверхность сферы в любой момент времени и показать, что его наименьшее значение равно

$$p_0-n^2\varrho b(a+b).$$

48. Показать, что движение, возникающее от импульсивного давления, приложенного к границе жидкости, безвихревое.

Сферический пузырь пара в большой массе воды плотности ϱ при отсутствии массовых сил внезапно практически теряет все свое внутреннее давление при конденсации

пара. Если в этот момент радиус пузыря равен a, то показать, что пузырь лопается в момент времени

$$a\sqrt{\frac{\rho}{6p_0}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)},$$

где p_0 — давление на большом расстоянии.

49. Бесконечная масса жидкости наполняет область вне неподвижной сферы радиуса a и притягивается к центру сферы с силой μ/r^2, приходящейся на единицу массы. Если давление в бесконечности равно $\widetilde{\omega}$ и сфера внезапно исчезает, то показать, что мгновенное изменение давления на расстоянии r равно $(\widetilde{\omega}a+\mu\rho)/r$.

Найти скорость внутренней границы жидкости в каждый последующий момент времени. В частном случае, когда давление в бесконечности равно нулю, найти время, необходимое для того, чтобы полость целиком заполнилась жидкостью.

50. Бесконечная покоящаяся жидкость постоянной плотности ρ, находящаяся под постоянным давлением P, содержит сферический пузырь радиуса a_0, наполненный паром, который несет электрический заряд e, равномерно распределенный по поверхности. Предположим, что этот заряд всегда остается одним и тем же и производит направленное наружу давление на единицу площади поверхности, равное $e^2/8\pi a^4$, где a — радиус пузыря. Предположим также, что пар внезапно конденсируется, причем внутреннее давление падает до нуля. Найти давление на расстоянии r от центра пузыря, если его радиус равен a, и доказать, что тогда

$$a^4a^2=\frac{2P}{3\rho}(a_0^3-a^3)\,a-\frac{e^2}{4\pi\rho a_0}(a_0-a).$$

Получить из этого равенства, что если $3e^2/8\pi a_0P=a_1^3+a_1^2a_0+a_1a_0^2$, то радиус пузыря будет колебаться между пределами a_0 и a_1, и найти формулу для периода.

51. Получить дифференциальное уравнение поверхности, которая во все время движения состоит из одних и тех же частиц жидкости.

В момент времени $t=0$ сферический пузырь газа радиуса a покоится внутри окружающей его большой массы тяжелой жидкости плотности ρ, которая также покоится. Давление газа равно p_0, а давление жидкости в горизонтальной плоскости, проходящей через центр пузыря, равно p. Доказать, что в начальном движении радиус пузыря начинает расти с ускорением $(p_0-p)/(\rho a)$, причем центр пузыря начинает двигаться вверх с ускорением $2g$, и пузырь приближенно остается сферическим, если при этом пренебрегать инерцией газа и поверхностным натяжением.

52. Уравнение меридионального сечения поверхности вращения имеет вид $r=a\sec\frac{1}{2}\theta$, где $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. Поверхность помещена в равномерный поток, движущийся со скоростью U. Показать, что функция тока имеет вид

$$U\left\{\frac{1}{2}r^2\sin^2\theta-a^2(1-\cos\theta)\right\},$$

и найти потенциал скоростей.

53. Легкий тонкий круглый диск радиуса c покоится на поверхности неподвижной жидкости плотности ρ, бесконечной протяженности и глубины. К центру диска приложен вертикальный, направленный вниз импульс I. Показать, что скорость, сообщенная диску, равна $3I/(4\rho c^3)$.

54. Сфероидальные координаты ζ, μ, ω получаются из цилиндрических координат $\widetilde{\omega}$, x, ω посредством преобразований

$$\widetilde{\omega}+ix=k\sin(\theta+i\eta),$$
$$\zeta=\operatorname{sh}h\eta,\qquad \mu=\cos\theta.$$

Получить в этих координатах уравнение Лапласа вида

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right\}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}=-\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{(\zeta^2+1)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right\}+\frac{1}{\zeta^2+1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}.$$

Найти в этих координатах граничные условия, если сплющенный сфероид движется вдоль своей оси со скоростью U в неограниченной покоящейся жидкости.

55. Воздушный корабль в форме вытянутого сфероида с полярной полуосью a и экваториальной полуосью b движется со скоростью U параллельно своей оси вращения в воздухе, который можно рассматривать как несжимаемую жидкость. Найти выражение для потенциала скоростей в каждой точке жидкости, а также для давления в каж-

дой точке оболочки воздушного корабля при условии, что давление в бесконечности равно π_0.

56. Доказать, что если сфероидальный диск, в котором $a=b=100c$, движется по воде со скоростью 0,3 *м/сек* в направлении своей наименьшей оси, то скорость у края равна приближенно 19,2 *м/сек*.

57. Получить формулу

$$-\frac{1}{2}\rho\int\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS$$

для кинетической энергии жидкости, находящейся в области, ограниченной изнутри движущейся поверхностью S и покоящейся в бесконечности; причем нормаль n проведена внутрь жидкости.

Доказать, что если S—вытянутый сфероид с эксцентриситетом, равным $\operatorname{th}\alpha$, движущийся параллельно своей оси симметрии со скоростью V, то кинетическая энергия жидкости равна

$$\frac{1}{2}M'V^2\frac{\alpha-\operatorname{th}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha-\alpha},$$

где M'—масса вытесненной жидкости.

58. Показать, что в сферических координатах (μ, ζ, ω), определяемых уравнениями

$$x=a\mu\zeta,\qquad y=\widetilde{\omega}\cos\omega,\qquad z=\widetilde{\omega}\sin\omega,$$
$$\widetilde{\omega}=a(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2+1)^{1/2},$$

уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right\}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}=-\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{(\zeta^2+1)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right\}+\frac{1}{1+\zeta^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}.$$

Если тонкий круглый диск радиуса a движется со скоростью U параллельно своей оси в бесконечной массе жидкости, то доказать, что потенциал скоростей равен

$$\varphi=(2aU/\pi)\,\mu\,(1-\zeta\operatorname{arcctg}\zeta),$$

и показать, что кинетическая энергия жидкости равна $\frac{4}{3}\rho a^3U^2$.

59. Полость между двумя параболоидами $x^2+y^2=az$, $x^2+y^2=b(z-c)$ (где a, b, c—положительны и $b>a$) заполнена покоящейся жидкостью. Внезапно граничные поверхности начинают двигаться соответственно со скоростями U, V в направлении оси z. Доказать, что образующиеся при движении поверхности, на которых функция тока постоянна, являются параболоидами с фокальным параметром $ab(U-V)/(aU-bV)$.

60. Если $\widetilde{\omega}+ix=f(\xi+i\eta)$, то показать, что уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)=0$$

имеет решение типа $\psi=\widetilde{\omega}^{1/2}UV$, где U, V—соответственно функции координат (ξ, η) при условии, что

$$\left(\frac{\partial\widetilde{\omega}}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\widetilde{\omega}}{\partial\eta}\right)^2=\omega^2[f_1(\xi)+f_2(\eta)].$$

Если $(\xi+i\eta)(\widetilde{\omega}+iz)=a$, то показать, что имеется решение вида

$$\psi=\xi(\xi^2+\eta^2)^{-1/2}e^{\pm n\eta}J_1(n\eta).$$

Глава 16

СФЕРЫ И ЭЛЛИПСОИДЫ

16.00. Исследование безвихревого движения жидкости в пространстве в случае, когда симметрия относительно оси не имеет больше места, сводится к определению потенциала скорости, удовлетворяющего заданным краевым условиям.

Уравнение неразрывности при этом должно удовлетворяться независимо от краевых условий, иначе говоря, потенциал скорости должен удовлетворять уравнению Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$. Функции, являющиеся решениями этого уравнения, называют *гармоническими функциями*; для этих функций имеется обширная литература, которую здесь невозможно даже перечислить. Мы рассмотрим здесь некоторые специальные типы решения уравнения Лапласа, которые будут непосредственно применимы к исследованию движения двух сфер и эллипсоида.

16.10. Сферические гармонические функции. Уравнение Лапласа в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Любое однородное решение этого уравнения представляет собой функцию, которая называется *сферической гармонической функцией*. Очевидными

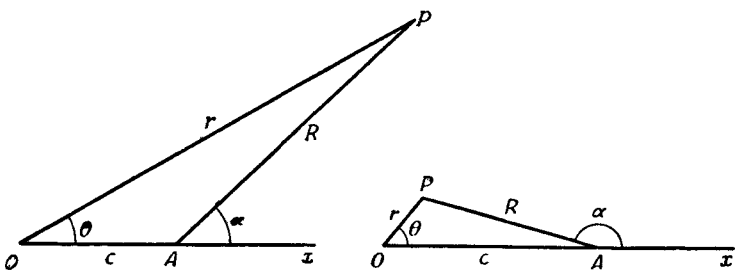


Рис. 309.

примерами таких решений являются функции 1, x, y, z, yz, $x^2 - y^2$. Если φ есть некоторая гармоническая функция, такая, что $\varphi = \varphi_m + \varphi_n$, где φ_m и φ_n — однородные функции от x, y, z разных степеней m и n соответственно, то очевидно, что φ_m и φ_n также являются сферическими гармоническими функциями, поскольку в результате применения к этим функциям оператора ∇^2 получаются также однородные функции разных степеней, и, следовательно, они не могут взаимно уничтожиться при сложении.

Уравнение Лапласа в полярных координатах r, θ, ω, согласно п. 2.72, принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} = 0. \tag{2}$$

Потенциал скорости простого источника $\varphi = m/r$ представляет собой сферическую гармоническую функцию, как в этом можно непосредственно убедиться подстановкой в уравнение (2). Если источник расположен в некоторой точке A на оси x на расстоянии c от начала координат (рис. 309), то мы имеем $\varphi = m/R$, где $R = AP$. Эта функция, являясь потенциалом скорости, должна удовлетворять уравнению Лапласа, как это было установлено в п. 15.20 при рассмотрении уравнения неразрывности. Теперь имеем

$$R^2 = r^2 + c^2 - 2cr\cos\theta = r^2\left(1 - \frac{2c}{r}\cos\theta + \frac{c^2}{r^2}\right) = c^2\left(1 - \frac{2r}{c}\cos\theta + \frac{r^2}{c^2}\right).$$

Если $\lambda < 1$, то имеет место следующее разложение:

$$(1 - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \lambda P_1(\cos\theta) + \lambda^2 P_2(\cos\theta) + \ldots,$$

где коэффициенты $P_1(\cos\theta)$, $P_2(\cos\theta)$, ... не зависят от λ.

Положим $\lambda = r/c$, тогда если $r < c$, то

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{c} + \frac{r}{c^2}P_1(\cos\theta) + \frac{r^2}{c^3}P_2(\cos\theta) + \ldots,$$

а если $r > c$, то

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{c}{r^2}P_1(\cos\theta) + \frac{c^2}{r^3}P_2(\cos\theta) + \ldots.$$

Поскольку в этих разложениях члены, содержащие r, r^2, ..., r^{-1}, r^{-2}, ..., однородны, но имеют разные степени, то, как было отмечено выше, каждый из этих членов представляет собой сферическую гармоническую функцию. Таким образом, мы имеем две последовательности сферических гармонических функций (постоянная c при этом опущена):

$$1, \quad rP_1(\cos\theta), \quad r^2P_2(\cos\theta), \quad \ldots,$$

$$\frac{1}{r}, \quad \frac{P_1(\cos\theta)}{r^2}, \quad \frac{P_2(\cos\theta)}{r^3}, \quad \ldots,$$

каждая из которых тождественно удовлетворяет уравнению Лапласа. С помощью разложения для бинома легко доказать, что

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta, \qquad P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

и т. д. Функции $P_n(\cos\theta)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ называются *функциями Лежандра*, или *зональными гармоническими функциями* (первого рода). Эти функции встречаются в задачах со сферическими границами. Таким образом, для течения около сферы имеем

$$\varphi = U\left(r\cos\theta + \frac{a^3}{2r^2}\cos\theta\right) = UrP_1(\cos\theta) + \frac{1}{2}Ua^3\frac{P_1(\cos\theta)}{r^2}.$$

В это соотношение входят две сферические гармонические функции, которые выражаются через зональную гармоническую функцию $P_1(\cos\theta)$.

В случае диполя мощности μ, находящегося в точке A, согласно п. 15.26 имеем

$$\varphi = \frac{\mu\cos\alpha}{R^2} = \frac{\mu(r\cos\theta - c)}{(r^2 + c^2 - 2cr\cos\theta)^{3/2}} = \mu\frac{\partial}{\partial c}\frac{1}{(r^2 + c^2 - 2cr\cos\theta)^{1/2}}.$$

Тогда, если $r < c$, то

$$\frac{\cos\alpha}{R^2} = -\left(\frac{1}{c^2} + \frac{2rP_1(\cos\theta)}{c^3} + \frac{3r^2P_2(\cos\theta)}{c^4} + \ldots\right),$$

если же $r > c$, то

$$\frac{\cos\alpha}{R^2} = \frac{1}{r^2}P_1(\cos\theta) + \frac{2c}{r^3}P_2(\cos\theta) + \frac{3c^2}{r^4}P_3(\cos\theta) + \ldots.$$

Эти соотношения дают потенциал скорости диполя в зависимости от зональных гармонических функций.

Можно сделать следующие дополнительные замечания. Если φ — сферическая гармоническая функция, то все ее частные производные любого порядка по x, y, z также являются гармоническими функциями. Например, $\partial\varphi/\partial x$ является сферической гармонической функцией, как в этом легко убедиться с помощью подстановки в уравнение (1). Так как $1/r$ представляет собой сферическую гармоническую функцию, то по указанному свойству мы получим также следующие гармонические функции:

$$\frac{x}{r^3}, \quad \frac{y}{r^3}, \quad \frac{z}{r^3}.$$

16.12. Теорема Кельвина об инверсии гармонической функции. *Если* $\varphi = \varphi(r, \theta, \omega)$ *— гармоническая функция, то функция* $\varphi^* = a^2/r[\varphi(a^2/r, \theta, \omega)]$ *также является гармонической, причем* a *— любая постоянная.*

Доказательство. Положим $R = a^2/r$, тогда $\varphi^* = R\varphi(R, \theta, \omega)$. По предположению $\varphi(r, \theta, \omega)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (2) из п. 16.10, и, следовательно, $\varphi(R, \theta, \omega)$ удовлетворяет аналогичному уравнению, в котором вместо r берется R, а именно уравнению

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial\varphi(R, \theta, \omega)}{\partial R}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\varphi(R, \theta, \omega)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi(R, \theta, \omega)}{\partial\omega^2} = 0. \quad (1)$$

Далее,

$$r^2 \frac{\partial\varphi^*}{\partial r} = \left(-\frac{a^2}{r^2}\varphi(R, \theta, \omega) - \frac{a^4}{r^3}\frac{\partial\varphi(R, \theta, \omega)}{\partial R}\right) r^2,$$

и, значит,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\varphi^*}{\partial r}\right) = \frac{2a^4}{r^2}\frac{\partial\varphi(R, \theta, \omega)}{\partial R} + \frac{a^6}{r^3}\frac{\partial^2\varphi(R, \theta, \omega)}{\partial R^2} = R\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial\varphi(R, \theta, \omega)}{\partial R}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\varphi^*}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\varphi^*}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial\omega^2} =$$

$$= R\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial\varphi(R, \theta, \omega)}{\partial R}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\varphi(R, \theta, \omega)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi(R, \theta, \omega)}{\partial\omega^2}\right] = 0,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что точки (r, θ, ω) и $(a^2/r, \theta, \omega)$ представляют собой точки, связанные преобразованием инверсии относительно сферы $r = a$, причем, если одна из них находится внутри сферы, то другая находится вне ее.

16.13. Теорема Вейса для сферы. Для теоремы о круге, доказанной в п. 6.21, имеется аналогичная теорема не только для осесимметричного движения, но и для общего трехмерного движения [1]).

Теорема Вейса для сферы. *Пусть в безграничном пространстве имеется безвихревое течение несжимаемой идеальной жидкости с потенциалом скорости* $\varphi(r, \theta, \omega)$, *причем все особые точки этой функции расположены от начала координат на расстоянии, большем чем величина* a. *Если в область этого течения поместить сферу* $r = a$, *то потенциал скорости можно выразить в виде*

$$\Phi(r, \theta, \omega) = \varphi(r, \theta, \omega) + \frac{1}{a}\int_0^{a^2/r} R\frac{\partial\varphi(R, \theta, \omega)}{\partial R}\, dR. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть сфера помещена в область течения и пусть теперь потенциал скорости представляется в виде суммы $\varphi(r, \theta, \omega) + \chi(r, \theta, \omega)$, где $\chi(r, \theta, \omega)$ — потенциал возмущения, обусловленного

[1]) Weiss P., *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **40** (1945).

сферой. При этом должны быть выполнены следующие условия: должно удовлетворяться уравнение Лапласа, должны отсутствовать возмущения на бесконечности и должна обращаться в нуль нормальная составляющая скорости на сфере. Более точно эти условия выражаются следующим образом:

(I) $\nabla^2\chi = 0$, функция χ не должна иметь особенностей вне сферы $r = a$.

(II) $\chi(r, \theta, \omega) = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ для больших r.

(III) $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=a} = 0$.

Если взять функцию χ в виде $\chi = \frac{a^2}{r}\varphi(R, \theta, \omega)$, где $R = a^2/r$, то, согласно п. 16.12, следует, что $\nabla^2\chi = 0$; кроме того, поскольку все особенности функции φ находятся вне рассматриваемой сферы, то все особенности функции χ находятся внутри этой сферы, так как преобразование инверсии отображает внешность сферы на ее внутренность. Итак, условие (I) удовлетворено.

Далее, по предположению, функция φ является регулярной в окрестности начала координат, поэтому она разлагается в ряд вида

$$\varphi(r, \theta, \omega) = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \ldots,$$

где A_0, A_1, A_2 не зависят от r. Подставляя этот ряд в выражение для χ, легко найдем, что старший член равен

$$\frac{1}{2} A_1 \frac{a^3}{r^3},$$

а это показывает, что условие (II) удовлетворено.

Чтобы проверить условие (III), вычислим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{\partial\varphi(r, \theta, \omega)}{\partial r} + \frac{1}{a}\left(-\frac{a^2}{r^2}\right)\left(R\,\frac{\partial\varphi(R, \theta, \omega)}{\partial R}\right)_{R=a^2/r}.$$

Эта величина обращается в нуль при $r = a$, поскольку при этом $R = a$; значит, условие (III) также удовлетворено. Итак, теорема доказана.

Заметим, что применение этой теоремы не ограничивается случаем осесимметричного движения.

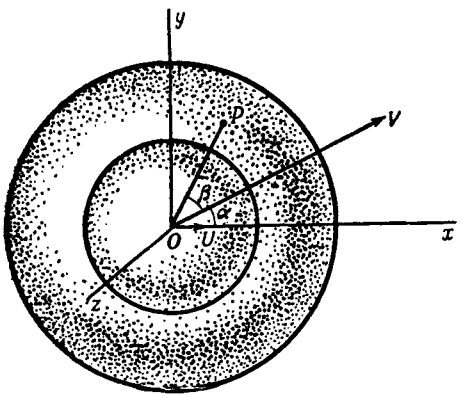


Рис. 310.

16.20. Концентрические сферы. Пусть область между твердой сферой радиуса a и концентрической сферической оболочкой внутреннего радиуса b заполнена жидкостью (рис. 310).

К сфере и оболочке приложены некоторые импульсы, приводящие в движение сферу со скоростью U, а оболочку — со скоростью V, направление которой составляет угол α с направлением скорости U. Чтобы рассмотреть движение в *начальный* момент времени (сферы будут расположены концентрически лишь в начальный момент времени), примем направление U за направление оси x, а начало координат поместим в общем центре этих двух сфер. Тогда граничные условия запишутся в следующем виде:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r} = U\cos\theta \quad \text{при} \quad r = a, \tag{1}$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r} = V\cos\beta \quad \text{при} \quad r = b, \tag{2}$$

где β — угол между направлением V и OP, причем P представляет собой точку на оболочке.

Декартовы координаты точки P равны $b\cos\theta$, $b\sin\theta\cos\omega$, $b\sin\theta\sin\omega$, следовательно, единичный вектор направления OP равен

$$\mathbf{i}\cos\theta+\mathbf{j}\sin\theta\cos\omega+\mathbf{k}\sin\theta\sin\omega.$$

Если принять, что направление V лежит в плоскости x, y, то единичный вектор направления V равен

$$\mathbf{i}\cos\alpha+\mathbf{j}\sin\alpha,$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы осей x, y, z соответственно.

Скалярное произведение этих векторов, согласно п. 2.11, выражается в виде

$$\cos\beta=\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta\cos\omega=\frac{x}{r}\cos\alpha+\frac{y}{r}\sin\alpha.$$

Таким образом, граничное условие (1) показывает, что в функцию φ будут входить гармонические функции x, x/r^3, а условие (2) показывает, что, кроме того, будут входить и гармонические функции y, y/r^3.

Поэтому будем предполагать, что

$$\varphi=Ax+\frac{Bx}{r^3}+Cy+\frac{Dy}{r^3},$$

или, возвращаясь к полярным координатам, получим

$$\varphi=\left(Ar+\frac{B}{r^2}\right)\cos\theta+\left(Cr+\frac{D}{r^2}\right)\sin\theta\cos\omega.$$

Отсюда имеем

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\left(-A+\frac{2B}{r^3}\right)\cos\theta+\left(-C+\frac{2D}{r^3}\right)\sin\theta\cos\omega.$$

Тогда из условий (1) и (2) получим уравнения

$$\left(-A+\frac{2B}{a^3}\right)\cos\theta+\left(-C+\frac{2D}{a^3}\right)\sin\theta\cos\omega=U\cos\theta,$$

$$\left(-A+\frac{2B}{b^3}\right)\cos\theta+\left(-C+\frac{2D}{b^3}\right)\sin\theta\cos\omega=V(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta\cos\omega).$$

Эти уравнения должны удовлетворяться при всех значениях θ и ω, и поэтому можно получить следующие уравнения[1]):

$$-A+\frac{2B}{a^3}=U,\qquad -C+\frac{2D}{a^3}=0,$$

$$-A+\frac{2B}{b^3}=V\cos\alpha,\qquad -C+\frac{2D}{b^3}=V\sin\alpha.$$

Обозначая для краткости $c^3=b^3-a^3$, находим

$$B=\frac{a^3b^3}{2c^3}(U-V\cos\alpha),\qquad A=\frac{a^3U-b^3V\cos\alpha}{c^3},$$

$$D=-\frac{a^3b^3}{2c^3}V\sin\alpha,\qquad C=-\frac{b^3V\sin\alpha}{c^3},$$

таким образом,

$$\varphi=\frac{\cos\theta}{c^3}\left[(a^3U-b^3V\cos\alpha)r+\frac{a^3b^3}{2r^2}(U-V\cos\alpha)\right]-\frac{b^3V\sin\alpha}{c^3}\left[r+\frac{a^3}{2r^2}\right]\sin\theta\cos\omega.$$

---

[1]) Эти уравнения могут быть получены, если последовательно положить θ равным 0 и $\pi/2$.

Следует подчеркнуть, что этот потенциал скоростей описывает рассматриваемое движение только в начальный момент времени, когда границы расположены концентрически.

16.21. Концентрические сферы, движущиеся в одном направлении. Если скорости U и V имеют одинаковое направление, то в формулах п. 16.20 надо положить $\alpha = 0$, тогда получим

$$\varphi = \frac{\cos\theta}{c^3}\left[(a^3U - b^3V)\,r + \frac{a^3b^3\,(U-V)}{2r^2}\right].$$

В этом случае, когда движение начинается из состояния покоя, величины импульсивных давлений на границах, а именно величины $\varrho\varphi$ (см. п. 3.64), имеют следующий вид:
на внутренней границе

$$\widetilde{\omega}_1 = \frac{a\cos\theta}{c^3}\left[\left(a^3 + \frac{b^3}{2}\right)U - \frac{3b^3}{2}V\right]\varrho,$$

на внешней границе

$$\widetilde{\omega}_2 = \frac{b\cos\theta}{c^3}\left[\frac{3a^3}{2}U - \left(\frac{a^3}{2} + b^3\right)V\right]\varrho.$$

Импульсивная сила на внутренней границе равна

$$I_1 = \int_0^{\pi} \widetilde{\omega}_1\, 2\pi a^2 \cos\theta \sin\theta\, d\theta = \frac{4}{3}\pi a^3\varrho\left[\left(a^3 + \frac{b^3}{2}\right)U - \frac{3b^3}{2}V\right]/c^3.$$

Аналогично импульсивная сила на внешней границе равна

$$I_2 = \frac{4}{3}\pi b^3\varrho\left[\frac{3a^3}{2}U - \left(\frac{a^3}{2} + b^3\right)V\right]/c^3.$$

Направления этих сил показаны на рис. 311.

Если изменить направление импульсивных сил I_1 и I_2, то получим импульсивные силы, действующие *на* жидкость *со стороны* границ, а их сумма равна изменению количества движения жидкости; таким образом, по направлению Ox справедливо равенство

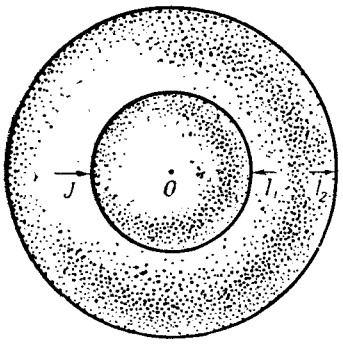


Рис. 311

$$I_1 - I_2 = \frac{4}{3}\pi\varrho\,(b^3V - a^3U) = M_2'V - M_1'U,$$

где M_1' и M_2' соответственно представляют собой массы жидкости, которые могли бы вмещать внутренняя и внешняя границы. Этот результат справедлив не только для сферы, но и для любых двух поверхностей, движущихся произвольным образом. Итак, количество движения жидкости не зависит от плотности внутреннего тела. Следовательно, если представить себе, что внутреннее тело имеет такую же плотность, как и жидкость, то тогда центр массы O этого тела и жидкости будет фиксированным относительно оболочки и будет двигаться со скоростью оболочки $\mathbf{V}$. Поэтому общее количество движения жидкости и внутреннего тела будет равно $M_2'\mathbf{V}$. Таким образом, количество движения одной только жидкости равно $M_2'\mathbf{V} - M_1'\mathbf{U}$.

Для определения импульса J, требуемого для приведения в движение внутренней сферы, необходимо применить закон количества движения

$$J - I_1 = M_1U,$$

где M_1 — масса сферы.

16.22. Неподвижная внешняя сфера. Если внешняя оболочка находится в покое, т. е. $V=0$, то тогда

$$J=\left(M_1+M_1'\frac{2a^3+b^3}{2b^3-2a^3}\right)U.$$

Поэтому, если внешняя граница неподвижна, то присоединенная масса сферы равна

$$M_1'\frac{2a^3+b^3}{2b^3-2a^3}.$$

Эта величина стремится к $^1/_2M_1'$ при $b\to\infty$ (см. п. 15.32).

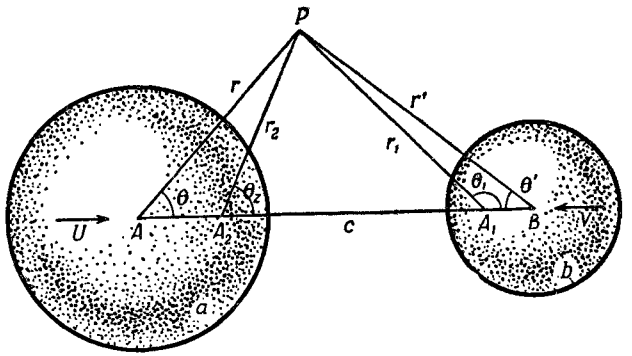
Кинетическая энергия жидкости может быть найдена интегрированием или выражена непосредственно через присоединенную массу в следующем виде:

$$T=\frac{1}{2}M_1'\frac{2a^3+b^3}{2b^3-2a^3}U^2.$$

Если внешняя оболочка покоится, а внутренняя сфера приводится из состояния покоя в ускоренное движение силой F, создающей ускорение f, то импульс сил за время δt равен $J=F\delta t$, а скорость равна $U=f\delta t$, и, следовательно,

$$F=\left(M_1+M_1'\frac{2a^3+b^3}{2b^3-2a^3}\right)f.$$

16.30. Две сферы, движущиеся вдоль линии центров. Рассмотрим две сферы с центрами в точках A, B и радиусами a, b соответственно; пусть эти сферы движутся одна навстречу другой с соответствующими скоростями U, V (рис. 312).



Р и с. 312.

Положение некоторой точки P в меридиональной плоскости будем определять полярными координатами (r, θ) с полюсом в точке A или полярными координатами (r', θ') с полюсом в точке B. Потенциал скорости φ должен удовлетворять краевым условиям

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a}=U\cos\theta,\qquad -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r'}\right)_{r'=b}=V\cos\theta',$$

следовательно, можно записать

$$\varphi=U\varphi+V\varphi_2, \tag{1}$$

где каждая из функций φ_1 и φ_2 удовлетворяет уравнению Лапласа и краевым условиям

$$-\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)_{r=a}=\cos\theta, \qquad -\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right)_{r=a}=0, \tag{2}$$

$$-\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r'}\right)_{r'=b}=0, \qquad -\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial r'}\right)_{r'=b}=\cos\theta'. \tag{3}$$

Таким образом, функция φ_1 есть потенциал скорости для того случая, когда сфера с центром A движется со скоростью, равной единице, по направлению к сфере с центром B, а последняя сфера покоится.

Если бы сфера с центром B отсутствовала, то функция φ_1 представляла бы собой потенциал скорости, обусловленный диполем, находящимся в точке A, ориентированным по направлению AB и имеющим мощность $\mu_0=\frac{1}{2}a^3$. Однако наличие сферы с центром B нарушает первое из граничных условий (3).

Чтобы удовлетворить этому условию, введем отображение диполя μ_0 относительно сферы с центром B, которое представляет собой диполь мощности μ_1, ориентированный вдоль направления BA и находящийся в точке A_1, связанной с точкой A преобразованием инверсии относительно сферы с центром B. Этот отображенный диполь потребует введения другого отображенного диполя μ_2 в точке A_2, связанной с точкой A_1 преобразованием инверсии относительно сферы с центром A и т. д. Таким образом, мы имеем бесконечный ряд отображенных диполей мощности $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$, находящихся в точках $A_1, A_2, A_3, \ldots$, причем нечетные индексы относятся к точкам внутри сферы с центром B, а четные индексы — к точкам внутри сферы с центром A. Положим $f_n=AA_n$. Тогда если обозначить $AB=c$, то получим равенства

$$f_1=c-\frac{b^2}{c}, \quad f_2=\frac{a^2}{f_1}, \quad f_3=c-\frac{b^2}{c-f_2}, \ldots, \tag{4}$$

$$\mu_1=\mu_0\left(-\frac{b^3}{c^3}\right), \quad \mu_2=\mu_1\left(-\frac{a^3}{f_1^3}\right), \quad \mu_3=\mu_2\left(-\frac{b^3}{(c-f_2)^3}\right), \ldots. \tag{5}$$

Уравнения для функций f_n сводятся к конечно-разностному уравнению Риккати[1]), которое в этом случае может быть решено до конца, и тогда можно найти величины μ_n.

Пользуясь обозначениями, указанными на рис. 312, в результате получаем

$$\varphi_1=\frac{\mu_0\cos\theta}{r^2}+\frac{\mu_1\cos\theta_1}{r_1^2}+\frac{\mu_2\cos\theta_2}{r_2^2}+\ldots.$$

Это выражение представляет собой точное решение рассматриваемой задачи, но оно имеет неудобную форму.

Для того чтобы получить приближенное решение с точностью до членов c^{-3}, заметим, что при отсутствии сферы с центром B потенциал φ_1 равен

$$\frac{1}{2}\frac{a^3\cos\theta}{r^2}.$$

Применяя разложение в ряд из п. 16.10 и помещая начало координат в точку B, получим, что вблизи сферы с центром B справедливо равенство

$$\frac{1}{2}\frac{a^3\cos\theta}{r^2}=\frac{1}{2}\frac{a^3}{c^2}+\frac{a^3r'P_1(\cos\theta')}{c^3}+\ldots.$$

---

[1]) Milne-Thomson L. M., Calculus of finite differences, § 11.8.

Отсюда нормальная скорость на поверхности сферы с центром B равна

$$-\frac{a^3\cos\theta'}{c^3}-\ldots.$$

Эту нормальную скорость можно уничтожить, добавляя некоторый член к выражению для функции φ_1 в первом приближении; в результате получим второе приближение для функции φ_1,

$$\varphi_1=\frac{1}{2}\frac{a^3\cos\theta}{r^2}+\frac{1}{2}\frac{a^3b^3}{c^3}\frac{\cos\theta'}{r'^2}, \tag{6}$$

а нормальная скорость на сфере с центром B обращается теперь в нуль с точностью по крайней мере до членов порядка c^{-3}. Аналогично с той же точностью получим

$$\varphi_2=\frac{1}{2}\frac{b^3\cos\theta'}{r'^2}+\frac{1}{2}\frac{a^3b^3}{c^3}\frac{\cos\theta}{r^2}. \tag{7}$$

Вблизи сферы с центром A упомянутое выше разложение в ряд имеет вид

$$\frac{\cos\theta'}{r'^2}=\frac{1}{c^2}+\frac{2r\cos\theta}{c^3}+\ldots,$$

и, следовательно, при $r=a$

$$\varphi_1=\frac{1}{2}a\cos\theta,\qquad \varphi_2=\frac{1}{2}\frac{b^3}{c^2}+\frac{3}{2}\frac{ab^3}{c^3}\cos\theta. \tag{8}$$

Для определения кинетической энергии имеем

$$T=-\frac{1}{2}\varrho\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS_A-\frac{1}{2}\varrho\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS_B,$$

причем указанные интегралы берутся по сферам A и B соответственно. Тогда, используя формулы (2) и (3), получаем

$$T=\frac{1}{2}\varrho\left[P_1U^2+(Q_1+Q_2)UV+P_2V^2\right],$$

где

$$P_1=-\int\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}dS_A,\qquad P_2=-\int\varphi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}dS_B,$$

$$Q_1=-\int\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}dS_A,\qquad Q_2=-\int\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}dS_B.$$

По теореме Грина (или путем непосредственного вычисления) получим, что $Q_1=Q_2$. Кроме того, A $\partial\varphi_1/\partial n=-\cos\theta$, $dS_A=2\pi a^2\sin\theta\,d\theta$ на сфере A и, значит,

$$\int_0^\pi\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta=\frac{2}{3}.$$

Таким образом, с точностью до членов c^{-3} имеем

$$P_1=\frac{2}{3}\pi a^3,\qquad Q_1=Q_2=\frac{2\pi a^3b^3}{c^3},\qquad P_2=\frac{2}{3}\pi b^3,$$

и, следовательно,

$$T=\frac{1}{4}M_1'U^2+\frac{2\pi a^3b^3\varrho}{c^3}UV+\frac{1}{4}M_2'V^2,$$

где M_1' и M_2' — массы жидкости, вытесненной соответствующими сферами.

16.31. Сфера, движущаяся перпендикулярно стенке. Если в задаче, рассмотренной в п. 16.30, положить $V=U$ и $b=a$, то очевидно, что пло-

скость, пересекающая под прямым углом линию AB в ее середине, будет плоскостью симметрии, через которую не протекает жидкость, (рис. 313). Следовательно, эту плоскость можно заменить бесконечной твердой стенкой, и, таким образом, мы получим случай сферы, движущейся со скоростью U по направлению к стенке. Полагая $c=2h$, где h — расстояние от центра сферы до стенки, запишем выражение для кинетической энергии жидкости в виде

$$T=\frac{1}{4}M'\left(1+\frac{3}{8}\frac{a^3}{h^3}\right)U^2,$$

где M' — масса жидкости, вытесненной сферой.

Сфера при этом движется так, как если бы жидкость была безграничной и в ней двигалась бы еще другая сфера, причем эта другая сфера является зеркальным отражением первой сферы относительно стенки.

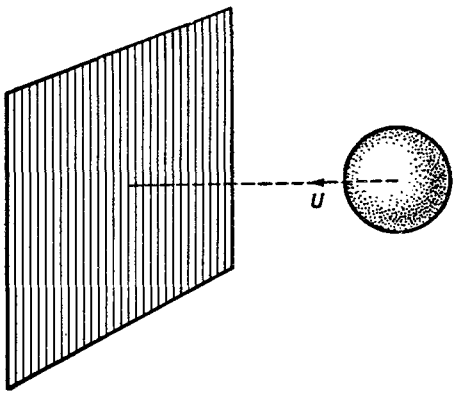


Рис. 313.

Если сфера движется по направлению к стенке и внешние силы отсутствуют, то полная энергия остается постоянной, т. е.

$$\frac{1}{4}\left(2M+M'+\frac{3}{8}\frac{M'a^3}{h^3}\right)U^2=\text{const}.$$

Когда сфера приближается к стенке, величина h уменьшается и, следовательно, $1/h^3$ возрастает. Поэтому скорость U должна уменьшаться, и, значит, сфера отталкивается стенкой. Подобным образом, если скорость сферы направлена от стенки, то с увеличением h величина $1/h^3$ уменьшается и, значит, скорость U возрастает. Таким образом, в обоих случаях сфера отталкивается стенкой.

Следовательно, две одинаковые сферы, движущиеся с одной и той же скоростью в противоположном направлении вдоль линии центров, оказывается, будут отталкивать одна другую, когда расстояние между ними будет увеличиваться или уменьшаться. Заметим, что в этом рассуждении речь идет только об относительной скорости, так что сферы могут иметь любые скорости вдоль линии центров. Отмеченное явление уменьшает возможность лобового столкновения между плывущими телами.

16.40. Две сферы, движущиеся под прямыми углами к линии центров. Если сферы с центрами в A и B и радиусами a и b движутся соответственно со скоростями U и V, направленными параллельно друг другу и под прямым углом к AB, то потенциал скорости будет иметь вид (рис. 314)

$$\varphi=U\varphi_1+V\varphi_2.$$

Для этого потенциала должны выполняться следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)_{r=a}&=\cos\theta, & -\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r'}\right)_{r'=b}&=0,\\ -\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right)_{r=a}&=0, & -\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial r'}\right)_{r'=b}&=\cos\theta'. \end{aligned} \tag{1}$$

Если расстояние c между центрами очень велико, то каждая из этих сфер почти не будет оказывать влияния на другую сферу и для потенци-

ала φ_1 в первом приближении имеем

$$\frac{a^3}{2}\frac{\cos\theta}{r^2}.$$

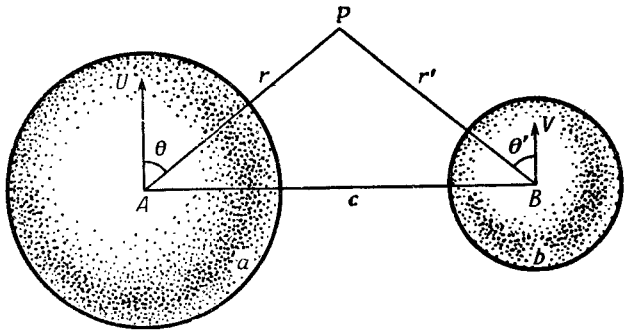
Далее, если c велико, то в точках вблизи сферы B будем приближенно иметь $r=c$ и, следовательно

$$\frac{a^3}{2}\frac{\cos\theta}{r^2}=\frac{a^3r\cos\theta}{2r^3}=\frac{a^3r'\cos\theta'}{2c^3}.$$

Тогда на сфере B нормальная скорость будет равна

$$-\frac{a^3\cos\theta'}{2c^3},$$

т. е. эта скорость не равна нулю, как это требуется по условию (1). Эту



Р и с. 314.

нормальную скорость можно уничтожить, если положить

$$\varphi_1=\frac{a^3}{2}\frac{\cos\theta}{r^2}+\frac{a^3b^3}{4c^3}\frac{\cos\theta'}{r'^2}. \tag{2}$$

Таким же приближенным методом получим, что на сфере

$$-\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}=\cos\theta-\frac{a^3b^3}{4c^6}\cos\theta.$$

Поэтому, если пренебречь величинами порядка c^{-6}, то по формуле (2) получим приближенное значение искомого потенциала скорости.

Вблизи сферы B имеем

$$\varphi_1=\frac{a^3r'\cos\theta'}{2c^3}+\frac{a^3b^3}{4c^3}\frac{\cos\theta'}{r'^2},$$

следовательно, при $r=a$ получим

$$\varphi_1=\frac{1}{2}a\cos\theta, \tag{3}$$

а при $r'=b$, получим

$$\varphi_1=\frac{3a^3b}{4c^3}\cos\theta', \tag{4}$$

если пренебречь членами, содержащими c^{-6} и более высокие степени c.

Тогда кинетическая энергия жидкости, как и в п. 16.30, выражается формулой

$$T=\frac{1}{2}\varrho\left[p_1U^2+(q_1+q_2)UV+p_2V^2\right],$$

где

$$p_1 = -\int \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS_A, \qquad p_2 = -\int \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} dS_B,$$

$$q_1 = -\int \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS_A, \qquad q_2 = -\int \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} dS_B,$$

а по теореме Грина получаем $q_1 = q_2$.

На поверхности сферы A имеем $\partial\varphi_1/\partial n = -\cos\theta$. На поверхности сферы B имеем $\partial\varphi_2/\partial n = -\cos\theta'$.

Таким образом, как и в п. 16.30, получим

$$p_1 = \frac{2}{3}\pi a^3, \quad q_1 = q_2 = \pi \frac{a^3 b^3}{c^3}, \quad p_2 = \frac{2}{3}\pi b^3,$$

и, следовательно,

$$T = \frac{1}{4} M_1' U^2 + \frac{\pi a^3 b^3 \varrho}{c^3} UV + \frac{1}{4} M_2' V^2,$$

где M_1' и M_2' — массы жидкости, вытесненной сферами.

16.41. Сфера, движущаяся параллельно стенке. Полагая в п. 16. 40 $V = U$ и $b = a$, получим случай сферы, движущейся параллельно фиксированной твердой плоской стенке. Действительно, плоскость, пересекающая под прямым углом линию AB в ее середине, является плоскостью, через которую жидкость не протекает, поэтому эта плоскость может быть принята за границу течения. Если $c = 2h$, т. е. h — расстояние от центра сферы до стенки, то получим

$$T = \frac{1}{4} M' U^2 \left(1 + \frac{3}{16}\frac{a^3}{h^3}\right).$$

При этом сфера движется так, как если бы жидкость была безграничной и в ней двигалась бы еще другая сфера, являющаяся зеркальным отражением первой сферы относительно стенки.

16.50. Эллипсоидальные координаты. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2+\theta} + \frac{y^2}{b^2+\theta} + \frac{z^2}{c^2+\theta} = 1, \tag{1}$$

где a, b, c фиксированы, а θ — некоторый параметр, описывает для любого постоянного значения θ некоторую центральную поверхность из семейства софокусных поверхностей второго порядка[1]). В частности, если $\theta = 0$, мы имеем эллипсоид. Уравнение (1) сводится к следующему:

$$f(\theta) = x^2(b^2+\theta)(c^2+\theta) + y^2(c^2+\theta)(a^2+\theta) + z^2(a^2+\theta)(b^2+\theta) - (a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta) = 0, \tag{2}$$

которое представляет собой кубическое уравнение относительно θ и имеет, следовательно, три корня, скажем λ, μ, ν. Это означает, что если задана точка $P(x, y, z)$, то существуют три центральные поверхности второго порядка, которые проходят через эту точку P. Эти поверхности представляют собой эллипсоид, однополостный гиперболоид и двуполостный гиперболоид. Кроме того, эти три поверхности второго порядка являются взаимно ортогональными в точке P. За доказательством этих утверждений мы отсылаем читателя к книгам по геометрии поверхностей. Мы примем эти утверждения без доказательства.

[1]) См., например, Bell R. J. T., Coordinate geometry of three dimensions, 1926, Ch. X.

Поскольку λ, μ, ν являются корнями уравнения (2), то имеет место равенство

$$f(\theta) = (\lambda - \theta)(\mu - \theta)(\nu - \theta). \tag{3}$$

Действительно, функция, стоящая в правой части, обращается в нуль, когда $\theta = \lambda$, $\theta = \mu$ и $\theta = \nu$, а коэффициенты при θ^3 справа и слева совпадают.

Если теперь поочередно положить $\theta = -a^2$, $\theta = -b^2$, $\theta = -c^2$, то из равенства (3) получим

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\ y^2 &= \frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \\ z^2 &= \frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Отсюда можно найти x, y, z, если известны λ, μ, ν. Таким образом, числами λ, μ, ν можно пользоваться для определения положения некоторой точки в пространстве, и мы будем применять эти числа в качестве ортогональных криволинейных координат. Эти координаты называются *эллипсоидальными координатами*. Поверхности $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\nu = \text{const}$ являются софокусными поверхностями второго порядка; мы всегда будем предполагать, что поверхность $\lambda = \text{const}$ представляет собой эллипсоид.

Для гидродинамических приложений требуется найти выражение для оператора $\nabla^2\varphi$ в эллипсоидальных координатах. В соответствии с п. 2.72 сначала необходимо вычислить коэффициенты Ламэ h_1, h_2, h_3, где

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = h_1^2(d\lambda)^2 + h_2^2(d\mu)^2 + h_3^2(d\nu)^2.$$

Так как

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \lambda}d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \mu}d\mu + \frac{\partial x}{\partial \nu}d\nu,$$

то, полагая $d\mu = 0$, $d\nu = 0$, имеем

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2. \tag{5}$$

Из формул (4) с помощью логарифмического дифференцирования получим равенства

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{1}{2}\frac{x}{a^2+\lambda}, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{1}{2}\frac{y}{b^2+\lambda}, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = \frac{1}{2}\frac{z}{c^2+\lambda}, \tag{6}$$

таким образом, по формуле (5) найдем соотношение

$$\begin{aligned} h_1^2 &= \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2+\lambda)(a^2-b^2)(a^2-c^2)} + \frac{(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2+\lambda)(b^2-a^2)(b^2-c^2)} + \right. \\ &\left. + \frac{(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2+\lambda)(c^2-a^2)(c^2-b^2)}\right] = \frac{1}{4}\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}, \end{aligned} \tag{7}$$

причем второе равенство получено с помощью формул (4), а третье равенство можно проверить, полагая в нем λ равным $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$ и получая отсюда отдельные слагаемые второго равенства. Выражения для коэффициентов h_2 и h_3 можно записать сразу же в силу симметрии.

Если рассматривать x, y, z как функции от λ и перейти вдоль нормали от некоторой точки P (рис. 315) на поверхности $\lambda = \text{const}$ до точки Q на

поверхности $\lambda + d\lambda = \text{const}$, то получим $PQ = h_1 d\lambda$ и

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \cos\theta_x, \tag{8}$$

где θ_x представляет собой угол между отрезком PQ и осью x. Если же, с другой стороны, рассматривать λ как функцию от x, y, z и перейти в

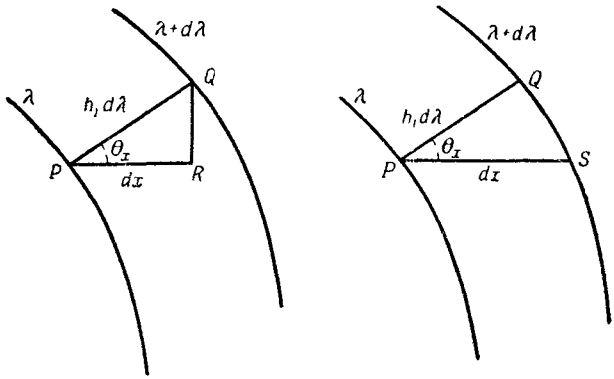


Рис. 315.

направлении x на расстояние dx, сохраняя y и z постоянными, то мы попадем в точку S на поверхности $\lambda + d\lambda = \text{const}$ и тогда

$$\frac{h_1 \partial\lambda}{\partial x} = \cos\theta_x.$$

Следовательно,

$$h_1 \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial x}{\partial \lambda}.$$

Если положить

$$(k_\lambda)^2 = (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda), \tag{9}$$

то по формуле (7) находим

$$(2h_1 k_\lambda)^2 = (\lambda - \mu)(\lambda - \nu), \quad (2h_2 k_\mu)^2 = (\mu - \nu)(\mu - \lambda),$$
$$(2h_3 k_\nu)^2 = (\nu - \lambda)(\nu - \mu).$$

Следовательно,

$$\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\right)^2 = -\frac{1}{4}(\mu - \nu)^2 \left(\frac{k_\lambda}{k_\mu k_\nu}\right)^2$$

и

$$(h_1 h_2 h_3) = -\frac{(\lambda-\mu)^2(\mu-\nu)^2(\nu-\lambda)^2}{64 k_\lambda^2 k_\mu^2 k_\nu^2}.$$

Замечая, что k_μ и k_ν не зависят от λ, получим по формуле (3) п. 2.72 для оператора ∇^2 следующее выражение:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{4}{(\lambda-\mu)(\mu-\nu)(\nu-\lambda)}\left[(\mu-\nu)k_\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(k_\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right) + \right.$$
$$\left. + (\nu-\lambda)k_\mu \frac{\partial}{\partial\mu}\left(k_\mu \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right) + (\lambda-\mu)k_\nu \frac{\partial}{\partial\nu}\left(k_\nu \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)\right]. \tag{10}$$

Приравнивая это выражение нулю, получаем уравнение Лапласа в эллипсоидальных координатах. Функции, являющиеся решениями этого уравнения, называются *эллипсоидальными гармоническими функциями*.

16.51. Эллипсоидальные гармонические функции. Пользуясь обозначениями п. 16.50, можно записать уравнение Лапласа в эллипсоидальных координатах в форме

$$(\mu-\nu)\left(k_\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^2\varphi+(\nu-\lambda)\left(k_\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^2\varphi+(\lambda-\mu)\left(k_\nu\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^2\varphi=0. \tag{1}$$

Пусть α — некоторая функция, удовлетворяющая этому уравнению. Будем искать решения в таком виде:

$$\varphi=\alpha\chi,$$

где χ — функция, зависящая *только* от λ. Тогда сразу же получим равенства

$$\begin{aligned}
k_\lambda\frac{\partial(\alpha\chi)}{\partial\lambda}&=k_\lambda\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}\chi+k_\lambda\alpha\frac{\partial\chi}{\partial\lambda},\\
\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[k_\lambda\frac{\partial(\alpha\chi)}{\partial\lambda}\right]&=\chi\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(k_\lambda\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}\right)+R,\\
R&=2k_\lambda\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}\frac{\partial\chi}{\partial\lambda}+\alpha\frac{\partial k_\lambda}{\partial\lambda}\frac{\partial\chi}{\partial\lambda}+\alpha k_\lambda\frac{\partial^2\chi}{\partial\lambda^2}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Подставляя эти равенства в уравнение (1) и учитывая, что α — решение уравнения (1), получаем $R=0$. Последнее равенство можно записать в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\left(k_\lambda\frac{\partial\chi}{\partial\lambda}\right)=-\frac{2}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}. \tag{3}$$

Поскольку с левой стороны здесь стоит функция, зависящая только от λ, то правая часть не должна зависеть от μ и ν; следовательно, предложенная выше форма решения возможна лишь тогда, когда величина α удовлетворяет полученному условию. Это означает, что величина α должна иметь вид

$$\alpha=\alpha_\lambda f(\mu,\ \nu), \tag{4}$$

где α_λ не зависит от μ, ν, а $f(\mu,\ \nu)$ не зависит от λ. В этом случае равенство (3) примет вид

$$\frac{d}{d\lambda}\ln\left(k_\lambda\frac{d\chi}{d\lambda}\right)=\frac{d}{d\lambda}\ln\frac{1}{\alpha_\lambda^2},$$

что после интегрирования дает

$$\chi=A\int\frac{d\lambda}{\alpha_\lambda^2k_\lambda}+B,$$

где A и B — произвольные постоянные.

Итак, если α — эллипсоидальная гармоническая функция, имеющая указанные выше свойства, то эллипсоидальными гармоническими функциями будут также и функции

$$\alpha\int\frac{d\lambda}{\alpha_\lambda^2k_\lambda},\qquad\int\frac{d\lambda}{k_\lambda}, \tag{5}$$

причем вторая функция получается, если положить $\alpha=1$, поскольку $\alpha=1$ является, очевидно, решением уравнения (1).

Уравнение (1) представляет собой обычное уравнение Лапласа $\nabla^2\varphi=0$, записанное в специальной системе координат, поэтому функции x, y, z, xy, yz, zx и любая сферическая гармоническая функция являются фактически решениями уравнения (1).

Функции x, y, z выражаются формулами (4) п. 16.50, и, следовательно, можно принять

$$\alpha=(a^2+\lambda)^{1/2}(a^2+\mu)^{1/2}(a^2+\nu)^{1/2},$$

что соответствует функции x, и

$$\alpha = (b^2+\lambda)^{1/2}(b^2+\mu)^{1/2}(b^2+\nu)^{1/2}(c^2+\lambda)^{1/2}(c^2+\mu)^{1/2}(c^2+\nu)^{1/2},$$

что соответствует функции yz; оба эти выражения удовлетворяют условию (4).

Таким образом, в соответствии с первой функцией (5) можно получить следующие эллипсоидальные гармонические функции:

$$\varphi_x = Cx\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)k_\lambda}, \quad \varphi_{yz} = Cyz\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)k_\lambda}, \tag{6}$$

где C — произвольная постоянная, а функции x, y, z выражаются через λ, μ, ν по формулам (4) п. 16.50. Пределы интегрирования здесь выбраны так, чтобы при $\lambda = \infty$ интегралы обращались в нуль. В приложениях мы будем иметь дело только с этими функциями.

Функции типа (6) встречаются в операторах ∇V и $\mathbf{r}\times(\nabla V)$, где

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z,$$

$$V = \int_\lambda^\infty \left(\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1\right)\frac{d\lambda}{k_\lambda}.$$

16.52. Поступательное движение эллипсоида. Рассмотрим эллипсоид $\lambda = 0$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1}$$

движущийся в направлении оси x со скоростью U. Граничные условия в этом случае имеют вид

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial n} = U\cos\theta_x, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = -U\frac{\partial x}{\partial\lambda}, \quad \lambda = 0, \tag{2}$$

поскольку $dn = h_1\,d\lambda$, $\cos\theta_x = \partial x/h_1\,\partial\lambda$, где θ_x — угол между нормалью и осью x [см. формулу (8) п. 16.50].

Таким образом, при $\lambda = 0$ имеем $\varphi = -Ux$, а при $\lambda\to\infty$ имеем $\varphi\to 0$. Этим условиям удовлетворяет функция φ_x, определяемая равенством (6) п. 16.51. Следовательно,

$$\varphi = Cx\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)k_\lambda}.$$

Тогда условие (2) дает

$$-U\frac{\partial x}{\partial\lambda} = C\frac{\partial x}{\partial\lambda}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)k_\lambda} - \frac{Cx}{a^3bc}, \quad \text{где } \lambda = 0.$$

Из формул (6) п. 16.50 следует $\partial x/\partial\lambda = {}^1/_2 x/a^2$ при $\lambda = 0$, поэтому

$$C = \frac{abcU}{2-\alpha_0}, \quad \alpha_0 = abc\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)k_\lambda}. \tag{3}$$

Постоянная α_0 зависит только от полуосей эллипсоида a, b, c. Для вычисления ее величины необходимо пользоваться эллиптическими интегралами.

Итак, окончательно

$$\varphi = \frac{abcUx}{2-\alpha_0} \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{3/2}(b^2+\lambda)^{1/2}(c^2+\lambda)^{1/2}}, \tag{4}$$

а на самом эллипсоиде, согласно равенству (3), имеем

$$\varphi = \frac{\alpha_0 xU}{2-\alpha_0}.$$

Кинетическая энергия жидкости в этом случае выражается в виде

$$T = -\frac{1}{2}\varrho \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \frac{\alpha_0}{2(2-\alpha_0)} \varrho U^2 \int x \cos\theta_x \, dS.$$

Поскольку $\cos\theta_x \, dS$ представляет собой проекцию элементарной площадки dS поверхности эллипсоида на плоскость $x=0$ (рис. 316), то последний интеграл дает объем эллипсоида $4\pi abc/3$ и, следовательно,

$$T = \frac{1}{2} M' \frac{\alpha_0}{2-\alpha_0} U^2,$$

где M' — масса жидкости, вытесненной эллипсоидом.

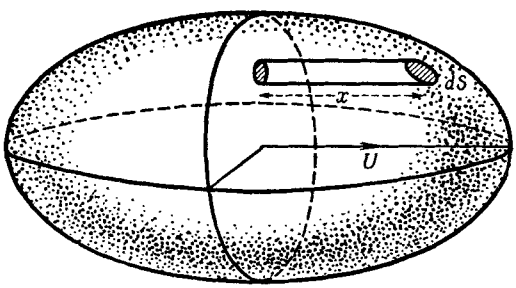


Рис. 316.

Если положим $a=b=c$, то получаем случай сферы, при этом все интегралы вычисляются элементарно.

Когда эллипсоид имеет еще составляющие скорости V и W, параллельные осям y и z, то потенциал скорости получается суперпозицией результатов, аналогичных результату (4), и имеет вид

$$\frac{abcUx}{2-\alpha_0} \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)k_\lambda} + \frac{abcVy}{2-\beta_0} \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)k_\lambda} + \frac{abcWz}{2-\gamma_0} \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)k_\lambda},$$

где величины β_0 и γ_0 можно получить, если в подинтегральной функции формулы (3) вместо $a^2+\lambda$ положить $b^2+\lambda$ и $c^2+\lambda$.

Сжатый и вытянутый эллипсоиды вращения можно рассматривать как частные случаи изученного выше эллипсоида общего вида.

16.53. Вращающийся эллипсоид. Если эллипсоид вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$, то скорость точки $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ на его поверхности равна $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Если $\omega_y = \omega_z = 0$, то тогда скорость равна $-\mathbf{j}\omega_x z + \mathbf{k}\omega_x y$.

Если θ_y, θ_z — углы между нормалью к эллипсоиду и осями y и z, то граничное условие запишется в виде

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial n} = (-z\cos\theta_y + y\cos\theta_z)\,\omega_x,$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \left(z\frac{\partial y}{\partial \lambda} - y\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)\omega_x.$$

Для такого вида граничного условия можно использовать функцию φ_{yz}, определенную формулой (6) п. 16.51. Таким образом, полагая

$$\varphi = Cyz \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)k_\lambda}, \tag{1}$$

получаем при $\lambda = 0$ равенство

$$\left(\frac{zy}{2b^2} - \frac{yz}{2c^2}\right)\omega_x = -\frac{Cyz}{b^2c^2 \cdot abc} + C\left(\frac{zy}{2b^2} + \frac{yz}{2c^2}\right)I,$$

где принято $\partial y/\partial\lambda = {}^1/_2 y/b^2$, $\partial z/\partial\lambda = {}^1/_2 z/c^2$ и

$$I = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)k_\lambda}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)} = \frac{-1}{(b^2-c^2)}\left(\frac{1}{b^2+\lambda} - \frac{1}{c^2+\lambda}\right),$$

то получим

$$I = \frac{-(\beta_0 - \gamma_0)}{(b^2-c^2)abc},$$

где β_0, γ_0 имеют тот же смысл, что и в предыдущем пункте. Тогда

$$C = \frac{(b^2-c^2)^2}{2(b^2-c^2)+(b^2+c^2)(\beta_0-\gamma_0)}abc\omega_x,$$

а искомый потенциал скорости находится подстановкой этой величины C в формулу (1). Кинетическая энергия жидкости может быть вычислена тем же способом, который применялся выше.

Если эллипсоид имеет еще составляющие скорости ω_y, ω_z, то полный потенциал скорости находится суперпозицией результатов, получаемых по соображениям симметрии из вышеприведенных результатов.

16.54. Вращающаяся эллипсоидальная оболочка. Если внутренность эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

заполнена жидкостью и вращается относительно оси x с угловой скоростью ω_x, то граничное условие имеет вид

$$-\frac{x}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{y}{b^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{z}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{y}{b^2}\omega_x z + \frac{z}{c^2}\omega_x y.$$

Мы можем удовлетворить этому условию, полагая $\varphi = Ayz$, так как эта функция является сферической гармонической функцией. Тогда получаем

$$A\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = \omega_x\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right),$$

откуда определяется величина A. Если, кроме того, оболочка имеет скорость u_x вдоль оси x, то должно иметь место равенство $\varphi = -xu_x$. Следовательно, если оболочка движется произвольным образом, то потенциал скорости имеет вид

$$\varphi = -xu_x - yu_y - zu_z - \frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}\omega_x yz - \frac{c^2-a^2}{c^2+a^2}\omega_y zx - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\omega_z xy.$$

ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ 16

1. Пусть $\varphi = r^n S$ — сферическая гармоническая функция, причем S не зависит от r. Доказать, что S удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\omega^2} + S(n+1)n = 0,$$

доказать, что S/r^{n+1} является также сферической гармонической функцией.

2. Если $\varphi = r^n S$ — сферическая гармоническая функция, симметричная относительно оси x, причем S не зависит от r, то показать, что S удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dS}{d\mu}\right]+n(n+1)S=0,$$

где $\mu=\cos\theta$. Показать, что решениями этого уравнения, соответствующими $n=0$ и $n=1$, будут $P_0(\mu)$, $P_1(\mu)$, а также

$$Q_0(\mu)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}, \qquad Q_1(\mu)=\frac{1}{2}\mu\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}-1.$$

Показать, что потенциал скорости линейных источников, расположенных на отрезке оси x от точки $x=0$ до точки $x=a$, равен $\frac{m}{a}[Q_0(\mu)-Q_0(\mu')]$, где m — полная суммарная мощность источников, а $\mu'=\cos\theta'$, где θ' — полярный угол, причем полюс находится в точке $x=a$.

3. Движение жидкости задано потенциалом скорости

$$\varphi=C\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{r^n}{a^{n-1}}+\frac{a^{n+2}}{r^{n+1}}\right]P_n(\cos\theta),$$

где C — постоянная, а r и θ — сферические координаты. Определить функцию тока.

4. Сфера радиуса a окружена концентрической сферической оболочкой радиуса b, а пространство между ними заполнено жидкостью. Если сфера движется со скоростью V, то показать, что потенциал скорости равен

$$\varphi=\frac{Va^3}{b^3-a^3}\left(r+\frac{b^3}{2r^2}\right)\cos\theta.$$

Найти также функцию тока.

5. Тонкая сферическая оболочка, массой которой можно пренебречь, окружает концентрическую сферу массы m и плотности σ, промежуточное пространство заполнено жидкостью массы m' и плотности ϱ. Доказать, что если внешней сфере сообщить нормальный импульс, то количество движения распределится между сферой и жидкостью в отношении $3m\varrho/[m'(2\sigma+\varrho)]$.

6. Пространство между двумя концентрическими сферами радиусов a и b заполнено жидкостью. Эти сферы движутся со скоростями U и V в одном направлении. Найти потенциал скорости. Доказать, что кинетическая энергия жидкости равна

$$\frac{\pi\varrho}{3(b^3-a^3)}[a^3b^3(U-V)^2+2(Ua^3-Vb^3)^2].$$

Определить импульс, который требуется для приведения внешней сферы в движение со скоростью V, если массы сфер соответственно равны M_1 и M_2.

7. Пространство между твердой сферой радиуса a и концентрической сферической оболочкой радиуса $2a$ заполнено однородной жидкостью; вся система покоится, а оболочке сообщается импульс, вызывающий ее движение со скоростью V; известно, что скорость начального движения жидкости выражается в виде $(Ar+B/r^2)\cos\theta$. Показать, что сфера начинает двигаться со скоростью, равной

$$\frac{12\varrho V}{7\sigma+5\varrho},$$

где σ, ϱ представляют собой соответственно плотности сферы и жидкости.

Показать также, что если масса оболочки пренебрежимо мала, то величина сообщаемого импульса равна

$$\frac{4}{7}\frac{17\sigma+7\varrho}{7\sigma+5\varrho}MV,$$

где M — масса жидкости.

8. В полой сферической оболочке, внутренний радиус которой равен a, расположена концентрическая твердая однородная сфера радиуса b и плотности σ, а пространство между двумя этими поверхностями заполнено жидкостью плотности ϱ. Оболочка мгновенно приходит в движение со скоростью u. Доказать, что внутренней сфере при этом сообщается скорость v, равная

$$v=\frac{3ua^3}{2\frac{\sigma}{\varrho}(a^3-b^3)+a^3+2b^3}.$$

9. Найти величины A и B, если

$$\left(Ar+\frac{B}{r^2}\right)\cos\theta$$

есть потенциал скорости движения несжимаемой жидкости, которая заполняет пространство между твердой сферой радиуса a и концентрической сферической оболочкой радиуса $2a$, когда эта сфера имеет скорость U, а оболочка покоится. Доказать, что кинетическая энергия жидкости плотности ϱ равна $10\pi\varrho a^3U^2/21$.

Сфера, имеющая плотность σ, в начальный момент покоится и касается оболочки в ее наивысшей точке, а затем начинает падать вниз под действием силы тяжести. Показать, что скорость сферы в момент, когда она оказывается концентрической с оболочкой, выражается формулой

$$U^2=\frac{14ga(\sigma-\varrho)}{7\sigma+5\varrho}.$$

10. Пространство между твердой сферой массы M и радиуса a и неподвижной концентрической сферической оболочкой внутреннего радиуса b заполнено жидкостью. Непосредственно на сферу действует импульс I. Доказать, что сфера начинает двигаться со скоростью

$$I\Big/\left(M+M'\frac{b^3+2a^3}{2b^3-2a^3}\right),$$

где M' — масса жидкости, вытесненной сферой.

Найти для этого движения значение функции тока Стокса в начальный момент времени.

11. Жидкость плотности ϱ заполняет пространство между твердой сферой радиуса a и плотности σ и неподвижной концентрической сферической оболочкой радиуса b. Доказать, что работа, которую совершает импульс, приводящий твердую сферу в движение со скоростью V, выражается формулой

$$\frac{1}{3}\pi a^3V^2\left(2\sigma+\frac{2a^3+b^3}{b^3-a^3}\varrho\right).$$

Вычислить количество движения жидкости в начальный момент времени.

12. Сфера радиуса a и плотности σ окружена концентрической сферической оболочкой радиуса b, а пространство между сферой и оболочкой заполнено жидкостью плотности ϱ. Вся система движется со скоростью v. В некоторый момент времени оболочка мгновенно останавливается. Найти скорость сферы непосредственно после удара.

13. Пространство между двумя концентрическими сферами радиусов a и b, внешняя из которых неподвижна, заполнено жидкостью плотности ϱ. Показать, что если внутренняя сфера начинает двигаться из состояния покоя с ускорением f, то суммарная сила, действующая на внешнюю сферу, в начальный момент движения равна

$$2\pi\varrho f a^3b^3/(b^3-a^3).$$

14. Однородная жидкость занимает односвязную область, ограниченную изнутри поверхностью S_1, а снаружи неподвижной поверхностью S_0. Если поверхность S_1 движется произвольным образом, но без изменения заключенного в ней объема, то возникает безвихревое движение жидкости. Доказать, что кинетическая энергия жидкости в этом случае больше, чем если бы внешняя граница отсутствовала.

Проверить теорему об определении кинетической энергии, когда S_1 и S_0 являются мгновенно концентрическими сферами, а S_1 остается при движении жесткой границей.

15. Сфера радиуса a движется со скоростью v вдоль диаметра неподвижной сферы радиуса b, пространство между двумя этими поверхностями заполнено жидкостью. Доказать, что когда расстояние между центрами сфер равняется x, то кинетическая энергия движения жидкости равна

$$2\pi\varrho v\left(\frac{1}{3}\mu_0+\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\right),$$

где

$$\mu_{n+1}(b^2-xc_n)^3=\mu_n a^3b^3, \qquad \mu_0=\frac{1}{2}va^3,$$

$$c_{n+1}(b^2-xc_n)=xb^2-c_n(x^2-a^2), \qquad c_0=x.$$

16. Сфера массы M и радиуса a находится в состоянии покоя, причем центр ее расположен на расстоянии h от плоской границы. Показать, что величина импульса, необ-

ходимая для приведения сферы в движение со скоростью V в направлении, перпендикулярном границе, будет с большой степенью точности равняться

$$V\left[M+\frac{1}{2}M'\left(1+\frac{3a^3}{8h^3}\right)\right],$$

где M' — масса вытесненной жидкости. Найти также величину импульса на плоской границе.

17. Сфера радиуса a движется в полубесконечной жидкости, имеющей плотность ϱ и ограниченной плоской стенкой; центр сферы находится на большом расстоянии h от стенки. Показать, что если сфера движется относительно стенки со скоростью V под углом α, то кинетическая энергия жидкости приближенно равна

$$\frac{1}{3}\pi\varrho a^3V^2\left[1+\frac{3}{16}\frac{a^3}{h^3}(1+\sin^2\alpha)\right].$$

18. Жесткая плоскость бесконечного размера разделяет на две части неограниченную жидкость. Некоторая сфера движется в направлении, перпендикулярном к этой плоскости. Объяснить из общих соображений эффект образования в этой плоскости кругового отверстия с центром на линии, вдоль которой движется сфера. Рассмотреть случай, когда скорость сферы направлена к плоскости и когда скорость направлена от плоскости.

19. Две одинаковые сферы радиуса a находятся неподвижно в потоке со скоростью U, перпендикулярной линии центров; расстояние между центрами сфер равно d. Показать, что скорость в средней точке, на линии центров, приближенно равна

$$U\left(1+\frac{8a^3}{d^3}\right).$$

Найти скорость в случае, когда поток направлен параллельно линии центров.

20. Две сферы радиусов a и b находятся на расстоянии c и окружены жидкостью. Первая сфера движется со скоростью U по направлению ко второй сфере. Показать, что вторая сфера начнет двигаться со скоростью, приближенно равной A/B, где

$$A=\frac{3a^3}{2c^3}UM',\quad B=M+\frac{1}{2}M'\left(1+\frac{3a^3b^3}{c^6}\right).$$

21. Сфера радиуса a погружена в жидкость плотности ϱ, ограниченную только одной бесконечной плоской стенкой. Эта сфера движется со скоростью U перпендикулярно стенке, которая находится на расстоянии c от центра сферы, причем c велико по сравнению с a. Пренебрегая величинами a^4/c^4, доказать, что потенциал скорости в непосредственной окрестности сферы выражается формулой

$$\varphi=\frac{1}{2}Ua^3\left[\left(1+\frac{a^3}{8c^3}\right)/r^2+\frac{1}{4}\frac{r}{c^3}\right]\cos\theta,$$

где r — радиус-вектор точки, измеряемый от центра сферы, а θ — угол, который радиус-вектор r образует с направлением движения сферы.

Вычислить приближенно кинетическую энергию жидкости.

22. Сфера радиуса a движется со скоростью V параллельно неподвижной стенке; стенка расположена на расстоянии c от центра сферы. Показать, что в окрестности сферы потенциал скорости приближенно равен

$$\varphi=V\frac{a^3}{2}y\,[(1+a^3/16c^3)/r^3+1/r'^3],$$

где r и r' — расстояния от центра сферы и от ее отображения относительно стенки соответственно, а y измеряется параллельно направлению движения.

Вычислить с той же степенью точности давление на сфере.

23. Мина находится на расстоянии a от плоской бесконечной стенки и на глубине b от поверхности покоящейся воды, которая простирается до бесконечности как в глубину, так и в сторону от стенки. Мина взрывается симметрично. Если E — полная энергия, выделившаяся при взрыве мины, то вычислить нормальную составляющую скорости в произвольной точке свободной поверхности непосредственно после взрыва, а также нормальное импульсивное давление в произвольной точке на стенке.

24. Сфера радиуса a движется со скоростью u перпендикулярно неподвижной плоскости, которая ограничивает область, занятую однородной невязкой жидкостью. Показать, как определить потенциал скорости движения, когда центр сферы находится на расстоянии c от плоскости.

Доказать, что кинетическая энергия жидкости при этом равна

$$\frac{1}{4}M'u^2\left[1+3\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_n/\mu_0)\right],$$

где M' — масса жидкости, вытесненной сферой, а

$$\mu_0=\frac{1}{2}ua^3, \qquad \mu_n=\mu_{n-1}(p_n/q_n)^3,$$

где p_n/q_n является подходящей дробью n-го порядка для непрерывной дроби

$$\frac{a}{2c-}\,\frac{a^2}{2c-}\,\frac{a^2}{2c-\ldots},$$

у которой все неполные частные (кроме первого) равны $-a^2/2c$.

25. Два одинаковых круговых цилиндра радиуса a расположены неподвижно на расстоянии d между их центрами в равномерном потоке, скорость которого V направлена перпендикулярно линии центров. Получить приближенно выражение для скорости, предполагая, что отношение a/d мало. Показать, что скорость в средней точке на линии центров с высокой степенью точности равна $V\left(1+8\frac{a^2}{d^2}\right)$.

26. Пространство между длинным твердым цилиндром радиуса a и концентрической оболочкой радиуса b заполнено однородной жидкостью. Найти скорость движения жидкости, когда цилиндр и оболочка имеют соответственно скорости U и V, перпендикулярные к общей оси тел и одинаково направленные.

Когда эта система покоится, оболочке сообщается импульс, который заставляет ее двигаться со скоростью V. Найти скорость цилиндра в начальный момент и показать, что скорость движения жидкости в начальный момент выражается в виде

$$\frac{Vb^2}{r}\,\frac{\varrho(a^2-r^2)-\sigma(a^2+r^2)}{\varrho(b^2+a^2)+\sigma(b^2-a^2)}\cos\theta,$$

где ϱ и σ — плотности жидкости и цилиндра соответственно.

27. Круглое отверстие радиуса a в стенке большого сосуда, заполненного жидкостью плотности ϱ, закрыто поршнем с плоским днищем, расположенным вровень со стенкой. Поршень мгновенно двигается внутрь сосуда со скоростью U. Показать, что импульсивное давление P на стенке выражается в виде

$$P=\varrho U\left(\frac{1}{2}\frac{a^2}{r}+\frac{1^2}{2^2\cdot4}\frac{a^4}{r^3}+\ldots+\frac{1^2\cdot3^2\ldots(2k-3)^2a^{2k}}{2^2\cdot4^2\ldots(2k-2)^2 2kr^{2k-1}}+\ldots\right),$$

где r — расстояние рассматриваемой точки от центра отверстия.

28. Эллипсоид с полуосями a, b, c движется со скоростью $\mathbf{V}$ через безграничную жидкость, покоящуюся на бесконечности; скорость направлена вдоль оси эллипсоида, имеющей длину $2a$. Найти потенциал скорости этого движения и показать, что на большом расстоянии это движение соответствует действию диполя, расположенного в центре эллипсоида и имеющего ось и мощность, определяемые выражением

$$\frac{8}{3}\,\frac{\pi}{2-\alpha_0}\,abc\,\mathbf{V},$$

где

$$\alpha_0=abc\int_0^\infty\frac{du}{(a^2+u)^{3/2}(b^2+u)^{1/2}(c^2+u)^{1/2}}.$$

29. Эллипсоид $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ расположен в равномерном потоке, движущемся параллельно оси x. Доказать, что линии постоянного давления на эллипсоиде являются линиями пересечения этого эллипсоида с конусами $y^2/b^2+z^2/c^2=x^2/h^2$, где h — произвольная постоянная.

30. Поток бесконечной глубины, дном которого служит плоскость $z=0$, имеет скорость U, параллельную оси x; этот поток возмущается только препятствием, имеющим форму верхней половины эллипсоида. Если λ — положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$$

(эллипсоид определяется равенством $\lambda=0$), то показать, что потенциал скоростей движения рассматриваемого течения равен

$$\varphi=-Ux\left(1+\frac{\alpha_\lambda}{2-\alpha_0}\right),$$

где

$$\alpha_\lambda=abc\int_\lambda^\infty\frac{du}{(a^2+u)^{3/2}(b^2+u)^{1/2}(c^2+u)^{1/2}}.$$

Доказать также, что скорость в точках на поверхности тела, лежащих в сечении $x=0$, равна $2U/(2-\alpha_0)$.

