



Theory and Problems of Continuum Mechanics

by

George E. Mase,

*Ph. D., Professor of Mechanics
Michigan State University*

Schaum's Outline Series

MCGRAW-HILL BOOK COMPANY

New York, St. Louis, San Francisco, London, Sydney,
Toronto, Mexico, and Panama 1970

Дж. Мейз

*Теория и задачи
механики
сплошных сред*

*Перевод с английского
Е. И. Свешниковой*

*Под редакцией
М. Э. Эглит*

В книге очень сжато излагаются общие принципы механики сплошной среды и описываются наиболее употребительные математические модели сплошных сред. Изложение сопровождается тщательно подобранными задачами общим числом около пятисот; примерно две трети из них приводятся с решениями. Это позволяет использовать книгу как своеобразный сборник задач по курсу механики сплошной среды.

Книга написана ясно и четко. Высокие методические достоинства позволяют использовать ее как учебное пособие для технических вузов и университетов по курсу механики сплошной среды. Она интересна широкому кругу математиков-прикладников, механиков и инженеров, работающих в области механики сплошной среды.

Редакция литературы по математическим наукам

© Перевод на русский язык, «Мир», 1974

Предисловие

редактора перевода

В последние годы практика все чаще требует от инженеров и исследователей в области механики умения строить новые модели сплошных сред с усложненными свойствами, ставить и решать задачи о поведении таких сред. В связи с этим все более важным становится глубокое понимание не только частных конкретных закономерностей, но — в первую очередь — самого смысла основных концепций и законов механики континуума. Именно поэтому механика сплошной среды из набора отдельных специальных дисциплин (теория упругости, гидромеханика, теория пластичности и т. д.) превращается в единую науку. Это обстоятельство находит отражение и в учебной литературе; один из примеров — предлагаемая вниманию читателя книга Дж. Мейза.

Книга представляет собой своеобразное сочетание краткого учебника по курсу механики сплошной среды и справочника по этой дисциплине. В ее девяти главах очень сжато вводятся основные понятия и излагаются общие принципы механики континуума, а также описываются наиболее употребительные математические модели сплошных сред. Более половины объема занимают задачи, которые отчасти дополняют основной текст (в решения задач вынесены доказательства многих важных результатов), а отчасти являются обычными упражнениями. Таким образом, книгу можно использовать и как задачник (снабженный пояснительным текстом). Отбор и расположение материала в основном соответствуют тому, что должно входить в обязательный курс механики сплошных сред для студентов университетов и технических вузов. Однако некоторые важные разделы полностью остаются за рамками изложения. Так, вообще не рассматриваются условия на поверхностях сильного разрыва, взаимодействие сплошных сред с электромагнитным полем, подобие и моделирование механических явлений.

Предельную краткость авторского изложения можно считать достоинством книги: основные идеи и факты даются в легко обозримом, не загроможденном подробностями тексте. В то же время эта краткость приводит к тому, что многие существенные детали оказываются упущенными и некоторые вопросы освещаются недостаточно. Поэтому при работе с книгой неизбежно обращение к дополнительным источникам. Исходя из этого, мы снабдили настоящее издание списком литературы (в оригинале он отсутствует), охватывающим основные учебники на русском языке, в которых читатель может найти более полные сведения по интересующим его вопросам.

В первую очередь можно рекомендовать весьма обстоятельный двухтомный учебник Л. И. Седова, отвечающий современному состоянию механики и новым направлениям в этой науке.

При переводе были исправлены замеченные опечатки и мелкие неточности текста; как правило, это не оговаривалось специально.

Пользуюсь случаем выразить свою благодарность автору, любезно представившему список замеченных в книге опечаток и краткое предисловие к русскому изданию.

М. Э. Эглит

Предисловие

Механика сплошной среды играет важную роль в современной технике благодаря тому, что она рассматривает основные понятия и принципы. В современные программы начального обучения инженеров и научных работников прочно входит ряд курсов, в которых используются понятие сплошной среды и основанные на нем теории, причем число таких курсов продолжает расти. Программы по механике и смежным дисциплинам на следующем этапе обучения предусматривают существенное углубление в этот предмет.

Настоящая книга представляет собой попытку помочь студентам средних и старших курсов усвоить основы теории сплошной среды. Каждая ее глава включает решенные задачи, что дает возможность читателю отточить свое мастерство в решении задач, относящихся к механике континуума и ее приложениям.

Последовательность изложения материала и достаточно непрерывное его развитие позволяют использовать книгу как учебник по вводу к курсу механики сплошной среды. В то же время она может оказаться весьма полезной в качестве дополнительного справочника по дисциплинам, базирующимся на методах теории континуума: курсы сопротивления материалов, гидромеханики, теории упругости, теории пластичности и теории вязкоупругости тесно связаны с содержанием книги и могут быть построены на ее основе.

По всей книге важные уравнения и фундаментальные соотношения представлены как в индексной (тензорной), так и в классической символической (векторной) записи. Это дает возможность студентам сравнить эквивалентные выражения и привыкнуть к обозначениям обоих видов. Используются только декартовы тензоры, поскольку книга задумана как введение в предмет и поскольку существо многих теорий может быть описано с помощью таких тензоров.

Книга по сути дела состоит из двух частей: в первых пяти главах излагаются общие основы механики сплошной среды, а в последних четырех — некоторые конкретные ее приложения. За начальной главой, посвященной математическому аппарату, следуют главы, относящиеся к общим вопросам, а именно анализу напряженного состояния, теории деформаций, понятиям движения и течения, а также основным законам механики сплошной среды. Приложения, рассматриваемые в последних четырех главах, относятся к теории упругости, гидромеханике, теории пластичности и теории вязкоупругости. В конце каждой главы приводится набор решенных задач и

упражнений, служащих для иллюстрации и закрепления идей, приведенных в основном тексте.

Автор пользуется случаем выразить свою признательность всем, оказавшим ему помощь. Особую благодарность он приносит своим коллегам — профессорам У. Брэдли, Л. Малверну, Д. Иену, Дж. Фоссу и Г. Лапалму, прочитавшим различные главы и указавшим, как улучшить изложение, профессору Д. Монтомери за его поддержку и помощь во всех отношениях, д-ру Ричарду Хартунгу из Исследовательской лаборатории компании «Локхид» (Пало-Альто, Калифорния), ознакомившемуся с первоначальным вариантом рукописи и внесшему много полезных предложений, а также профессору М. Стиппсу из Иллинойсского университета за ценные замечания и предложения.

Джордж Э. Мейз

Университет штата Мичиган

К русскому изданию

Механика сплошной среды, будучи фундаментальной наукой, служит хорошей основой для последующего изучения теории упругости, пластичности, вязкоупругости и гидромеханики. Поэтому для студентов важно, чтобы основные концепции и исходные принципы теории сплошной среды были изложены ясно и аккуратно. С такой целью и написана эта книга. Автор надеется, что она поможет читателям понять основы предмета и явится стимулом к дальнейшему изучению этой важной области механики.

Дж. Мейз

4 марта 1974
Ист Лансинг, Мичиган

Математические основы

1.1. Тензоры и механика сплошной среды

Механика сплошной среды имеет дело с физическими величинами, которые не зависят от выбора системы координат, применяемой для их описания. Однако очень часто эти физические величины наиболее удобно изучать в некоторой надлежащим образом выбранной системе координат. Математически такие величины представляются *тензорами*.

Тензор как математический объект существует независимо от системы координат. В то же время в каждой системе координат его можно задать некоторой совокупностью величин, называемых *компонентами* тензора. Если компоненты тензора заданы в одной системе координат, то они определены и в любой другой системе, ибо определение тензора включает *закон преобразования* его компонент. Точные определения различных видов тензоров будут даваться далее в тех местах, где они впервые появятся в изложении.

Физические законы механики сплошной среды выражаются тензорными уравнениями. Вследствие линейности и однородности тензорных преобразований тензорные уравнения, верные в одной системе координат, верны и в любой другой. Такая *инвариантность* тензорных соотношений относительно преобразований координат является одной из основных причин того, что тензорное исчисление весьма полезно в изучении механики сплошной среды.

1.2. Тензоры. Декартовы тензоры. Ранг тензора

Если имеют дело с любым преобразованием одной произвольной системы криволинейных координат в другую, то тензоры называют *обычными тензорами*; если же ограничиваются преобразованиями однородных систем координат, то тензоры называют *декартовыми*. Так как большая часть механики сплошной среды может быть изучена при помощи декартовых тензоров, в этой книге термин «тензор» будет означать «декартов тензор», если особо не оговаривается, что рассматривается более общий случай.

Тензоры можно классифицировать по *рангу*, или *порядку*, в соответствии с частным видом законов преобразования, которым они подчиняются. Та же классификация отражается и в числе компонент тензора в n -мерном пространстве. В трехмерном евклидовом пространстве, таком как обычное физическое пространство,

число компонент тензора равно 3^N , где N — порядок тензора. Тензор *нулевого ранга* задается в любой системе координат в пространстве любого числа измерений *одной* компонентой; такие тензоры называются *скалярами* и выражают физические величины, характеризующиеся только численным значением. Тензоры *первого ранга* имеют *три* координатные компоненты в трехмерном пространстве, называются *векторами* и представляют величины, которые характеризуются как численным значением, так и направлением. Тензоры *второго ранга* называются *диадиками* и описывают некоторые характеристики, важные в механике сплошной среды. При математическом изучении механики сплошной среды также определяются и часто используются тензоры более высокого ранга, в частности третьего и четвертого (триадики и тетрадики).

1.3. Векторы и скаляры

Некоторые физические величины, такие, как сила и скорость, характеризующиеся и численным значением, и направлением, можно изображать в трехмерном пространстве *направленными отрезками*, которые подчиняются *закону сложения по правилу параллелограмма*. Такие направленные отрезки являются геометрическими представлениями тензоров первого ранга и называются *векторами*.

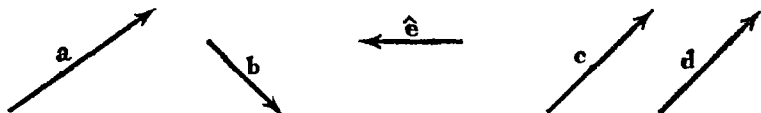


Рис. 1.1.

Графически вектор — просто соответствующим образом направленная стрелка, имеющая длину, пропорциональную величине (модулю) вектора. *Векторы равны*, если они одинаково направлены и имеют равные длины. *Единичным* вектором называется вектор, у которого длина равна единице. *Нулевой* вектор имеет нулевую длину и неопределенное направление. *Отрицательным* по отношению к данному называется вектор с тем же модулем, но противоположно направленный.

Такие физические величины, как, например, масса и энергия, которые характеризуются только величиной, относятся к тензорам нулевого ранга, т. е. к *скалярам*.

В *символической*, или *гиббсовой*, системе обозначений векторы изображаются жирными прямыми буквами, например **a**, **b** и т. д. Скаляры обозначаются светлыми курсивными буквами, например *a*, *b* и т. д. Единичные векторы, кроме того, отмечают крышечкой над жирной прямой буквой. На рис. 1.1 показаны произвольные векторы **a** и **b**, единичный вектор $\hat{e}$ и два равных вектора **c** и **d**.

Абсолютную величину произвольного вектора a обозначают просто a или, чтобы подчеркнуть векторную природу объекта, используют символ $|a|$.

1.4. Векторное сложение. Умножение вектора на скаляр

Сложение векторов подчиняется правилу параллелограмма, согласно которому сумма двух векторов изображается диагональю параллелограмма, смежными сторонами которого являются слагаемые векторы, отложенные из одной точки. Этот закон сложения эквивалентен правилу треугольника, по которому суммой двух век-

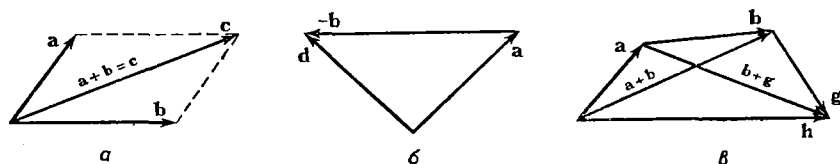


Рис. 1.2.

торов является вектор, идущий из начала первого вектора в конец второго, если суммируемые векторы построены таким образом, что начало второго совпадает с концом первого. Графическое построение, соответствующее сложению векторов a и b по правилу параллелограмма, показано на рис. 1.2, а. Алгебраически операция сложения выражается векторным равенством

$$a + b = b + a = c. \quad (1.1)$$

Вычитание вектора выполняется путем прибавления отрицательного вектора, как сделано, например, на рис. 1.2, б, где использовано правило треугольника. Таким образом,

$$a - b = -b + a = d. \quad (1.2)$$

Рис. 1.2, в иллюстрирует свойство коммутативности и ассоциативности операций сложения и вычитания векторов в соответствии с равенствами

$$(a + b) + g = a + (b + g) = h. \quad (1.3)$$

Умножение вектора на скаляр в общем случае дает новый вектор, имеющий то же направление, что и исходный, но другую длину. Исключение составляет умножение на нуль, которое дает в результате нулевой вектор, и умножение на единицу, которое не меняет вектора. При умножении вектора b на скаляр m в зависимости от численного значения m возможен один из трех случаев, представленных на рис. 1.3.

Операция умножения вектора на скаляр ассоциативна и дистрибутивна, т. е.

$$m(nb) = (mn)b = n(mb), \quad (1.4)$$

$$(m+n)b = (n+m)b = mb + nb, \quad (1.5)$$

$$m(a+b) = m(b+a) = ma + mb. \quad (1.6)$$

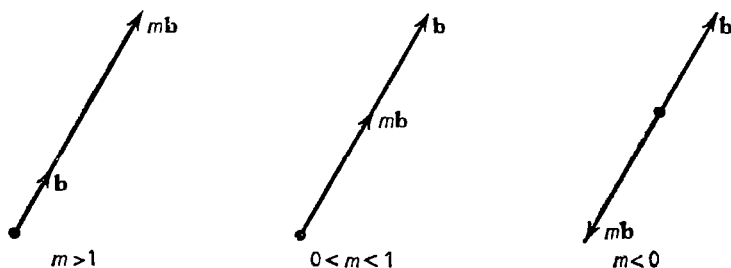


Рис. 1.3.

Отметим еще, что в результате умножения вектора на величину, обратную его модулю, получается *единичный вектор* того же направления. Эта операция выражается равенством

$$\hat{b} = b/b. \quad (1.7)$$

1.5. Скалярное и векторное произведения векторов

Скалярным произведением двух векторов a и b называется скаляр

$$\lambda = a \cdot b = b \cdot a = ab \cos \theta, \quad (1.8)$$

где θ — наименьший угол между векторами, как показано на рис. 1.4, а. Скалярное произведение вектора a на единичный вектор $\hat{e}$ дает проекцию a на направление $\hat{e}$.

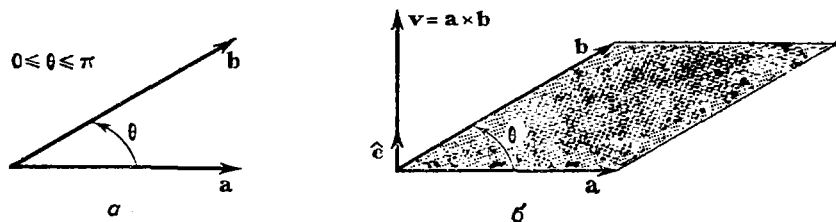


Рис. 1.4.

Векторным произведением a на b называется вектор v , заданный формулой

$$v = a \times b = -b \times a = (ab \sin \theta) \hat{e}, \quad (1.9)$$

где θ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, меньший чем 180° , а $\hat{\mathbf{e}}$ — единичный вектор, перпендикулярный к их плоскости и направленный так, что поворот по правилу правой руки вокруг $\hat{\mathbf{e}}$ на угол θ переводит $\mathbf{a}$ в $\mathbf{b}$. Модуль v равен площади параллелограмма со смежными сторонами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, затененного на рис. 1.4, б. Векторное произведение некоммукативно.

Смешанным произведением называется скалярное произведение двух векторов, один из которых сам является векторным произведением:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \lambda. \quad (1.10)$$

Из этой формулы видно, что скалярное и векторное умножение здесь можно менять местами. Так как векторное умножение должно выполняться первым, скобки не нужны и, как показано, их можно опустить. Это произведение иногда записывают как $[\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}]$. Величина λ смешанного произведения равна объему параллелепипеда с ребрами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Двойное векторное произведение — это векторное произведение двух векторов, один из которых сам является векторным произведением. Для представления векторного произведения $\mathbf{a}$ на $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ часто бывает полезно следующее тождество:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} = \mathbf{w}. \quad (1.11)$$

Из формулы (1.11) видно, что $\mathbf{w}$ лежит в плоскости векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

1.6. Диaды и диадики

Диaдой называется *неопределенное произведение* двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, которое по определению задается написанием векторов один за другим, например $\mathbf{ab}$. Неопределенное произведение в общем случае некоммукативно, т. е. $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$. *Диадиком* $\mathbf{D}$ называется тензор второго ранга; он всегда может быть представлен в виде суммы конечного числа диaд:

$$\mathbf{D} = \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{a}_N \mathbf{b}_N. \quad (1.12)$$

Однако это представление неединственно. В символических обозначениях тензоры второго ранга (диадики) изображаются заглавными жирными буквами, как это сделано выше.

Если в каждой диaде формулы (1.12) первый и второй сомножители поменять местами, то полученный тензор называется *сопряженным* исходному и записывается так:

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{b}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{b}_N \mathbf{a}_N. \quad (1.13)$$

Если каждую диaду в сумме $\mathbf{D}$ в формуле (1.12) заменить скалярным произведением соответствующих векторов, то получится скаляр,

называемый скаляром диадика D и записываемый в виде

$$D_s = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_N \cdot b_N. \quad (1.14)$$

Если каждую диаду в сумме D в формуле (1.12) заменить векторным произведением составляющих ее векторов, то результат будет называться вектором диадика D и записываться так:

$$D_v = a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + \dots + a_N \times b_N. \quad (1.15)$$

Можно показать, что D_s , D_s и D_v не зависят от выбора представления (1.12).

Неопределенное произведение векторов обладает свойством дистрибутивности:

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (1.16)$$

$$(a + b)c = ac + bc, \quad (1.17)$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd, \quad (1.18)$$

и если λ и μ — скаляры, то

$$(\lambda + \mu)ab = \lambda ab + \mu ab, \quad (1.19)$$

$$(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda ab. \quad (1.20)$$

Если v — любой вектор, то скалярные произведения $v \cdot D$ и $D \cdot v$ тоже являются векторами, которые определяются соответственно формулами

$$v \cdot D = (v \cdot a_1) b_1 + (v \cdot a_2) b_2 + \dots + (v \cdot a_N) b_N = u, \quad (1.21)$$

$$D \cdot v = a_1 (b_1 \cdot v) + a_2 (b_2 \cdot v) + \dots + a_N (b_N \cdot v) = w. \quad (1.22)$$

Два диадика D и E равны тогда и только тогда, когда для любого вектора v

$$v \cdot D = v \cdot E \quad \text{или} \quad D \cdot v = E \cdot v. \quad (1.23)$$

Едини́чный диади́к I — это такой диадик, который представляется в виде

$$I = \hat{e}_1 \hat{e}_1 + \hat{e}_2 \hat{e}_2 + \hat{e}_3 \hat{e}_3, \quad (1.24)$$

где $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ — векторы любого ортонормированного базиса в трехмерном евклидовом пространстве (см. § 1.7). Едини́чный диади́к I характеризуется следующим свойством:

$$I \cdot v = v \cdot I = v \quad (1.25)$$

для всех векторов v .

Векторные произведения $\mathbf{v} \times \mathbf{D}$ и $\mathbf{D} \times \mathbf{v}$ являются диадиками, которые определяются соответственно формулами

$$\mathbf{v} \times \mathbf{D} = (\mathbf{v} \times \mathbf{a}_1) \mathbf{b}_1 + (\mathbf{v} \times \mathbf{a}_2) \mathbf{b}_2 + \dots + (\mathbf{v} \times \mathbf{a}_N) \mathbf{b}_N = \mathbf{F}, \quad (1.26)$$

$$\mathbf{D} \times \mathbf{v} = \mathbf{a}_1 (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{v}) + \mathbf{a}_2 (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{v}) + \dots + \mathbf{a}_N (\mathbf{b}_N \times \mathbf{v}) = \mathbf{G}. \quad (1.27)$$

Скалярное произведение двух диад $\mathbf{ab}$ и $\mathbf{cd}$ по определению есть диада вида

$$\mathbf{ab} \cdot \mathbf{cd} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{ad}. \quad (1.28)$$

Пользуясь формулой (1.28), легко усмотреть, что скалярное произведение любых двух диадиков $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ тоже является диадиком:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} &= (\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{a}_N \mathbf{b}_N) \cdot (\mathbf{c}_1 \mathbf{d}_1 + \mathbf{c}_2 \mathbf{d}_2 + \dots + \mathbf{c}_N \mathbf{d}_N) = \\ &= (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_1) \mathbf{a}_1 \mathbf{d}_1 + (\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_2) \mathbf{a}_2 \mathbf{d}_2 + \dots + (\mathbf{b}_N \cdot \mathbf{c}_N) \mathbf{a}_N \mathbf{d}_N = \mathbf{G}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Диадики $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ называются *взаимно обратными*, если

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{I}. \quad (1.30)$$

Для обратных диадиков часто используются обозначения $\mathbf{E} = \mathbf{D}^{-1}$ и $\mathbf{D} = \mathbf{E}^{-1}$.

Дважды скалярное, смешанное и дважды векторное произведения диад $\mathbf{ab}$ и $\mathbf{cd}$ по аналогии можно определить следующим образом:

$$\mathbf{ab} : \mathbf{cd} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) = \lambda \quad (\text{скаляр}), \quad (1.31)$$

$$\mathbf{ab} \times \mathbf{cd} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) = \mathbf{h} \quad (\text{вектор}), \quad (1.32)$$

$$\mathbf{ab} \dot{\times} \mathbf{cd} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{b} \times \mathbf{d}) = \mathbf{g} \quad (\text{вектор}), \quad (1.33)$$

$$\mathbf{ab} \ddot{\times} \mathbf{cd} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) (\mathbf{b} \times \mathbf{d}) = \mathbf{uw} \quad (\text{диада}). \quad (1.34)$$

Пользуясь этими формулами, легко получить дважды скалярное и векторное произведения тензоров второго ранга. Некоторые авторы двойное скалярное произведение диад определяют так:

$$\mathbf{ab} \cdot \cdot \mathbf{cd} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) = \lambda \quad (\text{скаляр}). \quad (1.35)$$

Диадик $\mathbf{D}$ называют *самосопряженным* или *симметричным*, если

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_c, \quad (1.36)$$

и *антисимметричным*, если

$$\mathbf{D} = -\mathbf{D}_c. \quad (1.37)$$

Каждый диадик можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного диадиков, причем это представление единственно. Действительно, для любого диадика $\mathbf{D}$ можно написать

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{D} + \mathbf{D}_c) + \frac{1}{2} (\mathbf{D} - \mathbf{D}_c) = \mathbf{G} + \mathbf{H}, \quad (1.38)$$

где

$$G_c = 1/2 (D_c + (D_c)_c) = 1/2 (D_c + D) = G \quad (\text{симметричный}) \quad (1.39)$$

и

$$H_c = 1/2 (D_c - (D_c)_c) = 1/2 (D_c - D) = -H \quad (\text{антисимметричный}). \quad (1.40)$$

Для того чтобы установить единственность такого разложения, предположим, что существует другое разложение $D = G^* + H^*$; тогда

$$G^* + H^* = G + H. \quad (1.41)$$

Равенство, сопряженное этому, будет

$$G^* - H^* = G - H. \quad (1.42)$$

Почленное сложение и вычитание (1.41) и (1.42) приводит соответственно к требуемым равенствам $G^* = G$ и $H^* = H$.

1.7. Системы координат. Базисные векторы.

Триэдр единичных векторов

Относительно выбранной системы координат вектор можно задавать его *компонентами* в этой системе. Выбор системы координат

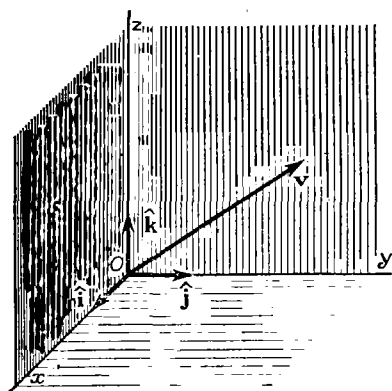


Рис. 1.5.

произволен, но в некоторых ситуациях бывает выгоднее пользоваться специальной системой. Задать систему осей координат — это значит задать единицы измерения длин векторов и указать направления осей в пространстве, чтобы можно было определить ориентацию векторов.

Общеизвестную *ортогональную декартову систему координат* $Oxyz$ обычно представляют взаимно перпендикулярными осями, показанными на рис. 1.5. Любой вектор v в такой системе можно задать в виде линейной комбинации трех

произвольных некомпланарных векторов, которые называются *базисными векторами*. Через базисные векторы a , b , c и соответствующим образом выбранные скалярные коэффициенты λ , μ , ν вектор v выражается так:

$$v = \lambda a + \mu b + \nu c. \quad (1.43)$$

Базисные векторы по определению линейно независимы, т. е. уравнение

$$\lambda a + \mu b + \nu c = 0 \quad (1.44)$$

удовлетворяется только при $\lambda = \mu = \nu = 0$. Говорят, что совокупность базисных векторов для данной системы координат образует *базис* этой системы.

В ортогональной декартовой системе в качестве базиса обычно берут набор единичных векторов $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, направленных вдоль осей координат, как показано на рис. 1.5. Эти базисные векторы образуют правый *триэдр единичных векторов*, для которых

$$\begin{aligned} \hat{i} \times \hat{j} &= \hat{k}, & \hat{j} \times \hat{k} &= \hat{i}, \\ \hat{k} \times \hat{i} &= \hat{j} \end{aligned} \quad (1.45)$$

и

$$\begin{aligned} \hat{i} \cdot \hat{i} &= \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1, \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0. \end{aligned} \quad (1.46)$$

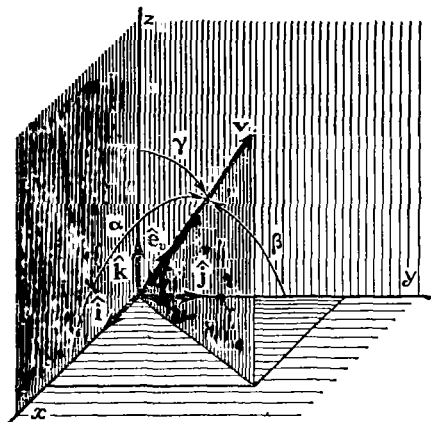


Рис. 1.6

Такой набор базисных векторов часто называют *ортонормированным базисом*.

Вектор $\mathbf{v}$, изображенный на рис. 1.6 стрелкой, можно представить в виде линейной комбинации единичных векторов $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$:

$$\mathbf{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}, \quad (1.47)$$

в которой декартовы компоненты

$$v_x = \mathbf{v} \cdot \hat{i} = v \cos \alpha, \quad v_y = \mathbf{v} \cdot \hat{j} = v \cos \beta, \quad v_z = \mathbf{v} \cdot \hat{k} = v \cos \gamma$$

являются проекциями $\mathbf{v}$ на оси координат. Согласно формуле (1.7), единичный вектор направления $\mathbf{v}$ дается выражением

$$\hat{e}_v = \mathbf{v}/v = (\cos \alpha) \hat{i} + (\cos \beta) \hat{j} + (\cos \gamma) \hat{k}. \quad (1.48)$$

Вектор $\mathbf{v}$ произволен, следовательно, для любого единичного вектора его *направляющие косинусы* являются его *декартовыми компонентами*.

В декартовых компонентах скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ записывается в форме

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1.49)$$

Для тех же двух векторов векторное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ имеет вид

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{\mathbf{i}} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{\mathbf{j}} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{\mathbf{k}}. \quad (1.50)$$

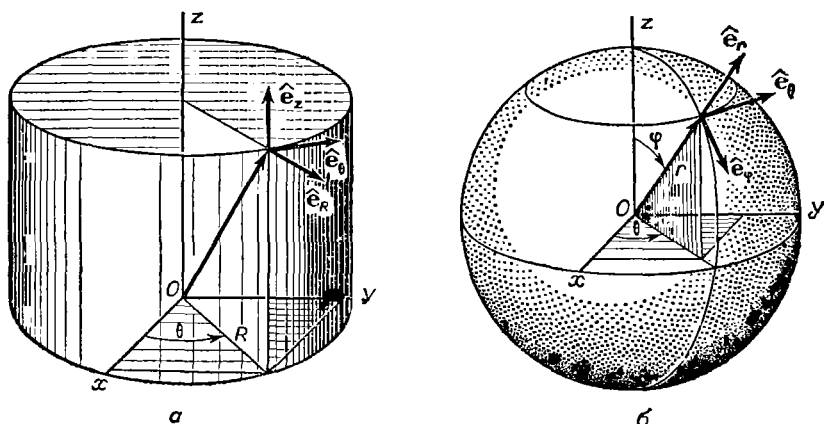


Рис. 1.7.

a — цилиндрическая система координат; b — сферическая система координат.

Последнее выражение часто записывают в виде определителя

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad (1.51)$$

с элементами которого оперируют, как с обычными числами.

Смешанное произведение векторов тоже можно представить через компоненты в виде определителя

$$[\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (1.52)$$

Диада $\mathbf{a}\mathbf{b}$ через декартовы компоненты выражается так:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\mathbf{b} &= (a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}}) (b_x \hat{\mathbf{i}} + b_y \hat{\mathbf{j}} + b_z \hat{\mathbf{k}}) = \\ &= a_x b_x \hat{\mathbf{i}} \hat{\mathbf{i}} + a_x b_y \hat{\mathbf{i}} \hat{\mathbf{j}} + a_x b_z \hat{\mathbf{i}} \hat{\mathbf{k}} + \\ &\quad + a_y b_x \hat{\mathbf{j}} \hat{\mathbf{i}} + a_y b_y \hat{\mathbf{j}} \hat{\mathbf{j}} + a_y b_z \hat{\mathbf{j}} \hat{\mathbf{k}} + \\ &\quad + a_z b_x \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{i}} + a_z b_y \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{j}} + a_z b_z \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Из-за того, что выражение (1.53) состоит из *девяти* членов, оно называется *девятичленной формой* диады $\mathbf{ab}$. Любой тензор второго ранга можно записать в девятичленной форме. Девятичленная форма единичного диадика представляется через единичные векторы $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ следующим образом:

$$\mathbf{I} = \hat{i}\hat{i} + \hat{j}\hat{j} + \hat{k}\hat{k}. \quad (1.54)$$

Кроме уже рассмотренной ортогональной декартовой системы, в дальнейшем широко используются системы криволинейных координат, такие, как цилиндрическая (R , θ , z) и сферическая (r , θ , φ), изображенные на рис. 1.7. С этими системами связаны триэдры единичных базисных векторов ($\hat{e}_R$, $\hat{e}_\theta$, $\hat{e}_z$) и ($\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$, $\hat{e}_\varphi$), показанные на рисунке. Однако в этих случаях базисные векторы не имеют постоянных направлений и поэтому, вообще говоря, являются функциями точки.