31. Жесткий эллипсоид с полуосями a, b, c движется со скоростью, составляющие которой U, V параллельны осям a, b соответственно. Показать, что для создания такого движения требуется пара с моментом относительно оси c, равным

$$\frac{8\pi\rho abc\,(\beta_0-\alpha_0)\,UV}{3\,(2-\alpha_0)\,(2-\beta_0)},$$

причем за положительное направление отсчета момента принимается направление от оси a к оси b.

32. Область вне эллипсоида

$$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$$

занята жидкостью, которая покоится на бесконечности. Эллипсоид вращается с угловой скоростью ω относительно оси x. Найти потенциал скоростей и показать, что кинетическая энергия жидкости равна

$$\frac{1}{10}\,\frac{(b^2-c^2)\,(\gamma_0-\beta_0)}{2\,(b^2-c^2)-(b^2+c^2)\,(\gamma_0-\beta_0)}\,M\omega^2,$$

где

$$\beta_0=abc\int_0^\infty (a^2+\lambda)^{-1/2}\,(b^2+\lambda)^{-3/2}\,(c^2+\lambda)^{-1/2}\,d\lambda,$$

$$\gamma_0=abc\int_0^\infty (a^2+\lambda)^{-1/2}\,(b^2+\lambda)^{-1/2}\,(c^2+\lambda)^{-3/2}\,d\lambda,$$

M — масса жидкости, вытесненной эллипсоидом. Найти далее эффективный момент инерции эллипсоида.

33. Показать, что когда круглый диск радиуса a вращается относительно своего диаметра в жидкости, покоящейся на бесконечности, то кинетическая энергия жидкости равна $8\rho a^5\omega^2/45$, где ω — угловая скорость вращения диска, а ρ — плотность жидкости.

34. Найти единственные решения уравнения Лапласа в эллипсоидальных координатах λ, μ, ν, которые не зависят от μ и ν.

Оси эллипсоида, расположенного в безграничной жидкости, изменяются со временем так, что эллипсоид остается подобным самому себе. Доказать, что

$$\varphi=-\frac{1}{6}\,abc\,(\dot a/a+\dot b/b+\dot c/c)\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)}}.$$

35. Доказать, что если решение уравнения Лапласа в эллипсоидальных координатах λ, μ, ν имеет вид произведения $L\cdot M\cdot N$, то тогда одно возможное значение L удовлетворяет уравнению вида

$$(a^2+\lambda)^{1/2}\,(b^2+\lambda)^{1/2}\,(c^2+\lambda)^{1/2}.$$

Найти второе решение, зависящее от λ и удовлетворяющее дифференциальному уравнению для λ в этом случае, и получить затем три решения уравнения Лапласа в следующей форме: $xyz\cdot F$, где F — функция, зависящая только от λ, или от μ, или от ν.

36. Показать, что если λ — корень уравнения

$$x^2/(a^2+\lambda)+y^2/(b^2+\lambda)+z^2/(c^2+\lambda)=1,$$

то тогда $L=(a^2+\lambda)^{1/2}$ является решением уравнения

$$\frac{1}{L}\,\frac{d^2L}{d\alpha^2}=A\lambda+B,$$

где $d\alpha=d\lambda/\sqrt{(a^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)}$, A и B имеют фиксированные значения.

Доказать также, что для других значений A и B функции $(b^2+\lambda)^{1/2}$ и $(c^2+\lambda)^{1/2}$ являются также решениями, но что нельзя получить решение вида

$$L=p\,(a^2+\lambda)^{1/2}+q\,(b^2+\lambda)^{1/2}+r\,(c^2+\lambda)^{1/2},$$

где ни одна пара величин p, q и r не обращается в нуль, если величины a, b и c отличны друг от друга.

37. Эллипсоидальный сосуд с полуосями a, b, c, заполненный невязкой жидкостью плотности ρ, вращается относительно оси x с угловой скоростью ω. Доказать, что скорости в любой точке жидкости выражаются в виде $u=0$, $v=Cz$, $w=Cy$ и определить C.

38. Эллипсоид заполнен жидкостью и имеет относительно своих осей составляющие скорости U, V, W, ω_1, ω_2, ω_3. Показать, что траектории частиц относительно эллипсоида представляют собой эллипсы, а период вращения равен $2\pi/m$, где

$$m=2abc\left[\frac{\omega_1^2}{a^2(b^2+c^2)^2}+\frac{\omega_2^2}{b^2(c^2+a^2)^2}+\frac{\omega_3^2}{c^2(a^2+b^2)^2}\right]^{1/2}.$$

39. Тонкая эллипсоидальная оболочка с полуосями a, b, c, заполненная жидкостью плотности ϱ, вращается относительно оси c с угловой скоростью ω. Найти потенциал скоростей движения и показать, что кинетическая энергия равна

$$\frac{2}{15}\frac{\pi\varrho abc(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}\omega^2.$$

40. Эллипсоидальная оболочка, заполненная жидкостью, равномерно вращается относительно некоторого заданного диаметра. Доказать, что траектория каждой частицы жидкости относительно эллипсоида будет эллипсом, плоскость которого является сопряженной заданному диаметру, и что каждая частица будет двигаться по своей эллиптической орбите так, что радиус-вектор, проведенный из центра орбиты, будет описывать равные площади в равные промежутки времени.

41. Оси эллипсоида, который заполнен жидкостью, изменяются во времени таким образом, что объем эллипсоида остается постоянным. Доказать, что потенциал скорости жидкости равен

$$\varphi=(\dot{a}x^2/a+\dot{b}y^2/b+\dot{c}z^2/c)/2.$$

42. Даны соотношения

$$x=a(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta-\operatorname{ch}\gamma),$$

$$y=4a\operatorname{ch}\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\operatorname{sh}\frac{1}{2}\gamma,\qquad z=4a\operatorname{sh}\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\operatorname{ch}\frac{1}{2}\gamma;$$

преобразовать уравнение неразрывности к виду

$$(\cos\beta+\operatorname{ch}\gamma)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}+(\operatorname{ch}\gamma+\operatorname{ch}\alpha)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}+(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\gamma^2}=0$$

и показать, что поверхности, на которых α, β и γ постоянны, являются софокусными параболоидами.

Показать далее, что потенциал скоростей неограниченной жидкости, обтекающей заданный гиперболический параболоид $\beta=\beta_0$ со скоростью V, параллельной на бесконечности оси x, выражается в виде $\varphi=V(x-\alpha\beta\sin\beta_0)$; записать соответствующие выражения для потенциала φ, когда заданная поверхность представляет собой эллиптический параболоид $\alpha=\alpha_0$ или $\gamma=\gamma_0$.

43. Бесконечная масса жидкости имеет в качестве свободной поверхности плоскость $z=0$. Пусть к этой поверхности приложено импульсивное давление $\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_0\sin mx\sin my$; показать, что возникающее при этом движение описывается потенциалом скоростей $\varrho\varphi=\tilde{\omega}_0\exp[-z(m^2+n^2)^{1/2}]$, где z — координата в жидкости.

44. Прямой круговой конус имеет высоту h и радиус основания $h\sqrt{2}$. Масса жидкости такой формы движется параллельно оси со скоростью V. Затем основание конуса ударяется о некоторую неподвижную плоскость. Принимая в качестве неподвижной плоскости плоскость xy, а центр основания конуса в качестве начала координат, доказать, что потенциал скорости сразу после удара равен $V(2z^2-x^2-y^2)/(4h)$, импульсивное давление жидкости равно $V\varrho[2(z-h)^2-x^2-y^2]/(4h)$, а импульс, действующий на плоскость, составляет $^3/_4$ той величины импульса, которой обладал бы конус, если бы он был твердым и имел ту же массу.

45. Показать, что любое безвихревое движение однородной жидкости, которая движется в односвязной области, ограниченной изнутри некоторой замкнутой поверхностью, и покоится на бесконечности, может рассматриваться как движение, вызванное источниками и диполями, распределенными по этой поверхности. Объяснить, каким образом можно обойтись без рассмотрения источников или диполей.

Сфера радиуса a деформируется так, что через малый промежуток времени t уравнение ее поверхности имеет вид $r=a+UtP_2(\cos\theta)$. Определить на этой поверхности такое распределение источников или диполей, которое будет создавать тот же потенциал скоростей.

46. Безвихревое движение однородной несжимаемой невязкой жидкости вне некоторой замкнутой поверхности S вызывается движением поверхности S с заданной в любой точке S составляющей скорости q_ν по направлению внешней нормали. Обозначим через Φ потенциал скорости, который создается диполем единичной мощности, имеющим ось, параллельную оси x, и расположенным в некоторой точке P вне поверхности S (которая предполагается фиксированной). Доказать, что составляющая скорости по направлению оси x в точке P, вызванная движением поверхности S со скоростью q_ν, равна

$$-\frac{1}{4\pi}\int\int\Phi q_\nu dS.$$

Глава 17

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

17.10. Движение твердого тела в жидкости. Рассмотрим неподвижное твердое тело S, погруженное в покоящуюся неограниченную жидкость. Если твердое тело каким-либо образом пришло в движение, то возникающее в результате движение жидкости будет безвихревым и ациклическими. Кроме того, такое движение, однажды возникнув, мгновенно прекратится (см. п. 3.77, теорема VI), как только твердое тело снова вернется в состояние покоя. Мы будем рассматривать лишь такие движения жидкости, которые вызываются только движением тела при вышеуказанных условиях. В таком движении давление жидкости на поверхности тела является конечным, и, следовательно, чтобы вызвать данное движение тела, требуется конечное количество энергии, которая распределяется между телом и жидкостью. Таким образом, кинетическая энергия здесь будет конечной величиной, и, значит, скорость жидкости на бесконечности должна обращаться в нуль. Следовательно, потенциал скорости φ должен удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} &\nabla^2\varphi = 0 \text{ во всей жидкости,} \\ &\nabla\varphi = 0 \text{ в жидкости на бесконечности.} \end{aligned} \tag{1}$$

Для того чтобы записать условия, которые должны выполняться на границе тела, возьмем некоторую систему координат R', неподвижную относительно тела, например поместим начало координат в некоторой точке O' тела и проведем три оси декартовых координат $O'x$, $O'y$, $O'z$. Тогда движение тела определяется скоростью $\mathbf{u}$ начала координат и угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Следовательно, в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ на поверхности тела скорость равна $\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, и, если $\mathbf{n}$ — единичный вектор *внешней* нормали к поверхности тела в этой точке, то, воспользовавшись смешанным произведением трех векторов (п. 2.13), можно записать граничное условие в виде

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \mathbf{n}(\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{un} + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r} \times \mathbf{n}). \tag{2}$$

Это условие можно удовлетворить, полагая

$$\varphi = \mathbf{u}\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\chi}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\chi}$ — векторы, проекции которых на оси декартовой системы координат являются решениями уравнения Лапласа, причем градиенты этих векторов на бесконечности стремятся к нулю; векторы $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\chi}$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$-\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial n} = \mathbf{n}, \qquad -\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial n} = (\mathbf{r} \times \mathbf{n}). \tag{4}$$

Следовательно, векторы $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\chi}$ зависят только от формы тела, но не зависят от его движения.

Несколько частных случаев определения φ были нами уже рассмотрены, например в случаях движения сферы и эллипсоида. Мы приступим теперь к исследованию движения твердого тела с помощью метода, в котором сущест-

венной чертой является рассмотрение тела и жидкости как единой системы. Тогда силы давления на границе окажутся внутренними силами и их определение не является необходимым.

17.20. Кинетическая энергия жидкости. Используя граничные условия (2) и (3) п. 17.10, для кинетической энергии жидкости получим следующее выражение:

$$T_L = -\frac{1}{2}\varrho \int\limits_{(S)} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS = \frac{1}{2}\varrho \int\limits_{(S)} (\mathbf{u}\varphi + \boldsymbol{\omega}\chi)\,[\mathbf{n}(\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]\, dS, \qquad (1)$$

причем интеграл здесь берется по поверхности тела.

Это выражение показывает, что T_L является однородной квадратичной функцией векторов $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\omega}$. Поэтому если λ — некоторый скаляр, то при замене $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\omega}$ на $\lambda\mathbf{u}$, $\lambda\boldsymbol{\omega}$ величина T_L заменяется просто величиной $\lambda^2 T_L$. Тогда по теореме Эйлера для однородных функций (п. 2.71) имеем

$$\mathbf{u}\frac{\partial T_L}{\partial \mathbf{u}} + \boldsymbol{\omega}\frac{\partial T_L}{\partial \boldsymbol{\omega}} = 2T_L. \qquad (2)$$

Снова, воспользовавшись уравнениями (2) и (3) п. 17.10, получим

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) = -\mathbf{n}\varphi + \boldsymbol{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial T_L}{\partial \mathbf{u}} = \frac{1}{2}\varrho \int\limits_{(S)} \mathbf{n}\varphi\, dS - \frac{1}{2}\varrho \int\limits_{(S)} \boldsymbol{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS.$$

Но поскольку составляющие вектора $\boldsymbol{\varphi}$ удовлетворяют уравнению Лапласа, то по теореме Грина [см. (2) п. 2.62] получаем

$$\int\limits_{(S)} \boldsymbol{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS = \int\limits_{(S)} \varphi \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial n}\, dS = -\int\limits_{(S)} \mathbf{n}\varphi\, dS,$$

причем здесь использовано условие (4) п. 17.10. Таким образом, мы получим первую из нижеследующих формул:

$$\frac{\partial T_L}{\partial \mathbf{u}} = \varrho \int\limits_{(S)} \mathbf{n}\varphi\, dS, \qquad \frac{\partial T_L}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \varrho \int\limits_{(S)} (\mathbf{r} \times \mathbf{n})\,\varphi\, dS. \qquad (3)$$

Вторая из формул (3) получается аналогичным способом.

Если бы движение возникло под действием импульсов (см. п. 17.31), то тогда интегралы в правой части формул (3) представляли бы собой импульс и импульсивный момент, которые действуют со стороны тела S на жидкость, примыкающую к поверхности тела.

Если воспользоваться координатной формой записи, например декартовыми координатами, то приведенное выше выражение (1) для кинетической энергии будет, как в этом можно убедиться, включать 21 член, содержащий квадратичные комбинации пар из шести составляющих векторов $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\omega}$.

Если в формулах (3) взять $\lambda\mathbf{u}$ и $\lambda\boldsymbol{\omega}$ вместо $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\omega}$, то в этих формулах появится сомножитель λ. Таким образом, частные производные от кинетической энергии являются однородными линейными функциями векторов $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\omega}$.

В декартовых координатах имеем

$$\mathbf{u} = \mathbf{i}u_x + \mathbf{j}u_y + \mathbf{k}u_z,$$
$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{i}\omega_x + \mathbf{j}\omega_y + \mathbf{k}\omega_z,$$

отсюда, согласно п. 2.71, получим

$$\frac{\partial T_L}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{i}\frac{\partial T_L}{\partial u_x} + \mathbf{j}\frac{\partial T_L}{\partial u_y} + \mathbf{k}\frac{\partial T_L}{\partial u_z},$$

$$\frac{\partial T_L}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{i}\frac{\partial T_L}{\partial \omega_x} + \mathbf{j}\frac{\partial T_L}{\partial \omega_y} + \mathbf{k}\frac{\partial T_L}{\partial \omega_z}.$$

17.21. Кинетическая энергия тела. Кинетическая энергия тела определяется выражением

$$T_S = \frac{1}{2}\int_{(V)} \sigma\,[\mathbf{u} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]^2\, d\tau, \tag{1}$$

причем интеграл берется по всему объему тела V, а σ представляет собой плотность тела, которая может быть постоянной или переменной. В декартовых координатах это выражение содержит 10 независимых коэффициентов. По теореме Эйлера

$$\mathbf{u}\frac{\partial T_S}{\partial \mathbf{u}} + \boldsymbol{\omega}\frac{\partial T_S}{\partial \boldsymbol{\omega}} = 2T_S. \tag{2}$$

По формуле (1) мы сразу получаем количество движения и момент количества движения тела, а именно

$$\frac{\partial T_S}{\partial \mathbf{u}} = \int_{(V)} \sigma\,(\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\, d\tau = \mathbf{M}_S, \tag{3}$$

$$\frac{\partial T_S}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \int_{(V)} \sigma \mathbf{r} \times (\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\, d\tau = \mathbf{H}_S. \tag{4}$$

Если $T = T_L + T_S$ — полная кинетическая энергия системы, то в результате комбинации формулы (2) этого пункта и формулы (2) п. 17.20 получаем уравнение

$$\mathbf{u}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}} + \boldsymbol{\omega}\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} = 2T.$$

17.30. Динама. Система сил, являющихся *скользящими* векторами, приложенными в заданных точках тела, имеет в качестве результирующих главный вектор $\mathbf{F}$, приложенный в некотором выбранном *центре приведения* O, и главный момент $\mathbf{L}$. Сила $\mathbf{F}$ является скользящим вектором, действующим по направлению, проходящему через точку O; она получается в результате векторного суммирования в точке O векторов, равных и параллельных заданным силам. Таким образом, величина и направление силы $\mathbf{F}$ не зависят от положения центра приведения O.

С другой стороны, главный момент $\mathbf{L}$ представляет собой сумму моментов относительно O заданных сил, и, следовательно, его величина и направление зависят от положения центра приведения O; главный момент $\mathbf{L}$ является *свободным* вектором. Пара векторов $(\mathbf{F}, \mathbf{L})$ называется *динамой сил*. Для того чтобы две динамы сил были равны, должны равняться как их главные векторы, так и их главные моменты, которые относятся при этом к одному и тому же центру приведения. Соответствующим выбором центра приведения O можно добиться того, чтобы ось главного момента $\mathbf{L}$ стала параллельной главному вектору $\mathbf{F}$. Линия, по которой будет тогда направлен скользящий вектор $\mathbf{F}$, называется *центральной осью*. Такое приведение единственно, и если при этом соответствующий главный момент обозначить через $\boldsymbol{\Gamma}$, то $\mathbf{F} \times \boldsymbol{\Gamma} = 0$.

Точно таким же путем система импульсов, являющихся скользящими векторами, приводится к *импульсивной динаме* $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda})$, где $\boldsymbol{\xi}$ — векторная сумма импульсов, а $\boldsymbol{\lambda}$ — векторная сумма их моментов относительно центра приве-

дения. Аналогично можно рассматривать *динаму количества движения* (**M**, **H**), если привести скользящие векторы количества движения к одному скользящему вектору количества движения **M** и вектору момента количества движения **H**.

17.31. Импульс. Если задано движение тела S в неограниченной жидкости, то движение жидкости определяется, и притом однозначно, только движением тела; потенциал скоростей φ при этом также определяется однозначно (см. п. 3.77, теорема VII), если не принимать во внимание несущественную аддитивную постоянную. Движение жидкости, которое фактически существует в некоторый момент времени t, можно создать *мгновенно* из состояния покоя, приложив к телу соответствующую импульсивную динаму. Эта импульсивная динама должна быть выбрана таким образом, чтобы *мгновенно* создать у тела такую динаму количества движения, которая фактически существует в момент времени t, и чтобы погасить совершенно определенную импульсивную динаму, которая создается на границе тела импульсивным давлением $\rho\varphi$ жидкости (см. п. 3.64).

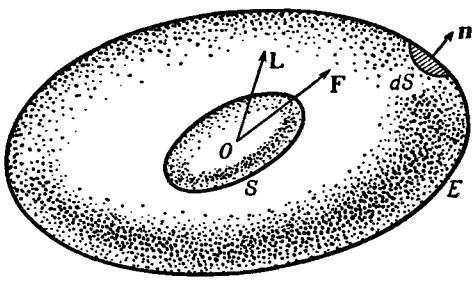


Рис. 317.

Импульсивная динама, прилагаемая таким образом к телу для создания движения из состояния покоя, называется *импульсом* системы в рассматриваемый момент времени.

17.32. Скорость изменения импульса. Вместо движущейся системы отсчета R' с началом в точке O', зафиксированной относительно тела S (рис. 317), мы будем в этом пункте рассматривать систему отсчета R с началом в точке O, неподвижную в пространстве (см. п. 3.55). Скорость изменения во времени относительно этой системы отсчета R будем обозначать через $\partial/\partial t$. Докажем, что если $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda})$ — импульсивная динама, определенная в п. 17.31, а $(\mathbf{F}, \mathbf{L})$ — динама внешних сил, приложенных к телу, причем обе эти динамы отнесены к одному центру приведения, то

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = \mathbf{F}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial t} = \mathbf{L}. \tag{1}$$

Доказательство. Представим себе некоторую замкнутую поверхность E, неподвижную в пространстве и содержащую внутри тело S. Эта поверхность рассматривается чисто геометрически и не является какой-либо материальной границей при движении жидкости. Пусть динама количества движения $(\mathbf{M}_E, \mathbf{H}_E)$ определяет количество движения системы Σ_E, состоящей из тела и жидкости, находящейся внутри поверхности E в момент времени t. Если предположить, что движение тела и неограниченной жидкости, которое фактически существует в момент времени t, создается мгновенно из положения покоя, как это описано в п. 17.31, с помощью импульса $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda})$, приложенного к телу, то во всей жидкости будет существовать импульсивное давление $\rho\varphi$; следовательно, внешний импульс, действующий на систему Σ_E, будет состоять только из динамы $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda})$ и импульсивного давления $\rho\varphi$ на поверхности E. Итак, эти импульсы создают динаму количества движения $(\mathbf{M}_E, \mathbf{H}_E)$. Следовательно, если $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к элементу dS, то

$$\boldsymbol{\xi} - \int\limits_{(E)} \mathbf{n}\rho\varphi\, dS = \mathbf{M}_E, \qquad \boldsymbol{\lambda} - \int\limits_{(E)} (\mathbf{r} \times \mathbf{n}\rho\varphi)\, dS = \mathbf{H}_E, \tag{2}$$

причем второй интеграл здесь представляет собой момент импульсивной силы давления относительно точки O.

Уравнение для давления имеет вид

$$p = -\frac{1}{2}\varrho q^2 + \varrho\frac{\partial\varphi}{\partial t} + C,$$

причем постоянное давление C на границе не оказывает влияния. Тогда уравнения движения системы Σ_E запишутся в виде

$$\mathbf{F} - \int\limits_{(E)} \mathbf{n}\left(\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\varrho q^2\right) dS = \frac{\partial \mathbf{M}_E}{\partial t} + \int\limits_{(E)} \varrho\mathbf{q}\,(\mathbf{nq})\,dS,$$

$$\mathbf{L} - \int\limits_{(E)} (\mathbf{r}\times\mathbf{n})\left(\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\varrho q^2\right) dS = \frac{\partial \mathbf{H}_E}{\partial t} + \int\limits_{(E)} \varrho\mathbf{r}\times\mathbf{q}\,(\mathbf{nq})\,dS,$$

причем интегралы в правой части представляют собой соответственно потоки количества движения и момента количества движения через поверхность E (см. пп. 3.40, 3.42). Исключив отсюда $\mathbf{M}_E$ и $\mathbf{H}_E$ с помощью уравнения (2), получим уравнения

$$\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial t} - \mathbf{F} = \varrho\int\limits_{(E)}\left[\frac{1}{2}\mathbf{n}q^2 - (\mathbf{nq})\,\mathbf{q}\right] dS, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\lambda}}{\partial t} - \mathbf{L} = \varrho\int\limits_{(E)}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{r}\times\mathbf{n})\,q^2 - (\mathbf{nq})\,(\mathbf{r}\times\mathbf{q})\right] dS. \tag{4}$$

Поскольку левые части этих уравнений не зависят от E, то интегралы в правых частях уравнений также не зависят от частного вида замкнутой поверхности E [1]). Для доказательства равенств (1) примем, что все точки поверхности E находятся на бесконечно большом расстоянии от тела, тогда эти интегралы обратятся в нуль [2]). Отсюда сразу следует справедливость равенств (1).

Из формулы (3) п. 3.75 следует, что в любой точке P внутри жидкости имеет место соотношение

$$\varphi_P = C - \int\limits_{(S)}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dS + \int\limits_{(S)}\frac{\varphi}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS,$$

где r — расстояние от точки P до элемента dS поверхности тела, по которой вычисляются эти интегралы.

Для точек P на большом расстоянии R от начала O можно положить $r = R + s$, где s/R — бесконечно малая величина, поэтому приближенно получим

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{s}{R^2}, \qquad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2} - \frac{2s}{R^3}.$$

Заметим, что в силу уравнения неразрывности $\int\limits_{(S)}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS = 0$. Поэтому потенциал φ_P имеет порядок

$$\varphi_P = C + \frac{A}{R^2} + \ldots,$$

---

[1]) Эта независимость также следует из п. 3.63.

[2]) Необходимо отметить, что мы не утверждаем, что эти интегралы равны нулю в пределе, а лишь говорим, что они равны постоянной. Но из предельного поведения этих интегралов на бесконечности следует, что эта постоянная равна нулю.

где величина A не зависит от R. Отсюда следует, что скорость q имеет порядок R^{-3}. Для точек на поверхности E имеем $dS = R^2 d\omega$, где $d\omega$ — элементарный телесный угол. Следовательно, интегралы в уравнениях (3) и (4) являются величинами порядка

$$\int\limits_{(E)} \frac{d\omega}{R^4}, \qquad \int\limits_{(E)} \frac{d\omega}{R^3}.$$

Ясно, что при $R \to \infty$ эти величины стремятся к нулю, что и требовалось доказать.

17.40. Движущееся начало координат. Удобнее относить движение не к системе координат R с началом O, неподвижной в пространстве, а к системе координат R' с началом O', неподвижной относительно тела (см. п. 17.10). В момент времени t система координат R' занимает определенное положение в пространстве. Выберем систему координат R так, чтобы она в этот момент времени совпадала с системой координат R'. Пусть движение системы координат R' описывается скоростью $\mathbf{u}$ начала O' и угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, причем

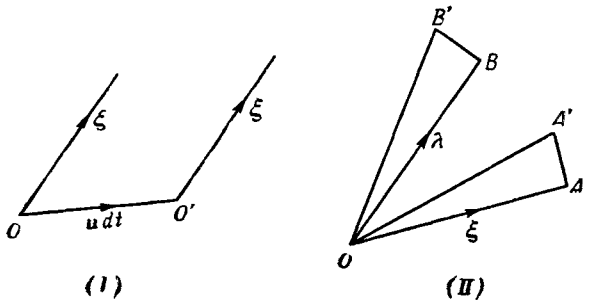


Рис. 318.

обе эти величины рассматриваются относительно неподвижной системы координат R. Рассмотрим изменение векторов $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\lambda}$ за малый промежуток времени dt. Поскольку этот промежуток является бесконечно малым, можно отдельно рассматривать поступательное перемещение начала $\mathbf{u}\,dt$, поворот системы координат $\boldsymbol{\omega}\,dt$ и изменение векторов $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\lambda}$ за промежуток dt, каким оно представляется наблюдателю, движущемуся с системой координат R', а затем сложить эти результаты.

При рассмотрении влияния поступательного перемещения системы координат мы не будем учитывать поворот этой системы и будем предполагать, что векторы $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\lambda}$ остаются неизменными для наблюдателя, движущегося с системой координат R'.

Поскольку в рассматриваемом случае скользящий вектор $\boldsymbol{\xi}$ смещается параллельно самому себе, он не претерпевает каких-либо изменений. С другой стороны, момент импульса относительно неподвижного начала O увеличивается на величину, равную моменту вектора $\boldsymbol{\xi}$ относительно точки O в рассматриваемом новом положении этого вектора $\boldsymbol{\xi}$ в точке O' (см. рис. 318), т. е. на величину $\mathbf{u}\,dt \times \boldsymbol{\xi}$. Таким образом, скорость изменения вектора $\boldsymbol{\lambda}$, обусловленная движением начала координат, равна $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi}$.

Рассмотрим теперь поворот системы координат на величину $\boldsymbol{\omega}\,dt$; начало остается при этом неподвижным, а импульс остается неизменным относительно наблюдателя, движущегося с системой координат R'.

Если OA и OB на рис. 318 представляют собой векторы $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ в момент времени t, то в момент времени $t + dt$ они изображаются отрезками OA'

и OB', где

$$\overrightarrow{AA'} = \boldsymbol{\omega}\, dt \times \overrightarrow{OA}, \qquad \overrightarrow{BB'} = \boldsymbol{\omega}\, dt \times \overrightarrow{OB}.$$

Таким образом, скорости приращения этих векторов относительно неподвижной системы отсчета R равны соответственно $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\lambda}$.

Наконец, наблюдателю, движущемуся с системой координат R', будет казаться, что векторы $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ изменяются во времени со скоростями, которые мы будем обозначать через $d\boldsymbol{\xi}/dt$ и $d\boldsymbol{\lambda}/dt$.

Итак, скорости изменения векторов $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ относительно неподвижной системы координат R, с которой движущаяся система координат R' мгновенно совпадает, равны соответственно

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\xi}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial t} = \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi}.$$

17.41. Уравнения движения. Поскольку скорость изменения импульса равна внешней силе, то в соответствии с п. 17.32 имеем

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\xi} = \mathbf{F},$$

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi} = \mathbf{L}.$$

Эти уравнения представляют собой уравнения движения в форме, удобной для рассмотрения их в системе координат, оси которой фиксированы относительно движущегося тела.

17.42. Определение импульса через кинетическую энергию. Если $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda})$ представляют собой составляющие импульса относительно центра приведения O, то динама сил, действующая на тело в течение бесконечно малого промежутка времени δt, изменит скорости $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$ до значений $(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega} + \delta\boldsymbol{\omega})$, и тогда соответствующий импульс будет равен $(\boldsymbol{\xi} + \delta\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda} + \delta\boldsymbol{\lambda})$, причем все приращения здесь являются бесконечно малыми. В соответствии с определением импульса [1]) совершенная при этом работа равна $\mathbf{u}\delta\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\omega}\delta\boldsymbol{\lambda}$, и она должна равняться приращению полной кинетической энергии

$$T = T_S + T_L.$$

Таким образом,

$$\mathbf{u}\delta\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\omega}\delta\boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}}\,\delta\mathbf{u} + \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}}\,\delta\boldsymbol{\omega} = \delta T. \tag{1}$$

Если положить $\delta\mathbf{u} = h\mathbf{u}$, $\delta\boldsymbol{\omega} = h\boldsymbol{\omega}$, где h — бесконечно малая скалярная постоянная, то, поскольку импульс является однородной линейной функцией скоростей, мы должны также иметь $\delta\boldsymbol{\xi} = h\boldsymbol{\xi}$, $\delta\boldsymbol{\lambda} = h\boldsymbol{\lambda}$. Следовательно, согласно равенству (5) п. 17.21, получим

$$\mathbf{u}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}}\,\mathbf{u} + \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{\omega} = 2T.$$

Записывая это уравнение в вариациях, находим

$$\mathbf{u}\delta\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}\delta\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}\delta\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}\delta\boldsymbol{\omega} = 2\delta T.$$

---

[1]) Если $(\mathbf{F}, \mathbf{L})$ — рассматриваемая динама сил, то совершенная работа равна

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}\delta t) + \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}\delta t) = \mathbf{u}(\mathbf{F}\delta t) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{L}\delta t) = \mathbf{u}\delta\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\omega}\delta\boldsymbol{\lambda}.$$

Тогда с помощью формулы (1) получим

$$\boldsymbol{\xi}\delta\mathbf{u}+\boldsymbol{\lambda}\delta\boldsymbol{\omega}=\frac{\partial T}{\partial\mathbf{u}}\,\delta\mathbf{u}+\frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\omega}}\,\delta\boldsymbol{\omega}.$$

Так как $\delta\mathbf{u}$ и $\delta\boldsymbol{\omega}$ являются независимыми, то можем записать равенства

$$\boldsymbol{\xi}=\frac{\partial T}{\partial\mathbf{u}},\qquad \boldsymbol{\lambda}=\frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\omega}},$$

которые выражают импульс через частные производные от полной кинетической энергии [1]).

17.43. Уравнения движения, выраженные через кинетическую энергию. Уравнения движения, полученные в п. 17.41, можно представить теперь в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\mathbf{u}}\right)+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\partial T}{\partial\mathbf{u}}=\mathbf{F},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\omega}}\right)+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\omega}}+\mathbf{u}\times\frac{\partial T}{\partial\mathbf{u}}=\mathbf{L}.$$

Эти уравнения называются уравнениями Кирхгофа в векторной форме. Если учесть, что $T=T_S+T_L$, то эти уравнения можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_S}{\partial\mathbf{u}}\right)+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\partial T_S}{\partial\mathbf{u}}=\mathbf{F}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_L}{\partial\mathbf{u}}\right)-\boldsymbol{\omega}\times\frac{\partial T_L}{\partial\mathbf{u}},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_S}{\partial\boldsymbol{\omega}}\right)+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\partial T_S}{\partial\boldsymbol{\omega}}+\mathbf{u}\times\frac{\partial T_S}{\partial\mathbf{u}}=\mathbf{L}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_L}{\partial\boldsymbol{\omega}}\right)-\boldsymbol{\omega}\times\frac{\partial T_L}{\partial\boldsymbol{\omega}}-\mathbf{u}\times\frac{\partial T_L}{\partial\mathbf{u}}.$$

Если бы жидкость отсутствовала ($T_L=0$), то тогда правые части этих уравнений содержали бы только векторы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{L}$. Воздействие сил давления жидкости представляется, таким образом, остальными членами правых частей. Следовательно, воздействие жидкости представляется силой $\mathbf{F}_L$ и парой $\mathbf{L}_L$, которые имеют вид

$$\mathbf{F}_L=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_L}{\partial\mathbf{u}}\right)-\boldsymbol{\omega}\times\frac{\partial T_L}{\partial\mathbf{u}},$$

$$\mathbf{L}_L=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_L}{\partial\boldsymbol{\omega}}\right)-\boldsymbol{\omega}\times\frac{\partial T_L}{\partial\boldsymbol{\omega}}-\mathbf{u}\times\frac{\partial T_L}{\partial\mathbf{u}}.$$

17.50. Установившееся поступательное движение. Если движение является установившимся и тело не вращается, то воздействие жидкости на тело сводится к нулевой силе (парадокс Даламбера) и паре сил

$$-\mathbf{u}\times\frac{\partial T_L}{\partial\mathbf{u}}. \tag{1}$$

Эта пара (см. п. 6.42) стремится повернуть тело; она обращается в нуль тогда и только тогда, когда обращается в нуль написанное выше векторное произведение, т. е. в том случае, когда векторы $\mathbf{u}$ и $\partial T_L/\partial\mathbf{u}$ параллельны.

Следовательно, в этом случае скорость $\mathbf{u}$ направлена по нормали к эллипсоиду

$$\mathbf{u}\,\frac{\partial T_L}{\partial\mathbf{u}}=c,$$

---

[1]) Этот результат можно получить, комбинируя формулу (3) п. 17.20 и формулы (3) и (4) п. 17.21. Предоставляем читателю выполнить это в качестве упражнения.

где c — постоянная величина[1]). По формуле (2) п. 17.20 для $\boldsymbol{\omega} = 0$ получим уравнение этого эллипсоида в виде

$$T_L = \frac{1}{2} c. \tag{2}$$

Направление $\mathbf{u}$ может быть параллельно нормали к эллипсоиду только в том случае, когда вектор $\mathbf{u}$ направлен вдоль одной из главных осей эллипсоида.

Поскольку у эллипсоида имеются три главные оси, то отсюда следует, что в пространстве существуют три взаимно перпендикулярных направления, таких, что если тело движется без вращения вдоль одного из этих направлений,

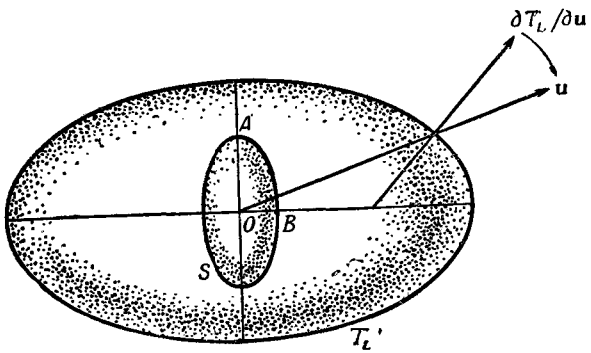


Рис. 319.

то оно будет продолжать такое движение. Эти направления называются *направлениями установившегося поступательного движения.*

Пусть тело движется со скоростью $\mathbf{u}$ по направлению установившегося поступательного движения. Пусть имеется малое возмущение, вызванное изменением скорости от величины $\mathbf{u}$ до $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ и сообщением телу угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, где $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ в начальный момент времени являются бесконечно малыми. Тогда, если пренебречь членами, содержащими квадраты этих величин, то уравнения Кирхгофа станут линейными. Исследование устойчивости движения связано с решением этих уравнений и является, за исключением некоторых симметричных случаев, довольно сложным делом. Мы можем, однако, получить суждение об устойчивости движения из следующего соображения, при котором мы не будем учитывать влияние $\boldsymbol{\omega}$.

Пусть рассматриваемое тело является эллипсоидом, тогда величина T_L определяется выражением, полученным в п. 16.52. Вычисления показывают, что наибольшая ось эллипсоида (2) будет направлена по направлению наименьшей оси рассматриваемого тела — эллипсоида, и наоборот (см. рис. 319).

На этом рисунке показано также направление пары (1). Если эллипсоид S движется в направлении своей наименьшей оси OB, то пара (1) стремится ликвидировать любое малое отклонение движения от этого направления. Наоборот, если направление движения совпадает с наибольшей осью OA эллипсоида S, то эта пара будет увеличивать любое отклонение движения. Если же направление движения совпадает с направлением средней по величине оси эллипсоида S, то в зависимости от направления скорости возмущения эта пара будет либо восстанавливать это движение, либо нет. Таким образом, когда в жидкости движется тело произвольного вида, то движение будет устойчивым только в том случае, если тело движется вперед своей широкой стороной.

---

[1]) См. пример 27 гл. 2. Упомянутый здесь эллипсоид представляет собой эллипсоид в пространстве годографа, в котором составляющие скорости (u, v, w) являются декартовыми координатами (x, y, z).

Сделанное выше замечание дает принципиальное объяснение многим, хорошо известным явлениям. Например, для удержания корабля на курсе необходимо рулевое управление; воздушный корабль продолговатой формы также требует подобного управления. Парусный корабль при брошенном руле не будет все время идти по ветру, а будет стремиться расположиться под прямым углом к ветру. Тело, погружающееся в жидкость, стремится погружаться так, чтобы наибольший размер тела принимал горизонтальное положение.

Наконец, можно отметить, что, для того чтобы неподвижно удерживать тело в равномерном потоке со скоростью $\mathbf{u}$, требуется пара

$$\mathbf{u} \times \frac{\partial T_L}{\partial \mathbf{u}},$$

где T_L — кинетическая энергия жидкости, когда эта жидкость покоится, а тело движется со скоростью $\mathbf{u}$.

Таким образом, на тело, находящееся в равномерном потоке, всегда действует пара, кроме тех случаев, когда тело ориентировано в потоке по одному из трех направлений, соответствующих направлениям установившегося поступательного движения. Этот вывод можно рассматривать как дополнение к парадоксу Даламбера.

17.51. Установившееся вращение. Когда тело находится в установившемся вращении, не совершая при этом поступательного перемещения, то $\mathbf{u} = 0$, а на тело действует пара с моментом

$$-\boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial T_L}{\partial \boldsymbol{\omega}}.$$

Этот момент обращается в нуль, когда векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\partial T_L/\partial \boldsymbol{\omega}$ параллельны, т. е. когда ось вращения параллельна нормали к эллипсоиду

$$\boldsymbol{\omega} \frac{\partial T_L}{\partial \boldsymbol{\omega}} = c, \quad \text{или} \quad T_L = \frac{1}{2} c.$$

Следовательно, существуют три оси установившегося вращения; эти оси взаимно перпендикулярны, но не обязательно пересекаются, так как указанный эллипсоид определяет только направление, а не положение этих осей.

17.52. Тело вращения. Если тело обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, то полная кинетическая энергия, отнесенная к осям, являющимся линиями пересечения этих плоскостей симметрии, должна иметь вид

$$2T = Pu_x^2 + Qu_y^2 + Ru_z^2 + A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2.$$

Действительно, при изменении знака любой составляющей скорости кинетическая энергия должна оставаться неизменной, поэтому члены, содержащие другие произведения составляющих скоростей, в это выражение не входят. Если тело является телом вращения относительно оси x, то кинетическая энергия T не будет изменяться при перестановке u_y и u_z, или ω_y и ω_z; следовательно, $Q = R$ и $B = C$. Далее, если ось тела при движении всегда остается в плоскости x, y и вращение вокруг этой оси отсутствует, то $u_z = 0$, $\omega_y = \omega_x = 0$. Следовательно, в этом случае

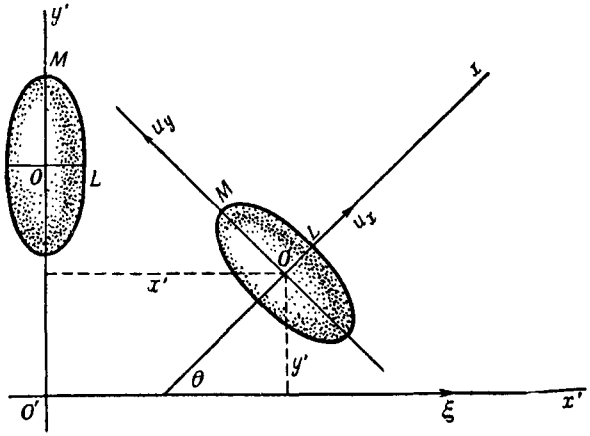
$$T = \frac{1}{2}(Pu_x^2 + Qu_y^2 + C\omega_z^2).$$

Если внешние силы отсутствуют, то уравнения движения имеют вид

$$\begin{gathered} \mathbf{i}P\dot{u}_x + \mathbf{j}Q\dot{u}_y + P\omega_z u_x \mathbf{j} - Q\omega_z u_y \mathbf{i} = 0, \\ C\dot{\omega}_z \mathbf{k} + (Q-P)\,\mathbf{k}u_x u_y = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы вдоль осей координат.

Так как внешние силы отсутствуют, то уравнение (1) п. 17.32 показывает, что составляющие импульса сохраняются постоянными. В рассматриваемом случае составляющая λ направлена перпендикулярно плоскости движения



Р и с. 320.

и поэтому импульс сводится к одной составляющей ξ, которая является скользящим вектором, направленным, скажем, вдоль линии $O'x'$ (рис. 320). Тогда

$$Pu_x = \xi\cos\theta, \qquad Qu_y = -\xi\sin\theta, \qquad \omega_z = \dot{\theta}, \tag{2}$$

где θ — угол наклона линии OL с осью x', линия OL связана с телом и совпадает с осью x.

Из уравнений (1) следует, что

$$C\dot{\theta} + \frac{\xi^2(P-Q)}{PQ}\sin\theta\cos\theta = 0. \tag{3}$$

Положив $\chi = 2\theta$, получим

$$C\ddot{\chi} + \frac{\xi^2(P-Q)}{PQ}\sin\chi = 0. \tag{4}$$

Если $P > Q$, то это уравнение представляет собой уравнение движения маятника. Величина χ, определяемая уравнением (4), будет периодической, так же как и величина θ, определяемая уравнением (3).

Если (x', y') — координаты центра тела, то по формулам (2) получим

$$\dot{x}' = u_x\cos\theta - u_y\sin\theta = \xi\left(\frac{\cos^2\theta}{P} + \frac{\sin^2\theta}{Q}\right), \tag{5}$$

$$\dot{y}' = u_x\sin\theta + u_y\cos\theta = \xi\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right)\sin\theta\cos\theta = \frac{C\ddot{\theta}}{\xi}. \tag{6}$$

При выводе последнего равенства использовано уравнение (3).

Уравнение (5) показывает, что величина $\dot{x}'$ никогда не становится отрицательной; следовательно, центр тела движется только вперед и траектория его не имеет петель. Из уравнения (6) получим [1])

$$y' = C\dot{\theta}/\xi.$$

Поскольку θ периодическая функция, то отсюда следует, что y' также является периодической функцией; поэтому траектория центра тела представляет собой синусоиду. Последнее уравнение показывает также, что y' пропорционально $\dot{\theta}$.

Здесь могут иметь место два основных случая в зависимости от того, совершает ли тело полное вращение или совершает колебания между двумя положениями, определяемыми равенствами $\theta = \alpha$ и $\theta = -\alpha$. Оба эти случая изображены на рис. 321. В первом случае величина $\dot{\theta}$ сохраняет свой знак, поэтому

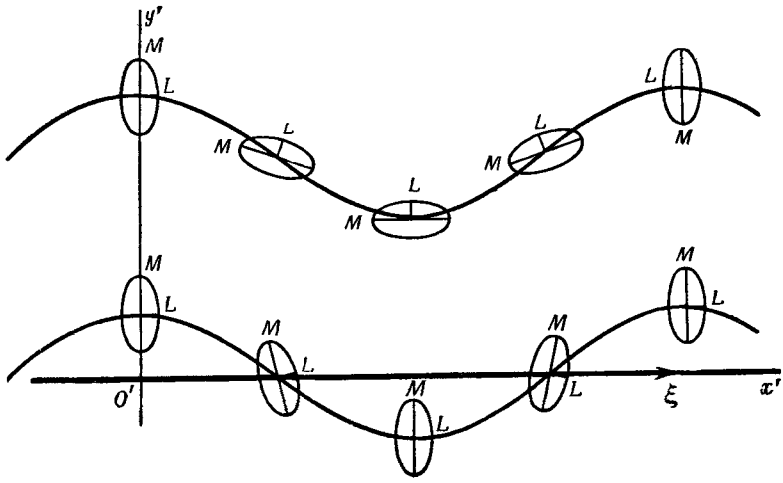


Рис. 321.

траектория не пересекает линии действия импульса. Когда же тело совершает колебания, то величина $\dot{\theta}$ (а значит, величина y') обращается в нуль в крайних положениях и траектория располагается симметрично относительно линии действия импульса.

17.53. Устойчивость, обусловленная вращением. В случае тела вращения кинетическую энергию можно записать в виде

$$T = \frac{1}{2}(Au_x^2 + Bu_y^2 + Bu_z^2 + P\omega_x^2 + Q\omega_y^2 + Q\omega_z^2).$$

Если тело имеет скорости $\mathbf{i}u$, $\mathbf{i}\omega$, то $u_x = u$, $\omega_x = \omega$, а при рассмотрении малых возмущений величины u_y, ω_y, u_z, ω_z будут малыми величинами. Далее, имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{i}Au_x + \mathbf{j}Bu_y + \mathbf{k}Bu_z,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{i}P\omega_x + \mathbf{j}Q\omega_y + \mathbf{k}Q\omega_z.$$

---

[1]) Произвольная постоянная интегрирования здесь равна нулю, поскольку момент импульса относительно центра тела обращается в нуль при $y' = 0$.

Если пренебречь произведениями малых величин, то уравнения движения по направлению оси x примут вид

$$\frac{du_x}{dt}=0, \qquad \frac{d\omega_x}{dt}=0\ ^{1}).$$

Следовательно, с точностью до величин первого порядка $u_x=u$, $\omega_x=\omega$. С той же степенью точности остальные уравнения примут вид

$$B\frac{du_y}{dt}-B\omega u_z+Au\omega_z=0, \qquad B\frac{du_z}{dt}+B\omega u_y-Au\omega_y=0,$$

$$Q\frac{d\omega_y}{dt}+(P-Q)\,\omega\omega_z+(A-B)\,uu_z=0,$$

$$Q\frac{d\omega_z}{dt}-(P-Q)\,\omega\omega_y-(A-B)\,uu_y=0.$$

Для того чтобы найти решение этих уравнений, положим $u_y=ae^{i\lambda t}$, $u_z=be^{i\lambda t}$, $\omega_y=\alpha e^{i\lambda t}$, $\omega_z=\beta e^{i\lambda t}$. Тогда получим четыре следующих уравнения:

$$\begin{array}{cccc}
iB\lambda a & -B\omega b & & +Au\beta = 0,\\
B\omega a & +iB\lambda b & -Au\alpha & = 0,\\
 & (A-B)\,ub & +Qi\lambda\alpha & +(P-Q)\,\omega\beta = 0,\\
-(A-B)\,ua & & -(P-Q)\,\omega\alpha & +Qi\lambda\beta = 0.
\end{array}$$

Исключение из этих уравнений величин a, b, α, β приводит к определителю

$$\begin{vmatrix}
iB\lambda & -B\omega & 0 & Au\\
-B\omega & -iB\lambda & Au & 0\\
0 & (A-B)\,u & iQ\lambda & (P-Q)\,\omega\\
(A-B)\,u & 0 & (P-Q)\,\omega & -iQ\lambda
\end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая этот определитель, получаем

$$[BQ\lambda^2-(P-Q)\,B\omega^2-A\,(A-B)\,u^2]^2-[B\,(P-2Q)\,\lambda\omega]^2=0.$$

Отсюда получаются два квадратных уравнения для λ

$$BQ\lambda^2-B\,(P-2Q)\,\lambda\omega-B\,(P-Q)\,\omega^2-A\,(A-B)\,u^2=0,$$
$$BQ\lambda^2+B\,(P-2Q)\,\lambda\omega-B\,(P-Q)\,\omega^2-A\,(A-B)\,u^2=0.$$

Условие устойчивости состоит в том, чтобы λ было действительным, так как в этом случае $e^{i\lambda t}$ будет периодической функцией и поэтому возмущение, если оно вначале было мало, так и остается малым.

Корни обоих вышенаписанных квадратных уравнений будут действительными, если

$$B^2\,(P-2Q)^2\,\omega^2>-4BQ\,[B\,(P-Q)\,\omega^2+A\,(A-B)\,u^2],$$

т. е. если

$$B^2P^2\omega^2+4ABQ\,(A-B)\,u^2>0.$$

Если $A\geqslant B$, то это условие удовлетворяется всегда, а для любых A и B это условие удовлетворяется только при достаточно больших значениях ω.

Известным примером применения рассматриваемого здесь вопроса является устойчивость, которую придает снаряду вращение, сообщаемое нарезкой в стволе орудия.

---

1) См. уравнения Кирхгофа п. 17, 43. — *Прим. ред.*

17.54. Тело, содержащее полость. Если тело имеет полость, в которой находится жидкость, совершающая ациклическое движение, то полная энергия системы будет равняться сумме энергий тела и жидкости. Предыдущие рассуждения показывают, что потенциал скорости жидкости является однородной линейной функцией от скоростей тела ($\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\omega}$), поэтому кинетическая энергия жидкости будет, очевидно, однородной квадратичной функцией от ($\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\omega}$). Таким образом, влияние жидкости, находящейся в полости внутри тела, заключается просто в изменении присоединенной массы и присоединенного момента инерции тела, а движение всей системы будет таким же, как движение данного тела, но уже с измененными значениями присоединенной массы и присоединенного момента инерции[1]).

17.60. Уравнения Лагранжа. Положение динамической системы считается известным, если известны координаты каждой точки этой системы, или если их по крайней мере можно определить по каким-либо другим известным величинам. Такими координатами могут быть обычные декартовы координаты x, y, z или любые другие величины, через которые можно выразить координаты.

Например, в случае волчка, вращающегося в поле силы тяжести около фиксированной точки своей оси, достаточно знать угол наклона θ оси волчка к вертикали и угол ω, который вертикальная плоскость, проходящая через эту ось, образует с некоторой неподвижной вертикальной плоскостью. Если θ и ω заданы как функции времени и если заданы положение волчка и его движение в начальный момент времени, то можно определить положение любой точки волчка в любой момент времени t. Величины θ, ω называются *обобщенными координатами.*

Развивая дальше эту идею, мы можем считать, что положение любой заданной динамической системы определяется некоторым числом обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Если радиус-вектор $\mathbf{r}$ каждой точки системы задан явно с помощью соотношения вида

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, \ldots, q_n), \tag{1}$$

то говорят, что такая система является *голономной.* Отсюда непосредственно следует, что скорость определяется равенством

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \sum_i \boldsymbol{\alpha}_i \dot{q}_i, \tag{2}$$

где индекс i обозначает суммирование от $i = 1$ до $i = n$ и где

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \partial \mathbf{r}/\partial q_i. \tag{3}$$

Отсюда в силу равенства (2) имеем

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} = \boldsymbol{\alpha}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}. \tag{4}$$

Для неголономной системы равенство (2) также выполняется, но при этом, однако, соотношения (3) не имеют места; поэтому вместо уравнения (1) получается уравнение $d\mathbf{r} = \sum_i \boldsymbol{\alpha}_i dq_i$, не являющееся уравнением в полных дифференциалах; таким образом, для неголономных систем, уравнение (4) больше не имеет места.

Рассмотрим теперь систему из нескольких тел S, движущуюся в невязкой жидкости L, которая может быть как неограниченной, так и ограниченной

[1]) Впервые этот результат был получен Н. Е. Жуковским (см. собр. соч., т. II). *Прим. ред.*

неподвижной замкнутой поверхностью E. Мы будем предполагать, что эти тела образуют голономную систему и что движение жидкости полностью обусловлено движением тел, и это движение мгновенно прекратится, если все тела одновременно придут в состояние покоя. Тогда движение жидкости будет безвихревым и ациклическим.

Мы не можем, однако, предполагать, что жидкость представляет собой голономную систему. Поэтому если тела системы движутся циклически, т. е. каждое тело возвращается к своему первоначальному положению, то нельзя утверждать, что каждая частица жидкости при этом также вернется в свое первоначальное положение. Действительно, можно построить примеры, которые, оказывается, приводят к противоположному заключению. Таким образом, мы не можем предполагать, что уравнение (1) будет иметь место и для частиц жидкости.

На поверхности тела имеется условие

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial n} = V_n, \tag{5}$$

где φ — потенциал скорости, а V_n — нормальная составляющая скорости на поверхности тела. На поверхности E имеем $V_n = 0$. По предположению V_n является *линейной* функцией обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, поэтому уравнение Лапласа и граничные условия (5) единственным образом определяют φ как *линейную* функцию обобщенных скоростей. Следовательно, можно записать

$$\varphi = \sum_i \varphi_i \dot{q}_i, \tag{6}$$

где φ_i представляют собой функции обобщенных координат (но не скоростей) и удовлетворяют уравнению Лапласа. Тогда если вычислить градиент этого потенциала, то можно увидеть, что равенство (2) будет иметь место также и для жидкости.

Рассмотрим теперь работу, совершаемую в единицу времени всеми силами системы в некотором ее *виртуальном движении*, в котором обобщенные виртуальные скорости (мы будем обозначать их через Dq_i/Dt) являются геометрически возможными скоростями. Тогда для точек тела имеем соотношение

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \frac{Dq_i}{Dt}, \tag{7}$$

а для движения жидкости

$$\varphi = \sum_i \varphi_i \frac{Dq_i}{Dt}. \tag{8}$$

Для краткости мы будем называть работу, совершаемую любой системой сил в единицу времени, *мощностью* этих сил и будем обозначать ее для виртуальных перемещений через DW/Dt.

Рассмотрим пока только движение тел системы. Если $\mathbf{F}_S$ является суммарной внутренней и внешней силой, приложенной в точке P к отдельной частице системы массы m, то виртуальная мощность сил, действующих на все тела системы, выразится с помощью соотношения (7) следующим образом:

$$\frac{DW_S}{Dt} = \sum_P \left(\mathbf{F}_S \frac{D\mathbf{r}}{Dt}\right) = \sum_P \sum_i \left(\mathbf{F}_S \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right) \frac{Dq_i}{Dt} = \sum_i Q_{S,i} \frac{Dq_i}{Dt}, \tag{9}$$

где

$$Q_{S,i}=\sum_P\left(\mathbf{F}_S\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}\right) \tag{10}$$

есть *обобщенная сила*, соответствующая обобщенной координате q_i. Уравнение движения частицы, находящейся в точке P, имеет вид $\mathbf{F}_S=m\ddot{\mathbf{r}}$, и, следовательно, из формулы (10) получаем

$$Q_{S,i}=\sum_P m\ddot{\mathbf{r}}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\sum_P m\dot{\mathbf{r}}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}\right)-\sum_P m\dot{\mathbf{r}}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i}.$$

Теперь мы воспользуемся свойством (4) голономной системы. Заменяя $\partial\mathbf{r}/\partial q_i$ на $\partial\dot{\mathbf{r}}/\partial\dot{q}_i$ и замечая, что кинетическая энергия тела равна

$$T_S=\frac{1}{2}\sum_P m\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}},$$

получим *уравнения Лагранжа* для тел системы, а именно

$$Q_{S,i}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_S}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T_S}{\partial q_i},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь движение жидкости. Чтобы избежать недоразумений с обобщенными координатами, будем обозначать скорость жидкости через $\mathbf{v}$ вместо обычного обозначения $\mathbf{q}$. Тогда, используя равенство (6), получим

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=-\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}}=-\sum_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{r}}\dot{q}_i, \tag{12}$$

следовательно,

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{q}_i}=-\frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{r}}. \tag{13}$$

Кинетическая энергия жидкости равна

$$T_L=\frac{1}{2}\int\varrho\mathbf{v}\mathbf{v}\,d\tau,$$

и, следовательно, в силу уравнения (13) имеем

$$\frac{\partial T_L}{\partial\dot{q}_i}=\varrho\int\mathbf{v}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{q}_i}\,d\tau=-\varrho\int\mathbf{v}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{r}}\,d\tau, \tag{14}$$

где интегралы берутся по всему объему, занятому жидкостью. В силу соотношения (8) при виртуальном движении жидкости виртуальная скорость запишется в виде

$$\mathbf{V}=\frac{D\mathbf{r}}{Dt}=-\sum_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{r}}\frac{Dq_i}{Dt}. \tag{15}$$

Поскольку операторы d/dt и D/Dt являются независимыми, то из уравнений (12) и (15) следует, что

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=\frac{d\mathbf{V}}{dt}. \tag{16}$$

Пусть $\mathbf{F}_L$ представляет собой полную силу (включая силу давления), отнесенную к единице массы и действующую на частицу жидкости. Тогда уравнение движения имеет вид

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{v}, \tag{17}$$

а виртуальная мощность сил, действующих на жидкость, равна

$$\frac{DW_L}{Dt} = \int \varrho \mathbf{F}_L \mathbf{V}\, d\tau = -\sum_i \int \varrho \mathbf{F}_L \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{r}} \frac{Dq_i}{Dt}\, d\tau = \sum_i Q_{L,\,i} \frac{Dq_i}{Dt}\,, \tag{18}$$

где

$$Q_{L,\,i} = -\int \varrho \mathbf{F}_L \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{r}}\, d\tau. \tag{19}$$

Используя равенства (14), рассмотрим теперь следующее соотношение:

$$\int \varrho \mathbf{v}\mathbf{V}\, d\tau = -\sum_i \int \varrho \mathbf{v} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{r}} \frac{Dq_i}{Dt}\, d\tau = \sum_i \frac{\partial T_L}{\partial \dot{q}_i} \frac{Dq_i}{Dt}\,.$$

Применяя к этому соотношению оператор d/dt, получим

$$\int \varrho \dot{\mathbf{v}}\mathbf{V}\, d\tau + \int \varrho \mathbf{v} \frac{d\mathbf{V}}{dt}\, d\tau = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_L}{\partial \dot{q}_i}\right) \frac{Dq_i}{Dt} + \sum_i \frac{\partial T_L}{\partial \dot{q}_i} \frac{D\dot{q}_i}{Dt}\,. \tag{20}$$

Но в силу формулы (16)

$$\int \varrho \mathbf{v} \frac{d\mathbf{V}}{dt}\, d\tau = \frac{D}{Dt} \int \frac{1}{2} \varrho \mathbf{v}\mathbf{v}\, d\tau = \frac{DT_L}{Dt} = \sum_i \frac{\partial T_L}{\partial q_i} \frac{Dq_i}{Dt} + \sum_i \frac{\partial T_L}{\partial \dot{q}_i} \frac{D\dot{q}_i}{Dt}\,.$$

Комбинируя последнее равенство вместе с уравнениями (17), (18) и (20), получим

$$\sum_i \left[Q_{L,\,i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial T_L}{\partial q_i} \right] \frac{Dq_i}{Dt} = 0.$$

Поскольку величины Dq_i/Dt являются независимыми, то мы можем последовательно положить их все, за исключением одной, равными нулю. Таким образом, мы получим уравнения движения для жидкости, а именно

$$Q_{L,\,i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T_L}{\partial q_i}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{21}$$

Если положить $T = T_S + T_L$ и сложить формулы (11) и (21), то получим

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\,, \tag{22}$$

где

$$Q_i = \sum_P \mathbf{F}_S \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} - \int \varrho \mathbf{F}_L \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{r}}\, d\tau. \tag{23}$$

Эти уравнения представляют собой уравнения Лагранжа для всей системы, состоящей из твердых тел и жидкости.

Обобщенные силы Q_i представляют собой коэффициенты, стоящие перед величинами Dq_i/Dt в выражении для виртуальной мощности $D(W_S + W_L)/Dt$, которое получается комбинацией формул (9) и (18). Единственными силами, которые надо учитывать в этом выражении для виртуальной мощности, являются *внешние силы* системы (третий закон Ньютона), а из других сил здесь

надо принимать во внимание только силы давления, действующие на неподвижную поверхность E. Однако эти последние силы не совершают работы, поскольку нормальная составляющая скорости на поверхности E обращается в нуль. Таким образом, при вычислении обобщенных сил Q_i в формуле (23) величины $\mathbf{F}_S$ и $\mathbf{F}_L$ можно рассматривать как внешние силы, действующие на твердые тела и жидкость. При отсутствии внешних сил величины Q_i должны равняться нулю.

17.61. Движение сферы в присутствии стенки. Когда сфера движется в жидкости, которая ограничена бесконечной неподвижной жесткой стенкой, кинетическая энергия в первом приближении, согласно результатам, полученным в пп. 16.31 и 16.41, записывается в виде

$$T = \frac{1}{2}(A\dot{x}^2 + B\dot{y}^2),$$

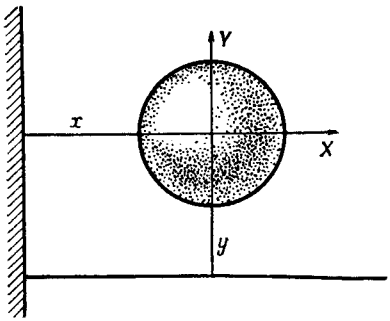


Рис. 322.

где (x, y) — координаты центра сферы, измеряемые соответственно вдоль осей в направлении γ перпендикулярно и параллельно стенке (см. рис. 322), а величины A и B определяются формулами

$$A = M + \frac{1}{2}M'\left(1 + \frac{3}{8}\frac{a^3}{x^3}\right),$$

$$B = M + \frac{1}{2}M'\left(1 + \frac{3}{16}\frac{a^3}{x^3}\right),$$

причем здесь M — масса сферы, а M' — масса жидкости, вытесненной сферой.

Если X, Y — составляющие внешних сил, действующих на сферу, то тогда уравнения Лагранжа имеют вид

$$X = \frac{d}{dt}(A\dot{x}) - \frac{1}{2}\dot{x}^2\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{2}\dot{y}^2\frac{\partial B}{\partial x},$$

$$Y = \frac{d}{dt}(B\dot{y}).$$

Если внешние силы таковы, что величины $\dot{x}$, $\dot{y}$ остаются постоянными, то эти уравнения примут вид

$$X = \frac{9M'a^3}{64x^4}(-2\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad Y = -\frac{9M'a^3}{32x^4}\dot{x}\dot{y}.$$

Следовательно, если сфера движется в направлении к стенке или от нее ($\dot{y} = 0$), то величина X будет отрицательной, и, следовательно, чтобы сохранять величину $\dot{x}$ постоянной, потребуется сила, направленная к стенке, т. е. сфера будет отталкиваться стенкой. С другой стороны, если движение происходит параллельно стенке ($\dot{x} = 0$), то величина X будет положительной, и, следовательно, чтобы сохранять величину $\dot{y}$ постоянной, потребуется сила, направленная от стенки, т. е. будет притягиваться стенкой.

В случае движения двух сфер с помощью уравнений Лагранжа легко можно получить аналогичные результаты.

17.70. Тело вращения, ось которого расположена перпендикулярно направлению потока невязкой жидкости. Рассмотрим поток, имеющий скорость U и обтекающий тело вращения, которое расположено так, что его ось перпендикулярна направлению скорости этого потока.

Пусть П представляет собой плоскость, в которой лежат ось тела и направление потока. Пусть γ — окружность поперечного сечения тела плоскостью, проходящей на расстоянии x от некоторой фиксированной точки на оси тела. Тогда любая точка P поверхности S тела определяется координатами (x, ω), где ω — азимутальный угол, который меридиональная плоскость, проходящая через точку P, составляет с плоскостью П.

Скорость жидкости в точке P можно разложить на составляющую q_ω, касательную к окружности γ, и составляющую q_m, касательную к меридиональной кривой, проходящей через точку P. Тогда можно записать соотношения

$$q_m(x, \omega) = Uf(x, \omega), \quad q_\omega(x, \omega) = Ug(x, \omega), \tag{1}$$

где функции f и g не зависят от U. Докажем, что[1])

$$q_m(x, \omega) = q_m(x, 0)\cos\omega, \quad q_\omega(x, \omega) = q_\omega(x, \pi/2)\sin\omega. \tag{2}$$

Доказательство. Обратимся к рис. 323, где изображена точка P, находящаяся на окружности γ с центром O. Рассмотрим три случая тече-

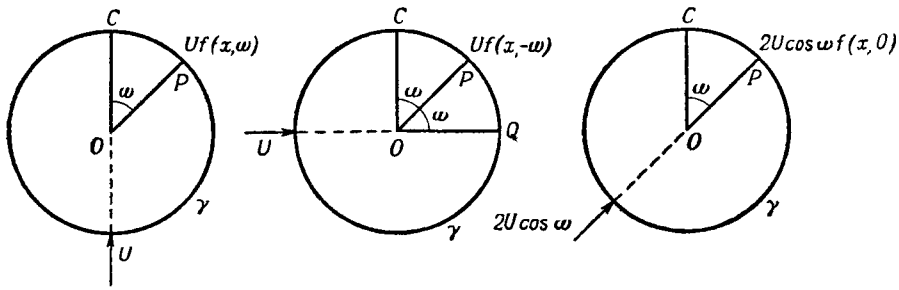


Рис. 323.

ния. В случае (*а*) поток со скоростью U направлен вдоль радиуса OC. В случае (*б*) поток со скоростью U направлен вдоль радиуса OQ, причем OQ и OC образуют одинаковые углы с OP. В случае (*в*) рассматривается поток со скоростью $2U\cos\omega$, направленный вдоль радиуса OP.

Из соотношений (1) следует, что меридиональные составляющие скорости в точке P в случаях (*а*), (*б*) и (*в*) соответственно равны $Uf(x, \omega)$, $Uf(x, -\omega)$ и $2Uf(x, 0)\cos\omega$. Но течение в случае (*в*) можно получить суперпозицией течений в случаях (*а*) и (*б*). Поэтому

$$Uf(x, \omega) + Uf(x, -\omega) = 2U\cos\omega f(x, 0).$$

Из условий симметрии получаем $f(x, -\omega) = f(x, \omega)$. Следовательно,

$$Uf(x, \omega) = Uf(x, 0)\cos\omega,$$

а это доказывает, что

$$q_m(x, \omega) = q_m(x, 0)\cos\omega.$$

Обратимся теперь к рис. 324, где точки C, P и Q имеют тот же смысл, что и выше. Рассмотрим опять три случая течения. В случае (*г*) поток со скоростью U движется в направлении OC, а в случае (*д*) — в направлении QO. В случае (*е*) поток со скоростью $2U\sin\omega$ движется по на-

[1]) Эти изящные результаты принадлежат Кэмпбеллу; Campbell I. J., *Q. J. M, and A. M.*, **IX** (1956), 140—142.

правлению RO, причем радиус OR получается поворотом радиуса OP на прямой угол по часовой стрелке. Из соотношений (1) следует, что составляющие скорости, касательные к окружности γ, в точке P в случаях ($г$), ($д$) и ($е$) соответственно равны $Ug(x, \omega)$, $Ug(x, \pi-\omega)$ и $2U\sin\omega g(x, \pi/2)$. Поскольку течение в случае ($е$) получается суперпозицией течений в случаях ($г$) и ($д$), то отсюда следует, что

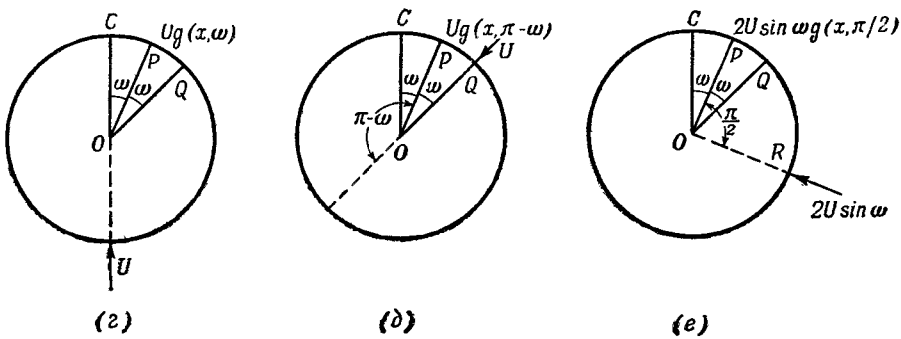


Рис. 324.

$$Ug(x, \omega)+Ug(x, \pi-\omega)=2U\sin\omega g(x, \pi/2).$$

Но в случае ($д$) при обращении направления потока имеем, что $g(x, \pi-\omega)=g(x, \omega)$ и, следовательно,

$$q_\omega(x, \omega)=q_\omega(x, \pi/2)\sin\omega,$$

что и требовалось доказать.

ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ 17.

1. Если φ и φ' — потенциалы скоростей двух возможных движений несжимаемой жидкости в односвязной области, то доказать, что

$$\int \varphi \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,dS=\int \varphi' \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS,$$

где интегралы берутся по границе области.

Некоторое тело погружено в жидкость, находящуюся в неподвижной оболочке. Если тело приводится в движение со скоростью $\mathbf{v}$, то доказать, что жидкости сообщается количество движения $-M\mathbf{v}$, где M — масса жидкости, вытесненной телом.

2. Определить импульсивную динаму $\mathbf{I}$ твердого тела, помещенного в неограниченную жидкость, не содержащую замкнутых контуров, которые не могут быть стянуты в точку. Показать, что эта импульсивная динама, вообще говоря, не совпадает с динамой количества движения жидкости.

Доказать, что динама сил, действующих со стороны тела на жидкость, эквивалентна величине

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt}+\fint \varrho\left[\mathbf{V}(\mathbf{v}\mathbf{V})-\frac{1}{2}\mathbf{v}V^2\right]d\Sigma,$$

где $\fint$ обозначает «динама-интеграл», $\mathbf{V}$ — скорость в любой точке P достаточно большой неподвижной поверхности Σ, охватывающей тело, а $\mathbf{v}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности Σ.

При каких условиях этот «динама-интеграл» обратится в нуль в пределе, когда все точки поверхности Σ устремляются в бесконечность?

(«Динама-интеграл» представляет собой предел суммы бесконечно малых скользящих векторов.)

3. Определить потенциал скорости, обусловленный сферой с центром в точке O и радиусом a, движущейся со скоростью U в направлении Ox в неограниченной жидкости плотности ϱ.

Показать, что у жидкости, находящейся между этой сферой и любой другой концентрической сферой, составляющая количества движения по оси x равна нулю; показать также, что аналогичная составляющая количества движения жидкости, находящейся между сферой и любым бесконечно длинным круговым цилиндром с осью Ox, равна $^1/_2mU$, где m — масса жидкости, вытесненная сферой.

4. Твердое тело движется без вращения в неограниченной жидкости; составляющие скорости тела, параллельные осям, равны (U, V, W), а объем тела равен v. Пусть потенциал скоростей φ возникающего при этом течения представляется на больших расстояниях от тела следующим разложением:

$$\varphi=\frac{ax+by+cz}{r^3}+\frac{S_2}{r^3}+\frac{S_3}{r^4}+\cdots+\frac{S_m}{r^{m+1}}+\cdots,$$

причем начало координат находится в какой-либо точке на теле, а S_m — поверхностная сферическая гармоническая функция степени m. Показать, что кинетическая энергия T движущейся жидкости выражается в виде

$$2T/\varrho=4\pi(aU+bV+cW)-v(U^2+V^2+W^2).$$

5. Для тела, движущегося в неограниченной жидкости, вывести уравнения движения в такой форме:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)+\omega_2\frac{\partial T}{\partial w}-\omega_3\frac{\partial T}{\partial v}=X,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1}\right)+\omega_2\frac{\partial T}{\partial \omega_3}-\omega_3\frac{\partial T}{\partial \omega_2}+v\frac{\partial T}{\partial w}-w\frac{\partial T}{\partial v}=L,$$

где использованы обозначения п. 17.43, $\mathbf{u}=(u, v, w)$, $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\mathbf{F}=(X, Y, Z)$, $\mathbf{L}=(L, M, N)$.

6. Эллипсоид с полуосями a, b, c движется в жидкости со скоростью u, параллельной направлению оси, имеющей длину $2a$. Потенциал скорости возникающего при этом движения жидкости имеет вид

$$Cux\int_\lambda^\infty\frac{d\psi}{(a^2+\psi)^{3/2}(b^2+\psi)^{1/2}(c^2+\psi)^{1/2}},$$

где C — некоторая постоянная величина. Определить постоянную C.

Найти кинетическую энергию жидкости и «импульс» движения.

7. Вытянутый эллипсоид вращения с полуосями a, b установлен в потоке, имеющем скорость V в направлении, которое составляет угол θ с большой осью эллипсоида. Определить пару, которая создается давлением жидкости и стремится повернуть эллипсоид так, чтобы его большая ось располагалась поперек потока.

(Жидкость является однородной, несжимаемой и невязкой, а внешние границы при этом отсутствуют.)

8. Показать, что если в жидкости движется тело вращения, то кинетическая энергия T имеет вид

$$2T=A(u^2+v^2)+Cw^2+P(\omega_1^2+\omega_2^2)+R\omega_3^2.$$

Доказать, что установившееся движение, для которого

$$u=v=0, \qquad w=V, \qquad \omega_1=\omega_2=0, \qquad \omega_3=\Omega,$$

будет устойчивым при условии, что $\Omega^2>4V^2PC(A-C)/AR^2$.

9. Тело вращения, у которого плотность всюду одинакова и в котором не имеется отверстий, движется в неограниченной жидкости. Пусть u, v, w — составляющие скорости его центра массы, а $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — угловые скорости его вращательного движения; кинетическая энергия системы при этом равна

$$\frac{1}{2}[Au^2+B(v^2+w^2)+C\omega_1^2+D(\omega_2^2+\omega_3^2)].$$

Тело, в начальный момент времени находившееся в состоянии покоя, движется под действием силы тяжести в неограниченной жидкости. Показать, что уравнение, определяющее отклонение θ оси тела относительно вертикали в любой момент времени, имеет вид

$$D\ddot{\theta}+\frac{M^2g^2(A-B)}{AB}t^2\sin\theta\cos\theta=0,$$

где M — масса тела, которая меньше массы вытесненной жидкости.

10. Тело вращения с плоскостью симметрии, перпендикулярной оси тела, движется со скоростью $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u})$. Показать, что для такого тела существует установившееся движение, в котором $u_y\omega_z - u_z\omega_y = 0$, где ось x представляет собой ось вращения. Определить характер этого движения.