1.8. Линейные векторные функции.

Диадики как линейные векторные операторы

Говорят, что вектор $\mathbf{a}$ является функцией другого вектора $\mathbf{b}$, если $\mathbf{a}$ определен, как только задан $\mathbf{b}$. Это функциональное соотношение выражается формулой

$$\mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{b}). \quad (1.55)$$

Функция $\mathbf{f}$ называется линейной, если для любых векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ и любого скаляра λ имеют место равенства

$$\mathbf{f}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{f}(\mathbf{b}) + \mathbf{f}(\mathbf{c}), \quad (1.56)$$

$$\mathbf{f}(\lambda\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{f}(\mathbf{b}). \quad (1.57)$$

При использовании декартовых компонент вектора $\mathbf{b}$ равенство (1.55) принимает форму

$$\mathbf{a} = f_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}; \quad (1.58)$$

в случае линейности $\mathbf{f}$ это можно переписать так:

$$\mathbf{a} = b_x \mathbf{f}(\hat{i}) + b_y \mathbf{f}(\hat{j}) + b_z \mathbf{f}(\hat{k}). \quad (1.59)$$

Пусть в формуле (1.59) $\mathbf{f}(\hat{i}) = \mathbf{u}$, $\mathbf{f}(\hat{j}) = \mathbf{v}$, $\mathbf{f}(\hat{k}) = \mathbf{w}$, так что

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}(\hat{i} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{v}(\hat{j} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{w}(\hat{k} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{u}\hat{i} + \mathbf{v}\hat{j} + \mathbf{w}\hat{k}) \cdot \mathbf{b}. \quad (1.60)$$

Видно, что $\mathbf{a}$ представляет собой скалярное произведение диадика на вектор, т. е.

$$\mathbf{a} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{b}, \quad (1.61)$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{u}\hat{i} + \mathbf{v}\hat{j} + \mathbf{w}\hat{k}$. Это показывает, что любая линейная векторная функция $\mathbf{f}$ может быть выражена произведением диадика на

вектор. В формуле (1.61) диадик $\mathbf{D}$ служит *линейным векторным оператором*, который, действуя на векторный аргумент $\mathbf{b}$, переводит его в вектор-функцию $\mathbf{a}$.

1.9. Индексные обозначения. Интервал изменения индексов и соглашение о суммировании

Компоненты тензора любого ранга и сам тензор можно наглядно и кратко представить с помощью *индексных обозначений*. Эти обозначения состоят в том, что к *характерной*, или *основной*, букве, представляющей интересующую нас тензорную величину, добавляются верхние или нижние буквенные индексы. Типичными примерами, иллюстрирующими употребление индексов, являются тензорные символы

$$a_i, b^j, T_{ij}, F_i^j, \varepsilon_{ijk}, R^{pq}.$$

По правилам индексных обозначений буквенный индекс может встречаться в каждом члене *один* или *два* раза. Если индекс употреблен один раз, то подразумевается, что он принимает значения $1, 2, \dots, N$, где N — заданное положительное целое число, которое определяет *размерность* индекса, т. е. интервал его изменения. Неповторяющиеся индексы называются *свободными*. Тензорный ранг данного члена равен числу свободных индексов в этом члене. Правильно написанные тензорные соотношения имеют одинаковые свободные индексы в каждом члене.

Если индекс употреблен *дважды*, то подразумевается, что этот индекс принимает все значения из своего интервала изменения и члены, соответствующие каждому значению индекса из этого набора, *суммируются*. В этом так называемом *соглашении о суммировании* повторяющиеся индексы часто называют *немymi*, так как их замена на любые другие буквы, не использованные в качестве свободных индексов, не меняет значения члена, в который они входят. Вообще говоря, в правильно написанном выражении ни один индекс не встречается более двух раз. Если для желаемого представления какой-либо величины совершенно необходимо использовать некоторый индекс более чем дважды, соглашение о суммировании употреблять не следует.

По числу и расположению свободных индексов непосредственно можно судить о тензорном характере величины, выраженной в индексных обозначениях. Тензоры *первого ранга* (векторы) обозначаются основными буквами с *одним свободным индексом*. Так, любой вектор $\mathbf{a}$ изображается символом с единственным верхним или нижним индексом, т. е. в одной из двух форм

$$a_i, a^i.$$

В следующих выражениях, имеющих только один свободный индекс, тоже можно узнать тензоры первого ранга:

$$a_{ij}b_j, F_{ikk}, R^p_{qp}, \varepsilon_{ijk}u_jv_k.$$

Тензоры *второго ранга* обозначаются символами с *двумя* свободными индексами. Так, произвольный тензор второго ранга D будет записываться в одной из трех возможных форм

$$D^{ij}, D_i^j \text{ или } D^i_j, D_{ij}.$$

В смешанной форме точка указывает, что j — второй индекс. Тензорные величины второго ранга могут выглядеть по-разному, например

$$A_{ijp}, B^{ij}_{jk}, \delta_{ij}\mu_k v_k.$$

Логически продолжая вышеуказанную схему, тензор *третьего ранга* записывают символом с *тремя* свободными индексами. А символ, который не имеет связанного с ним индекса, такой, как, например, λ , изображает скаляр, или тензор нулевого ранга.

В обычном физическом пространстве *базис* состоит из трех некопланарных векторов, и любой вектор в этом пространстве полностью задается своими тремя компонентами. Поэтому индексы у величин a_i , представляющих вектор a в физическом трехмерном пространстве, принимают значения 1, 2, 3. Согласно этому, подразумевают, что символ a_i представляет сразу три компоненты a_1, a_2, a_3 . Таким образом, иногда символ a_i можно толковать как i -ю компоненту вектора, а в других случаях — как сам вектор. В трехмерном пространстве, где оба индекса i, j меняются от 1 до 3, символ A_{ij} представляет девять компонент тензора второго ранга A . Часто тензор A_{ij} задают подробно, записывая все девять его компонент в виде квадратной таблицы, заключенной в большие скобки:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.62)$$

Таким же образом компоненты тензора первого ранга (вектора) в трехмерном пространстве можно наглядно изобразить упорядоченными строкой или столбцом из компонент в виде

$$a_i = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{или} \quad a_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad (1.63)$$

В общем случае в N -мерном пространстве тензор n -го ранга будет иметь N^n компонент.

Удобство индексных обозначений для записи систем равенств в компактной форме мы проиллюстрируем двумя следующими типичными примерами. В трехмерном пространстве уравнение в индексной записи

$$x_i = c_{ij}z_j \quad (1.64)$$

представляет в развернутой форме три уравнения:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + c_{13}z_3, \\ x_2 &= c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + c_{23}z_3, \\ x_3 &= c_{31}z_1 + c_{32}z_2 + c_{33}z_3. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Если i и j принимают значения 1 и 2, то равенство в индексной записи

$$A_{ij} = B_{ip}C_{jq}D_{pq} \quad (1.66)$$

в развернутой форме дает четыре соотношения:

$$\begin{aligned} A_{11} &= B_{11}C_{11}D_{11} + B_{11}C_{12}D_{12} + B_{12}C_{11}D_{21} + B_{12}C_{12}D_{22}, \\ A_{12} &= B_{11}C_{21}D_{11} + B_{11}C_{22}D_{12} + B_{12}C_{21}D_{21} + B_{12}C_{22}D_{22}, \\ A_{21} &= B_{21}C_{11}D_{11} + B_{21}C_{12}D_{12} + B_{22}C_{11}D_{21} + B_{22}C_{12}D_{22}, \\ A_{22} &= B_{21}C_{21}D_{11} + B_{21}C_{22}D_{12} + B_{22}C_{21}D_{21} + B_{22}C_{22}D_{22}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Если же $i, j = 1, 2, 3$, то формула (1.66) даст девять соотношений, каждое из которых имеет девять членов в правой части.

1.10. Соглашение о суммировании в символических обозначениях

Соглашением о суммировании часто пользуются в связи с представлением векторов и тензоров в символических обозначениях через *базисные векторы*, снабженные индексами. Так, если декартовы оси и единичные векторы базиса, изображенные на рис. 1.5, переобозначить, как показано на рис. 1.8, то произвольный вектор $\mathbf{v}$ можно записать в виде

$$\mathbf{v} = v_1\hat{\mathbf{e}}_1 + v_2\hat{\mathbf{e}}_2 + v_3\hat{\mathbf{e}}_3, \quad (1.68)$$

где v_1, v_2, v_3 — декартовы компоненты вектора $\mathbf{v}$. Применяя к этому равенству соглашение о суммировании, его можно переписать в сокращенной форме:

$$\mathbf{v} = v_i\hat{\mathbf{e}}_i, \quad (1.69)$$

где i — индекс суммирования. Здесь обозначения по существу *символические* и в то же время использовано *соглашение о суммировании*. При таком сочетании обозначений *не действует правило свободных индексов*, принятое в чисто индексном обозначении тензорных величин.

Тензоры второго ранга тоже могут быть представлены суммированием по базисным векторам, снабженным индексами. Так, диаду ab , заданную в девятичленной форме (1.53), можно записать в виде

$$ab = (a_i \hat{e}_i) (b_j \hat{e}_j) = a_i b_j \hat{e}_i \hat{e}_j. \quad (1.70)$$

В этом выражении важно сохранять порядок написания базисных векторов. Подобным же образом девятичленная форма любого тензора второго ранга D может быть представлена в компактных обозначениях так:

$$D = D_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j. \quad (1.71)$$

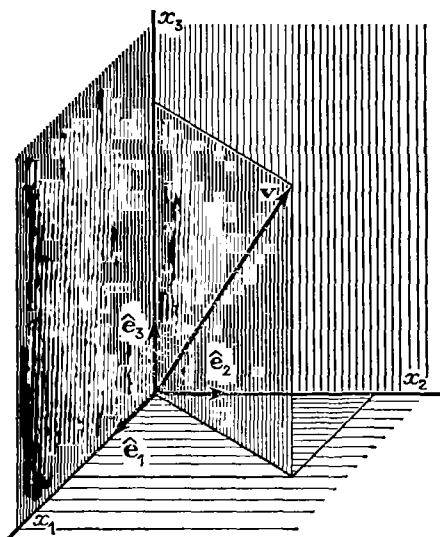


Рис. 1.8.

1.11. Преобразование координат. Общее понятие тензора

Пусть x^i — произвольная система координат x^1, x^2, x^3 в трехмерном евклидовом пространстве и θ^i — любая другая система координат $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ в том же пространстве. Здесь цифры, написанные сверху, являются индексами, а не показателями степени, степени x можно записывать при помощи скобок, например так: $(x)^2$ или $(x)^3$.

Итак, цифры (или буквы), написанные сверху, как только что было указано, служат индексами. *Формулы преобразования координат*

$$\theta^i = \theta^i(x^1, x^2, x^3) \quad (1.72)$$

определяют для любой точки (x^1, x^2, x^3) системы x^i новый набор ее координат $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ в системе θ^i . Относительно функций θ^i , связывающих две совокупности переменных величин (координат), предполагается, что они однозначные, непрерывные и дифференцируемые. Определитель

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \theta^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \theta^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \theta^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \theta^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \theta^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \theta^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \theta^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \theta^3}{\partial x^3} \end{vmatrix}, \quad (1.73)$$

или в компактной форме

$$J = \left| \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j} \right|, \quad (1.74)$$

называется *якобианом* преобразования. Если якобиан не обращается в нуль, то уравнения (1.72) можно локально единственным образом разрешить относительно x^i :

$$x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3). \quad (1.75)$$

Системы координат x^i и θ^i , использованные при написании (1.72) и (1.75), — самые общие: они могут быть любыми криволинейными или декартовыми.

Из (1.72) найдем компоненты дифференциала $d\theta^i$:

$$d\theta^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j} dx^j. \quad (1.76)$$

Это равенство определяет класс тензоров, называемых *контравариантными векторами*. В общем случае величины b^i , связанные с точкой P , представляют компоненты *контравариантного тензора первого ранга*, если при преобразовании координат эти величины преобразуются по закону

$$b'^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j} b^j, \quad (1.77)$$

причем частные производные вычислены в точке P . В (1.77) b^i являются компонентами тензора в системе координат x^i , а b'^i — его компонентами в системе θ^i . В общей теории тензоров для обозначения контравариантных тензоров используют верхние индексы. Это делается по той причине, что для координаты обозначение x^i предпочтительнее, чем x_i ; однако нужно заметить, что тензорный характер имеют только дифференциалы dx^i , но не сами координаты.

Естественное обобщение правила (1.77) приводит к определению *контравариантного тензора второго ранга*, компоненты которого подчиняются правилу преобразования

$$B'^{ij} = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^r} \frac{\partial \theta^j}{\partial x^s} B^{rs}. \quad (1.78)$$

Контравариантные тензоры третьего, четвертого и более высокого порядков определяются аналогичным образом.

Слово «*контравариантный*» использовано выше, чтобы отличить эти тензоры от тензоров другого типа, называемых *ковариантными*. В общей теории для изображения ковариантных тензоров используются нижние индексы. Типичный *ковариантный вектор* образуют частные производные от скалярной функции по координатам.

Действительно, если $\varphi = \varphi(x^1, x^2, x^3)$ — такая функция, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i}. \quad (1.79)$$

В общем случае величины b_i называются компонентами *ковариантного тензора первого ранга*, если они преобразуются по правилу

$$b'_i = \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} b_j. \quad (1.80)$$

Здесь b'_i являются ковариантными компонентами вектора в системе θ^i , а b_i — компонентами в системе x^i . *Ковариантные тензоры второго ранга* подчиняются закону преобразования

$$B'_{ij} = \frac{\partial x^r}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^s}{\partial \theta^j} B_{rs}. \quad (1.81)$$

Ковариантные тензоры более высокого порядка и *смешанные тензоры*, например

$$T'^{r}_{sp} = \frac{\partial \theta^r}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial \theta^s} \frac{\partial x^q}{\partial \theta^p} T^{rn}_{pq}, \quad (1.82)$$

определяются очевидным образом.

1.12. Метрический тензор. Декартовы тензоры

Пусть x^i представляют систему ортогональных декартовых координат в евклидовом трехмерном пространстве, а θ^i — любую другую систему ортогональных прямолинейных или криволинейных координат (например, цилиндрических или сферических) в том же самом пространстве. Вектор x , имеющий декартовы компоненты x^i , называется *радиусом-вектором* произвольной точки $P(x^1, x^2, x^3)$ в декартовой системе. Квадрат дифференциала расстояния между близкими точками $P(x)$ и $Q(x + dx)$ дается формулой

$$(ds)^2 = dx^i dx^i. \quad (1.83)$$

Из преобразования координат

$$x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (1.84)$$

получим связь между их дифференциалами:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} d\theta^p. \quad (1.85)$$

Тогда выражение (1.83) перейдет в следующее:

$$(ds)^2 = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q} d\theta^p d\theta^q = g_{pq} d\theta^p d\theta^q, \quad (1.86)$$

где тензор второго ранга $g_{pq} = (\partial x^i / \partial \theta^p) (\partial x^i / \partial \theta^q)$ называется *метрическим* или *фундаментальным тензором* пространства. Если θ^i

образуют тоже ортогональную декартову систему, скажем x'^i , то

$$g_{pq} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} \frac{\partial x^i}{\partial x'^q} = \delta_{pq}, \quad (1.87)$$

где δ_{pq} — дельта Кронекера (см. § 1.13), т. е. $\delta_{pq} = 0$, если $p \neq q$, и $\delta_{pq} = 1$, если $p = q$.

Система координат, для которой квадрат бесконечно малого элемента длины всюду имеет вид (1.83), называется системой *однородных координат*. Преобразования, переводящие одну систему однородных координат в другую, являются *ортогональными*, и если ограничиться только ортогональными преобразованиями, то тензоры, определенные таким образом, называются *декартовыми тензорами*. В частности, это верно для законов преобразования ортогональных декартовых систем координат с общим началом. Для декартовых тензоров нет различия между контравариантными и ковариантными компонентами, и поэтому в выражениях, представляющих декартовы тензоры, принято пользоваться исключительно нижними индексами. Как будет показано далее, в законах преобразования, определяющих декартовы тензоры, частные производные в общих тензорных определениях (1.80) и (1.81) заменяются константами.

1.13. Законы преобразования декартовых тензоров.

Дельта Кронекера. Условия ортогональности

Пусть $Ox_1x_2x_3$ и $Ox'_1x'_2x'_3$ — две ортогональные декартовы системы координат с общим началом в произвольной точке O (рис. 1.9). Можно считать, что система со штрихами получена из системы без штрихов поворотом осей около начала координат или отражением осей относительно одной из координатных плоскостей, или, может быть, комбинацией того и другого. Если символом a_{ij} обозначен косинус угла между i -й осью системы со штрихами и j -й осью системы без штрихов, т. е. $a_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$, то ориентацию какой-либо оси каждой системы относительно другой системы удобно задавать таблицей

	x_1	x_2	x_3
x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

или же тензором преобразования

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Из такого определения a_{ij} следует, что единичный вектор $\hat{e}_i$ оси x_i в соответствии с формулой (1.48) и соглашением о суммировании представляется выражением

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= a_{11}\hat{e}_1 + a_{12}\hat{e}_2 + \\ &+ a_{13}\hat{e}_3 = a_{1j}\hat{e}_j. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Ясно, что, обобщая это равенство, любой базисный вектор можно записать в виде

$$\hat{e}_i = a_{ij}\hat{e}_j. \quad (1.89)$$

Произвольный вектор $\mathbf{v}$, изображенный на рис. 1.9, можно выразить через его компоненты в системе без штрихов:

$$\mathbf{v} = v_i \hat{e}_i \quad (1.90)$$

и в системе со штрихами:

$$\mathbf{v} = v'_i \hat{e}'_i. \quad (1.91)$$

Заменяя $\hat{e}'_i$ в сумме (1.91) эквивалентным выражением (1.89), получаем

$$\mathbf{v} = v'_i a_{ij} \hat{e}_j. \quad (1.92)$$

Сравнивая формулы (1.92) и (1.90), обнаруживаем, что компоненты вектора в исходной и преобразованной системах связаны соотношением

$$v_j = a_{ij} v'_i. \quad (1.93)$$

Это равенство дает закон преобразования декартовых тензоров первого ранга. Как видно, он является частным случаем общих законов преобразования тензоров первого ранга, которые были представлены формулами (1.80) и (1.77). Меняя ролями в предыдущих рассуждениях базисные векторы со штрихами и без штрихов, получаем соотношение, обратное (1.93):

$$v'_i = a_{ij} v_j. \quad (1.94)$$

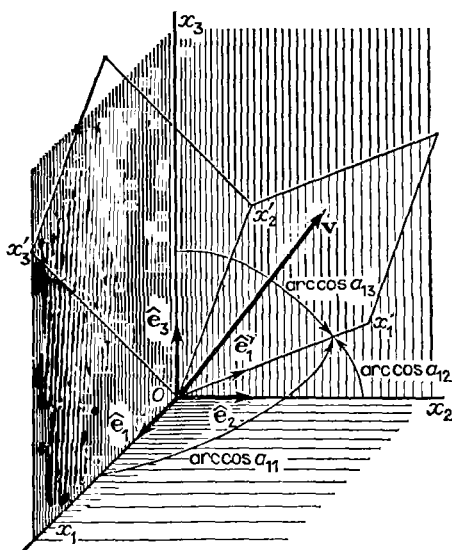


Рис. 1.9.

Нужно заметить, что в формуле (1.93) у a_{ij} свободным был второй индекс, а в выражении (1.94) свободный индекс является первым.

Выбрав надлежащим образом немые индексы и объединив (1.93) и (1.94), можно написать

$$v_j = a_{ij}a_{ik}v_k. \quad (1.95)$$

Так как вектор v является произвольным, то это уравнение должно сводиться к тождеству $v_j = v_j$. Поэтому коэффициент $a_{ij}a_{ik}$, значение которого зависит от индексов j и k , должен равняться либо 1, либо 0 в зависимости от того, одинаковые или различные численные значения принимают j и k . Для представления величин такого типа, как $a_{ij}a_{ik}$, можно пользоваться *дельтой Кронекера*, которая определяется следующим образом:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (1.96)$$

С помощью дельты Кронекера условия, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнения (1.95), можно записать следующим образом:

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}. \quad (1.97)$$

В развернутом виде соотношение (1.97) состоит из девяти равенств, которые называются *условиями ортогональности*, или *ортонормированности*. Это условия, наложенные на направляющие косинусы a_{ij} . Но соотношения (1.93) и (1.94) можно скомбинировать иначе и получить равенство $v_i = a_{ij}a_{kj}v_k$, что дает другую форму условий ортогональности:

$$a_{ij}a_{kj} = \delta_{ik}. \quad (1.98)$$

Линейные преобразования типа (1.93) или (1.94), коэффициенты которых удовлетворяют условиям ортогональности (1.97) или (1.98), называются *ортогональными преобразованиями*. Поворот осей координат и отражение их относительно какой-либо координатной плоскости являются ортогональными преобразованиями.

Дельту Кронекера иногда называют *оператором замены*, потому что она дает, например, следующие преобразования:

$$\delta_{ij}b_j = \delta_{i1}b_1 + \delta_{i2}b_2 + \delta_{i3}b_3 = b_i \quad (1.99)$$

или

$$\delta_{ij}F_{ik} = \delta_{1j}F_{1k} + \delta_{2j}F_{2k} + \delta_{3j}F_{3k} = F_{jk}. \quad (1.100)$$

В силу этого свойства ясно, что дельта Кронекера является аналогом в индексных обозначениях единичного тензора второго ранга $\mathbf{I}$, определенного формулой (1.54).

В соответствии с правилом преобразования векторов (1.94) диада $u_i v_j$ в системе координат со штрихами имеет компоненты

$$u'_i v'_j = (a_{ip} u_p) (a_{jq} v_q) = a_{ip} a_{jq} u_p v_q. \quad (1.101)$$

Естественным обобщением формулы (1.101) будет правило преобразования любого декартова тензора второго ранга

$$T'_{ij} = a_{ip} a_{jq} T_{pq}. \quad (1.102)$$

Используя условия ортогональности, легко найдем соотношение, обратное (1.102) и дающее правило перехода от компонент в системе со штрихами к компонентам в системе без штрихов. Оно выражается формулой

$$T_{ij} = a_{pi} a_{qj} T'_{pq}. \quad (1.103)$$

Законы преобразования декартовых тензоров первого и второго рангов обобщаются для декартовых тензоров ранга N :

$$T'_{ijk\dots} = a_{ip} a_{jq} a_{km} \dots T_{pqm\dots} \quad (1.104)$$

1.14. Сложение декартовых тензоров. Умножение на скаляр

Декартовы тензоры одинакового ранга можно складывать (или вычитать) покомпонентно согласно следующему правилу:

$$A_{ijk\dots} \pm B_{ijk\dots} = T_{ijk\dots} \quad (1.105)$$

Сумма тензоров есть тензор того же ранга, что и слагаемые. Заметим, что одинаковые индексы расположены в одной и той же последовательности в каждом члене.

Умножение всех компонент тензора на данный скаляр дает новый тензор того же ранга. При умножении на скаляр λ типичные примеры записи произведения в индексной и в символической форме имеют вид

$$b_i = \lambda a_i, \quad \text{или} \quad \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}, \quad (1.106)$$

$$B_{ij} = \lambda A_{ij}, \quad \text{или} \quad \mathbf{B} = \lambda \mathbf{A}. \quad (1.107)$$

1.15. Умножение тензоров

Внешним произведением двух тензоров произвольного ранга называется новый тензор, у которого компоненты образованы умножением каждой компоненты одного тензора на каждую компоненту другого. Ранг полученного тензора равен сумме рангов сомножителей. Типичными примерами внешних произведений являются следующие выражения:

$$\text{а) } a_i b_j = T_{ij}; \quad \text{в) } D_{ij} T_{km} = \Phi_{ijk m};$$

$$\text{б) } v_i F_{jk} = \alpha_{ijk}; \quad \text{г) } \varepsilon_{ijk} v_m = \Theta_{ijk m}.$$

Как видно из этих примеров, внешние произведения получаются простым написанием перемножаемых тензоров друг за другом. (Заметим, что именно эта операция образует из двух векторов диаду.)

Свертыванием тензора по двум свободным индексам называется такая операция, когда два индекса обозначаются одной и той же буквой, вследствие чего они становятся индексами суммирования. В результате свертывания получается снова тензор (свертка), порядок которого на две единицы меньше, чем у исходного. Приведем несколько типичных примеров свертки.

а) Свертки тензора T_{ij} и диады $u_i v_j$:

$$T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33},$$

$$u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

б) Свертки тензора $E_{ij} a_k$:

$$E_{ij} a_j = b_i,$$

$$E_{ij} a_i = c_j,$$

$$E_{ii} a_k = d_k.$$

в) Свертки тензора $E_{ij} F_{km}$:

$$E_{ij} F_{im} = G_{jm}, \quad E_{ij} F_{kk} = P_{ij},$$

$$E_{ij} F_{ki} = H_{jk}, \quad E_{ij} F_{jm} = Q_{im},$$

$$E_{ii} F_{km} = K_{km}, \quad E_{ij} F_{kj} = R_{ik}.$$

Внутренним произведением двух тензоров называется результат операции свертывания, примененной к внешнему произведению данных тензоров, причем совпадающие индексы должны фигурировать по одному в каждом из сомножителей. Для справок приведем некоторые часто используемые в механике сплошной среды произведения тензоров, записанные в индексных и в символических обозначениях.

Внешнее произведение	Внутреннее индексные обозначения	произведение символические обозначения
$a_i b_j$	$a_i b_i$	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
$a_i E_{jk}$	$a_i E_{ik} = f_k$	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{f}$
	$a_i E_{ji} = h_j$	$\mathbf{E} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{h}$
$E_{ij} F_{km}$	$E_{ij} F_{jm} = G_{im}$	$\mathbf{E} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{G}$
$E_{ij} E_{km}$	$E_{ij} E_{im} = B_{jm}$	$\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = (\mathbf{E})^2.$

Иногда пользуются свертками тензоров четвертого и более высокого рангов по нескольким парам индексов. Вот два таких

примера:

$$\begin{aligned} E_{ij}F_{km} & \text{ свертывается в } E_{ij}F_{ij} \quad \text{или } E:F; \\ E_{ij}E_{km}E_{pq} & \text{ свертывается в } E_{ij}E_{jm}E_{mq} \text{ или } (E)^3. \end{aligned}$$

1.16. Векторное произведение. Тензор Леви-Чивиты. Бивектор

Чтобы записать векторное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ в индексных обозначениях, удобно ввести тензор третьего ранга ε_{ijk} , известный как *тензор Леви-Чивиты (альтернирующий тензор)*. Этот часто используемый тензор определяется следующим образом:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если значения индексов } i, j, k \text{ образуют четную перестановку из } 1, 2, 3; \\ -1, & \text{если значения индексов } i, j, k \text{ образуют нечетную перестановку из } 1, 2, 3; \\ 0, & \text{если значения } i, j, k \text{ не образуют перестановки из } 1, 2, 3, \text{ т. е. если два или все три индекса принимают одинаковые значения.} \end{cases}$$

С помощью этого тензора векторное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$ представляется в индексной записи так:

$$\varepsilon_{ijk}a_jb_k = c_i. \quad (1.108)$$

Так же можно представить и смешанное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \lambda$:

$$\lambda = \varepsilon_{ijk}a_ic_jb_k. \quad (1.109)$$

Это же смешанное произведение формулой (1.52) задано в виде определителя, поэтому не удивительно, что тензор Леви-Чивиты часто используют и для выражения величины определителя третьего порядка.

Заслуживает внимания то обстоятельство, что ε_{ijk} подчиняется правилу преобразования декартовых тензоров третьего ранга только в случае таких преобразований, у которых $\det a_{ij} = 1$ (например, при повороте осей). Если же преобразование таково, что $\det a_{ij} = -1$ (например, преобразование отражения относительно одной из координатных плоскостей, в результате чего правая система координат превращается в левую), то формулу преобразования ε_{ijk} следует писать со знаком минус. Такие тензоры называются *псевдотензорами*.

Объект, определяемый равенством

$$v_i = \varepsilon_{i,k}T_{jk}, \quad (1.110)$$

называется *бивектором* произвольного декартова тензора второго ранга T_{ij} и является аналогом в индексных обозначениях вектора $\mathbf{T}$, диадика $\mathbf{T}$, который был определен формулой (1.15).

1.17. Матрицы Матричные представления декартовых тензоров

Прямоугольная таблица элементов, заключенная в квадратные скобки и подчиняющаяся определенным правилам обращения с ней, называется *матрицей*. $(M \times N)$ -матрицей называется матрица, которая имеет M (горизонтальных) строк и N (вертикальных) столбцов элементов. В символе A_{ij} , которым изображают любой элемент матрицы, первый индекс означает номер строки, а второй — номер столбца, на пересечении которых находится данный элемент. Сама матрица обозначается символом своего типового элемента в квадратных скобках или той же заглавной рукописной буквой, что и элементы матрицы. Например, $(M \times N)$ -матрица $\mathcal{A}$, или $[A_{ij}]$, задается таблицей

$$\mathcal{A} = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{M1} & A_{M2} & \dots & A_{MN} \end{bmatrix}. \quad (1.111)$$

Если $M = N$, то матрица называется *квадратной* матрицей порядка N . Если $M = 1$, то получается $(1 \times N)$ -матрица; она обозначается $[a_{1k}]$ и называется *матрицей-строкой*. Соответственно $(M \times 1)$ -матрица обозначается $[a_{k1}]$ и называется *матрицей-столбцом*. Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется *нулевой*. Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной матрицей*. Если все диагональные элементы (от A_{11} до A_{NN}) такой матрицы равны единице, то матрица называется *единичной*. $(N \times M)$ -матрица $\mathcal{A}^T$, полученная путем перемены местами строк и столбцов $(M \times N)$ -матрицы $\mathcal{A}$, называется *транспонированной* матрицей или *транспозицией* $\mathcal{A}$.