11. Кинетическая энергия тела, совершающего плоское движение в неограниченной жидкости, выражается формулой

$$2T = Au^2 + Bv^2 + C\omega^2,$$

где (u, v) — составляющие скорости центра массы тела вдоль осей Ox, Oy, связанных с телом, а ω — угловая скорость вращения тела относительно оси Oz, перпендикулярной осям Ox и Oy. Показать, что если тело в начальный момент движется поступательно со скоростью U в направлении Ox, то в случае малых возмущений движение будет устойчивым при условии $A > B$.

12. Пусть A и B — составляющие силы, которые за единицу времени сообщают сфероиду единичные скорости, направляемые соответственно перпендикулярно и параллельно оси тела, а G — соответствующая пара, которая сообщает телу единичную угловую скорость относительно оси, перпендикулярной оси тела. Пусть C есть эффективный момент инерции тела относительно оси, когда тело движется в неограниченной жидкости, покоящейся на бесконечности. Доказать, что полная кинетическая энергия T в обычных обозначениях выражается следующей формулой:

$$2T = A(u^2 + v^2) + Bw^2 + G(p^2 + q^2) + Cr^2.$$

Выразить T через лагранжевы координаты x, y, z, θ, φ, ψ и показать, что если импульс F параллелен оси Oz, тогда имеют место равенства:

$$G(\dot\theta^2 + \dot\psi^2 \sin^2\theta) + Cr^2 + F^2\left(\frac{\sin^2\theta}{A} + \frac{\cos^2\theta}{B}\right) = 2T,$$

$$G\dot\psi \sin^2\theta + Cr\cos\theta = \text{const}, \qquad \varphi + \dot\psi\cos\theta = r,$$

$$\dot x = -F\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\sin\theta\cos\theta\cos\psi,$$

$$\dot y = -F\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\sin\theta\cos\theta\sin\psi,$$

$$\dot z = F\left(\frac{\sin^2\theta}{A} + \frac{\cos^2\theta}{B}\right).$$

13. Маятник состоит из жесткого стержня, который свободно качается на неподвижной горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец, и груза, который имеет форму тонкой цилиндрической эллиптической оболочки, заполненной жидкостью. Образующая этого цилиндра параллельна неподвижной оси маятника, а цилиндр имеет плоские торцы, которые составляют прямые углы с образующей. Центральная линия стержня проходит вдоль малой оси среднего поперечного сечения груза. Масса всего маятника, включая жидкость, равна M; центр массы этой системы находится на расстоянии h от неподвижной оси маятника; масса жидкости равна m. Большая и малая полуоси поперечного сечения груза равны a и b соответственно; приведенная длина этого маятника равна L, а приведенная длина маятника в том случае, если бы жидкость затвердела, равна L'. Доказать равенство

$$(L' - L)\,Mh\,(a^2 + b^2) = ma^2b^2.$$

14. Неподвижное кольцо погружено в жидкость, которая движется так, что циркуляция по любому замкнутому контуру, охватывающему кольцо, остается постоянной. Доказать, что такое движение жидкости является безвихревым и что, следовательно, циркуляция по любому замкнутому контуру, который может быть стянут в точку, равна нулю.

15. Цилиндр, массой которого можно пренебречь и сечение которого представляет собой эллипс с осями $2a$ и $2b$, наполнен водой и расположен неподвижно на столе; при этом большая ось $2a$ направлена вертикально. Затем цилиндр начинает катиться по столу. Найти угловую скорость цилиндра в момент, когда его большая ось принимает горизонтальное положение. Рассмотреть случаи: (I) когда стол является абсолютно шероховатым; (II) когда стол является абсолютно гладким. Показать, что квадраты угловых скоростей в этих случаях относятся как

$$(a^2 - b^2) : [(a^2 - b^2)^2 + 4b^2(a^2 + b^2)].$$

16. Внутри односвязной замкнутой поверхности находятся жидкость и тело. Эта поверхность начинает двигаться по заданному закону. Пусть T_1 — кинетическая энергия

жидкости в случае, когда тело остается свободным; T_2 — кинетическая энергия жидкости в случае, когда тело неподвижно; T' — кинетическая энергия жидкости в случае, когда граница остается неподвижной, а тело движется так, как и в первом случае. Показать, что

$$T_2 < T_1 + T'.$$

17. Несколько сфер движется в неограниченной жидкости. Показать, что в этом случае «импульс» складывается из отдельных импульсов, приложенных к центру каждой сферы. Показать также, что если T — полная кинетическая энергия всех тел и жидкости, то тогда импульс, приложенный к центру сферы с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$, равен $\partial T/\partial \dot{\mathbf{r}}_0$.

18. Два круговых цилиндра единичной длины находятся между двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми равно единице. Цилиндры могут скользить без трения между этими плоскостями; промежуточное пространство заполнено жидкостью. Цилиндры одновременно начинают перемещаться по направлениям, перпендикулярным плоскости, проходящей через их оси. Доказать, что цилиндры будут испытывать взаимное отталкивание или притяжение в зависимости от того, происходит ли их перемещение в противоположном или в одинаковом направлениях.

19. Две сферы движутся по линии своих центров; расстояние между центрами c велико по сравнению с радиусами сфер a и b. Вычислить приближенно величину кинетической энергии движения и записать уравнения движения.

Если сферы совершают малые колебания около некоторых фиксированных положений, то показать, что среднее значение силы, действующей на каждую сферу, равно $3\pi\varrho\,(a^3b^3/c^4)\,kk'p^2\cos\varepsilon$, где k и k' — амплитуды колебаний, $2\pi/p$ — период колебаний, ε — сдвиг фаз.

Глава 18

ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ

18.10. Уравнение Пуассона. Пусть f_Q — непрерывная функция, значения которой определены в каждой точке Q, принадлежащей объему V. Положим

$$\varphi_P = \int\limits_{(V)} \frac{f_Q}{PQ}\, d\tau_Q,$$

где P — точка, принадлежащая V, а $d\tau_Q$ — элементарный объем, содержащий точку Q. Тогда φ_P удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi_P}{\partial \mathbf{P}^2} = \nabla^2 \varphi_P = -4\pi f_P, \tag{1}$$

которое называется уравнением Пуассона.

Доказательство. Рассмотрим замкнутую поверхность S, которая содержит внутри себя точку P, ограничивает объем γ и находится внутри объема V. Функцию φ_P можно рассматривать как потенциал скорости, вызванный непрерывно распределенными источниками; мощность источников, отнесенную к единице объема, обозначим через f_Q; таким образом, элементарному объему $d\tau_Q$ будет соответствовать источник мощности $f_Q\, d\tau_Q$, т. е. источник с расходом $4\pi f_Q d\tau_Q$. Тогда поток через поверхность S в направлении внешней нормали будет просто равен сумме расходов всех источников, находящихся внутри поверхности S, и, следовательно,

$$4\pi \int\limits_{(\gamma)} f_Q\, d\tau_Q = 4\pi \int\limits_{(\gamma)} f_P\, d\tau_P.$$

Но, согласно теореме Гаусса, поток в направлении внешней нормали равен

$$-\int\limits_{(\gamma)} \nabla^2 \varphi_P\, d\tau_P,$$

следовательно,

$$\int\limits_{(\gamma)} (\nabla^2 \varphi_P + 4\pi f_P)\, d\tau_P = 0,$$

а поскольку объем γ произволен, то отсюда имеем уравнение (1), что и требовалось доказать.

Уравнение Пуассона применимо также и в том случае, когда φ и f представляют собой векторы, и имеет при этом такой вид:

$$\partial^2 \boldsymbol{\varphi}_P / \partial \mathbf{P}^2 = \nabla^2 \boldsymbol{\varphi}_P = -4\pi \mathbf{f}_P.$$

Действительно, каждый из векторов можно разложить на три составляющие, а затем применить формулу (1) к каждой из этих составляющих.

18.20. Выражение скорости через вихрь. Рассмотрим жидкость, заключенную внутри *неподвижной* оболочки E, и предположим, что в каждой

точке задан вихрь $\boldsymbol{\zeta}$. В тех областях жидкости, где движение является безвихревым (если такие области вообще существуют), будем иметь $\boldsymbol{\zeta}=0$.

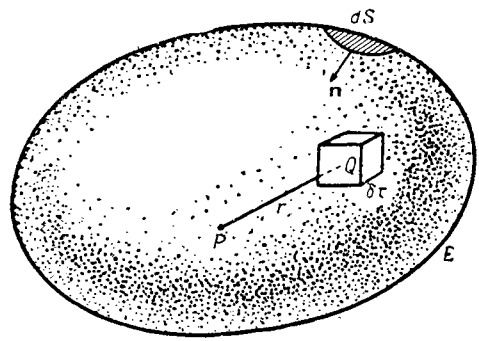
Если $\mathbf{n}$ — единичный вектор внутренней нормали для элемента dS поверхности E, то граничное условие имеет вид

$$\mathbf{nq}=0 \quad \text{на} \quad E. \tag{1}$$

Возьмем некоторую точку P внутри жидкости и будем считать эту точку фиксированной. Скорость в точке P будем обозначать через $\mathbf{q}_P$, а скорость в точке Q (где Q — любая другая точка в жидкости) — через $\mathbf{q}_Q$. Рассмотрим вектор

$$\mathbf{A}_P=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(V)}\frac{\mathbf{q}_Q}{PQ}\,d\tau, \tag{2}$$

где интеграл берется по объему V, заключенному внутри поверхности E, а точка P остается при этом фиксированной (рис. 325).



Ри с. 325.

Здесь при дифференцировании мы будем иногда рассматривать P как фиксированную точку, а Q — как переменную, иногда же, наоборот, мы будем рассматривать Q как фиксированную точку, а P — как переменную. Поэтому временно заменим символ ∇ обозначениями $\partial/\partial\mathbf{Q}$ или $\partial/\partial\mathbf{P}$ в соответствии с тем, какой случай рассматривается. Элементарный объем $d\tau$ всегда будет $d\tau_Q$.

Тогда, согласно уравнению Пуассона из п. 18.10,

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}_P}{\partial\mathbf{P}^2}=-\mathbf{q}_P,$$

и, следовательно, с помощью формулы (V) из п. 2.32 получим

$$\mathbf{q}_P=\frac{\partial}{\partial\mathbf{P}}\times\left\{\frac{\partial}{\partial\mathbf{P}}\times\mathbf{A}_P\right\}-\frac{\partial}{\partial\mathbf{P}}\left(\frac{\partial\mathbf{A}_P}{\partial\mathbf{P}}\right). \tag{3}$$

Но $\mathbf{q}_Q$ не зависит от положения точки P, поэтому

$$\frac{\partial\mathbf{A}_P}{\partial\mathbf{P}}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(V)}\mathbf{q}_Q\frac{\partial}{\partial\mathbf{P}}\left(\frac{1}{PQ}\right)d\tau=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(V)}\mathbf{q}_Q\frac{\partial}{\partial\mathbf{Q}}\left(\frac{1}{PQ}\right)d\tau,$$

поскольку $\partial/\partial\mathbf{Q}\,(1/PQ)$ представляет собой скорость в точке Q, вызванную единичным стоком, находящимся в точке P, а $\partial/\partial\mathbf{P}\,(1/PQ)$ — скорость в точке P, вызванную единичным стоком, находящимся в точке Q. Эти две скорости являются равными по величине, но противоположно направленными векторами. Далее, в силу формулы (VI) из п. 2.34 имеем

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{Q}}\left(\frac{\mathbf{q}_Q}{PQ}\right)=\frac{1}{PQ}\frac{\partial\mathbf{q}_Q}{\partial\mathbf{Q}}+\mathbf{q}_Q\frac{\partial}{\partial\mathbf{Q}}\left(\frac{1}{PQ}\right),$$

а из уравнения неразрывности следует, что $\partial\mathbf{q}_Q/\partial\mathbf{Q}=0$. Поэтому

$$\frac{\partial\mathbf{A}_P}{\partial\mathbf{P}}=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(V)}\frac{\partial}{\partial\mathbf{Q}}\left(\frac{\mathbf{q}_Q}{PQ}\right)d\tau=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(E)}\frac{\mathbf{nq}_Q}{PQ}\,dS=0$$

согласно уравнению (1). Значит, равенство (3) дает

$$\mathbf{q}_P=\frac{\partial}{\partial\mathbf{P}}\times\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{P}}\times\mathbf{A}_P\right)=\frac{\partial}{\partial\mathbf{P}}\times\mathbf{B}_P,$$

где $\mathbf{B}_P$ представляет собой *векторный потенциал*, определяемый так:

$$\mathbf{B}_P = \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} \times \mathbf{A}_P.$$

Таким образом, скорость получается как вихрь от векторного потенциала подобно тому, как в безвихревом течении она получается как градиент от скалярного потенциала скорости.

Найдем векторный потенциал $\mathbf{B}_P$. По определению и по формуле (VII) из п. 2.34 имеем

$$\mathbf{B}_P = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} \times \int\limits_{(V)} \frac{\mathbf{q}_Q}{PQ}\, d\tau = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(V)} \mathbf{q}_Q \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}}\left(\frac{1}{PQ}\right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(V)} \mathbf{q}_Q \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}}\left(\frac{1}{PQ}\right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(V)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} \times \left(\frac{\mathbf{q}_Q}{PQ}\right) d\tau + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(V)} \frac{1}{PQ}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} \times \mathbf{q}_Q\right) d\tau,$$

$$\mathbf{B}_P = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(E)} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{q}_Q}{PQ}\, dS + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(V)} \frac{\zeta_Q}{PQ}\, d\tau. \tag{5}$$

Здесь четвертое выражение получено с помощью вторичного применения формулы (VII) из п. 2.34, а последнее — по теореме Гаусса в форме (2) из п. 2.61. Выведенная формула дает выражение векторного потенциала через вихрь и скорость на границе E.

18.21. Поток через замкнутый контур. Поток через замкнутый контур C может быть выражен при помощи векторного потенциала следующим образом. Если натянуть на этот контур поверхность S, то поток будет равен

$$\int\limits_{(S)} \mathbf{nq}\, dS = \int\limits_{(S)} \mathbf{n}\,(\nabla \times \mathbf{B})\, dS.$$

Используем формулу для смешанного произведения трех векторов $\mathbf{n}\,(\nabla \times \mathbf{B}) = (\mathbf{n} \times \nabla)\,\mathbf{B}$; тогда по теореме Стокса поток через контур C равен

$$\int\limits_{(C)} \mathbf{B}\, ds,$$

где интеграл берется по замкнутому контуру. Направление потока устанавливается в соответствии с правилом правого винта.

18.22. Неограниченная жидкость. Если жидкость не ограничена и если скорость на больших расстояниях имеет порядок по крайней мере $1/r^2$, где $r = PQ$, то интеграл по поверхности в выражении (5) из п. 18.20 стремится к нулю, поскольку $dS = r^2\, d\omega$, где $d\omega$ — элементарный телесный угол. Следовательно,

$$\mathbf{B}_P = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\zeta_Q}{r}\, d\tau, \quad \mathbf{q}_P = \nabla \times \mathbf{B}_P,$$

и, значит, скорость является функцией одного только вихря.

Таким образом, используя формулу (VII) из п. 2.34, будем иметь

$$\mathbf{q}_P = -\frac{1}{4\pi}\int \zeta_Q \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) d\tau = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\zeta_Q \times \mathbf{r}}{r^3}\, d\tau,$$

где $\mathbf{r}$ — вектор, определяющий положение точки P относительно Q (но не наоборот).

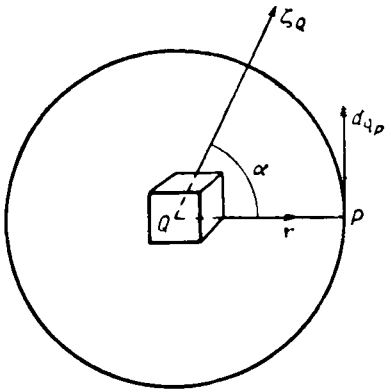
Полученный выше результат показывает, что скорость в точке P можно рассматривать как векторную сумму элементарных скоростей, каждая из которых обусловливается вихрем, находящимся в элементарном объеме $d\tau$ в переменной точке Q, и равна

$$d\mathbf{q}_P = \frac{d\tau}{4\pi r^3}\boldsymbol{\zeta}_Q \times \overrightarrow{QP}.$$

Соответствующее расположение векторов показано на рис. 326. Модуль этой элементарной скорости равен

$$dq_P = \frac{d\tau}{4\pi r^2}\zeta_Q \sin\alpha,$$

где α — угол между $\boldsymbol{\zeta}_Q$ и $\mathbf{r}$. Эту элементарную скорость можно рассматривать как скорость, *индуцированную* в точке P элементом, находящимся в точке Q.

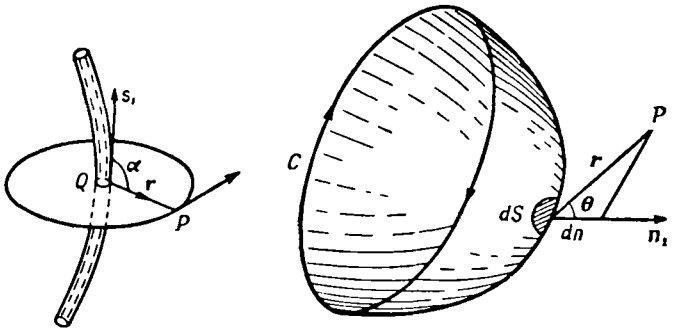


Р и с. 326.

18.23. Вихревая нить. Пусть все вихри в жидкости сводятся к одной-единственной вихревой нити. В п. 3.52 было доказано, что произведение величины вихря на бесконечно малую площадь поперечного сечения такой нити является постоянным. Назовем это произведение $\varkappa$ интенсивностью вихревой нити. Скорость, индуцированная в точке P элементом ds вихревой нити (рис. 327), будет равна

$$\frac{\varkappa\, ds}{4\pi r^3}(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{r}),$$

где $\mathbf{s}_1$ — единичный вектор касательной к вихревой нити.



Р и с. 327.

В случае замкнутой вихревой нити C (вихревое кольцо бесконечно малого поперечного сечения) будем иметь

$$\mathbf{q}_P = \frac{\varkappa}{4\pi}\int\limits_{(C)} \frac{\mathbf{s}_1 \times \mathbf{r}}{r^3}\,ds = \frac{\varkappa}{4\pi}\int\limits_{(C)} \mathbf{s}_1 \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}}\left(\frac{1}{r}\right) ds.$$

Применяя теорему Стокса в форме (3) из п. 2.51, получаем

$$\mathbf{q}_P = \frac{\varkappa}{4\pi}\int\limits_{(S)} \left(\mathbf{n} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}}\right) \times \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS,$$

где S — любая поверхность, имеющая своей границей кольцо C.

Далее, по формуле для двойного векторного произведения будем иметь

$$\left(\mathbf{n}\times\frac{\partial}{\partial\mathbf{Q}}\right)\times\frac{\partial}{\partial\mathbf{Q}}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial\mathbf{Q}}\left\{\mathbf{n}\frac{\partial}{\partial\mathbf{Q}}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}-\mathbf{n}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{Q}^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right\},$$

причем последний член здесь обращается в нуль, поскольку $1/r$ является сферической гармонической функцией.

Так как $\partial\mathbf{n}/\partial\mathbf{Q}=\partial/\partial n$, то

$$\mathbf{q}_P=\frac{\varkappa}{4\pi}\int\limits_{(S)}\frac{\partial}{\partial\mathbf{Q}}\left\{\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dS=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{P}}\left\{\frac{\varkappa}{4\pi}\int\limits_{(S)}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS\right\}.$$

Отсюда следует, что скорость в точке P выражается через потенциал скорости[1])

$$\varphi=\frac{\varkappa}{4\pi}\int\limits_{(S)}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS.$$

Но $\partial(1/r)/\partial n=\cos\theta/r^2$, где θ — угол между dn и прямой, соединяющей элемент dS и точку P. Этот угол показан на рис. 327 (заметим, что на этом рисунке величина dr отрицательна). Далее, $dS\cos\theta$ представляет собой проекцию площадки dS на плоскость, перпендикулярную r, и, следовательно, $dS\cos\theta/r^2=d\omega$ есть элементарный телесный угол, под которым площадка dS видна в точке P. Таким образом, окончательно получаем

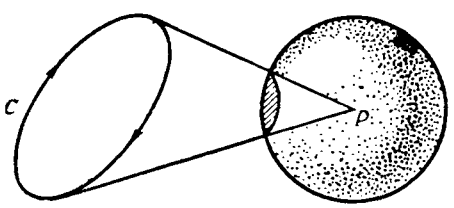


Рис. 328.

$$\varphi=\frac{\varkappa\omega_P}{4\pi},$$

где ω_P — телесный угол, под которым в точке P видна любая поверхность, ограниченная замкнутой нитью C.

Это положение иллюстрируется на рис. 328, на котором показана сфера единичного радиуса с центром в точке P; телесный угол измеряется на поверхности этой сферы. Можно заметить, что найденная выше величина φ равна потоку через отверстие, ограниченное вихревым кольцом C, который обусловлен точечным источником мощности $\varkappa/4\pi$, находящимся в точке P. Если точка P описывает некоторую замкнутую кривую, которая один раз охватывает вихревое кольцо, то телесный угол при этом увеличивается или уменьшается на 4π в соответствии с выбранным направлением отсчета. Следовательно, потенциал φ является многозначной функцией. Это согласуется с тем обстоятельством, что наличие вихревого кольца делает пространство двусвязным.

Поскольку количество движения $\mathbf{M}$ жидкости равно интегралу $\int\varrho\varphi d\mathbf{S}$, который берется по обеим сторонам S [см. формулу (3) п. 17.20], мы имеем

$$\mathbf{M}=\varkappa\varrho\int\limits_{(S)}d\mathbf{S},$$

где интеграл, который одинаков для любых поверхностей, берется по одной стороне S, так как $\int d\mathbf{S}$ по замкнутой поверхности равен нулю. Если

[1]) Сравнивая с п. 15.26, видим, что этот потенциал является также потенциалом скорости слоя диполей, расположенных так, что оси диполей нормальны поверхности S; мощность диполей, отнесенная к единице площади, равна $-\varkappa$ (см. п. 15.28).

вихревое кольцо представляет собой *плоскую* кривую с площадью A и нормалью $\mathbf{n}$, то $\mathbf{M} = \varkappa\varrho A\mathbf{n}$.

18.24. Электромагнитная аналогия. Между формулами, полученными для вихревого движения, и формулами, относящимися к некоторым электромагнитным явлениям, имеет место точное соответствие. В этой аналогии вихревая линия соответствует электрическому контуру, интенсивность этой вихревой линии — силе тока, а скорость жидкости — магнитной силе. Таким образом, формула для индуцированной скорости в точности соответствует формуле Био — Савара для магнитного эффекта электрического поля. Эту аналогию можно продолжить, заметив, что источники и стоки соответствуют положительному и отрицательному магнитным полюсам.

18.30. Кинетическая энергия. Кинетическая энергия определяется выражением

$$T = \frac{1}{2}\varrho\int q^2\,d\tau.$$

Если $\mathbf{B}$ — векторный потенциал, то

$$\mathbf{q} = \nabla\times\mathbf{B},\quad q^2 = \mathbf{q}(\nabla\times\mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{B}\times\mathbf{q}) + \mathbf{B}\boldsymbol{\zeta},$$

причем здесь использована формула (1) из п. 2.34. Применяя теорему Гаусса, получаем

$$T = \frac{1}{2}\varrho\int\limits_{(V)}\mathbf{B}\boldsymbol{\zeta}\,d\tau + \frac{1}{2}\varrho\int\limits_{(S)}\mathbf{B}(\mathbf{n}\times\mathbf{q})\,dS,$$

где первый интеграл берется по всему объему V, ограниченному поверхностью S. Если жидкость не ограничена и первый интеграл сходится, то мы имеем

$$T = \frac{1}{2}\varrho\int\limits_{(V)}\mathbf{B}\boldsymbol{\zeta}\,d\tau = \frac{\varrho}{8\pi}\int\limits_{(V)}\int\frac{\boldsymbol{\zeta}_P\boldsymbol{\zeta}_Q}{PQ}\,d\tau_P\,d\tau_Q,$$

где $\boldsymbol{\zeta}_P$, $\boldsymbol{\zeta}_Q$ — вихри в точках P и Q, а $d\tau_P$, $d\tau_Q$ — соответствующие элементарные объемы.

Для кинетической энергии можно записать и другое выражение:

$$T = \varrho\int\limits_{(V)}\mathbf{q}(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\zeta})\,d\tau + \varrho\int\limits_{(S)}\left[(\mathbf{nq})(\mathbf{qr}) - \frac{1}{2}(\mathbf{nr})\,q^2\right]dS,$$

где первый интеграл берется по всему объему V, ограниченному поверхностью S.

Докажем приведенный выше результат. В силу формулы для смешанного произведения трех векторов и формулы (IV) из п. 2.34 имеем

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\zeta}) = -\mathbf{r}[\mathbf{q}\times(\nabla\times\mathbf{q})] = \mathbf{r}[(\mathbf{q}\nabla)\,\mathbf{q}] - \frac{1}{2}\mathbf{r}\nabla q^2 =$$

$$= (\mathbf{q}\nabla)(\mathbf{qr}) - \mathbf{q}[(\mathbf{q}\nabla)\,\mathbf{r}] + \frac{1}{2}q^2\nabla\mathbf{r} - \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{r}q^2).$$

Но

$$\nabla\mathbf{r} = 3,\qquad (\mathbf{q}\nabla)\,\mathbf{r} = \mathbf{q},$$

следовательно,

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\zeta}) = \frac{1}{2}q^2 + \nabla[\mathbf{q}(\mathbf{qr})] - (\mathbf{qr})\nabla\mathbf{q} - \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{r}q^2).$$

Интегрируя и применяя теорему Гаусса, получаем результат, приведенный выше, поскольку $\nabla\mathbf{q} = 0$. В случае неподвижной границы $\mathbf{nq} = 0$. Если

жидкость простирается до бесконечности, а скорость на большом расстоянии имеет порядок r^{-2}, то кинетическая энергия будет представляться лишь одним интегралом по объему.

18.40. Осесимметричные движения. Когда движение симметрично относительно оси x, вихревые линии должны быть окружностями, центры которых лежат на этой оси и плоскости которых перпендикулярны ей. Такие движения удобно рассматривать с помощью функции тока Стокса, существование которой не зависит от того, является ли движение безвихревым или нет.

Для того чтобы получить выражение для функции тока, рассмотрим в некоторой меридиональной плоскости точку P с координатами $(x, \tilde{\omega})$. Проведем через точку P в плоскости, перпендикулярной к оси x, окружность с центром в точке M (рис. 329).

Пусть $\mathbf{B}$ — векторный потенциал в точке P. Поскольку $\mathbf{q} = \nabla \times \mathbf{B}$ и поскольку составляющие $\mathbf{q}$ лежат в меридиональной плоскости, то очевидно, что

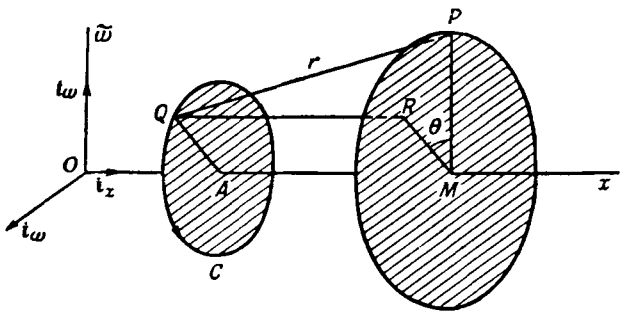


Рис. 329.

вектор $\mathbf{B}$ должен быть перпендикулярен к этой меридиональной плоскости. Из симметрии следует также, что векторный потенциал $\mathbf{B}$ имеет одну и ту же величину B в каждой точке проведенной окружности. Так как поток вектора скорости через круг радиуса $\tilde{\omega}$ равен циркуляции вектора $\mathbf{B}$ по этой окружности (см. п. 18.21), то этот поток составляет $2\pi\tilde{\omega}B$. Если принять, что направление вихря на некоторой вихревой линии C и направление оси x связаны правилом правого винта, то указанный поток будет направлен слева направо. Таким образом, если ψ — функция тока, то

$$2\pi\psi = -2\pi\tilde{\omega}B, \qquad \psi = -\tilde{\omega}B.$$

Это выражение дает функцию тока через величину векторного потенциала.

18.41. Круговая вихревая нить. Рассмотрим круговую вихревую трубку C (см. рис. 329) весьма малого поперечного сечения σ (вихревую нить). Тогда интенсивность этой нити будет, скажем, $\zeta\sigma = 4\pi\varkappa$. Пусть Q — некоторая точка на окружности C с центром A, причем $OA = \xi$. Проведем отрезок MR, равный и параллельный AQ. Пусть угол PMR равен θ и пусть $AQ = \eta$. Тогда элемент дуги в точке Q будет $\eta d\theta$, а вектор вихря в Q будет направлен по касательной к C. Таким образом, вихрь в точке Q равен $\zeta \cos\theta \cdot \mathbf{i}_\omega - \zeta \sin\theta \cdot \mathbf{i}_{\tilde{\omega}}$, где $\mathbf{i}_{\tilde{\omega}}$ и $\mathbf{i}_\omega$ — единичные векторы оси $\tilde{\omega}$ и перпендикуляра к меридиональной плоскости соответственно. Следовательно, по п. 18.22

$$\mathbf{B} = \varkappa \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{i}_\omega \cos\theta - \mathbf{i}_{\tilde{\omega}} \sin\theta}{PQ}\, \eta\, d\theta,$$

$$PQ^2 = r^2 = (x-\xi)^2 + \eta^2 + \tilde{\omega}^2 - 2\eta\tilde{\omega}\cos\theta.$$

Коэффициент при $\mathbf{i}_{\widetilde{\omega}}$ обращается в нуль по вышеуказанным причинам; в данном случае в этом легко убедиться непосредственно, выполнив интегрирование; коэффициент же при $\mathbf{i}_\omega$ представляет собой модуль вектора $\mathbf{B}$, и, следовательно, функция тока будет равна

$$\psi = -\widetilde{\kappa\omega}\eta \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta\, d\theta}{r}.$$

Детальное исследование такого движения требует применения эллиптических функций. Можно, однако, заметить, что для точек, расположенных в плоскости кольца (которое рассматривается как кольцо с бесконечно малым поперечным сечением), радиальные скорости будут равны нулю. Это вытекает сразу из закона Био — Савара, упомянутого в п. 18.23. Таким образом, отсюда следует, что радиус кольца будет оставаться постоянным, а кольцо будет двигаться со скоростью, которая также должна быть постоянной, поскольку движение относительно кольца должно быть установившимся.

Если два таких вихревых кольца с одной и той же осью и одинаковым направлением вращения движутся одно за другим, то действие индуцированной скорости приводит к увеличению диаметра движущегося впереди кольца и уменьшению диаметра другого кольца. Второе кольцо может в конце концов пройти через первое, и тогда они поменяются ролями.

Если два одинаковых вихревых кольца с противоположными направлениями вращения сближаются, то индуцированная скорость будет стремиться увеличить каждое из этих колец, а на плоскости, проходящей посредине между кольцами, скорость будет перпендикулярна оси. Значит, если вихревое кольцо движется по направлению к стенке, которая параллельна плоскости этого кольца, то диаметр кольца будет непрерывно увеличиваться, а его скорость будет непрерывно уменьшаться.

18.50. Уравнение, которому удовлетворяет функция тока. Взяв вихрь от выражения (3) п. 3.43, будем иметь

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\zeta}) = 0. \tag{1}$$

В случае осесимметричного движения

$$\mathbf{q} = \mathbf{i}_x q_x + \mathbf{i}_{\widetilde{\omega}} q_{\widetilde{\omega}}, \qquad \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{i}_\omega \zeta,$$

где $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_{\widetilde{\omega}}$, $\mathbf{i}_\omega$ представляют собой единичные векторы, из которых два лежат в меридиональной плоскости, а один перпендикулярен к этой плоскости. Значит, $\mathbf{q} \times \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{i}_x q_{\widetilde{\omega}} \zeta - \mathbf{i}_{\widetilde{\omega}} q_x \zeta$; поэтому по формуле (4) из п. 2.72, полагая $h_1 = h_2 = 1$, $h_3 = \widetilde{\omega}$, получаем

$$-\nabla \times (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{i}_\omega \left(\frac{\partial (q_x \zeta)}{\partial x} + \frac{\partial (q_{\widetilde{\omega}} \zeta)}{\partial \widetilde{\omega}} \right),$$

и, следовательно, уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (q_x \zeta)}{\partial x} + \frac{\partial (q_{\widetilde{\omega}} \zeta)}{\partial \widetilde{\omega}} = 0.$$

Если воспользоваться уравнением неразрывности из п. 15.10

$$\frac{\partial (q_x \widetilde{\omega})}{\partial x} + \frac{\partial (q_{\widetilde{\omega}} \widetilde{\omega})}{\partial \widetilde{\omega}} = 0,$$

то получим

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\widetilde{\omega}\left[q_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\zeta}{\widetilde{\omega}}\right)+q_{\widetilde{\omega}} \frac{\partial}{\partial \widetilde{\omega}}\left(\frac{\zeta}{\widetilde{\omega}}\right)\right]=0.$$

Таким образом, введя функцию тока, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\zeta}{\widetilde{\omega}}\right)-\frac{1}{\widetilde{\omega}} \frac{\partial \psi}{\partial \widetilde{\omega}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\zeta}{\widetilde{\omega}}\right)+\frac{1}{\widetilde{\omega}} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \widetilde{\omega}}\left(\frac{\zeta}{\widetilde{\omega}}\right)=0. \tag{2}$$

Для установившегося движения отсюда получим

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial \widetilde{\omega}} \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\zeta}{\widetilde{\omega}}\right) & \frac{\partial}{\partial \widetilde{\omega}}\left(\frac{\zeta}{\widetilde{\omega}}\right) \end{vmatrix}=0.$$

Это равенство показывает, что $\zeta/\widetilde{\omega}$ является функцией от ψ, скажем,

$$\zeta=\widetilde{\omega} f(\psi). \tag{3}$$

Уравнение (3) представляет собой соотношение, которому должен удовлетворять вихрь, для того чтобы движение было установившимся (см. п. 4.41). Далее,

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\partial q_{\widetilde{\omega}}}{\partial x}-\frac{\partial q_x}{\partial \widetilde{\omega}}=\frac{1}{\widetilde{\omega}}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial \widetilde{\omega}^2}-\frac{1}{\widetilde{\omega}} \frac{\partial \psi}{\partial \widetilde{\omega}}\right)= \\ &= \frac{1}{\sin \omega} \nabla^2\left(\frac{\psi \sin \omega}{\widetilde{\omega}}\right)=\frac{1}{\widetilde{\omega}} E^2 \psi, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$E^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial \widetilde{\omega}^2}-\frac{1}{\widetilde{\omega}} \frac{\partial}{\partial \widetilde{\omega}}.$$

Таким образом, из выражения (2) мы получаем уравнение, которому должна удовлетворять функция тока, а именно уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(E^2 \psi\right)+\widetilde{\omega}\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial \widetilde{\omega}} \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\widetilde{\omega}^2} E^2 \psi\right) & \frac{\partial}{\partial \widetilde{\psi}}\left(\frac{1}{\widetilde{\omega}^2} E^2 \psi\right) \end{vmatrix}=0. \tag{5}$$

Если движение является установившимся, то из соотношений (3) и (4) получается более простое уравнение:

$$E^2 \psi=\widetilde{\omega}^2 f(\psi). \tag{6}$$

Представив величину $\zeta=\widetilde{\omega}^{-1} E^2 \psi$ в полярных координатах, по формуле (5) из п. 2.72 получим

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)=r^2 \sin \theta f(\psi).$$

Таким образом, если $f(\psi)$ известна, то функция ψ определяется этим дифференциальным уравнением. Сделаем самое простое предположение о виде этой произвольной функции, т. е. примем, что $f(\psi)=A$ является постоянной величиной.

Тогда можно искать решения вида

$$\psi=F(r) \sin^2 \theta,$$

что приводит к уравнению

$$r^2F''(r) - 2F(r) = Ar^4.$$

Для того чтобы найти функцию $F(r)$, положим $A=0$, $F(r)=Kr^n$; это дает $n=2$ и $n=-1$. Такая же подстановка дает частный интеграл $n=4$, $K=A/10$.

Итак, имеем решение

$$\psi = \left(\frac{B}{r} + Cr^2 + \frac{A}{10}r^4\right)\sin^2\theta.$$

18.51. Сферический вихрь Хилла. Только что найденная функция тока будет описывать движение внутри некоторой неподвижной сферы радиуса a, если значение ψ будет оставаться конечным во всех точках внутри сферы, а нормальная скорость будет обращаться в нуль на границе. Эти условия означают, что $B=0$ и

$$-\left(\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial\psi}{r\,\partial\theta}\right)_{r=a} = -\left(C + \frac{Aa^2}{10}\right)2\cos\theta = 0,$$

откуда $C=-Aa^2/10$. Итак, функция

$$\psi = -\frac{A}{10}(a^2-r^2)\,r^2\sin^2\theta, \qquad r<a, \tag{1}$$

удовлетворяет требуемым условиям, какова бы ни была величина A.

Вихрь, который можно найти непосредственным вычислением или по формуле (3) из п. 18.50, при этом будет равен $\zeta = Ar\sin\theta$. Вихревые линии будут представлять собой окружности, расположенные в плоскостях, перпендикулярных к оси симметрии. На всех таких окружностях с одинаковым радиусом вихрь имеет одинаковое значение.

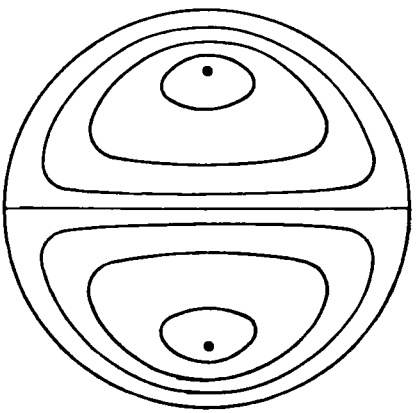


Рис. 330.

В меридиональной плоскости имеются критические точки, которые определяются решениями совместных уравнений $q_r=0$ и $q_\theta=0$, т. е.

$$(2a^2-4r^2)\sin\theta = 0, \qquad 2(a^2-r^2)\cos\theta = 0,$$

откуда $\theta = \pm\pi/2$, $r=a/\sqrt{2}$. Таким образом, существует кольцо критических точек, имеющее радиус $r=a/\sqrt{2}$.

Поверхности тока определяются уравнением

$$(a^2-r^2)\,r^2\sin^2\theta = c^4,$$

где c — некоторая постоянная величина. В эти поверхности тока входят также сама сфера и ось симметрии, которые разделяют течение. Соображения о разделяющей линии тока дают тогда нам возможность построить общую форму линий тока в меридиональной плоскости (рис. 330); линии тока здесь стягиваются вокруг критических точек.

Если воспользоваться произвольностью постоянной A, то можно установить следующее интересное обстоятельство: такой вихрь может находиться в покое в окружающей жидкости, которая обтекает его. Функция тока для течения около сферы в соответствии с п. 15.30 имеет вид

$$\psi = \frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right), \qquad r>a. \tag{2}$$

При $r = a$ уравнения (1) и (2) показывают, что $\psi = 0$ и что нормальная скорость на границе равна нулю. Для того чтобы такое движение могло существовать, должна иметь место также непрерывность касательной скорости на границе. Тогда, приравнивая величины $\partial\psi/\partial r$, получаем

$$A = \frac{15U}{2a^2},$$

и, следовательно, функция тока (1) для внутреннего движения примет вид

$$\psi = -\frac{3U}{4a^2}(a^2 - r^2)\, r^2 \sin^2\theta.$$

Если на всю рассматриваемую систему наложить скорость U, направленную слева направо, то будем иметь сферический вихрь радиуса a, движущийся со скоростью U в жидкости, которая покоится на бесконечности. Внешнее по отношению к вихрю движение жидкости является безвихревым и таким же, как движение, которое создается движущейся сферой такого же радиуса.

18.60. Крыло конечного размаха. Профиль Жуковского, изученный в гл. 7, представлял собой цилиндр бесконечной длины, у которого мы рассматривали

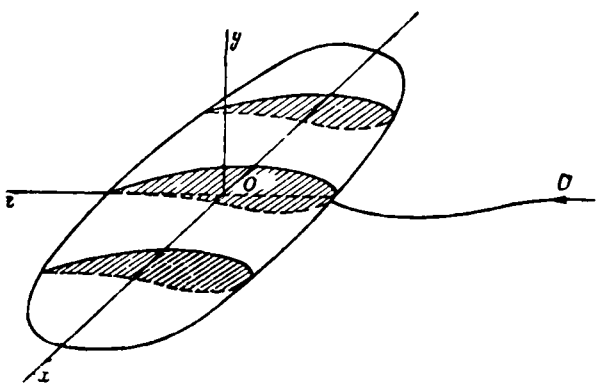


Рис. 331.

просто одно сечение. Применяемые же в действительности крылья имеют конечную длину, или размах, поэтому движение здесь нельзя считать плоским.

Рассмотрим крыло с размахом $2b$, симметричное относительно среднего сечения, перпендикулярного к размаху (рис. 331). На этом рисунке крыло считается неподвижным, а поток — набегающим на переднюю кромку, причем направление потока на бесконечности вверх по течению совпадает с направлением оси z. Ось y направлена вертикально вверх, а ось x — вдоль по размаху, начало координат находится в среднем сечении крыла. На рис. 332, который является чисто схематическим и показывает лишь основной принцип обтекания крыла, каждая линия тока, набегающая на переднюю кромку, разделяется на две линии тока: одна, s, проходит по верхней части крыла, а другая, s', проходит под крылом. Эти линии тока s и s' не обязательно направлены вдоль поперечных сечений крыла, и поэтому они сходят с крыла в разных точках задней кромки.

Геометрическое место линий s будет представлять собой некоторую поверхность S, а геометрическое место линий s' будет представлять собой некоторую другую поверхность S'. Будем предполагать, что непосредственно за задней кромкой крыла эти поверхности совпадают и образуют одну-единственную поверхность Σ, при переходе через которую касательная скорость претерпевает разрыв по направлению, но имеет одну и ту же величину. Поскольку в урав-

нение для давления входит только квадрат величины скорости, то давление при этом будет непрерывным. Поверхность Σ представляет собой вихревой слой типа, описанного в п. 13.70, и эту поверхность можно рассматривать как состоящую из распределенных по ней вихрей. Так как в любой точке поверхности Σ скорости сверху и снизу равны, то вихревые линии будут делить пополам углы между направлениями этих скоростей.

Для простоты предположим, что все эти вихревые линии являются прямыми и параллельными оси Oz. В качестве дальнейшего упрощения примем,

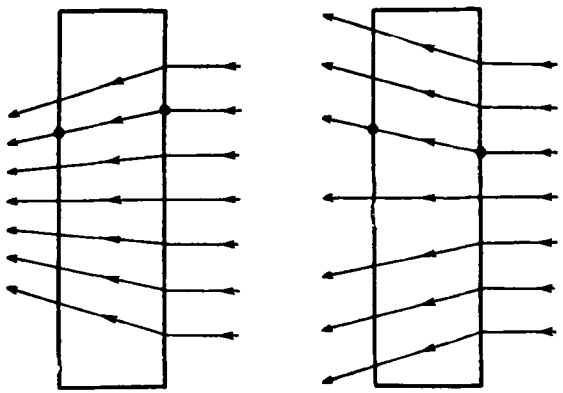


Рис. 332.
Слева — верхняя, справа — нижняя поверхность крыла.

что задняя кромка является прямой и что поверхность Σ начинается у этой кромки. Эти предположения не являются столь ограничительными, как это может показаться с первого взгляда.

Для вычисления силы сопротивления[1]) удобнее считать, что крыло движется со скоростью U, а воздух, напротив, неподвижен. Рассмотрим две неподвижные бесконечные плоскости P и P_1, проведенные перпендикулярно к направлению движения, причем плоскость P проведена на большом расстоянии от крыла вверх по потоку, а плоскость P_1 — на большом расстоянии вниз по потоку (см. рис. 333, на котором плоскость P не показана). Проведем вторую плоскость P_1', параллельную плоскости P_1 и расположенную за ней на расстоянии U. Тогда приращение в единицу времени энергии жидкости, заключенной в области между плоскостями P и P_1, будет вызвано перемещением в эту область той части вихревого слоя Σ, которая лежит между плоскостями P_1' и P_1, потому что безвихревые участки течения впереди и позади крыла не будут влиять на это приращение из-за квазистационарного характера движения между плоскостями P и P_1. Следовательно, если φ — потенциал скорости, а R — сила сопротивления, то, приравнивая работу искомой силы R в единицу времени и скорость приращения кинетической энергии, получаем

$$RU = \frac{1}{2}\varrho \int\int (\nabla\varphi)^2\, dx\, dyU. \qquad (1)$$

Преобразуя этот интеграл с помощью формулы Грина, будем иметь

$$R = \frac{1}{2}\varrho \int_{-b}^{b} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial y}\, dx - \frac{1}{2}\varrho \int_{-b}^{b} \varphi' \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\, dx,$$

[1]) Сопротивление, которое рассматривается здесь, является *индуктивным сопротивлением*, вызванным индуктивными скоростями вихревой пелены. Это сопротивление меньше, чем измеряемое в опытах сопротивление, в которое входят также поверхностное трение и другие эффекты.

где φ относится к верхней стороне Σ, а φ' — к нижней стороне. Поскольку нормальная скорость $-\partial\varphi/\partial y$ непрерывна, то

$$R=\frac{1}{2}\varrho\int_{-b}^{b}(\varphi-\varphi')\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dx.$$

Рассмотрим сечение крыла, расположенное на расстоянии x от начала координат O; пусть $K(x)$ — циркуляция вокруг этого сечения. Когда мы

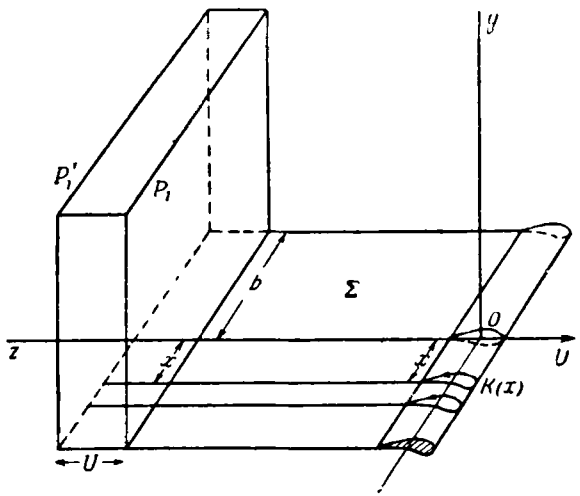


Рис. 333.

переходим через вихревой слой Σ сверху вниз, потенциал скорости уменьшается на величину этой циркуляции. Следовательно, $\varphi-\varphi'=K(x)$. Таким образом, окончательно

$$R=\frac{1}{2}\varrho\int_{-b}^{b}K(x)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dx. \tag{3}$$

Вычислим подъемную силу. По теореме Кутта — Жуковского для участка крыла между x и $x+dx$ подъемная сила равна $\varrho UK(x)\,dx$, т. е.

$$Y=\varrho U\int_{-b}^{b}K(x)\,dx. \tag{4}$$

18.61. Крыло минимального индуктивного сопротивления. Теперь мы можем установить, какое распределение циркуляции $K(x)$ вдоль крыла будет давать наименьшее сопротивление при заданной подъемной силе. Если иметь в виду обозначения предыдущего пункта, то мы должны будем определить минимум R при условии, что Y задано. Используя метод неопределенных множителей [1]), получаем

$$\delta R-\lambda\delta Y=0$$

---

[1]) См., например, Edwards, Differential calculus. (См. также Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2-е изд. ГИТТЛ, 1960.—*Прим. перев.*)

для любой вариации $K(x)$. Далее, согласно формуле (1) из п. 18.60,

$$\delta R = \varrho \int\int \nabla\varphi \cdot \nabla\delta\varphi \, dx\, dy = \varrho \int_{-b}^{b} (\delta\varphi - \delta\varphi') \frac{\partial\varphi}{\partial y} \, dx,$$

причем мы применили здесь такое же преобразование, что и выше. Кроме того, $\delta\varphi - \delta\varphi' = \delta K(x)$, поэтому

$$\int_{-b}^{b} \delta K(x) \frac{\partial\varphi}{\partial y} \, dx - \lambda U \int_{-b}^{b} \delta K(x) \, dx = 0.$$

Но если это равенство выполняется для любой произвольной вариации $\delta K(x)$, то отсюда следует, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \lambda U = \text{const} = V.$$

Таким образом, вихревая пелена ведет себя как плоская пластинка шириной $2b$, движущаяся со скоростью V в направлении, перпендикулярном к своей длине. Накладывая скорость $-V$ на решение, полученное в п. 6.34, будем иметь комплексный потенциал

$$w = -iV\left(z - \sqrt{r^2 - b^2}\right), \quad z = x + iy,$$

и, значит, на плоскости $y = 0$ получим

$$\varphi = \pm V\sqrt{b^2 - x^2},$$

причем знак плюс берется для верхней стороны пластинки.

Следовательно, циркуляция, соответствующая уменьшению потенциала φ при обходе вокруг пластинки, будет равна

$$K(x) = 2V\sqrt{b^2 - x^2}.$$

Циркуляция в среднем сечении ($x = 0$) равна

$$K_0 = 2Vb,$$

и, таким образом,

$$K(x) = \frac{K_0}{b}\sqrt{b^2 - x^2}.$$

Это выражение можно записать так:

$$\frac{[K(x)]^2}{K_0^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

что представляет собой уравнение эллипса, описанного точкой с координатами x, $K(x)$[1]).

ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ 18

1. Пусть S — поверхность, ограниченная кривой C; доказать, что

$$\int_C [\mathbf{F} \times \mathbf{ds}] = \int_S [\mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{F} - \operatorname{grad}(\mathbf{Fn})] \, dS,$$

где через $\mathbf{n}$ обозначена нормаль к S.

[1]) Подробное обсуждение вихревых слоев в связи с теорией крыла см. в книге автора Theoretical Aerodynamics, Lnd., 1958.

Неограниченная жидкость покоится на бесконечности, а движение в ней вызвано замкнутой вихревой нитью C интенсивности $\varkappa$; показать, что скорость в некоторой точке P равна

$$\mathbf{q}=-\frac{\varkappa}{4\pi}\int_C [\operatorname{grad}(1/r)\times d\mathbf{s}],$$

где r — расстояние между P и элементом $d\mathbf{s}$.

Показать, далее, что $\mathbf{q}=-\varkappa\operatorname{grad}\Omega/4\pi$, где Ω представляет собой телесный угол, под которым данная замкнутая нить видна из точки P.

2. Пусть вихрь $\boldsymbol{\omega}$ задан во всех точках внутри жидкости. Доказать, что значения вихря заданы правильно, если

$$\mathbf{v}=\operatorname{rot}\mathbf{A},$$

где

$$\mathbf{A}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{\omega}\,d\tau}{r},$$

а интеграл распространен по всей области, занятой жидкостью.

Пусть известна также дивергенция скорости θ. Показать, что это можно учесть, прибавив к написанному выше выражению для $\mathbf{v}$ член

$$-\nabla\frac{1}{4\pi}\int\frac{\theta\,d\tau}{r}.$$

Пусть циркуляция k равна нулю по любому контуру в жидкости, за исключением таких контуров, которые охватывают тонкую вихревую нить. Доказать, что циркуляция будет одинаковой для всех контуров, которые охватывают эту вихревую нить, и что вихревая нить не может окончиться внутри жидкости. Доказать также, что

$$\mathbf{A}=\frac{k}{4\pi}\int\frac{d\mathbf{s}}{r},$$

где векторный интеграл берется вдоль вихря.

3. Показать, что если a, b, c, f, g, h являются составляющими скорости чистого растяжения, то

$$\frac{\omega}{\varrho}=\frac{\omega_0}{\varrho_0}\exp\int_0^t(a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2+2f\mu\nu+2g\nu\lambda+2h\lambda\mu)\,dt,$$

где λ, μ, ν — направляющие косинусы элемента ω вихревой нити.

Интерпретировать этот результат физически и рассмотреть его связь с теоремой Кельвина о сохранении циркуляции по контуру, движущемуся с жидкостью.

4. Показать, что скорость, вызванная прямолинейным участком AB некоторой вихревой нити, перпендикулярна к плоскости PAB и равна

$$\frac{\varkappa}{4\pi p}(\cos PAB+\cos PBA),$$

где p — перпендикуляр, проведенный из точки P к AB.

Вычислить в любой точке скорость, вызванную прямоугольной вихревой нитью, если этот прямоугольник определен равенствами $z=0$, и $x=\pm a$, $y=\pm b$.

5. Цилиндр произвольного сечения, содержащий жидкость, вращается с заданной угловой скоростью около своей оси, а жидкость имеет постоянный вихрь ζ. Показать, что в этом движении кинетическая энергия на единицу длины цилиндра превышает кинетическую энергию безвихревого движения на величину

$$\frac{1}{2}\varrho\zeta^2\iint[(\partial V/\partial x)^2+(\partial V/\partial y)^2]\,dx\,dy,$$

где V — решение уравнения $\nabla^2V=1$, являющееся ограниченным и непрерывным во всех внутренних точках и постоянным на границе.

6. Жидкость совершает плоское движение внутри эллиптического цилиндра, оси которого $2a$ и $2b$. Доказать, что если вихрь имеет постоянное значение ω в каждой точке, то линии тока представляют собой подобные эллипсы, которые описываются за время, равное $2\pi(a^2+b^2)/(ab\omega)$.

7. Доказать, что функция тока вида $\psi=Ax^2+By^2$ описывает установившееся движение идеальной жидкости с равномерно распределенным вихрем ζ_0; движение происходит внутри цилиндра, имеющего эллиптическое сечение с полуосями a, b и вращающегося

вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω_0, которая определяется через ζ_0. Показать, что траектории частиц жидкости относительно границы являются подобными эллипсами.

Воспользоваться эллиптическими координатами ξ, η, связанными с декартовыми координатами x, y следующими формулами:

$$x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta.$$

8. Доказать, что в установившемся плоском движении жидкости с равномерно распределенным вихрем 2ζ при отсутствии силы тяжести имеет место равенство

$$\frac{p}{\varrho} = \text{const} - \frac{1}{2} q^2 + 2\zeta\psi,$$

где q — скорость, а ψ — функция тока.

Пусть жидкость обтекает неподвижный круговой цилиндр радиуса a. Вихрь в жидкости имеет всюду постоянное значение, равное 2ζ. Если начало координат находится в центре сечения цилиндра, то движение на бесконечности будет движением с поперечным градиентом скоростей

$$u = U - 2\zeta y, \quad v = 0.$$

Пусть циркуляция непосредственно вокруг цилиндра равна K. Найти вид функции тока ψ и доказать, что результирующая сила, приложенная к цилиндру и вызванная давлением жидкости, равна $\varrho U (K + 2\pi a^2 \zeta)$ и направлена вдоль оси y.

9. Плоское движение несжимаемой жидкости таково, что вихрь имеет всюду постоянное значение 2ζ. Показать, что функция тока ψ определяется выражением

$$\psi = \frac{1}{2} \zeta (x^2 + y^2) + f(x + iy) + f(x - iy),$$

где f — произвольная функция.

Пространство между двумя софокусными цилиндрами с полуосями $c \operatorname{ch} \alpha$, $c \operatorname{sh} \alpha$ и $c \operatorname{ch} \beta$, $c \operatorname{sh} \beta$ соответственно ($\alpha > \beta$) заполнено жидкостью с равномерно распределенным вихрем ζ. Определить функцию тока и доказать, что кинетическая энергия, отнесенная к единице длины, равна

$$\frac{1}{16} \pi \varrho \zeta^2 c^4 [\operatorname{sh} 4\alpha - \operatorname{sh} 4\beta - 4 \operatorname{th} (\alpha - \beta)].$$

10. Цилиндрический вихревой слой таков, что вихревые линии являются образующими цилиндра, а вихрь в любой точке равен $2U \sin \theta$, где θ — угол, измеряемый от фиксированной плоскости, проведенной через ось цилиндра. Доказать что вихревой слой будет двигаться со скоростью U, параллельной этой фиксированной плоскости.

11. Однородная жидкость совершает круговое безвихревое плоское движение около полого цилиндрического вихря радиуса a с циркуляцией $2\pi\varkappa$. Доказать, что давление на больших расстояниях должно равняться $\varrho\varkappa^2/(2a^2)$.

Доказать, что вся эта система может совершать свободные колебания такого вида, что контур поперечного сечения вихря становится синусоидальной кривой, у которой по окружности укладывается n длин волн, и что период колебаний имеет одно из двух значений

$$\frac{2\pi a^2}{n^{1/2} (n^{1/2} \pm 1) \varkappa}.$$

12. Масса жидкости, внешней границей которой служит бесконечно длинный цилиндр радиуса b, находится в состоянии циклического безвихревого движения и испытывает действие равномерного давления P по внешней поверхности. Доказать, что здесь должен образоваться концентрический цилиндрический канал, радиус которого a определяется уравнением

$$8\pi^3 a^2 b^2 P = M\varkappa^2,$$

где M — масса жидкости на единицу длины, а $\varkappa$ — циркуляция.

Доказать, что если жидкость получает малое симметричное смещение, то период малых колебаний будет равен

$$(4\pi^2/\varkappa)\, a^2 b^2 [\ln (b/a)/(b^4 - a^4)]^{1/2}.$$

13. Показать, что скорость $\mathbf{q}$ в некоторой точке P в несжимаемой невязкой жидкости, простирающейся до бесконечности (где она находится в покое) и содержащей замкнутую вихревую нить с контуром C интенсивности $\varkappa$, будет равна $\mathbf{q} = \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi}$, где $\boldsymbol{\Psi} = \frac{\varkappa}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{s}}{r}$.

Найти в этой задаче связь между Ψ и функцией тока Стокса в случае, когда контур C представляет собой окружность. Отсюда (или иным путем) вывести, что в точке P вблизи оси составляющие скорости (параллельная и перпендикулярная к оси круговой вихревой нити) представляются соответственно выражениями

$$u=\frac{\varkappa a^2}{2r^3}, \quad v=\frac{3\varkappa a^2\widetilde{\omega}(r^2-a^2)^{1/2}}{4r^5},$$

где $\widetilde{\omega}$ и r — расстояния точки P от ближайших точек на оси и на вихревой нити соответственно.

14. Доказать, что скорость в центре кругового вихревого кольца интенсивности m и радиуса a равна $m/2a$; найти также скорость в любой точке на оси кольца.

15. Доказать, что действие кругового вихревого кольца на большом расстоянии от него приблизительно такое же, что и действие диполя мощности $ma^2/4$, где m — интенсивность вихря и a — его радиус.

16. Вывести приближенную формулу $(K/4\pi b)\,[\ln(8b/a)-1/4]$ для скорости перемещения тонкого кругового вихревого кольца; здесь b — радиус линии центров поперечных сечений, a — радиус поперечного сечения, K — циркуляция.

17. Пусть q и q' — скорости жидкости, индуцированные тонким круговым вихревым кольцом интенсивности m и радиуса a в двух точках, находящихся в плоскости кольца на расстояниях r и r' от его центра, причем $rr'=a^2$ и $r>r'$. Доказать, что

$$qr^{1/2}+q'r'^{1/2}=\frac{m}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{(r-r'\sin^2\theta)^{1/2}}.$$

18. Доказать, что для тонкого вихревого кольца радиуса a функция тока в точке вблизи кольца на расстоянии x от его плоскости приближенно равна

$$-\frac{\varkappa x^2a^2}{4(a^2+x^2)^{3/2}},$$

где $\varkappa$ — циркуляция вокруг кольца.

19. Доказать, что скорость, индуцированная тонким круговым вихревым кольцом радиуса a и интенсивностн K в некоторой точке P, расположенной в плоскости кольца на расстоянии r от его центра, равна

$$\frac{K}{2a}\left[1+\frac{3r^2}{a^2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5r^4}{a^4}\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2+\frac{7r^6}{a^6}\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2+\cdots\right],$$

где $r<a$; вычислить также скорость, когда $r>a$.

20. Круговая вихревая нить интенсивности $\varkappa$ лежит на сфере с радиусом f и центром O. Доказать, что этому вихрю соответствует отображенный относительно концентрической сферы радиуса a вихрь, причем этот отображенный вихрь лежит на концентрической сфере радиуса f'; его интенсивность равна $\varkappa'$, а его радиус и радиус заданного вихря видны из точки O под одним и тем же углом α при условии, что

$$ff'=a^2, \quad \varkappa\sqrt{f}=-\varkappa'\sqrt{f'}.$$

Доказать, что в некоторой точке P, лежащей на оси первого вихря Ox вне жесткой сферы с центром O и радиусом $a<f$, скорость направлена вдоль Ox и равна

$$\frac{\varkappa}{2x}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f^{2i+1}-a^{2i+1}}{f^ix^{i+1}}P_i^1(\cos\alpha),$$

где $P_i^1(\cos\alpha)=\sin^2\alpha\,dP_i(\cos\alpha)/d(\cos\alpha)$; P_i — зональная гармоническая функция порядка i.

21. Пусть во всех точках внутри несжимаемой жидкости задан вихрь. Тогда возможная величина скорости $\mathbf{v}$ определяется равенством

$$\mathbf{v}=\operatorname{rot}\mathbf{A},$$

где составляющие $\mathbf{A}$ таковы:

$$\frac{1}{4\pi}\int\int\int\xi\frac{dx\,dy\,dz}{r}, \quad \frac{1}{4\pi}\int\int\int\eta\frac{dx\,dy\,dz}{r},$$

$$\frac{1}{4\pi}\int\int\int\zeta\frac{dx\,dy\,dz}{r},$$

причем интегралы берутся по всему объему, занимаемому жидкостью, а ξ, η, ζ — составляющие вихря.

Для круговой вихревой нити радиуса a и интенсивности K с осью x в качестве оси симметрии доказать, что в любой точке P вектор A составляет прямые углы с осью x и с перпендикуляром, проведенным из точки P к оси x. Доказать также, что модуль вектора A равен

$$\frac{K}{4\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{2}{k}-k\right)F(k)-\frac{2}{k}E(k)\right],$$

где

$$k=\frac{4ar}{x^2+(r+a)^2},$$

$$F(k)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{(1-k^2\sin^2 u)^{1/2}},\quad E(k)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-k^2\sin^2 u)^{1/2}du,$$

r—расстояние точки P от оси x, а x—расстояние точки P от плоскости вихревого кольца.

22. Доказать, что при определенных условиях (которые следует установить) сила и пара импульса (F, L) и кинетическая энергия системы вихрей даются выражениями

$$\mathbf{F}=\varrho\int \mathbf{r}\times\boldsymbol{\zeta}\,d\tau,\qquad L_x=\varrho\int(y^2+z^2)\zeta_x\,d\tau,\qquad T=\frac{1}{2}\varrho\int\mathbf{r}(\boldsymbol{\zeta}\times\mathbf{q})\,d\tau.$$

Для круговой вихревой нити интенсивности $\varkappa$ и радиуса $\widetilde{\omega}$ с осью, направленной вдоль оси Ox, вывести выражения

$$T=-\pi\varrho\varkappa\psi=2\pi\varrho\varkappa\widetilde{\omega}(\widetilde{\omega}u-xv),\qquad F_x=\pi\varrho\varkappa\widetilde{\omega}^2,$$

где u, v—скорости вдоль оси Ox и перпендикулярно к ней, а ψ—функция тока Стокса. Для кругового вихревого кольца, поперечное сечение которого представляет собой круг радиуса a, малого по сравнению со средним радиусом $\widetilde{\omega}_0$ самого кольца, вывести формулы

$$\psi=-\varkappa\widetilde{\omega}_0a^2\ln\left(\frac{8\widetilde{\omega}_0}{a}-\frac{3}{2}-\frac{s^2}{2a^2}\right),\qquad T=\frac{1}{2}\varrho\varkappa^2\widetilde{\omega}_0\left(\ln\frac{8\widetilde{\omega}_0}{a}-\frac{7}{4}\right),$$

где s—расстояние от центра нормального сечения (круга радиуса a).

23. Тонкое вихревое кольцо совершает установившееся поступательное движение, причем закон распределения вихря имеет вид $\omega/\widetilde{\omega}=\omega_0/\widetilde{\omega}_0$. Доказать, что если поперечное сечение кольца представляет собой круг радиуса c, центр которого находится на расстоянии $\widetilde{\omega}_0$ от оси симметрии, то скорость перемещения кольца будет равна

$$\frac{\omega_0}{4\pi\widetilde{\omega}_0}\int_0^{2\pi}\left[\int\int\frac{(\widetilde{\omega}-\widetilde{\omega}_0\cos\alpha)\,\widetilde{\omega}^2}{\{\widetilde{\omega}^2+\widetilde{\omega}_0^2-2\widetilde{\omega}\widetilde{\omega}_0\cos\alpha+(c-x)^2\}^{3/2}}\,d\widetilde{\omega}\,dx\right]d\alpha,$$

причем интегрирование по $\widetilde{\omega}$ и x проводится по поперечному сечению; здесь ω представляет собой суммарный вихрь, а кольцо предполагается движущимся с постоянной скоростью в направлении оси x.

24. Показать, что для крыла конечного размаха индуктивное сопротивление будет минимальным при заданной подъемной силе в случае, когда распределение подъемной силы по размаху является эллиптическим.

Пусть V—скорость крыла относительно воздуха, L—подъемная сила, D—индуктивное сопротивление, ϱ—плотность воздуха, $2s$—размах крыла. Показать, что минимальное значение индуктивного сопротивления D равно

$$D=L^2/2\pi\varrho s^2V^2.$$

Глава 19

ВЯЗКОСТЬ

19.01. Тензор напряжений в идеальной жидкости. В случае идеальной жидкости сила, с которой окружающая жидкость действует на элемент dS поверхности жидкой частицы, направлена по нормали к этому элементу и равна $-p\mathbf{n}\,dS$, где $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль, а p — давление. Поэтому можно считать, что здесь напряжение (или сила, действующая на единицу площади) получается из *тензора напряжений*

$$\Psi = -pI \tag{1}$$

скалярным умножением на $\mathbf{n}$, т. е.

$$\text{напряжение} = \mathbf{n}\Psi = -p\mathbf{n}I = -p\mathbf{n},$$

где I — единичный тензор (см. п. 2.16).

Если ввести три взаимно перпендикулярных единичных вектора $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, то тогда $I = \mathbf{i};\mathbf{i} + \mathbf{j};\mathbf{j} + \mathbf{k};\mathbf{k}$. Если в тензоре (1) диадное умножение заменить скалярным, то получим *первый скалярный инвариант* тензора напряжений, который обозначим через Ψ_I:

$$\Psi_I = -p(\mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}) = -3p. \tag{2}$$

Таким образом, когда задан тензор напряжений Ψ, можно по выражению (2) определить давление p.

Тензор напряжений (1) обладает сферической симметрией, т. е. направление напряжения нормально к элементу dS, а его величина не зависит от ориентации dS.

19.02. Гипотеза вязкости. В случае вязкой жидкости, т. е. жидкости, подверженной внутреннему трению, напряжение на элементе dS поверхности жидкой частицы не обязательно нормально к dS и, таким образом, тензор напряжений (если допустить, что он существует) будет иметь вид

$$\Phi = -p'I + \Xi, \tag{1}$$

где тензор $-p'I$ обладает сферической симметрией, как и в случае отсутствия вязкости, а тензор Ξ зависит непосредственно от вязкости. Тогда напряжение на элементе dS будет равно

$$\mathbf{n}\Phi = -p'\mathbf{n} + \mathbf{n}\Xi. \tag{2}$$

В п. 2.40 движение жидкой частицы было разложено на движение этой частицы как единого целого, подобно движению твердого тела, и на движение со скоростью чистого растяжения, в котором направление движения в каждой точке частицы нормально к некоторой поверхности второго порядка. Вязкость можно рассматривать как свойство, которое проявляется в виде действия сил, имеющих характер трения, на поверхности жидкой частицы, окруженной жидкостью. Ясно, что движение, подобное движению твердого тела, не вызывает относительных перемещений частиц и поэтому не может влиять на создание сил, имеющих характер трения. Поэтому в качестве естественной гипо-

тезы следует полагать, что напряжение $\mathbf{n}\Xi$ в выражении (2) обусловлено только чистым растяжением.

Рассмотрим сферическую частицу с центром P и бесконечно малым радиусом h (рис. 334).

Если $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к площадке dS поверхности частицы, то чистое растяжение заставляет площадку dS перемещаться относительно центра сферы со следующей скоростью (см. п. 2.40):

$$f(h\mathbf{n}) = h(\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{q} + \frac{1}{2}h\mathbf{n}\times(\nabla\times\mathbf{q}).$$

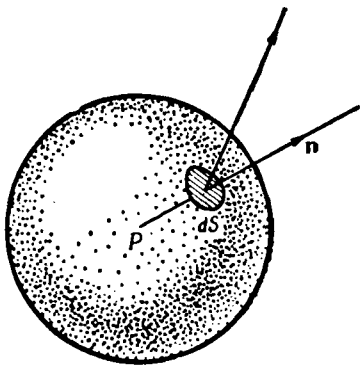


Рис. 334.

Гипотеза вязкости состоит в том, что напряжение $\mathbf{n}\Xi$ пропорционально $f(\mathbf{n})$, или, точнее,

$$\mathbf{n}\Xi = 2\mu f(\mathbf{n}) = 2\mu(\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{q} + \mu\mathbf{n}\times(\nabla\times\mathbf{q}), \quad (3)$$

где μ называется *коэффициентом вязкости*. Физическая размерность μ выражается через размерности массы, длины и времени следующим образом: $ML^{-1}T^{-1}$.

Далее, из п. 2.16 имеем

$$f(\mathbf{n}) = (\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{n}(-\nabla;\ \mathbf{q}+\mathbf{q};\ \nabla) = \frac{1}{2}\mathbf{n}(\nabla;\ \mathbf{q}+\mathbf{q};\ \nabla). \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{q};\nabla$ есть диадное произведение, сопряженное [1]) с диадным произведением $\nabla;\mathbf{q}$.

Тогда из равенства (3) следует, что

$$\Xi = \mu(\nabla;\ \mathbf{q}+\mathbf{q};\ \nabla)$$

и тензор напряжений (1) принимает вид

$$\Phi = -p'I + \mu(\nabla;\ \mathbf{q}+\mathbf{q};\ \nabla).$$

Теперь *определим давление* p как скалярный инвариант этого тензора напряжений (см. п. 19.01), а именно [2])

$$-3p = \Phi_I = -3p' + 2\mu(\nabla\mathbf{q}).$$

Наконец, представим тензор напряжений в виде симметричного тензора

$$\Phi = -pI - \frac{2}{3}\mu(\nabla\mathbf{q})\,I + \mu(\nabla;\ \mathbf{q}+\mathbf{q};\ \nabla). \quad (5)$$

---

[1]) Чтобы наглядно интерпретировать и объяснить сопряженное диадное произведение $\mathbf{q};\nabla$, выпишем $\nabla;\mathbf{q}$ в полном виде и поменяем затем порядок *векторов* в каждом диадном произведении. Следовательно, если $\mathbf{q} = \mathbf{i}_1q_1 + \mathbf{i}_2q_2 + \mathbf{i}_3q_3$, то в декартовых координатах (x_1, x_2, x_3) имеем

$$\nabla;\mathbf{q} = \left(\mathbf{i}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right);$$

$$(\mathbf{i}_1q_1 + \mathbf{i}_2q_2 + \mathbf{i}_3q_3) = \sum(\mathbf{i}_r;\ \mathbf{i}_s)\frac{\partial q_s}{\partial x_r}, \qquad r,\ s = 1,\ 2,\ 3,$$

$$\mathbf{q};\nabla = \sum(\mathbf{i}_s;\ \mathbf{i}_r)\frac{\partial q_s}{\partial x_r} = \sum(\mathbf{i}_r;\ \mathbf{i}_s)\frac{\partial q_r}{\partial x_s}.$$

[2]) При этом возникает естественный вопрос о законности такого определения, поскольку давление определяется из кинетической теории газа и связано с плотностью уравнением состояния (подробности см. в приложении). — *Прим. ред.*

Таким образом, напряжение на площадке dS будет равно

$$\mathbf{n}\Phi = -p\mathbf{n} - \frac{2}{3}\mathbf{n}\mu(\nabla\mathbf{q}) + (\mathbf{n}2\mu\nabla)\mathbf{q} + \mathbf{n}\times\mu\boldsymbol{\zeta}, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{\zeta} = \nabla\times\mathbf{q}$ — вихрь.

По принятой гипотезе напряжение является линейной функцией от направления нормали к площадке, на которой, как мы предполагаем, это напряжение действует. Выбирая на поверхности сферы различные элементарные площадки, получим соответствующие вязкие напряжения. Для невязкой жидкости $\mu = 0$. Когда жидкость покоится, то $\mathbf{q} = 0$. В обоих этих случаях вязкое напряжение обращается в нуль. Вообще говоря, допустимость применения принятой выше гипотезы требует исследования передачи количества движения, обусловленного случайным движением молекул, которому в конце концов напряжение и обязано своим существованием. Однако обращение к такого рода исследованию выходит за рамки этой книги, поэтому мы просто будем предполагать, что действие внутреннего трения в жидкости описывается тензором напряжений (5).

19.03. Уравнение движения. В случае вязкой жидкости уравнение движения выводится по схеме, применявшейся уже в п. 3.41.

Таким образом, рассматривая объем жидкости V, заключенный внутри проведенной в жидкости воображаемой поверхности S, будем иметь

$$\int\limits_{(V)} \varrho\frac{d\mathbf{q}}{dt}\,d\tau = \int\limits_{(S)} \mathbf{n}\Phi\,dS + \int\limits_{(V)} \varrho\mathbf{F}\,d\tau,$$

откуда, применяя теорему Гаусса, находим

$$\varrho\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \varrho\mathbf{F} + \nabla\Phi. \tag{1}$$

Простейший способ вычисления $\nabla\Phi$ состоит в том, чтобы величину $n\Phi$ под интегралом выразить по формуле (6) п. 19.02 и затем воспользоваться теоремой Гаусса. Тогда получим

$$\varrho\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \varrho\mathbf{F} - \nabla p - \frac{2}{3}\nabla[\mu(\nabla\mathbf{q})] + [\nabla(2\mu\nabla)]\mathbf{q} + \nabla\times(\mu\boldsymbol{\zeta}).$$

Обозначая $\boldsymbol{\alpha} = \nabla\mu$, легко приведем[1]) это уравнение к виду

$$\varrho\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \varrho\mathbf{F} - \nabla p - \mu\nabla\times\boldsymbol{\zeta} + \frac{4}{3}\mu\nabla(\nabla\mathbf{q}) + 2(\boldsymbol{\alpha}\nabla)\mathbf{q} + \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\zeta} - \frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}(\nabla\mathbf{q}). \tag{2}$$

В случае *постоянной вязкости* $\boldsymbol{\alpha} = 0$ и

$$\varrho\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \varrho\mathbf{F} - \nabla p - \mu\nabla\times\boldsymbol{\zeta} + \frac{4}{3}\mu\nabla(\nabla\mathbf{q}), \tag{3}$$

а для несжимаемой жидкости $\nabla\mathbf{q} = 0$ и

$$\varrho\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \varrho\mathbf{F} - \nabla p - \mu\nabla\times\boldsymbol{\zeta}. \tag{4}$$

С другой стороны, воспользовавшись формулой (V) п. 2.32, можем записать последнее уравнение в следующем виде:

$$\varrho\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \varrho\mathbf{F} - \nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{q}. \tag{5}$$

[1]) См. Cope W. F., The equations of hydrodynamics in a very general form, *R. and M.*, № 1903 (1942).

Во многих случаях удобнее применять *кинематический коэффициент вязкости* $\nu = \mu/\varrho$, имеющий размерность L^2T^{-1}. Значение этого коэффициента для воды при 15°C равно $1{,}23 \cdot 10^{-5}$ *фут*^{2}/*сек* ($1{,}14 \cdot 10^{-2}$ *см*^{2}/*сек*), а для воздуха $1{,}59 \cdot 10^{-4}$ *фут*^{2}/*сек* ($1{,}48 \cdot 10^{-1}$ *см*^{2}/*сек*). Судя по этим стандартным значениям, воздух является более вязким, чем вода.

В случае консервативных массовых сил, используя преобразования из п. 3.43, можно записать уравнение движения (5) следующими способами:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = -\nabla\left(\frac{p}{\varrho} + \Omega\right) + \nu\nabla^2\mathbf{q}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \mathbf{q} \times \boldsymbol{\zeta} = -\nabla\left(\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}q^2 + \Omega\right) + \nu\nabla^2\mathbf{q}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \mathbf{q} \times \boldsymbol{\zeta} = -\nabla\chi - \nu\nabla \times \boldsymbol{\zeta}, \tag{8}$$

где $\chi = p/\varrho + \frac{1}{2}q^2 + \Omega$, а Ω — потенциал массовых сил.

Из этого уравнения видно, что для установившегося безвихревого движения $\nabla\chi = 0$ и, следовательно, χ имеет постоянное значение во всей жидкости.

Форма (8) удобна для преобразования уравнения движения к любой системе ортогональных криволинейных координат с помощью приемов, изложенных в п. 2.72.

В частности, из уравнения (8) для плоского движения в декартовых координатах получим

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} - q_y\zeta = -\frac{\partial \chi}{\partial x} - \nu\frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} + q_x\zeta = -\frac{\partial \chi}{\partial y} + \nu\frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

В этих уравнениях скалярные величины ζ и χ не меняются при замене координат, поэтому здесь x и y можно рассматривать как любые ортогональные криволинейные координаты. Таким образом, в случае полярных координат на плоскости (r, θ) имеем

$$\frac{\partial q_r}{\partial t} - q_\theta\zeta = -\frac{\partial \chi}{\partial r} - \nu\frac{\partial \zeta}{r\partial\theta},$$

$$\frac{\partial q_\theta}{\partial t} + q_r\zeta = -\frac{\partial \chi}{r\partial\theta} + \nu\frac{\partial \zeta}{\partial r}.$$

Выражение для ζ через составляющие скорости при этом будет таково:

$$\zeta = \frac{\partial q_\theta}{\partial r} + \frac{q_\theta}{r} - \frac{\partial q_r}{r\,\partial\theta}.$$

19.04. Установившееся движение; отсутствие внешних сил. В этом случае уравнение (1) из п. 19.03 принимает вид

$$\nabla\Phi = (\varrho\mathbf{q}\nabla)\,\mathbf{q} = \nabla(\varrho\mathbf{q};\mathbf{q}) - \mathbf{q}[\nabla(\varrho\mathbf{q})],$$

причем здесь использована формула (X) п. 2.34. Но, согласно уравнению неразрывности, $\nabla(\varrho\mathbf{q}) = 0$ и, следовательно,

$$\nabla(\Phi - \varrho\mathbf{q};\mathbf{q}) = 0. \tag{1}$$

Последнее уравнение справедливо даже в том случае, когда ϱ и μ являются функциями координат.

19.05. Граничные условия в вязкой жидкости. Кинематическое условие, состоящее в том, что нормальная скорость жидкости в месте соприкосновения ее с движущейся границей должна быть равна нормальной скорости этой границы, имеет место для жидкости независимо от того, является ли она вязкой или нет.

Когда вязкая жидкость находится в соприкосновении с твердым телом, касательные скорости жидкости и тела в месте соприкосновения также должны быть одинаковы. Это положение имеет характер физической гипотезы и выводится из опыта. Таким образом, в месте соприкосновения тела и жидкости относительное движение отсутствует.

На поверхности, разделяющей две жидкости, нормальное давление и вязкое напряжение будут непрерывны при условии, что можно пренебречь поверхностным натяжением.

19.11. Уравнение, которому удовлетворяет вихрь. Применяя к уравнению (7) п. 19.03 операцию вихря и замечая, что вихрь от градиента равен нулю (см. п. 2.32), получаем в соответствии с п. 3.53

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = (\boldsymbol{\zeta}\nabla)\,\mathbf{q} + \nu\nabla \times (\nabla^2\mathbf{q}).$$

Но по формуле (V) п. 2.32 имеем $\nabla \times (\nabla^2\mathbf{q}) = -\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\zeta}) = \nabla^2\boldsymbol{\zeta}$,

если при этом учесть, что, согласно п. 3.52, $\nabla\boldsymbol{\zeta} = 0$; следовательно,

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = (\boldsymbol{\zeta}\nabla)\,\mathbf{q} + \nu\nabla^2\boldsymbol{\zeta}. \tag{1}$$

Если движение вязкой жидкости начинается из состояния покоя, то в начальный момент времени $\boldsymbol{\zeta} = 0$ и, значит, уравнение (1) для начального момента времени имеет вид

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \nu\nabla^2\boldsymbol{\zeta}. \tag{2}$$

Поскольку на границах вектор $\boldsymbol{\zeta}$, вообще говоря, не обращается в нуль, то в соответствии с последним уравнением следует, что в конце концов и внутри жидкости может образоваться вихрь в результате распространения его от границы.

В плоском движении вихрь всегда перпендикулярен плоскости движения, и поэтому в данном случае уравнение (2) применимо для любого момента времени [1]).

В действительных течениях жидкости вихри заметных размеров существуют только в тех областях жидкости, которые движутся вблизи твердых границ. Этот факт хорошо подтверждается наблюдениями и ярко проявляется на примере кормового следа позади плывущего корабля: след возникает только в той части воды, которая прошла вблизи корпуса корабля. Эти же наблюдения показывают, что возмущенные вихри в кормовом следе затухают вследствие трения.

Известный интерес представляет и другой пример. Время от времени возникает дискуссия относительно того, является ли направление вращения вихря, который часто можно наблюдать при вытекании воды из ванны, различным в северном и южном полушариях Земли. Нетрудно проверить экспериментально, что можно получить любое направление вращения этого вихря в зависимости от того, наполнена ли ванна горячей или холодной водой. В горячей и в холодной воде, движущейся вблизи границы, возникают вихри противоположного направления.

---

[1]) $(\boldsymbol{\zeta}\nabla)\mathbf{q} = \zeta_z \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} = 0$, так как $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, y)$. — *Прим. ред.*

19.12. Диффузия вихря. Если движение происходит по окружностям с центрами на оси z, причем скорость является функцией расстояния r от этой оси, то, согласно уравнению (1) из п. 19.11,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right). \tag{1}$$

Последнее уравнение идентично уравнению радиального распространения тепла на плоскости)[1]. Значит, в случае изолированного прямолинейного вихря интенсивности $\varkappa$, который в начальный момент времени совпадает с осью z, будем иметь следующее решение:

$$\zeta = \frac{\varkappa}{2\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t} \right).$$

Это решение, как легко проверить дифференцированием, удовлетворяет уравнению (1). Тогда циркуляция по окружности радиуса r будет равна

$$\int_0^r \zeta 2\pi r \, dr = 2\pi\varkappa \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t} \right) \right].$$

Когда $t \to 0$, циркуляция равняется $2\pi\varkappa$; при $t \to \infty$ циркуляция стремится к нулю. Этот факт показывает, как быстро затухает вихрь благодаря вязкости, которой он был обязан своим возникновением[2]).

19.13. Циркуляция в вязкой жидкости. Если C — циркуляция по некоторому замкнутому контуру, движущемуся с жидкостью, то

$$C = \int \mathbf{q} \, d\mathbf{r},$$

где интеграл берется по этому контуру.

Согласно формуле (2) из п. 3.51 и уравнению (6) из п. 19.03, получаем

$$\frac{dC}{dt} = \int \left[-\nabla \left(\frac{p}{\varrho} + \Omega \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{q} \right] d\mathbf{r} = \nu \int \nabla^2 \mathbf{q} \cdot d\mathbf{r} = -\nu \int (\nabla \times \boldsymbol{\zeta}) \, d\mathbf{r}.$$

Следовательно, когда контур движется вместе с жидкостью, скорость изменения циркуляции зависит только от вихря в окрестности этого контура. Значит, если жидкость в начальный момент времени покоилась ($\zeta = 0$), то циркуляция может возникнуть только из-за диффузии вихря от границы внутрь жидкости (см. п. 19.11).

19.21. Диссипация энергии. Рассмотрим поверхность Σ, которая движется с жидкостью и, значит, все время содержит внутри себя одни и те же частицы жидкости. Кинетическая и внутренняя энергии жидкости, заключенной внутри Σ, будут равны

$$T_k = \int_{(V)} \frac{1}{2} \varrho \mathbf{q}\mathbf{q} \, d\tau, \quad J = \int_{(V)} \varrho E \, d\tau,$$

---

[1]) Carslaw, Conduction of heat, Cambridge, 1921.

[2]) В вихрях больших развиваются средние,
В тех — еще меньшие, и... так до трения.
Приписывается Л. Ф. Ричардсону.
(Перевод Ю. Д. Шмыглевского).

где интегралы берутся по объему V, ограниченному поверхностью Σ. Здесь E — внутренняя энергия, отнесенная к единице массы (см. пп. 1.60 и 20.01).

Скорость изменения во времени величин T_k и J в соответствии с формулой (2) из п. 3.20 будет равна

$$\frac{dT_k}{dt}=\int\limits_{(V)}\varrho\mathbf{a}\mathbf{q}\,d\tau,\qquad \frac{dJ}{dt}=\int\limits_{(V)}\varrho\frac{dE}{dt}\,d\tau, \tag{1}$$

где $\mathbf{a}$ представляет собой ускорение, которое определяется уравнением движения (1) из п. 19.03

$$\varrho\mathbf{a}=\varrho\mathbf{F}+\nabla\Phi. \tag{2}$$

Для общности рассуждений введем *второй коэффициент вязкости* λ, связанный с модулем всестороннего сжатия $\varkappa$ (объемным модулем упругости, см. теорию упругости) соотношением[1])

$$\varkappa=\lambda+\frac{2}{3}\mu. \tag{3}$$

Если $\varkappa=0$, то имеем случай, рассмотренный в п. 19.02. Далее, введем тензор скоростей деформации D, определяемый так:

$$D=\frac{1}{2}(\nabla;\,\mathbf{q}+\mathbf{q};\,\nabla). \tag{4}$$

Отметим, что первый скалярный инвариант этого тензора (см. п. 2.16) будет равен

$$D_I=\nabla\mathbf{q}. \tag{5}$$

В этих обозначениях тензор напряжений (5) из п. 19.02 примет обобщенный вид

$$\Phi=-pI+\left(\varkappa-\frac{2}{3}\mu\right)ID_I+2\mu D. \tag{6}$$

Тогда будем иметь следующее уравнение баланса энергии. Изменение в единицу времени кинетической и внутренней энергии равняется сумме работы в единицу времени сил напряжения на границе Σ, работы в единицу времени внешних сил, приложенных к телу, и количества тепла, подводимого в единицу времени:

$$\frac{dT_k}{dt}+\frac{dJ}{dt}=\int\limits_{(\Sigma)}-(\mathbf{n}\Phi)\,\mathbf{q}\,d\Sigma+\int\limits_{(V)}\varrho\mathbf{F}\mathbf{q}\,d\tau+\int\limits_{(V)}Q\,d\tau. \tag{7}$$

Здесь Q — количество тепла, которое подводится в единицу времени к единице объема, например, за счет теплопроводности через поверхность Σ или за счет излучения от источников, находящихся вне объема V.

Если воспользоваться равенствами (1) и теоремой Гаусса, то уравнению (7) можно придать вид

$$\int\limits_{(V)}\left[\varrho\mathbf{a}\mathbf{q}-\varrho\mathbf{F}\mathbf{q}-\nabla(\Phi\mathbf{q})+\varrho\frac{dE}{dt}-Q\right]d\tau=0,$$

но

$$\nabla(\Phi\mathbf{q})=(\nabla\Phi)\,\mathbf{q}+(\Phi\nabla)\,\mathbf{q}. \tag{8}$$

Если подставить это соотношение в уравнение (8) и учесть уравнение (2), то получим

$$\int\limits_{(V)}\left[\varrho\frac{dE}{dt}-(\Phi\nabla)\,\mathbf{q}-Q\right]d\tau=0. \tag{9}$$

[1]) О втором коэффициенте вязкости см. в приложении. — *Прим. ред.*

Поскольку объем, по которому мы интегрируем, является произвольным, то подинтегральная функция должна обращаться в нуль и, следовательно,

$$\varrho \frac{dE}{dt} = Q + (\Phi\nabla)\,\mathbf{q}. \tag{10}$$

Но, в соответствии с формулой (4)

$$\nabla;\ \mathbf{q} = D + \frac{1}{2}(\nabla;\ \mathbf{q} - \mathbf{q};\ \nabla),$$

причем тензор, стоящий в скобках, является антисимметричным, тогда как тензоры Φ и D являются симметричными. Поэтому, согласно п. 2.16,

$$(\Phi\nabla)\,\mathbf{q} = \Phi \cdot\cdot (\nabla;\ \mathbf{q}) = \Phi \cdot\cdot D,$$

и, следовательно, уравнение (10) примет вид

$$\varrho \frac{dE}{dt} = \Phi \cdot\cdot D + Q. \tag{11}$$

Если T — абсолютная температура, а S — энтропия, то по формулам (4) и (9) из п. 20.01 будем иметь

$$T\,dS = dE + p\,d(1/\varrho). \tag{12}$$

Величина $T\,dS/dt$ представляет собой приток тепла в единицу времени на единицу *массы* жидкости; тогда приток тепла в единицу времени на единицу *объема* жидкости будет равен

$$\varrho T \frac{dS}{dt} = \varrho \frac{dE}{dt} + p\varrho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\varrho}\right) = \varrho \frac{dE}{dt} + pD_I, \tag{13}$$

поскольку по формуле (5) из п. 3.20 $D_I = \nabla\mathbf{q} = -(1/\varrho)\,d\varrho/dt$. Таким образом, равенства (11) и (13) дают приток тепла в единицу времени на единицу объема

$$\varrho T \frac{dS}{dt} = \Phi \cdot\cdot D + pD_I + Q. \tag{14}$$

Но Q есть количество тепла, которое подводится в единицу времени за счет теплопроводности и других внешних факторов. Следовательно, величина

$$w_i = \Phi \cdot\cdot D + pD_I \tag{15}$$

представляет собой приток тепла в элементе жидкости в единицу времени на единицу объема за счет других форм энергии. Значит, w_i является скоростью диссипации энергии, обусловленной внутренним трением, и по этой причине указанная величина называется *диссипативной функцией*.

Воспользуемся теперь равенством (6) и заметим, что $D \cdot\cdot I = D_I$; тогда

$$w_i = 2\mu\left[(D \cdot\cdot D) - \frac{1}{3}D_I^2\right] + \varkappa D_I^2. \tag{16}$$

Для сферически симметричного растяжения или сжатия член в квадратных скобках обращается в нуль. Последний же член в выражении (16) обращается в нуль, когда

$$\varkappa = 0 \quad \text{или} \quad D_I = 0.$$

Для несжимаемой жидкости $D_I = 0$ в любом случае, поэтому здесь $\varkappa$ не будет входить ни в выражение (16), ни в выражение (6).

Для газа $D_I \neq 0$, и вопрос о том, равно ли $\varkappa$ нулю, остается открытым.

Если воспользоваться формулой, приведенной в примечании к п. 19.02, то в декартовых координатах можно записать следующее равенство:

$$D = \sum_{r,\, s=1,\, 2,\, 3} e_{rs}(\mathbf{i}_r; \mathbf{i}_g), \quad e_{rs} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial q_r}{\partial x_s} + \frac{\partial q_s}{\partial x_r}\right) = e_{sr}.$$

Тогда

$$w_i = 2\mu\left[2(e_{23}^2 + e_{31}^2 + e_{12}^2) + \frac{1}{3}(e_{22} - e_{33})^2 + \frac{1}{3}(e_{33} - e_{11})^2 + \frac{1}{3}(e_{11} - e_{22})^2\right] + \\ + \varkappa(e_{11} + e_{22} + e_{33})^2.$$

Это выражение является существенно положительным и может обращаться в нуль лишь в том случае, когда жидкость движется подобно твердому телу, так как при этом $e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{23} = e_{31} = e_{12} = 0$.

Заметим, что для несжимаемой жидкости

$$w_i = 2\mu(D \cdot\cdot D) = 2\mu(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2 + 2e_{23}^2 + 2e_{31}^2 + 2e_{12}^2).$$

Аналогичным путем можно установить, что в случае несжимаемой жидкости, заключенной в неподвижной замкнутой оболочке S, скорость диссипации энергии будет равна

$$W_i = \int_{(V)} \mu\zeta^2\, d\tau + 2\mu \int_{(S)} \left[\mathbf{n}(\mathbf{q} \times \boldsymbol{\zeta}) - \frac{1}{2}\frac{\partial q^2}{\partial n}\right] dS.$$

Но на неподвижной поверхности $\mathbf{q} = 0$; следовательно,

$$W_i = \int_{(V)} \mu\zeta^2\, d\tau,$$

и можно считать, что энергия рассеивается со скоростью $\mu\zeta^2$ на единицу объема.

19.22. Приток тепла в жидкости. Вопрос о диссипации энергии связан с притоком тепла в жидкости в единицу времени.

Рассмотрим несжимаемую жидкость, заключенную внутри некоторой неподвижной замкнутой геометрической поверхности S (см. рис. 53). Пусть $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к элементарной площадке dS. Возьмем промежуток времени δt. Количество тепла внутри поверхности S будет увеличиваться за счет тепла, вносимого потоком вещества через границу. Если T представляет собой температуру, то этот приток тепла будет равен

$$\int_{(S)} (\mathbf{nq}\, \delta t)\, \varrho T c\, dS, \tag{1}$$

где c — удельная теплоемкость жидкости.

Тепло будет также увеличиваться за счет теплопроводности на границе. Если K — коэффициент теплопроводности, то это количество тепла будет равно

$$-\int_{(S)} K(\mathbf{n}\nabla) T\, dS\, \delta t. \tag{2}$$

В жидкости будет также иметь место приток тепла в результате выделения энергии за счет трения. Эта величина, согласно п. 19.21, будет равна

$$\int_{(V)} w_i\, d\tau\, \delta t. \tag{3}$$

Полный приток тепла внутри поверхности S будет

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{(S)}(\varrho cT)\,d\tau\delta t. \tag{4}$$

Поскольку (4) = (1) + (2) + (3), то

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{(V)}(\varrho cT)\,d\tau-\int\limits_{(S)}(\mathbf{nq})\,\varrho cT\,dS=\int\limits_{(V)}w_l d\tau-\int\limits_{(S)}K(\mathbf{n}\nabla)\,T\,dS.$$

Но по теореме Гаусса

$$\int\limits_{(S)}(\mathbf{nq})\,(\varrho cT)\,dS=-\int\limits_{(V)}[(\varrho cT)\,\nabla\mathbf{q}+(\mathbf{q}\nabla)\,(\varrho cT)]\,d\tau,$$

причем здесь $\nabla\mathbf{q}=0$, а в соответствии с п. 3.10 $d/dt=\partial/\partial t+(\mathbf{q}\nabla)$. Таким образом,

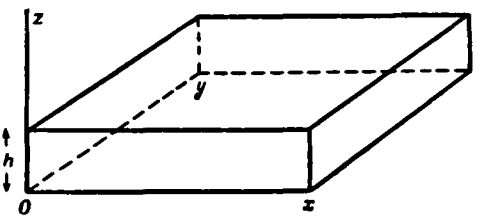
$$\int\limits_{(V)}\left[\frac{d}{dt}(\varrho cT)-w_l-\nabla(K\nabla T)\right]d\tau=0,$$

а поскольку этот интеграл имеет место для произвольного объема, то, следовательно,

$$\frac{d}{dt}(\varrho cT)=w_l+\nabla(K\nabla T).$$

Это уравнение вместе с уравнением движения и уравнением неразрывности служит для определения трех величин p, $\mathbf{q}$, T, которые характеризуют общее движение вязкой несжимаемой жидкости. В случае газа необходимо еще принимать во внимание уравнение состояния, связывающее давление, плотность и энтропию.

19.31. Течение между двумя параллельными пластинками. Рассмотрим несжимаемую жидкость, которая вынуждена под действием давления двигаться между двумя неподвижными параллельными пластинками, находящимися на расстоянии h одна от другой (рис. 335).



Р и с. 335.

Будем считать, что одна пластинка расположена в плоскости x, y, а другая — в плоскости $z=h$.

Предположим сначала, что движение происходит только в направлении оси x, поэтому в выражении для скорости

$$\mathbf{q}=\mathbf{i}u+\mathbf{j}v+\mathbf{k}w$$

составляющие $v=0$ и $w=0$. Уравнение неразрывности при этом имеет вид $\partial u/\partial x=0$, значит, u не зависит от x. Если движение является установившимся, то u есть функция только от z и не зависит от времени. Следовательно, уравнения движения будут таковы:

$$0=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\qquad 0=-\frac{\partial p}{\partial y},\qquad 0=-\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Таким образом, величина $P=-\partial p/\partial x$ не зависит от x, y, z; следовательно, решение имеет вид

$$u=A+Bz-\frac{P}{2\mu}z^2,$$

где A и B — постоянные, которые надо определить из граничных условий.

Поскольку $u=0$ при $z=0$ и $z=h$, то получим окончательно, что

$$u=\frac{1}{2\mu}z(h-z)P.$$

Среднее значение u по сечению, перпендикулярному к x, равно

$$u_0=\frac{1}{h}\int_0^h u\,dz=\frac{Ph^2}{12\mu}.$$

Значит, $u=6u_0z(h-z)/h^2$, а скорость посередине между пластинками равна $3u_0/2$.

Скорость по сечению между пластинками будет меняться по «параболическому закону». Если из каждой точки на линии, параллельной оси Oz, отложить вектор скорости, то концы этих векторов будут лежать на одной параболе (см. рис. 1).

Рассматриваемое движение является вихревым; вихрь здесь равен

$$\zeta=\mathbf{j}\frac{\partial u}{\partial z}=\mathbf{j}\frac{6u_0(h-2z)}{h^2}.$$

Благодаря вязкости на жидкость со стороны верхней пластинки будет действовать следующая сила:

$$2\mu(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{q}+\mu\mathbf{n}\times\zeta=2\mu\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{q}+\mu\mathbf{k}\times\zeta=\mathbf{i}\mu\frac{\partial u}{\partial z}=-6\mathbf{i}\mu u_0/h.$$

Таким образом, со стороны жидкости на каждую пластинку будет действовать сила, направленная вдоль по потоку. Величина силы, отнесенная к единице площади, равна $6\mu u_0/h$.

Скорость диссипации энергии на единицу объема жидкости при этом будет равна

$$\mu\zeta^2=\mu\cdot 36u_0^2(h-2z)^2/h^4.$$

Значит, если рассматривать столбик жидкости с площадью основания, равной единице, и высотой h, то скорость диссипации на единицу площади пластинки будет равна

$$\int_0^h\mu\zeta^2\,dz=12\mu u_0^2/h.$$

Для определения притока тепла в единицу времени сделаем допущение, что на каждой пластинке поддерживается одинаковая постоянная температура T_0. Тогда $\partial T/\partial x=0$ и по п. 19.22 получим

$$0=\mu\zeta^2+K\nabla^2T=\mu\zeta^2+K\frac{\partial^2T}{\partial z^2}.$$

Предположим, что коэффициент вязкости μ не зависит от распределения температуры в жидкости (что будет почти верно в случае, когда пластинки расположены близко друг от друга). В этом случае решение этого уравнения имеет вид

$$KT=-\frac{3\mu u_0^2}{4h^4}(h-2z)^4+Az+B.$$

Поскольку $T=T_0$ при $z=0$ и $z=h$, то будем иметь

$$K(T-T_0)=\frac{3\mu u_0^2}{4h}[h^4-(h-2z)^4].$$

Предположим теперь, что течение является двумерным, т. е. всюду $w=0$. Будем считать, что пластинки расположены очень близко друг к другу. Тогда составляющие скорости u и v будут изменяться от своих максимальных значений посередине между пластинками до нуля на очень коротком расстоянии $h/2$. Следовательно, производные этих составляющих в направлении z должны быть очень большими по сравнению с их производными в направлениях x и y. Если пренебречь этими последними производными, то уравнение движения примет вид

$$-\mathbf{i}\frac{\partial p}{\partial x}-\mathbf{j}\frac{\partial p}{\partial y}-\mathbf{k}\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\mathbf{i}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\mathbf{j}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)=0.$$

Отсюда $\partial p/\partial z=0$, и, значит, p является функцией только от x и y. Итак,

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial p}{\partial x},\quad \mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{\partial p}{\partial y},$$

и мы получим решения в том же виде, что и выше:

$$u=-\frac{6u_0 z(z-h)}{h^2},\quad v=-\frac{6v_0 z(z-h)}{h^2},$$

где u_0 и v_0 являются, как и ранее, средними значениями u и v.

Следовательно,

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{12\mu}{h^2}u_0,\quad \frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{12\mu}{h^2}v_0,$$

и, значит, величины u_0 и v_0 можно рассматривать как составляющие скорости плоского движения невязкой несжимаемой жидкости с потенциалом

$$\varphi=\frac{ph^2}{12\mu}.$$

Если в области между пластинками поместить некоторый цилиндр высотой h, то течение на плоскости, проходящей посередине между пластинками, будет при этом таким же, как течение невязкой жидкости, обтекающей цилиндр такого же поперечного сечения. Надо оговориться, однако, что эта аналогия нарушается на расстояниях от тела, сравнимых с величиной h. Но поскольку размер h можно брать таким малым, каким мы пожелаем, то это ограничение является несущественным. Это обстоятельство позволило Хел-Шоу и другим исследователям получить прекрасные экспериментальные картины плоского течения идеальной несжимаемой жидкости с помощью впрыскивания в поток красящего вещества, позволяющего обнаруживать линии тока.

19.32. Течение в трубе. Пусть вязкая несжимаемая жидкость находится в установившемся движении в цилиндрической трубе произвольного поперечного сечения, ось которой направлена по оси z. Уравнение неразрывности показывает, что в этом случае скорость не должна зависеть от z, если только нет составляющих скорости, перпендикулярных к оси трубы. Тогда можно положить

$$\mathbf{q}=\mathbf{k}q,$$

где q является функцией только от x и y. Уравнение движения при этом будет иметь вид

$$\left(q\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{q}=-\frac{1}{\varrho}\nabla p+\nu\nabla^2(\mathbf{k}q),$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\partial x}=0, \quad -\frac{\partial p}{\partial y}=0, \quad -\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}\right)=0.$$

Обозначим через $P=-\partial p/\partial z$ градиент давления вдоль трубы в направлении течения. Этот градиент представляет собой постоянную величину, поскольку $\partial^2 p/\partial z^2=0$. Положив

$$q=\psi-\frac{P}{4\mu}(x^2+y^2), \tag{1}$$

из последнего уравнения получим

$$\nabla^2\psi=0. \tag{2}$$

Поскольку на границе $q=0$, то уравнения (1) и (2) показывают, что ψ является функцией тока для невязкой несжимаемой жидкости, которая заполняет цилиндр такого же поперечного сечения, что и рассматриваемая труба, и вращается вокруг его оси с угловой скоростью $P/(2\mu)$. Следовательно, данная задача становится аналогичной задаче, изученной в п. 9.70.

Рассмотрим случай трубы, поперечное сечение которой представляет собой эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \tag{3}$$

согласно п. 9.71, имеем

$$\psi=\frac{P}{4\mu}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}(x^2-y^2)+\text{const},$$

так что

$$q=A-\frac{P}{2\mu}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Чтобы $q=0$ на эллипсе (3), надо принять

$$A=\frac{P}{2\mu}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2};$$

тогда

$$q=\frac{P}{2\mu}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right).$$

Расход жидкости будет равен $R=\iint q\,dx\,dy$, где интеграл берется по всему поперечному сечению трубы.

Для того чтобы вычислить этот интеграл, заметим, что для эллипса, заданного уравнениями $x=\lambda a\cos\theta$, $y=\lambda b\sin\theta$, подинтегральная функция будет $A(1-\lambda^2)$, а площадь между этим эллипсом и эллипсом, соответствующим значению $\lambda+d\lambda$, будет равна $2\pi ab\lambda d\lambda$. Следовательно,

$$\iint\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dx\,dy=\int_0^1 2\pi ab\lambda(1-\lambda^2)\,d\lambda=\frac{\pi ab}{2},$$

а

$$R=\frac{P}{4\mu}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\pi ab=\frac{P}{4\mu}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}S,$$

где S — площадь поперечного сечения трубы.

Отсюда средняя скорость в поперечном сечении будет равна

$$q_0 = \frac{P}{4\mu}\,\frac{a^2b^2}{a^2+b^2},$$

и, следовательно,

$$q = 2q_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Для трубы, поперечное сечение которой представляет собой круг радиуса c, имеем

$$q = 2q_0\left(1 - \frac{r^2}{c^2}\right), \quad q_0 = \frac{Pc^2}{8\mu}, \quad R = \frac{\pi c^4 P}{8\mu},$$

где r — расстояние от оси трубы.

Если положить $b = a\alpha$ и взять $c^2 = ab$ так, чтобы эллиптическое и круговое сечения трубы имели одинаковую площадь, то отношение расходов через эти сечения будет $2\alpha:(1+\alpha^2)$, причем это отношение меньше единицы. Таким образом, расход вязкой жидкости через трубу кругового сечения больше, чем расход через трубу эллиптического сечения с той же площадью.

Измерение расхода через круговые трубы доказывает, что предположение о прилипании жидкости на стенке является обоснованным. Действительно, наличие скольжения увеличивало бы расход жидкости на некоторую величину, и это нарушило бы справедливость выведенной выше формулы, показывающей, что расход изменяется как четвертая степень диаметра трубы.

Результаты измерения расхода через трубу позволяют также создать метод определения коэффициента вязкости μ.

19.41. Составляющие напряжения. Пусть u_1, u_2, u_3 — некоторые ортогональные координаты. Обозначим составляющие напряжения в направлениях u_1, u_2 и u_3 на плоскости, перпендикулярной к h, следующим образом:

$$\widehat{hu_1},\ \widehat{hu_2},\ \widehat{hu_3}.$$

Тогда в декартовых координатах будем иметь девять составляющих напряжения на плоскостях, перпендикулярных к x, y, z, а именно

$$\widehat{xx},\ \widehat{xy},\ \widehat{xz};\quad \widehat{yx},\ \widehat{yy},\ \widehat{yz};\quad \widehat{zx},\ \widehat{zy},\ \widehat{zz}.$$

Положив в формуле для напряжения $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, будем иметь для несжимаемой жидкости

$$\mathbf{i}\widehat{xx} + \mathbf{j}\widehat{xy} + \mathbf{k}\widehat{xz} = 2\mu(\mathbf{i}\nabla)\mathbf{q} + \mu\mathbf{i}\times\boldsymbol{\zeta} - p\mathbf{i} =$$
$$= 2\mu\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}q_x + \mathbf{j}q_y + \mathbf{k}q_z) + \mu(-\mathbf{j}\zeta_z + \mathbf{k}\zeta_y) - p\mathbf{i},$$

и, таким образом,

$$\widehat{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial q_x}{\partial x},\quad \widehat{xy} = \mu\left(\frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial y}\right),\quad \widehat{xz} = \mu\left(\frac{\partial q_x}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial x}\right).$$

Отсюда следует, что $\widehat{xy} = \widehat{yx}$, $\widehat{xz} = \widehat{zx}$, $\widehat{yz} = \widehat{zy}$, так что девять составляющих напряжения фактически сводятся к шести составляющим, а именно к $\widehat{xx}$, $\widehat{yy}$, $\widehat{zz}$; $\widehat{xy}$, $\widehat{yz}$, $\widehat{zx}$.

Этот результат можно также получить, рассматривая бесконечно малый параллелепипед и приравнивая нулю моменты напряжений относительно линий, проходящих через центр параллелепипеда и параллельных его

ребрам[1]). Этим же способом можно показать, что полученный выше результат справедлив для любой системы координат.

В более общем случае для любой ортогональной системы координат (см. п. 2.72) имеем

$$\mathbf{i}_1\widehat{u_1u_1}+\mathbf{i}_2\widehat{u_1u_2}+\mathbf{i}_3\widehat{u_1u_3}=-p\mathbf{i}_1+2\mu(\mathbf{i}_1\nabla)\mathbf{q}+\mu(\mathbf{i}_1\times\boldsymbol{\zeta}).$$

Но по формуле (IV) из п. 2.34

$$2(\mathbf{i}_1\nabla)\mathbf{q}+\mathbf{i}_1\times\boldsymbol{\zeta}=\nabla(\mathbf{i}_1\mathbf{q})-\nabla\times(\mathbf{i}_1\times\mathbf{q})-\mathbf{q}\times(\nabla\times\mathbf{i}_1)-\mathbf{q}(\nabla\mathbf{i}_1)+\mathbf{i}_1(\nabla\mathbf{q}),$$

а $\mathbf{i}_1\mathbf{q}=q_1$, $\mathbf{i}_1\times\mathbf{q}=-\mathbf{i}_2q_3+\mathbf{i}_3q_2$. Отсюда с помощью способа, примененного в п. 2.27, получим последовательно

$$\nabla(\mathbf{i}_1\mathbf{q})=\nabla q_1=\frac{\mathbf{i}_1}{h_1}\frac{\partial q_1}{\partial u_1}+\frac{\mathbf{i}_2}{h_2}\frac{\partial q_1}{\partial u_2}+\frac{\mathbf{i}_3}{h_3}\frac{\partial q_1}{\partial u_3},$$

$$\nabla\times(\mathbf{i}_1\times\mathbf{q})=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\mathbf{i}_1h_1\left[\frac{\partial(q_2h_3)}{\partial u_2}+\frac{\partial(q_3h_2)}{\partial u_3}\right]-\mathbf{i}_2h_2\frac{\partial(q_2h_3)}{\partial u_1}-\mathbf{i}_3h_3\frac{\partial(q_3h_2)}{\partial u_1}\right\},$$

$$\mathbf{q}\times(\nabla\times\mathbf{i}_1)=-\mathbf{i}_1\left(\frac{q_2}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial u_2}+\frac{q_3}{h_1h_3}\frac{\partial h_1}{\partial u_3}\right)+\frac{\mathbf{i}_2q_1}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial u_2}+\frac{\mathbf{i}_3q_1}{h_1h_3}\frac{\partial h_1}{\partial u_3},$$

$$\mathbf{q}(\nabla\mathbf{i}_1)=\frac{\mathbf{i}_1q_1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial(h_2h_3)}{\partial u_1}+\frac{\mathbf{i}_2q_2}{h_1h_2h_3}\frac{\partial(h_2h_3)}{\partial u_1}+\frac{\mathbf{i}_3q_3}{h_1h_2h_3}\frac{\partial(h_2h_3)}{\partial u_1},$$

$$\mathbf{i}_1(\nabla\mathbf{q})=\frac{\mathbf{i}_1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(q_1h_2h_3)}{\partial u_1}+\frac{\partial(q_2h_3h_1)}{\partial u_2}+\frac{\partial(q_3h_1h_2)}{\partial u_3}\right].$$

Тогда, отбрасывая взаимно уничтожающиеся члены, будем иметь

$$\widehat{u_1u_1}=-p+\frac{2\mu}{h_1}\left[\frac{\partial q_1}{\partial u_1}+\frac{q_2}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial u_2}+\frac{q_3}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial u_3}\right],$$

$$\widehat{u_1u_2}=\mu\left[\frac{1}{h_1}\frac{\partial q_2}{\partial u_1}+\frac{1}{h_2}\frac{\partial q_1}{\partial u_2}-\frac{q_2}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial u_1}-\frac{q_1}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial u_2}\right],$$

$$\widehat{u_1u_3}=\mu\left[\frac{1}{h_1}\frac{\partial q_3}{\partial u_1}+\frac{1}{h_3}\frac{\partial q_1}{\partial u_3}-\frac{q_3}{h_1h_3}\frac{\partial h_3}{\partial u_1}-\frac{q_1}{h_1h_3}\frac{\partial h_1}{\partial u_3}\right].$$

Непосредственно можно выписать и остальные составляющие напряжения. Из вышеприведенных соотношений видно, что $\widehat{u_1u_2}=\widehat{u_2u_1}$, $\widehat{u_1u_3}=\widehat{u_3u_1}$, так как эти соотношения не меняют своего вида при перестановке индексов.

В случае цилиндрических координат (см. п. 2.72) $u_1=x$, $u_2=\widetilde{\omega}$, $u_3=\omega$ получим, что $h_1=1$, $h_2=1$, $h_3=\widetilde{\omega}$ и

$$\widehat{xx}=-p+2\mu\frac{\partial q_x}{\partial x},\qquad \widehat{\widetilde{\omega}\omega}=\mu\left[\frac{\partial q_{\widetilde{\omega}}}{\partial\widetilde{\omega}}+\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial q_\omega}{\partial\omega}-\frac{q_\omega}{\widetilde{\omega}}\right],$$

$$\widehat{\widetilde{\omega}\widetilde{\omega}}=-p+2\mu\frac{\partial q_{\widetilde{\omega}}}{\partial\widetilde{\omega}},\qquad \widehat{\omega x}=\mu\left[\frac{\partial q_\omega}{\partial x}+\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial q_x}{\partial\omega}\right],$$

$$\widehat{\omega\omega}=-p+\frac{2\mu}{\widetilde{\omega}}\left(\frac{\partial q_\omega}{\partial\omega}+q_{\widetilde{\omega}}\right),\qquad \widehat{x\widetilde{\omega}}=\mu\left[\frac{\partial q_{\widetilde{\omega}}}{\partial x}+\frac{\partial q_x}{\partial\widetilde{\omega}}\right].$$

Составляющие напряжения в сферической системе координат приведены в примере 20 в конце главы.

Вышеуказанные формулы применимы только для несжимаемой жидкости. Для сжимаемого газа, как показывает уравнение (5) п. 19.02, вели-

[1]) Полученный результат носит название теоремы взаимности и является одним из фундаментальных результатов механики сплошных сред. См. подробнее в приложении.— *Прим. ред.*

чину p в этих формулах надо заменить на $p+\frac{2}{3}\mu\nabla\mathbf{q}$, где $\nabla\mathbf{q}$ выражается формулой (2) из п. 2.72.

19.42. Установившееся вращательное движение. Рассмотрим двумерное движение, представляющее собой вращение относительно оси x с угловой скоростью n, которая является функцией только расстояний $\widetilde{\omega}$ от оси вращения. Очевидно, что в этом случае скорость имеет единственную составляющую $\widetilde{\omega}_n$, перпендикулярную к радиусу-вектору. Следовательно, все составляющие вязкого напряжения, рассмотренные в п. 19.41, кроме составляющей $\widetilde{\omega\omega}$, обращаются в нуль, а эта последняя равна $\mu[\partial(\widetilde{\omega}n)/\partial\widetilde{\omega}-n]=\mu\widetilde{\omega}\partial n/\partial\widetilde{\omega}$.

Поэтому момент относительно оси вращения силы вязкого сопротивления, действующей на круговой цилиндрической поверхности радиуса $\widetilde{\omega}$ и отнесенной к единице длины, будет равен $\widetilde{\omega}\mu\widetilde{\omega}(\partial n/\partial\widetilde{\omega})2\pi\widetilde{\omega}$.

Если движение является установившимся, то момент количества движения жидкости, заключенной между двумя такими цилиндрическими поверхностями с осью z, не будет меняться во времени. Поэтому приведенная выше величина момента будет одинаковой (но противоположной по знаку) для рассматриваемых внутренней и внешней цилиндрических поверхностей. Таким образом,

$$\widetilde{\omega}^3\frac{dn}{d\widetilde{\omega}}=A,$$

где A не зависит от $\widetilde{\omega}$. Следовательно,

$$n=-\frac{A}{2\widetilde{\omega}^2}+B.$$

Если жидкость ограничена изнутри цилиндрической поверхностью радиуса a, вращающейся с угловой скоростью n_1, а снаружи концентрическим цилиндром радиуса b, вращающимся с угловой скоростью n_2, то мы должны иметь

$$n_1=-\frac{A}{2a^2}+B,\qquad n_2=-\frac{A}{2b^2}+B$$

и поэтому

$$n=\frac{n_2b^2-n_1a^2}{b^2-a^2}+\frac{a^2b^2(n_1-n_2)}{\widetilde{\omega}^2(b^2-a^2)}. \tag{1}$$

В этих рассуждениях не накладывается ограничения, что n_1 и n_2 имеют один и тот же знак. Если положить $n_2=-n_3$, причем n_1 и n_3 имеют одинаковый знак, то угловая скорость n будет обращаться в нуль, когда

$$\widetilde{\omega}^2=\frac{a^2b^2(n_1+n_3)}{a^2n_1+b^2n_3}.$$

Жидкость, расположенная по разные стороны определенной таким образом «заторможенной» цилиндрической поверхности, будет вращаться в противоположных направлениях.

Далее, если в формуле (1) положить $b=\infty$ и $n_2=0$, то получим $n/n_1=a^2/\widetilde{\omega}^2$, что дает распределение скорости в том случае, когда жидкость ограничена только изнутри. Если же жидкость ограничена только снаружи (но не изнутри), то $a=0$ и, следовательно, $n=n_2$. Тогда вся система при установившемся движении будет вращаться как твердое тело.

Если внутренняя цилиндрическая поверхность покоится, то

$$n = \frac{b^2}{\tilde{\omega}^2}\,\frac{\tilde{\omega}^2 - a^2}{b^2 - a^2}\,n_2.$$

Это установившееся движение, как показал Тейлор, будет устойчивым для всех значений n_2. Пара сил, обусловленная трением и действующая на внешней цилиндрической оболочке, будет в этом случае равна

$$\left(\mu \cdot 2\pi\tilde{\omega}^3 \frac{dn}{d\tilde{\omega}}\right) = 4\pi\mu\,\frac{a^2 b^2 n_2}{b^2 - a^2}.$$

Тейлор [1]) показал также, что если внешняя цилиндрическая поверхность неподвижна, а внутренняя вращается, то движение будет устойчивым только при достаточно малых угловых скоростях внутренней цилиндрической поверхности.

В более поздней статье Тейлор [2]) показал, что если внутренняя цилиндрическая поверхность покоится, то движение хотя и остается устойчивым в указанном выше смысле, но при достаточно большой скорости n_2 может наступить турбулентное движение.

19.51. Влияние вязкости на волны в воде. Когда волны малой амплитуды

$$\eta = a \sin(mx - nt)$$

распространяются по глубокой воде при отсутствии вязкости, комплексный потенциал (см. п. 14.17) будет $w = ace^{-i(mz-nt)}$, следовательно, комплексная скорость будет равна $u - iv = imace^{-i(mz-nt)}$, что дает $u = mace^{my}\sin(mx - nt)$, $v = -mace^{my}\cos(mx - nt)$.

Если же несжимаемая жидкость является вязкой, то напряжения на свободной поверхности при $y = 0$, соответствующие этим составляющим скорости (см. п. 19.41), равны

$$\widehat{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = -p - 2\mu m^2 ac\cos(mx - nt),$$

$$\widehat{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2\mu m^2 ac\sin(mx - nt).$$

Если эти напряжения приложены к свободной поверхности как внешние воздействия, то указанная выше волна может существовать и тогда, когда жидкость является вязкой.

Работа этих напряжений в единицу времени равна

$$\widehat{yy}v + \widehat{yx}u = pmac\cos(mx - nt) + 2\mu m^3 a^2 c^2,$$

а среднее значение этой работы составляет $2\mu m^3 a^2 c^2$.

Но полная энергия волны (на единицу площади ее поверхности), согласно п. 14.21, равна

$$\frac{1}{2}a^2 g\varrho = \frac{1}{2}a^2 mc^2\varrho.$$

При отсутствии же упомянутых выше внешних воздействий скорость диссипации энергии волны должна равняться среднему значению работы вязких сил в единицу времени. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}a^2 mc^2\varrho\right) = -2\mu m^3 a^2 c^2, \quad \text{или} \quad \frac{da}{dt} = -2\nu m^2 a.$$

---

[1]) Taylor G. I., *Phil. Trans.* (*A*), 223 (1922).
[2]) Taylor G. I., *Proc. Roy Soc.* (*A*), 157 (1936).

Отсюда $a = a_0 \exp(-2\nu m^2 t)$, где a_0 — значение a в начальный момент времени. Значит, волна в момент времени t имеет профиль, определяемый выражением

$$\eta = a_0 \exp(-2\nu m^2 t) \sin(mx - nt),$$

т. е. с течением времени амплитуда непрерывно уменьшается. Время, за которое показатель экспоненты достигает значения — 1, равно

$$t_1 = \frac{1}{2\nu m^2} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2 \nu}.$$

По прошествии этого времени амплитуда волны будет равна

$$a_0 e^{-1} = 0{,}37 a_0.$$

Если для воды взять значение $\nu = 0{,}0178$ *см*^{2}/*сек*, то получим $t_1 = 0{,}711\lambda^2$ *сек*, где длина волны λ измеряется в *см*.

Таким образом, при $\lambda = 1$ *см* время t_1 меньше чем 1 *сек*, а для $\lambda = 100$ *см* время t_1 составляет около 2 *час*. Следовательно, капиллярные волны будут гаситься из-за вязкости почти немедленно, тогда как на гравитационные волны вязкость будет влиять очень мало.

19.61. Осесимметричное движение. Возвратимся опять к соображениям, приведенным в п. 18.50, и воспользуемся соответствующими обозначениями. Чтобы в уравнении (5) учесть вязкость, необходимо изменить левую часть этого уравнения, добавив член, соответствующий $\widetilde{\omega}\nu\nabla \times (\nabla \times \zeta)$.

По формуле (4) из п. 2.72 последовательно получим

$$\nabla \times \zeta = \frac{i_x}{\widetilde{\omega}} \frac{\partial}{\partial \widetilde{\omega}} (\widetilde{\omega}\zeta) - \frac{i\widetilde{\omega}}{\widetilde{\omega}} \frac{\partial}{\partial x} (\widetilde{\omega}\zeta),$$

$$\nabla \times (\nabla \times \zeta) = -i_\omega \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\widetilde{\omega}} \frac{\partial (\widetilde{\omega}\zeta)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \widetilde{\omega}} \left(\frac{1}{\widetilde{\omega}} \frac{\partial (\widetilde{\omega}\zeta)}{\partial \widetilde{\omega}} \right) \right] = -\frac{i_\omega}{\widetilde{\omega}} E^2 (\widetilde{\omega}\zeta) =$$

$$= -\frac{i_\omega}{\widetilde{\omega}} E^4 \psi,$$

поскольку

$$\zeta = \frac{1}{\widetilde{\omega}} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \widetilde{\omega}^2} - \frac{1}{\widetilde{\omega}} \frac{\partial \psi}{\partial \widetilde{\omega}} \right) = \frac{1}{\widetilde{\omega}} E^2 \psi.$$

Тогда уравнение, которому удовлетворяет функция тока, примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (E^2 \psi) + \widetilde{\omega} \frac{\partial (\psi, \widetilde{\omega}^{-2} E^2 \psi)}{\partial (x, \widetilde{\omega})} - \nu E^4 \psi = 0. \qquad (1)$$

Второй член здесь является иной формой записи определителя, входящего в уравнение (5) из п. 18.50. Этот определитель называется якобианом, или функциональным определителем; обращение его в нуль означает наличие функциональной связи между ψ и $\widetilde{\omega}^{-2} E^2 \psi$.

Отметим, что движение, которое представляется уравнением (1), является необратимым, так как при изменении знака ψ изменятся знаки первого и последнего членов этого уравнения, но знак среднего члена сохранится.

19.62. Медленные движения. Общее уравнение движения вязкой жидкости, являясь нелинейным уравнением, оказывается очень сложным, когда оно применяется не для каких-либо специальных, а для общих задач.

Поэтому предпринимались попытки построить приближенные решения путем замены этого уравнения некоторым приближенным линейным уравнением. Уравнение (6) из п. 19.03 имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + (\mathbf{q}\nabla)\,\mathbf{q} = -\nabla\left(\frac{p}{\varrho} + \Omega\right) + \nu\nabla^2\mathbf{q}.$$

Это уравнение было бы линейным, если бы в нем отсутствовал квадратичный член $(\mathbf{q}\nabla)\,\mathbf{q}$. Отбросив этот член, придем к следующему приближенному уравнению:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{p}{\varrho} + \Omega\right) + \nu\nabla^2\mathbf{q}. \tag{1}$$

Для того чтобы получить некоторое представление о сделанном приближенном допущении, заметим, что квадратичный член, которым мы здесь пренебрегли, имеет физическую размерность U^2/a, где U — характерная скорость и a — характерная длина; например, можно рассматривать сферу радиуса a, движущуюся со скоростью U. С другой стороны, член, обусловленный вязкостью, имеет размерность $\nu U/a^2$. Таким образом, пренебрежение квадратичным членом сводится к предположению, что *число Рейнольдса*

$$\mathrm{Re} = \frac{Ua}{\nu} \tag{2}$$

мало.

Далее, если воспользоваться формой (7) уравнения движения из п. 19.03 и пренебречь квадратичным членом $-\mathbf{q}\times\boldsymbol{\zeta}$, то приближенное уравнение будет иметь вид

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}q^2 + \Omega\right) + \nu\nabla^2\mathbf{q}. \tag{3}$$

Порядок приближения здесь такой же, что и в предыдущем уравнении (1). В случае установившегося движения оба уравнения (1) и (3) можно представить как одно уравнение

$$\nu\nabla^2\mathbf{q} = \nabla P, \tag{4}$$

где скаляр P можно рассматривать как p/ϱ, $p/\varrho + \Omega$, $p/\varrho + \frac{1}{2}q^2 + \Omega$ в соответствии с тем, пренебрегаем ли мы внешними силами и принимаем ли в качестве основного уравнения (1) или (3). Очевидно, что задача, в которой пренебрегают внешними силами, отличается от задачи, в которой они учитываются, лишь несущественными деталями, так как оба эти случая связаны с решением уравнения типа (4).

Другой и совершенно иной метод решения применил Озеен, который положил

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}' + U\mathbf{i},$$

где $\mathbf{i}$ — единичный вектор в направлении характерной скорости U, и пренебрег квадратичными членами $(\mathbf{q}'\nabla)\,\mathbf{q}'$.

Тогда общее уравнение движения сводится к следующему:

$$\frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial t} + U(\mathbf{i}\nabla)\,\mathbf{q}' = -\nabla\left(\frac{p}{\varrho} + \Omega\right) + \nu\nabla^2\mathbf{q}',$$

или в случае установившегося движения

$$U(\mathbf{i}\nabla)\,\mathbf{q}' = -\nabla P + \nu\nabla^2\mathbf{q}'. \tag{5}$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (4), видим, что оно в некоторой степени учитывает квадратичные члены. О применении этого прибли-

женного уравнения можно будет получить представление из примеров 31—34, приведенных в конце этой главы.

19.63. Медленное обтекание сферы. Пусть твердая сфера радиуса a неподвижно расположена в равномерном установившемся потоке несжимаемой жидкости; скорость потока направлена по отрицательной оси x. Если пренебречь квадратичными членами в уравнении движения, то функция тока должна удовлетворять (см. п. 19.61) уравнению

$$E^4\psi = 0. \tag{1}$$

Граничные условия при этом будут таковы:
на поверхности сферы

$$\frac{\partial\psi}{r\partial\theta} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \tag{2}$$

на бесконечности

$$\psi \to \frac{1}{2} U\widetilde{\omega}^2. \tag{3}$$

Преобразовав уравнение (1) к полярным координатам $x = r\cos\theta$, $\widetilde{\omega} = r\sin\theta$, получим

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\frac{\partial}{r\partial\theta}, \quad \frac{\partial}{\partial\widetilde{\omega}} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial}{r\partial\theta},$$

и уравнение (1) примет вид

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]^2\psi = 0. \tag{4}$$

Граничное условие на бесконечности $\psi = \frac{1}{2} Ur^2\sin^2\theta$ показывает, что решение надо искать в виде

$$\psi = f(r)\sin^2\theta.$$

Подстановка этого выражения в уравнение (4) дает

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]\left[\left(\frac{d^2f(r)}{dr^2} - \frac{2f(r)}{r^2}\right)\sin^2\theta\right] = 0,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\right)\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\right)f(r) = 0.$$

Этому линейному однородному уравнению четвертого порядка удовлетворяет сумма членов вида Ar^n при условии, что справедливо равенство $[(n-2)(n-3)-2][n(n-1)-2] = 0$. Отсюда $n = -1, 1, 2, 4$, и, следовательно, общее решение имеет вид

$$f(r) = \frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4,$$

где A, B, C и D — постоянные, которые надо определить из граничных условий.

Условие (3) показывает, что $C = \frac{1}{2} U$, $D = 0$, следовательно,

$$\psi = \left(\frac{A}{r} + Br + \frac{1}{2} Ur^2\right)\sin^2\theta.$$

Составляющие скорости равны

$$q_r = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{r\partial\theta} = -U\cos\theta - 2\left(\frac{A}{r^3}+\frac{B}{r}\right)\cos\theta,$$

$$q_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} = U\sin\theta - \left(\frac{A}{r^3}-\frac{B}{r}\right)\sin\theta.$$

Полагая $r=a$, из условия (2) получаем $A = {}^1/_4 Ua^3$, $B = -{}^3/_4 Ua$, и, таким образом,

$$\psi = \frac{1}{2}U\left(r^2 - \frac{3}{2}ar + \frac{1}{2}\frac{a^3}{r}\right)\sin^2\theta = \frac{1}{4}U\frac{(r-a)^2(2r+a)}{r}\sin^2\theta.$$

Эта функция обращается в нуль при $r=a$. По формулам (4) и (7) из п. 2.72 определим величину вихря

$$\zeta = \frac{1}{r}\frac{\partial(rq_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial q_r}{r\partial\theta} = \frac{3a}{2r^2}U\sin\theta. \qquad (5)$$

19.64. Сопротивление медленно движущейся сферы. Если в только что рассмотренной задаче наложить на всю систему скорость U в направлении оси x, то жидкость станет неподвижной, а сфера будет двигаться вперед со скоростью U. Тогда соответствующая функция тока будет такой:

$$\psi = \frac{1}{4}U\left(-3ar + \frac{a^3}{r}\right)\sin^2\theta.$$

Если P — сила сопротивления сферы, то работа, совершаемая этой силой в единицу времени, равна PU, и эта величина должна равняться скорости диссипации энергии, определенной в п. 19.21.

Вихрь выражается формулой (5) из п. 19.63; следовательно,

$$PU = \mu\int_a^\infty dr\int_0^\pi \frac{9a^2}{4r^4}U^2\sin^2\theta\cdot 2\pi r^2\sin\theta\,d\theta = 6\pi\mu U^2 a.$$

Таким образом,

$$P = 6\pi\mu Ua;$$

это соотношение носит название формулы Стокса.

Эта формула дает также величину силы, которую надо приложить к сфере, чтобы удержать ее в неподвижном состоянии в установившемся потоке скорости U.

Следует напомнить, что вышеприведенное исследование применимо только к движениям, у которых число Рейнольдса Ua/ν мало. Например, в этом случае для сферы радиуса 1 *мм*, движущейся в воде, скорость должна быть меньше 0,2 *см/сек*. Основное приложение формула Стокса имеет при изучении движения мелких частиц.

Пусть сфера, состоящая из вещества с плотностью σ, падает под действием силы тяжести в вязкой несжимаемой жидкости с плотностью ϱ. Чтобы найти предельную скорость (т. е. ту скорость, при которой результирующая сила, действующая на сферу, равна нулю), надо приравнять вес сферы сумме выталкивающей силы и силы сопротивления; тогда

$$\frac{4}{3}\pi\sigma a^3 g = \frac{4}{3}\pi\varrho a^3 g + 6\pi\mu Ua, \quad U = \frac{2}{9}\frac{\sigma-\varrho}{\mu}a^2 g.$$

19.70. Векторная циркуляция. Пусть C — некоторая кривая в плоскости, в которой происходит двумерное движение, и пусть $\mathbf{k}$ — единичный

вектор нормали к этой плоскости. Обозначим

$$K = \int\limits_{(C)} \mathbf{q}\, d\mathbf{r}. \tag{1}$$

Если C является *замкнутой кривой*, ограничивающей область Σ, то скалярная величина K будет представлять собой циркуляцию вдоль этой кривой (см. п. 2.42) и по теореме Стокса

$$K = \int\limits_{(\Sigma)} \mathbf{k}\,(\nabla \times \mathbf{q})\, dS = \mathbf{k} \int\limits_{(\Sigma)} \zeta\, dS.$$

Если, как это обычно делается в случае плоского движения, рассматривать слой жидкости единичной толщины, то величину $\zeta\, dS$ можно назвать векторной величиной вихря в объеме dS цилиндра единичной толщины. Тогда, поскольку $\zeta = \mathbf{k}\zeta$, циркуляция K будет скалярной величиной вихря в объеме Σ цилиндра единичной толщины.

В более общем случае определение (1) можно распространить на незамкнутую кривую C (плоскую или пространственную), определяя циркуляцию по этой кривой C как скаляр K.

Рассмотрим теперь вектор

$$\mathbf{\Gamma} = \int\limits_{(S)} \mathbf{n} \times \mathbf{q}\, dS, \tag{2}$$

где интеграл берется по поверхности S. Если S является *замкнутой поверхностью*, которая ограничивает объем V, то по теореме Гаусса, рассматривая $\mathbf{n}$ как внешнюю нормаль, получаем

$$\mathbf{\Gamma} = \int\limits_{(V)} \nabla \times \mathbf{q}\, d\tau = \int\limits_{(V)} \zeta\, d\tau. \tag{3}$$

Таким образом, $\mathbf{\Gamma}$ является мерой (векторной) величины вихря в объеме V. Остается только в качестве простого упражнения показать, что для рассмотренного плоского движения, в котором через S теперь обозначим всю поверхность цилиндра с основанием Σ, будем иметь $K = \mathbf{k\Gamma}$.

Определение. Вектор $\mathbf{\Gamma}$, определенный формулой (2), называется *векторной циркуляцией* по замкнутой или незамкнутой поверхности S.

Для векторной циркуляции по *замкнутой* поверхности S имеется еще другое полезное выражение, а именно

$$\mathbf{\Gamma} = \int\limits_{(S)} \mathbf{r}\,(\mathbf{n}\zeta)\, dS. \tag{4}$$

Доказательство. Если X — любая непрерывная функция от радиуса-вектора точки, то из теоремы Стокса следует, что

$$\int\limits_{(S)} (\mathbf{n} \times \nabla)\, X\, dS = 0, \tag{5}$$

так как любая замкнутая кривая C, проведенная на поверхности S, делит ее на две части S_1 и S_2, каждая из которых ограничена кривой C, а поверхностные интегралы по этим частям поверхности равны контурным интегралам, которые берутся по C в противоположных направлениях и поэтому уничтожаются при сложении.

Применяя диадные обозначения и формулу (2) из п. 2.71, показывающую, что единичный тензор $I = \nabla; \mathbf{r}$, будем иметь

$$(\mathbf{n}\times\nabla)(\mathbf{q};\mathbf{r}) = (\mathbf{n}\times\nabla)(\mathbf{q}_0;\mathbf{r}) + (\mathbf{n}+\nabla)(\mathbf{q};\mathbf{r}_0) = [\mathbf{q}(\mathbf{n}\times\nabla)]\mathbf{r} +$$
$$+ [(\mathbf{n}+\nabla)\mathbf{q}]\mathbf{r} = \mathbf{q}[\mathbf{n}\times(\nabla;\mathbf{r})] + [\mathbf{n}(\nabla\times\mathbf{q})]\mathbf{r} = \mathbf{q}(\mathbf{n}\times I) +$$
$$+ \mathbf{r}(\mathbf{n}\zeta) = -(\mathbf{n}\times\mathbf{q}) + \mathbf{r}(\mathbf{n}\zeta).$$

Результат (4) получится, если проинтегрировать последнее равенство по S и воспользоваться формулой (5), где надо положить $X = \mathbf{q}; \mathbf{r}$.

Следствие. Для безвихревого движения $\zeta = 0$, и поэтому $\Gamma = 0$.

Важно отметить, что приведенное выше доказательство построено так, что оно позволяет избежать рассмотрения объемных интегралов и при вычислении интеграла в выражении (4) не интересоваться тем, что происходит внутри поверхности S. Единственное ограничение при выводе формулы (4) накладывается равенством (5), которое требует, чтобы X было ограниченной, однозначной и непрерывной функцией.

В случае замкнутой поверхности S, движущейся с жидкостью, из выражения (3) и уравнения неразрывности в форме $d(\varrho\, d\tau)/dt = 0$ получим скорость изменения циркуляции

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_{(V)} \frac{\zeta}{\varrho}(\varrho\, d\tau) = \int\limits_{(V)} \frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta}{\varrho}\right)\varrho\, d\tau = \int\limits_{(V)} (\zeta\nabla)\,\mathbf{q}\, d\tau,$$

причем здесь была использована формула (2) из п. 3.53. Но, согласно формуле (X) из п. 2.34,

$$\nabla(\zeta;\mathbf{q}) = (\zeta\nabla)\mathbf{q} + \mathbf{q}(\nabla\zeta) = (\zeta\nabla)\mathbf{q},$$

поскольку $\nabla\zeta = 0$; поэтому

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int\limits_{(V)} \nabla(\zeta;\mathbf{q})\, d\tau = -\int\limits_{(S)} (\mathbf{n}\zeta)\,\mathbf{q}\, dS.$$

Отсюда следует, что циркуляция Γ остается постоянной на замкнутой поверхности, образованной вихревыми линиями, как, например, в случае сферического вихря Хилла (см. п. 18.51).

19.71. Вихревой след. Когда некоторое тело, например крыло, движется через жидкость или когда жидкость обтекает неподвижное крыло, образуется



Рис. 336.

вихревой след, который состоит из жидкости, прошедшей вблизи поверхности крыла. Вихри, как было отмечено в п. 19.11, сосредоточены в основном в той части жидкости, которая образует вихревой след (рис. 336).

Мы предполагаем изложить здесь несколько следствий, которые вытекают из двух следующих гипотез:

а) вихревой след состоит из жидкости, совершающей регулярное движение, которое может быть описано линиями тока или вихревыми линиями;

б) вне вихревого следа вихри пренебрежимо малы, т. е. можно считать, что там $\zeta = 0$.

Гипотезу (б) можно рассматривать как определение вихревого следа.

19.72. Суммарный вихрь в кормовом вихревом следе. Теорема. *Пусть S — замкнутая поверхность, каждая точка которой соприкасается с жидкостью и которая пересекает вихревой след по вихревым линиям. Тогда, если скорость жидкости на S ограничена и непрерывна, то векторная циркуляция по S обращается в нуль.*

Доказательство. По формуле (4) из п. 19.70

$$\Gamma = \int\limits_{(S)} \mathbf{r}\,(\mathbf{n}\boldsymbol{\zeta})\,dS.$$

Вне вихревого следа $\boldsymbol{\zeta} = 0$, а на участке поверхности S, проходящем внутри вихревого следа, $\mathbf{n}\boldsymbol{\zeta} = 0$, поскольку вихревые линии лежат на этом участке поверхности S. Следовательно, $\Gamma = 0$, что и требовалось доказать.

Следствие. Суммарный вихрь в любом участке вихревого следа, который вырезан с помощью некоторой замкнутой поверхности, пересекающей вихревой след по вихревым линиям, равен нулю. Действительно, по формуле (3) из п. 19.70

$$\text{суммарный вихрь} = \int \boldsymbol{\zeta}\,d\tau = \Gamma = 0,$$

где объемный интеграл вычисляется по всему рассматриваемому участку вихревого следа.

В этом следствии предполагается, что весь объем внутри рассматриваемой замкнутой поверхности заполнен жидкостью.

Пусть некоторая замкнутая поверхность S_1 содержит внутри себя крыло A и пересекает вихревой след по вихревым линиям. Рассмотрим в этом случае жидкость, находящуюся между крылом A и поверхностью S_1. Тогда циркуляция по S_1 в силу доказанной теоремы будет равна нулю, а циркуляция по A также будет равна нулю, поскольку на крыле A в случае вязкой жидкости $\mathbf{q} = 0$, где $\mathbf{q}$ — скорость жидкости относительно A.

Таким образом, суммарный вихрь в пограничном слое и в той части вихревого следа, которая заключена внутри поверхности S_1, равняется нулю.

Полученные результаты являются чисто кинематическими. Они имеют место для сжимаемой вязкой жидкости; при этом движение не предполагается установившимся.

19.73. Перенос вихрей. Обратимся к рис. 39. Пусть

$$\mathbf{T}_S = \int\limits_{(S)} (\mathbf{nq})\,\boldsymbol{\zeta}\,dS - \int\limits_{(S)} \nu \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial n}\,dS. \qquad (1)$$

Первый интеграл здесь представляет собой скорость переноса вихрей, обусловленную конвекцией, через незамкнутую поверхность S, а второй интеграл — скорость переноса вихрей, обусловленную диффузией.

Если на рис. 39 линию C рассматривать как вихревую линию, а диафрагму S, которая натянута на C, рассматривать как поверхность, образованную вихревыми линиями, то S можно назвать *вихревой диафрагмой*, натянутой на вихревую линию C.

Итак, величина $\mathbf{T}_S$ есть скорость переноса вихрей через вихревую диафрагму, обусловленная конвекцией и диффузией.

Теорема Престона[1]). *В установившемся течении однородной жидкости с одинаковой во всем потоке вязкостью скорость переноса вихрей*

[1]) Эта теорема для случая плоского течения принадлежит Престону (Preston J. H., A. R. C. Rep. № 6732).

через вихревую диафрагму, которая натянута на вихревую линию C, равна

$$T_S = -\int\limits_{(C)} \chi\, ds, \quad \chi = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega. \tag{2}$$

Доказательство. Положив в уравнении движения (8) из п. 19.03 $\partial \mathbf{q}/\partial t = 0$, умножим результат векторно на $\mathbf{n}$ и проинтегрируем по S; тогда

$$-\int\limits_{(S)} \mathbf{n} \times (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\zeta})\, dS + \nu \int\limits_{(S)} \mathbf{n} \times (\nabla \times \boldsymbol{\zeta})\, dS = -\int\limits_{(S)} (\mathbf{n} \times \nabla)\, \chi\, dS. \tag{3}$$

Но по формуле (II) из п. 2.32 $\nabla \boldsymbol{\zeta} = \nabla (\nabla \times \mathbf{q}) = 0$, а поскольку S является внхревой диафрагмой, то $\mathbf{n}\boldsymbol{\zeta} = 0$. Поэтому, применяя формулу для двойного векторного произведения, будем иметь

$$\mathbf{n} \times (\nabla \times \boldsymbol{\zeta}) = (\mathbf{n} \times \nabla) \times \boldsymbol{\zeta} - (\mathbf{n}\nabla)\, \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{n}\, (\nabla \boldsymbol{\zeta}) = (\mathbf{n} \times \nabla) \times \boldsymbol{\zeta} - \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial n},$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\zeta}) = -(\mathbf{n}\mathbf{q})\, \boldsymbol{\zeta} + (\mathbf{n}\boldsymbol{\zeta})\, \mathbf{q} = -(\mathbf{n}\mathbf{q})\, \boldsymbol{\zeta}.$$

Подставим последнее выражение в уравнение (3) и воспользуемся равенством (1). Тогда по теореме Стокса

$$T_S = -\nu \int\limits_{(S)} (\mathbf{n} \times \nabla) \times \boldsymbol{\zeta}\, dS - \int\limits_{(S)} (\mathbf{n} \times \nabla)\, \chi\, dS = -\nu \int\limits_{(C)} d\mathbf{s} \times \boldsymbol{\zeta} - \int\limits_{(C)} d\mathbf{s}\, \chi.$$

Но контур C является вихревой линией, поэтому на C векторы $d\mathbf{s}$ и $\boldsymbol{\zeta}$ параллельны, следовательно, $d\mathbf{s} \times \boldsymbol{\zeta} = 0$, что и требовалось доказать.

19.74. Сила, действующая на крыло. Рассмотрим трехмерное крыло A, расположенное неподвижно в установившемся потоке жидкости со скоростью $\mathbf{V} = \mathbf{i}V$; массовыми силами будем пренебрегать.

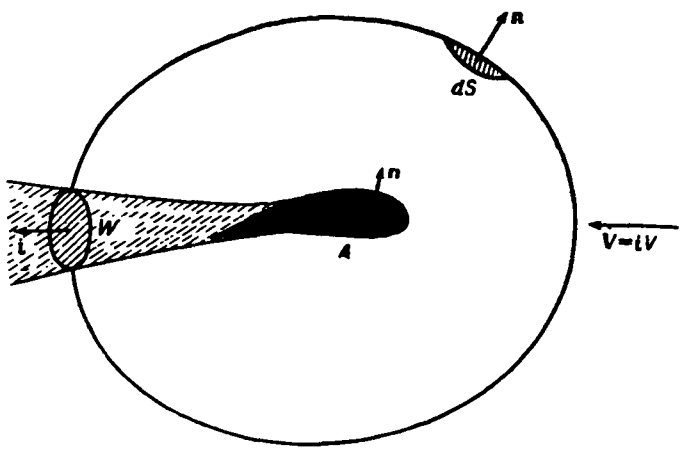


Рис. 337.

Пусть Σ — некоторая воображаемая фиксированная замкнутая поверхность (не являющаяся физической границей), которая охватывает все крыло (рис 337). Уравнение установившегося движения (1) п. 19.04 имеет вид

$$\nabla [\Phi - \varrho\, (\mathbf{q};\ \mathbf{q})] = 0.$$

Применяя теорему Гаусса ко всему объему, содержащемуся между поверхностями Σ и A, получаем

$$0 = -\int\limits_{(A)} \mathbf{n}\,[\Phi - \varrho\,(\mathbf{q};\ \mathbf{q})]\,dS + \int\limits_{(\Sigma)} \mathbf{n}\,[\Phi - \varrho\,(\mathbf{q};\ \mathbf{q})]\,dS.$$

Но $\mathbf{n}\,(\mathbf{q};\ \mathbf{q}) = (\mathbf{nq})\,\mathbf{q}$, и эта величина обращается в нуль на поверхности крыла A, потому что для вязкой жидкости $\mathbf{q} = 0$ на A, а для невязкой жидкости $\mathbf{nq} = 0$ на A. Следовательно, сила, действующая на крыло, будет равна

$$\mathbf{F} = \int\limits_{(A)} \mathbf{n}\Phi\,dS = \int\limits_{(\Sigma)} [\mathbf{n}\Phi - \varrho\,(\mathbf{nq})\,\mathbf{q}]\,dS. \tag{1}$$

Используя далее выражение (6) из п. 19.02, получаем

$$\mathbf{F} = \int\limits_{(\Sigma)} \left[-p\mathbf{n} - \varrho\,(\mathbf{nq})\,\mathbf{q} + \tfrac{4}{3}\mu\mathbf{n}\,(\nabla\mathbf{q}) - \mu\mathbf{n}\times\boldsymbol{\zeta} \right] dS + \\ + 2\int\limits_{(\Sigma)} \mu\,[(\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{q} - \mathbf{n}\,(\nabla\mathbf{q}) + \mathbf{n}\times\boldsymbol{\zeta}]\,dS. \tag{2}$$

Эта формула представляет собой общий результат, который применим к любому установившемуся движению сжимаемой вязкой жидкости независимо от того, являются ли ϱ и μ постоянными или функциями от координат.

Покажем теперь, что если μ является постоянной величиной, то второй интеграл в этом выражении обращается в нуль. По формуле двойного векторного произведения с учетом того, что $\boldsymbol{\zeta} = \nabla\times\mathbf{q}$, имеем

$$\int\limits_{(\Sigma)} [(\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{q} - \mathbf{n}\,(\nabla\mathbf{q}) + \mathbf{n}\times\boldsymbol{\zeta}]\,dS = \int\limits_{(\Sigma)} (\mathbf{n}\times\nabla)\times\mathbf{q}\,dS = 0;$$

последний интеграл равен нулю согласно равенству (5) из п. 19.70.

Итак, если μ является постоянной величиной, то сила, действующая на крыло, определяется первым интегралом в выражении (2).

Допустим теперь, что не только μ, но и ϱ является постоянной величиной, т. е. что мы имеем дело с однородной вязкой несжимаемой жидкостью. Тогда $\nabla\mathbf{q} = 0$, и сила, действующая на крыло, будет равна

$$\mathbf{F} = \int\limits_{(\Sigma)} [-p\mathbf{n} - \mu\mathbf{n}\times\boldsymbol{\zeta} - \varrho\,(\mathbf{nq})\,\mathbf{q}]\,dS. \tag{3}$$

19.75. Приближенное решение Озеена для достаточно больших расстояний от тела. Замкнутая поверхность Σ, показанная на рис. 337, произвольна. Будем полагать, что эта поверхность представляет собой сферу достаточно большого радиуса, такого, что можно записать

$$\mathbf{q} = \mathbf{V} + \mathbf{v}, \qquad p = \Pi + p', \tag{1}$$

где $\mathbf{v}$ и p' — возмущения первого порядка малости относительно равномерных невозмущенных значений скорости $\mathbf{V}$ и давления Π. В этом случае уравнение движения можно брать в форме Озеена (см. п. 19.62):

$$V\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho}\nabla p' + \nu\nabla^2\mathbf{v}.$$

Для удобства введем параметр k, определяемый равенством

$$V = 2k\nu. \tag{2}$$

Тогда уравнения движения и неразрывности примут вид

$$\frac{1}{\varrho}\nabla p' = \nu\left(\nabla^2 - 2k\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{v}, \qquad \nabla\mathbf{v} = 0. \tag{3}$$

Из уравнений (3) следует, что $\nabla^2 p' = 0$, т. е. p' представляет собой гармоническую функцию. Если положить

$$p' = \varrho V\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \nabla^2\varphi = 0, \tag{4}$$

то получим следующее частное решение уравнений (3):

$$\mathbf{v} = \mathbf{q}_1 = -\nabla\varphi. \tag{5}$$

Полное же решение будет иметь такой вид:

$$\mathbf{v} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{v}_2, \tag{6}$$

где $\mathbf{v}_2$ удовлетворяет уравнениям

$$\left(\nabla^2 - 2k\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{v}_2 = 0, \quad \nabla\mathbf{v}_2 = 0. \tag{7}$$

Исследуем подробно решение (5). На сфере очень большого радиуса это решение должно обращаться в нуль. Поэтому следует предполагать, что соответствующий потенциал скоростей, выраженный в сферических координатах r, θ, ω, будет представлять собой сумму гармонических функций вида $S_n(\theta, \omega)/r^{n+1}$; главный член здесь будет иметь вид

$$\varphi_0 = \frac{S_0(\theta, \omega)}{r}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (2) из п. 16.10, получим уравнение, которому должна удовлетворять функция S_0:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S_0}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S_0}{\partial\omega^2} = 0.$$

Чтобы решить это уравнение, положим

$$u = \ln\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta, \quad S_0 = f_m(u)\cos m\omega \text{ или } S_0 = f_m(u)\sin m\omega;$$

тогда

$$\frac{d^2 f_m}{du^2} - m^2 f_m = 0,$$

откуда

$$f_m = A_m e^{-mu} + B_m e^{mu} = A_m\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta\right)^m + B_m\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\right)^m.$$

Второй член здесь стремится к бесконечности при $\theta \to \pi$ (т. е. на луче, направленном вверх по потоку). Так как мы рассматриваем ограниченные решения, то надо положить $B_m = 0$.

С другой стороны, первый член в этом выражении стремится к бесконечности при $\theta \to 0$ (т. е. в вихревом следе). На первый взгляд кажется, что в этом случае также надо потребовать, чтобы $A_m = 0$. Но, как это будет видно из последующих вычислений (см. стр. 560), при $A_m = 0$ подъемная сила равняется нулю.