Матрицы, имеющие одинаковое число строк и столбцов, можно *складывать* (или *вычитать*) *поэлементно*. Умножение матрицы $[A_{ij}]$ на скаляр λ дает матрицу $[\lambda A_{ij}]$. Произведение двух матриц $\mathcal{A}\mathcal{B}$ определено только в том случае, когда число столбцов в первом множителе $\mathcal{A}$ равно числу строк во втором множителе $\mathcal{B}$. Произведением $(M \times P)$ -матрицы на $(P \times N)$ -матрицу будет $(M \times N)$ -матрица. Умножение матриц обычно обозначается простым написанием их символов один за другим, например

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{C}, \quad \text{или} \quad [A_{ij}][B_{jk}] = [C_{ik}]. \quad (1.112)$$

Операция умножения матриц, вообще говоря, некоммукативна; $\mathcal{A}\mathcal{B} \neq \mathcal{B}\mathcal{A}$.

Квадратная матрица $\mathcal{A}$ называется *вырожденной*, если ее определитель $|A_{ij}|$ равен нулю. Алгебраическим дополнением A_{ij}

элемента A_{ij} квадратной матрицы $\mathcal{A}$ называется величина

$$A_{ij}^* = (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad (1.113)$$

где M_{ij} — *минор* элемента A_{ij} , т. е. определитель квадратной матрицы, остающейся после вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится элемент A_{ij} . Если каждый элемент матрицы $\mathcal{A}$ заменить его алгебраическим дополнением, а затем поменять местами строки и столбцы, то полученная таким образом матрица называется *присоединенной* (или *взаимной*) к матрице $\mathcal{A}$. Для любой невырожденной квадратной матрицы $\mathcal{A} = [A_{ij}]$ существует единственная *обратная матрица* $\mathcal{A}^{-1}$, которая по определению равна присоединенной к $\mathcal{A}$ матрице, деленной на определитель матрицы $\mathcal{A}$, т. е.

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{[A_{ij}^*]^T}{|\mathcal{A}|}. \quad (1.114)$$

Из определения обратной матрицы (1.114) следует, что

$$\mathcal{A}^{-1} \mathcal{A} = \mathcal{A} \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I}, \quad (1.115)$$

где $\mathcal{I}$ — *единичная матрица*, у которой по главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы равны нулю. Она называется также *тождественной* матрицей, так как обладает свойством

$$\mathcal{I} \mathcal{A} = \mathcal{A} \mathcal{I} = \mathcal{A}. \quad (1.116)$$

Совершенно ясно, что $\mathcal{I}$ является матричным представлением дельты Кронекера δ_{ij} и единичного диадика $\mathbf{I}$. Матрица $\mathcal{A}$, для которой $\mathcal{A}^T = \mathcal{A}^{-1}$, называется *ортогональной*. Для ортогональной матрицы $\mathcal{A}$ имеет место следующее равенство:

$$\mathcal{A}^T \mathcal{A} = \mathcal{A} \mathcal{A}^T = \mathcal{I}. \quad (1.117)$$

Так как в трехмерном пространстве можно любой тензор второго ранга выразить в девятичленной форме (1.53), а компоненты его записать в виде квадратной таблицы (1.62), оказывается крайне полезным представлять тензоры второго ранга (диадики) квадратными матрицами третьего порядка. Тензор первого ранга (вектор) можно записать либо в виде строки, т. е. (1×3) -матрицы, либо в виде столбца, т. е. (3×1) -матрицы. Хотя каждый декартов тензор, ранг которого не выше двух (диадик, вектор, скаляр), можно представить матрицей, не каждая матрица представляет тензор.

Если обе матрицы третьего порядка в произведении $\mathcal{A} \mathcal{B} = \mathcal{C}$ представляют тензоры второго ранга в трехмерном пространстве, то операция умножения матриц эквивалентна внутреннему произведению тензоров и в индексной записи выглядит так:

$$A_{ij} B_{jk} = C_{ik}; \quad (1.118)$$

здесь индексы i, j, k принимают значения 1, 2, 3. Расшифровка формулы (1.118) дает правило умножения матриц по принципу «строка на столбец»: элементы i -й строки первой из перемножаемых матриц умножаются поочередно на элементы k -го столбца второй матрицы, эти произведения суммируются и дают элемент, стоящий на пересечении i -й строки и k -го столбца результирующей матрицы. Некоторые произведения такого рода, часто встречающиеся в механике сплошной среды, приведены здесь для справок и сравнения.

а) *Скалярное произведение векторов*:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \lambda, \quad [a_{1i}][b_{j1}] = [\lambda], \quad (1.119)$$

$$a_i b_i = b_i a_i = \lambda, \quad [a_1, a_2, a_3] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = [a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3].$$

б) *Скалярное произведение вектора на тензор второго ранга*:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{b}, & \mathbf{a} \mathbf{E} &= \mathbf{E}, \\ a_i E_{ij} &= b_j, & [a_{1i}][E_{ij}] &= [b_{1j}], \end{aligned} \quad (1.120)$$

$$[a_1, a_2, a_3] \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 E_{11} + a_2 E_{21} + a_3 E_{31}, \\ a_1 E_{12} + a_2 E_{22} + a_3 E_{32}, \\ a_1 E_{13} + a_2 E_{23} + a_3 E_{33} \end{bmatrix}.$$

в) *Скалярное произведение тензора на вектор*

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{c}, & \mathbf{E} \mathbf{a} &= \mathbf{c}, \\ E_{ij} a_j &= c_i, & [E_{ij}][a_{j1}] &= [c_{i1}], \end{aligned} \quad (1.121)$$

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 E_{11} + a_2 E_{12} + a_3 E_{13} \\ a_1 E_{21} + a_2 E_{22} + a_3 E_{23} \\ a_1 E_{31} + a_2 E_{32} + a_3 E_{33} \end{bmatrix}.$$

1.18. Симметрия диадиков, матриц и тензоров

Согласно определению (1.36) (или (1.37)), диадик $\mathbf{D}$ называется симметричным (или антисимметричным), если он равен (или противоположен по знаку) сопряженному с ним диадику $\mathbf{D}_c$. Подобно этому тензор второго ранга D_{ij} симметричен, если

$$D_{ij} = D_{ji}, \quad (1.122)$$

и антисимметричен, или кососимметричен, если

$$D_{ij} = -D_{ji}. \quad (1.123)$$

Поэтому аналогично (1.38) D_{ij} можно разложить на два слагаемых:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(D_{ij} + D_{ji}) + \frac{1}{2}(D_{ij} - D_{ji}), \quad (1.124)$$

или (в сокращенной записи)

$$D_i = D_{(ij)} + D_{[ij]}, \quad (1.125)$$

где индексами в круглых скобках обозначена симметричная часть $D_{(ij)}$, а индексами в квадратных скобках — антисимметричная часть.

Изменение порядка индексов у тензора второго ранга эквивалентно перемени местами строк и столбцов в соответствующей ему матрице; следовательно, квадратная матрица $\mathcal{A}$ симметрична, если она равна своей транспозиции $\mathcal{A}^T$. Таким образом, симметричная матрица $\mathcal{A}$ третьего порядка имеет только шесть независимых компонент и записывается в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.126)$$

Антисимметричная матрица равна своей транспозиции с *обратным знаком*. Поэтому антисимметричная матрица $\mathcal{B}$ третьего порядка имеет нули по главной диагонали и, следовательно, содержит только три независимые компоненты. Она выглядит так:

$$\mathcal{B} = -\mathcal{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} \\ -B_{12} & 0 & B_{23} \\ -B_{13} & -B_{23} & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.127)$$

Свойства симметрии можно распространить на тензоры более высокого порядка (выше второго). В общем случае произвольный тензор называется симметричным относительно пары индексов, если значение каждой его компоненты не меняется при обмене местами этих индексов. Тензор антисимметричен по паре индексов, если замена их друг на друга ведет к изменению знака, но не абсолютной величины компоненты. Вот примеры свойств симметрии у тензоров более высокого ранга:

- а) $R_{ijk m} = R_{ikj m}$ (симметричен по k и j),
- б) $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji}$ (антисимметричен по k и i),
- в) $G_{ijk m} = G_{jik m} = G_{ijmk} = G_{jlmk}$ (симметричен по i и j , k и m),
- г) $\beta_{ijk} = \beta_{ikj} = \beta_{kji} = \beta_{jik}$ (симметричен по всем индексам).

1.19. Главные значения и главные направления симметричных тензоров второго ранга

В дальнейшем будут рассматриваться только симметричные тензоры с действительными компонентами. Это несколько проще в математическом отношении, а так как тензоры, важные для механики

сплошной среды, обычно симметричны, то мы не многим жертвуем, принимая такое ограничение.

Для каждого симметричного тензора T_{ij} , заданного в некоторой точке пространства, и для каждого направления в этой точке (характеризуемого единичным вектором n_i) существует вектор, определяемый внутренним произведением

$$v_i = T_{ij}n_j. \quad (1.128)$$

Здесь T_{ij} можно рассматривать как линейный векторный оператор, который ставит в соответствие направлению n_i вектор v_i . Если направление таково, что вектор v_i параллелен n_i , то указанное внутреннее произведение выражается скаляром, умноженным на n_i . В этом случае

$$T_{ij}n_j = \lambda n_i \quad (1.129)$$

и направление n_i называется *главным направлением* или *главной осью* тензора T_{ij} . С помощью тождества $n_i = \delta_{ij}n_j$ соотношению (1.129) можно придать форму

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij})n_j = 0, \quad (1.130)$$

которая представляет систему трех уравнений для четырех неизвестных n_i и λ , соответствующих каждому главному направлению. В развернутой записи система, которую следует разрешить, имеет вид

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda)n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3 &= 0, \\ T_{21}n_1 + (T_{22} - \lambda)n_2 + T_{23}n_3 &= 0, \\ T_{31}n_1 + T_{32}n_2 + (T_{33} - \lambda)n_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Заметим прежде всего, что при любом λ существует тривиальное решение $n_i = 0$, однако нашей целью является получение нетривиального решения. Кроме того, вследствие однородности системы (1.131), не теряя общности, можно ограничиться только решениями, для которых $n_i n_i = 1$. Начиная с этого момента мы будем требовать, чтобы это условие выполнялось.

Для того чтобы система (1.130), или, что то же самое, система (1.131), имела нетривиальное решение, определитель из коэффициентов должен быть равен нулю, т. е.

$$|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0. \quad (1.132)$$

В развернутом виде это кубическое уравнение относительно λ :

$$\lambda^3 - I_T \lambda^2 + II_T \lambda - III_T = 0, \quad (1.133)$$

которое называется *характеристическим уравнением* тензора T_{ij} , а его скалярные коэффициенты

$$I_T = T_{ii} = \text{tr } T_{ij} \text{ (след матрицы } [T_{ij}]), \quad (1.134)$$

$$\Pi_{\tau} = 1/2 (T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}), \quad (1.135)$$

$$\text{III}_{\tau} = |T_{ij}| = \det T_{ij} \quad (1.136)$$

называются соответственно первым, вторым и третьим *инвариантами* тензора T_{ij} . Три корня кубического уравнения (1.133), обозначенные $\lambda_{(1)}$, $\lambda_{(2)}$, $\lambda_{(3)}$, называются *главными значениями* тензора T_{ij} . У симметричного тензора с действительными компонентами главные значения действительны; если все они различны, то три главных направления взаимно ортогональны. В главных осях таблица из компонент тензора приводится к диагональной форме:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)} \end{pmatrix}. \quad (1.137)$$

Если $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)}$, то диагональный вид тензора не зависит от выбора осей, соответствующих $\lambda_{(1)}$ и $\lambda_{(2)}$, и нужно установить только главную ось, соответствующую $\lambda_{(3)}$. Если все главные значения равны, то любое направление является главным. Если главные значения упорядочены, то принято обозначать их через $\lambda_{(I)}$, $\lambda_{(II)}$, $\lambda_{(III)}$ и располагать в порядке убывания: $\lambda_{(I)} > \lambda_{(II)} > \lambda_{(III)}$.

Преобразование от системы $Ox_1x_2x_3$ к системе главных осей $Ox_1^*x_2^*x_3^*$ дается элементами таблицы

	x_1	x_2	x_3
x_1^*	$a_{11} = n_1^{(1)}$	$a_{12} = n_2^{(1)}$	$a_{13} = n_3^{(1)}$
x_2^*	$a_{21} = n_1^{(2)}$	$a_{22} = n_2^{(2)}$	$a_{23} = n_3^{(2)}$
x_3^*	$a_{31} = n_1^{(3)}$	$a_{32} = n_2^{(3)}$	$a_{33} = n_3^{(3)}$

где $n_i^{(j)}$ — направляющие косинусы j -го главного направления.

1.20. Степени тензоров второго ранга.

Соотношение Гамильтона — Кэли

Непосредственным матричным умножением квадрат тензора T_{ij} получается как внутреннее произведение $T_{ik}T_{kj}$, куб — как произведение $T_{ik}T_{km}T_{mj}$ и т. д. Таким образом, если T_{ij} представлен в диагональной форме (1.137), то n -я степень этого тензора (и соот-

ветствующей матрицы) дается формулой

$$(\mathbf{T})^n = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)}^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)}^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}^n \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad \mathcal{T}^n = \begin{bmatrix} \lambda_{(1)}^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)}^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}^n \end{bmatrix}. \quad (1.138)$$

Сравнение (1.138) и (1.137) показывает, что тензор T_{ij} и все его целые степени имеют одни и те же главные оси.

Все главные значения удовлетворяют уравнению (1.133), а матрица $\mathcal{T}^n$ имеет диагональный вид (1.138), поэтому сам тензор $\mathbf{T}$ будет удовлетворять уравнению (1.133). Таким образом,

$$\mathcal{T}^3 - \mathbf{I}_T \mathcal{T}^2 + \Pi_T \mathcal{T} - \Pi_T \mathcal{T} = 0, \quad (1.139)$$

где $\mathcal{T}$ — единичная матрица. Это соотношение называется *соотношением Гамильтона — Кэли*. Умножим каждый член этого соотношения (1.139) на $\mathcal{T}$ по правилу перемножения матриц и придем к равенству

$$\mathcal{T}^4 = \mathbf{I}_T \mathcal{T}^3 - \Pi_T \mathcal{T}^2 + \Pi_T \mathcal{T}. \quad (1.140)$$

Исключая $\mathcal{T}^3$ из (1.140) и (1.139), будем иметь

$$\mathcal{T}^4 = (\mathbf{I}_T^2 - \Pi_T) \mathcal{T}^2 + (\Pi_T - \mathbf{I}_T \Pi_T) \mathcal{T} + \mathbf{I}_T \Pi_T \mathcal{T}. \quad (1.141)$$

Продолжая эту процедуру, можно получить все целые положительные степени $\mathcal{T}$ в виде линейных комбинаций $\mathcal{T}^2$, $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}$.

1.21. Тензорные поля. Дифференцирование тензоров

Тензорное поле ставит в соответствие каждой точке пространства и каждому моменту времени $(\mathbf{x}, t)$ тензор $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$, где радиус-вектор $\mathbf{x}$ меняется в заданной области пространства, а t — в заданном интервале времени. Тензорное поле называется непрерывным (или дифференцируемым), если компоненты $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ являются непрерывными (или дифференцируемыми) функциями $\mathbf{x}$ и t . Если компоненты тензора зависят только от $\mathbf{x}$, то тензорное поле называется *стационарным*.

В ортогональной декартовой системе координат, где радиус-вектор любой точки имеет вид

$$\mathbf{x} = x_i \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (1.142)$$

поля тензоров различного ранга можно записать в индексных и символических обозначениях, например

$$a) \text{ скалярное поле } \varphi = \varphi(x_i, t), \quad \text{или} \quad \varphi = \varphi(\mathbf{x}, t), \quad (1.143)$$

$$б) \text{ векторное поле } v_i = v_i(x, t), \text{ или } \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t), \quad (1.144)$$

$$в) \text{ поле тензора второго ранга } T_{ij} = T_{ij}(x, t), \\ \text{или } \mathbf{T} = \mathbf{T}(x, t). \quad (1.145)$$

Дифференцирование компонент тензора по координате x_i обозначается дифференциальным оператором $\partial/\partial x_i$, или сокращенно в индексной записи ∂_i , что указывает на то, что это тензорный оператор первого ранга. В символических обозначениях для записи этой операции употребляется общеизвестный символ ∇ (набла), который расширяется так:

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \hat{\mathbf{e}}_i \partial_i. \quad (1.146)$$

Частное дифференцирование по переменной x_i иногда изображают нижним индексом после запятой, как показано в следующих примерах:

$$\begin{aligned} а) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \varphi_{,i}, & г) \frac{\partial^2 v_l}{\partial x_j \partial x_k} &= v_{l,jk}, \\ б) \frac{\partial v_l}{\partial x_i} &= v_{l,i}, & д) \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} &= T_{ij,k}, \\ в) \frac{\partial v_l}{\partial x_i} &= v_{l,i}, & е) \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} &= T_{ij,km}. \end{aligned}$$

Эти примеры показывают, что при дифференцировании оператор ∂_i приводит к тензору на один порядок выше исходного, если i остается свободным индексом (случаи «а» и «в»), и к тензору на один порядок ниже исходного, если i становится индексом суммирования (случай «б»).

Здесь для справки приведены некоторые важные дифференциальные операторы, часто употребляемые в механике континуума:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i, \quad \text{или} \quad \partial_i \varphi = \varphi_{,i}, \quad (1.147)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \text{или} \quad \partial_i v_i = v_{i,i}, \quad (1.148)$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}, \quad \text{или} \quad \epsilon_{ijk} \partial_j v_k = \epsilon_{ijk} v_{k,j}, \quad (1.149)$$

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi, \quad \text{или} \quad \partial_{ii} \varphi = \varphi_{,ii}. \quad (1.150)$$

1.22. Криволинейные интегралы. Теорема Стокса

Пусть в данной области пространства в каждой точке кусочно гладкой кривой C , изображенной на рис. 1.10, определена вектор-функция $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x)$. Если dx — *элементарный вектор касательной*

к кривой в произвольной точке P , то интеграл

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \equiv \int_{x_A}^{x_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}, \quad (1.151)$$

взятый вдоль кривой от A до B , называют *криволинейным интегралом* от функции $\mathbf{F}$ по контуру C . В индексных обозначениях интеграл (1.151) имеет вид

$$\int_C F_i dx_i \equiv \int_{(x_i)_A}^{(x_i)_B} F_i dx_i. \quad (1.152)$$

Теорема Стокса утверждает, что криволинейный интеграл от функции $\mathbf{F}$ вдоль замкнутой стягивающейся в точку кривой C

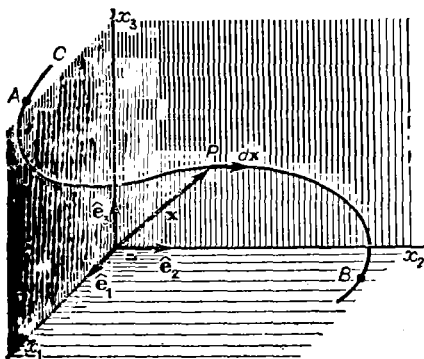


Рис. 1.10.

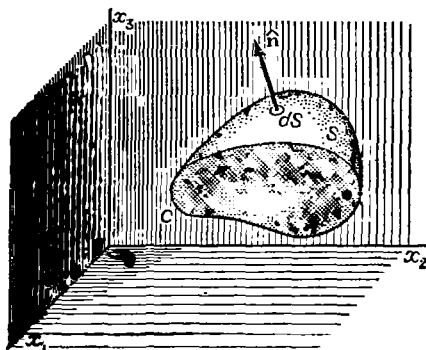


Рис. 1.11.

(рис. 1.11) можно представить в виде интеграла по любой двусторонней поверхности S , границей которой служит контур C , т. е.

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) dS, \quad (1.153)$$

где $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор нормали на положительной ¹⁾ стороне S , а dS — элемент поверхности, показанный на рисунке. Формулу (1.153) можно записать и в индексных обозначениях:

$$\oint_C F_i dx_i = \int_S n_i \varepsilon_{ijk} F_{k,j} dS. \quad (1.154)$$

¹⁾ Выбор положительной стороны S однозначно определяется направлением обхода контура C по правилу правого винта. — Прим. перев.

1.23. Теорема Гаусса — Остроградского

Теорема Гаусса — Остроградского (теорема о дивергенции) дает преобразование интеграла по объему в интеграл по поверхности. В обычной формулировке теорема утверждает, что для векторного поля $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} dS, \quad (1.155)$$

где $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S , ограничивающей объем V , внутри которого определен вектор $\mathbf{v}$. В индексных обозначениях формула (1.155) принимает вид

$$\int_V v_{i,i} dV = \int_S v_i n_i dS. \quad (1.156)$$

Теорема Гаусса — Остроградского в форме (1.156) может быть обобщена на поля тензоров любого ранга. Так, для произвольного тензорного поля $T_{ijk} \dots$ теорема утверждает, что

$$\int_V T_{ijk} \dots_{,p} dV = \int_S T_{ijk} \dots n_p dS. \quad (1.157)$$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Алгебра векторов и диадиков (§ 1.1—1.8)

1.1. В ортогональной декартовой системе координат (рис. 1.12) определить: а) единичный вектор, параллельный вектору $\mathbf{v} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 6\hat{\mathbf{k}}$; б) единичный вектор прямой, соединяющей точки $P(1, 0, 3)$ и $Q(0, 2, 1)$.

$$\begin{aligned} \text{а) } |\mathbf{v}| &= v = \\ &= \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-6)^2} = 7, \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/v = \frac{2}{7}\hat{\mathbf{i}} + \frac{3}{7}\hat{\mathbf{j}} - \frac{6}{7}\hat{\mathbf{k}}.$$

б) Вектор, идущий из P в Q , есть

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (0-1)\hat{\mathbf{i}} + (2-0)\hat{\mathbf{j}} + (1-3)\hat{\mathbf{k}} = \\ &= -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}, \end{aligned}$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (-2)^2} = 3.$$

Таким образом,

$$\hat{\mathbf{u}} = -\frac{1}{3}\hat{\mathbf{i}} + \frac{2}{3}\hat{\mathbf{j}} - \frac{2}{3}\hat{\mathbf{k}} \quad \text{направлен от } P \text{ к } Q$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{3}\hat{\mathbf{i}} - \frac{2}{3}\hat{\mathbf{j}} + \frac{2}{3}\hat{\mathbf{k}} \quad \text{направлен от } Q \text{ к } P.$$

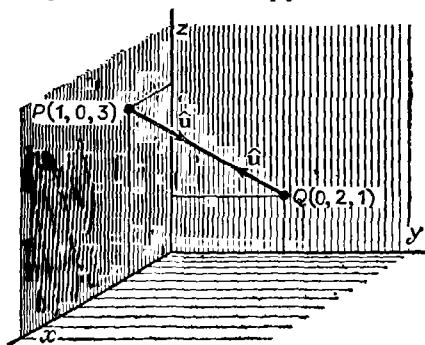


Рис. 1.12.

1.2. Доказать, что вектор $\mathbf{v} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ перпендикулярен плоскости, заданной уравнением $ax + by + cz = \lambda$ (рис. 1.13).

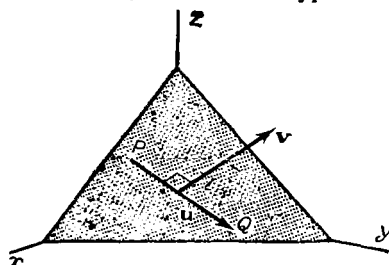


Рис. 1.13.

Пусть $P(x_1, y_1, z_1)$ и $Q(x_2, y_2, z_2)$ — две любые точки этой плоскости. Тогда $ax_1 + by_1 + cz_1 = \lambda$ и $ax_2 + by_2 + cz_2 = \lambda$, а вектор, соединяющий эти точки, есть $\mathbf{u} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$. Проекция вектора $\mathbf{v}$ на направление $\mathbf{u}$ равна

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{u} &= \frac{1}{u} [(x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}] \cdot [a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}] = \\ &= \frac{1}{u} (ax_2 + by_2 + cz_2 - ax_1 - by_1 - cz_1) = \frac{\lambda - \lambda}{u} = 0. \end{aligned}$$

Так как $\mathbf{u}$ — любой вектор, лежащий в плоскости, вектор $\mathbf{v}$ перпендикулярен этой плоскости.

1.3. Пусть $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ — вектор, идущий из начала в произвольную точку $P(x, y, z)$, а $\mathbf{d} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ — некоторый постоянный вектор. Показать, что $(\mathbf{r} - \mathbf{d}) \cdot \mathbf{r} = 0$ есть уравнение сферы.

Раскрывая скалярное произведение, будем иметь

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} - \mathbf{d}) \cdot \mathbf{r} &= [(x - a)\hat{i} + (y - b)\hat{j} + (z - c)\hat{k}] \cdot [x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}] = \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0. \end{aligned}$$

Добавляя $d^2/4 = (a^2 + b^2 + c^2)/4$ к правой и левой частям этого уравнения, получаем

$$(x - a/2)^2 + (y - b/2)^2 + (z - c/2)^2 = (d/2)^2,$$

т. е. уравнение сферы с центром в точке $\mathbf{d}/2$ и радиусом $d/2$.

1.4. Доказать что $[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}]\mathbf{r} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{b} \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})\mathbf{c} \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Рассмотрим произведение $\mathbf{a} \times [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{r}]$. Раскроем векторное произведение в скобках

$$\mathbf{a} \times [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{r}] = \mathbf{a} \times [(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})\mathbf{c} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})\mathbf{b}] = -(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})\mathbf{c} \times \mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

С другой стороны, полагая $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{v}$, напомним

$$\mathbf{a} \times [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{r}] = \mathbf{a} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{b} \times \mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{r}.$$

Таким образом,

$$-(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})\mathbf{c} \times \mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{b} \times \mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{r}$$

и, следовательно,

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{r} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{b} \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})\mathbf{c} \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Это тождество полезно, когда перемещение твердого тела определяется через перемещения трех произвольных его точек.

1.5. Показать, что $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = 0$, если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы. Проверить линейную зависимость (или независимость) следующей тройки векторов:

$$\mathbf{u} = 3\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}},$$

$$\mathbf{v} = 4\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}},$$

$$\mathbf{w} = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}.$$

Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы, если существуют константы λ , μ и ν , не все равные нулю и такие, что $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = 0$. Это векторное уравнение дает в компонентах три скалярных

$$\lambda a_x + \mu b_x + \nu c_x = 0,$$

$$\lambda a_y + \mu b_y + \nu c_y = 0,$$

$$\lambda a_z + \mu b_z + \nu c_z = 0.$$

Эта система имеет ненулевое решение для λ , μ и ν только в том случае, когда детерминант из коэффициентов обращается в нуль

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = 0,$$

а это эквивалентно равенству $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = 0$. Для предложенной тройки векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, эти векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ линейно зависимы. В самом деле, $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

1.6. Показать, что любой тензор второго ранга, заданный в виде суммы N диад, можно свести к сумме трех членов, если использовать базисные векторы $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$, $\hat{\mathbf{e}}_3$ в качестве: а) первых сомножителей, б) вторых сомножителей в диадах.

Пусть $\mathbf{D} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \dots + a_N\mathbf{b}_N = a_i\mathbf{b}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$).

а) Запишем все первые сомножители диад a_i через базисные векторы: $a_i = a_{i1}\hat{\mathbf{e}}_1 + a_{i2}\hat{\mathbf{e}}_2 + a_{i3}\hat{\mathbf{e}}_3 = a_{ji}\hat{\mathbf{e}}_j$, тогда $\mathbf{D} = a_{ji}\hat{\mathbf{e}}_j\mathbf{b}_i = \hat{\mathbf{e}}_j(a_{ji}\mathbf{b}_i) = \hat{\mathbf{e}}_j\mathbf{c}_j$, где $j = 1, 2, 3$.

б) Аналогично, представляя $\mathbf{b}_i$ в виде $\mathbf{b}_i = b_{ji}\hat{\mathbf{e}}_j$, получаем $\mathbf{D} = a_i b_{ji}\hat{\mathbf{e}}_j = (b_{ji}a_i)\hat{\mathbf{e}}_j = g_{ji}\hat{\mathbf{e}}_j$, где $j = 1, 2, 3$.

1.7. Показать, что для произвольных диадика $\mathbf{D}$ и вектора $\mathbf{v}$ справедливо равенство $\mathbf{D} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{D}_c$.

Пусть $\mathbf{D} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \dots + a_N\mathbf{b}_N$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \cdot \mathbf{v} &= a_1(\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v}) + a_2(\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{v}) + \dots + a_N(\mathbf{b}_N \cdot \mathbf{v}) = \\ &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_1) a_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_2) a_2 + \dots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_N) a_N = \mathbf{v} \cdot \mathbf{D}_c. \end{aligned}$$

1.8. Доказать, что $(D_c \cdot D)_c = D_c \cdot D$.