Исследуем случай $m = 1$. В этом случае частное решение для потенциала будет равно

$$\varphi_{10} = -\frac{1}{r}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta\,(\alpha\cos\omega + \beta\sin\omega). \tag{8}$$

Скорость q_{10}, которую отсюда можно определить, становится бесконечной при $\theta = 0$. Чтобы устранить эту особенность, положим $v_2 = q_2 + v_3$, где q_2 выбрано так, что оно удовлетворяет уравнениям

$$\left(\nabla^2 - 2k\frac{\partial}{\partial x}\right) q_2 = 0, \quad q_2 = -\nabla\psi. \tag{9}$$

Потенциал ψ определяется так, чтобы

$$\left(\nabla^2 - 2k\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = 0, \quad \text{или} \quad (\nabla^2 - k^2)\ (e^{-kx}\psi) = 0.$$

Нетрудно проверить, что это уравнение имеет частное решение

$$e^{-kx}\psi = \frac{e^{-kr}}{r}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta\,(\alpha\cos\omega + \beta\sin\omega), \quad x = r\cos\theta, \tag{10}$$

а комбинация

$$\varphi_{10} + \psi = -\frac{1 - e^{-kr(1-\cos\theta)}}{r}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta\,(\alpha\cos\omega + \beta\sin\omega) \tag{11}$$

не обращается в бесконечность при $\theta = 0$, потому что член $\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\theta$, который вызвал эту особенность, уничтожается. Однако функция q_2, определенная из уравнения (9), не удовлетворяет уравнению неразрывности, так как

$$\nabla q_2 = -\nabla^2\psi = -2k\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Поэтому к решению надо будет прибавить еще одну скорость q_3, которая удовлетворяет уравнениям

$$\left(\nabla^2 - 2k\frac{\partial}{\partial x}\right) q_3 = 0 \quad \text{и} \quad \nabla q_3 = 2k\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

так что $\nabla(q_2 + q_3) = 0$. Предполагая, что решение q_3 имеет вид

$$q_3 = \frac{e^{-k(r-x)}}{r}(\alpha'\mathbf{j} + \beta'\mathbf{k}),$$

найдем, что

$$\nabla q_3 = -\frac{e^{-k(r-x)}}{r^3}(1 + kr)\,(\alpha' y + \beta' z).$$

Сравнивая последнее выражение с величиной $2k\partial\psi/\partial x$, которая следует из решения (10), получаем $\alpha' = -2k\alpha$, $\beta' = -2k\beta$, и соответствующая скорость равна

$$q_3 = -\frac{2k}{r}e^{-k(r-x)}(\alpha\mathbf{j} + \beta\mathbf{k}). \tag{12}$$

Заметим, что скорость q_3 перпендикулярна скорости $\mathbf{V}$, так что $\mathbf{V}q_3 = 0$.

Полное решение, построенное указанным способом, имеет вид

$$q = \mathbf{V} + q_1 + q_2 + q_3 + q_4. \tag{13}$$

Здесь q_1 — безвихревое решение, связанное с давлением [уравнение (4)] и содержащее особый член q_{10}, который вычисляется через φ_{10} [уравнение (8)] и обращается в бесконечность при $\theta = 0$; $q_2 = -\nabla\psi$ — частное решение, в котором ψ определяется формулой (10) и которое построено так, что особенности φ_{10} и ψ в вихревом следе при $\theta = 0$ взаимно уничтожаются; q_3 — еще одно частное решение, которое построено так, чтобы удовлетворялось уравнение неразрывности $\nabla(q_2 + q_3) = 0$; q_4 — произвольное

решение, которое удовлетворяет уравнению Озеена (7) и уравнению неразрывности[1]).

Скорость $\mathbf{q}$, которая выражается формулой (13), является конечной и непрерывной на всей поверхности сферы Σ.

Наличие экспоненциального множителя в $\mathbf{q}_3$ показывает, что этой скоростью можно пренебрегать, если только величина $r-x$ не является малой, что имеет место в вихревом следе, который на больших расстояниях более или менее четко ограничен поверхностью параболоида $r-x=\varepsilon$, где ε — малая постоянная величина. Вихрь появляется только за счет членов $\nabla\times\mathbf{q}_3$ и $\nabla\times\mathbf{q}_4$, поскольку $\nabla\times\mathbf{q}_1=\nabla\times\mathbf{q}_2=0$. Ниже будет показано, что величина $\nabla\times\mathbf{q}_4$ не оказывает влияния на силы, действующие на крыло; таким образом, действие вихря по существу связано только с вихревым следом.

Следует подчеркнуть, что в описанном выше приближенном методе рассматривалось только решение на сфере достаточно большого радиуса; что же касается течения в окрестности крыла, то здесь этот метод ничего не может дать.

19.76. Подъемная сила и сила сопротивления. Согласно формуле (3) из п. 19.74, сила, действующая на крыло, представляется так:

$$\mathbf{F}=\mathbf{P}+\mathbf{Q}+\mathbf{R},$$

где

$$\mathbf{P}=-\int\limits_{(\Sigma)} p\mathbf{n}\,dS,\quad \mathbf{Q}=-\int\limits_{(\Sigma)}\mu\mathbf{n}\times\boldsymbol{\xi}\,dS,\quad \mathbf{R}=-\int\limits_{(\Sigma)}\varrho\mathbf{q}\,(\mathbf{nq})\,dS. \tag{1}$$

По формулам (1), (4) и (13) из п. 19.75 имеем

$$p=\Pi+p'=\Pi+\varrho V\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\Pi-\varrho V\mathbf{q}_1,$$

$$-p=-\Pi+\varrho V\mathbf{v}-\varrho V\mathbf{q}_2-\varrho V\mathbf{q}_4,$$

где

$$\mathbf{v}=\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4\ \text{ и }\ V\mathbf{q}_3=0.$$

Но поскольку $\int\limits_{(\Sigma)}\mathbf{n}\,dS=0$, то

$$\mathbf{P}=\varrho\int\limits_{(\Sigma)}\mathbf{n}\,(V\mathbf{v})-\varrho\int\limits_{(\Sigma)}\mathbf{n}\,(V\mathbf{q}_2)\,dS-\varrho\int\limits_{(\Sigma)}\mathbf{n}\,(V\mathbf{q}_4)\,dS.$$

Далее, с точностью до членов первого порядка

$$\mathbf{q}\,(\mathbf{nq})=\mathbf{V}\,(\mathbf{nV})+\mathbf{V}\,(\mathbf{nv})+\mathbf{v}\,(\mathbf{nV}),$$

а по уравнению неразрывности $\int\limits_{(\Sigma)}\mathbf{nv}\,dS=0$; следовательно,

$$\mathbf{P}+\mathbf{R}=\varrho\int\limits_{(\Sigma)}\mathbf{V}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{v})\,dS-\varrho\mathbf{V}\int\limits_{(\Sigma)}(\mathbf{nq}_4)\,dS+$$

$$+\varrho\int\limits_{(\Sigma)}\mathbf{q}_4\times(\mathbf{V}\times\mathbf{n})\,dS-\varrho\int\limits_{(\Sigma)}\mathbf{n}\,(V\mathbf{q}_2)\,dS. \tag{2}$$

---

[1]) За приведенное выше исследование решения автор признателен Стивенсону (A. C. Stevenson) и Уиглсуорту (L. A. Wigglesworth).

Введем обозначение

$$I = -\int_{(\Sigma)} \varrho\,(\mathbf{n}\mathbf{q}_4)\,dS; \tag{3}$$

величина I представляет собой приток жидкости внутрь поверхности Σ, связанный с произвольным решением q_4; этот приток в основном происходит в области вихревого следа.

Далее, векторная циркуляция по поверхности Σ будет равна

$$\mathbf{\Gamma} = \int_{(\Sigma)} \mathbf{n}\times\mathbf{v}\,dS = \int_{(\Sigma)} \mathbf{n}\times\mathbf{q}_1\,dS + \int_{(\Sigma)} \mathbf{n}\times\mathbf{q}_2\,dS + \int_{(\Sigma)} \mathbf{n}\times\mathbf{q}_3\,dS + \int_{(\Sigma)} \mathbf{n}\times\mathbf{q}_4\,dS.$$

Первые два интеграла в правой части этого равенства дают векторные циркуляции, соответствующие скоростям $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$ безвихревых движений, и, согласно п. 19.70, должны обращаться в нуль. Таким образом, можно считать, что $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_3 + \mathbf{\Gamma}_4$, где $\mathbf{\Gamma}_3$ и $\mathbf{\Gamma}_4$ — векторные циркуляции, соответствующие скоростям $\mathbf{q}_3$ и $\mathbf{q}_4$. Наконец, положим $\boldsymbol{\zeta}_3 = \nabla\times\mathbf{q}_3$, $\boldsymbol{\zeta}_4 = \nabla\times\mathbf{q}_4$; тогда в силу формул (1), (2) и (3)

$$\mathbf{F} = \varrho\mathbf{V}\times\mathbf{\Gamma}_3 + \mathbf{V}I + \mathbf{F}' + \mathbf{F}'', \tag{4}$$

где

$$\mathbf{F}' = -\varrho\int_{(\Sigma)} \mathbf{n}\,(\mathbf{V}\mathbf{q}_3)\,dS - \int_{(\Sigma)} \mu\mathbf{n}\times\boldsymbol{\zeta}_3\,dS, \tag{5}$$

$$\mathbf{F}'' = \varrho\mathbf{V}\times\mathbf{\Gamma}_4 + \varrho\int_{(\Sigma)} \mathbf{q}_4\times(\mathbf{V}\times\mathbf{n})\,dS - \int_{(\Sigma)} \mu\mathbf{n}\times\boldsymbol{\zeta}_4\,dS.$$

Докажем теперь, что $\mathbf{F}'' = 0$. Поскольку $\nabla\mathbf{q}_4 = 0$, то формула (IV) из п. 2.32 дает

$$\nabla\times\boldsymbol{\zeta}_4 = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{q}_4) = -\nabla^2\mathbf{q}_4$$

и

$$\nabla\times(\mathbf{q}_4\times\mathbf{i}) = (\mathbf{i}\nabla)\,\mathbf{q}_4 = \frac{\partial\mathbf{q}_4}{\partial x}.$$

Так как $\mathbf{q}_4$ удовлетворяет уравнению (7) из п. 19.75, то

$$\nabla\times[\boldsymbol{\zeta}_4 + 2k\mathbf{q}_4\times\mathbf{i}] = 0.$$

Следовательно, существует некоторая скалярная функция Z, такая, что

$$\boldsymbol{\zeta}_4 + 2k\mathbf{q}_4\times\mathbf{i} = \nabla Z;$$

значит,

$$\int_{(\Sigma)} \mu\mathbf{n}\times\boldsymbol{\zeta}_4\,dS = \int_{(\Sigma)} \mu\,(\mathbf{n}\times\nabla)\,Z\,dS - 2k\mu\int_{(\Sigma)} \mathbf{n}\times(\mathbf{q}_4\times\mathbf{i})\,dS.$$

Первый интеграл в правой части этого равенства обращается в нуль в соответствии с формулой (5) из п. 19.70, а $2k\mu = \varrho V$ по формуле (2) из п. 19.75; тогда

$$\int_{(\Sigma)} \mu\mathbf{n}\times\boldsymbol{\zeta}_4\,dS = -\varrho\int_{(\Sigma)} \mathbf{n}\times(\mathbf{q}_4\times\mathbf{V})\,dS$$

и

$$\varrho\int_{(\Sigma)} \mathbf{q}_4\times(\mathbf{V}\times\mathbf{n})\,dS - \int_{(\Sigma)} \mu\mathbf{n}\times\boldsymbol{\zeta}_4\,dS = -\varrho\mathbf{V}\times\int_{(\Sigma)} \mathbf{n}\times\mathbf{q}_4\,dS = -\varrho\mathbf{V}\times\mathbf{\Gamma}_4,$$

и, следовательно, $\mathbf{F}'' = 0$.

Возвращаясь к выражению (5), можно показать, что $\mathbf{F}' \to 0$, когда радиус сферы Σ стремится к бесконечности. Этот результат представляет собой простое следствие из выражений для $\mathbf{q}_2$ и $\mathbf{q}_3$, приведенных в п. 19.75, и вывод его мы предоставляем читателю в качестве упражнения.

Теперь получим из равенства (4) асимптотический результат $\mathbf{F} = \mathbf{L} + \mathbf{D}$, где

$$\mathbf{L} = \varrho \mathbf{V} \times \mathbf{\Gamma}_3, \quad \mathbf{D} = \mathbf{V}I. \tag{6}$$

Сила $\mathbf{L}$ перпендикулярна к скорости $\mathbf{V}$ и является подъемной силой, а сила $\mathbf{D}$ — силой сопротивления. Точность этих результатов тем лучше, чем больше радиус сферы Σ. Они представляют собой обобщение теоремы Кутта — Жуковского для невязкой жидкости и формулы Филона[1]) для плоского движения вязкой жидкости. Здесь $\mathbf{\Gamma}_3$ — векторная циркуляция по поверхности Σ, обусловленная скоростью $\mathbf{q}_3$, а I — приток жидкости в вихревой след, обусловленный скоростью $\mathbf{q}_4$.

Чтобы упростить выражение для $\mathbf{\Gamma}_3$, положим $\mathbf{q}_3 = v_3\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$, тогда

$$\mathbf{\Gamma}_3 = 2\pi r^2 \int_0^{\pi} (v_3\mathbf{k} - w_3\mathbf{j}) \sin\theta \cos\theta \, d\theta.$$

Введя обозначение $u = \cos\theta$, получим

$$\mathbf{\Gamma}_3 = 4\pi kr\,(\beta\mathbf{j} - \alpha\mathbf{k})\, e^{-kr} \int_{-1}^{1} e^{kru} u \, du = 4\pi\,(\beta\mathbf{j} - \alpha\mathbf{k})\,[1 + e^{-2kr} - (1 - e^{-2kr})/(kr)].$$

Отсюда $\mathbf{\Gamma}_3 \to 4\pi(\beta\mathbf{j} - \alpha\mathbf{k})$ при $r \to \infty$, что приводит к следующему выражению для подъемной силы:

$$\mathbf{L} = \varrho \mathbf{V} \times \mathbf{\Gamma}_3 = 4\pi\varrho V(\alpha\mathbf{j} + \beta\mathbf{k}).$$

Этот результат подтверждает приведенное в п. 19.75 утверждение, что подъемная сила будет равняться нулю, когда обе величины α и β обращаются в нуль.

Из полученных выше результатов можно показать, что составляющие подъемной силы определяются циркуляциями по кругам достаточно большого радиуса, представляющим собой сечения сферы Σ диаметральными плоскостями $\omega = 0$ и $\omega = \pi/2$. Циркуляция же по любому замкнутому контуру, не охватывающему кормовой вихревой след, равна нулю[2]).

19.80. Подобие. Рассмотрим уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + (\mathbf{q}\nabla)\,\mathbf{q} = -\nabla\left(\frac{p}{\varrho}\right) + \nu\nabla^2\mathbf{q} \tag{1}$$

и предположим, что имеется другое движение той же или иной жидкости которое отличается от первого только масштабами длины (λ) и времени ($\varkappa$). Во втором движении соответствующие величины отметим штрихами; тогда

$$\frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial t'} + (\mathbf{q}'\nabla')\,\mathbf{q}' = -\nabla'\left(\frac{p'}{\varrho'}\right) + \nu'\nabla'^2\mathbf{q}'. \tag{2}$$

Рассматриваемые движения называются *подобными*, если из уравнения (1) можно получить уравнение (2) умножением каждого члена в уравнении (1) на один и тот же постоянный множитель, скажем на α.

---

[1]) Filon L. N. G., Forces on a cylinder, *Proc. Roy. Soc.*, **113A** (1926).
[2]) Garstang T. E. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 236 A (1936), 25.

Положим

$$\mathbf{r} = \lambda \mathbf{r}', \quad t = \varkappa t'; \tag{3}$$

для подобия должны выполняться равенства

$$\frac{q'}{t'} = \frac{\alpha q}{t}, \quad \frac{q'^2}{r'} = \frac{\alpha q^2}{r}, \quad \frac{p'}{\varrho' r'} = \frac{\alpha p}{\varrho r}, \quad \frac{\nu' q'}{r'^2} = \frac{\alpha \nu q}{r^2}.$$

Отсюда после деления получим

$$\frac{q'}{q} = \frac{r'/t'}{r/t}, \quad \frac{p'}{p} = \frac{\varrho' q'^2}{\varrho q^2}, \quad \frac{q' r'}{\nu'} = \frac{qr}{\nu} = \mathrm{Re},$$

и, следовательно, в обоих движениях должны быть одинаковыми числа Рейнольдса qr/ν. Поскольку уравнение неразрывности, так же как первые два вышеуказанных условия, удовлетворяется в силу равенств (3), то отсюда следует, что равенство чисел Рейнольдса является необходимым и достаточным условием для подобия движений.

В экспериментах, проводимых в аэродинамических трубах на моделях, величины q' и r' для трубы и для модели будут меньше, чем те же величины для натурного объекта, в то время как коэффициент вязкости ν будет одинаковым в обоих случаях. Это приводит к необходимости применять аэродинамические трубы, работающие на сжатом воздухе, для того чтобы можно было уменьшить величину $\nu = \mu/\varrho$ за счет повышения ϱ.

При сопоставлении силы сопротивления и подъемной силы для двух течений надо иметь в виду, что любую из этих сил можно записать в следующем виде:

$$F = \frac{1}{2} \varrho U^2 r^2 f(\mathrm{Re}),$$

где Re — число Рейнольдса, U — характерная скорость, r — характерный линейный размер. Безразмерная величина f (Re) в зависимости от рассматриваемой силы будет называться коэффициентом сопротивления, или коэффициентом подъемной силы.

19.81. Пограничный слой. Известно, что когда жидкость обтекает твердую границу, то уже на небольшом расстоянии от этой границы достигается полная величина местной скорости течения, в то время как в месте соприкосновения со стенкой жидкость обычно предполагается неподвижной. Гипотеза Прандтля о *пограничном слое* сводится к предположению, что в окрестности твердой границы существует тонкий слой, внутри которого силы вязкости и инерции сравнимы по своей величине, тогда как вне этого слоя влияние вязкости пренебрежимо мало и жидкость ведет себя как среда без трения [1]). Чтобы выяснить, как применение этой гипотезы влияет на уравнения движения вблизи твердой границы, рассмотрим плоское течение, в котором в качестве границы примем ось x (рис. 338).

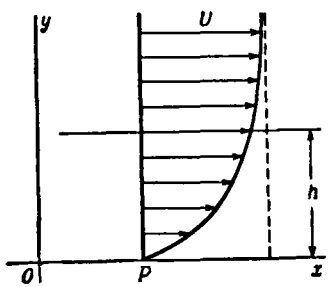


Рис. 338.

Проведем из точки P отрезок, параллельный оси ординат, и отложим в каждой его точке вектор, изображающий составляющую скорости u вдоль оси x в этой точке отрезка. Согласно гипотезе Прандтля, концы этих векторов должны лежать на некоторой кривой, имеющей асимптоту, параллельную

[1]) О развитии пограничного слоя см. в работе Гольдштейна и Розенхеда [Goldstein, Rosenhead, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 32 (1936)].

оси ординат. Мы будем считать, что скорость u достигла полной величины скорости течения, если эта скорость становится меньше скорости U на некоторую малую фиксированную произвольную величину, выраженную в процентах, например на величину, равную одному проценту. Это условие и определяет толщину пограничного слоя. Можно дать различные подобного типа определения толщины пограничного слоя; каждое из них приводит к своей мере h толщины пограничного слоя, но порядок всех этих величин будет одинаков. Очевидно также, что градиент скорости du/dy будет очень большим, когда y в пограничном слое меняется от 0 до h. С другой стороны, поперечная составляющая скорости v будет малой величиной всюду в пограничном слое.

Рассмотрим теперь уравнения движения

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right).$$

Введем переменную η, определяемую равенством $y=h\eta$. Тогда η будет безразмерной переменной, сравнимой по порядку величины с переменной x. Нужно также положить $v=hv_0$, где v_0 сравнимо с u. В этих переменных написанные выше уравнения примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v_0\frac{\partial u}{\partial \eta}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\nu}{h^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \tag{1}$$

$$h\frac{\partial v_0}{\partial t}+hu\frac{\partial v_0}{\partial x}+hv_0\frac{\partial v_0}{\partial \eta}=-\frac{1}{\varrho h}\frac{\partial p}{\partial \eta}+\nu h\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{\nu}{h}\frac{\partial^2 v_0}{\partial \eta^2}. \tag{2}$$

Заметим, что в уравнении (1) член $\nu\partial^2 u/\partial x^2$ пренебрежимо мал по сравнению с другими членами. В то же время надо считать, что последний член этого уравнения, который представляет собой силу трения, имеет такой же порядок, как инерционный член $u\partial u/\partial x$. Принимая порядок этого последнего члена за единицу, увидим, что $\nu\sim h^2$ или $h\sim\sqrt{\nu}$. Таким образом, толщина пограничного слоя пропорциональна корню квадратному из коэффициента кинематической вязкости. Из этого результата следует, что в уравнении (2) все члены, кроме одного, имеют порядок h и, следовательно,

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0. \tag{3}$$

Итак, давление в пограничном слое не зависит от y, и наши уравнения сведутся к уравнению (3) и уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{4}$$

которые вместе с уравнением неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{5}$$

определяют движение.

Вихрь в пограничном слое равен

$$\zeta=\mathbf{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\mathbf{k}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Из уравнения (4) можно вывести интегральное соотношение Кармана. С помощью уравнения (5) получим

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(uv)-u\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial(u^2)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(uv).$$

Проинтегрируем, далее, уравнение (4) от 0 до h

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}h+\nu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_h-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right]=\int_0^h\frac{\partial u^2}{\partial x^2}dy+[uv]_0^h+\int_0^h\frac{\partial u}{\partial t}dy.$$

Но

$$[uv]_0^h=Uv_h=U\int_0^h\frac{\partial v}{\partial y}dy=-U\int_0^h\frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

Следовательно,

$$\int_0^h\frac{\partial u}{\partial t}dy+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u^2dy-U\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u\,dy=-\frac{h}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}-\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0, \qquad (6)$$

поскольку $\partial u/\partial y=0$ при $y=h$.

Изучим теперь несжимаемый пограничный слой в случае обтекания плоской пластинки, расположенной острой кромкой ($x=0$) к набегающему потоку. Следуя Ламбу, предположим, что распределение скорости подчиняется здесь закону

$$u=U\sin\frac{\pi y}{2h}. \qquad (7)$$

При таком законе выполняются необходимые условия $u=U$, $\partial u/\partial y=0$ при $y=h$ и $u=0$, $\partial^2u/\partial y^2=0$ при $y=0$; последнее условие вытекает из уравнения (4), потому что если градиент давления $\partial p/\partial x$ равен нулю вне пограничного слоя, то он должен равняться нулю и внутри него. Подстановка выражения (7) в интегральное соотношение (6) для случая установившегося движения дает

$$U^2\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\pi^2}{4-\pi}\frac{\nu U}{h},$$

откуда получим формулу для толщины пограничного слоя

$$h^2=\frac{2\pi^2}{(4-\pi)}\frac{\nu x}{U}.$$

Сила трения на стенке $y=0$ определяется соотношением

$$2\mu(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{q}+\mu\mathbf{n}\times\boldsymbol{\zeta}=2\mu\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{i}u+\mathbf{j}v)+\mu\mathbf{j}\times\mathbf{k}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

поскольку $\mathbf{n}=\mathbf{j}$; отсюда, полагая $y=0$, найдем

$$\mathbf{i}\mu\frac{\pi}{2h}U=\mathbf{i}\cdot\varrho U^2\sqrt{\frac{4-\pi}{8}}\cdot\sqrt{\frac{\nu}{Ux}}.$$

Таким образом, силу сопротивления (трение жидкости об обе стороны пластинки длиной l, измеряемой от передней кромки) получим, удваивая написанное выше выражение и интегрируя его от 0 до l:

$$\varrho U^2l\sqrt{8-2\pi}\sqrt{\frac{\nu}{Ul}}=1{,}310\varrho U^2l/\mathrm{Re}^{1/2},$$

где $\mathrm{Re}=Ul/\nu$ — число Рейнольдса.

Полученный здесь коэффициент 1,310 хорошо согласуется с коэффициентом 1,328, найденным Блазиусом без применения интегрального соотношения Кармана и специального предположения (7).

Теория пограничного слоя служит полезным руководством при проведении экспериментальной работы и дает качественное описание вязкого

движения вблизи границы тела, но приложения этой теории носят пока опытный, эмпирический характер.

19.82. Уравнения в естественных координатах. Рассмотрим в установившемся плоском движении линию тока OP и ее ортогональную траекторию ON (рис. 339).

Оси координат в точке O направим по касательной и по нормали к линии тока. Уравнения движения в естественных координатах для невязкой жидкости были даны в п. 4.25. Чтобы получить аналогичные уравнения для вязкой жидкости, надо в правые части уравнений из п. 4.25 добавить члены, соответствующие $\nu\nabla^2\bar{v}$, где $\bar{v}=u+iv=qe^{i\theta}$, а θ — угол

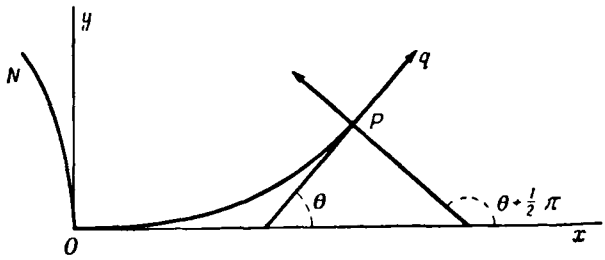


Рис. 339.

наклона касательной линии тока в точке P к оси Ox. Нам потребуются значения некоторых величин в точке O, где $\theta=0$. Пусть ds и dn — элементы дуг OP и ON, а $\varkappa_s$ и $\varkappa_n$ — соответствующие кривизны в точке O; тогда при $\theta=0$

$$\varkappa_s=\frac{\partial\theta}{\partial s}, \quad \varkappa_n=\frac{\partial\theta}{\partial n}.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial x}{\partial s}=\cos\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial s}=\sin\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial n}=-\sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial n}=\cos\theta;$$

следовательно, дифференцируя последние выражения и полагая затем $\theta=0$, получаем

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}=0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}=\varkappa_s, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial n^2}=-\varkappa_n, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial n^2}=0.$$

Далее, если f — некоторая функция от x и y, то

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial n^2}=\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial n^2}+\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial n^2}.$$

Таким образом, в точке O имеем

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\varkappa_s\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\varkappa_s\frac{\partial f}{\partial n},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial n^2}=\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\varkappa_n\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\varkappa_n\frac{\partial f}{\partial s}.$$

Отсюда, помня, что после дифференцирования надо положить $\theta = 0$, находим

$$\nabla^2 (qe^{i\theta}) = \frac{\partial^2}{\partial s^2}(qe^{i\theta}) + \frac{\partial^2}{\partial n^2}(qe^{i\theta}) - \varkappa_s \frac{\partial}{\partial n}(qe^{i\theta}) + \varkappa_n \frac{\partial}{\partial s}(qe^{i\theta}).$$

Действительная и мнимая части этого выражения и представляют собой нужные нам члены. Итак, получим следующие уравнения движения в естественных координатах:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s} + q\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial s} = \nu\left[\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial n^2} - \varkappa_s \frac{\partial q}{\partial n} + \varkappa_n \frac{\partial q}{\partial s} - q(\varkappa_s^2 + \varkappa_n^2)\right], \quad (1)$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial n} + \varkappa_s q^2 + \frac{\partial \Omega}{\partial n} = \nu\left[2\varkappa_s \frac{\partial q}{\partial s} + 2\varkappa_n \frac{\partial q}{\partial n} + q\left(\frac{\partial \varkappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \varkappa_n}{\partial n}\right)\right], \quad (2)$$

где Ω — потенциал внешних сил [1]).

К этим уравнениям надо присоединить еще уравнение неразрывности, которое (при $\theta = 0$) будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varrho q \cos\theta) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho q \sin\theta) = 0,$$

или

$$\frac{\partial(\varrho q)}{\partial s} + \varkappa_n \varrho q = 0, \quad (3)$$

а для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \varkappa_n q = 0.$$

В соответствии с п. 4.20 вихрь будет равен

$$\zeta = -\frac{\partial q}{\partial n} + \varkappa_s q. \quad (4)$$

Уравнение (1) с помощью уравнений (3) и (4) можно записать в форме

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}q^2 + \Omega\right) = \nu\left[-\frac{\partial \zeta}{\partial n} + q\left(\frac{\partial \varkappa_s}{\partial n} - \frac{\partial \varkappa_n}{\partial s}\right) - q(\varkappa_s^2 + \varkappa_n^2)\right]. \quad (5)$$

Отсюда, интегрируя вдоль линии тока от 0 до s, получим

$$\left[\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}q^2 + \Omega\right]_0^s = \nu F,$$

$$F = \int_0^s \left[-\frac{\partial \zeta}{\partial n} + q\left(\frac{\partial \varkappa_s}{\partial n} - \frac{\partial \varkappa_n}{\partial s}\right) - q(\varkappa_s^2 + \varkappa_n^2)\right] ds.$$

Для жидкости с малой вязкостью значение ν мало, и, таким образом, величина F представляет собой меру, определяющую область применимости уравнения Бернулли в качестве первого приближения. В частности, на границе тела $q = 0$, и поэтому

$$F = \int_0^s \left(-\frac{\partial \zeta}{\partial n}\right) ds.$$

Последний результат имеет место также в том случае, когда линии тока представляют собой прямые, так как при этом кривизны $\varkappa_s$ и $\varkappa_n$ равны нулю.

[1]) Эти уравнения легко также получить как частный случай с помощью развитого в п. 20.70 метода, пригодного для общих естественных координат.

В приближении теории пограничного слоя уравнение (1) вблизи стенки сведется к следующему:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s}+q\frac{\partial q}{\partial s}+\frac{\partial \Omega}{\partial s}=\nu\frac{\partial^2 q}{\partial n^2} \tag{6}$$

при условии, что кривизны не являются большими; тогда

$$F=\int_0^s \frac{\partial^2 q}{\partial n^2}\,ds.$$

В этом же приближении уравнение (2) примет вид

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial n}+\frac{\partial \Omega}{\partial n}=0. \tag{7}$$

Исключая из уравнений (6) и (7) величину $p/\varrho+\Omega$ и используя уравнение (3), будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\nu\frac{\partial^2 q}{\partial n^2}+\varkappa_n q^2\right)=0.$$

Значит, внутри пограничного слоя

$$\nu\frac{\partial^2 q}{\partial n^2}+\varkappa_n q^2=A,$$

где A не зависит от n и равняется, таким образом, значению $\nu\partial^2 q/\partial n^2$ на границе тела.

Если $\varkappa_n$ — *постоянная величина*, то, интегрируя это уравнение один раз, получаем

$$\nu\left(\frac{\partial q}{\partial n}\right)^2+\frac{2}{3}\varkappa_n q^3=2Aq+B.$$

Последнее уравнение допускает дальнейшее интегрирование в эллиптических функциях.

ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ 19

1. В трубе кругового сечения течет вода со скоростью q под действием градиента давления P. Доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial q}{\partial r}\right)=-\frac{Pr}{\mu},$$

где r — расстояние от оси трубы. Найти также расход жидкости через трубу.

2. Вязкая жидкость течет установившимся образом параллельно оси в кольцевом пространстве между двумя соосными цилиндрами радиусов a и na $(n>1)$.

Показать, что расход жидкости равен

$$\frac{\pi P a^4}{8\mu}\left[n^4-1-\frac{(n^2-1)^2}{\ln n}\right],$$

где P — градиент давления. Найти среднюю скорость.

3. В цилиндрической трубе кругового сечения, наклоненной под углом α к горизонтали, течет вода. Доказать, что расход жидкости равен

$$\frac{\pi a^4}{8\mu}(P+g\varrho\sin\alpha),$$

где P — градиент давления.

4. Пусть вязкая несжимаемая жидкость совершает установившееся прямолинейное движение вдоль цилиндра, образующие которого параллельны оси z. Показать, что скорость жидкости w в любой точке удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\text{const}.$$

Жидкость течет установившимся образом вдоль канала прямоугольного сечения со сторонами $2a$ и $2b$ под действием градиента давления P, отнесенного к единице длины.

Показать, что секундный расход жидкости равен

$$\frac{4ab^3}{3\mu}P\left[1-\frac{192b}{\pi^5 a}\left(\operatorname{th}\frac{\pi a}{2b}+\frac{1}{3^5}\operatorname{th}\frac{3\pi a}{2b}+\ldots\right)\right].$$

Для случая $a=b$ вывести также формулу

$$\frac{R}{\rho V^2}=\frac{3{,}8}{Va/\nu},$$

где V — средняя скорость в сечении, R — сила сопротивления на стенке, отнесенная к единице площади.

5. В преобразовании $z=c\operatorname{ch}(\xi+i\eta)$ равенство $\xi=\xi_0$ определяет поперечное сечение твердого цилиндра, который движется в продольном направлении с постоянной скоростью U внутри трубы, поперечное сечение которой определяется равенством $\xi=\xi_1$. Промежуточное пространство заполнено несжимаемой жидкостью, имеющей постоянное давление и движущейся параллельно оси трубы со скоростью u.

Показать, что $\nabla^2 u=0$ и что все условия этого движения удовлетворяются, если

$$u=U(\xi_1-\xi)/(\xi_1-\xi_0).$$

Доказать, что сила сопротивления, действующая на единицу длины цилиндра, равна $2\pi\mu U/(\xi_1-\xi_0)$.

6. Доказать, что функция тока $\psi=C\left(b^2y-\frac{1}{3}y^3\right)$ описывает установившееся течение несжимаемой жидкости в прямом канале шириной $2b$ в случае, когда скорость жидкости на границе равна нулю.

Показать, что эта функция тока удовлетворяет дифференциальному уравнению движения вязкой несжимаемой жидкости, и вычислить давление в произвольной точке, если кинематический коэффициент вязкости жидкости равен ν, а плотность ρ.

7. Показать, что в плоском движении вязкой несжимаемой жидкости функция тока удовлетворяет уравнению [1])

$$\left(\nu\nabla^2-\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2\psi=\frac{\partial(\psi,\ \nabla^2\psi)}{\partial(x,\ y)}.$$

Показать отсюда, что установившееся движение, у которого линии тока не зависят от коэффициента вязкости, должно быть либо движением, в котором полная скорость и вихрь постоянны вдоль каждой линии тока, либо движением, которое получается суперпозицией вращения твердого тела и безвихревого движения.

8. Вязкая несжимаемая жидкость ограничена параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии h одна от другой. Одна плоскость неподвижна, а другая колеблется, перемещаясь параллельно самой себе, по простому гармоническому закону $a\cos nt$. Показать, что отнесенная к единице площади касательная сила сопротивления, действующая на неподвижную плоскость, имеет наибольшее значение

$$\frac{an\mu\omega}{h(\operatorname{ch}\omega-\cos\omega)^{1/2}},\quad\text{где}\quad\omega^2=\frac{2nh^2}{\mu}.$$

9. Показать, что циркуляция $I=\int(\mathbf{q}\cdot d\mathbf{s})$ по замкнутому контуру, который образован из одних и тех же частиц жидкости, остается постоянной тогда и только тогда, когда

$$d\mathbf{q}/dt=-\nabla Q,$$

где Q — некоторая скалярная функция от радиуса-вектора точки и времени t. Показать также, что если Q не зависит от t, то величина $Q+{}^1/_2q^2$ будет постоянной вдоль траекторий частиц.

Доказать, что если массовые силы консервативны и p есть функция от ρ, то ускорение может быть получено явно из такой функции Q в случаях, когда $\mu=0$ или когда $\mu/\rho=\text{const}$ и $\nabla^2\mathbf{q}=0$; определить функцию Q в каждом из этих случаев.

10. Вязкая несжимаемая жидкость течет вдоль цилиндра установившимся образом по прямым, параллельным образующим цилиндра и оси z. Показать, что скорость в любой точке выражается формулой

$$w=Ax^2+Bxy+Cy^2+\psi,$$

где ψ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0$, а A, B, C являются постоянными.

---

[1]) В русской литературе это уравнение называется обобщенным уравнением Гельмгольца. — *Прим. ред.*

Пусть поперечное сечение такого цилиндра представляет собой полукруг, а жидкость течет под действием постоянного градиента давления P, отнесенного к единице длины. Найти среднюю скорость в сечении.

11. Несжимаемая жидкость, в которой отсутствуют массовые силы, движется в *тонком* слое между неподвижной плоскостью $z=0$ и жесткой движущейся поверхностью $z=h(x, y)$. Пусть U, V, W представляют собой составляющие скорости в точке (x, y, h) этой движущейся поверхности. Показать, что давление в точке (x, y, z) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial y}\right)+6\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}(hU)+\frac{\partial}{\partial y}(hV)\right]=12\mu W.$$

Пусть движущаяся поверхность является плоскостью, неограниченной в направлении y и наклоненной под малым углом α к плоскости $z=0$, причем передняя и задняя кромки этой плоскости имеют соответственно высоты h_1 и h_2. Показать, что если π — давление на этих кромках и если $V=W=0$, то выражение

$$p-\pi=\frac{6\mu U}{\alpha(h_1+h_2)h^2}(h_1-h)(h-h_2)$$

определяет давление в точках сечения с высотой h.

12. Показать, что в установившемся движении вязкой жидкости с кинематическим коэффициентом вязкости ν выполняется равенство

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{\nu}q\frac{\partial}{\partial s}\right)\left(\frac{p}{\varrho}+\Omega+\frac{1}{2}q^2\right)=\zeta^2,$$

где s измеряется вдоль линии тока.

13. Найти выражение для полной скорости диссипации энергии F в вязкой жидкости. Показать, что если границы неподвижны и на них отсутствует скольжение жидкости, то скорость диссипации энергии выражается формулой

$$F=\mu\int\int\int(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Пусть движение жидкости является плоским и пусть оно вызвано установившимся движением некоторого цилиндра, перемещающегося со скоростью V под прямым углом к своим образующим. Определить соответствующий вид F.

14. Вывести динамические уравнения движения жидкости с учетом вязкости и сжимаемости.

Показать, что работа в единицу времени внутренних реакций в жидкости равна $-F$, где

$$F=\widehat{xx}\frac{\partial u}{\partial x}+\widehat{yy}\frac{\partial v}{\partial y}+\widehat{zz}\frac{\partial w}{\partial z}+\widehat{yz}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\widehat{zx}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\widehat{xy}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

и что уравнение притока тепла в жидкости имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)+F=\varrho\frac{D(c_v\theta)}{Dt},$$

где θ — абсолютная температура, K — коэффициент теплопроводности, ϱ — плотность, c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Какие другие соотношения необходимы в этом случае, для того чтобы система уравнений была полной?

15. Вязкая жидкость совершает плоское движение такого вида, что в любой момент времени линии тока являются окружностями с центрами на оси x. Показать, что функция тока удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right).$$

Исследовать решения, в которых ψ представляет собой функцию только отношения r^2/t.

Простой прямолинейный вихрь интенсивности $\varkappa$ возникает в некоторый момент $t=0$ вдоль оси z. Найти скорость жидкости в момент времени t в точке, находящейся на расстоянии r от этой оси. Показать, что если некоторая окружность с центром на этой

оси расширяется так, чтобы содержать внутри себя некоторую постоянную величину вихря, то площадь, ограниченная этой окружностью, должна увеличиваться стационарно.

16. Вязкая несжимаемая жидкость совершает установившееся плоское радиальное движение между двумя непараллельными плоскими стенками; r и φ являются полярными координатами, где r — расстояние от линии пересечения стенок, на которых $\varphi=\pm\alpha$. Показать, что скорость в этом движении определяется так:

$$u=f(\varphi)/r;$$

здесь

$$\left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2=\frac{2}{3\nu}(h-3\nu kf-6\nu f^2-f^3),$$

причем h и k — постоянные, ν — кинематический коэффициент вязкости.

Пусть $R=ru_{\max}/\nu$. Показать, что для этого течения и для заданной величины R наибольшее значение α определяется выражением

$$(R+3)^{1/2}\alpha=\sqrt{3}\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\left[1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{R}\right)^{-1}\sin^2\psi\right]^{1/2}}.$$

17. Доказать, что для вязкой жидкости, находящейся в неподвижном замкнутом сосуде, скорость диссипации энергии равна

$$\mu\int\zeta^2\,d\tau,$$

где интеграл распространен по поверхности сосуда.

Пусть этот сосуд имеет форму тела вращения и вращается около своей оси (которая совпадает с осью z) с угловой скоростью ω. Доказать, что в этом случае скорость диссипации энергии будет содержать дополнительный член

$$\mu\omega\int(eDu+mDv)\,dS,\quad D\equiv y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y},$$

где l, m, n — направляющие косинусы внутренней нормали к элементу dS поверхности сосуда.

18. Вязкая несжимаемая жидкость, в которой отсутствуют массовые силы, целиком заполняет пространство между круглой цилиндрической осью, вращающейся с угловой скоростью ω, и подшипником, представляющим собой эксцентрически расположенный круговой цилиндр. Пусть O и O' — центры поперечных сечений оси и подшипника и пусть их радиусы равны a и $a+\varepsilon$ соответственно, где ε — малая величина; $OO'=\lambda\varepsilon$ $(0<\lambda<1)$. Показать, что давление p в некоторой точке P в жидкости удовлетворяет приближенному уравнению

$$\frac{dp}{d\theta}=\frac{6\mu\omega a^2\lambda(\cos\theta+C)}{\varepsilon^2(1+\lambda\cos\theta)^3},$$

где θ — угол POO', μ — коэффициент вязкости и C — постоянная. Пренебречь кривизной смазочного канала. Найти p и показать, что

$$C=3\lambda/(2+\lambda^2).$$

19. Преобразовать уравнения движения и уравнение неразрывности вязкой несжимаемой жидкости к цилиндрическим координатам r, θ, z, предполагая, что давление p и составляющие скорости жидкости u, v, w в направлении увеличения r, θ, z соответственно не зависят от θ.

Жидкость заполняет полупространство $z>0$, ограниченное только плоскостью $z=0$. Эта плоскость вращается с постоянной угловой скоростью ω около оси $r=0$. Проверить, что в этом установившемся движении составляющие скорости и давление выражаются равенствами

$$u=\omega rF(\zeta),\quad v=\omega rG(\zeta),\quad w=(\nu\omega)^{1/2}H(\zeta),\quad p=\rho\nu\omega P(\zeta),$$

где

$$z=(\nu/\omega)^{1/2}\zeta,$$

ρ — плотность, ν — кинематический коэффициент вязкости; F, G, H и P не зависят от ρ, ν, ω и удовлетворяют некоторым обыкновенным дифференциальным уравнениям, причем

$$F(0)=0,\quad G(0)=1,\quad H(0)=0,\quad F(\infty)=0,\quad G(\infty)=0.$$

Граничные условия в рассматриваемой физической задаче должны иметь следующий вид: $u=0$, $v=\omega r$, $w=0$ при $z=0$; $u=0$, $v=0$ при $z=\infty$; w не должно обращаться в нуль при $z=\infty$.

20. Доказать, что составляющие напряжения в сферических координатах имеют вид

$$\widehat{rr}=-p+2\mu\frac{\partial q_r}{\partial r},\quad \widehat{\theta\theta}=-p+\frac{2\mu}{r}\left(\frac{\partial q_\theta}{\partial\theta}+q_r\right),$$

$$\widehat{\omega\omega}=-p+\frac{2\mu}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial q_\omega}{\partial\omega}+q_r\sin\theta+q_\theta\cos\theta\right),$$

$$\widehat{r\theta}=\mu\left(\frac{\partial q_r}{r\,\partial\theta}+\frac{\partial q_\theta}{\partial r}-\frac{q_\theta}{r}\right),$$

$$\widehat{\theta\omega}=\mu\left(\frac{\partial q_\omega}{r\,\partial\theta}+\frac{\partial q_\theta}{r\sin\theta\,\partial\omega}-\frac{q_\omega\operatorname{ctg}\theta}{r}\right),$$

$$\widehat{r\omega}=\mu\left(\frac{\partial q_r}{r\sin\theta\,\partial\omega}+\frac{\partial q_\omega}{\partial r}-\frac{q_\omega}{r}\right).$$

21. Для установившегося движения несжимаемой жидкости, происходящего под действием одного только давления, вывести уравнения движения в следующей безразмерной форме:

$$\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 u,$$

где Re — число Рейнольдса.

22. Получить формулы преобразования, связывающие составляющие напряжения и скорости скольжения, заданные в двух различных прямоугольных системах координат.

Пусть в вязкой жидкости с коэффициентом вязкости μ составляющие напряжения задаются условием

$$\widehat{xx}-\alpha=\widehat{yy}-\beta=\widehat{zz}-\gamma=-p,$$

где

$$-p=\frac{1}{3}(\widehat{xx}+\widehat{yy}+\widehat{zz}),$$

и тремя равенствами вида

$$\widehat{yz}=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

причем α, β, γ являются линейными функциями от скоростей скольжения. Показать, что если эти равенства инвариантны относительно выбора прямоугольной системы координат, то

$$\alpha-2\mu\frac{\partial u}{\partial x}=\beta-2\mu\frac{\partial v}{\partial y}=\gamma-2\mu\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{2}{3}\mu\delta,$$

где

$$\delta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

23. Предполагая, что составляющие напряжения в вязкой жидкости заданы формулами типа

$$\widehat{xx}=-p-\frac{2}{3}\mu\nabla\mathbf{q}+2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\quad \widehat{xy}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad \widehat{xz}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

вывести уравнения движения, происходящего параллельно осям координат.

24. Доказать, что уравнения движения вязкой сжимаемой жидкости можно записать в следующей форме:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt}=-\nabla\left(\Omega+\int\frac{dp}{\varrho}\right)+\frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\mathbf{q})+\nu\nabla^2\mathbf{q},$$

предположив, что сила трения на поверхности тела содержит в дополнение к членам, имеющим место для несжимаемой жидкости, еще один член, пропорциональный $\nabla\mathbf{q}$.

25. Предполагая, что кинематический коэффициент вязкости в сжимаемой вязкой жидкости является постоянным, доказать, что уравнение движения имеет интеграл вида

$$\int \frac{dp}{\varrho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{4}{3} \nu \nabla^2 \varphi = F(t);$$

при этом движение считается безвихревым.

26. Сфера совершает установившееся движение со скоростью V вдоль оси Z в неограниченной идеальной жидкости, а сама жидкость вращается около этой оси с постоянной угловой скоростью Ω. Показать, что функция тока в полярных координатах имеет вид $f(r)\sin^2\theta$, причем $f(r)$ удовлетворяет уравнению

$$r^3 f''' - 2r^2 f'' - r f' + k^2 r^2 (r f' - 2f) = 0,$$

где $k = 2\Omega/V$. Найти решение этого уравнения, которое на границе тела удовлетворяет условию прилипания, и исследовать течение в окрестности сферы.

27. Проверить, что скорость

$$\mathbf{q} = A \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial x}(1/r) + Bx \operatorname{grad}(1/r) + \{U - B/r,\ 0,\ 0\}$$

удовлетворяет уравнениям медленного установившегося движения несжимаемой вязкой жидкости (если пренебречь так называемыми инерционными членами).

Определить постоянные A и B таким образом, чтобы это решение описывало обтекание неподвижной твердой сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ потоком неограниченной жидкости со скоростью $(U, 0, 0)$ на бесконечности. Показать, что этот поток действует на сферу с силой $6\pi\mu aU$, направленной по потоку.

28. Сфера радиуса a, центр которой находится в начале координат, расположена неподвижно в потоке вязкой несжимаемой жидкости, скорость которого на бесконечности U параллельна оси Ox. Проверить, что если пренебречь инерционными членами, то уравнениям движения и граничным условиям будут удовлетворять составляющие скорости

$$u = U\left[1 - \frac{a}{r} + \frac{a}{4r^3}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)(r^2 - 3x^2)\right],$$

$$v = -\frac{3Ua}{4r^3}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)xy, \quad w = -\frac{3Ua}{4r^3}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)xz$$

при условии, что давление p соответственно определено. Найти результирующую силу, действующую на сферу.

29. Два бесконечно длинных круговых цилиндра радиусов a и a' вращаются с постоянными угловыми скоростями ω и ω' таким образом, что они все время касаются друг друга вдоль оси z. Эти цилиндры окружены вязкой несжимаемой жидкостью с плотностью ϱ и коэффициентом вязкости μ. Пренебрегая инерционными членами, доказать, что всем необходимым условиям движения будет удовлетворять функция тока следующего вида:

$$\psi = A\sin^2\theta + Br^2 + Cr\sin\theta + \frac{D\sin^3\theta}{r}.$$

Определить постоянные A, B, C и D, когда нормальные сечения цилиндров описываются уравнениями

$$r = 2a\sin\theta, \quad r = -2a'\sin\theta,$$

где z, r, θ — цилиндрические координаты.

Исследовать специально случай $a' = a$, $\omega' = -\omega$, показав, что при этом

$$\psi = \frac{1}{2}\omega a\left(r - \frac{4a^2\sin^2\theta}{r}\right)\sin\theta.$$

Найти составляющие напряжения p_{rr}, $p_{\theta\theta}$, $p_{r\theta}$, когда они зависят от μ, вывести формулу для касательного напряжения на одном из цилиндров, исследовать особенность в этой формуле и рассмотреть в связи с этим справедливость полученного решения.

30. Полый круговой цилиндр внутреннего радиуса a может вращаться свободно без трения около своей оси. Он заполнен вязкой жидкостью, и вся система вращается как твердое тело около оси цилиндра с угловой скоростью ω_0. В момент времени $t = 0$ цилиндр внезапно задерживают, а затем мгновенно отпускают.

Показать, что угловая скорость цилиндра в момент времени t равна

$$\omega_1+\sum_k A_k J_1(ka)\, e^{-k^2\nu t},$$

где ω_1 — конечное значение угловой скорости системы в момент, когда она снова начинает вращаться как твердое тело, а k представляет собой величины корней уравнения

$$[k^2a^2(\omega_0-\omega_1)/4\omega_1+2]\,J_1(ka)-kaJ_0(ka)=0.$$

Поставим в этой задаче дополнительные условия. Можно предполагать, что цилиндр настолько длинный, что влияние возмущений от его плоских торцов пренебрежимо мало и что составляющая напряжения p_r равна

$$p_r=\mu\left(\frac{\partial q_\theta}{\partial r}-\frac{q_\theta}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial q_r}{\partial \omega}\right),$$

где r, ω, z — цилиндрические координаты.

31. Обсудить приближенный метод Озеена, рассматривая течение вязкой жидкости около неподвижного тела при малых числах Рейнольдса Вывести уравнение, которому в теории Озеена удовлетворяет вихрь, и объяснить его физический смысл.

Проверить, что в случае плоского течения около цилиндра любого поперечного сечения уравнениям движения и неразрывности удовлетворяют функции

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial x}-\chi,\qquad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial y},\quad p=-\varrho U\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

где $k=U/(2\nu)$, U — скорость невозмущенного потока, направленная вдоль оси x, ν — кинематический коэффициент вязкости и

$$\nabla^2\varphi=0,\quad\left(\nabla^2-2k\frac{\partial}{\partial x}\right)\chi=0,\quad \nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Пусть решения для φ и χ могут быть найдены так, что u и v обращаются в нуль на поверхности цилиндра. Доказать, что тогда сила сопротивления цилиндра, отнесенная к единице его длины, будет равна

$$\varrho U\int\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds,$$

где интеграл берется по контуру цилиндра, а dn — элемент внешней нормали.

32. Вязкая жидкость движется на большом расстоянии от неподвижного тела со скоростью U, параллельной оси Ox. Привести соображения, по которым Озеен сводит уравнения движения в этом случае к такой форме:

$$U\frac{\partial}{\partial x}(u,\,v,\,w)=-\frac{1}{\varrho}\nabla p+\nu\nabla^2(u,\,v,\,w).$$

Полагая $U=2\nu k$, проверить, что этим уравнениям удовлетворяют функции

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial x}-\chi,\qquad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial y},\qquad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial z},$$

где

$$\nabla^2\varphi=0,\quad\left(\nabla^2-2k\frac{\partial}{\partial x}\right)\chi=0.$$

Рассмотреть решение

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}A_nS_nr^{-n-1}=e^{kx}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,B_nS_n\,(\pi/2kr)^{1/2}K_{n+1/2}(kr),$$

где S_n — сферическая гармоническая функция порядка n, а $K_{n+1/2}$ — фуикция Бесселя второго рода с полуцелым индексом.

Объяснить, каким образом член, содержащий χ, учитывает влияние вихревого следа за телом.

33. Пусть φ представляет собой потенциал скоростей безвихревого движения вне вихревого следа. Доказать в рамках приближенной теории Озеена, что сила сопротивле-

ния любого тела вращения с осью, параллельной установившемуся потоку жидкости с плотностью ϱ, равна

$$\varrho U \int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS,$$

где интеграл берется по поверхности тела, а U — скорость невозмущенного потока.

34. Сфера радиуса a движется с постоянной скоростью U вдоль оси x в вязкой несжимаемой жидкости, которая покоится на бесконечности. Проверить, что в рамках гипотезы Озеена функция тока будет

$$\psi = \frac{Ua^3 \sin^2\theta}{4r} - \frac{3\nu a}{2}(1+\cos\theta)\,[1-e^{-k(r-x)}],$$

где $k = U/(2\nu)$.

35. Получить уравнения движения плоского установившегося течения несжимаемой жидкости с малой вязкостью в пограничном слое на плоской стенке в следующей форме:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = U\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

где U — скорость основного течения непосредственно на внешней границе пограничного слоя.

Пусть жидкость течет между двумя сближающимися плоскими стенками в направлении к линии их пересечения, так что скорость течения U отрицательна и обратно пропорциональна x, где x измеряется вдоль стенки от линии пересечения плоскостей. Показать, что можно найти такое решение дифференциальных уравнений задачи, в котором ψ является функцией только отношения y/x. Для скорости u в пограничном слое вдоль одной из стенок найти в этом случае выражение

$$\frac{u}{U} = 3\,\mathrm{th}^2\left\{\alpha + \left(\frac{|U|}{2\nu x}\right)^{1/2} y\right\} - 2,$$

где $\mathrm{th}^2\alpha = {}^2/_3$.

36. Струя воздуха вытекает из небольшого отверстия в стенке и смешивается с окружающим воздухом. Записать уравнения, которые приближенно определяют скорость в струе на некотором расстоянии от отверстия, предполагая, что сжимаемостью воздуха можно пренебречь и что течение является ламинарным и осесимметричным. Пусть M — поток количества движения в единицу времени в сечении струи, μ — коэффициент вязкости, ϱ — плотность воздуха и пусть ось x направлена вдоль струи, а y есть расстояние от этой оси; показать, что в струе составляющая скорости, параллельная оси, выражается формулой

$$u = \frac{3M}{8\pi\mu}\,\frac{1}{1+\xi^2/4},$$

где

$$\xi = \frac{\varrho}{4\mu}\sqrt{\frac{3M}{\pi\varrho}}\,\frac{y}{x}.$$

37. Струя воздуха вытекает из узкой прямолинейной щели в стенке и смешивается с окружающим воздухом. Условимся, что сжимаемостью воздуха можно пренебречь; предположим также, что движение является установившимся (не турбулентным) и плоским и что задачу можно решать в рамках теории пограничного слоя. В этих предположениях показать, что на некотором расстоянии от щели составляющая скорости, параллельная оси струи, будет равна

$$\left(\frac{3M^2}{32\varrho^2\nu x}\right)^{1/3} \mathrm{sch}^2\left[\left(\frac{M}{48\varrho\nu^2x^2}\right)^{1/3} y\right],$$

где M — поток количества движения в единицу времени на единицу ширины сечения струи. Ось x направлена вдоль оси струи, ось y — перпендикулярно оси струи.

Найти расход жидкости в струе.

Глава 20

ДОЗВУКОВОЕ И СВЕРХЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ

20.00. В предыдущих главах мы почти все время имели дело с несжимаемой жидкостью, такой, например, как вода. Число Маха (см. п. 1.63) принималось при этом равным нулю.

В этой главе мы будем рассматривать сжимаемую жидкость, такую, например, как воздух. При этом сжимаемая жидкость предполагается невязкой. Вероятно, самым важным результатом влияния вязкости является сила сопротивления, обусловленная поверхностным трением в пограничном слое. Внешними силами будем пренебрегать; это означает (см. п. 1.44), что мы будем иметь дело только с гидродинамическим, или, как здесь более уместно сказать, с *аэродинамическим* давлением.

20.01. Термодинамические уравнения. Рассмотрим *единичную массу* газа, имеющую объем v и плотность ϱ, так что

$$v\varrho = 1. \tag{1}$$

Пусть T — абсолютная температура газа, т. е. температура, измеряемая от абсолютного нуля (равного приблизительно $-273°$C). Газ называется *совершенным*, если он подчиняется закону

$$pv = RT, \qquad \text{или} \qquad p = R\varrho T, \tag{2}$$

где p — давление, R — газовая постоянная. Таким образом, из четырех величин p, v, ϱ и T независимыми являются только две.

Если взять логарифмическую производную от равенства (2), то можно получить соотношения

$$\frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} = \frac{dT}{T}, \qquad \frac{dp}{p} = \frac{d\varrho}{\varrho} + \frac{dT}{T}. \tag{3}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только совершенный газ.

Первый закон термодинамики утверждает, что теплота есть форма энергии.

Пусть рассматриваемая единичная масса газа получает некоторое малое колнчество тепла q.

Гипотеза. Для всех газов, находящихся или не находящихся в осредненном движении, существует функция внутренней энергии E, которая не зависит от осредненного движения, а зависит только от параметров состояния p, ϱ, T. Причем количество тепла q, подводимое к газу, равно

$$q = dE + p\,dv. \tag{4}$$

Величина dE представляет собой избыток подведенной энергии по сравнению с механической работой, совершенной силами давления ($p\,dv$).

Гипотеза. В совершенном газе внутренняя энергия E является функцией одной только абсолютной температуры T.

Эта гипотеза представляет собой обобщение, основанное на результатах экспериментов. Она известна также как *закон Джоуля*. Из этой гипотезы

следует, что

$$dE = k\,dT, \tag{5}$$

и тогда равенство (4) примет вид

$$q = k\,dT + p\,dv. \tag{6}$$

Если при подводе к газу малого количества тепла q газ не имеет возможности расширяться ($dv = 0$), то его температура возрастет, скажем, на величину dT. Тогда можно записать, что

$$q = c_v\,dT.$$

Величина c_v называется *удельной теплоемкостью при постоянном объеме*. Она представляет собой количество тепла, которое требуется для того, чтобы повысить температуру газа на один градус при условии, что объем газа остается постоянным. Полагая в равенстве (6) $dv = 0$, получим

$$k = c_v. \tag{7}$$

Подобным образом определим *удельную теплоемкость при постоянном давлении* c_p как количество тепла, которое требуется для того, чтобы повысить температуру газа на один градус, при условии, что давление газа остается постоянным. Но если p постоянно, то из соотношений (3) находим $dv/v = dT/T$ и, следовательно, из уравнения (6) получим

$$q = \left(k + \frac{pv}{T}\right) dT.$$

Отсюда с учетом равенства (7) находим

$$c_p = k + R = c_v + R,$$

следовательно,

$$R = (c_p - c_v). \tag{8}$$

Гипотеза. Для совершенного газа c_p и c_v являются постоянными величинами.

Эта гипотеза также основана на результатах экспериментов.

Малую величину количества тепла мы обозначили здесь через q, а не через dQ, что казалось бы более естественным. Причина этого состоит в том, что, вообще говоря, не существует такой функции Q, полным дифференциалом которой является q. Однако можно записать равенство

$$q = T\,dS, \tag{9}$$

где dS — дифференциал некоторой функции S, которая называется *энтропией*.

Чтобы проверить равенство (9), заметим, что из равенств (6) и (7) с помощью соотношений (2) и (8) находим

$$dS = c_v \frac{dT}{T} + \frac{p}{T}\,dv = c_v \frac{dp}{p} + c_p \frac{dv}{v},$$

поскольку c_p и c_v — постоянные числа, то это равенство и доказывает, что dS является полным дифференциалом. Обозначим теперь

$$\gamma = c_p/c_v, \tag{10}$$

и тогда сразу получим

$$dS = c_v\,d\ln(pv^\gamma).$$

Если состояние газа изменяется от (p_1, v_1) до (p_2, v_2), то приращение энтропии равно

$$S_2 - S_1 = c_v \ln (p_2 v_2^\gamma) - c_v \ln (p_1 v_1^\gamma). \tag{11}$$

Второй закон термодинамики утверждает, что энтропия изолированной системы не может уменьшаться, т. е. всегда $dS \geqslant 0$.

Если энтропия сохраняет одно и то же постоянное значение во всем газе, то говорят, что такое течение является *гомэнтропическим*. Следовательно, условие для гомэнтропического течения таково: $dS = 0$. Из равенства (11) следует, что в гомэнтропическом течении

$$pv^\gamma = \varkappa, \qquad \text{или} \qquad p = \varkappa \varrho^\gamma, \tag{12}$$

где $\varkappa$ — постоянная, которая зависит от энтропии. Это равенство выражает закон адиабатичности (см. п. 1.62).

Установившееся течение газа подчиняется уравнениям движения и неразрывности

$$-\frac{1}{\varrho} \nabla p = (\mathbf{q}\nabla)\,\mathbf{q}, \qquad \nabla (\varrho \mathbf{q}) = 0. \tag{13}$$

Так как здесь имеются три неизвестные величины p, ϱ, $\mathbf{q}$, то этих уравнений недостаточно для определения движения. Однако в случае гомэнтропического течения можно присоединить еще уравнение адиабатичности и получить таким образом полную систему уравнений.

Чтобы вычислить внутреннюю энергию, запишем

$$dE = c_v\, dT = \frac{c_v\, d(pv)}{R} = \frac{d(pv)}{\gamma - 1},$$

и, следовательно, с точностью до произвольного слагаемого получим следующие различные формулы для внутренней энергии:

$$E = \frac{pv}{\gamma - 1} = \frac{p}{(\gamma - 1)\varrho} = c_v T. \tag{14}$$

Энтальпия, или *теплосодержание*, I представляет собой количество тепла, которое надо подвести к единице массы совершенного газа, чтобы при постоянном давлении поднять температуру газа от абсолютного нуля до данной температуры.

Поскольку p есть постоянная величина, то из равенства (4) имеем

$$I = E + pv = \frac{\gamma pv}{\gamma - 1} = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\varrho} \tag{15}$$

и, следовательно, из равенств (4) и (9) получим

$$dI = v\, dp + T\, dS. \tag{16}$$

В *изэнтропическом* случае, когда энтропия S постоянна вдоль линии тока, но не обязательно имеет одно и то же постоянное значение на различных линиях тока, должно быть выполнено равенство

$$dI = \frac{dp}{\varrho} \text{ вдоль линии тока.} \tag{17}$$

20.10. Уравнение Крокко. Уравнение Бернулли из п. 1.62 можно записать через введенную в п. 20.01 энтальпию следующим образом:

$$I = \frac{1}{2} q^2 = H \text{ вдоль линии тока.} \tag{1}$$

Функция H называется *полной энергией*, или *энтальпией торможения* (т. е. энтальпией при $q=0$) для данной линии тока. Вообще говоря, H имеет различные значения на различных линиях тока. Течение, в котором H имеет одно и то же значение в любой точке, называется *гомэнергетическим*.

В случае установившегося движения при отсутствии внешних сил уравнение движения (3) п. 3.43 примет вид

$$\mathbf{q}\times\boldsymbol{\zeta}=\nabla\left(\frac{1}{2}q^2\right)+\frac{1}{\varrho}\nabla p. \tag{2}$$

Исключая отсюда p и q с помощью соотношения (16) п. 20.01 и условия (1), получим уравнение Крокко

$$\mathbf{q}\times\boldsymbol{\zeta}=\nabla H-T\nabla S. \tag{3}$$

Следовательно, пренебрегая вязкостью и теплопроводностью, можно найти в поле течения вихрь в том случае, когда распределение полной энергии H или энтропии S является неравномерным. Такое распределение имеет место, например, тогда, когда движение газа начинается из состояния покоя, но распределение температуры в этом состоянии является неравномерным, или тогда, когда рассматривается течение за искривленной ударной волной (см. п. 20.60).

Из уравнения (3) следует, что если установившееся безвихревое течение является гомэнергетическим, то оно будет также и гомэнтропическим и, наоборот, если такое течение является гомэнтропическим, то оно будет также и гомэнергетическим.

20.12. Наложение постоянной скорости. Пусть F представляет собой заданное плоское течение в плоскости x, y. Будем относить это течение к декартовой системе координат x, y, z, которая движется в направлении оси z равномерно со скоростью $-V$. Тогда течение F', которое наблюдатель видит в этой движущейся системе координат, будет отличаться в каждой точке от течения F на дополнительную постоянную скорость V, направленную нормально к плоскости последнего течения. Составляющие скорости u, v, давление, температура и плотность будут в течении F' такими же функциями от x, y и времени, что и в течении F. Наложение такой постоянной скорости не влияет на ускорение частиц газа или на вихрь [1]).

Таким образом, наложение постоянной скорости, например, на течение для сжимаемого вихря, рассмотренное в п. 13.80, приводит к спиральному течению около оси. Линии тока здесь представляют собой спирали на соосных цилиндрах. Любая пара этих линий тока может быть принята в качестве границ течения. Этот пример интересен в связи с течением газа в патрубке вентилятора. Такой же способ наложения постоянной скорости можно применить при рассмотрении скользящего или стреловидного сверхзвукового крыла или косого скачка уплотнения.

20.13. Установившееся движение. Пренебрегая вязкостью, теплопроводностью и излучением, для установившегося течения газа получаем следующую систему уравнений:

уравнение неразрывности $$\nabla(\varrho\mathbf{q})=0, \tag{1}$$

уравнение движения $$(\mathbf{q}\nabla)\,\mathbf{q}=-\frac{1}{\varrho}\nabla p, \tag{2}$$

уравнение состояния $$p=f(\varrho,\ S), \tag{3}$$

где S — энтропия.

[1]) Poritsky H., *J. Appl. Mech.*, **13** (1946), 53—60.

Таким образом, имеется три уравнения для четырех неизвестных ϱ, p, $\mathbf{q}, S$. Чтобы сделать задачу определенной, требуется еще четвертое уравнение. Такое уравнение получается из предположения, что течение является изэнтропическим. Тогда получим уравнение постоянства энтропии вдоль линии тока

$$(\mathbf{q}\nabla)\, S = 0. \tag{4}$$

Удобно также воспользоваться формулой

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \varrho} \quad (\text{при} \quad S = \text{const}), \tag{5}$$

где c — местная скорость звука (см. п. 14.86). Тогда из уравнения (3) получим

$$\nabla p = c^2 \nabla \varrho + \frac{\partial p}{\partial S} \nabla S. \tag{6}$$

Умножая обе части уравнения (6) скалярно на вектор $\mathbf{q}$, найдем с помощью уравнений (4) и (1) соотношение

$$(\mathbf{q}\nabla)\, p = \mathbf{q} c^2 \nabla \varrho = -c^2 \varrho \nabla \mathbf{q}. \tag{7}$$

Но в соответствии с формулой (IV) п. 2.34

$$(\mathbf{q}\nabla)\, \mathbf{q} = \nabla \left(\frac{1}{2} q^2\right) - \mathbf{q} \times \boldsymbol{\zeta},$$

точно так же умножим обе части уравнения (2) скалярно на вектор $\mathbf{q}$ и используем соотношение (7). Поскольку векторы $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q} \times \boldsymbol{\zeta}$ перпендикулярны, то

$$\mathbf{q}\nabla \left(\frac{1}{2} q^2\right) = c^2 \nabla \mathbf{q}. \tag{8}$$

Это уравнение представляет собой уравнение, которому удовлетворяет скорость; величину c^2 здесь можно рассматривать как величину, определенную уравнением Бернулли (4) п. 1.63

$$c^2 = \frac{1}{2} (\gamma - 1) (q_{\max}^2 - q^2), \tag{9}$$

которое выполняется вдоль линии тока вследствие равенства (4).

20.20. Установившееся безвихревое движение. В этом случае имеет место уравнение (8) п. 20.13 вместе с условием $\mathbf{q} = -\nabla \varphi$. Отсюда в декартовых координатах находим

$$(u^2 - c^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (v^2 - c^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (w^2 - c^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \\ + 2uv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} + 2vw \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial z} + 2wu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial x} = 0, \tag{1}$$

где

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}; \tag{2}$$

$$c^2 = \frac{1}{2} (\gamma - 1) \left[q_{\max}^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{dy}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right]. \tag{3}$$

Если величины (2) и (3) подставить в уравнение (1), то получим нелинейное уравнение, которому удовлетворяет потенциал для течения сжимаемого газа.

В случае несжимаемой жидкости ($c=\infty$) это уравнение сводится к уравнению Лапласа.

Простые примеры установившегося безвихревого движения были уже даны для источника (п.8.90) и вихря (п. 13.80).

Значительного успеха можно добиться при помощи *линеаризированной теории* течений сжимаемого газа, в которой рассматриваются малые возмущения равномерного потока, создаваемые расположенным в нем тонким телом [1]).

20.30. Метод годографа. Рассмотрим плоское установившееся движение. Пусть PQR (рис. 340) — дуга некоторой кривой в плоскости течения (x, y), которую принято называть *физической плоскостью*. В точках P, Q, R, ... проведем векторы $\overrightarrow{PP_1}$, $\overrightarrow{QQ_1}$, $\overrightarrow{RR_1}$, ..., изображающие скорость газа в этих точках. От некоторой фиксированной точки H отложим векторы $\overrightarrow{HP'}$, $\overrightarrow{HQ'}$, $\overrightarrow{HR'}$, ..., равные и параллельные этим векторам скорости. Тогда точки P', Q', R', ... опишут *годограф* данной кривой PQR. Плоскость кривой $P'Q'R'$ называется *плоскостью годографа* данного движения. Если ось Hu в плоскости годографа взять параллельной оси Ox в плоскости течения, то скорость в точке P будет равна

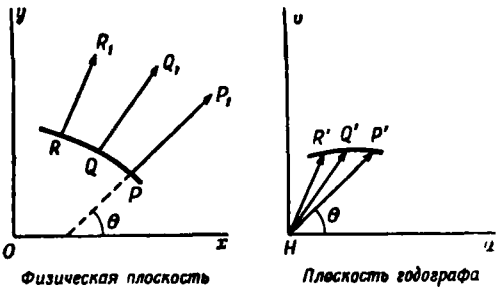


Рис. 340.

$$u+iv=qe^{i\theta},$$

а точка P' будет иметь декартовы координаты u, v и полярные координаты q, θ.

В п. 20.20 мы видели, что потенциал скоростей безвихревого течения сжимаемого газа удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению. Покажем, что если в качестве независимых переменных взять q, θ или u, v, то это уравнение станет линейным.

Здесь целесообразно ввести в рассмотрение функцию тока ψ. Уравнение неразрывности в случае установившегося движения имеет вид

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0.$$

Этому уравнению можно удовлетворить, полагая

$$\rho u=-\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad \rho v=\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{1}$$

где ρ_0 — некоторая постоянная величина, которую, например, если рассматривается обтекание крыла, удобно отождествлять с плотностью потока. Функция ψ представляет собой *функцию тока*. Таким образом, если φ — потенциал скоростей, то имеем

$$-d\varphi=u\,dx+v\,dy,\qquad -\frac{\rho_0}{\rho}d\psi=-v\,dx+u\,dy,$$

[1]) Milne-Thomson L. M., Theoretical aerodynamics, 3rd ed., Lnd., 1958, гл. 15,20. (Линеаризированная теория течений газа излагается также в советских изданиях, например в книгах: Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. 2, изд. 3, Гостехиздат, 1948; Франкль Ф. И., Карпович Е. А., Газодинамика тонких тел, Гостехиздат, 1948.—*Прим. перев.*)

и отсюда, как нетрудно проверить, следуют равенства

$$-\left(d\varphi+\frac{i\varrho_0}{\varrho}d\psi\right)=(u-iv)\,dz=qe^{-i\theta}\,dz.$$

Следовательно,

$$dz=-\frac{e^{i\theta}}{q}\left(d\varphi+\frac{i\varrho_0}{\varrho}d\psi\right). \tag{2}$$

Если соответствующие частные производные обозначать индексом, например, $z_q=\partial z/\partial q$, то тогда, очевидно,

$$z_q=-\frac{e^{i\theta}}{q}\left(\varphi_q+\frac{i\varrho_0}{\varrho}\psi_q\right),\quad z_\theta=-\frac{e^{i\theta}}{q}\left(\varphi_\theta+\frac{i\varrho_0}{\varrho}\psi_\theta\right),$$

а поскольку $z_{q\theta}=z_{\theta q}$, то получим

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{e^{i\theta}}{q}\left(\varphi_q+\frac{i\varrho_0}{\varrho}\psi_q\right)\right]=\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{e^{i\theta}}{q}\left(\varphi_\theta+\frac{i\varrho_0}{\varrho}\psi_\theta\right)\right].$$

Выполняя дифференцирование, приравнивая действительную и мнимую части этого выражения и замечая, что ϱ является функцией только от q, придем к уравнениям

$$\varphi_q=q\psi_\theta\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\varrho_0}{q\varrho}\right),\qquad \varphi_\theta=\frac{\varrho_0 q}{\varrho}\psi_q. \tag{3}$$

Эти уравнения называются *уравнениями в плоскости годографа.*

Выведем уравнение, которому удовлетворяет функция тока. Поскольку $\varphi_{q\theta}=\varphi_{\theta q}$, то

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\varrho_0 q}{\varrho}\psi_q\right)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[q\psi_\theta\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\varrho_0}{q\varrho}\right)\right]$$

или

$$\frac{\varrho_0 q}{\varrho}\psi_{qq}+\psi_q\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\varrho_0 q}{\varrho}\right)-q\psi_{\theta\theta}\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\varrho_0}{q\varrho}\right)=0, \tag{4}$$

так как ϱ не зависит от θ.

Но с помощью уравнения Бернулли (3) п. 1.61 и формулы $c^2=dp/d\varrho$ получим равенство

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)=-\frac{\varrho_0}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{dp}\frac{dp}{dq}=\frac{\varrho_0}{\varrho^2}\frac{1}{c^2}\,q\varrho=\frac{\varrho_0}{\varrho}\frac{q}{c^2}.$$

Тогда уравнение (4) примет окончательный вид

$$q^2\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}+q(1+M^2)\frac{\partial\psi}{\partial q}+(1-M^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0,\qquad M=\frac{q}{c}. \tag{5}$$

Это уравнение, которому удовлетворяет функция тока, является линейным. Оно было получено С. А. Чаплыгиным [1]).

20.31. Уравнение в плоскости годографа для гомэнтропического течения. Исходя из адиабатического соотношения $p/p_0=(\varrho/\varrho_0)^\gamma$, введем в качестве переменной безразмерную скорость

$$\tau=\frac{q^2}{q^2_{\max}},\qquad \beta=\frac{1}{\gamma-1}\ (\beta=2{,}5\ \text{для воздуха}). \tag{1}$$

Заметим, что $0\leqslant\tau\leqslant 1$ и что $M^2=2\beta\tau/(1-\tau)$.

[1])Вывод уравнения Чаплыгина см., например, также в книге: Зауэр Р., Введение в газовую динамику, ГИТТЛ, 1947, стр. 152—153.

[Это уравнение было приведено С. А. Чаплыгиным в 1902 г. в работе «О газовых струях» (см. Чаплыгин С. А., Собр. соч., т. II, М., 1948), которая явилась основой для развития метода годографа.—*Прим. перев.*]

Тогда нетрудно показать, что уравнение Бернулли можно представить в форме

$$\varrho = \varrho_0 (1-\tau)^{\beta}, \tag{2}$$

а уравнения в плоскости годографа примут вид

$$2\tau(1-\tau)^{\beta+1}\varphi_\tau = -[1-(2\beta+1)\tau]\psi_\theta, \quad (1-\tau)^{\beta}\varphi_\theta = 2\tau\psi_\tau. \tag{3}$$

Исключая отсюда φ, придем к уравнению Чаплыгина (5) п. 20.30 в новых переменных, а именно

$$2\tau(1-\tau)^{\beta+1}\frac{\partial}{\partial\tau}[2\tau(1-\tau)^{-\beta}\psi_\tau] + [1-(2\beta+1)\tau]\psi_{\theta\theta} = 0. \tag{4}$$

Так как это уравнение является линейным относительно ψ, то его решение можно искать в виде суперпозиции элементарных решений типа

$$\psi = B_m \tau^{1/2m} F_m(\tau)\sin(m\theta + \varepsilon_m), \tag{5}$$

где B_m, ε_m — произвольные постоянные. Подстановка этого выражения в уравнение (4) приводит к гипергеометрическому уравнению

$$\tau(1-\tau)F_m''(\tau) + [m+1-(m+1-\beta)\tau]F_m'(\tau) + \frac{1}{2}m(m+1)\beta F_m(\tau) = 0, \tag{6}$$

которому удовлетворяет гипергеометрическая функция [1])

$$F_m(\tau) = F(a,\ b;\ c;\ \tau) = 1 + \frac{a\cdot b}{1\cdot c}\tau - \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}\tau^2 + \ldots,$$

где $a+b = m-\beta$, $c = m+1$, $ab = -\frac{1}{2}\beta m(m+1)$.

Соответствующее решение φ находится тогда из уравнения (3) и имеет вид

$$\varphi = -B_m\tau^{1/2m}(1-\tau)^{-\beta}\left[F_m(\tau) + \frac{2\tau}{m}F_m'(\tau)\right]\cos(m\theta+\varepsilon_m). \tag{7}$$

При $m=0$ или $m=-1$ решения получаются в замкнутой форме. Случай $m=0$ является исключительным, и решения уравнений (3) здесь можно представить в виде

$$\psi = A\theta \text{ или } \varphi = B\theta. \tag{8}$$

Отсюда следует, что соответственно φ или ψ являются функциями одного только τ. Решения (8) включают решения для источника (см. п. 8.90) и для вихря (см. п. 13.80) в физической плоскости, а также более общий случай спирального течения, которое получается комбинацией течений источника и вихря и было рассмотрено для несжимаемой жидкости в п. 13.33 [2]).

20.32. Случай $m=-1$. В этом случае уравнение (6) п. 20.31 приобретает вид

$$(1-\tau)F_{-1}''(\tau) + \beta F_{-1}'(\tau) = 0.$$

Отсюда

$$F_{-1}(\tau) = A(1-\tau)^{\beta+1} + B.$$

[1]) Milne-Thomson L. M., Calculus of finite differences, Lnd., 1959, § 9.8.

[2]) Значительный успех в исследовании установившихся изэнтропических течений был достигнут С. Бергманом. См., в частности, его работы в NACA TN № 972, 973, 1018, 1096. См. также работу: Lighthill M. J., The hodograph transformation in transonic flow. *Proc. Roy. Soc.* (*A*) **191** (1947), 323—369.

Таким образом, в этом случае имеется пара фундаментальных решений

$$F^{(1)}_{-1}(\tau)=1, \quad F^{(2)}_{-1}(\tau)=(1-\tau)^{\beta+1}. \tag{1}$$

В соответствии с первым решением из уравнений (5) и (7) п. 20.31, в которых положим $\varepsilon_{-1}=0$ (что, очевидно, допустимо) и $B_{-1}=A/2q$, получим равенства

$$\psi=\frac{-A}{2q_{\max}}\tau^{-1/2}\sin\theta, \quad \varphi=\frac{-A}{2q_{\max}}\tau^{-1/2}(1-\tau)^{-\beta}\cos\theta. \tag{2}$$

В соответствии со вторым решением уравнения (1) получим равенства

$$\psi=\frac{-A}{2q_{\max}}\tau^{-1/2}(1-\tau)^{\beta+1}\sin\theta, \quad \varphi=\frac{-A}{2q_{\max}}\tau^{-1/2}[1+(2\beta+1)\tau]\cos\theta. \tag{3}$$

Когда $q_{\max}\to\infty$ (и, следовательно, $\tau\to 0$), течения, определяемые равенствами (2) и (3), превращаются в течения несжимаемой жидкости, определяемые формулами

$$\psi=-\frac{A}{2q}\sin\theta, \quad \varphi=-\frac{A}{2q}\cos\theta. \tag{4}$$

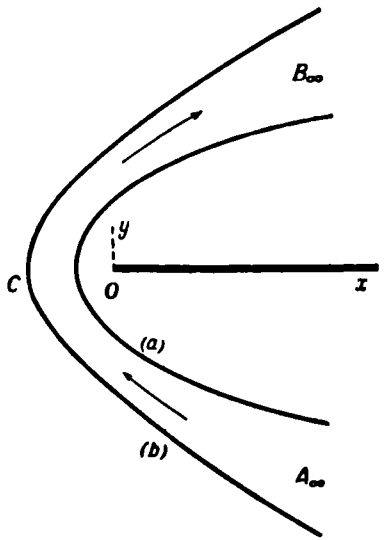


Рис. 341.

Если w является комплексным потенциалом, соответствующим уравнениям (4), то

$$w=\varphi+i\psi=\frac{-A}{2qe^{-i\theta}}=\frac{A}{2}\frac{dz}{dw}$$

и, следовательно, $w^2=Az$. Отсюда

$$Ax=\varphi^2-\psi^2, \quad Ay=2\varphi\psi,$$

$$y^2=\frac{4\psi^2}{A}\left(x+\frac{\psi^2}{A}\right).$$

Таким образом, здесь линии $\psi=\text{const}$ представляют собой софокусные параболы (см. пример 20 гл. 6).

Если из этих парабол взять какие-либо две [например, (a) и (b) на рис. 341] в качестве границ течения, то получим течение несжимаемой жидкости в плоском канале или внутри сопла. Поперечное сечение этого сопла меняется следующим образом. Начиная от сечения A_∞, где скорость равна нулю, сопло сужается. В точке C сопло имеет самое узкое сечение, а затем расширяется до сечения B_∞, где скорость снова равна нулю. Можно ожидать, что решения (2) и (3) представляют собой течения типа, подобного в каком-то отношении вышерассмотренному течению. Течение, описываемое уравнениями (2), изучил Ринглеб[1]), а течение, описываемое уравнениями (3), изучил Темпл.

20.33. Течение сжимаемого газа внутри сопла, которое сначала сужается, а затем расширяется. Рассмотрим течение, которое описывается уравнениями (2) п. 20.32. Здесь удобно заменить величину A на $4aq^2_{\max}$, тогда

$$\psi=-2aq_{\max}\tau^{-1/2}\sin\theta, \quad \varphi=-2aq_{\max}\tau^{-1/2}(1-\tau)^{-\beta}\cos\theta. \tag{1}$$

Из уравнения Бернулли в форме (2) п. 20.31 находим

$$d\varphi+\frac{i\varrho_0}{\varrho}d\psi=d\varphi+i(1-\tau)^{-\beta}\,d\psi.$$

---

[1]) Ringleb F., Exakte Lösungen der Differentialgleichung einer adiabatischen Gasströmung, *ZAMM*, 20 (1940), 185—198.

Тогда формула (2) п. 20.30 после некоторых преобразований примет вид

$$dz = 2a\left[i\tau^{-1}(1-\tau)^{-\beta} e^{2i\theta}\, d\theta + \frac{1}{2}\beta\tau^{-1}(1-\tau)^{-\beta-1}(1+e^{2i\theta})\, d\tau - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\,\tau^{-2}(1-\tau)^{-\beta} e^{2i\theta}\, d\tau \right].$$

Следовательно, после интегрирования получим формулу

$$\frac{z}{a} = \tau^{-1}(1-\tau)^{-\beta} e^{2i\theta} + \beta \int_{\alpha}^{\tau} \tau^{-1}(1-\tau)^{-\beta-1}\, d\tau, \tag{2}$$

где α — произвольная постоянная величина, значения которой находятся в интервале от 0 до 1. Выбор этой постоянной определяет только положение начала координат в физической плоскости.

Линии тока $\psi = \text{const}$ определяются путем исключения τ и θ из формулы (2) и первого из уравнений (1). Если положить

$$X = X(\tau) = a\beta \int_{\alpha}^{\tau} \tau^{-1}(1-\tau)^{-\beta-1}\, d\tau, \tag{3}$$
$$R = R(\tau) = a\tau^{-1}(1-\tau)^{-\beta},$$

то из формулы (2) находим

$$z = X + Re^{2i\theta}. \tag{4}$$

Следовательно, после исключения θ получим

$$(z-X)(\bar{z}-X) = R^2. \tag{5}$$

Таким образом, линии постоянной скорости ($\tau = \text{const}$) представляют собой окружности, центры которых $z = X(\tau)$ лежат на действительной оси, а радиусы равны $R(\tau)$. Кроме того,

$$\frac{dX}{d\tau} = \frac{a\beta}{\tau(1-\tau)^{\beta+1}}, \qquad \frac{dR}{d\tau} = \frac{a\tau(\beta+1)-a}{\tau^2(1-\tau)^{\beta+1}}. \tag{6}$$

Следовательно, когда τ увеличивается от нуля, величина X постоянно возрастает, а R уменьшается до минимального значения при $\tau = 1/(1+\beta)$, а затем снова возрастает.

Условие того, чтобы две соседние окружности из семейства (5), соответствующие значениям τ и $\tau+\delta\tau$, пересекались, состоит, как легко видеть, в следующем:

$$-\delta X < \delta R < \delta X.$$

Это означает, как показывают равенства (6), что

$$(2\beta+1)^{-1} < \tau < 1.$$

Отсюда, если воспользоваться формулами (1) п. 20.31 и (3) п. 1.63, находим

$$c^{*2} < q^2 < q_{\max}^2.$$

Следовательно, в сверхзвуковой области соседние окружности постоянной скорости всегда пересекаются, а в дозвуковой области, напротив, никогда не пересекаются. Критический случай имеет место тогда, когда две соседние окружности касаются друг друга. Тогда огибающая семейства (5) разделяет плоскость z на две области — одну, в которой соседние окруж-

ности постоянной скорости пересекаются, и другую, в которой они не пересекаются.

Чтобы найти эту огибающую, продифференцируем уравнение (5) по τ. Тогда с помощью равенства (4) получим

$$2R\frac{dR}{d\tau} = -\frac{dX}{d\tau}(z+\bar{z}-2X) = -2R\frac{dX}{d\tau}\cos 2\theta.$$

Применяя затем формулы (6), находим соотношение

$$\frac{1}{\tau} = 1+\beta(1+\cos 2\theta). \tag{7}$$

Таким образом, огибающая семейства (5) определяется соотношением (7) и двумя уравнениями, получающимися из равенства (4).

Если в равенстве (4) рассматривать τ как функцию от θ, определяемую соотношением (7), то в особой точке огибающей должно быть $dz/d\theta = 0$, что после простых преобразований дает равенство $\cos 2\theta = -1/(2\beta)$.

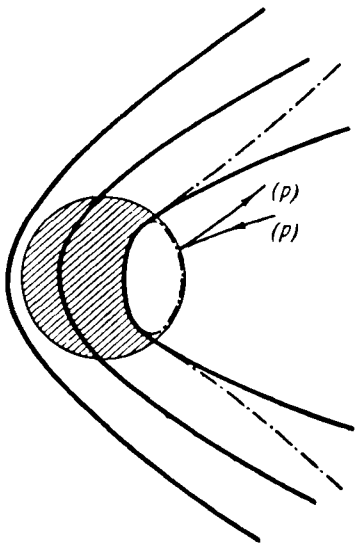


Рис. 342.

Соответствующее значение τ получается из соотношения (7) в виде

$$\tau = \frac{2}{2\beta+1}, \tag{8}$$

откуда $q = c^*\sqrt{2}$.

В этой точке огибающей две соседние окружности касаются друг друга, и, следовательно, эта особая точка является точкой возврата. В силу симметрии имеются две такие точки возврата, расположенные симметрично относительно оси x. На рис. 342 огибающая изображена штрих-пунктирной линией.

Если в плоскости годографа взять в качестве полярных координат τ и θ, то огибающая будет представлять собой эллипс, определяемый соотношением (7), а линии тока $\psi = \text{const}$ можно найти с помощью первого из уравнений (1). Исключая θ из формул (1) и (7), получим для τ квадратное уравнение

$$\frac{\beta\psi^2}{2a^2q_{\max}^2}\tau^2 - (2\beta+1)\tau + 1 = 0. \tag{9}$$

Таким образом, каждому значению ψ здесь соответствуют два значения τ; поэтому в области, где соседние окружности постоянной скорости пересекаются, получается физически невозможный характер течения. Линия тока (p), показанная на рис. 342, имеет на огибающей точку возврата.

Значения τ, определяемые уравнением (9), будут мнимыми при

$$\psi^2 > \frac{(2\beta+1)^2}{2\beta}a^2q_{\max}^2. \tag{10}$$

Критический случай имеет место тогда, когда в условии (10) вместо знака неравенства стоит знак равенства, т. е. при

$$-\frac{\psi}{2aq_{\max}} = \frac{2\beta+1}{\sqrt{8\beta}} = 1{,}342, \tag{11}$$

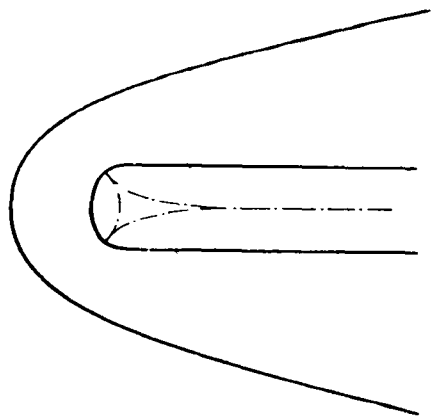
причем здесь для случая воздуха было принято $\beta = 2{,}5$. Соответствующая линия тока в плоскости годографа представляется кривой

$$\frac{2\beta+1}{\sqrt{8\beta}} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\tau}}, \tag{12}$$

которая проходит через точки возврата огибающей, причем τ здесь определяется формулой (8), а $\cos 2\theta = -1/2\beta$.

Эта линия тока изображена на рис. 342 жирной линией. Она касается огибающей в точках возврата и проходит в область за этой огибающей. Область справа от этой линии тока является «запретной» областью, в которой течение физически невозможно. Чтобы получить сопло, можно взять в качестве его твердых стенок любые две линии тока, расположенные левее указанной критической линии тока.

Отметим также, что окружность постоянной скорости, на которой $q = c^*$, определяется значением $\tau = 1/(2\beta+1)$. Тогда течение в части сопла, соответствующей области внутри этой окружности (заштрихованная область на рис. 342), является сверхзвуковым. Таким образом, течение Ринглеба, помимо того, что описывающее его решение точно удовлетворяет уравнениям в плоскости годографа, представляет собой еще и пример течения сжимаемого газа, в котором переход от дозвукового режима к сверхзвуковому и обратно происходит без скачка.



Р и с. 343.

Из формулы (12) следует также, что максимальное значение скорости, которое достигается на критической линии тока, имеет место при $\theta = \pi/2$ и равно

$$\tau = \tau_{max} = \frac{8\beta}{(2\beta+1)^2} = \frac{5}{9} \text{ (для воздуха)}.$$

Следовательно, максимальное значение местного числа Маха, которое достигается в течении Ринглеба, равно

$$M_{max} = \left(\frac{2\beta\tau_{max}}{1-\tau_{max}}\right)^{1/2} = 2{,}5 \text{ (для воздуха)}.$$

Аналогичное исследование можно провести и для решения (3) п. 20.32. Оказывается, что здесь кривые постоянной скорости представляют собой трохоиды, которые имеют огибающую с двумя точками возврата. Критическая линия тока проходит через точки возврата и разделяет течение на две области, в одной из которых течение физически невозможно, а в другой, напротив, возможно (рис. 343). В этом случае течение из дозвукового переходит в сверхзвуковое и затем обратно без скачка. Максимальное число Маха для воздуха достигает здесь значения, примерно равного 2.

Сравнивая рисунки, приведенные в этом пункте, с рис. 341, видим, что в несжимаемом случае «запретная» область течения вырождается в прямую линию.

20.40. Движущееся возмущение. Прежде чем обратиться к сверхзвуковому течению, рассмотрим одну специальную задачу. Пусть в неподвижном воздухе в некоторой точке P возникает слабое мгновенное возмущение, такое, как, например, резкий звук.

Такое возмущение будет распространяться в виде сферической волны, центр которой находится в точке P и которая движется со скоростью звука c. Следовательно, в момент времени t, $2t$, $3t$, . . . возмущение достигнет точек, которые лежат на концентрических сферах радиусов ct, $2ct$, $3ct$, . . . с центром в точке P (рис. 344). Но если воздух не покоится, а движется слева направо

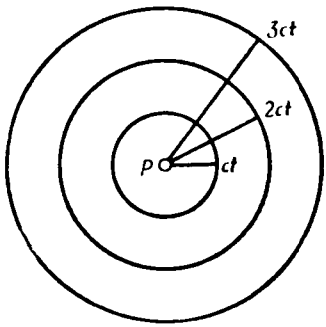


Рис. 344.

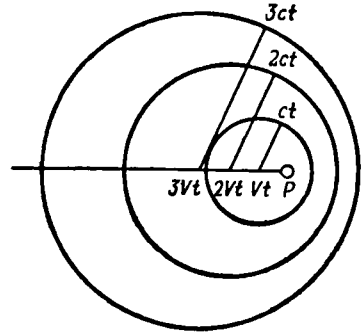


Рис. 345.

со скоростью V, то точки, которых возмущение достигает в моменты времени nt, будут лежать на сферах радиусов nct с центрами, расположенными на расстояниях Vnt от точки P. Если $V < c$, то эти сферы не будут пересекать друг друга, и, как это показано на рис. 345, в этом случае возмущение достигнет в конце концов любой наперед заданной точки пространства.

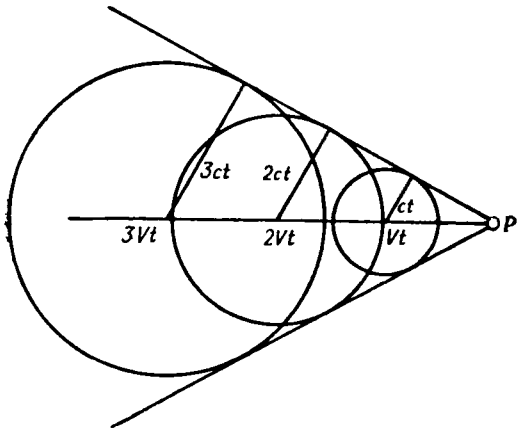


Рис. 346.

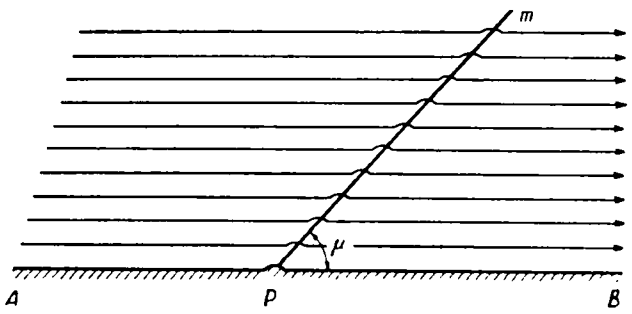
Однако если $V > c$, то картина будет иной (рис. 346), так как в этом случае возмущения никогда не достигнут точек, лежащих вне конуса, у которого вершина находится в точке P, ось направлена по скорости V, а угол раствора равен 2μ, где $\sin \mu = c/V = 1/M$. Угол μ называется *углом Маха*, а соответствующий конус — *конусом Маха*.

В плоском движении конус Маха переходит в клин, а линии, по которым этот клин пересекает плоскость движения, называются *линиями Маха*.

Аналогичное явление наблюдается и тогда, когда равномерный поток со скоростью $V > c$ течет параллельно стенке (рис. 347), которая является гладкой всюду, за исключением одной точки P, где имеется небольшая неровность (такая, например, как выступающий шов). В точке P возникает возмущение, которое непрерывно поддерживается набегающим потоком, когда он достигает точки P. Волны, непрерывно возникающие в точке P, создают заметное возмущение только там, где они расположены наиболее концентрированно, т. е. на линии Маха m, исходящей из точки P. В установившемся движении возмущение в любой точке на линии Маха m будет одинаковым; при перемещении от стенки вдоль линии m возмущение не затухает (по крайней мере теоретически). Если на стенке имеется несколько таких небольших неровностей, то каждая из них будет вызывать свою линию Маха. Вдоль такой линии плотность воздуха несколько отличается от плотности невозмущенного,

течения, и это обстоятельство делает возможным фотографирование линий Маха, существование которых, таким образом, хорошо подтверждается.

Из сказанного выше ясно, что сверхзвуковое течение, в котором скорость воздуха превосходит критическое значение, отличается физически от дозвуко-



Р и с. 347.

вого течения. Математически это проявляется в том, что дифференциальные уравнения меняют свой тип, переходя из эллиптических в гиперболические.

20.41. Характеристики. Рассмотрим геометрическую поверхность C, которая предполагается движущейся в газе. Пусть точка P, принадлежащая этой поверхности, имеет скорость $\mathbf{q}_C$ и пусть $\mathbf{q}$ представляет собой скорость той частицы газа, с которой точка P совпадает в данный момент. Тогда скорость точки P этой поверхности относительно газа будет равна $(\mathbf{q}_C - \mathbf{q})$.

Определение. *Характеристикой* называется поверхность, которая движется в газе таким образом, что в каждой точке P этой поверхности величина составляющей скорости относительно газа в направлении нормали к этой поверхности равна местной скорости звука.

Следовательно, в символической форме

$$\mathbf{n}(\mathbf{q}_C - \mathbf{q}) = \pm c,$$

где c — скорость звука в точке P, а $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к характеристической поверхности в точке P.

Поскольку малые возмущения распространяются со скоростью звука (см. п. 14.86), то отсюда следует, что фронт волны, вызванной малым возмущением, является характеристикой [1]).

20.42. Характеристики в установившемся движении. В случае плоского установившегося движения, которое мы здесь только и будем рассматривать [2]), характеристики представляют собой *неподвижные* цилиндрические поверхности, которые пересекают плоскость движения по некоторой кривой. Таким образом,

$$\mathbf{nq} = \pm c \quad \text{или} \quad q_n = \pm c, \tag{1}$$

где q_n — нормальная составляющая *скорости газа*.

Итак, если линия PT_1 (рис. 348) представляет собой касательную к характеристике C_1 и если $\overrightarrow{PQ}$ — есть вектор скорости газа в точке P, то проекция PQ на нормаль в этой точке P будет равна скорости звука c. Далее, если μ —

[1]) Levi-Civita T., Caratteristiche e propagazione ondosa, Bologna, 1931.

[2]) Теорию характеристик можно применять также в осесимметричных установившихся движениях. Для простоты изложения здесь мы рассматриваем только плоский случай.

острый угол между касательной к характеристике и вектором скорости, то

$$\sin\mu = \frac{c}{q} = \frac{1}{M}. \qquad (2)$$

Угол μ называется углом Маха (см. п. 20.40).

Из формулы (2) ясно, что угол Маха может существовать только для числа Маха $M \geqslant 1$. Следовательно, действительные характеристики в смысле

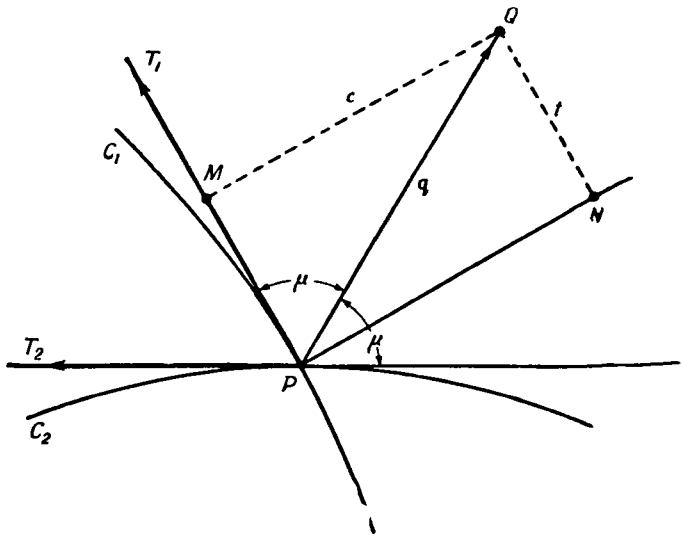


Рис. 348.

данного выше определения существуют только там, где течение является сверхзвуковым. Из рис. 348 и формулы (2) следует также, что имеются два возможных направления касательной к характеристике в точке P, а именно PT_1 и T_2P, каждое из которых образует угол μ с направлением скорости PQ. Таким образом, в сверхзвуковом течении газа через каждую точку проходят две характеристики.

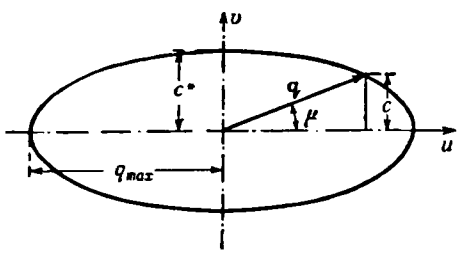


Рис. 349.

Направление характеристик можно просто найти с помощью адиабатного эллипса (рис. 349), уравнение которого в плоскости годографа в декартовых координатах u, v имеет вид

$$\frac{u^2}{q_{\max}^2} + \frac{v^2}{c^{*2}} = 1.$$

Чтобы с помощью этого эллипса [1]) определить направление касательных к характеристикам в точке P, проведем из точки P вектор скорости $\vec{PQ} = \mathbf{q}$ и расположим эллипс так, чтобы центр его находился в точке P, а сам он проходил через точку Q. При этом возможны два положения эллипса, в каждом из которых большая ось эллипса будет направлена вдоль касательной к соответствующей характеристике в точке P.

Что касается знака направления касательных к характеристикам, то можно условиться принимать за положительное направление нормали такое

[1]) В соответствии с п. 1.63, $c^*/q_{\max} = \sqrt{(\gamma-1)/(\gamma+1)}$, поэтому для различных значений γ все адиабатные эллипсы подобны.

направление, которое образует острый угол с вектором скорости, а за положительное направление касательных PT_1 и PT_2 принимать такое направление, которое получается поворотом нормали на прямой угол против часовой стрелки. В таком случае касательная PT_1 на рис. 350 составляет угол μ с вектором $\mathbf{q}$, а касательная PT_2 — угол $\pi - \mu$.

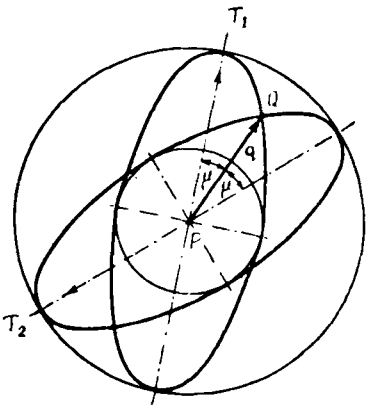


Рис. 350.

Соответствующие касательные составляющие скорости имеют вид $q\cos\mu = t$ и $-q\cos\mu = -t$.

Нормальные составляющие скорости по определению в обоих случаях равны c, и поэтому уравнение Бернулли (4) п. 1.63 дает

$$c^2 = k^2(q_{\max}^2 - q\cos^2\mu) = k^2(q_{\max}^2 - t^2), \quad (3)$$

$$k^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{c^{*2}}{q_{\max}^2}. \quad (4)$$

Линии Маха, рассмотренные в п. 20.40, аналогичны характеристикам, изученным в этом пункте. Для установившегося движения термины «линия Маха» и «характеристика» по существу равнозначны.

20.43. Изменение скорости вдоль характеристики. Для установившегося плоского течения уравнение неразрывности (3) п. 19.82 имеет вид

$$\frac{\partial(\varrho q)}{\partial s} + \varkappa_n \varrho q = 0, \quad (1)$$

где ds — элемент дуги линии тока, $\varkappa_n = \partial\theta/\partial n$ — кривизна ортогональной траектории к этому элементу. Здесь θ — угол, который касательная к линии тока составляет с некоторым произвольно выбранным направлением.

Если, кроме того, течение является безвихревым, то $\zeta = 0$, и поэтому, согласно уравнению (4) п. 19.82, получим

$$\frac{\partial q}{\partial n} = \varkappa_s q = q\frac{\partial\theta}{\partial s}, \quad (2)$$

где $\varkappa_s = \partial\theta/\partial s$ — кривизна линии тока. Предположим теперь, что течение является гомэнергетическим. Тогда по уравнению Крокко из п. 20.01 следует, что это течение является также изэнтропическим. Таким образом, формула (3) п. 1.61

$$q\,dq = -\frac{dp}{\varrho} = -c^2\frac{d\varrho}{\varrho} \quad (3)$$

будет иметь место не только для линии тока, но и для любого другого направления.

Из уравнений (1) и (3) последовательно получим

$$\varkappa_n q = -\frac{\partial q}{\partial s} - \frac{q}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial s} = -\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{q^2}{c^2}\frac{\partial q}{\partial s},$$
$$\frac{\partial q}{\partial s} = \varkappa_n q\,\mathrm{tg}^2\mu = q\,\mathrm{tg}^2\mu\frac{\partial\theta}{\partial n}. \quad (4)$$

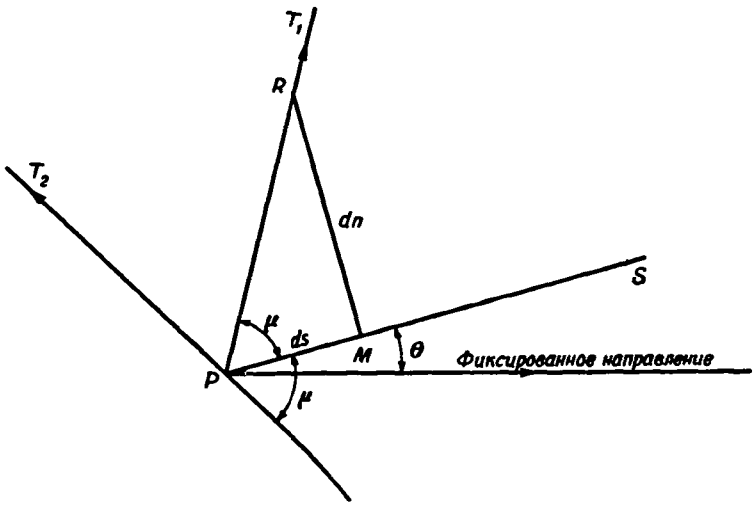
Рассмотрим теперь изменение скорости q при перемещении по характеристике от точки P до некоторой соседней точки R. Пусть касательная PT_1 к характеристике образует острый угол μ с касательной PS (рис. 351)

к линии тока, проходящей через точку P. Из формул (2) и (4) имеем

$$dq = \frac{\partial q}{\partial s}\,ds + \frac{\partial q}{\partial n}\,dn = q\left(\operatorname{tg}^2\mu\,\frac{\partial \theta}{\partial n}\,ds + q\,\frac{\partial \theta}{\partial s}\,dn\right).$$

Но, как видно из рис. 351, $dn = ds\operatorname{tg}\mu$ и поэтому

$$dq = q\operatorname{tg}\mu\left(\frac{\partial \theta}{\partial n}\,dn + \frac{\partial \theta}{\partial s}\,ds\right) = q\operatorname{tg}\mu\,d\theta,$$



Р и с. 351.

т. е. вдоль PT_1 имеем равенство

$$\frac{q\,d\theta}{dq} = \operatorname{ctg}\mu. \tag{5}$$

Для другой характеристики, проходящей через точку P, при замене μ на $\pi - \mu$ вдоль PT_2 выполняется равенство

$$\frac{q\,d\theta}{dq} = -\operatorname{ctg}\mu. \tag{6}$$

20.44. Характеристические координаты. Рассмотрим характеристику, касательная PT_1 к которой образует в точке P угол μ с вектором скорости. Если t — составляющая скорости q вдоль PT_1, то $t = q\cos\mu$, и поэтому с помощью равенства (5) п. 20.43 получим

$$dt = \cos\mu\,dq - q\sin\mu\,d\mu = q\sin\mu\,(d\theta - d\mu).$$

Используя формулу (3) п. 20.42 и замечая, что $q\sin\mu = c$, находим

$$d\theta - d\mu = \frac{dt}{c} = \frac{dt}{k\sqrt{q_{\max}^2 - t^2}},$$

$$\theta - \mu = \frac{1}{k}\arcsin\frac{t}{q_{\max}} - \frac{1}{2}\pi + \alpha,$$

где $\left(\alpha - \frac{1}{2}\pi\right)$ — произвольная постоянная интегрирования. Для критической скорости звука $q = c^*$ получаем $\mu = \frac{1}{2}\pi$, и, следовательно, $\theta = \alpha$.

С помощью формулы (3) п. 20.42 еще раз получим

$$\arcsin\frac{t}{q_{\max}}=\operatorname{arctg}\frac{kt}{c}=\operatorname{arctg}(k\operatorname{ctg}\mu).$$

Таким образом,

$$\theta=\mu+\frac{1}{k}\operatorname{arctg}(k\operatorname{ctg}\mu)-\frac{1}{2}\pi+\alpha. \tag{1}$$

Далее, из уравнения Бернулли (4) п. 1.63, полагая $c=q\sin\mu$, найдем

$$q^2=\frac{q_{\max}^2}{1+\dfrac{2\sin^2\mu}{\gamma-1}}. \tag{2}$$

Следовательно, формулы (1) и (2) определяют полярные координаты q, θ точек той характеристики в плоскости годографа, которая образует острый угол μ с вектором скорости q. Различные характеристики этого семейства можно получить, изменяя величину α. Обозначим

$$f(\mu)=\mu+\frac{1}{k}\operatorname{arctg}(k\operatorname{ctg}\mu)-\frac{1}{2}\pi \tag{3}$$

и заметим, что $f(\pi-\mu)=-f(\mu)$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\theta-f(\mu)=\alpha. \tag{4}$$

Соответствующее уравнение для семейства характеристик, которые образуют угол $\pi-\mu$ с вектором скорости q, имеет вид

$$\theta+f(\mu)=\beta. \tag{5}$$

Итак, уравнения (4) и (5) представляют собой уравнения двух семейств характеристик в плоскости годографа. На характеристиках первого семейства постоянна величина α, а на характеристиках второго семейства постоянна величина β. Таким образом, α и β являются некоторыми криволинейными координатами. Для заданных α и β точка в поле течения определяется пересечением двух соответствующих характеристик. Каждой точке в поле течения соответствует пара чисел α, β. Следовательно, если α и β известны в каждой точке течения, то течение тем самым полностью определено, потому что при этом могут быть построены характеристики и получены линии тока, как это будет объяснено ниже.

Практическое применение метода характеристик упрощается, если ввести новые обозначения. Путь D — величина θ в градусах, $P=1000-$[величина $f(\mu)$ в градусах].

Тогда уравнения (4) и (5) можно заменить на следующие:

$$P+D=2A, \qquad P-D=2B, \tag{6}$$

где A и B — новые постоянные интегрирования. Таким образом,

$$P=A+B, \qquad D=A-B. \tag{7}$$

Заметим, что по заданному значению P можно определить μ по формуле (3), q^2 — по формуле (2) и, следовательно, можно вычислить давление. По этой причине Буземан назвал величину P *числом, определяющим давление*. Темпл [1]) употребил для величины D термин *число, определяющее направление скорости*; эта величина представляет собой угол между местным

[1]) Temple G., The method of characteristics in supersonic flow, *R. and M.*, № 2091 (1944). Излагаемое нами описание метода характеристик, первоначально развитого Буземаном, основано на этой статье Темпла.

направлением скорости течения и некоторой произвольной фиксированной линией.

Для облегчения расчетов течения воздуха ($\gamma = 1{,}405$) по методу характеристик в нижеследующей таблице даются соответствующие значения величин P, p/p_0 и μ.

Таблица

Число, определяющее давление P	p/p_0	Угол Маха μ, *град*	Число, определяющее давление P	p/p_0	Угол Маха μ, *град*	Число, определяющее давление P	p/p_0	Угол Маха μ, *град*
1000	0,527	90,00	981	0,189	35,02	962	0,062	23,98
999	0,479	67,70	980	0,179	34,26	961	0,058	23,54
998	0,449	61,96	979	0,170	33,50	960	0,054	23,12
997	0,424	58,18	978	0,161	32,80	959	0,051	22,70
996	0,401	55,15	977	0,153	32,10	958	0,047	22,29
995	0,381	52,66	976	0,145	31,41	957	0,044	21,89
994	0,363	50,58	975	0,137	30,80	956	0,041	21,49
993	0,345	48,70	974	0,130	30,19	955	0,038	21,11
992	0,329	47,07	973	0,123	29,58	954	0,036	20,73
991	0,313	45,54	972	0,116	28,98	953	0,033	20,37
990	0,298	44,16	971	0,110	28,42	952	0,031	20,00
989	0,284	42,84	970	0,104	27,88	951	0,029	19,64
988	0,270	41,62	969	0,097	27,34	950	0,027	19,31
987	0,257	40,51	968	0,092	26,82	949	0,025	18,93
986	0,245	39,48	967	0,086	26,32	948	0,023	18,59
985	0,233	38,47	966	0,080	25,80	947	0,021	18,26
984	0,221	37,53	965	0,075	25,33	946	0,019	17,97
983	0,210	36,67	964	0,071	24,87			
982	0,199	35,82	963	0,066	24,42	870,68	0,000	0,00

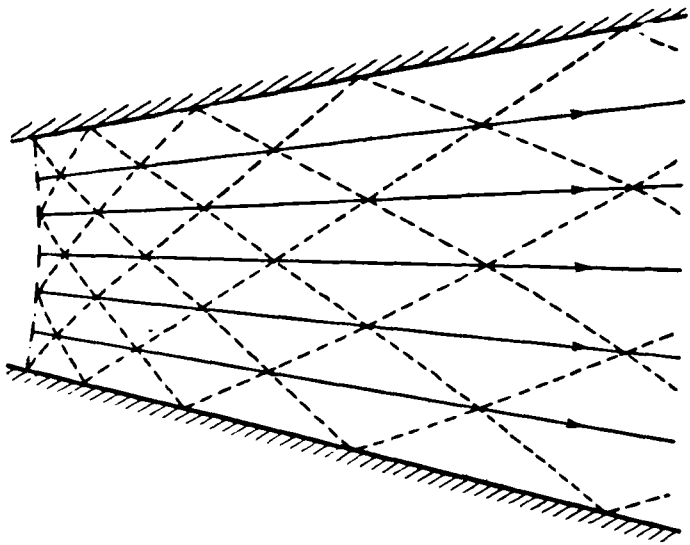
20.45. Сопло с прямыми стенками. На рис. 352 показано несколько характеристик и линий тока для сверхзвукового течения внутри расширяющегося плоского сопла с прямыми стенками. Такое течение можно рассматривать как течение, вызванное источником (см. п. 8.90), помещенным в точке пересечения стенок сопла. Характеристики течения разбивают поле на ромбовидные ячейки.

Через вершину каждой ячейки проходят две характеристики; вдоль одной из них постоянна величина A, а вдоль другой постоянна величина B.

Можно провести приближенный расчет поля течения, если криволинейную сторону каждой ячейки заменить прямой линией. Криволинейная сторона, представляющая собой дугу характеристики семейства $A = \text{const}$, соединяет две вершины ячейки, координаты которых равны, например, величинам A, B и A, $B - \varepsilon$.

С некоторой степенью точности, которая зависит от малости величины ε, прямая линия, соединяющая эти вершины ячейки, будет параллельна той характеристике семейства $A = \text{const}$, которая проходит через точку с координатами A, $B - \frac{1}{2}\varepsilon$ (рис. 353). Угол между линией и местным направлением скорости течения является углом Маха, который соответствует числу, определяющему давление, $P = A + B - \frac{1}{2}\varepsilon$. Местное направление скорости течения получается по числу, определяющему направление скорости, $D = A - B + \frac{1}{2}\varepsilon$.

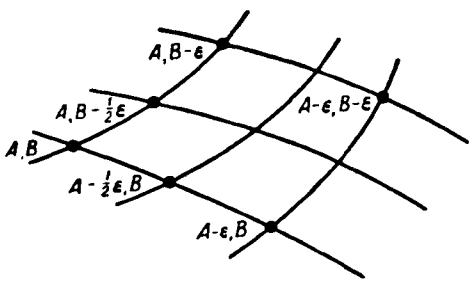
Аналогично этому прямая линия, соединяющая точки с координатами A, B и $A - \varepsilon, B$, будет приблизительно параллельна характеристике семейства



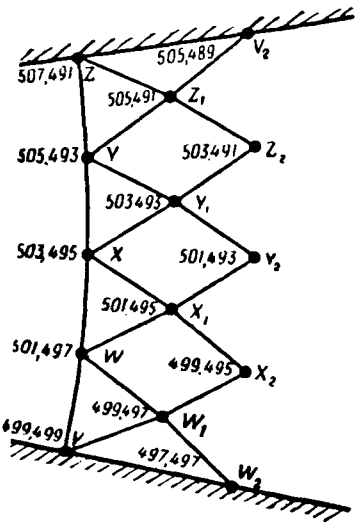
Р и с. 352.

$B = \text{const}$, которая проходит через точку $A - \frac{1}{2}\varepsilon, B$. Угол, который эта прямая образует с местным направлением скорости течения, является углом Маха μ, который соответствует значению $P = A + B - \frac{1}{2}\varepsilon$, а местное направление скорости течения определяется величиной $D = A - B - \frac{1}{2}\varepsilon$.

Чтобы построить диаграмму поля течения, подобную той, которая изображена на рис. 352, следуя Темплу, предположим, что нам *задана* величина давления в сечении сопла VZ (рис. 354), равная $p = 0{,}449p_0$. Тогда из таблицы находим соот-



Р и с. 353.



Р и с. 354.

ветствующее значение числа, определяющего давление, оно равно $P = 998$. Предположим, далее, что угол между стенками сопла равен 16°. Разделим дугу VZ на четыре равные части точками W, X, Y.

Примем, далее, линию стенки сопла, проходящую через точку V, в качестве начальной линии, от которой измеряются направления. Тогда числа, определяющие направление скорости, в точках V, W, X, Y, Z будут равны 0, 4, 8, 12, 16. Таким образом, характеристические координаты этих точек соответственно будут (499,499), (501,497), (503,495), (505,493), (507,491).

Следующий шаг состоит в проведении линий VW_1, W_1W, WX_1, X_1X и т. д. Покажем, как рассчитывается одна типичная точка, например точка X_1.

Точка X лежит на характеристике A = const, проходящей через точку W (501,497), и на характеристике B = const, проходящей через точку X (503,495). Следовательно, точка X_1 является точкой с характеристическими координатами (501,495). Поэтому прямая WX_1 имеет такое же направление, что и та характеристика семейства A = const, которая проходит через точку с координатами (501,496).

Число, определяющее давление, в этой точке равно $P = 501 + 496 = 997$, а число, определяющее направление скорости, $D = 501 - 496 = 5$. По таблице находим соответствующий угол Маха, он равен $\mu = 58°,18$. С помощью транспортира проведем через точку W прямую линию, которая составляет угол $D + \mu = 5° + 58°, 18$ с направлением стенки, проходящей через точку V. Аналогично проведем через точку X прямую линию, имеющую то же направление, что характеристика семейства B = const, проходящая через точку с координатами (502,495). Пересечение этих двух прямых линий и определяет точку X_1. После того как рассчитаны точки V_1, W_1, X_1, Y_1, Z_1, можно перейти к расчету точек W_2, X_2, Y_2, Z_2 и т. д.

Мы проиллюстрировали расчет методом характеристик в случае сопла с прямыми стенками. Если стенки являются криволинейными, то их приближенно заменяют ломаной, у которой угол наклона двух последовательных звеньев отличается на выбранную величину ε.

Применение рассмотренной схемы метода характеристик ограничено непрерывными течениями без ударных волн, на возникновение которых указывает пересечение соседних характеристик одного семейства и появление огибающей этих характеристик.

20.50. Обтекание угла. Рассмотрим поток газа, текущий с постоянной скоростью параллельно прямой стенке AB. Пусть эта стенка в угловой точке B

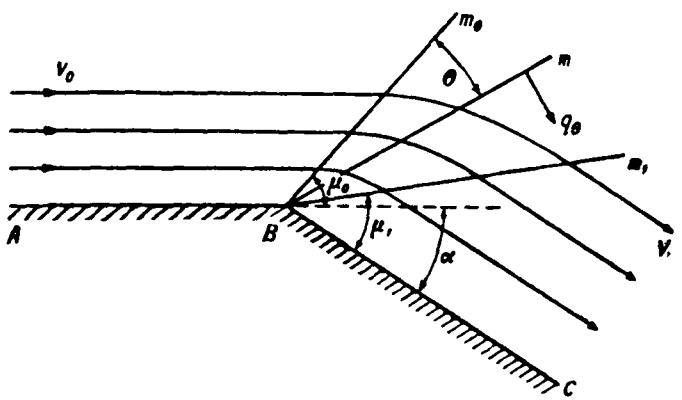


Рис. 355.

отклоняется вниз от потока, имея торой прямолинейный участок BC. Для равномерного потока угол Маха известен и определяется равенством $\sin \mu_0 = c_0/V_0$. В рассматриваемом течении поток будет разворачиваться около угла B, начиная от прямой характеристики или линии Маха m_0 (рис. 355). Пред-

положим, что конечное состояние газа представляет собой равномерный поток со скоростью V_1, параллельной стенке BC. Тогда поворот будет полностью завершен на второй прямой линии Маха m_1. Метод характеристик сразу показывает, что все линии Маха, выходящие из точки B, будут прямыми и что на любой из этих линий Маха (скажем, m) скорость в каждой точке будет одна и та же. Если φ — потенциал скоростей, то отсюда следует, что составляющие скорости

$$q_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \qquad q_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \tag{1}$$

не зависят от r. Кроме того, поскольку m является характеристикой, то $q_\theta = c$ и, следовательно, уравнение Бернулли (4) п. 1.63 дает

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)^2 = c^2 = \frac{1}{2}(\gamma - 1)\left[q_{\max}^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)^2\right]. \tag{2}$$

Поскольку q_r и q_θ не зависят от r, то попытаемся удовлетворить уравнениям (1) и (2), полагая

$$\varphi = rf(\theta), \tag{3}$$

где $f(\theta)$ не зависит от r. Тогда, подставляя функцию (3) в уравнение (2), получаем с помощью формулы (4) п. 20.42 следующий результат:

$$\frac{1}{k^2}[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2 = q_{\max}^2.$$

Это уравнение имеет очевидное решение

$$f(\theta) = -q_{\max}\sin(k\theta + \varepsilon),$$

где ε — произвольная постоянная. Так как $c^* = kq_{\max}$, то отсюда

$$q_r = q_{\max}\sin(k\theta + \varepsilon), \qquad q_\theta = c^*\cos(k\theta + \varepsilon). \tag{4}$$

Будем измерять угол θ от начальной линии Маха m_0. Тогда при $\theta = 0$ получаем

$$q_{\max}\sin\varepsilon = V_0\cos\mu_0, \qquad c^*\cos\varepsilon = V_0\sin\mu_0,$$

так что

$$\operatorname{tg}\varepsilon = k\operatorname{ctg}\mu_0 = k\sqrt{M_0^2 - 1}, \tag{5}$$

где M_0 — число Маха набегающего потока, имеющего скорость V_0. Найдем положение линии Маха m_1. На этой линии имеем $\theta = \theta_1 = \mu_0 + \alpha - \mu_1$, где α — угол, который прямая BC образует с AB, т. е. угол, на который поворачивается набегающий поток. Тогда

$$V_1\cos\mu_1 = q_{\max}\sin(k\theta_1 + \varepsilon), \qquad V_1\sin\mu_1 = c^*\cos(k\theta_1 + \varepsilon). \tag{6}$$

Деля эти уравнения одно на другое, получаем формулу для μ_1; величина V_1 определяется, далее, из равенств (6). Для определения давления имеем

$$\frac{\gamma p}{\varrho} = c^2 = q_\theta^2 = c^{*2}\cos^2(k\theta + \varepsilon).$$

Но

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^\gamma \quad \text{и} \quad c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\varrho_0} = \frac{1}{2}(\gamma + 1)c^{*2}.$$

Поэтому

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{2\cos^2(k\theta + \varepsilon)}{\gamma + 1}. \tag{7}$$

Физически возможное максимальное значение θ соответствует нулевому значению давления ($p=0$), т. е.

$$k\theta_{\max}+\varepsilon=\frac{1}{2}\pi. \tag{8}$$

Следовательно, если $\alpha+\mu_0>\theta_{\max}$, т. е. если

$$\alpha>\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\pi-\varepsilon\right)-\mu_0, \tag{9}$$

то газ не будет прилегать к стенке BC, а будет отделен от нее областью вакуума, которая ограничена стенкой BC и линией $\theta=\theta_{\max}$, одновременно являющейся линией тока и характеристикой.

Если стенка не имеет излома, а представляет собой непрерывно изогнутую кривую, то ее можно заменить приближенно ломаной линией и решение получить предельным переходом. Однако в этом случае проще пользоваться методом характеристик.

Наконец, отметим, что рассмотренное течение является безвихревым и гомэнтропическим, поэтому оно обратимо. Течение, изображенное на рис. 355, представляет собой течение разрежения, т. е. давление и плотность уменьшаются в направлении течения, а линия Маха m_0 отклонена в сторону от набегающего потока. Если обратить направление движения на всех линиях тока, то характеристика m_1 будет отклонена в сторону набегающего потока со скоростью V_1 и течение будет течением сжатия, сопровождающимся увеличением давления и плотности.

20.60. Ударные волны. Если метод решения, развитый в п. 20.50 для расчета обтекания выпуклой стенки, попытаться применить для случая вогнутой стенки, то можно обнаружить, что здесь линии Маха имеют огибающую E (рис. 356).

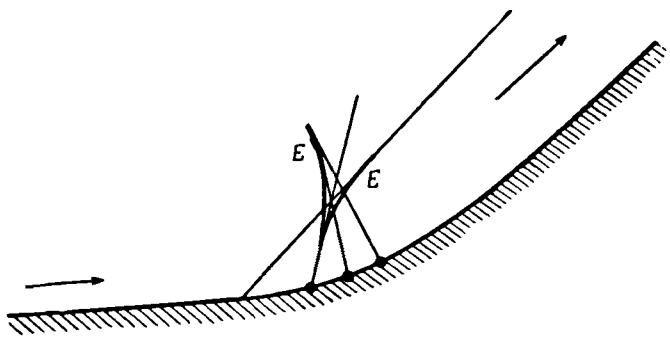


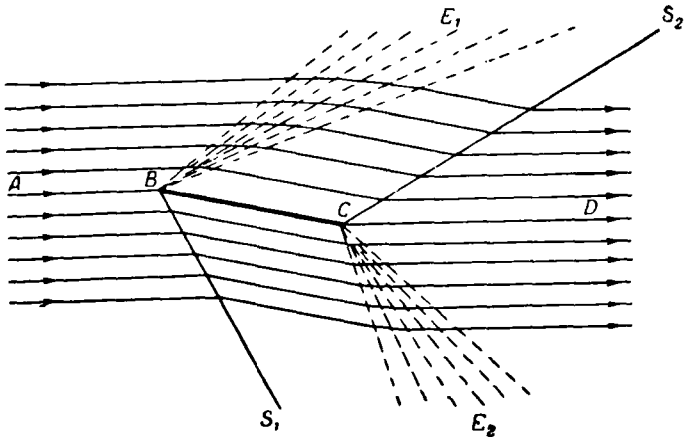
Рис. 356.

Это обстоятельство повлекло бы за собой математически неопределимое состояние течения, когда скорость газа определялась бы неединственным образом. Такое состояние физически невозможно. Экспериментальные наблюдения показывают, что в этом случае возникает *ударная волна* (*скачок уплотнения*), которая начинается в точке возврата огибающей и проходит между двумя ее ветвями. При пересечении этой линии нормальная составляющая скорости скачкообразно уменьшается [1]), а плотность, давление, температура

[1]) Ниже будет установлено, что касательная составляющая скорости при этом не изменяется; поэтому полная скорость при переходе через ударную линию всегда уменьшается.

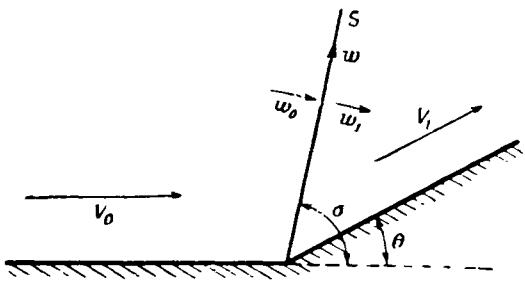
и энтропия скачкообразно увеличиваются. На рис. 357 изображены течение со скачком уплотнения и течение разрежения, имеющие место при обтекании плоского профиля BC.

Здесь прямая линия тока AB подходит к профилю в точке B, а прямая линия тока CD сходит с него в точке C.



Р и с. 357.

На *верхней поверхности* у излома ABC имеется течение разрежения E_1, в котором набегающий поток разворачивается так, что становится параллельным BC. Затем поток обтекает вогнутый излом BCD и проходит через скачок уплотнения S_2, возникающий в точке C. Аналогично на *нижней поверхности* имеют место скачок уплотнения S_1 в точке B и течение разрежения в точке C.



Р и с. 358.

Рассмотрим прямолинейную стационарную ударную волну, которая образуется при обтекании тупого угла $\pi - \theta$ (рис. 358).

Пусть индекс 0 относится к условиям перед скачком уплотнения S, а индекс 1 — к условиям за этим скачком, так что V_0 является скоростью набегающего потока, а V_1 — скоростью потока, отклонившегося после прохода через скачок. Пусть скачок S составляет угол σ с направлением скорости V_0. Обозначим через w_0 и w_1 составляющие скоростей V_0 и V_1, перпендикулярные к S. Возьмем элемент dl скачка S и рассмотрим условия до и после него. Согласно уравнению неразрывности, поток массы при переходе через скачок должен сохраняться, т. е.

$$\varrho_0 w_0 = \varrho_1 w_1. \qquad (1)$$

Поскольку сила давления действует по нормали к dl, то при переходе через скачок также сохранится поток количества движения в направлении,

параллельном S. Следовательно,

$$\varrho_0 w_0 V_0 \cos\sigma = \varrho_1 w_1 V_1 \cos(\sigma - \theta). \tag{2}$$

Разность сил давления на элементе скачка dl должна равняться изменению нормальной составляющей потока количества движения при переходе через dl. Следовательно,

$$p_1 - p_0 = \varrho_0 w_0^2 - \varrho_1 w_1^2. \tag{3}$$

Уравнения (1) — (3) представляют собой обычные законы сохранения механики. Четвертое соотношение получим, применяя закон сохранения энергии и рассматривая при этом также и тепловую энергию.

Если E — внутренняя энергия, приходящаяся на единицу массы воздуха, то полная энергия на единицу массы будет равна $E + \frac{1}{2}V^2$. Приравняем поток энергии и работу в единицу времени, совершаемую силами давления. Тогда

$$p_0 w_0 - p_1 w_1 = \varrho_1 w_1 \left(E_1 + \tfrac{1}{2} V_1^2\right) - \varrho_0 w_0 \left(E_0 + \tfrac{1}{2} V_0^2\right).$$

Отсюда с учетом уравнения (1) получим

$$\frac{p_0}{\varrho_0} + E_0 + \frac{1}{2} V_0^2 = \frac{p_1}{\varrho_1} + E_1 + \frac{1}{2} V_1^2.$$

С помощью формулы (14) п. 20.01 находим

$$\frac{\gamma p_0}{(\gamma - 1)\varrho_0} + \frac{1}{2} V_0^2 = \frac{\gamma p_1}{(\gamma - 1)\varrho_1} + \frac{1}{2} V_1^2 = \frac{1}{2} q_{\max}^2. \tag{4}$$

Согласно уравнению Бернулли, каждое из первых двух слагаемых в уравнении (4) равняется соответствующей величине $^1/_2 q_{\max}^2$. Из этого следует, что $q_{\max}$ не изменяется при переходе через скачок.

Уравнение (4) имеет такую же форму, что и уравнение Бернулли, но состояние газа, характеризующееся параметрами (p_0, ϱ_0) и (p_1, ϱ_1), соответствует здесь различным значениям энтропии. Таким образом, уравнение (4) не может быть выведено из закона для изэнтропического течения, на котором основано уравнение Бернулли. Увеличение энтропии определяется по формуле (11) п. 20.01 в виде

$$S_1 - S_0 = c_v \ln \frac{p_1 \varrho_0^\gamma}{p_0 \varrho_1^\gamma}.$$

Из уравнений (1) и (2) следует, что касательная составляющая скорости, параллельная фронту скачка, при переходе через скачок не изменяется. Обозначив эту составляющую скорости через w, из соотношения (4) находим равенства

$$\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\varrho_0} = q_{\max}^2 - w^2 - w_0^2, \qquad \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\varrho_1} = q_{\max}^2 - w^2 - w_1^2.$$

С помощью этих равенств заменим p_0 и p_1 в уравнении (3) и исключим далее ϱ_0 и ϱ_1 посредством соотношения (1). Тогда после простых преобразований получим следующее соотношение, принадлежащее Прандтлю:

$$w_0 w_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (q_{\max}^2 - w^2) = c^{*2} - k^2 w^2. \tag{5}$$

При выводе соотношения (5) использована формула (4) п. 20.42.

Замечая, что $w_0 = V_0 \sin\sigma$ и $w_1 = V_1 \sin(\sigma - \theta)$, легко преобразуем уравнения (2) — (4) к следующей системе:

$$V_0 \cos\sigma = V_1 \cos(\sigma - \theta), \tag{6}$$

$$p_0 + \varrho_0 V_0^2 \sin^2\sigma = p_1 + \varrho_1 V_1^2 \sin^2(\sigma - \theta), \tag{7}$$

$$\frac{\gamma p_0}{(\gamma-1)\varrho_0} + \frac{1}{2} V_0^2 \sin^2\sigma = \frac{\gamma p_1}{(\gamma-1)\varrho_1} + \frac{1}{2} V_1^2 \sin^2(\sigma - \theta), \tag{8}$$

причем последнее из этих уравнений получено путем возведения в квадрат обеих частей равенства (6), делением их на два и вычитанием этого результата из равенства (4).

Полагая

$$\Delta\varrho_0 = \varrho_1 - \varrho_0, \qquad \Delta p_0 = p_1 - p_0,$$

после некоторых простых преобразований находим из уравнений (1) и (6) равенство

$$1 + \frac{\Delta\varrho_0}{\varrho_0} = \frac{\operatorname{tg}\sigma}{\operatorname{tg}(\sigma - \theta)}; \tag{9}$$

из уравнений (1) и (3) находим равенство

$$\Delta p_0 = \varrho_0 V_0^2 \sin^2\sigma \frac{\Delta\varrho_0}{\varrho_0 + \Delta\varrho_0} \tag{10}$$

и из уравнений (8) и (10) находим равенство

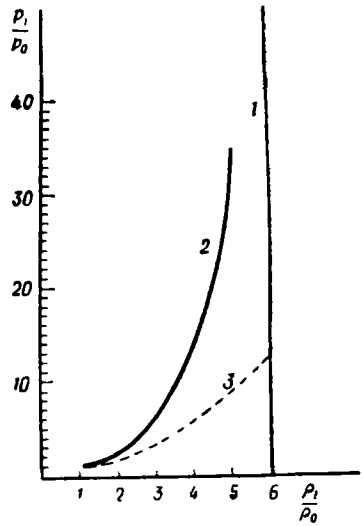
$$\frac{\Delta p_0}{\Delta\varrho_0} = \gamma \frac{2p_0 + \Delta p_0}{2\varrho_0 + \Delta\varrho_0}. \tag{11}$$

Из равенств (9) — (11) можно вычислить Δp_0, $\Delta\varrho_0$ и σ, если заданы θ, p_0, ϱ_0 и V_0.

Из формулы (11) также следует уравнение

$$\frac{p_1}{p_0} - \frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \frac{\gamma-1}{2}\left(1 + \frac{p_1}{p_0}\right)\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_0} - 1\right),$$

которое определяет кривую Гюгонио; эта кривая, построенная в координатах p_1/p_0 и ϱ_1/ϱ_0, представляет собой равнобочную гиперболу (рис. 359). При $p_1/p_0 \to \infty$ имеем



Р и с. 359.
1 — асимптота; *2* — кривая Гюгонио; *3*—адиабата.

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0} \to \frac{\gamma+1}{\gamma-1},$$

причем для воздуха $\varrho_1/\varrho_0 \approx 6$. Таким образом, в воздушной ударной волне при максимально возможном сжатии начальная плотность воздуха возрастает только в шесть раз. На рис. 359 пунктирной кривой изображена адиабата $p_1/p_0 = (\varrho_1/\varrho_0)^\gamma$. При $\Delta p \to 0$ и $\Delta\varrho \to 0$ уравнение (11) переходит в дифференциальное уравнение адиабаты $dp/d\varrho = \gamma p/\varrho$. Кривая Гюгонио и адиабата касаются друг друга в начальной точке $\varrho_1/\varrho_0 = 1$. Отношение p/ϱ и, следовательно, температура при движении по кривой Гюгонио растут быстрее, чем при движении по адиабате.

В заключение отметим, что перед рассмотренным здесь скачком должен иметь место сверхзвуковой поток. За скачком же течение может быть как сверхзвуковым, так и дозвуковым. При переходе через скачок происходит уменьшение нормальной составляющей скорости, а касательная составляющая скорости остается при этом неизменной. Поэтому при переходе через скачок скорость отклоняется в сторону фронта скачка. Если скачок наклонен под достаточно малым углом к направлению набегающего потока, то течение за скачком может быть сверхзвуковым.

20.61. Ударная поляра. Скорость набегающего потока $\mathbf{V}_0$ представим в плоскости годографа отрезком OA оси u (рис. 360). Из точки O проведем также вектор OP, представляющий собой скорость $\mathbf{V}_1$ потока (составляющие которой равны u, v), прошедшего через скачок и отклонившегося

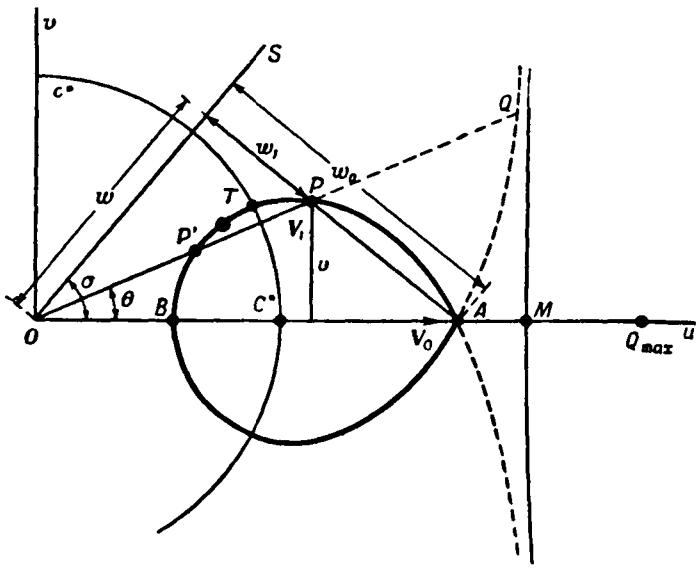


Рис. 360.

на угол θ. Геометрическое место точек P называется *ударной полярой*, соответствующей скорости V_0.

В обозначениях, указанных на рис. 360, имеем

$$w = V_0 \cos\sigma, \quad w_0 = V_0 \sin\sigma, \quad w_1 = V_0 \sin\sigma - \frac{v}{\cos\sigma}.$$

Подставляя эти величины в уравнение (5) п. 20.60, получим

$$V_0^2 \sin^2\sigma - V_0 v \operatorname{tg}\sigma = k^2 (q_{\max}^2 - V_0^2 \cos^2\sigma), \tag{1}$$

что вместе с формулой

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{V_0 - u}{v} \tag{2}$$

определяет геометрическое место точек $P(u, v)$, т. е. ударную поляру.

Исключение σ из формул (1) и (2) непосредственно приводит к уравнению

$$v^2 [k^2 (q_{\max}^2 - V_0^2) + V_0 (V_0 - u)] = (V_0 - u)^2 (V_0 u - k^2 q_{\max}^2). \tag{3}$$

Таким образом, ударная поляра представляет собой кривую третьего порядка (декартов лист, или гипоциссоиду), симметричную относительно оси u, которую она пересекает в точках A и B (рис. 360) с координатами

$$u = V_0, \quad u = k^2 q_{\max}^2 / V_0. \tag{4}$$

Тогда

$$OA \cdot OB = k^2 q_{\max}^2 = c^{*2} = OC^{*2}. \tag{5}$$

Следовательно, точки A и B связаны между собой преобразованием инверсии относительно звуковой окружности $u^2 + v^2 = c^{*2}$. Точки на поляре, находящиеся внутри этой окружности, соответствуют дозвуковому течению

за скачком. Если

$$OM = u = \frac{k^2 (q_{\max}^2 - V_0^2) + V_0^2}{V_0}, \tag{6}$$

то величина v становится бесконечной и поэтому линия $u = OM$ представляет собой асимптоту. Продолжим линию OP до пересечения с ударной полярой в точке Q. Если теперь начальную скорость представить вектором OQ, то после перехода через скачок она уменьшится до величины, которая изображается вектором OA.

Ударную поляру, соответствующую заданным значениям V_0 и $q_{\max}$, можно построить точка за точкой следующим образом.

Нанесем точки A, B и M, определяемые формулами (4) и (6). Построим на линиях AB и MB, как на диаметрах, окружности C_1 и C_2 (рис. 361). Соединим точку B с какой-нибудь точкой Q на окружности C_2, и пусть линия QB

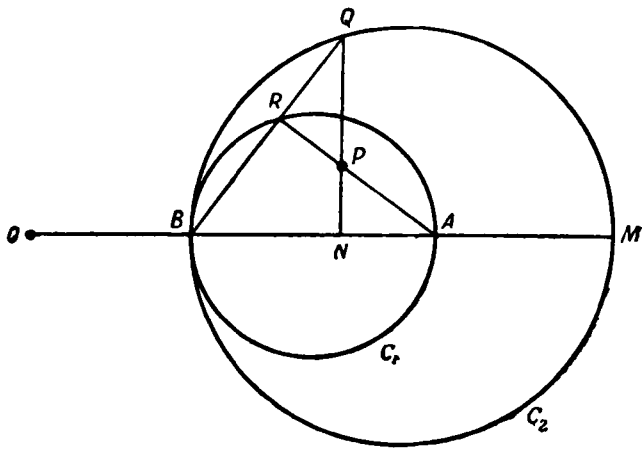


Рис. 361.

пересекает окружность C_1 в точке R. Тогда точка P, являющаяся точкой пересечения линии AR и линии QN — перпендикуляра к AB, будет точкой ударной поляры. Доказательство этого утверждения мы предоставляем читателю в качестве упражнения.

Как пользоваться ударной полярой, видно по рис. 360. Предположим, что ударная поляра нам задана. Направление скачка, который отклоняет поток на угол θ, получим, проводя нормаль к линии AP; здесь точка P представляет собой точку, где прямая линия, проходящая через O и составляющая угол θ с направлением набегающего потока, пересекает ударную поляру. Из этого построения получается также скорость $V_1 = OP$. Поскольку линия OP пересекает ударную поляру еще в одной точке P', то возможен еще второй скачок, направление которого перпендикулярно к AP'. Однако эксперименты показывают, что для течения сжатия при обтекании излома или клина в действительности реализуется только один скачок, соответствующий точке P. Касательная к ударной поляре OT, проведенная из точки O, определяет критический угол θ^*, при котором два возможных скачка уплотнения совпадают. Если $\theta > \theta^*$, то проведенное выше построение становится недействительным, и в этом случае перед клином образуется отошедшая криволинейная ударная волна (рис. 362).

Отметим, далее, что при $\theta \to 0$, т. е. когда точка P стремится к двойной точке A на ударной поляре, скачок становится все более слабым и условия за ним приближаются к условиям непрерывного течения без скачка. Таким

образом, в этом случае направление скачка должно стремиться к направлению линии Маха. Следовательно, угол между касательными к ударной поляре в двойной точке A должен быть равен $\pi - 2\mu$, где μ — угол Маха.

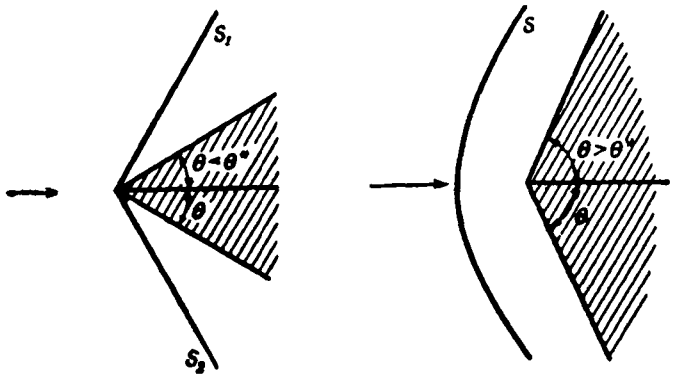


Рис. 362.

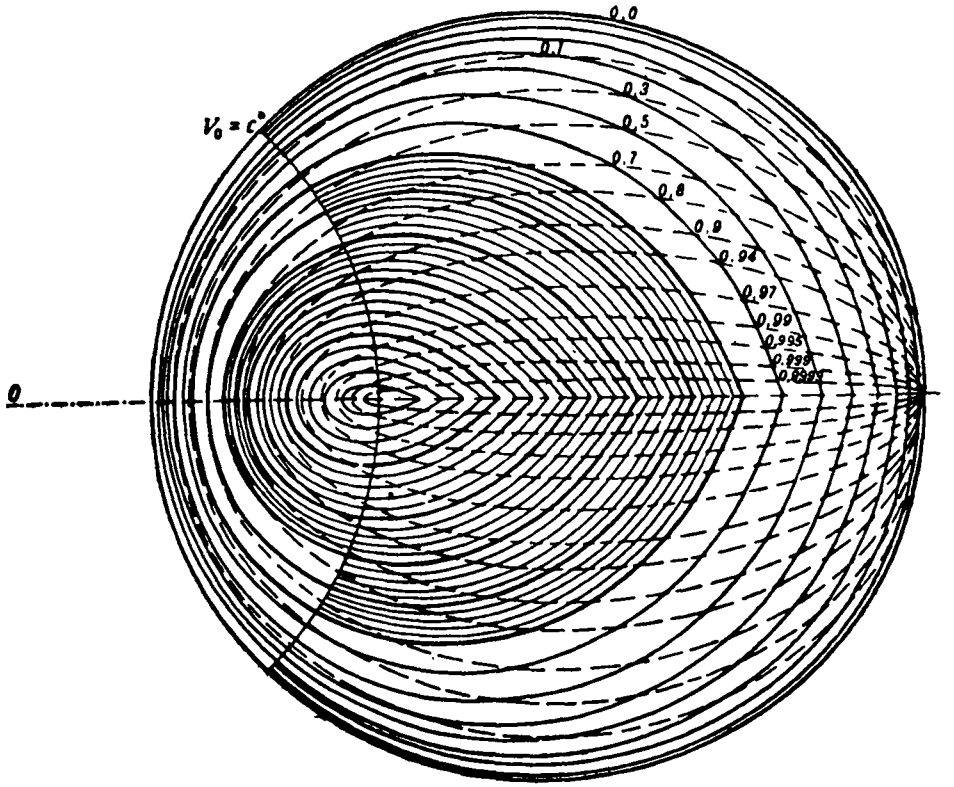
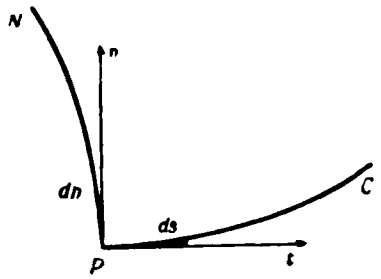


Рис. 363.

На рис. 363, принадлежащем Буземану, изображено семейство ударных поляр при $c^* < V_0 \leqslant q_{max}$. Все поляры охватывают точку c^* и лежат внутри окружности, к которой они приближаются при $V_0 \to q_{max}$. Пунктиром здесь показаны кривые, на которых постоянна величина отношения давлений торможения за скачком уплотнения и перед ним.

20.70. Характеристики в изэнтропическом течении. Установившееся течение, которое рассматривалось в п. 20.43, было гомэнтропическим. В этом пункте мы будем иметь дело с более общим случаем изэнтропического течения, в котором энтропия S остается постоянной вдоль каждой линии тока, но не обязательно имеет одно и то же постоянное значение на разных линиях тока.



Р и с. 364.

Представим себе, что поле течения покрыто геометрической сеткой, образованной некоторым семейством кривых C и семейством ортогональных кривых N.

Рассмотрим в некоторой точке P кривые C и N. На кривой C будем обозначать через ds элемент дуги, через $\mathbf{t}$ — единичный касательный вектор в направлении увеличения s, через $\varkappa_s$ — кривизну в точке P. Для ортогональной кривой N соответствующие величины будем обозначать через dn, $\mathbf{n}$, $\varkappa_n$. Примем в качестве стандартного такое взаимное расположение кривых C и N, которое показано на рис. 364 и в котором направление $\mathbf{n}$ получается из направления $\mathbf{t}$ поворотом на прямой угол против часовой стрелки.

Тогда, согласно формулам Френе [1]),

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = \varkappa_s \mathbf{n}, \qquad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial n} = -\varkappa_n \mathbf{t}, \tag{1}$$

поскольку положительное направление вектора нормали к кривой N (как мы условились) будет направлением $-\mathbf{t}$.

Дифференцируя формулу $\mathbf{nt} = 0$, получаем

$$\mathbf{n}\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial n} = -\mathbf{t}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial n} = \varkappa_n \mathbf{tt} = \varkappa_n \mathbf{nn},$$

$$\mathbf{t}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} = -\mathbf{n}\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = -\varkappa_s \mathbf{nn} = \varkappa_s \mathbf{tt},$$

так как $\mathbf{nn} = 1 = \mathbf{tt}$. Следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial n} = \varkappa_n \mathbf{n}, \qquad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} = -\varkappa_s \mathbf{t}. \tag{2}$$

В этих же обозначениях для вектора $\mathbf{q} = q_s \mathbf{t} + q_n \mathbf{n}$ имеем

$$\nabla = \mathbf{t}\frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{n}\frac{\partial}{\partial n}, \quad \mathbf{q}\nabla = q_s \frac{\partial}{\partial s} + q_n \frac{\partial}{\partial n}. \tag{3}$$

Если теперь применить формулу (3) к уравнениям движения (2) и неразрывности (1) п. 20.13, то с учетом формул (1) и (2) получим

$$q_s \frac{\partial q_s}{\partial s} + q_n \frac{\partial q_s}{\partial n} - q_s q_n \varkappa_s - q_n^2 \varkappa_n = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s}, \tag{4}$$

$$q_s \frac{\partial q_n}{\partial s} + q_n \frac{\partial q_n}{\partial n} + q_s^2 \varkappa_s + q_s q_n \varkappa_n = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial n}, \tag{5}$$

$$q_s \frac{\partial \varrho}{\partial s} + q_n \frac{\partial \varrho}{\partial n} + \varrho \frac{\partial q_s}{\partial s} + \varrho \frac{\partial q_n}{\partial n} - \varrho q_n \varkappa_s + \varrho q_s \varkappa_n = 0. \tag{6}$$

Уравнение постоянства энтропии вдоль линии тока [см. (4) п. 20.13] запишется так:

$$q_s \frac{\partial S}{\partial s} + q_n \frac{\partial S}{\partial n} = 0. \tag{7}$$

---

[1]) Weatherburn C. E., Elementary vector analysis, Lnd., 1926, 85. [См. также: Кочин Н. Е., Векторное и тензорное исчисления, изд. 6, ГОНТИ, 1938, стр. 89.— *Прим. перев.*]

Наконец, уравнение (6) п. 20.13, которое следует из уравнения состояния, дает

$$\frac{\partial p}{\partial s} = c^2 \frac{\partial \varrho}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial s}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = c^2 \frac{\partial \varrho}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial n}. \tag{9}$$

Соотношение (8) и (9) можно использовать для исключения $\partial p/\partial n$ и $\partial p/\partial S$ из уравнений (4) и (5). Тогда уравнения (4)—(7) будут представлять собой систему четырех совместных линейных алгебраических уравнений для определения четырех неизвестных величин

$$\frac{\partial q_s}{\partial n}, \quad \frac{\partial q_n}{\partial n}, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial n}, \quad \frac{\partial S}{\partial n}, \tag{10}$$

которые являются производными от q_s, q_n, ϱ, S по направлению нормали к кривой C.