Согласно (1.71), $D = D_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j$ и $D_c = D_{ji} \hat{e}_i \hat{e}_j$. Поэтому

$$D_c \cdot D = D_{ji} \hat{e}_i \hat{e}_j \cdot D_{pq} \hat{e}_p \hat{e}_q = D_{ji} D_{pq} (\hat{e}_j \cdot \hat{e}_p) \hat{e}_i \hat{e}_q$$

и

$$(D_c \cdot D)_c = D_{ji} D_{pq} (\hat{e}_j \cdot \hat{e}_p) \hat{e}_q \hat{e}_i = D_{pq} \hat{e}_q (\hat{e}_p \cdot \hat{e}_j) \hat{e}_i D_{ji} = D_{pq} \hat{e}_q \hat{e}_p \cdot D_{ji} \hat{e}_j \hat{e}_i = D_c \cdot D.$$

1.9. Показать, что $(D \times v)_c = -v \times D_c$.

$$D \times v = a_1 (b_1 \times v) + a_2 (b_2 \times v) + \dots + a_N (b_N \times v),$$

$$\begin{aligned} (D \times v)_c &= (b_1 \times v) a_1 + (b_2 \times v) a_2 + \dots + (b_N \times v) a_N = \\ &= -(v \times b_1) a_1 - (v \times b_2) a_2 - \dots - (v \times b_N) a_N = \\ &= -v \times D_c. \end{aligned}$$

1.10. Пусть $D = a\hat{i}\hat{i} + b\hat{j}\hat{j} + c\hat{k}\hat{k}$, а r — радиус-вектор, $r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. Показать, что уравнение $r \cdot D \cdot r = 1$ представляет эллипсоид $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.

$$\begin{aligned} r \cdot D \cdot r &= (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (a\hat{i}\hat{i} + b\hat{j}\hat{j} + c\hat{k}\hat{k}) \cdot (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \\ &= (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (ax\hat{i} + by\hat{j} + cz\hat{k}) = ax^2 + by^2 + cz^2 = 1. \end{aligned}$$

1.11. Для тензоров $D = 3\hat{i}\hat{i} + 2\hat{j}\hat{j} - \hat{j}\hat{k} + 5\hat{k}\hat{k}$ и $F = 4\hat{i}\hat{k} + 6\hat{j}\hat{j} - 3\hat{k}\hat{j} + \hat{k}\hat{k}$ вычислить и сравнить двойные скалярные произведения $D : F$ и $D \cdot \cdot F$.

По определению $ab : cd = (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)$, следовательно, $D : F = 12 + 5 = 17$. Аналогично $ab \cdot \cdot cd = (b \cdot c) (a \cdot d)$ и, следовательно, $D \cdot \cdot F = 12 + 3 + 5 = 20$.

1.12. Определить диадики $G = D \cdot F$ и $H = F \cdot D$, если D и F — тензоры, указанные в задаче 1.11.

Воспользуемся правилом умножения диад $ab \cdot cd = (b \cdot c) ad$. Тогда

$$\begin{aligned} G &= (3\hat{i}\hat{i} + 2\hat{j}\hat{j} - \hat{j}\hat{k} + 5\hat{k}\hat{k}) \cdot (4\hat{i}\hat{k} + 6\hat{j}\hat{j} - 3\hat{k}\hat{j} + \hat{k}\hat{k}) = \\ &= 12\hat{i}\hat{k} + 12\hat{j}\hat{j} + 3\hat{j}\hat{j} - \hat{j}\hat{k} - 15\hat{k}\hat{j} + 5\hat{k}\hat{k}. \end{aligned}$$

Подобным же образом

$$\begin{aligned} H &= (4\hat{i}\hat{k} + 6\hat{j}\hat{j} - 3\hat{k}\hat{j} + \hat{k}\hat{k}) \cdot (3\hat{i}\hat{i} + 2\hat{j}\hat{j} - \hat{j}\hat{k} + 5\hat{k}\hat{k}) = \\ &= 20\hat{i}\hat{k} + 12\hat{j}\hat{j} - 6\hat{j}\hat{k} - 6\hat{k}\hat{j} + 8\hat{k}\hat{k}. \end{aligned}$$

1.13. Исходя из девятичленной формы записи тензора второго ранга D , показать, что его можно представить в виде $D = (D \cdot \hat{i})\hat{i} + (D \cdot \hat{j})\hat{j} + (D \cdot \hat{k})\hat{k}$; показать также, что

$$\hat{i} \cdot D \cdot \hat{i} = D_{xx}, \quad \hat{i} \cdot D \cdot \hat{j} = D_{xy} \text{ и т. д.}$$

Напишем $\mathbf{D}$ в девятичленной форме и перегруппируем члены

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= (D_{xx} \hat{i} + D_{yx} \hat{j} + D_{zx} \hat{k}) \hat{i} + (D_{xy} \hat{i} + D_{yy} \hat{j} + D_{zy} \hat{k}) \hat{j} + \\ &\quad + (D_{xz} \hat{i} + D_{yz} \hat{j} + D_{zz} \hat{k}) \hat{k} = \\ &= d_1 \hat{i} + d_2 \hat{j} + d_3 \hat{k} = (\mathbf{D} \cdot \hat{i}) \hat{i} + (\mathbf{D} \cdot \hat{j}) \hat{j} + (\mathbf{D} \cdot \hat{k}) \hat{k}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\hat{i} \cdot d_1 &= \hat{i} \cdot (\mathbf{D} \cdot \hat{i}) = \hat{i} \cdot (D_{xx} \hat{i} + D_{yx} \hat{j} + D_{zx} \hat{k}) = D_{xx}, \\ \hat{j} \cdot d_1 &= \hat{j} \cdot (\mathbf{D} \cdot \hat{i}) = D_{yx}, \quad \hat{j} \cdot d_2 = \hat{j} \cdot (\mathbf{D} \cdot \hat{j}) = D_{yy} \text{ и т. д.}\end{aligned}$$

1.14. Показать, что для антисимметричного тензора второго ранга $\mathbf{A}$ и любого вектора $\mathbf{b}$ выполняется формула $2\mathbf{b} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}_v \times \mathbf{b}$.

Из задачи 1.6, а имеем $\mathbf{A} = \hat{e}_1 c_1 + \hat{e}_2 c_2 + \hat{e}_3 c_3$; вследствие антисимметрии тензора $\mathbf{A}$ можно написать $2\mathbf{A} = (\mathbf{A} - \mathbf{A}_c)$, или

$$\begin{aligned}2\mathbf{A} &= (\hat{e}_1 c_1 + \hat{e}_2 c_2 + \hat{e}_3 c_3 - c_1 \hat{e}_1 - c_2 \hat{e}_2 - c_3 \hat{e}_3) = \\ &= (\hat{e}_1 c_1 - c_1 \hat{e}_1 + \hat{e}_2 c_2 - c_2 \hat{e}_2 + \hat{e}_3 c_3 - c_3 \hat{e}_3).\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}2\mathbf{b} \cdot \mathbf{A} &= [(\mathbf{b} \cdot \hat{e}_1) c_1 - (\mathbf{b} \cdot c_1) \hat{e}_1] + [(\mathbf{b} \cdot \hat{e}_2) c_2 - (\mathbf{b} \cdot c_2) \hat{e}_2] + \\ &\quad + [(\mathbf{b} \cdot \hat{e}_3) c_3 - (\mathbf{b} \cdot c_3) \hat{e}_3] = \\ &= [(\hat{e}_1 \times c_1) \times \mathbf{b} + (\hat{e}_2 \times c_2) \times \mathbf{b} + (\hat{e}_3 \times c_3) \times \mathbf{b}] = (\mathbf{A}_v \times \mathbf{b}).\end{aligned}$$

1.15. Пусть $\mathbf{D} = 6\hat{i}\hat{i} + 3\hat{j}\hat{j} + 4\hat{k}\hat{k}$ и $\mathbf{u} = 2\hat{i} + \hat{k}$, $\mathbf{v} = 5\hat{j}$. Показать непосредственным вычислением, что $\mathbf{D} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{D} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$.

Так как $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2\hat{i} + \hat{k}) \times 5\hat{j} = 10\hat{k} - 5\hat{i}$, то

$$\mathbf{D} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (6\hat{i}\hat{i} + 3\hat{j}\hat{j} + 4\hat{k}\hat{k}) \cdot (-5\hat{i} + 10\hat{k}) = -30\hat{i} + 40\hat{k}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\mathbf{D} \times \mathbf{u} &= (6\hat{i}\hat{i} + 3\hat{j}\hat{j} + 4\hat{k}\hat{k}) \times (2\hat{i} + \hat{k}) = -6\hat{i}\hat{k} + 8\hat{k}\hat{j} - 6\hat{i}\hat{j} + 3\hat{i}\hat{i} \\ \text{и} \quad (\mathbf{D} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} &= (3\hat{i}\hat{i} - 6\hat{i}\hat{j} - 6\hat{i}\hat{k} + 8\hat{k}\hat{j}) \cdot 5\hat{j} = -30\hat{i} + 40\hat{k}.\end{aligned}$$

1.16. Рассматривая диадик

$$\mathbf{D} = 3\hat{i}\hat{i} - 4\hat{j}\hat{j} + 2\hat{j}\hat{i} + \hat{j}\hat{j} + \hat{k}\hat{k}$$

как линейный векторный оператор, найти вектор $\mathbf{r}'$, который получается при действии оператора $\mathbf{D}$ на вектор $\mathbf{r} = 4\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$ (рис. 1.14).

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' = \mathbf{D} \cdot \mathbf{r} &= 12\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{i} + 2\hat{j} + \\ &+ 5\hat{k} = 4\hat{i} + 10\hat{j} + 5\hat{k}.\end{aligned}$$

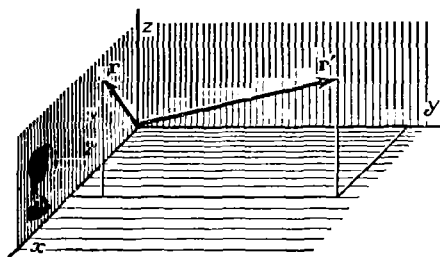


Рис. 1.14.

1.17. Определить диадик $\mathbf{D}$, который служит линейным векторным оператором для вектор-функции $\mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{b}) = \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{r}$, где $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$, а $\mathbf{b}$ — некоторый постоянный вектор.

При помощи формул (1.59) и (1.60) построим векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{i}}) &= \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{i}} \times \mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}} - z\hat{\mathbf{j}} + y\hat{\mathbf{k}}, \\ \mathbf{v} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{j}}) &= \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{j}} \times \mathbf{r} = z\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - x\hat{\mathbf{k}}, \\ \mathbf{w} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{k}}) &= \hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r} = -y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathbf{D} = \mathbf{u}\hat{\mathbf{i}} + \mathbf{v}\hat{\mathbf{j}} + \mathbf{w}\hat{\mathbf{k}} = (\hat{\mathbf{i}} - z\hat{\mathbf{j}} + y\hat{\mathbf{k}})\hat{\mathbf{i}} + (z\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - x\hat{\mathbf{k}})\hat{\mathbf{j}} + (-y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})\hat{\mathbf{k}}$$

и

$$\mathbf{a} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{b} = (b_x + b_y z - b_z y)\hat{\mathbf{i}} + (-b_x z + b_y + b_z x)\hat{\mathbf{j}} + (b_x y - b_y x + b_z)\hat{\mathbf{k}}.$$

Для проверки можно получить тот же результат, непосредственно раскрывая вектор-функцию:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{r} = b_x \hat{\mathbf{i}} + b_y \hat{\mathbf{j}} + b_z \hat{\mathbf{k}} + (b_y z - b_z y)\hat{\mathbf{i}} + (b_z x - b_x z)\hat{\mathbf{j}} + (b_x y - b_y x)\hat{\mathbf{k}}.$$

1.18. Выразить единичные векторы $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$, $\hat{\mathbf{e}}_\theta$, $\hat{\mathbf{e}}_r$ через $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ и показать, что этот триэдр составляет правую систему, т. е. что $\hat{\mathbf{e}}_\varphi \times \hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_r$.

Непосредственным проектированием (рис. 1.15) найдем

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_\varphi &= (\cos \varphi \cos \theta) \hat{\mathbf{i}} + (\cos \varphi \sin \theta) \hat{\mathbf{j}} - (\sin \varphi) \hat{\mathbf{k}}, \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta &= (-\sin \theta) \hat{\mathbf{i}} + (\cos \theta) \hat{\mathbf{j}}, \\ \hat{\mathbf{e}}_r &= (\sin \varphi \cos \theta) \hat{\mathbf{i}} + (\sin \varphi \sin \theta) \hat{\mathbf{j}} + (\cos \varphi) \hat{\mathbf{k}}; \end{aligned}$$

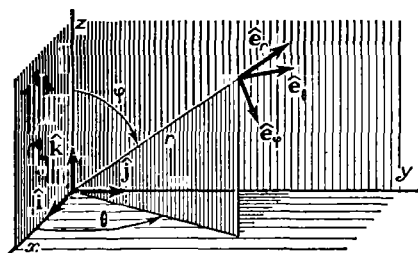


Рис. 1.15.

отсюда

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_\varphi \times \hat{\mathbf{e}}_\theta &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (\sin \varphi \cos \theta) \hat{\mathbf{i}} + (\sin \varphi \sin \theta) \hat{\mathbf{j}} + [(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \cos \varphi] \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{e}}_r. \end{aligned}$$

1.19. Разложить тензор $\mathbf{D} = 3\hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{k}} + 6\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{i}} + 7\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{j}} + 10\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{j}}$ на симметричную и антисимметричную части.

Пусть $D = E + F$, где $E = E_c$ и $F = -F_c$. Тогда

$$\begin{aligned} E = 1/2 (D + D_c) &= 1/2 (6\hat{i}\hat{i} + 4\hat{i}\hat{k} + 4\hat{k}\hat{i} + 6\hat{j}\hat{i} + 6\hat{i}\hat{j} + 14\hat{j}\hat{j} + \\ &+ 10\hat{k}\hat{i} + 10\hat{i}\hat{k} + 2\hat{k}\hat{j} + 2\hat{j}\hat{k}) = \\ &= 3\hat{i}\hat{i} + 3\hat{i}\hat{j} + 7\hat{i}\hat{k} + 3\hat{j}\hat{i} + 7\hat{j}\hat{j} + \hat{j}\hat{k} + 7\hat{k}\hat{i} + \\ &+ \hat{k}\hat{j} = E_c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F = 1/2 (D - D_c) &= 1/2 (4\hat{i}\hat{k} - 4\hat{k}\hat{i} + 6\hat{j}\hat{i} - 6\hat{i}\hat{j} + 10\hat{k}\hat{i} - \\ &- 10\hat{i}\hat{k} + 2\hat{k}\hat{j} - 2\hat{j}\hat{k}) = \\ &= -3\hat{i}\hat{j} - 3\hat{i}\hat{k} + 3\hat{j}\hat{i} - \hat{j}\hat{k} + 3\hat{k}\hat{i} + \hat{k}\hat{j} = -F_c. \end{aligned}$$

1.20. Векторы a^1, a^2, a^3 образуют взаимный базис для базисных векторов a_1, a_2, a_3 (не обязательно единичных), если $a_i \cdot a^j = \delta_{ij}$. Найти необходимые соотношения для построения взаимного базиса и выполнить эти вычисления для следующих базисных векторов:

$$b_1 = 3\hat{i} + 4\hat{j}, \quad b_2 = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}, \quad b_3 = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}.$$

Согласно определению, $a_1 \cdot a^1 = 1$, $a_2 \cdot a^1 = 0$, $a_3 \cdot a^1 = 0$. Следовательно, a^1 перпендикулярен векторам a_2 и a_3 и поэтому параллелен $a_2 \times a_3$, т. е. $a^1 = \lambda (a_2 \times a_3)$. Так как $a_1 \cdot a^1 = 1$, то $a_1 \cdot \lambda a_2 \times a_3 = 1$ и $\lambda = 1/(a_1 \cdot a_2 \times a_3) = 1/[a_1 a_2 a_3]$. Таким образом, мы нашли общее правило получения взаимного базиса:

$$a^1 = \frac{a_2 \times a_3}{[a_1 a_2 a_3]}, \quad a^2 = \frac{a_3 \times a_1}{[a_1 a_2 a_3]}, \quad a^3 = \frac{a_1 \times a_2}{[a_1 a_2 a_3]}.$$

Для указанных базисных векторов b_1, b_2, b_3 имеем $1/\lambda = b_1 \cdot b_2 \times b_3 = 12$ и, следовательно,

$$b^1 = (b_2 \times b_3)/12 = (\hat{j} - \hat{k})/4,$$

$$b^2 = (b_3 \times b_1)/12 = -\hat{i}/3 + \hat{j}/4 + \hat{k}/12,$$

$$b^3 = (b_1 \times b_2)/12 = 2\hat{i}/3 - \hat{j}/2 + 5\hat{k}/6.$$

Индексные обозначения — декартовы тензоры (§ 1.9 — 1.16)

1.21. В трехмерном пространстве расшифровать следующие тензорные символы (тензоры декартовы): A_{ii} , B_{ijj} , R_{ij} , $a_i T_{ij}$, $a_i b_j S_{ij}$.