Если эту систему решать с помощью определителей, то получим

$$\frac{\partial q_s/\partial n}{\Delta_5} = \frac{\partial q_n/\partial n}{-\Delta_4} = \frac{\partial \varrho/\partial n}{\Delta_3} = \frac{\partial S/\partial n}{-\Delta_2} = \frac{1}{\Delta_1}. \tag{11}$$

После преобразований найдем, что эти определители соответственно равны

$$\Delta_1 = -q_n^2 (q_n^2 - c^2), \quad \Delta_2 = -q_s q_n (q_n^2 - c^2) \frac{\partial S}{\partial s},$$

$$\Delta_3 = \varrho q_n \left[\frac{q_s}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial s} + q_n^2 \frac{\partial q_s}{\partial s} - q_n q_s \frac{\partial q_n}{\partial s} - q_n \varkappa_s (q_s^2 + q_n^2) + \frac{q_s}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial s} (q_n^2 - c^2) \right],$$

$$\Delta_4 = q_n^2 \left[\frac{q_s}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial s} + c^2 \frac{\partial q_s}{\partial s} - q_n q_s \frac{\partial q_n}{\partial s} - q_n \varkappa_s (q_s^2 + c^2) + q_s \varkappa_n (c^2 - q_n^2) \right],$$

$$\Delta_5 = q_n (q_n^2 - c^2) \left[q_s \frac{\partial q_s}{\partial s} - q_s q_n \varkappa_s - q_n^2 \varkappa_n + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial s} \right].$$

Следуя Мейеру [1]), поставим вопрос о том, существуют ли такие линии C, вдоль которых уравнения движения (4)—(7) не позволяют определить нормальные производные (10) и, следовательно, также производную $\partial p/\partial n$.

Ясно, что такой случай будет иметь место тогда и только тогда, когда величины (11) являются неопределенными, т. е. когда все определители Δ_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) обращаются в нуль. Необходимое условие состоит в обращении в нуль определителя Δ_1 (следовательно, также и Δ_5), что дает $q_n = 0$ или $q_n = \pm c$. Если $q_n = 0$, то все определители обращаются в нуль, и тогда кривые C будут линиями тока. Мы вернемся к этому случаю в дальнейшем. Если же

$$q_n = \pm c, \tag{12}$$

то имеем $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_5 = 0$, в то время как условия $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$ в комбинации с равенством (12) дадут единственное дополнительное уравнение

$$q_n \left[q_n \frac{\partial q_s}{\partial s} - q_s \frac{\partial q_n}{\partial s} - \varkappa_s (c^2 + q_s^2) \right] + \frac{q_s}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial s} = 0. \tag{13}$$

Это уравнение вместе с равенством (12) не содержит производных по нормали к кривой C, а также кривизну $\varkappa_n$ ортогональной кривой N.

В частности, течение, в котором имеются разрывы нормальных производных давления, плотности, скорости и энтропии вдоль некоторых

---

[1]) Meyer R. E., The method of characteristics for problem of compressible flow involving two independent variables, Sixth Intern. Congress for Applied Mechanics, Paris, 1946, *Quart. J. Mech. and. Appl. Math.*, I (1948), 196—219.

кривых, на которых выполняется условие (13), является течением, не противоречащим уравнениям движения. Указанные кривые называются *характеристиками*, или *линиями Маха*. Возможность существования указанных разрывов на линиях Маха отличает сверхзвуковое установившееся течение от дозвукового установившегося течения.

Следует подчеркнуть, что характеристики, определенные здесь условием (12), представляют собой *те же самые кривые*, которые были рассмотрены в п. 20.41.

Другое условие обращения в нуль определителей Δ_k есть, как нетрудно видеть, условие $q_n = 0$. Подставляя это условие в уравнения (4)—(7), получим

$$q_s \frac{\partial q_s}{\partial s} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s}, \quad \varkappa_s q_s^2 = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial n}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial(\varrho q_s)}{\partial s} + \varrho q_s \varkappa_n = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial S}{\partial s} = 0. \tag{16}$$

Эти уравнения представляют собой уравнения движения вдоль линии тока, уравнение неразрывности и исходное условие постоянства энтропии вдоль линии тока.

Эти уравнения показывают, что линии тока также обладают некоторыми характеристическими свойствами. Поскольку вышеприведенные уравнения (14) — (16) не содержат производных $\partial q_s/\partial n$ и $\partial S/\partial n$, на линиях тока могут иметь место разрывы этих величин, которые распространяются со скоростью газа. Такие разрывы соответствуют наличию вихря в потоке (см. п. 20.10). Однако обычно энтропия и полная энергия бывают известны на каждой линии тока, следовательно, вихрь определяется уравнением Кронко (3) п. 20.10, и тогда линии тока не будут уже иметь характеристических свойств.

Итак, оказывается, что единственными линиями, на которых уравнения допускают разрывы нормальных производных, являются линии Маха и линии тока. Неопределенность нормальных производных на этих линиях имеет место для производных любого порядка, как это можно доказать, дифференцируя уравнения по n любое число раз.

Из равенства (12) следует также, что угол между линиями Маха и линиями тока есть угол Маха $\mu = \arcsin(c/q)$. Таким образом, если θ представляет собой угол наклона линии тока к оси x, то наклон линии Маха определяется формулой

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta \mp \mu).$$

Эта формула показывает, что линия Маха, вдоль которой параметры течения (т. е. q, p, S) постоянны, должна быть прямой линией (см. п. 20.50).

В статье Мейера (см. примечание к стр. 604) показано, как к уравнениям (13) — (16) можно применять метод численного интегрирования, развитый Массо [1]). Этот метод появился раньше методов, которые развивались Буземаном и другими авторами. Подробности этого метода можно найти в статье Мейера [2]).

---

[1]) Massau J., Mémoire sur l'integration graphique des équations aux dérivees partielles, Chent, 1900—1903. См. также Enzykl. d. Math. Wiss., II, 3_1, S. 159.

[2]) Изложение современного конечно-разностного метода характеристик, приспособленного к расчету на электронных вычислительных машинах, см. в работах: Чушкин П. И., Затупленные тела простой формы в сверхзвуковом потоке газа, *Прикл. мат. и мех.*, **21**, вып. 3 (1960), 927—930, Кацкова О. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д., Шулишнина Н. П., Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. Изд-во Вычислительного центра АН СССР, 1961.—*Прим. перев.*

В случае осесимметричного движения надо рассматривать кривые C и N, лежащие в какой-либо меридиональной плоскости. Пусть касательная в точке P образует угол θ с осью и пусть $\widetilde{\omega}$ — расстояние точки P от оси. Тогда единственное изменение в полученных выше уравнениях, связанное с осесимметричностью течения, будет состоять в том, что в левые части уравнений (6) и (13) добавятся соответственно члены ϱR и $c^2 R$, где

$$\widetilde{\omega} R = q_s \sin\theta + q_n \cos\theta.$$

20.71. Теорема единственности. Рассмотрим установившееся адиабатическое плоское сверхзвуковое течение.

Определение. Криволинейный многоугольник, образованный дугами, каждая из которых является либо линией Маха, либо линией тока, либо звуковой линией [1]), называется *характеристическим многоугольником.*

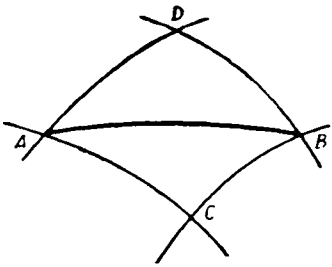


Рис. 365.

Рассмотрим границу между областью, где движение (определяемое скоростью, плотностью или давлением и энтропией) равномерно, и областью, где нет линий, на которых нормальные производные некоторого порядка разрывны. Такая граница должна быть характеристической ломаной.

Далее, если заданы два течения, которые не имеют конечных разрывов скорости, плотности и энтропии, одинаковы в какой-либо одной области, но различаются в другой, то границей этих областей должна быть характеристическая ломаная.

Определение. *Обыкновенной линией* называется некоторая кривая, которая не пересекает какую-либо линию Маха или какую-либо линию тока более чем в одной точке.

На обыкновенной линии уравнения движения позволяют определить величины нормальных производных любого порядка от q, ϱ, S для любого произвольного непрерывного распределения самих этих величин на этой линии.

Теорема единственности. *Состояние сверхзвукового течения (т. е. значения переменных q, ϱ, S) вдоль некоторой дуги AB обыкновенной линии определяет единственным образом поле течения внутри достаточно малого характеристического многоугольника, который содержит дугу AB.*

Доказательство. Рассмотрим два течения F_1 и F_2, которые имеют одинаковые состояния движения (т. е. одинаковые величины q, ϱ, S) вдоль дуги AB некоторой обыкновенной линии.

Из определения обыкновенной линии следует, что для течений F_1 и F_2 переменные q, ϱ, S можно разложить в окрестности линии AB в один и тот же ряд Тейлора. Следовательно, течения F_1 и F_2 будут одинаковыми в малой конечной области, содержащей AB. Но любую такую область можно расширить до некоторого характеристического многоугольника, что и требовалось доказать.

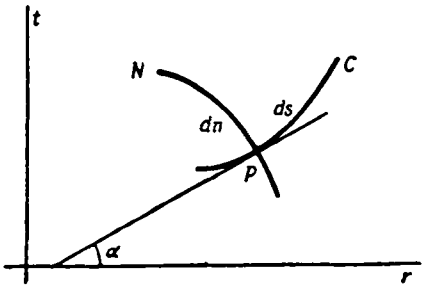
Теорема единственности утверждает, что состояние движения на линии AB определяет единственным образом течение внутри четырехугольника Маха $ABCD$ (рис. 365), ограниченного парой линий Маха, проходящих через точку A, и парой линий Маха, проходящих через точку B; при этом предполагается, что здесь не встречаются звуковые линии.

[1]) Звуковая линия есть линия, на которой скорость равняется критической скорости звука c^*. Такая линия обычно является границей между дозвуковой и сверхзвуковой областями течения; см., например, критическую кривую внутри сопла Ринглеба (п. 20.33) или в течении вихря (п. 13.80).

20.80. Течения, зависящие от времени. Рассмотрим некоторое течение, зависящее от времени t и от одной пространственной координаты r — расстояния от фиксированного начала координат. Обозначим через q скорость в направлении возрастания r. Тогда уравнения движения и неразрывности примут вид

$$\frac{\partial q}{\partial t}+q\frac{\partial q}{\partial r}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\varrho\frac{\partial q}{\partial r}+q\frac{\partial \varrho}{\partial r}+\frac{(\nu-1)\varrho q}{r}=0, \qquad (2)$$



Р и с. 366.

где $\nu = 1$ для одномерного течения (например, течение вдоль трубы); $\nu = 2$ для двумерного течения с круговой симметрией (например, плоский источник) и $\nu = 3$ для трехмерного течения со сферической симметрией (например, случай пространственного источника). Сделав замену переменных (предложенную Риманом)

$$\omega=\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{c\,d\varrho}{\varrho}, \qquad c^2=\frac{\partial p}{\partial \varrho}, \qquad (3)$$

получим

$$c\frac{\partial \omega}{\partial r}=\frac{c^2}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial r}=\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial t}=\frac{c}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial t}.$$

Тогда уравнения (1) и (2) можно записать так:

$$\frac{\partial q}{\partial t}+q\frac{\partial q}{\partial r}+c\frac{\partial \omega}{\partial r}=0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t}+c\frac{\partial q}{\partial r}+q\frac{\partial \omega}{\partial r}+\frac{(\nu-1)cq}{r}=0.$$

Сложение и вычитание этих уравнений дает

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega+q)+(q+c)\frac{\partial}{\partial r}(\omega+q)=-\frac{(\nu-1)cq}{r}, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega-q)+(q-c)\frac{\partial}{\partial r}(\omega-q)=-\frac{(\nu-1)cq}{r}. \qquad (5)$$

Как и в п. 20.70, представим себе, что плоскость (r, t) покрыта двумя семействами ортогональных кривых C и N. Пусть ds и dn являются соответственно элементами дуг кривых C и N в точке P и пусть касательная в точке P к кривой C образует угол α с осью r (рис. 366). Тогда

$$ds+i\,dn=e^{-i\alpha}(dr+i\,dt),$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}=\sin\alpha\frac{\partial}{\partial s}+\cos\alpha\frac{\partial}{\partial n},$$

$$\frac{\partial}{\partial r}=\cos\alpha\frac{\partial}{\partial s}-\sin\alpha\frac{\partial}{\partial n}.$$

Таким образом, уравнение (4) эквивалентно уравнению

$$[\sin\alpha+(q+c)\cos\alpha]\frac{\partial(\omega+q)}{\partial s}+[\cos\alpha-(q+c)\sin\alpha]\frac{\partial(\omega+q)}{\partial n}=-\frac{(\nu-1)cq}{r}.$$

Это уравнение не позволяет определить нормальную производную $\partial(\omega+q)/\partial n$, если направление кривой C выбрать так, чтобы вдоль C выполнялось уравнение

$$\cos\alpha-(q+c)\sin\alpha=0$$

или

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{dr}{dt} = q + c. \tag{6}$$

Тогда наше уравнение примет вид

$$\frac{\partial(\omega+q)}{\partial s} = -\frac{(\nu-1)\,cq}{r}\sin\alpha. \tag{7}$$

Итак, в плоскости r, t разрывы нормальной производной от функции $\omega + q$ перемещаются в направлении, нормальном к кривым C, со скоростью $q+c$, определяемой формулой (6). Это означает, что в физической плоскости эти разрывы распространяются со скоростью $q+c$, т. е. относительно газа со скоростью c. Следовательно, в соответствии с определением из п. 20.41 характеристиками здесь будут точки[1]) окружности или сферы в соответствии с $\nu = 1, 2, 3$.

Аналогичное исследование, проведенное с уравнением (5), показывает, что разрывы нормальной производной от функции $\omega - q$ перемещаются со скоростью $q - c$. Это определяет второе семейство характеристик.

Из формул (3) видно, что полученные выше результаты имеют место всегда, когда величина $c^2 = \partial p/\partial\varrho$ является положительной. Следовательно, в рассматриваемом случае характеристики существуют как в дозвуковом, так и в сверхзвуковом течении.

В случае одномерного течения из уравнения (4) и (5) сразу же получим результаты Римана, а именно: 1) величина $\omega + q$ остается постоянной для некоторой геометрической точки, движущейся со скоростью $q+c$, 2) величина $\omega - q$ остается постоянной для некоторой геометрической точки, движущейся со скоростью $q - c$. В дозвуковом течении эти две скорости имеют противоположное, а в сверхзвуковом течении — одинаковое направление.

ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ 20

1. Пусть E — внутренняя энергия газа, S — энтропия. Показать, что

$$p = -\frac{\partial E}{\partial v}, \qquad T = \frac{\partial E}{\partial S}.$$

2. Построить график, связывающий давление p и скорость q в изэнтропическом течении вдоль линии тока, и показать, что эта кривая имеет точку перегиба при $q = c^*$.

3. Показать, что в изэнтропическом течении вдоль линии тока имеет место соотношение

$$\frac{\varrho q}{\varrho^* q^*} = M^* \left[\frac{1}{2}(\gamma+1) - \frac{1}{2}(\gamma-1)\,M^{*2}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

где ϱ^* — плотность при $q = q^* = c^*$ и $M^* = q/c^*$.

4. Получить уравнение Бернулли в следующей форме:

$$k^2q^2 + (1-k^2)\,c^2 = c^{*2},$$

где

$$k^2 = (\gamma-1)/(\gamma+1).$$

5. Доказать, что для плоского установившегося безвихревого течения имеют место уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} = 0.$$

6. Используя потенциал скоростей

$$\varphi = -Vx + \frac{K\theta}{2\pi},$$

[1]) Или, вообще говоря, плоскости, перпендикулярные к направлению оси r.

доказать, что в сжимаемом дозвуковом течении с такой же циркуляцией радиальная и окружная составляющая скорости равны

$$U_r = V\cos\theta, \qquad U_\theta = -V\sin\theta - \frac{K}{2\pi r}\frac{\sqrt{1-M_0^2}}{1-M_0^2\sin^2\theta}.$$

Доказать на основании этого теорему Кутта—Жуковского для подъемной силы профиля.

Показать также, что сила сопротивления в этом случае равна нулю.

7. Показать, что замена переменных вида

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2}(1-\tau)\beta\frac{d\tau}{\tau},$$

где $\frac{\lambda^2}{\tau} \longrightarrow 1$ при $\tau \longrightarrow 0$, приводит к следующим уравнениям в плоскости годографа:

$$\lambda\,\partial\varphi/\partial\lambda = -F\,\partial\psi/\partial\theta, \quad \lambda\,\partial\psi/\partial\lambda = \partial\varphi/\partial\theta,$$

где

$$F = [1-(2\beta+1)\tau](1-\tau)^{-2\beta-1}.$$

8. Рассмотреть второе решение (3) п. 20.32 для уравнения плоскости годографа при $m=-1$ и показать, что в этом случае

$$\frac{z}{a} = \left(\beta+\frac{1}{\tau}\right)e^{2i\theta} + (2\beta+1)(\ln\tau - 2i\theta) + 2i\beta\theta.$$

Доказать, что в данном случае кривые постоянной скорости представляют собой трохоиды, полученные качением окружности радиуса $a(1+\beta)$ вдоль линии $x = a(1+\beta) + a(2\beta+1)\ln\tau$, причем трохоида описывается точкой, лежащей на конце радиальной линии длины $a(\beta+\tau^{-1})$.

9. Доказать, что в плоскости годографа огибающая трохоид из примера 8 имеет уравнение

$$\operatorname{tg}^2\theta = \frac{(1-\tau)[(2\beta+1)\tau-1]}{[(2\beta+1)\tau+1]^2}.$$

10. Показать, что в установившемся плоском сверхзвуковом течении в некоторой точке P, где местная скорость звука равна c, можно определить нормали к характеристикам с помощью следующего геометрического построения. Надо из точки P провести отрезок PQ, представляющий собой вектор скорости. Далее, провести окружность с центром в точке P и радиусом c и построить другую окружность на отрезке PQ, как на диаметре. Тогда если N_1 и N_2—точки пересечения этих двух окружностей, то нормали к характеристикам представляются линиями PN_1 и PN_2.

11. С помощью уравнений (5) и (6) п. 20.43 доказать что если C_1 и C_2 являются характеристиками в некоторой точке P, то касательная в точке P к изображению характеристики C_1 в плоскости годографа будет параллельна нормали к характеристике C_2 в точке P в физической плоскости. Доказать аналогичный результат для случая, когда характеристики C_1 и C_2 меняются ролями.

12. Рассматривается установившееся безвихревое плоское сверхзвуковое течение. Пусть в плоскости годографа построен некоторый треугольник OAD, причем его вершина O находится в начале координат, а P—точка на стороне AD. Этот треугольник построен таким образом, что отрезок OP представляет собой вектор скорости в точке P' в поле течения, PA—местная скорость звука, OD—скорость $q_{\max}$, а угол A является прямым. Проведем далее прямую линию PC, параллельную стороне AO, до пересечения ее со стороной OD в точке C. Доказать тогда, что:

1) $AP/AD = k$ [см. формулу (4) п. 20.42];

2) OC представляет собой скорость c^*;

3) линия APD параллельна нормали к характеристике в точке P';

4) линия APD является касательной в точке P к изображению в плоскости годографа другой характеристики, проходящей через P'.

13. Используя пример 12, показать, что точка P описывает эпициклоиду, которая получается качением окружности, построенной на CD, как на диаметре, по неподвижной окружности с центром в точке O и радиусом OC. Доказать что в установившемся безвихревом плоском сверхзвуковом течении годограф любой характеристики представляет собой эпициклоиду, полученную качением окружности диаметра $q_{\max} - c^*$ по неподвижной окружности радиуса c^*.

14. Для случая сверхзвукового обтекания угла показать, что в обозначениях п. 20.50 число Маха определяется формулой

$$M^2 = 1 + \frac{1}{k^2}\operatorname{tg}^2(k\theta+\varepsilon).$$

15. Рассмотреть обтекание угла (см. п. 20.50) в случае, когда набегающий поток имеет критическую скорость c^*, и доказать, что тогда уравнение линий тока имеет вид

$$r = r_0 (\cos k\theta)^{-1/k^2},$$

где r_0 — некоторая постоянная. Показать отсюда, что линии тока представляют собой подобные кривые с центром подобия в вершине угла.

16. Построить методом характеристик полную картину течения при обтекании угла в случае, когда набегающий поток имеет критическую скорость c^* и когда угол α между второй и первой сторонами угла настолько велик, что поток не достигает этой второй стороны угла.

17. В течение расширения около выпуклой ломаной линии воздушный поток отклоняется на малый угол θ_n у n-го излома ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Если p_n — давление, μ_n — местное число Маха после обтекания n-го излома, то доказать, что приближенно выполняются равенства

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = 1 - 2\gamma\theta_n \operatorname{cosec} 2\mu_n,$$

$$\mu_n = \mu_{n-1} - \frac{1}{2}\theta_n [(\gamma+1)\sec^2\mu_{n-1} - 2].$$

18. Показать, что если в предыдущем примере обтекаемая линия является гладкой, то

$$\frac{d\mu}{d\theta} = -\frac{1}{2}(\gamma+1)\sec^2\mu + 1.$$

Отсюда доказать или проверить, что

$$\theta = f(\mu_0) - f(\mu),$$

где

$$f(\mu) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{tg}\mu.$$

19. Если обтекаемая линия в примере 18 является гладкой, то доказать или проверить, что

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{d\theta} = -2\gamma \operatorname{cosec} 2\mu,$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{g(\mu)}{g(\mu_0)},$$

где

$$g(\mu) = \left(\frac{\sin^2\mu}{\gamma - \cos 2\mu}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

20. В примере 19 доказать, что при отклонении потока на угол θ скорость V определяется формулой

$$\frac{V}{V_0} = \sqrt{\frac{\gamma - \cos 2\mu_0}{\gamma - \cos 2\mu}},$$

где V_0 — скорость набегающего потока.

21. Показать, что давление за плоским скачком, в котором поток отклоняется на угол θ, приближенно равно

$$p_1 = p_0 (1 - 2\gamma\theta \operatorname{cosec} 2\mu_0).$$

22. Показать, что в случае ударной волны, рассмотренной в п. 20.60, действительно имеет место увеличение энтропии, которое приближенно равно

$$c_v \frac{\gamma^3 - \gamma}{12}\left(\frac{\Delta\varrho}{\varrho_0}\right)^3,$$

где приближенно принято $\Delta\varrho/\varrho_0 = 2\theta \operatorname{cosec} 2\mu_0$.

23. Используя обозначения п. 20.60, доказать, что

$$\frac{\Delta p}{\Delta\varrho} = w_0 w_1.$$

24. Газ совершает установившееся параллельное сверхзвуковое течение в прямой трубе. Пусть давление внизу по течению больше, чем давление вверху по течению.

Показать, что тогда должен возникнуть прямой скачок уплотнения, фронт которого перпендикулярен потоку и за которым течение становится дозвуковым. Доказать, что

$$\Delta p = \varrho_0 w_0^2 \left(1 - \frac{c^{*2}}{w_0^2}\right), \qquad \Delta \varrho = \varrho_0 \left(\frac{w_0^2}{c^{*2}} - 1\right), \qquad w_0 w_1 = c^{*2}.$$

25. Показать, что для прямого скачка уплотнения, рассмотренного в примере 24, имеют место соотношения

$$\frac{p_1}{p_{00}} = \frac{\frac{2\gamma}{\gamma+1} M^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}}{\left[\frac{1}{2}(\gamma-1) M^2 + 1\right]^{\gamma/(\gamma-1)}},$$

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_{00}} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_{00}}\right)^{\gamma-1}\right]\frac{\varrho_1}{\varrho_{00}},$$

$$\frac{T_1}{T_{00}} = \frac{\frac{4\gamma}{(\gamma+1)^2} - \frac{T_0}{T_{00}}}{1 - \frac{T_0}{T_{00}}},$$

где p_{00}, ϱ_{00}, T_{00} — соответствующие значения параметров торможения.

26. Используя метод наложения течения с постоянной скоростью, вывести соотношения для косого скачка уплотнения из соотношений для прямого скачка уплотнения, рассмотренного в примере 24.

27. В одномерном течении газа давление является функцией плотности. Получить уравнения этого течения в следующей форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c^2}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0.$$

28. Газ течет параллельно оси x. Частица находится в точке x в момент t и в точке x_0 в момент $t=0$. Доказать, что

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial x}{\partial m}, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial m},$$

где

$$m = \int_{x_0}^{x} \varrho\, dx.$$

29. Показать, что потенциал φ, рассмотренный в п. 20.30, удовлетворяет следующему линейному дифференциальному уравнению:

$$(1 - M^2) q^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} + (1 + \gamma M^4) q \frac{\partial \varphi}{\partial q} + (1 - M^2)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0.$$

30. Давление, плотность и нормальная составляющая скорости с каждой стороны стационарного косого скачка уплотнения имеют соответственно значения p_0, ϱ_0, w_0 и p_1, ϱ_1, w_1. Вывести соотношения

$$\varrho_0 w_0 = \varrho_1 w_1 = m,$$

$$p_0 - p_1 = m(w_1 - w_0), \qquad \gamma(p_0 + p_1) = m(w_0 + w_1),$$

где γ — показатель адиабаты.

Если c_0 и c_1 значения скорости звука с каждой стороны этого скачка, то доказать равенство

$$c_0^2 c_1^2 = w_0^2 w_1^2 - \frac{1}{4}(\gamma^2 - 1) w_0 w_1 (w_0 - w_1)^2.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Н. Н. Моисеев

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ 2

АФИННЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ТЕНЗОРЫ

1. Определение тензора. Пусть через $\{x_1, x_2, x_3\}$ обозначается точка в трехмерном евклидовом пространстве, а через $\mathbf{x}_i^0$ $(i=1, 2, 3)$ — единичные векторы декартовой системы координат.

Рассмотрим две декартовы системы координат $\{\mathbf{x}_i^0\}$ и $\{\mathbf{y}_i^0\}$, имеющие общее начало. Положение одной системы координат относительно другой задается таблицей направляющих косинусов

$$\alpha_{ij} = \cos(\mathbf{y}_i^0, \mathbf{x}_j^0)$$

(очевидно, что $\alpha_{ij} \neq \alpha_{ji}$), $i, j = 1, 2, 3$.

Среди девяти величин направляющих косинусов независимых только 3, так как имеют место шесть следующих соотношений:

$$\sum_j \alpha_{ji}\alpha_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k \text{ (условие ортогональности)}, \\ 1, & \text{если } i = k \text{ (условие нормированности)}. \end{cases} \tag{1*}$$

Пусть $\mathbf{a}$ — некоторый вектор в смысле определения п. 2.10; тогда

$$\mathbf{a} = \sum_i \mathbf{x}_i^0 a_i = \sum_j \mathbf{y}_j^0 a_j', \tag{2*}$$

где числа a_i и a_j' называются компонентами вектора $\mathbf{a}$. Компоненты a_i и a_j' связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned} a_i' &= \sum_j a_j \alpha_{ij}, \\ a_j &= \sum_j a_i' \alpha_{ij}. \end{aligned} \tag{3*}$$

Эти соотношения позволяют ввести новое определение вектора: вектором $\mathbf{a}$ называется тройка чисел $\{a_1, a_2, a_3\}$, определенная в любой декартовой системе координат таким образом, что при переходе от одной системы координат к другой числа a_i преобразуются по формулам (3*).

По аналогии с этим определением введем определение аффинного ортогонального тензора: тензором π называется тройка векторов $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$, определенных в любой декартовой системе координат таким образом, что при переходе от одной системы координат к другой векторы $\mathbf{p}_i$ преобразуются по формулам

$$\mathbf{p}_i = \sum_j \mathbf{p}_j \alpha_{ij}. \tag{4*}$$

Векторы $\mathbf{p}_i$ называются *векторными компонентами* тензора π.

Так как каждый вектор $\mathbf{p}_i$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{p}_i = \sum_j x_j^0 p_{ij},$$

то тензор π определяется матрицей

$$\pi = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}.$$

Числа p_{ij} называются *скалярными компонентами* тензора π. Пусть в любой системе координат определена матрица $\pi = \{p_{ij}\}$, тогда имеет место следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы матрица π определяла тензор, необходимо и достаточно, чтобы при переходе от одной системы координат к другой числа p_{ij} преобразовывались по формулам*

$$p'_{is} = \sum_{k,\,j} p_{jk}\alpha_{ij}\alpha_{sk}. \qquad (5^*)$$

Доказательство. Для доказательства необходимости предположим, что π — тензор. Следовательно, его векторные компоненты $\mathbf{p}_i$ преобразуются по формуле (4*). Запишем вектор $\mathbf{p}_j$ в системах координат (x_i^0) и (y_i^0):

$$\mathbf{p}_j = \sum_s \mathbf{x}_s^0 p_{js} = \sum_s \mathbf{y}_s^0 p^*_{js},$$

а вектор $\mathbf{p}'_i$ в системе координат (y_i^0):

$$\mathbf{p}'_i = \sum y_s^0 p'_{is}.$$

Согласно предположению, векторы $\mathbf{p}'_i$ и $\mathbf{p}_j$ связаны формулами (4*), которые мы перепишем в виде

$$\mathbf{p}'_i = \sum_j \mathbf{p}_j\alpha_{ij} = \sum_{j,\,s} y_s^0 p^*_{js}\alpha_{ij},$$

но поскольку $\mathbf{p}_j$ — вектор, то числа p^*_{js} и p_{jk} связаны формулами

$$p^*_{js} = \sum_k p_{jk}\alpha_{sk}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{p}'_i = \sum_s \mathbf{y}_s^0 p'_{is} = \sum_{j,\,s,\,k} \mathbf{y}_s^0 p_{jk}\alpha_{ij}\alpha_{sk}.$$

Сравнивая множители при единичных векторах с одинаковыми индексами, получаем формулу (5*).

Для доказательства достаточности следует выполнить указанные преобразования в обратном порядке.

Пример. Если в любой системе координат задана матрица I в виде

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то матрица I — тензор.

Доказательство этого утверждения предоставляем читателю. Матрица I называется единичным тензором.

Пусть $\pi = \{p_{ij}\}$ и $Q = \{q_{ij}\}$ — тензоры; тогда очевидно, что матрица $\{p_{ij} + q_{ij}\}$ также является тензором. На этом основании мы можем определить сумму двух тензоров аналогично сумме двух векторов: тензор S называется суммой двух тензоров π и Q, если его скалярные компоненты образованы по правилу

$$s_{ij} = p_{ij} + q_{ij}.$$

Симметричным тензором называется тензор, скалярные компоненты которого удовлетворяют условию

$$p_{ij} = p_{ji}.$$

Антисимметричным тензором называется тензор, у которого компоненты удовлетворяют условию

$$p_{ij} = -p_{ji}.$$

Легко видеть, что всякий тензор можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров:

$$\pi = \{p_{ij}\} = \left\{\frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ji})\right\} + \left\{\frac{1}{2}(p_{ij} - p_{ji})\right\}.$$

Если α — скаляр, то величина $\alpha\pi$ определяет тензор, компоненты которого имеют вид $\{\alpha p_{ij}\}$.

2. Диады. Определим *диадное* произведение двух векторов (или *диаду*) $\mathbf{a};\mathbf{b}$ следующим образом:

$$\mathbf{a};\mathbf{b} = \{a_i b_j\} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}. \qquad (6^*)$$

Нетрудно убедиться, что матрица $\{a_i b_j\}$ представляет собой тензор. В самом деле, поскольку $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторы, то их компоненты преобразуются по формулам (3*), следовательно,

$$a'_i b'_j = \sum_{sr} a_s b_r \alpha_{is} \alpha_{jr}.$$

Заметим, что диадное произведение некомутативно, т. е.

$$\mathbf{a};\mathbf{b} \neq \mathbf{b};\mathbf{a}.$$

Любой тензор можно представить в виде суммы трех диад. Для того чтобы в этом убедиться, отметим, что справедливо равенство

$$\mathbf{x}_1^0;\ \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\pi = \{p_{ij}\} = \sum_i \mathbf{x}_i^0;\mathbf{p}_i \qquad (7^*)$$

В частном случае единичный тензор (или единичная диада) имеет вид

$$I = \sum_i \mathbf{x}_i^0;\mathbf{x}_i^0.$$

Если тензор π можно представить в виде

$$\pi = \mathbf{a}_1;\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2;\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3;\mathbf{b}_3,$$

то сумма

$$\mathbf{b}_1;\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_2;\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_3;\mathbf{a}_3$$

определяет тензор Q, компоненты которого задаются формулами

$$q_{ij} = p_{ji}.$$

Подобно тому как любой тензор можно разложить на симметричную и антисимметричную составляющие, любую диаду можно представить как суперпозицию симметричной и антисимметричной частей:

$$\mathbf{a};\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a};\mathbf{b} + \mathbf{b};\mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{a};\mathbf{b} - \mathbf{b};\mathbf{a}).$$

Рассмотрим подробнее второе слагаемое

$$\mathbf{a};\mathbf{b}-\mathbf{b};\mathbf{a}=\begin{pmatrix} 0 & a_1b_2-b_1a_2 & a_1b_3-b_1a_3 \\ a_2b_1-a_1b_2 & 0 & a_2b_3-b_2a_3 \\ a_3b_1-a_1b_3 & a_3b_2-a_2b_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Его можно переписать в виде

$$\mathbf{a};\mathbf{b}-\mathbf{b};\mathbf{a}=\begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & \omega_2 \\ \omega_1 & 0 & -\omega_3 \\ -\omega_2 & \omega_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8*}$$

где

$$\boldsymbol{\omega}=\mathbf{b}\times\mathbf{a},$$

3. Тензор как оператор. Пусть $\mathbf{a}$ — вектор, а $\pi=\{p_{ij}\}$ — некоторая матрица; символом $\pi\mathbf{a}$ мы будем обозначать тройку чисел $\{b_1, b_2, b_3\}$, образованную по правилу

$$b_i=\sum_j p_{ij}a_j. \tag{9*}$$

Тогда имеет место следующая основная теорема.

Теорема. *Пусть матрица $\{p_{ij}\}$ определена в некоторой системе координат; для того чтобы эта матрица была тензором, необходимо и достаточно, чтобы тройка чисел $\{b_1, b_2, b_3\}$, определяемая по формуле* (9*), *представляла собой вектор, если тройка чисел $\{a_1, a_2, a_3\}$ является вектором.*

Доказательство. Для доказательства необходимости предположим, что $\{p_{ij}\}$ представляет собой тензор. Обозначим через p_{ij} и a_j' компоненты тензора π и вектора $\mathbf{a}$ в новой системе координат. Теперь определим в этой системе координат тройку чисел $\{b_i'\}$ следующим образом:

$$b_i'=\sum_j p_{ij}'a_j'. \tag{10*}$$

Найдем связь между величинами b_i' и b_i. Так как по предположению $\{p_{ij}\}$ — тензор, а $\{a_i\}$ — вектор, то

$$a_j'=\sum_r \alpha_{jr}a_r; \qquad p_{ij}'=\sum_{sk} p_{sk}\alpha_{is}\alpha_{jk}.$$

Следовательно, соотношение (10*) может быть записано в таком виде:

$$b_i'=\sum_{j,\,r,\,s,\,k} p_{sk}\alpha_{is}\alpha_{jk}\alpha_{jr}a_r,$$

или

$$b_i'=\sum_{r,\,s,\,k} p_{sk}a_r\alpha_{is}\sum_j \alpha_{jk}\alpha_{jr},$$

но

$$\sum_j \alpha_{jk}\alpha_{jr}=0, \quad \text{если } k\neq r,$$

$$\sum_j \alpha_{jk}\alpha_{jr}=1, \quad \text{если } k=r,$$

поэтому

$$b_i'=\sum_{sk} a_k p_{sk}\alpha_{is}=\sum_s \alpha_{is}\sum_k p_{sk}a_k.$$

Далее, согласно формуле (9*),

$$\sum p_{sk}a_k=b_s,$$

следовательно,

$$b'_i = \sum_s b_s a_{is}.$$

Таким образом, тройка чисел $\{b_i\}$ при переходе от одной системы координат к другой преобразуется по формулам преобразования компонент вектора, т. е. образует вектор.

Для доказательства достаточности возьмем две произвольные системы координат $\{\mathbf{x}_i^0\}$ и $\{\mathbf{y}_i^0\}$ и в этих системах координат определим матрицы $\{p_{ij}\}$ и $\{p'_{ij}\}$. Пусть, далее, любому вектору $\mathbf{a}$ по формуле (9*) ставится в соответствие ветор $\mathbf{b}$, т. е. его компоненты в новой системе координат связаны с компонентами в старой системе координат формулами

$$b'_i = \sum_s b_s a_{is}. \tag{11*}$$

Докажем, что матрица $\{p_{ij}\}$ определяет некоторый тензор, т. е. что величины p_{ij} и p'_{ij} связаны формулами

$$p'_{ij} = \sum_{s,\,k} p_{ks} a_{ik} a_{js}.$$

Так как величины b_s определяются формулами (9*), то равенство (10*) может быть записано в виде

$$b'_i = \sum_{s,r} p_{sr} a_r a_{is}. \tag{12*}$$

Величины a_r и a'_r связаны формулами (3*)

$$a_r = \sum_k a'_k a_{kr}.$$

Поэтому соотношение (12*) с учетом формулы (9*) можно переписать в виде

$$b'_i = \sum_k p'_{ik} a'_k = \sum_{s,\,r,\,k} p_{sr} a_{is} a_{kr} a'_k. \tag{13*}$$

Но равенство (13*) имеет место при любых значениях a'_k, следовательно,

$$p'_{ik} = \sum_{s,\,r} p_{sr} a_{is} a_{kr},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, тензор можно рассматривать как оператор, который по определенному закону ставит в соответствие каждому вектору $\mathbf{a}$ новый вектор. Кроме того, этот оператор является линейным. Итак, выражение $\mathbf{la}$ определяет некоторую линейную вектор-функцию вектора $\mathbf{a}$.

Доказанная теорема играет большую роль в механике. В самом деле, согласно этой теореме, линейный оператор, действующий в трехмерном евклидовом векторном пространстве, можно рассматривать как аффинный тензор. Это определение, в свою очередь, удобно тем, что позволяет во многих важных случаях ответить на вопрос, является ли данная физическая величина тензором без проверки выполнения условий (5*). Например, в динамике твердого тела вводится матрица моментов инерции

$$I = \{I_{ij}\},$$

где I_{ij} — осевые и центробежные моменты инерции. Составляющие вектора момента количества движения $\mathbf{L}$ вычисляются по формуле

$$L_i = \sum_j \omega_j I_{ij}, \tag{14*}$$

где ω_j — компоненты вектора мгновенной угловой скорости. Формула (14*) может быть записана более экономно в виде

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}. \tag{15*}$$

Равенство (15*) показывает, что матрица I в любой системе координат ставит в соответствие вектору $\boldsymbol{\omega}$ вектор $\mathbf{L}$. Следовательно, матрица I определяет тензор.

Теперь определим умножение тензора на вектор слева. Равенство

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}\pi \tag{16*}$$

означает, что

$$b_i = \sum_j a_j p_{ji}. \tag{17*}$$

Формула (17*) показывает, что равенство (16*) может быть записано в виде

$$\mathbf{b} = \pi^*\mathbf{a},$$

где π^* — транспонированная матрица, для которой

$$p^*_{ij} = p_{ji}.$$

Как следствие доказанной теоремы находим, что если π — тензор, то π^* — также тензор.

Рассмотрим теперь произведение диады на вектор. Пользуясь тем, что любая диада есть тензор, найдем компоненты вектора $\mathbf{d} = (\mathbf{a};\mathbf{b})\,\mathbf{c}$. Эти компоненты записываются в виде

$$d_i = \sum_j a_i b_j c_j = a_i \sum_j b_j c_j,$$

т. е.

$$(\mathbf{a};\mathbf{b})\,\mathbf{c} = (\mathbf{b},\mathbf{c})\,\mathbf{a},$$

где $(\mathbf{b},\mathbf{c})$ — обычное скалярное произведение. Аналогично, если обозначить $\mathbf{k} = \mathbf{c}\,(\mathbf{a};\mathbf{b})$, то

$$k_i = \sum_j a_j b_i c_j = b_i \sum a_j c_j,$$

т. е.

$$\mathbf{c}\,(\mathbf{a};\mathbf{b}) = (\mathbf{a},\mathbf{c})\,\mathbf{b}.$$

Пользуясь выведенными формулами, запишем тройное векторное произведение в форме диадного произведения

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}\,(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{b},\mathbf{a}) = \mathbf{a}\,(\mathbf{c};\mathbf{b}) - \mathbf{a}\,(\mathbf{b};\mathbf{c}).$$

Легко видеть, что эта запись может быть сделана не единственным способом.

4. Произведение двух тензоров. Произведением двух тензоров $\pi = \{p_{ij}\}$ и $Q = \{q_{ij}\}$ будем называть матрицу $R = \{r_{ij}\}$, элементы которой образованы по правилу

$$r_{ij} = \sum_k p_{ik} q_{kj}. \tag{18*}$$

Нетрудно показать, что матрица R — тензор. Для доказательства нам достаточно найти связь между компонентами r'_{ij} и r_{ij} (в новой и старой системах координат). Запишем соотношение

$$r'_{ij} = \sum_k p'_{ik} q'_{kj}, \tag{19*}$$

но так как величина p'_{ik} и q'_{kj} — скалярные компоненты тензора, то они связаны с величинами p_{ik} и q_{kj} формулами

$$p'_{ik}=\sum_{s,\,l}\alpha_{is}\alpha_{kl}p_{sl},\quad q'_{kj}=\sum_{n,\,m}\alpha_{kn}\alpha_{jm}q_{nm}.$$

Поэтому соотношение (19*) можно переписать в виде

$$r'_{ij}=\sum_{s,\,l,\,n,\,m}\alpha_{is}\alpha_{jm}p_{sl}q_{nm}\sum_{k}\alpha_{kl}\alpha_{kn},$$

но

$$\sum_{k}\alpha_{kl}\alpha_{kn}=\begin{cases}0, & \text{если } n\neq l\\ 1, & \text{если } n=l,\end{cases}$$

откуда

$$r'_{ij}=\sum_{s,\,m}\alpha_{is}\alpha_{jm}\sum_{l}p_{sl}q_{lm}.$$

Используя теперь равенства (18*), получаем окончательно

$$r'_{ij}=\sum_{s,\,m}\alpha_{is}\alpha_{jm}r_{sm},$$

что и доказывает наше утверждение.

Аналогичным образом определяется произведение диад. Обозначим

$$R=(\mathbf{a};\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c};\mathbf{d}).$$

Очевидно, что R — тензор. Докажем, кроме того, что R — диада. Согласно определению, скалярные компоненты тензора вычисляются по формуле

$$r_{ij}=\sum_{k}a_ib_kc_kd_j=a_id_j(\mathbf{b},\mathbf{c}).$$

Отсюда следует равенство

$$R=(\mathbf{a};\mathbf{d})\cdot(\mathbf{b},\mathbf{c}),$$

но так как $(\mathbf{b},\ \mathbf{c})$ — скаляр, то это равенство можно записать еще и в виде

$$R=((\mathbf{b},\mathbf{c})\,\mathbf{a};\mathbf{d})=(\mathbf{a};(\mathbf{b},\mathbf{c})\,\mathbf{d}).$$

Из этого следует, что R — диада.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ 3

1. Уравнения движения в форме Лагранжа. Обозначим через a, b и c компоненты вектора $\mathbf{r}_0=\mathbf{r}(t_0)$ (или их однозначные функции) и перейдем в уравнении (2) п. 3.43 к лагранжевым координатам. Для этого заменим в уравнении (2) п. 3.43 ускорение $d\mathbf{q}/dt$ его лагранжевым выражением

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt}=\frac{\partial^2\mathbf{r}(t,\ a,\ b,\ c)}{\partial t^2};$$

тогда скалярные уравнения (5) п. 3.43 примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2x}{\partial t^2}&=\frac{\partial\Omega}{\partial x}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ \frac{\partial^2y}{\partial t^2}&=\frac{\partial\Omega}{\partial y}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y},\\ \frac{\partial^2z}{\partial t^2}&=\frac{\partial\Omega}{\partial z}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}\qquad(1^*)$$

Теперь нам осталось исключить производные по координатам x, y и z. Так как

$$\frac{\partial}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a},$$

то, умножая уравнения системы (1*) на $\partial x/\partial a$, $\partial y/\partial a$, $\partial z/\partial a$ и складывая результаты, умножая затем на $\partial x/\partial b$, $\partial y/\partial b$, $\partial z/\partial b$ и складывая результаты и, наконец, умножая на $\partial x/\partial c$, $\partial y/\partial c$, $\partial z/\partial c$ и снова складывая результаты, мы приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial a}=\frac{\partial \Omega}{\partial a}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a},\\
&\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial b}=\frac{\partial \Omega}{\partial b}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial b},\\
&\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial c}=\frac{\partial \Omega}{\partial c}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial c}.
\end{aligned}\qquad (2^*)$$

Система (2*) представляет собой систему скалярных уравнений движения в форме Лагранжа.

2. Вывод кинематического условия на свободной поверхности. Пусть уравнение свободной поверхности волны (поверхность S) задано в форме

$$F(x,\ y,\ z,\ t)=0. \qquad (3^*)$$

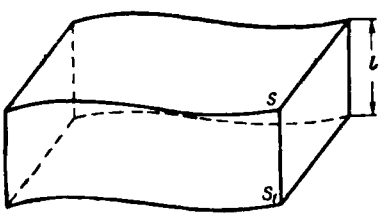


Рис. 1*.

Напишем условие неразрывности для объема T, ограниченного сверху поверхностью S в момент времени t_0, снизу поверхностью S_1, которая представляет собой геометрическое место вершин отрезков длиной l, отложенных по нормали к поверхности волны, и боковой поверхностью, образованной отрезками нормалей к поверхности волны, проведенных в точках некоторого замкнутого контура, построенного на поверхности S (см. рис. 1*).

В момент времени $t=t_0+\Delta t$ точки поверхности волны $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$, $z=z_0+\Delta z$ будут удовлетворять уравнению

$$F(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z,\ t_0+\Delta t)=0$$

или

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0(y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0(z-z_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_0\Delta t=0+O(\Delta t^2). \qquad (4^*)$$

Здесь индексом 0 обозначены точки поверхности волны в момент времени $t=t_0$.

Вычислим изменение объема T за время Δt за счет деформации поверхности S (поверхность S_1 предполагается неизменной):

$$\Delta T=\int_S\int \Delta l\, ds,$$

где Δl — приращение отрезка l за время Δt в точке x_0, y_0, z_0. Вычислим его длину.

Вершина отрезка $l+\Delta l$, точка x, y, z, должна удовлетворять, во-первых, уравнению (4*), а во-вторых, уравнению нормали:

$$z-z_0=\frac{(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}}, \qquad y-y_0=\frac{(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}. \tag{5*}$$

Если отбросить члены второго порядка малости, то из уравнений (4*) и (5*) можно вычислить величины $x-x_0$, $y-y_0$ и $z-z_0$; в результате находим следующие соотношения:

$$x-x_0=-\frac{\partial F}{\partial t}\Delta t\frac{\partial F}{\partial x}\frac{1}{k^2},$$

$$y-y_0=-\frac{\partial F}{\partial t}\Delta t\frac{\partial F}{\partial y}\frac{1}{k^2},$$

$$z-z_0=-\frac{\partial F}{\partial t}\Delta t\frac{\partial F}{\partial z}\frac{1}{k^2},$$

где

$$k^2=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2.$$

Таким образом,

$$\Delta h=\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\Delta t}{k}.$$

Поэтому приращение объема ΔT равно

$$\Delta T=\int\int_S\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\Delta t\,dS}{k}.$$

Изменение массы в объеме T может быть компенсировано, во-первых, за счет притока жидкости через поверхность S_1 и через боковую поверхность S_2 и, во-вторых, за счет изменения плотности жидкости. Принимая во внимание знак нормали, мы получаем следующее равенство:

$$\int\int_S\varrho\frac{\partial F}{\partial t}\frac{dS}{k}=-\int\int_{S_1}\varrho v_n\,dS+\int\int_{S_2}\varrho v_n\,dS-\int_T\frac{\partial\varrho}{\partial t}\,dT.$$

Второе и третье слагаемые в правой части полученного равенства имеют порядок l. Следовательно, переходя к пределу при $l\to 0$ и принимая во внимание, что поверхность S произвольна, мы получаем условие неразрывности в следующем виде:

$$v_n+\frac{1}{k}\frac{\partial F}{\partial t}=0. \tag{6*}$$

Нетрудно убедиться, что условие (6*) и условие $dF/dt=0$, приведенное в тексте гл. 3, тождественны.

В самом деле,

$$v_n=\frac{1}{k}\left[\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial z}\right].$$

Используя выражение v_n, мы получаем

$$\frac{dF}{dt}=0. \tag{7*}$$

Итак, кинематическое условие на свободной поверхности состоит в том, что эта поверхность является интегралом движения.

Если поверхность жидкости задана уравнением

$$z = f(x, y, t),$$

то условие (7*) заменится следующим:

$$v_z \equiv \frac{dz}{dt} = \frac{df}{dt}.$$

Приведенный здесь вывод показывает, что кинематическое условие, которое должно выполняться на свободной поверхности, представляет собой простое следствие гипотезы неразрывности.

3. Теоремы о сохраняемости вихревых движений. 1) Теория сохраняемости вихревых движений была в очень изящной и законченной форме изложена ленинградским математиком А. А. Фридманом в книге «Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости», ГТТИ, 1934. Эта теория основывается на одной теореме, имеющей весьма общий характер. Мы приводим здесь эти результаты, следуя изложению А. А. Фридмана.

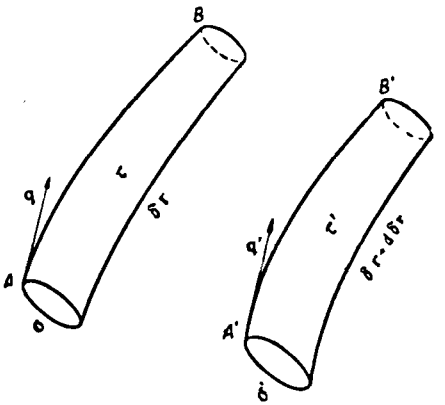


Рис. 2*.

Пусть движущаяся жидкость связана с некоторым векторным полем $\mathbf{a}$, которое предполагается непрерывным и таким, что внутри жидкости нет точек, где $|\mathbf{a}| = 0$.

В процессе движения векторные линии векторного поля $\mathbf{a}$ изменяются. Будем говорить, что имеет место сохраняемость векторных линий, если эти линии состоят все время из одних и тех же жидких частиц. Если, кроме того, интенсивность векторных трубок поля $\mathbf{a}$ во времени не изменяется, то будем говорить о сохранении интенсивности трубок.

Теорема Фридмана. *Для сохраняемости векторных линий и векторных трубок векторного поля* $\mathbf{a}$ *необходимо и достаточно, чтобы векторное поле* $\mathbf{a}$ *удовлетворяло следующему условию*:

$$\frac{d\mathbf{a}}{\partial t} - (\mathbf{a}, \nabla)\,\mathbf{q} + \mathbf{a}\nabla\mathbf{q} = 0, \tag{8*}$$

где $\mathbf{q} = d\mathbf{r}/dt$ *— скорость частицы.*

Выражение $d\mathbf{a}/dt - (\mathbf{a}, \nabla)\,\mathbf{q} + \mathbf{a}\nabla\mathbf{q}$ А. А. Фридман назвал *гельмгольциаком* векторного поля $\mathbf{a}$ ($\mathrm{helm}\,\mathbf{a}$). Таким образом, условие (8*) можно записать еще и так: $\mathrm{helm}\,\mathbf{a} = 0$.

Доказательство необходимости. Рассмотрим два положения элементарной векторной трубки (см. рис. 2*) в моменты времени t и $t + \Delta t$. Обозначим через τ' объем, занятый в момент времени $t + \Delta t$ теми частицами жидкости, которые в момент времени t занимали объем τ.

Масса жидкости в объемах τ и τ' одинакова, т. е.

$$\rho\sigma\,|\,\delta\mathbf{r}\,| = \rho'\sigma'\,|\,\delta\mathbf{r} + d\delta\mathbf{r}\,|. \tag{9*}$$

Используя условие сохранения интенсивности векторных трубок

$$\sigma\alpha = \sigma'\alpha',$$

исключим из равенства (9*) площадь поперечного сечения σ; в результате имеем

$$\varrho \frac{|\delta \mathbf{r}|}{a} = \frac{\varrho' |\delta \mathbf{r} + d\delta \mathbf{r}|}{a'} = \eta. \tag{10*}$$

Здесь через η обозначен некоторый скаляр.

Так как векторы $\delta \mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны, то это равенство можно переписать в векторной форме

$$\frac{\delta \mathbf{r}}{\frac{\mathbf{a}}{\varrho}} = \frac{\delta \mathbf{r} + d\delta \mathbf{r}}{\left(\frac{\mathbf{a}}{\varrho}\right)'} = \eta,$$

откуда

$$\frac{d\delta \mathbf{r}}{dt} = \eta \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{a}}{\varrho}\right).$$

Но

$$\frac{d}{dt}\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{q} = (\delta \mathbf{r}, \nabla)\mathbf{q} = \eta \frac{(\mathbf{a}, \nabla)}{\varrho}\mathbf{q},$$

поэтому равенство (10*) окончательно можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{a}}{\varrho}\right) - \frac{(\mathbf{a}, \nabla)}{\varrho}\mathbf{q} = 0. \tag{11*}$$

Принимая во внимание уравнение неразрывности

$$\frac{d\varrho}{dt} = -\varrho \nabla \mathbf{q}$$

и проводя дифференцирование в левой части уравнения (11*), получаем условие (8*).

Доказательство достаточности. Предположим теперь, что векторное поле $\mathbf{a}$ удовлетворяет уравнению (8*). Построим новое векторное поле $\mathbf{b}$ таким образом, чтобы в начальный момент $t = t_0$ оба поля совпадали и таким образом, чтобы векторное поле $\mathbf{b}$ удовлетворяло условиям сохраняемости; тогда векторное поле $\mathbf{b}$ также будет удовлетворять уравнению (8*):

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} - (\mathbf{b}, \nabla)\mathbf{q} + \mathbf{b}\nabla \mathbf{q} = 0.$$

Таким образом, вектор-функции $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ решают одну и ту же задачу Коши для уравнения (8*). В силу теоремы Коши — Ковалевской эти вектор-функции тождественны, что и требовалось доказать.

Пусть теперь поле $\mathbf{a}$ есть поле вихрей

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\zeta}.$$

В этом случае условие (8*) запишется в виде

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} - (\boldsymbol{\zeta}, \nabla)\mathbf{q} + \boldsymbol{\zeta}\nabla \mathbf{q} = 0. \tag{12*}$$

2) Выведем теперь уравнение Гельмгольца. Для этого к уравнению движения

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{q}^2\right) - \mathbf{q} \times \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{F} - \frac{1}{\varrho}\nabla p$$

применим операцию вихря. Тогда после несложных выкладок мы получим следующее уравнение:

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt}-(\boldsymbol{\zeta},\nabla)\mathbf{q}+\boldsymbol{\zeta}\nabla\mathbf{q}=\nabla\times\mathbf{F}+\frac{1}{\varrho^2}(\nabla\varrho\times\nabla p). \qquad (13^*)$$

Полученное уравнение носит название уравнения Гельмгольца.

На основании теоремы Фридмана мы можем утверждать, что для сохраняемости вихрей необходимо и достаточно, чтобы правая часть уравнения Гельмгольца обратилась в нуль. Отсюда, как следствие, получается теорема Гельмгольца.

Теорема Гельмгольца. *Если массовые силы консервативны, т. е. если* $\mathbf{F}=\nabla V$ *и течение жидкости баротропно, т. е.* $\varrho=f(p)$, *то вихревые линии и интенсивность вихревых трубок обладают свойством сохраняемости.*

В самом деле, в этом случае

$$\nabla\times\mathbf{F}=\nabla\times\nabla V=0,$$

$$\nabla\varrho\times\nabla p=\frac{df}{dp}\nabla\varrho\times\nabla p=0.$$

3) Если жидкость несжимаема, то в случае консервативных сил уравнение Гельмгольца принимает вид

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt}=(\boldsymbol{\zeta},\nabla)\mathbf{q}.$$

В частном случае, когда движение плоское, т. е. в случае, когда $\mathbf{q}=\mathbf{q}(x, y)$, $\boldsymbol{\zeta}=\zeta\mathbf{z}^0$, отсюда следует, что $d\zeta/dt=0$, т. е. вихрь в данной частице не изменяется со временем.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ 19

1. Силы и деформации

1) Силы, действующие на жидкую частицу, разделяют обычно на массовые и поверхностные. К числу первых относятся силы тяготения и инерции. Они определяются некоторым векторным полем — полем напряженности.

Поверхностными силами называются силы, возникающие в результате поверхностного взаимодействия частиц жидкости. Эти силы не могут быть описаны векторным полем. Пусть S — некоторая поверхность, проведенная внутри жидкости (рис. 3*). Тогда на частицы жидкости, лежащие слева от поверхности S, действует некоторая сила со стороны частиц жидкости, лежащих справа от поверхности S. Силу, действующую через площадку dS на частицы жидкости, лежащие слева от S, со стороны частиц, лежащих справа, будем обозначать $\mathbf{p}_n\,dS$. Силу, действующую на частицы, лежащие справа, со стороны частиц, лежащих слева, будем обозначать $\mathbf{p}_{-n}\,dS$. Согласно третьему закону Ньютона, имеем

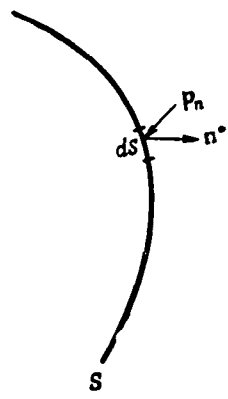


Рис. 3*

$$\mathbf{p}_n=\mathbf{p}_{-n},$$

где $\mathbf{n}^0$ обозначает направление нормали.

Изменив форму поверхности (а следовательно, и направление нормали в точке P), мы получим другое значение вектора $\mathbf{p}_n$.

Таким образом, поверхностные силы зависят от ориентации площадки и, следовательно, в данной точке P не могут быть определены единственным образом.

Вектор $\mathbf{p}_n$ в общем случае составляет некоторый угол с нормалью $\mathbf{n}^0$. Проекцию этого вектора на направление нормали будем называть нормальным напряжением. Иногда будем употреблять термин «нормальное давление» или «растяжение», смотря по тому, тупой или острый угол образует вектор $\mathbf{p}_n$ с положительным направлением нормали. Компоненту вектора $\mathbf{p}_n$, лежащую в касательной плоскости к поверхности S, будем называть силой трения или касательным напряжением.

2) Докажем, что поверхностные силы (напряжения) полностью определяются заданием в каждой точке пространства трех векторов, причем эти три вектора образуют аффинный тензор второго ранга.

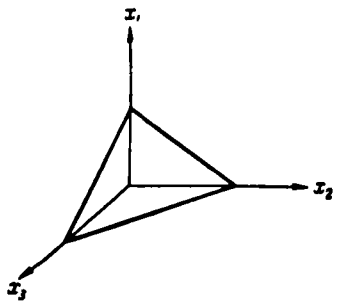


Рис. 4*.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим равновесие жидких частиц внутри некоторого тетраэдра, грани которого параллельны координатным плоскостям (рис. 4*). Согласно принципу Даламбера, эта система материальных точек будет находиться в равновесии, если к числу массовых сил добавить силы инерции. Но так как объемные силы пропорциональны кубу линейного размера, а поверхностные — квадрату линейного размера, то при исследовании равновесия тетраэдра достаточно малых размеров мы можем ограничиться рассмотрением только одних поверхностных сил. Это замечание не ограничивает общности, так как в процессе доказательства теоремы мы совершим предельный переход, стягивая тетраэдр в точку. Объемные силы окажутся при этом малыми величинами высшего порядка.

Обозначим через S_i грани, нормали к которым совпадают с отрицательными направлениями координатных осей, а через S — наклонную грань тетраэдра. Условие равновесия запишется в виде

$$\sum_i S_i \mathbf{p}_{ni} + S\mathbf{p}_n = 0, \qquad (1^*)$$

но $\mathbf{n}_i^0 = -\mathbf{x}_i^0$; $S_i = S\cos(\widehat{x_i, n}) = Sa_{ni}$, поэтому равенство (1*) можно переписать следующим образом:

$$\sum_i \mathbf{p}_{-x_i} a_{ni} + \mathbf{p}_n = 0,$$

или

$$\mathbf{p}_n = \sum_i \mathbf{p}_{x_i} a_{n_i}. \qquad (2^*)$$

Равенство (2*) справедливо с точностью до малых величин второго порядка (отброшены малые величины третьего порядка). Стягивая тетраэдр к точке P, мы получаем точное равенство (2*), справедливое в любой точке жидкости P. Равенство (2*) показывает, что в любой точке внутри жидкости напряжение $\mathbf{p}_n$, отнесенное к площадке, имеющей нормаль $\mathbf{n}^0$, однозначно определяется тремя векторами $\mathbf{p}_i$.

Эта тройка векторов образует тензор. В самом деле, ориентация площадки S, а следовательно, и нормали $\mathbf{n}^0$ совершенно произвольны. Поэтому мы можем произвольную тройку ортогональных векторов $\mathbf{y}_i^0 = \mathbf{n}_i^0$ (нормалей к трем площадкам S_i) принять в качестве новых осей декартовой системы координат.

Каждому такому направлению будет соответствовать вектор $\mathbf{p}'_i$, определенный, согласно (2*), формулой

$$\mathbf{p}'_i = \sum_i \mathbf{p}_i \alpha_{n_i}, \tag{3*}$$

где

$$\mathbf{p}_{x_i} = \mathbf{p}_i.$$

Но формула (3*), которая определяет векторы $\mathbf{p}'_i$, заданные в системе координат (y_1, y_2, y_3), через векторы $\mathbf{p}_i$, определенные в системе координат (x_1, x_2, x_3), как раз и является определением тензора (см. приложение к главе 2). Тройка векторов $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ называется *тензором напряжений* и обозначается буквой П. В матричной форме этот тензор имеет следующий вид:

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}.$$

Скалярные компоненты p_{ii} являются нормальными напряжениями, а компоненты p_{ij} $(i \neq j)$ определяют касательные напряжения.

3) Тензор П является симметричным тензором $(p_{ik} = p_{ki})$. Это утверждение носит название теоремы взаимности. Подобно тому, как из принципа Даламбера для сил непосредственно следовал тот факт, что напряженное состояние описывается тензором П, теорема взаимности является прямым следствием принципа Даламбера, записанного для моментов сил.

Для доказательства этого рассмотрим равновесие малого равностороннего тетраэдра. Напишем условие равенства нулю моментов относительно вершины тетраэдра, учитывая при этом только малые второго порядка:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n S = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i S_i,$$

или

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \alpha_{ni}, \tag{4*}$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиусы-векторы центров тяжести граней S_i тетраэдра, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор центра тяжести грани S.

Умножим обе части равенства (2*) на $\mathbf{r}$ векторно слева и вычтем из результата равенство (4*); тогда

$$\sum (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{p}_i \alpha_{ni} = 0. \tag{5*}$$

Обозначим через $x_i^{(j)}$ проекцию вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}_i$ на ось x_j. В силу симметрии очевидно, что

$$x_1^{(1)} = x_2^{(2)} = x_3^{(3)} = l, \quad x_i^{(j)} = 0, \quad i \neq j.$$

Таким образом, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_i = l\mathbf{x}_i^0$; кроме того, $\alpha_{n1} = \alpha_{n2} = \alpha_{n3}$.

Принимая все это во внимание, мы приведем равенство (5*) к виду

$$\sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i = 0.$$

Умножим это равенство скалярно на $\mathbf{x}_k^0$. Заметим, что $(\mathbf{x}_k \times \mathbf{p}_k)\,\mathbf{x}_k^0 = 0$, поэтому, полагая последовательно $k = 1, 2, 3$, мы получаем следующие равенства:

$$(\mathbf{x}_2^0 \times \mathbf{p}_2)\,\mathbf{x}_1^0 + (\mathbf{x}_3^0 \times \mathbf{p}_3)\,\mathbf{x}_1^0 = 0,$$
$$(\mathbf{x}_1 \times \mathbf{p}_2)\,\mathbf{x}_2^0 + (\mathbf{x}_3^0 \times \mathbf{p}_3)\,\mathbf{x}_2^0 = 0,$$
$$(\mathbf{x}_1 \times \mathbf{p}_1)\,\mathbf{x}_3^0 + (\mathbf{x}_2 \times \mathbf{p}_2)\,\mathbf{x}_3^0 = 0.$$

Раскрывая смешанные произведения, мы получаем равенства

$$p_{12}=p_{21};\quad p_{13}=p_{31};\quad p_{23}=p_{32},$$

что и требовалось доказать.

4) Рассмотрим частный случай идеальной жидкости, т. е. жидкости, в которой касательные напряжения отсутствуют. Это означает, что вектор напряжения $\mathbf{p}_n$ коллинеарен вектору нормали. Положим

$$\mathbf{p}_n=-p_n\mathbf{n}^0,$$

где p_n — некоторый скаляр. Подставим это равенство в формулу (2*); тогда

$$-p_n\mathbf{n}^0=-\sum_i p_i a_{ni}\mathbf{x}_i^0.$$

Умножая это равенство скалярно на $\mathbf{x}_i^0$ $(i=1, 2, 3)$, мы получаем

$$p_1=p_2=p_3=p_n=p.$$

Итак, величина нормального давления в идеальной жидкости не зависит от ориентировки площадки. Величина p в идеальной жидкости называется *гидростатическим давлением*. Тензор Π в этом случае имеет следующий вид:

$$\Pi=\begin{pmatrix}-p & 0 & 0\\ 0 & -p & 0\\ 0 & 0 & -p\end{pmatrix}=-pE, \tag{6*}$$

где E — единичный тензор.

2. Тензор скоростей деформаций. Теорема Гельмгольца

1) Рассмотрим изменение поля скоростей жидких частиц при переходе от точки P_0 к близкой точке P_1. Обозначим через $\mathbf{v}_0$ скорость жидкой частицы, которая в данный момент находится в точке P_0 (радиус-вектор которой обозначим через $\mathbf{r}_0$). Обозначим через $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_0+d\mathbf{v}$ скорость жидкой частицы, находящейся в точке P_1, радиус-вектор которой обозначим через $\mathbf{r}_0+d\mathbf{r}$; тогда

$$d\mathbf{v}=\sum_i dv_i\mathbf{x}_i^0,\quad dv_i=\sum_j\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_{r=r_0}dx_j,\ \text{где } i=1, 2, 3. \tag{7*}$$

Три скалярные равенства (7*) объединим следующим векторным равенством:

$$d\mathbf{v}=\left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\right)d\mathbf{r}, \tag{8*}$$

где

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\end{pmatrix}. \tag{9*}$$

Равенство (8*) не зависит от выбора системы координат и в любой системе координат вектору $d\mathbf{r}$ ставит в соответствие вектор $d\mathbf{v}$. Следовательно, на основании теоремы о характеристическом свойстве тензора, матрица $d\mathbf{v}/d\mathbf{r}$, определенная равенством (9*), является *аффинным тензором второго ранга*. Этот тензор называется производной вектора по вектору.

2) Всякий тензор может быть представлен в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров. Положим

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\right)=\dot{S}+T, \tag{10*}$$

где $\dot{S}$ — симметричный тензор,

$$\dot{S}=\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix},$$

а T — антисимметричный тензор,

$$T=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор $\dot{S}$ называется *тензором скоростей деформаций.*

Умножение вектора $d\mathbf{r}$ слева на антисимметричный тензор эквивалентно умножению вектора $d\mathbf{r}$ слева на некоторый вектор. Легко проверить, что

$$\mathbf{a}\times d\mathbf{r}=\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} d\mathbf{r}.$$

В нашем случае, как легко убедиться,

$$\mathbf{a}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{v}.$$

Отсюда, в частности, следует утверждение: для того чтобы течение было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы тензор $(d\mathbf{v}/d\mathbf{r})$ был симметричным.

Итак, мы приходим к следующему равенству:

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times d\mathbf{r}+S\,d\mathbf{r}. \tag{11*}$$

Равенство (11*) имеет глубокий физический смысл. Оно показывает, что поле скоростей в окрестности данной частицы может быть разбито на три слагаемых. Первое слагаемое — это скорость, которую имела бы жидкая частица, если бы она двигалась поступательно. Второе слагаемое — это скорость вращательного движения частицы вокруг точки P с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{v}$. Эти два слагаемых вектора $\mathbf{v}$ определяют скорость движения точки, принадлежащей частице, если бы частица жидкости была абсолютно твердой; сумма этих двух слагаемых называется скоростью квазитвердого движения. Третье слагаемое — это скорость так называемого деформационного движения, существование которого качественно отличает поле скоростей движения газа (или жидкости) от движения твердого тела.

Установленный результат носит название теоремы Гельмгольца. Окончательную формулировку этой теоремы мы примем в следующем виде: *Всякое движение жидкости или газа в окрестности любой точки можно разложить на квазитвердое движение и движение, вызванное деформацией.*

3. Общее уравнение движения сплошной среды

1) Чтобы вывести уравнение движения сплошной среды, воспользуемся снова принципом Даламбера. Для этого выделим некоторую массу жидкости, заключенную в конечном объеме τ. Пусть S — поверхность, ограничивающая этот объем, $\mathbf{w}$ — ускорение жидких частиц, ϱ — плотность среды, $\mathbf{F}$ — вектор напряженности массовых сил, $\mathbf{p}_n$ — напряжение поверхностных сил. Применяя принцип Даламбера для выделенной материальной системы, получаем следующее уравнение:

$$-\int_\tau \varrho \mathbf{w}\, d\tau + \int_\tau \varrho \mathbf{F}\, d\tau + \int_S \mathbf{p}_n\, dS = 0. \tag{12*}$$

Преобразуем входящий в это равенство интеграл по поверхности в интеграл по объему при помощи формулы Гаусса — Остроградского

$$\int \mathbf{p}_n\, dS = \int_\tau \operatorname{div} \Pi\, d\tau, \tag{13*}$$

где

$$\operatorname{div} \Pi = \sum \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \mathbf{x}_i}. \tag{14*}$$

Используя равенство (13*) и произвольность объема τ, мы получаем дифференциальное уравнение

$$\mathbf{w} = \mathbf{F} + \frac{1}{\varrho} \operatorname{div} \Pi. \tag{15*}$$

(Разумеется, в этом выводе мы предполагали, что все функции, определяющие и характеризующие движение, являются непрерывными функциями координат и имеют соответствующие производные.)

Это уравнение называется уравнением движения сплошной среды в напряжениях. Поскольку при его выводе мы не делали никаких предположений о характере тензора Π, то уравнение (15*) справедливо для любой сплошной среды.

2) Рассмотрим частный случай идеальной жидкости. Идеальной жидкостью мы условились называть жидкость, в которой отсутствуют касательные напряжения и, следовательно, тензор напряжений имеет вид (6*), откуда

$$\operatorname{div} \Pi = \sum \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \mathbf{x}_i} = -\sum \frac{\partial p}{\partial x_i} \mathbf{x}_i^0 = -\nabla p.$$

Итак, если тензор Π представляется в форме (6*), то мы получаем уравнения Эйлера:

$$\mathbf{w} = \mathbf{F} - \frac{1}{\varrho} \nabla p, \tag{16*}$$

которые вместе с уравнением неразрывности

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

для несжимаемой жидкости ($\varrho = \text{const}$) образуют замкнутую систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных: компонент вектора $\mathbf{v}$ и давления p.

4. Вывод уравнений Навье — Стокса

1) В общем случае произвольной вязкой жидкости тензор Π (в силу его симметрии) определяется заданием 6 скалярных величин. Следовательно, для того чтобы поставить задачу, нам надо задать определенное количество связей

между компонентами тензора напряжений и компонентами вектора скорости и его производными. Эти связи в гидродинамике вводятся на основе опытных представлений и носят характер гипотез. Законность этих гипотез основывается на вековой практике, показывающей, что существует широкий класс жидкостей и типов движения этих жидкостей, для которых эти гипотезы выполняются.

В основе наших представлений о взаимосвязи между полем тензора напряжений, полем скоростей и полем тензора $d\mathbf{v}/d\mathbf{r}$ лежит закон Ньютона. Если движение происходит вдоль оси x_i и параллельно плоскости x_i, x_j, то, согласно закону Ньютона, сила трения (отнесенная к единице площади) равна

$$p_{ij} = \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \qquad (v_k = 0,\ k \neq j), \tag{17*}$$

где μ — коэффициент вязкости.

Справедливость этого закона (вернее, точность аппроксимации, которую он дает) подтверждена экспериментально для огромного большинства жидкостей и газов, когда они движутся в условиях, принятых в классической гидродинамике. Жидкости, которые подчиняются закону (17*), будем называть ньютоновскими. Разумеется, существуют исключения. К числу неньютоновских жидкостей относятся, например, жидкости типа полимеров, обладающие очень большими молекулами, у которых, к тому же, одно измерение значительно больше двух других. Точно так же в условиях большой разреженности любой газ перестает быть ньютоновским.

Итак, согласно закону Ньютона, компоненты тензора напряжений определяются компонентами тензора $d\mathbf{v}/d\mathbf{r}$, который, как мы указывали, может быть представлен в виде суммы (10*) симметричного и антисимметричного тензоров. Антисимметричный тензор T описывает квазитвердое движение элементарных частиц жидкости, при котором силы вязкости равны нулю. Следовательно, компоненты тензора Π могут зависеть только от компонент тензора скоростей деформаций $\dot{S}$.

Закон Ньютона формулирует для одного частного случая — плоскопараллельного движения — линейную связь между компонентами обоих тензоров. Поэтому для распространения этого закона на случай произвольного движения жидкости естественно постулировать линейную связь между тензорами Π и $\dot{S}$. Итак, первая наша гипотеза будет состоять в том, что искомая связь имеет вид

$$\Pi = A\dot{S} + B. \tag{18*}$$

Выражение (18*) — это общее представление линейной тензор-функции. Здесь A — тензор, который зависит только от физических свойств среды и не зависит от характера движения и напряженного состояния (т. е. от компонент Π и $\dot{S}$) [1]). Тензор B может зависеть от компонент $\dot{S}$ и Π, но формула (18*) должна быть инвариантна относительно системы отсчета, следовательно, B может зависеть только от инвариантов тензоров $\dot{S}$ и Π, а из линейности (18*) сразу следует, что B может зависеть только от первых (линейных) инвариантов тензоров $\dot{S}$ и Π, т. е. от скаляров

$$\nabla\mathbf{v} = \sum \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \qquad \sum_i p_{ii}.$$

Ниже мы используем этот факт.

---

[1]) В противном случае равенство (18*) определяло бы нелинейную связь между Π и $\dot{S}$.

Вторая гипотеза будет состоять в предположении об изотропности среды: физические свойства среды не должны зависеть от направления и характера движения.

Эту гипотезу можно сформулировать еще и так. Главные направления тензоров Π и $\dot{S}$ должны быть коллинеарны. В самом деле, пусть это условие не имеет места; тогда в качестве осей координат в точке P выберем главные оси тензора $\dot{S}$. Недиагональные элементы тензора $\dot{S}$ будут равны нулю. Если соответствующая компонента силы трения не равна нулю, то мы должны приписать ей знак плюс или минус; выбор этого знака выделит некоторые преимущественные направления.

Из этой гипотезы сразу следует, что A и B в любой системе координат представляют собой диагональные тензоры. Более того, из равноправия любых направлений должно следовать утверждение о том, что тензорные эллипсоиды тензоров A и B имеют равные полуоси. Другими словами, тензоры A и B имеют вид

$$A = aF, \qquad B = bE,$$

где a и b — некоторые скаляры, причем скаляр a зависит только от физических свойств среды, т. е. от вязкости,

$$a = a(\mu),$$

а скаляр b есть линейная функция первых инвариантов тензоров Π и $\dot{S}$, т. е.

$$b = b_0 + b_1 \nabla \mathbf{v} + b_2 \sum p_{ii}. \tag{19*}$$

Итак, связь тензоров Π и $\dot{S}$ мы будем искать в виде

$$\Pi = a\dot{S} + (b_0 + b_1 \nabla \mathbf{v} + b_2 \sum p_{ii})\, E. \tag{20*}$$

2) Найдем теперь коэффициенты a, b_0, b_1 и b_2. Введем еще одну гипотезу: закон (20*) должен как частный случай содержать закон Ньютона (17*). Рассмотрим плоскопараллельное течение вдоль оси x_i (параллельное плоскости x_i, x_j). Тогда $v_i = v_i(x_i, x_j)$, $v_j = 0$, $v_k = 0$. Формула (17*) в этом случае дает

$$p_{ij} = \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \tag{21*}$$

а из формулы (20*) следует, что

$$p_{ij} = \frac{a}{2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}; \tag{22*}$$

сопоставление этих выражений однозначно определяет коэффициент a,

$$a = 2\mu.$$

Для определения скаляров b_0, b_1 и b_2 приравняем первые инварианты тензоров, стоящих в обеих частях равенства (20*),

$$\sum p_{ii} = 2\mu \nabla \mathbf{v} + 3b_0 + 3b_1 \nabla \mathbf{v} + 3b_2 \sum p_{ii}. \tag{23*}$$

Это равенство должно иметь место для любых форм движения, т. е. должно выполняться при любых значениях $\sum p_{ii}$ и $\nabla \mathbf{v}$. Отсюда, приравнивая соответствующие слагаемые, мы сразу получаем

$$b_0 = 0, \quad b_1 = -{}^2/_3\mu, \quad b_2 = {}^1/_3.$$

Итак, формула (20*) может быть переписана в следующем виде:

$$\Pi = 2\mu\dot{S} + ({}^1/_3 \sum p_{ii} - {}^2/_3\mu \nabla v)\, E. \tag{24*}$$

Это и есть искомая связь между компонентами обоих тензоров, однако в полученной форме это выражение еще неудобно для использования, поскольку в правую часть входит выражение $\Sigma\, p_{ii}$.

Выясним смысл величины $\Sigma\, p_{ii}$. Сила вязкости проявляется только при движении (при наличии градиентов скорости); следовательно, естественно предположить, что напряженное состояние в покоящейся вязкой жидкости будет таким же, как и в покоящейся идеальной жидкости. Но в идеальной жидкости

$$\sum p_{ii} = -3p, \tag{25*}$$

где p — гидростатическое давление.

Введем еще одну гипотезу: постулируем равенство (25*), т. е. будем считать, что оно выполняется в движущейся вязкой жидкости. Тогда формула (24*) может быть переписана так:

$$\Pi = 2\mu\dot{S} - (p + {}^2/_3\mu\nabla\mathbf{v})\,E. \tag{26*}$$

Формула (26*) носит название обобщенного закона Ньютона.

3) Утверждение (25*), вообще говоря, необоснованно даже интуитивно. В самом деле, нет никаких оснований отождествлять давление, определенное формулой (25*), и давление, которое определяется уравнением состояния $p = \varrho RT$, где R — газовая постоянная, а T — абсолютная температура. Более естественно предположить, что $\Sigma\, p_{ii} = -3p + d$, где d — некоторый скаляр, обращающийся в нуль, когда жидкость покоится ($\mathbf{v} = 0$), и инвариантный относительно замены системы отсчета.

На этом основании примем ${}^1/_3\,\Sigma\, p_{ii} = -p + \lambda\nabla\mathbf{v}$; коэффициент λ носит название коэффициента второй вязкости. Впервые исследование явления второй вязкости было проведено Л. Д. Ландау [1]). Существование коэффициента второй вязкости было установлено экспериментально. Одновременно тоже экспериментально было показано, что этот коэффициент заметно отличается от нуля только в особых случаях (например, если в жидкости происходят химические реакции специального вида). Таким образом, в настоящее время существует твердая уверенность в том, что в рамках классической гидродинамики нет необходимости учитывать эффект второй вязкости. На этом основании мы сохраним выражение для связи между тензорами Π и $\dot{S}$ в форме (26*).

4) Перепишем равенство (26*) в скалярной форме

$$p_{ij} = \begin{cases} \mu\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \\ 2\mu\dfrac{\partial v_i}{\partial x_i} - p - \dfrac{2}{3}\mu\,\operatorname{div}\mathbf{v}. \end{cases} \tag{27*}$$

Равенства (27*) позволяют исключить компоненты тензора Π из уравнения в напряжениях:

$$\mathbf{w} = \mathbf{F} + \frac{1}{\varrho}\operatorname{div}\Pi. \tag{28*}$$

Выражение для $\operatorname{div}\Pi$ имеет вид

$$\operatorname{div}\Pi = \sum \frac{\partial p_{1j}}{\partial x_1}\mathbf{x}_j^0 + \sum \frac{\partial p_{2j}}{\partial x_2}\mathbf{x}_j^0 + \sum \frac{\partial p_{3j}}{\partial x_3}\mathbf{x}_j^0 = \\ = \mathbf{x}_1^0 \sum \frac{\partial p_{i1}}{\partial x_i} + \mathbf{x}_2^0 \sum \frac{\partial p_{i2}}{\partial x_i} + \mathbf{x}_3^0 \sum \frac{\partial p_{i3}}{\partial x_i}. \tag{29*}$$

---

[1]) См. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953, стр. 376.

Используя (27*) и (29*), мы приведем уравнение в напряжениях (28*) к следующей системе скалярных уравнений:

$$\begin{aligned}
\varrho\frac{dv_1}{dt} &= \varrho F_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} + 2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)\right] + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_3}\left[\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\right] - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_1}(\mu \operatorname{div} \mathbf{v}), \\
\varrho\frac{dv_2}{dt} &= \varrho F_2 - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)\right] + 2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mu\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_3}\left[\mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)\right] - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_2}(\mu \operatorname{div} v), \\
\varrho\frac{dv_3}{dt} &= \varrho F_3 - \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)\right] + \\
&\quad + 2\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\mu\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_3}(\mu \operatorname{div} v).
\end{aligned} \tag{30*}$$

Если жидкость несжимаемая и μ — величина постоянная, то система уравнений (30*) упрощается и в векторной форме может быть записана так:

$$v\frac{dv}{dt} = \varrho\mathbf{F} - \nabla p + \mu\Delta\mathbf{v}. \tag{31*}$$

Уравнения (30*) и (31*) называются уравнениями Навье — Стокса.

В случае несжимаемой жидкости и независимости коэффициента вязкости от температуры уравнения (31*) совместно с уравнением неразрывности образуют замкнутую систему уравнений относительно трех компонент вектора $\mathbf{v}$ и давления p.

5. Уравнение энергии

1) Система уравнений Навье — Стокса и уравнение неразрывности содержат 6 неизвестных: три компоненты вектора скорости (v_1, v_2, v_3), плотность ϱ, давление p и коэффициент вязкости μ. Коэффициент вязкости зависит только от температуры и считается обычно заданной функцией абсолютной температуры T:

$$\mu = \mu(T). \tag{32*}$$

Это уравнение содержит новое седьмое неизвестное — абсолютную температуру T. Абсолютная температура связана с плотностью и давлением уравнением состояния:

$$F(p, \varrho, T) = 0.$$

В зависимости от характера среды функция F имеет ту или иную структуру. В случае газов условимся уравнение состояния брать в форме Клайперона:

$$p = \varrho RT, \tag{33*}$$

где R — газовая постоянная; в случае несжимаемой жидкости это уравнение заменяется условием

$$\varrho = \text{const}. \tag{34*}$$

Итак, мы пришли к системе шести скалярных уравнений [три уравнения Навье — Стокса, уравнение неразрывности, уравнения (32*) и (33*)], которые содержат 7 неизвестных: v_1, v_2, v_3, ϱ, p, μ, T.

Для того чтобы задача могла быть поставлена, необходимо еще одно уравнение.

Таким замыкающим уравнением является уравнение баланса энергии. Будем следить за некоторой массой жидкости, занимающей объем $\tau(t)$. Закон сохранения энергии утверждает, что изменение энергии E этой массы жидкости за единицу времени равно мощности A_1+A_2 внешних сил, притоку A_3 энергии извне и мощности A_4 внутренних источников энергии:

$$\frac{dE}{dt}=A_1+A_2+A_3+A_4. \tag{35*}$$

Энергия E массы жидкости состоит из двух слагаемых: E_1 — кинетической энергии, т. е. энергии макроскопического движения частиц

$$E_1=\frac{1}{2}\int \rho v^2 d\tau, \tag{36*}$$

и E_2 — внутренней энергии, т. е. энергии теплового движения молекул газа или жидкости.

Для газов в общем случае выражение E_2 имеет довольно сложную структуру. Мы рассмотрим только случай «совершенного газа», т. е. газа, внутренняя энергия которого определяется только поступательным движением молекул. Это значит, что энергия вращательных степеней свободы молекул пренебрежимо мала по сравнению с энергией поступательного движения. Для этого случая термодинамика дает выражение

$$E_2=I\int_\tau c_v T_\rho\, d\tau, \tag{37*}$$

где c_v — теплоемкость газа при постоянном объеме, связанная с теплоемкостью при постоянном давлении формулой

$$c_p=c_v+\frac{R}{I}\ ; \tag{38*}$$

величина I — «механический эквивалент тепла» (427 *кгм/кал*). Работа внешних сил складывается из работы массовых сил A_1 и работы поверхностных сил A_2:

$$A_1=\int_\tau \rho \mathbf{F}\mathbf{v}\, d\tau, \tag{39*}$$

$$A_2=\int_S p_n \mathbf{v}\, dS, \tag{40*}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость движения жидких частиц, а S — поверхность, ограничивающая объем τ.

Будем считать, что приток энергии извне происходит только за счет теплопроводности. Тогда, согласно закону Фурье, количество теплоты, поступившее через поверхность S в единицу времени (в механических единицах), определяется формулой

$$A_3=I\int_S \lambda \frac{\partial T}{\partial n}\, dS, \tag{41*}$$

где λ — коэффициент теплопроводности.

Кроме того, будем считать, что внутри рассматриваемой массы жидкости нет никаких дополнительных источников энергии (например, за счет химических реакций).

Подставляя в уравнение (35*) выражения (36*), (37*) и (39*)—(41*), мы можем написать следующее (упрощенное) уравнение баланса энергии:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{\tau}\rho v^2\,d\tau + I\int\limits_{\tau}c_vT\rho\,d\tau\right\} = \int\limits_{\tau}\rho\mathbf{F}\mathbf{v}\,d\tau + \int\limits_{S}\mathbf{p}_n\mathbf{v}\,dS + I\int\limits_{S}\lambda\frac{\partial T}{\partial n}\,dS. \tag{42*}$$

3) Уравнение (42*)—это уравнение баланса энергии в интегральной форме; для того чтобы получить дифференциальное уравнение, надо еще провести ряд преобразований. Прежде всего, заметим, что

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\tau}v^2\rho\,d\tau = \int\limits_{\tau}\frac{dv^2}{dt}\rho\,d\tau, \qquad \frac{d}{dt}\int c_vT\rho\,d\tau = \int c_v\frac{dT}{dt}\rho\,d\tau. \tag{43*}$$

(Эти преобразования являются прямым следствием уравнения неразрывности $d(\rho\,d\tau)/dt = 0$.) Далее преобразуем интегралы по поверхности, входящие в правую часть уравнения (42*), в интегралы по объему. Прежде всего

$$\int\limits_{S}\mathbf{p}_n\mathbf{v}\,dS = \sum_i\int\limits_{S}\mathbf{p}_i\mathbf{v}\alpha_{n_i}\,dS = \sum_j\int\limits_{S}\mathbf{a}_j\,dS, \tag{44*}$$

где $\alpha_{n_i} = \cos(\widehat{nx_i})$ $\mathbf{a}_j = \sum\limits_i p_{ij}v_j\mathbf{x}_i^0$.

Применив к этому интегралу формулу Гаусса—Остроградского, после очевидных вычислений получим

$$\int\limits_{S}\mathbf{p}_n\mathbf{v}\,dS = \int\limits_{\tau}\sum_j\operatorname{div}\mathbf{a}_j\,d\tau = \int\limits_{\tau}\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_j p_{ij}v_j\,d\tau. \tag{45*}$$

Аналогично преобразуем последнее слагаемое в уравнении (42*)

$$A_3 = I\int\limits_{S}\lambda\nabla T\,dS = \int\limits_{\tau}\operatorname{div}(\lambda\nabla T)\,d\tau. \tag{46*}$$

Используя формулы (43*), (45*) и (46*), преобразуем уравнение (42*) к виду

$$\int\limits_{\tau}F\,d\tau = 0,$$

откуда, в силу произвольности объема τ, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(Ic_vT + \frac{v^2}{2}\right) = \rho\mathbf{F}\mathbf{v} + \sum_j\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_j p_{ij}v_j + I\operatorname{div}(\lambda\nabla T). \tag{47*}$$

4) В уравнении (47*) надо заменить компоненты тензора напряжений следующими выражениями:

$$p_{ii} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu\operatorname{div}\mathbf{v}\right) + 2\mu\frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \qquad p_{ij} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \tag{48*}$$

Используя эти формулы и тождественное преобразование

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \nabla\frac{v^2}{2} - \mathbf{v}\times\boldsymbol{\Omega},$$

где $\Omega = \operatorname{rot} \mathbf{v}$, мы можем уравнению (47*) придать следующий вид:

$$\rho I c_v \frac{dT}{dt} + \rho \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} \mathbf{v} + \\ + \operatorname{div}\left(\mu \nabla v^2 - \mu \mathbf{v} \times \Omega - p\mathbf{v} - \frac{2}{3}\mu \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} + I\lambda \nabla T\right). \qquad (49^*)$$

5) Итак, мы получили уравнение, которое замыкает систему уравнений динамики жидкости и газа. Это уравнение можно было бы назвать обобщенным уравнением теплопроводности, поскольку уравнение распространения тепла содержится в нем как некоторый частный случай. В самом деле, предположим, что жидкость покоится; тогда уравнение (49*) будет иметь вид

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} \lambda \nabla T.$$

Если перепад температур мал, то коэффициент λ можно считать независимым от координат и мы приходим к известному уравненню теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k^2 \Delta T, \qquad (50^*)$$

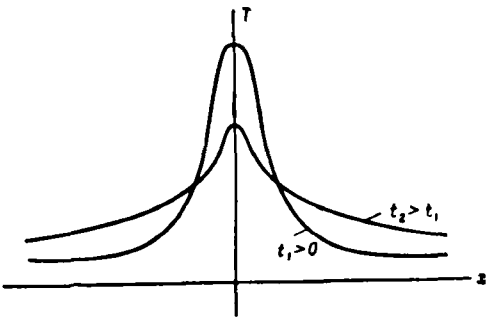


Рис. 5*.

где $k^2 = \lambda/\rho c_v$; коэффициент k носит название коэффициента температуропроводности.

Уравнение (50*) описывает распространение тепла в покоящейся жидкости за счет механизма теплопроводности. Этот механизм обеспечивает мгновенную скорость распространения тепловых возмущений (см. рис. 5*). Предположим, что частице жидкости, находящейся в момент времени $t = 0$ в точке x, мы сообщили импульсное возмущение $T(x, 0) = \delta(0) Q$, где $\delta(0)$ — дельта-функция, равная нулю всюду, кроме точки $x = 0$, и такая, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1$. Тогда распределение температуры в любой момент времени описывается формулой

$$T = \frac{Q}{\sqrt{tk^2}} e^{-x^2/(4k^2t)}. \qquad (51^*)$$

Мы видим, что каково бы ни было значение абсциссы x в любой момент t, отличный от нуля, температура будет также отлична от нуля.

6) Рассуждения, которые были здесь проведены, относились к случаю покоящейся жидкости, причем молчаливо предполагалось, что если в начальный момент жидкость покоилась, то она будет покоиться и в последующие моменты времени. Это, вообще говоря, не так. В самом деле, если температура изменится, то, согласно уравнению состояния, изменятся плотность и давление, что в свою очередь вызовет движение жидкости. Таким образом, изменение температуры среды вызывает движение жидкости. Задачи распространения тепла и задачу о движении жидкости следует рассматривать совместно. Только в одном частном случае эти задачи могут быть разделены — в случае несжимаемой жидкости при предположении, что коэффициент вязкости не зависит от температуры. Тогда $\rho = \text{const}$ и задача о движении жидкости сводится к решению уравнения неразрывности

$$\nabla \mathbf{v} = 0 \qquad (52^*)$$

и уравнения Навье — Стокса

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\varrho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}. \tag{53*}$$

Определив из этих уравнений вектор $\mathbf{v}$ и скаляр p, мы затем сможем определить поле температур из уравнения (49*), которое в этом случае примет вид

$$\varrho I c_v\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum v_i \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + \varrho\mathbf{v}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \varrho\mathbf{F}\mathbf{v} + \\ + \operatorname{div}(\mu\nabla v^2 - \mu\mathbf{v}\times\boldsymbol{\Omega} - p\mathbf{v} + I\lambda\nabla T). \tag{54*}$$

7) Из уравнения (54*) видно, что, помимо механизма теплопроводности, в распространении тепла играет роль конвективный перенос тепла — перенос за счет движения частиц жидкости. Поэтому тепловые возмущения могут распространяться также и внутри жидкости, лишенной теплопроводности ($\lambda = 0$). Для того чтобы это пояснить, рассмотрим задачу о движении идеального нетеплопроводного газа, когда уравнение (49*) принимает вид

$$\varrho I c_v \frac{dT}{dt} + \varrho\mathbf{v}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \varrho\mathbf{F}\mathbf{v} - \operatorname{div} p\mathbf{v}. \tag{55*}$$

Сделаем некоторые преобразования:

$$\operatorname{div} p\mathbf{v} = p\operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla p = p\operatorname{div}\mathbf{v} - \mathbf{v}\left(\varrho\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{F}\right);$$

в последнем преобразовании мы использовали уравнение Эйлера

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\varrho}\nabla p.$$

Таким образом, уравнение (55*) может быть преобразовано к виду

$$\varrho I c_v \frac{dT}{dt} = -p\operatorname{div}\mathbf{v}. \tag{56*}$$

Исключим дивергенцию скорости при помощи уравнения неразрывности

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = -\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dt},$$

после чего уравнение (56*) примет вид

$$\varrho I c_v \frac{dT}{dt} = \frac{p}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt}. \tag{57*}$$

Используем еще уравнение состояния $p = \varrho RT$, которое позволит исключить p, и связь $c_p = c_v + R/I$; тогда уравнение (57*) будет записано в полных дифференциалах:

$$\frac{d}{dt}\ln T = (\varkappa - 1)\frac{d}{dt}\ln\varrho,$$

где $\varkappa = c_p/c_v$. Интегрируя, получаем

$$T = C\varrho^{\varkappa-1}, \tag{58*}$$

или

$$p = C_1\varrho^{\varkappa}; \tag{59*}$$

здесь C — постоянная интегрирования, а $C_1 = CR$.

Уравнения (58*) и (59*) описывают адиабатическое расширение газа. Таким образом, уравнение адиабатичности — это частный случай уравнения энергии, написанного для нетеплопроводного идеального газа. В этом случае уравнение (58*) или (59*) является уравнением, замыкающим общую систему уравнения движения.

Рассмотрим теперь малые возмущения плотности (или давления, или скорости). Они распространяются со скоростью звука. Согласно формуле (58*), малые возмущения плотности будут порождать малые возмущения температуры и, следовательно, одновременно с распространением возмущений плотности с той же скоростью будут распространяться тепловые возмущения.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аналитическое продолжение 134
Аэродинамическая труба 452, 561

Вектор 37
— единичный 37
— — скорость изменения 70
— разложение 41
— скользящий 37
Векториая диаграмма 122, 184
Векторное произведение 38
— — тройное 40
— соленоидальное поле 48
Векторный потенциал вихря 514
Ветер, действие на глубокой воде 390
Вихревая дорожка Кармана 356
— линия 54
— — сохраняемость 91, 111
— нить 89, 515
— — движение 338
— — изолированная 337
— — круговая 518
— — параллельная плоскости 341
— — — двум перпендикулярным плоскостям 343
— — потенциал скоростей 516
— — прямолинейная 337
— — стационарная около цилиндра 349
— пелена 353
— трубка 89
Вихревое движение 89
— — электромагнитная аналогия 517
Вихревой диполь 342
— след 552
— — сопротивление 359
Вихреисточник 342
Вихрь 48, 54, 69, 70, 89, 110, 111, 115
— в вязкой жидкости 534
— — сжимаемом газе 363
— — трохоидальной волне 403
— векторный потенциал 514
— внутри или вне кругового цилиндра 344
— диффузия 535
— затухание 535
— интенсивность 334
— кольцевой 335
— комбинированный (Рэнкина) 335
— конформное отображение 350
— круговой 332, 334
— около кругового цилиндра 347
— отраженный 344
— перенос 553
Вихрь скорость изменения 90, 111
— спиральный 343
— сферический (Хилла) 521
— уравнение 534
— центр тяжести 338
Волна, амплитуда 369
— в воде, влияние вязкости 546
— — закрытой трубе 416
— — открытой трубе 416
— впадина 369
— второе приближение для величины скорости 382
— гравитационная 389
— гребень 369
— давление на глубокой воде 375
— — — свободной поверхности 394
— действие малых возмущающих сил 397
— длина 369, 393, 401
— звуковая 413
— капиллярность 387, 388
— кинематическое условие на свободной поверхности 370
— комплексный потенциал 370, 383
— на глубокой воде 374
— — поверхности раздела 383, 386
— период 369
— плоская 414, 415
— — в цилиндрической трубе 415
— — неустойчивость 390
— потенциальная энергия 381
— прогрессивная, кинетическая энергия 375
— — на глубокой воде 374
— простая гармоническая прогрессивная 368
— пучности 379, 416
— сжатия 417
— скорость распространения 369, 372, 374, 378, 388, 395
— стационарная 378
— средний уровень 369
— стоячая 378
— — в прямоугольном бассейне 380
— — комплексный потенциал 379
— — траектории частиц 380
— — энергия 381
— сферическая 416
— точная линейная теория 412
— — нелинейная теория 405
— трохоидальная 399, 405
— — Герстнера 399, 405
— ударная 596

Волна, узлы, 379, 416
— уравнение для давления 394
— фазовая скорость 369
— фазовый угол 369
— частота 369
Волновые профили малой высоты, комплексный потенциал 370
Вращение молекулярное 54
Вычеты 137
Вязкость 13, 530, 531
— гипотеза 531
— коэффициент 531, 543
— — кинематический 533

Газ 13
— адиабатическое расширение 25
— измерение скорости течения трубкой Вентури 29
— работа при расширении 24
— совершенный 574, 575
Газовый поток в сужающейся трубке 27
Гипоциссоида 600
Глиссирование пластины 306, 307
Годографа метод 379
— плоскость 304, 310, 579
— уравнение в плоскости 580
Градиент 46, 47
Границы криволинейные 286
— твердые 281
Граничные условия в вязкой жидкости 534
— — для функции тока 449
— — кинематические 78
— — физические 79
Гюгонио кривая 599

Давление 18
— аэродинамическое 23, 574
— гидродинамическое 22
— — минимальное значение на границе 99
— зависимость от направления 19
— на движущуюся сферу 440, 443
— распределение на цилиндре 156
— — — — эллиптическом 164
Движениеациклическое 97, 102
— — безвихревое 97
— безвихревое 55, 58, 92, 110
— без деформации 111
— вихревое 54, 89
— волновое 368
— двумерное 107
— жидкости установившееся 108, 545
— импульсивное 95
— медленное тела в вязкой жидкости 548
— осесимметричное 428, 518, 547, 606
— относительное 91
— по окружности 535
— турбулентное 16
— установившееся 17, 86, 108, 381, 577
— — вращательное 545
— циклическое 97
— цилиндра, общий случай 239
— элемента жидкости 53
Декартов лист 600
Деформация 13, 623
— пластическая 13
— чистая 54, 109

Диаграмма полярная 156
Диада 41
— единичная 42
Дивергенция 40, 78
Динама сил 491
Диполь 150, 200, 214, 215, 434
— радиальный, действие на сферу 447
Диск круглый 451
Дифференцирование индивидуальное 76
Дрейф-масса 228
Дрейф-объем 230, 231
Дрейф частиц 227, 230

Жидкость 13
— воздействие, обусловленное давлением 19
— вязкая 534
— — расход через трубу 543
— — течение между двумя параллельными пластинками 539
— — уравнение движения 532, 534
— — установившееся движение 533
— — — — вращательное 545
— давление на препятствие 94
— диссипация энергии 535, 540
— невязкая, или идеальная 13
— — установившееся движение 108
— несжимаемая 13
— приток тепла 538
— сжимаемая 13
Жуковского геометрическое построение 185
Жуковского — Кутта теорема 188
— — — обобщение 239
— постулат 187
— — дальнейшее исследование 184
— преобразование 159
— профили 186

Задача Коши 622
Закон адиабатический 28, 576
— Био—Савара 519
— Джоуля 574
Звук интенсивность 415
— скорость 26, 415

Идемфактор 42
Изотахи 271
Импульс 492
— определение через кинетическую энергию 495
— скорость изменения 492
Интеграл, главное значение 138
— криволинейный 43, 44
— объемный 43, 45
— поверхностный 43, 44
Интегральное соотношение Кармана 563
Истечение через отверстие 29, 80, 285
Источник вне цилиндра 213
— — — эллиптического 213
— в равномерном потоке 198, 432
— — сжимаемом потоке 217
— двойной см. Диполь
— двумерный 196
— действие на стенку 205
— и сток вне кругового цилиндра 214
— — — в равномерном потоке 201

Источник и исток одинаковой мощности 199, 436
— линейный конечных размеров 433
— мощность 196, 430
— при конформном преобразовании 206
— простой 196, 429
— — комплексный потенциал 197
— расположенный в стенке канала 260
— — — углу между двумя стенками 207
— сила, действующая на круговой цилиндр 209

Каверны 299
— в случае обратной струи 317
Кавитация 157, 164, 299, 441
— неправильная 300
— правильная 300
— число 299, 300
Канал, длинные волны 393
— с разветвляющимся руслом 265
— — резко изменяющейся шириной 262
— экваториальный, приливы 398
Капиллярность 387
Касательные потоки 292
Кинематическое условие на свободной поверхности 619
Количество движения 81
— — тензор переноса 82
— — теорема Эйлера 31, 32, 83
Комплексные числа 122, 123
— — аргумент 125
— — векторные свойства 126
— — действительная часть 124, 128
— — закон сложения 123
— — изображающая точка 123
— — логарифм 127
— — мнимая часть 124, 128
— — модуль 125
— — обратное число 126
— — равенство 124
— — сложение 123
— — сопряженные 126
— — умножение 123
— — частное от деления 124
Контуры с нулями функции $f_0(z)$ 143
Конус Маха 586
Координаты биполярные 169, 170, 340
— декартовы 64
— коаксиальные 169, 170, 340
— криволинейные 68, 543, 544
— — ортогональные 67
— обобщенные 502
— сферические 67, 70
— характеристические 590
— цилиндрические 67, 70, 544
— эллипсоидальные 476, 477
— эллиптические 161, 162, 163
Коэффициент сжатия 29, 30, 81, 282
Кривизна 183

Леви-Чивита метод 319
— условие для поверхности жидкости 390
Линии изобарические 271
— Маха 586, 605
— неприводимые 96
— обыкновенные 606
— приводимые 96
Линия тока 16, 321
Линия тока, асимптота 155, 433, 434
— — для диполя 150, 436
— — — кругового цилиндра 154
— — — сферического вихря 521, 522
— — — сферы 440, 521
— — критическая 585
— — относительно пары вихрей 340
— — разветвляющаяся 155
— — свободная 271, 277, 284, 322
— — уравнения 151
Лунка, содержащая жидкость 246

Масса виртуальная 229, 442, 451
— — в двумерном движении 229
— гидродинамическая (присоединенная) 229
Маха конус 586
— линии 586, 605
— угол 586
— число 27
Метод Кирхгофа 281
— Рэнкина 114
Многоугольник вращающийся криволинейный 246, 247
— характеристический 606

Напряжение в случае вязкой жидкости 530
— составляющие 543
Насадок Борда 31, 313
— — плоская форма 281

Обертоны 416
Область односвязная 96
— перифрактическая 100
— связная 95
Обтекание впадины (или выступа дна) 171
— корабля с острым носом 328
— пластины 165, 563
— — изогнутой 326
— угла 594
— цилиндра кругового потенциальное 154 171, 179
— — — с циркуляцией и без циркуляции 179
— цилиндрического тела 172
— эллипса 163
Оператор (а ∇) 48
— $d/d\mathbf{r}$ 66
— E^2 520, 547
— ∇ 48
— векторный (∇) 49
Определитель векторного произведения 64
— для вихря 69
Осесимметричное движение 428, 518, 547, 606
Отображение 141
— бесконечной области 144
— — полосы 259
— взаимно однозначное и непрерывное 143
— в случае плоского точечного источника 204
— диполя относительно кругового цилиндра 215
— — — плоскости 206, 436
— источника вне кругового цилиндра 208
— конформное 144, 157, 350, 447

Отображение, метод 204
— области на единичный круг 212
— — — окружность 352
— окружностей в софокусные эллипсы 160
— относительно свободных линий тока 310
— полубесконечной полосы 259
— радиального вихря относительно сферы 445
— эллипса на окружность 160

Парабола метацентров 192
Параболоид вращения 452
Парадокс Даламбера 33, 35, 441, 496
Пластинка вращающаяся 242
— глиссирование по поверхности потока 307
Плоскость меридиональная 428
Плотность 18
Поверхностное возвышение 395
— натяжение 387
Поверхность волны 371
— свободная, кинематическое условие 369
Пограничный слой 34, 35, 561
Подобие 560, 561
Поле безвихревое 48
— векторное 43, 48
— Луны гравитационное 398
— синусоидальное 48
Поляра ударная 600, 601
Потенциал комплексный 149, 153, 154, 371
— — волны 370, 383
— — движущегося цилиндра 238
— силовой 59
— скоростей, среднее значение 99
— — жидкости 118, 414, 578
— — — в перифрактической области 100
— — физическая интерпретация 95
Поток бесконечно глубокий с уступом на дне 262
— в канале 21
— газа в сужающейся трубке 27
— за препятствием 34
— обтекающий пластинку 326, 327
— потенциальный со свободной поверхностью 288
— равномерный 114, 150, 431, 432
— — действие на эллиптический цилиндр 168
— сверхзвуковой 27, 28
— со свободной поверхностью под действием силы тяжести 287
— ударяющийся о пластинку 315, 328
— установившийся над синусоидальным дном 385
— — со свободной поверхностью 281
Правило центричности 40
— цикличности 39
Прандтля гипотеза о пограничном слое 34, 561
Призма вращающаяся равносторонняя 245
Приливы в экваториальном канале 398
— полусуточные 398, 399
Принцип аргумента 141
— Архимеда 83
— максимума 454
— отражения 261, 263, 265, 268
— симметрии 135

Приток тепла в жидкости 538, 540
Проекция Меркатора 145
Произведение векторное 38
— двойное скалярное диад 43
— — тензорное 617
— диадное (индефинитное) 41, 614
— скалярное 38
— тройное векторное 40
— — скалярное 39
Профиль, задняя кромка 183
— Кармана — Треффтца 187
— крыла 183
— передняя кромка 183
— удлинение 183
— фокус 191
— характер задней кромки 187
— хорда 183
— центр 190

Рейнольдса число 548, 561
Рябь 389

Свободная поверхность 401
Связность 95
Сила, действующая на движущийся цилиндр 235
— — — крыло 190, 554
— — — препятствие 94, 316, 445
— — — цилиндр 209 214
— — — — обусловленная диполем 215
— консервативная 58, 83, 533
— подъемная 188—191, 323, 324, 524, 558
— — крыла в равномерном потоке 189, 192
Система голономная 502
— динамическая 14, 502
— неголономная 502
— термодинамическая 15
Скалярное произведение двойное диад 43
— — тройное 39
Скорость 15, 151, 448
— выражение через вихрь 512
— — — функцию тока 113, 423, 429,579
— групповая 376, 378, 389, 401, 403
— — волны 376
— — динамический смысл 377
— жидкости разрывная 271
— звука 26—28, 415
— индуцированная вихревой нитью 211, 333, 515
— истечения 30
— комплексная 150
— критическая 27
— максимум на границе 99
— распространения волны 369, 372, 374, 378, 388, 395
— функция вихря 514
Сопло с прямыми стенками 592
— сужающееся-расширяющееся 582
Сопротивление аномальное 387
— волновое 378, 387
— вызываемое вихревым следом 359
— индуктивное минимальное 524
— лобовое 35, 303, 323, 324, 359
— — коэффициент 304
— медленно движущейся сферы 550
— сила 523, 560

Спирали логарифмические 342
Сток 196
Струя 272
— косой удар двух одинаковых струй 280
— направленная вертикально вниз 293
— обратная 317
— прямой удар одинаковых струй 278
— — — неодинаковых струй 280
— — — о пластинку 301
— соотношения между шириной и направлением 272, 276
— соударение 274
— удар о пластинку 301, 309, 310
Сфера в потоке 440, 443
— движущаяся 442
— — виртуальная масса 442
— — вдоль линии центров 471
— — в одном направлении 470
— — параллельно стенке 464
— — перпендикулярно стенке 476
— — под прямыми углами к линии центров 474
— действие радиального диполя 447
— медленное обтекание 449
— предельная скорость 550
— сопротивление 550

Тело вращения 506
— погруженное в жидкость 498
— Рэнкина 436
— содержащее полость 502
Тензор 41
— антисимметричный 42, 614
— аффинный ортогональный 612
— векторные компоненты 613
— как оператор 615
— напряжений 530
— симметричный 42, 613
— скалярные компоненты 613
— скоростей деформаций 626
Теорема Бернулли 19, 21, 22, 25, 86
— — для жидкости вязкой 565
— — — — сжимаемой 25
— Блазиуса 166
— — обобщение 236
— Бутлера для сферы 439
— Вейса для сферы 467
— Гаусса 59, 60, 99
— Гельмгольца 623, 626, 627
— Грина 61, 63
— единственности 102, 224, 606
— — обобщенная форма 224
— Кельвина об инверсии гармонической функции 464
— — — минимуме энергии 98
— — — постоянстве циркуляции 89
— Коши интегральная 134
— — о вычетах 137
— Лагалли 209
— — распространение на диполи 216
— Морера 134
— о давлении в невязкой жидкости 19
— — окружности 153
— — сохраняемости вихревых движений 621
— — струйке тока 18
— Племеля 140
— Престона 553
Теорема Рауса 351
— сравнения 454
— Серрина 455
— Стокса 55, 57
— — в комплексной форме 133
— Торричелли 30
— Фридмана 621, 624
— Шварца—Кристоффеля 255
— Эйлера 124
— — о количестве движения 31, 32, 83
— — — комплексных числах 125
— — — однородных функциях (второго порядка) 67
Теплоемкость удельная 575
Термодинамика, законы 574, 576
Течение Бельтрами 85
— в трубе 541
— гомэнергетическое 577
— гомэнтропическое 576, 580
— дозвуковое 27, 217, 363, 583, 585
— зависящее от времени 607
— изэнтропическое 576, 603
— по схеме Гельмгольца 90, 299
— равномерное с поперечным градиентом скорости 182
— сверхзвуковое 27, 217, 363, 583, 585, 587
— через отверстие 152, 260, 285, 313, 452
— — узкую щель 204, 260
Тождества Грина 62, 64
Тон основной 416
Точка критическая 34, 117, 151, 179
— особая 136
— предельная 169
— разрыва функции $\omega(\zeta)$ 324
Траектории взаимно непереводимые 96
— — переводимые 96
— замкнутые 96
— — неприводимые 96
— частиц 17, 373
— — в стоячей волне 380
Трохоида 234
Труба, закрытая с одного конца 416
Трубка Вентури 28, 29, 452
— вихревая 89
— Пито 28, 443
— тока 17

Угол атаки 189, 190
— — абсолютный 192
Удельный объем жидкости 88
Уравнение Кроккo 576
— неразрывности 18, 77, 429, 565
— Пуассона 512
— свободных линий тока 284
— Чизотти 372
— эластики 226
— энергии 87, 632
Уравнения гипергеометрические 581
— в естественных координатах 564
— — плоскости годографа 580
— — форме Вебера 85
— движения 495, 602, 603, 605
— — выраженные через кинетическую энергию 496
— — невязкой жидкости 82
— — сплошной среды, общее 628
— для давления 92, 93, 116

Уравнения для давления в движущейся системе координат 234
— — функции ψ 116, 447, 448, 519, 547
— — в форме Лагранжа 85
— — — — Эйлера 85
— Кирхгофа 496
— Коши — Римана 130
— Лагранжа 502, 618
— Лапласа 78, 132, 133, 465
— линий тока 151, 277, 284, 447, 519, 547
— Навье — Стокса, вывод 628, 632
— установившегося движения 112, 564
Ускорение 70, 76
— потенциал 84
Устойчивость вихревой дорожки 366
— обусловленная вращением 500

Фокусы 160, 163
Формула Био — Савара 517
— Кармана 362
— Коши 138
— Племеля 139, 140
— Рэлея 309
— Шварца 274
Функция аналитическая 128, 129, 134, 140
— гармоническая 133, 465
— — зональная 466
— — сферическая 133, 465
— — эллипсоидальная 479
— гиперболическая 128
— гипергеометрическая 581
— — нули 140
— граничная 240
— Лежандра 466
— — связь с $f(z)$ 131
— Q 281
— $\omega(\zeta)$ 321
— $\overline{\Psi}$ 329
— тока 112, 113, 428, 579
— — для эллипсоида вытянутого 452
— — — равномерного потока 114, 432
— — — — сжатого 450
— — на границе 235
— — Стокса 428, 519, 549
— — уравнение 447
— — — при безвихревом движении 447

Характеристики 605
— в изэнтропическом течении 603
— — установившемся движении 587
Хел-Шоу эксперименты 541
Хорда профиля 183

Цепочка вихрей бесконечная 354, 355
Циклоида 401
Цилиндр круговой 178
— — движущийся под действием силы тяжести 233
— — — поступательно 225
— — обтекание 154
— — — с циркуляцией и без циркуляции 179
— — падающий под действием силы тяжести 232
— — с вырезом (лункой) 246
— — циркуляция 178, 233
— эллиптический 153
— — вращающийся, содержащий жидкость 244
Циркуляция 55, 178, 179
— в вязкой жидкости 535
— вектора скорости 55
— векторная 550
— вокруг профиля 188
— — цилиндра кругового 178, 233
— — — эллиптического 153
— интенсивность 178

Частота 369, 416
Число Маха 27
— определяющее давление 591
— — направление скорости 591

Эквивалентный слой диполей по Грину 201, 437
— — — — — из источников и вихрей 352
Эллипс адиабатный 588
Эллипсоид вращающийся 481
— вытянутый 452
— поступательное движение 480
— сжатый 450
Эллипсы софокусные 153, 161
Энергия внутренняя 27, 474
— диссипация 535, 540
— кинетическая жидкости 98, 101, 223, 228, 396, 402, 441, 442, 490
— — — занимающей бесконечную область 100
— — вихря 517
— — прогрессивных волн 375
— — тела 491
— перенос 377
— полная 577
Энтальпия 576, 577
— торможения 577
Энтропия 575

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора русского перевода 5
Исторические замечания 7
Из предисловия автора 9

Глава 1

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

1.00. Вводные замечания 13
1.01. Размерности физических величин 14
1.10. Скорость 15
1.11. Линии тока и траектории частиц 16
1.12. Трубки тока и струйки 17
1.20. Плотность 18
1.30. Давление 18
1.40. Теорема Бернулли (специальная форма) 19
1.41. Поток в канале 21
1.42. Замечания о теореме Бернулли 21
1.43. Константа в теореме Бериулли 22
1.44. Гидродинамическое давление 22
1.50. Трубка Пито 23
1.60. Работа газа при расширении 24
1.61. Теорема Бернулли для сжимаемой жидкости 25
1.62. Применение теоремы Бернулли к адиабатическому расширению 25
1.63. Дозвуковой и сверхзвуковой потоки 27
1.64. Газовый поток в сужающейся трубке 27
1.70. Трубка Вентури 28
1.71. Измерение скорости течения газа трубкой Вентури 29
1.80. Истечение из отверстия 29
1.81. Теорема Торичелли 30
1.82. Коэффициент сжатия 30
1.90. Теорема Эйлера о количестве движения 31
1.91. Сила, действующая на стенки тонкой трубки 32
1.92. Парадокс Даламбера 33
1.93. Поток за препятствием 34
Примеры к главе 1 35

Глава 2

ВЕКТОРЫ

2.10. Скаляры и векторы 37
2.11. Скалярное произведение двух векторов 38
2.12. Векторное произведение двух векторов 38
2.121. Закон дистрибутивности 39
2.13. Тройное скалярное произведение 39
2.14. Тройное векторное произведение 40

2.15. Разложение вектора 41
2.16. Индефинитное, или диадное, произведение 41
2.19. Скалярные и векторные поля 43
2.20. Криволинейные, поверхностные и объемные интегралы 43
2.22. Изменение скалярной функции координат 46
2.23. Другое выражение для градиента функции 47
2.24. Обобщенное определение оператора ∇ 48
2.31. Оператор $(\nabla \mathbf{a})$ 49
2.32. Некоторые дифференциальные операции над одним вектором или скаляром 49
2.33. Некоторые операции над произведением величин 50
2.34. Применение оператора ∇ к некоторым произведениям 51
2.40. Анализ движения элемента жидкости 53
2.41. Вихри 54
2.42. Циркуляция 55
2.50. Теорема Стокса 55
2.51. Следствия из теоремы Стокса 57
2.52. Безвихревое движение 58
2.53. Консервативное поле сил 58
2.60. Теорема Гаусса 59
2.61. Следствия из теоремы Гаусса 60
2.615. Соленоидальный вектор образует трубки постоянной интенсивности 61
2.62. Теорема Грина 61
2.63. Приложения теоремы Грина 63
2.70. Декартовы координаты 64
2.71. Другое обозначение для оператора $\partial/\partial r$ 66
2.72. Криволинейные ортогональные координаты 67
2.73. Скорость изменения единичных векторов 70
Примеры к главе 2 71

Глава 3

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

3.10. Дифференцирование по времени 75
3.20. Уравнение неразрывности 77
3.30. Граничные условия (кинематические) 78
3.31. Граничные условия (физические) 79
3.32. Истечение из отверстия 80
3.40. Скорость изменения количества движения 81
3.41. Уравнение движения невязкой жидкости 82
3.42. Теорема Эйлера о количестве движения 83
3.43. Консервативные силы 83
3.44. Уравнение движения в форме Лагранжа 85
3.45. Установившееся движение 86
3.50. Уравнение энергии 87
3.51. Скорость изменения циркуляции 87
3.52. Вихревое движение 89
3.53. Сохраняемость вихревого движения 89
3.54. Сохраняемость вихревых линий 91
3.56. Относительное движение 91
3.60. Безвихревое движение. Уравнение для давления 92
3.61. Уравнение для давления относительно подвижных осей 93
3.62. Давление жидкости на препятствие 94
3.64. Импульсивное движение 95

3.70. Связность 95
3.71. Ациклическое и циклическое безвихревые движения 97
3.72. Кинетическая энергия жидкости 98
3.73. Теорема Кельвина о минимуме энергии 98
3.74. Среднее значение потенциала скоростей 99
3.75. Среднее значение потенциала скоростей в перифрактической области . . . 100
3.76. Кинетическая энергия жидкости, занимающей бесконечную область . . . 101
3.77. Теоремы единственности 102
Примеры к главе 3 103

Глава 4

ДВУМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

4.10. Двумерное движение 107
4.20. Двумерное установившееся движение жидкости 108
4.21. Безвихревое движение 110
4.22. Движение без деформации 111
4.23. Вихрь 111
4.25. Уравнения установившегося движения 112
4.30. Функция тока 112
4.31. Выражение скорости через функцию тока 113
4.32. Метод Рэнкина 114
4.33. Функция тока для равномерного потока 114
4.40. Векторные соотношения, связывающие скорость и вихрь 115
4.41. Уравнение для функции ψ 116
4.50. Уравнение для давления 116
4.60. Критические точки 117
4.70. Потенциал скоростей жидкости 118
4.71. Уравнение для потенциала скоростей 119
Примеры к главе 4 120

Глава 5

КОМПЛЕКСНОЕ ПЕРЕМЕННОЕ

5.01. Комплексные числа 122
5.10. Векторная диаграмма 122
5.11. Умножение 123
5.12. Равенство комплексных чисел 124
5.13. Теорема Эйлера 124
5.14. Сопряженные комплексные числа 126
5.15. Число, обратное комплексному числу 126
5.16. Векторные свойства комплексных чисел 126
5.17. Поворот координатных осей 127
5.20. Логарифмы 127
5.21. Действительная и мнимая части 128
5.30. Определение аналитической функции от z 128
5.31. Сопряженные функции 130
5.32. О связи сопряженных функций с $f(z)$ 131
5.33. Решение уравнения Лапласа 132
5.40. Направление обхода контура 133
5.43. Теорема Стокса в комплексной форме 133
5.50. Интегральная теорема Коши 134
5.51. Теорема Морфа 134

5.52. Аналитическое продолжение 134
5.53. Принцип симметрии 135
5.54. Деформация контура 135
5.55. Случай, когда функция не аналитична в некоторых точках 136
5.56. Особенности 136
5.57. Вычеты 137
5.58. Теорема Коши о вычетах 137
5.59. Формула Коши 138
5.591. Главное значение интеграла 138
5.592. Формулы Племеля 139
5.60. Нули 140
5.61. Прииции аргумента 141
5.62. Отображение 141
5.63. Контур с нулями функции f′(z) 143
5.70. Конформное отображение 144
5.71. Отображение бесконечных областей 145
Примеры к главе 5 146

Глава 6

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

6.00. Комплексный потеициал 149
6.01. Комплексиая скорость 150
6.02. Критические точки 151
6.03. Скорость 151
6.04. Уравнения лиий тока 151
6.10. Истечение из отверстия 152
6.11. Течения вокруг эллиптического цилиндра 153
6.21. Теорема об окружиости 153
6.22. Потенциальное обтекаиие кругового цилиндра 154
6.23. Разветвляющаяся линия тока 155
6.24. Распределение давлеиия на цилиндре 156
6.25. Кавитация 157
6.29. Применение конформного отображения 157
6.30. Преобразование Жуковского 159
6.31. Обтекание эллиптического цилиндра 161
6.32. Эллиптические координаты 161
6.33. Применение эллиптических координат к изучению обтекания эллипса . . . 163
6.34. Обтекание пластины 165
6.35. Общий метод 165
6.41. Теорема Блазиуса 166
6.42. Действие равиомерного потока иа эллиптический цилиндр 168
6.50. Коаксиальные координиаты 169
6.51. Обтекание впадины или выступа дна 171
6.52. Обтекание цилиндрического тела 172
6.53. Цилиидр в тоинеле 173
Примеры к главе 6 174

Глава 7

ПРОФИЛИ КРЫЛЬЕВ

7.10. Циркуляция вокруг круглого цилиндра 178
7.11. Циркуляциоиное движение жидкостн между концентрическими цилиндрами . 179

7.12. Обтекание кругового цилиндра с циркуляцией и без циркуляции 179
7.13. Равномерное течение с поперечным градиентом скорости 182
7.20. Профиль крыла 183
7.30. Дальнейшее исследование преобразования Жуковского 184
7.31. Геометрическое построение преобразования 185
7.32. Характер задней кромки крыла 187
7.40. Постулат Жуковского 187
7.45. Теорема Кутта — Жуковского 188
7.50. Подъемная сила крыла в равномерном потоке 189
7.51. Оси профиля 191
7.52. Фокус профиля 191
7.53. Парабола метацентров 192
Примеры к главе 7 193

Глава 8

ИСТОЧНИКИ И СТОКИ

8.10. Двумерный источник 196
8.12. Комплексный потенциал для простого источника 197
8.20. Комбинация источника и стока 197
8.21. Источник в равномерном потоке 198
8.22. Источник и сток одинаковой мощности 199
8.23. Диполь, или двойной источник 200
8.24. Эквивалентный слой диполей по Грину 201
8.30. Источник и сток в равномерном потоке 201
8.31. Два равных по мощности источника 203
8.40. Метод отображений 204
8.41. Действие на стенку точечного источника 205
8.42. Общий метод отображений относительно плоскости 205
8.43. Отображение диполя относительно плоскости 206
8.50. Источники при конформном преобразовании 206
8.51. Источник, расположенный в углу между двумя стенками 207
8.60. Источник вне кругового цилиндра 207
8.61. Отображение источника, расположенного вне кругового цилиндра 208
8.62. Сила, действующая на круговой цилиндр от источника 209
8.63. Теорема Лагалли 209
8.64. Источник вне эллиптического цилиндра 212
8.70. Отображение на единичный круг 212
8.71. Источники вне цилиндра 213
8.72. Сила, действующая на цилиндр 214
8.80. Источник и сток вне кругового цилиндра 214
8.81. Отображение диполя относительно кругового цилиндра 215
8.82. Сила, действующая на цилиндр, обусловленная диполем 215
8.83. Распространение теоремы Лагалли на диполи 216
8.90. Источник в сжимаемом потоке 217
Примеры к главе 8 217

Глава 9

ДВИЖЕНИЕ ЦИЛИНДРОВ

9.10. Кинетическая энергия бесциркулярного безвихревого течения 223
9.11. Кинетическая энергия циркулярного движения 223
9.20. Круговой цилиндр, движущийся поступательно 225

9.21. Траектории частиц 226
9.22. Кинетическая энергия 228
9.221. Виртуальная масса 229
9.222. Виртуальная масса в двумерном движении 229
9.23. Круговой цилиндр, падающий под действием силы тяжести 232
9.24. Круговой цилиндр с циркуляцией 233
9.25. Цилиндра с циркуляцией, движущийся под действием силы тяжести . . . 233
9.30. Уравнение для давления в движущейся системе координат 234
9.40. Функция тока на границе 235
9.50. Сила, действующая на движущийся цилиндр 235
9.52. Обобщение теоремы Чаплыгина—Блазиуса 236
9.53. Цилиндр, движущийся в безграничной жидкости 238
9.62. Общий случай движения цилиндра 239
9.63. Комплексный потенциал движущегося цилиндра 239
9.64. Круговой цилиндр (общий метод) 240
9.65. Эллиптический цилиндр 241
9.66. Цилиндр с циркуляцией 244
9.70. Вращающийся цилиндр 244
9.71. Вращающийся эллиптический цилиндр, содержащий жидкость 244
9.72. Вращающаяся равносторонняя призма, содержащая жидкость 245
9.73. Круговой цилиндр с вырезом 246
9.74. Метод конформного отображения для комплексного потенциала 246
9.75. Криволинейная многоугольная граница 246
9.76. Вращение вокруг эксцентрической точки 247
Примеры к главе 9 248

Глава 10

ТЕОРЕМА ШВАРЦА — КРИСТОФФЕЛЯ

10.10. Простые замкнутые многоугольники 253
10.20. Теорема Шварца — Кристоффеля 255
10.31. Отображение полубесконечной полосы 259
10.32. Отображение бесконечной полосы 259
10.40. Источник, расположенный в стенке канала 260
10.50. Источник, расположенный посередине между двумя плоскостями 261
10.60. Бесконечно глубокий поток с уступом на дне 262
10.70. Канал с резко изменяющейся шириной 263
10.80. Канал с разветвляющимся руслом 265
Примеры к главе 10 268

Глава 11

СТРУИ И СТРУЙНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

11.10. Свободные линии тока 271
11.11. Струи и струйные течения 272
11.20. Формула Шварца 274
11.30. Соударяющиеся струи 274
11.31. Комплексная скорость 275
11.32. Выражение комплексного потенциала через комплексную скорость v . . 276
11.33. Соотношение между шириной и направлением струй 276
11.34. Выражение величины z через комплексную скорость v 277
11.35. Уравнение свободных линий тока 277

11.40. Неопределенность задачи 278
11.41. Прямой удар двух одинаковых струй 278
11.42. Прямой удар двух неодинаковых струй 280
11.43. Косой удар двух одинаковых струй 280
11.50. Твердые границы 281
11.51. Плоская форма насадка Борда 281
11.52. Уравнение свободных линий тока 284
11.53. Истечение через отверстие 285
11.54. Криволинейные границы 286
11.60. Поток со свободной поверхностью под действием силы тяжести 287
11.61. Потенциальный поток со свободной поверхностью 288
11.62. Установившийся поток со свободной поверхностью 288
11.63. Касательные потоки 292
11.64. Касательное решение для струи, направленной вертикально вниз 293
Примеры к главе 11 295

Глава 12

ДВИЖЕНИЕ ПО СХЕМЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

12.10. Кавитация 299
12.12. Правильная кавитация 300
12.20. Прямой удар струи о пластинку 301
12.21. Лобовое сопротивление 303
12.22. Коэффициент лобового сопротивления 304
12.23. Задача Рябушинского 304
12.25. Скольжение и глиссирование 306
12.26. Глиссирование пластинки по поверхности потока 307
12.30. Отображение относительно свободных линий тока 310
12.31. Насадок Борда 313
12.32. Истечение из отверстия 313
12.33. Поток, ударяющийся о пластинку 315
12.34. Геометрическая интерпретация силы, действующей на препятствие 316
12.35. Обратная струя 317
12.40. Метод Леви-Чивита 319
12.41. Отображение плоскости z 319
12.42. Линии тока 321
12.43. Функция $\omega(\zeta)$ 321
12.44. Фиксированные линии тока 322
12.45. Свободные линии тока 322
12.46. Лобовое сопротивление, подъемная сила и момент 323
12.47. Точка разрыва функции $\omega(\zeta)$ 324
12.50. Решение для случая $\Omega(\zeta)=0$ 326
12.51. Удар потока о пластинку 328
12.52. Симметричный случай 328
Примеры к главе 12 329

Глава 13

ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ВИХРИ

13.10. Круговой вихрь 332
13.11. Давление в поле кругового вихря 334
13.12. Кольцевой круговой вихрь 335
13.13. Комбинированный вихрь Рэнкина 335
13.20. Прямолинейная вихревая нить 337

13.21. Изолированная вихревая нить 337
13.22. Движение вихревых нитей 338
13.23. Две вихревые нити 338
13.24. Движение системы вихревых нитей 339
13.30. Пара вихрей 340
13.31. Вихревая нить, параллельная плоскости 341
13.32. Вихревой диполь 442
13.33. Вихреисточник 342
13.40. Вихревая нить, параллельная двум перпендикулярным плоскостям . . . 343
13.50. Вихрь внутри или вне кругового цилиндра 344
13.51. Вихри около кругового цилиндра 347
13.52. Стационарные вихревые нити около цилиндра 349
13.60. Конформное отображение 350
13.61. Вихрь вне произвольного цилиндра 352
13.64. Эквивалентный слой Грина из источников и вихрей 352
13.70. Вихревая пелена 353
13.71. Одна бесконечная цепочка вихрей 354
13.72. Вихревая дорожка Кармана 356
13.73. Сопротивление,вызываемое вихревым следом 359
13.80. Вихрь в сжимаемом газе 363
Примеры к главе 13 363

Глава 14

ВОЛНЫ

14.10. Волновое движение 368
14.11. Кинематическое условие на свободной поверхности 369
14.12. Условие для давления на свободной поверхности 370
14.13. Поверхностные волны 371
14.14. Скорость распространения 372
14.15. Траектории частиц 373
14.17. Прогрессивные волны на глубокой воде 374
14.18. Давление, обусловленное волной на глубокой воде 375
14.20. Кинетическая энергия прогрессивных волн 375
14.21. Потенциальная энергия 376
14.22. Групповая скорость 376
14.23. Динамический смысл групповой скорости 377
14.24. Волновое сопротивление 378
14.30. Стоячие, или стационарные, волны 378
14.31. Комплексный потенциал стоячих волн. 379
14.32. Траектории частиц в стоячей волне 380
14.33. Стоячие волны в прямоугольном бассейне 380
14.34. Энергия стоячих волн 381
14.40. Установившееся движение 381
14.41. Второе приближение для величины скорости волны 382
14.42. Волны на поверхности раздела 383
14.43. Установившийся поток над синусоидальным дном 385
14.44. Волны на поверхности раздела в случае, когда верхний слой имеет свободную поверхность 386
14.50. Поверхностное натяжение 387
14.51. Уравнение для комплесного потенциала 388
14.52. Поверхностные волны 388
14.53. Влияние капиллярности в случае волн на поверхности раздела 388

14.54. Скорость распространения 388
14.55. Действие ветра на глубокой воде 390
14.58. Условие Леви-Чивита для поверхности жидкости 390
14.60. Длинные волны 393
14.61. Давление 394
14.62. Поверхностное возвышение 395
14.63. Волны, распространяющиеся только в одном направлении 395
14.64. Изменение профиля в длинных волнах 396
14.70. Действие малых возмущающих сил 397
14.71. Приливы в экваториальном канале 398
14.80. Трохоидальная волна Герстнера 399
14.81. Вид свободной поверхности 401
14.82. Точное решение для безвихревой волны 404
14.84. Точная нелинейная теория волн постоянной формы 405
14.85. Точная линейная теория 412
14.86. Звуковые волны 413
14.87. Плоские волны 414
14.88. Плоские волны в цилиндрической трубе 415
14.89. Сферические волны 416
Примеры к главе 14 417

Глава 15

ФУНКЦИЯ ТОКА СТОКСА

15.00. Осесимметричные движения 428
15.10. Функция тока Стокса 428
15.20. Простой источник 429
15.21. Подводный взрыв 431
15.22. Равномерный поток 431
15.23. Источник в равномерном потоке 432
15.24. Линейный источник конечных размеров 433
15.25. Дирижаблеобразные формы 434
15.26. Равные по мощности источник и сток. Диполь 434
15.27. Твердые тела Рэнкина 436
15.28. Эквивалентный слой Грина 437
15.29. Теорема Бутлера для сферы 439
15.30. Сфера в потоке 440
15.31. Кинетическая энергия 441
15.32. Движущаяся сфера 442
15.33. Давление на движущуюся сферу 443
15.40. Отображение источника относительно сферы 444
15.41. Отображение радиального диполя относительно сферы 445
15.42. Сила, действующая на препятствие 445
15.43. Действие источника на сферу 447
15.44. Действие радиального диполя на сферу 447
15.50. Уравнение для функции тока при безвихревом движении 447
15.51. Скорость 448
15.52. Граничные условия для функции тока 449
15.53. Сфера 449
15.54. Функция тока для сжатого эллипсоида 450
15.55. Круглый диск 451
15.56. Трубка Вентури 452
15.57. Функция тока для вытянутого эллипсоида 452
15.58. Параболоид вращения 452

15.60. Теоремы сравнения 454
Примеры к главе 15 457

Глава 16

СФЕРЫ И ЭЛЛИПСОИДЫ

16.10. Сферические гармонические функции 465
16.12. Теорема Кельвина об инверсии гармонической функции 467
16.13. Теорема Вейса для сферы 467
16.20. Концентрические сферы 468
16.21. Концентрические сферы, движущиеся в одном направлении 470
16.22. Неподвижная внешняя сфера 471
16.30. Две сферы, движущиеся вдоль линии центров 471
16.31. Сфера, движущаяся перпендикулярно стенке 473
16.40. Две сферы, движущиеся под прямыми углами к линии центров 474
16.41. Сфера, движущаяся параллельно стенке 476
16.50. Эллипсоидальные координаты 476
16.51. Эллипсоидальные гармонические функции 479
16.52. Поступательное движение эллипсоида 480
16.53. Вращающийся эллипсоид 481
16.54. Вращающаяся эллипсоидальная оболочка 482
Примеры к главе 16 482

Глава 17

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

17.10. Движение твердого тела в жидкости 489
17.20. Кинетическая энергия жидкости 490
17.21. Кинетическая энергия тела 491
17.30. Динама 491
17.31. Импульс 492
17.32. Скорость изменения импульса 492
17.40. Движущееся начало координат 494
17.41. Уравнения движения 495
17.42. Определение импульса через кинетическую энергию 495
17.43. Уравнения движения, выраженные через кинетическую энергию 496
17.50. Установившееся поступательное перемещение 496
17.51. Установившееся вращение 498
17.52. Тело вращения 498
17.53. Устойчивость, обусловленная вращением 500
17.54. Тело, содержащее полость 502
17.60. Уравнение Лагранжа 502
17.61. Движение сферы в присутствии стенки 506
17.70. Тело вращения, ось которого расположена перпендикулярно направлению потока невязкой жидкости 506
Примеры к главе 17 508

Глава 18

ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ

18.10. Уравнение Пуассона 512
18.20. Выражение скорости через вихрь 512

18.21. Поток через замкнутый контур . . . 514
18.22. Неограниченная жидкость . . . 514
18.23. Вихревая нить . . . 515
18.24. Электромагнитная аналогия . . . 517
18.30. Кинетическая энергия . . . 517
18.40. Осесимметричные движения . . . 518
18.41. Круговая вихревая нить . . . 518
18.50. Уравнение, которому удовлетворяет функция тока . . . 519
18.51. Сферический вихрь Хилла . . . 521
18.60. Крыло конечного размаха . . . 522
18.61. Крыло минимального индуктивного сопротивления . . . 524
Примеры к главе 18 . . . 525

Глава 19
ВЯЗКОСТЬ

19.01. Тензор напряжений . . . 530
19.02. Гипотеза вязкости . . . 530
19.03. Уравнение движения . . . 532
19.04. Установившееся движение; отсутствие внешних сил . . . 533
19.05. Граничные условия в вязкой жидкости . . . 534
19.11. Уравнение, которому удовлетворяет вихрь . . . 534
19.12. Диффузия вихря . . . 535
19.13. Циркуляция в вязкой жидкости . . . 535
19.21. Диссипация энергии . . . 535
19.22. Приток тепла в жидкости . . . 538
19.31. Течение между двумя параллельными пластинками . . . 539
19.32. Течение в трубе . . . 541
19.41. Составляющие напряжения . . . 543
19.42. Установившееся вращательное движение . . . 545
19.51. Влияние вязкости на волны в воде . . . 546
19.61. Осесимметричное движение . . . 547
19.62. Медленные движения . . . 547
19.63. Медленное обтекание сферы . . . 449
19.64. Сопротивление медленно движущейся сферы . . . 550
19.70. Векторная циркуляция . . . 550
19.71. Вихревой след . . . 552
19.72. Суммарный вихрь в кормовом вихревом следе . . . 553
19.73. Перенос вихрей . . . 553
19.74. Сила, действующая на крыло . . . 554
19.75. Приближенное решение Озеена для достаточно больших расстояний от тела 555
19.76. Подъемная сила и сила сопротивления . . . 558
19.80. Подобие . . . 560
19.81. Пограничный слой . . . 561
19.82. Уравнения в естественных координатах . . . 564
Примеры к главе 19 . . . 566

Глава 20
ДОЗВУКОВОЕ И СВЕРХЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ

20.01. Термодинамические уравнения . . . 574
20.10. Уравнение Кронко . . . 576
20.12. Наложение постоянной скорости . . . 577
20.13. Установившееся движение . . . 577

20.20. Установившееся безвихревое движение 578
20.30. Метод годографа 579
20.31. Уравнение в плоскости годографа для гомэнтропического течения . . . 580
20.32. Случай $m=-1$ 581
20.33. Течение сжимаемого газа внутри сопла, которое сначала сужается, а затем расширяется 582
20.40. Движущееся возмущение 585
20.41. Характеристики 587
20.42. Характеристики в установившемся движении 487
20.43. Изменение скорости вдоль характеристики 589
20.44. Характеристические координаты 590
20.45. Сопло с прямыми стенками 592
20.50. Обтекание угла 594
20.60. Ударные волны 596
20.61. Ударная поляра 600
20.70. Характеристики в изэнтропическом течении 603
20.71. Теорема единственности 606
20.80. Течения, зависящие от времени 607
Примеры к главе 20 608

ПРИЛОЖЕНИЯ

Моисеев Н. Н.

Приложение к главе 2 612
Приложение к главе 3 618
Приложение к главе 19 623
Предметный указатель 638

Л. М. Мили-Томсон

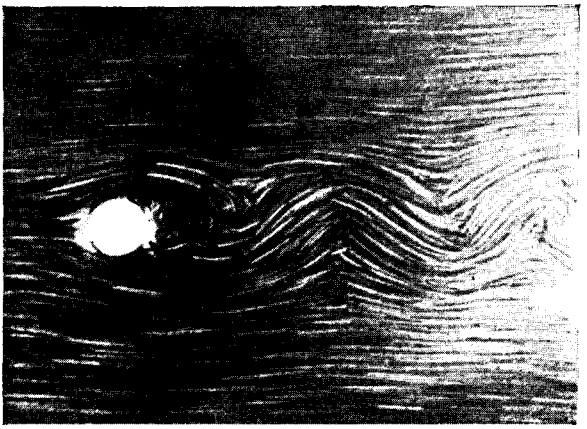
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА

Редактор *А. С. Попов*
Художник *Н. А. Зорин*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *С. В. Приданцева*
Корректор *Т. Г. Вульф*

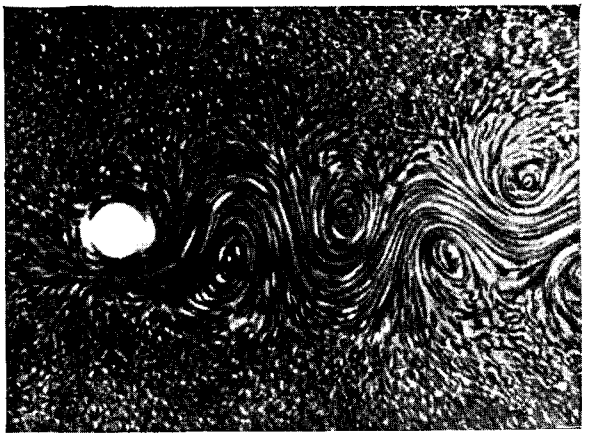
Сдано в производство 24/XII 1963 г.
Подписано к печати 14/V 1964 г.
Бумага 70×108$^{1}/_{16}$=20,6 бум. л.
56,5 печ. л., в т/ч. 2 вкл.
Уч.-изд. л. 48,2. Изд. № 1/0689.
Цена 3 р. 58 к. Зак. 1196

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 16
«Главполиграфпрома»
Государственного комитета
Совета Министров СССР по печати.
Москва, Трехпрудный пер., д. 9.



Ф о т о 11. Вихревая дорожка Кармана; $wd/\nu = 250$. Фотокамера покоится относительно обтекаемого цилиндра.



Ф о т о 12. Вихревая дорожка Кармана; $wd/\nu = 250$. Фотокамера покоится относительно невозмущенной жидкости.

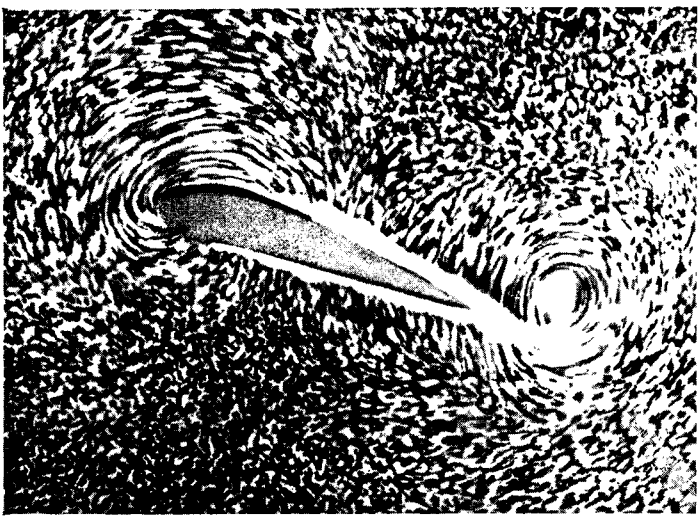


Фото 9. То же течение, что на фото 7, но фотокамера покоится относительно невозмущенной жидкости; сделан мгновенный снимок. Крыло имеет больший угол атаки, а поэтому и больший начальный вихрь.

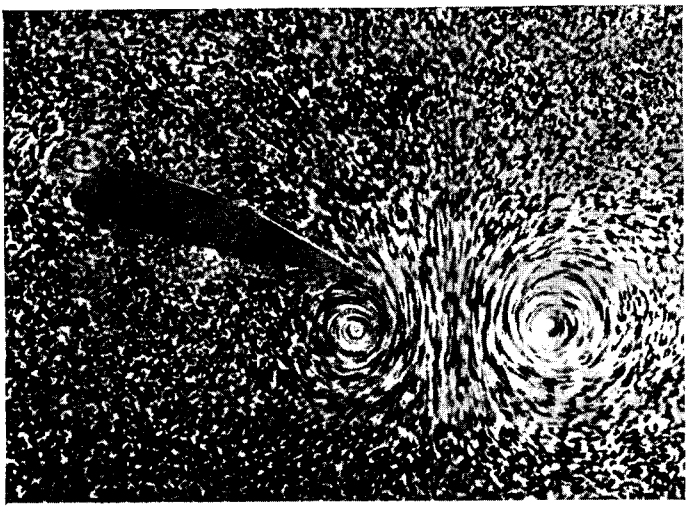
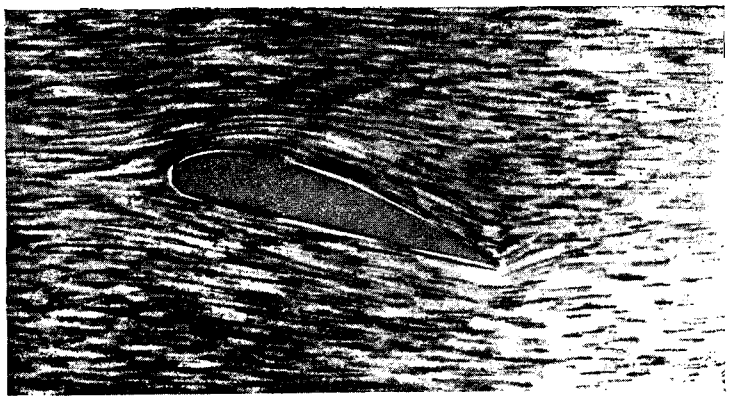
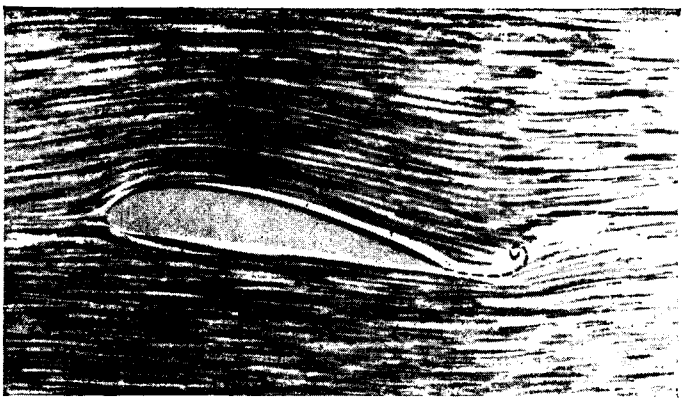


Фото 10. После образования начального вихря крыло было остановлено, и вслед за этим был сделан настоящий снимок.



Ф о т о 7. Линии тока вокруг крыла в первый момент после возникновения течения (потенциальное течение).



Ф о т о 8. Возникновение начального вихря, удаляющегося затем от крыла вместе с жидкостью.

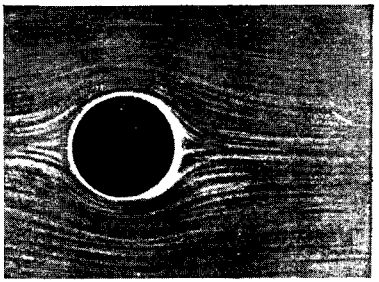


Фото 1. Течение вокруг цилиндра непосредственно после возникновения движения из состояния покоя (потенциальное течение)[1].

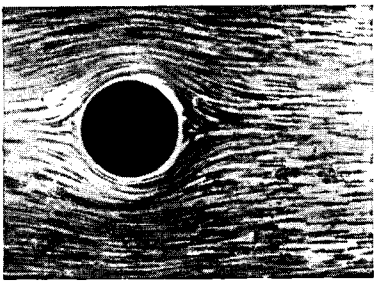


Фото 2. Возвратное течение в пограничном слое на задней стороне цилиндра и нарастание пограничного слоя.

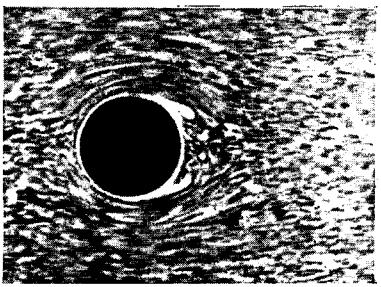


Фото 3. Образование пары вихрей и отрыв течения от цилиндра.

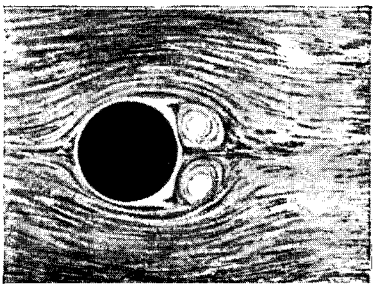


Фото 4. Нарастание пары вихрей.

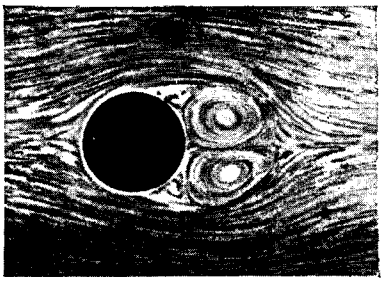


Фото 5. Течение вокруг цилиндра, устанавливающееся после окончания начального периода.

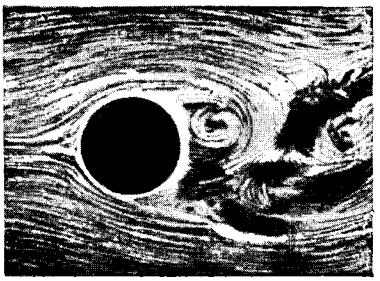


Фото 6. Дальнейшее нарастание пары вихрей, которая становится в конце концов несимметричной и затем распадается.

[1]) Фото 1—12 взяты из книги Прандтль Л., Титьенс О., Гидро- и аэромеханика, М.—Л., 1933. Течение на всех фотографиях направлено слева направо.