A_{ii} представляет одну сумму: $A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$;

B_{ijj} представляет три суммы:

$$1) \text{ при } i = 1 \quad B_{111} + B_{122} + B_{133},$$

$$2) \text{ при } i = 2 \quad B_{211} + B_{222} + B_{233},$$

$$3) \text{ при } i = 3 \quad B_{311} + B_{322} + B_{333};$$

R_{ij} представляет девять компонент: $R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{31}, R_{32}, R_{33}$;

$a_i T_{ij}$ представляет три суммы:

- 1) при $j = 1$ $a_1 T_{11} + a_2 T_{21} + a_3 T_{31}$,
- 2) при $j = 2$ $a_1 T_{12} + a_2 T_{22} + a_3 T_{32}$,
- 3) при $j = 3$ $a_1 T_{13} + a_2 T_{23} + a_3 T_{33}$;

$a_i b_j S_{ij}$ представляет сумму девяти членов. Первое суммирование по i дает $a_i b_j S_{ij} = a_1 b_j S_{1j} + a_2 b_j S_{2j} + a_3 b_j S_{3j}$. Затем каждое из этих трех слагаемых суммируем по j :

$$a_i b_j S_{ij} = a_1 b_1 S_{11} + a_1 b_2 S_{12} + a_1 b_3 S_{13} + a_2 b_1 S_{21} + a_2 b_2 S_{22} + \\ + a_2 b_3 S_{23} + a_3 b_1 S_{31} + a_3 b_2 S_{32} + a_3 b_3 S_{33}.$$

1.22. В трехмерном пространстве вычислить следующие выражения, содержащие дельту Кронекера δ_{ij} : а) δ_{ii} , б) $\delta_{ij}\delta_{ij}$, в) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}$, г) $\delta_{ij}\delta_{jk}$, д) $\delta_{ij}A_{ik}$.

а) $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$.

б) $\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{1j}\delta_{1j} + \delta_{2j}\delta_{2j} + \delta_{3j}\delta_{3j} = 3$.

в) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{1j}\delta_{1k}\delta_{jk} + \delta_{2j}\delta_{2k}\delta_{jk} + \delta_{3j}\delta_{3k}\delta_{jk} = 3$.

г) $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{1i}\delta_{1k} + \delta_{2i}\delta_{2k} + \delta_{3i}\delta_{3k} = \delta_{ik}$.

д) $\delta_{ij}A_{ik} = \delta_{1j}A_{1k} + \delta_{2j}A_{2k} + \delta_{3j}A_{3k} = A_{jk}$.

1.23. Для тензора Леви-Чивиты ε_{ijk} непосредственным расписыванием по индексам показать, что: а) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = 6$, б) $\varepsilon_{ijk}a_ja_k = 0$.

а) Просуммируем сначала по i :

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{1jk}\varepsilon_{k1j} + \varepsilon_{2jk}\varepsilon_{k2j} + \varepsilon_{3jk}\varepsilon_{k3j}.$$

Затем суммируем по j , записывая только отличные от нуля члены:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{12k}\varepsilon_{k12} + \varepsilon_{13k}\varepsilon_{k13} + \varepsilon_{21k}\varepsilon_{k21} + \varepsilon_{23k}\varepsilon_{k23} + \varepsilon_{31k}\varepsilon_{k31} + \varepsilon_{32k}\varepsilon_{k32}$$

Наконец, суммируем по k , опять оставляя только ненулевые члены:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{123}\varepsilon_{312} + \varepsilon_{132}\varepsilon_{213} + \varepsilon_{213}\varepsilon_{321} + \varepsilon_{231}\varepsilon_{123} + \varepsilon_{312}\varepsilon_{231} + \varepsilon_{321}\varepsilon_{132} = \\ = (1)(1) + (-1)(-1) + (-1)(-1) + (1)(1) + (1)(1) + \\ + (-1)(-1) = 6.$$

б) Суммируем по j , потом по k :

$$\varepsilon_{ijk}a_ja_k = \varepsilon_{1jk}a_ja_k + \varepsilon_{2jk}a_ja_k + \varepsilon_{3jk}a_ja_k = \\ = \varepsilon_{112}a_1a_2 + \varepsilon_{113}a_1a_3 + \varepsilon_{121}a_2a_1 + \varepsilon_{123}a_2a_3 + \varepsilon_{131}a_3a_1 + \varepsilon_{132}a_3a_2.$$

Из этого выражения получим:

при $i = 1$ $\varepsilon_{1jk}a_ja_k = a_2a_3 - a_3a_2 = 0$,

при $i = 2$ $\varepsilon_{2jk}a_ja_k = a_1a_3 - a_3a_1 = 0$,

при $i = 3$ $\varepsilon_{3jk}a_ja_k = a_1a_2 - a_2a_1 = 0$.

Заметим, что $\varepsilon_{ijk}a_ja_k$ является индексной формой записи векторного произведения вектора a самого на себя и, следовательно, $a \times a = 0$.

1.24. Определить компоненту f_2 данных ниже векторов: а) $f_i = \varepsilon_{ijk}T_{jk}$, б) $f_i = c_{i,j}b_j - c_{j,i}b_j$, в) $B_{ij}f_j$.

а) $f_2 = \varepsilon_{2jk}T_{jk} = \varepsilon_{213}T_{13} + \varepsilon_{231}T_{31} = -T_{13} + T_{31}$.

$$\begin{aligned} \text{б) } f_2 &= c_{2,1}b_1 + c_{2,2}b_2 + c_{2,3}b_3 - c_{1,2}b_1 - c_{2,2}b_2 - c_{3,2}b_3 = \\ &= (c_{2,1} - c_{1,2})b_1 + (c_{2,3} - c_{3,2})b_3. \end{aligned}$$

$$\text{в) } f_2 = B_{21}f_1^* + B_{22}f_2^* + B_{23}f_3^*.$$

1.25. Написать в развернутой форме и по возможности упростить выражение $D_{ij}x_ix_j$, если: а) $D_{ij} = D_{ji}$, б) $D_{ij} = -D_{ji}$.

Имеем

$$\begin{aligned} D_{ij}x_ix_j &= D_{11}x_1x_1 + D_{21}x_2x_1 + D_{31}x_3x_1 = \\ &= D_{11}x_1x_1 + D_{12}x_1x_2 + D_{13}x_1x_3 + D_{21}x_2x_1 + D_{22}x_2x_2 + \\ &\quad + D_{23}x_2x_3 + D_{31}x_3x_1 + D_{32}x_3x_2 + D_{33}x_3x_3. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\text{а) } D_{ij}x_ix_j = D_{11}(x_1)^2 + D_{22}(x_2)^2 + D_{33}(x_3)^2 + 2D_{12}x_1x_2 + 2D_{23}x_2x_3 + 2D_{13}x_1x_3;$$

$$\text{б) } D_{ij}x_ix_j = 0, \text{ так как } D_{11} = -D_{11}, D_{12} = -D_{21} \text{ и т. д.}$$

1.26. Показать, что $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$: а) при $i = 1, j = q = 2, p = 3$ и б) при $i = q = 1, j = p = 2$. (В задаче 1.59 будет доказано, что это тождество справедливо при любом выборе индексов.)

а) Положим $i = 1, j = 2, p = 3, q = 2$ и заметим, что k — индекс суммирования и, следовательно, пробегает значения 1, 2, 3. Тогда

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \varepsilon_{12k}\varepsilon_{k32} = \varepsilon_{121}\varepsilon_{132} + \varepsilon_{122}\varepsilon_{232} + \varepsilon_{123}\varepsilon_{332} = 0.$$

$$\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} = \delta_{13}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{23} = 0.$$

б) Пусть $i = 1, j = 2, p = 2, q = 1$. Тогда $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \varepsilon_{123}\varepsilon_{321} = -1$ и $\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} = \delta_{12}\delta_{21} - \delta_{11}\delta_{22} = -1$.

1.27. Показать, что тензор $B_{ik} = \varepsilon_{ijk}a_j$ антисимметричен.

В соответствии с определением ε_{ijk} перемена местами двух индексов ведет к изменению знака, так что

$$B_{ik} = \varepsilon_{ijk}a_j = -(\varepsilon_{kji}a_j) = -(B_{ki}) = -B_{ki}.$$

1.28. Пусть задан антисимметричный декартов тензор B_{ij} и вектор $b_i = 1/2 \varepsilon_{ijk}B_{jk}$. Показать, что $B_{pq} = \varepsilon_{pqi}b_i$.

Умножим данный вектор на ε_{pqi} и воспользуемся тождеством, доказанным в задаче 1.26:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{pqi}b_i &= 1/2 \varepsilon_{pqi}\varepsilon_{ijk}B_{jk} = 1/2 (\delta_{pj}\delta_{qi} - \delta_{pi}\delta_{qj})B_{jk} = 1/2 (B_{pq} - B_{qp}) = \\ &= 1/2 (B_{pq} + B_{pq}) = B_{pq}. \end{aligned}$$

1.29. Непосредственным вычислением найти компоненты метрического тензора в сферической системе координат, изображенной на рис. 1.7,б.

Формулу (1.87) запишем в виде $g_{pq} = (\partial x_i / \partial \theta_p)(\partial x_i / \partial \theta_q)$. Нумерацию координат примем такую, как показано на рис. 1.16 ($r = \theta_1, \varphi = \theta_2, \theta = \theta_3$). Тогда

$$x_1 = \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \quad x_2 = \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3, \quad x_3 = \theta_1 \cos \theta_2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} &= \sin \theta_2 \cos \theta_3, & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} &= \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3, & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_3} &= -\theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3, \\ \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} &= \sin \theta_2 \sin \theta_3, & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} &= \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3, & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_3} &= \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\ \frac{\partial x_3}{\partial \theta_1} &= \cos \theta_2, & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_2} &= -\theta_1 \sin \theta_2, & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_3} &= 0. \end{aligned}$$

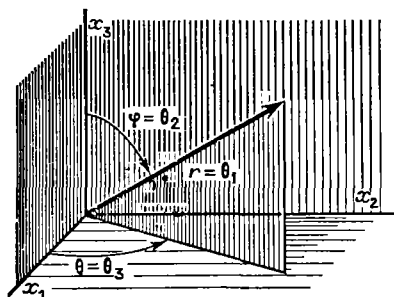


Рис. 1.16.

Отсюда найдем

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{\partial x_i}{\partial \theta_1} \frac{\partial x_i}{\partial \theta_1} = \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \\ &+ \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3 + \cos^2 \theta_2 = 1, \\ g_{22} &= \frac{\partial x_i}{\partial \theta_2} \frac{\partial x_i}{\partial \theta_2} = \theta_1^2 \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \\ &+ \theta_1^2 \cos^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3 + \theta_1^2 \sin^2 \theta_2 = \theta_1^2, \end{aligned}$$

$$g_{33} = \frac{\partial x_i}{\partial \theta_3} \frac{\partial x_i}{\partial \theta_3} = \theta_1^2 \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3 + \theta_1^2 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 = \theta_1^2 \sin^2 \theta_2.$$

Кроме того, $g_{pq} = 0$ для $p \neq q$. Например,

$$\begin{aligned} g_{12} &= \frac{\partial x_i}{\partial \theta_1} \frac{\partial x_i}{\partial \theta_2} = (\sin \theta_2 \cos \theta_3) (\theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3) + \\ &+ (\sin \theta_2 \sin \theta_3) (\theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3) - (\cos \theta_2) (\theta_1 \sin \theta_2) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в сферических координатах

$$(ds)^2 = (d\theta_1)^2 + (\theta_1)^2 (d\theta_2)^2 + (\theta_1 \sin \theta_2)^2 (d\theta_3)^2,$$

или

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 (d\theta)^2.$$

1.30. Показать, что длина линейного элемента ds , соответствующего приращению криволинейной координаты $d\theta_i$, равна $ds = \sqrt{g_{ii}} d\theta_i$ (не суммировать!). Применить полученный результат к сферической системе координат (задача 1.29).

Запишем формулу (1.86) в виде $(ds)^2 = g_{pq} d\theta_p d\theta_q$. Тогда для линейного элемента $(d\theta_1, 0, 0)$ получим выражение $(ds)^2 = g_{11} (d\theta_1)^2$ и $ds = \sqrt{g_{11}} d\theta_1$. Аналогично для $(0, d\theta_2, 0)$ получим $ds = \sqrt{g_{22}} d\theta_2$, а для $(0, 0, d\theta_3)$ получим $ds = \sqrt{g_{33}} d\theta_3$. В сферической

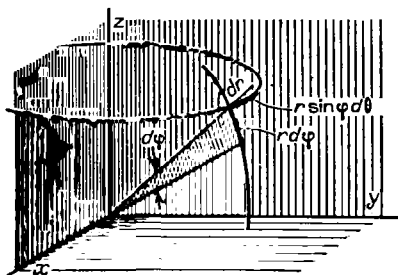


Рис. 1.17.

системе координат (рис. 1.17) имеем следующие выражения:

- 1) для $(d\theta_1, 0, 0)$ $ds = d\theta_1 = dr$;
- 2) для $(0, d\theta_2, 0)$ $ds = \theta_1 d\theta_2 = r d\varphi$;
- 3) для $(0, 0, d\theta_3)$ $ds = \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_3 = r \sin \varphi d\theta$.

1.31. Пусть β_{12} — угол между линейными элементами $(d\theta_1, 0, 0)$ и $(0, d\theta_2, 0)$. Показать, что $\cos \beta_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}}$.

Пусть $ds_1 = \sqrt{g_{11}} d\theta_1$ — длина линейного элемента $(d\theta_1, 0, 0)$, а $ds_2 = \sqrt{g_{22}} d\theta_2$ — длина линейного элемента $(0, d\theta_2, 0)$. Тогда квадрат длины $(ds)^2$ линейного элемента $(d\theta_1, d\theta_2, 0)$ можно вычислить так: $(ds)^2 = 2 \cos \beta_{12} ds_1 ds_2 + (ds_1)^2 + (ds_2)^2$. С другой стороны,

$$(ds)^2 = dx_i dx_i = g_{11} d\theta_1^2 + g_{22} d\theta_2^2 + 2g_{12} d\theta_1 d\theta_2.$$

Отсюда, пользуясь результатом задачи 1.30, получаем

$$\cos \beta_{12} = g_{12} \frac{d\theta_1}{ds_1} \frac{d\theta_2}{ds_2} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}}.$$

1.32. Оси декартовой системы координат $Ox'_1x'_2x'_3$ получены поворотом системы $Ox_1x_2x_3$ на угол θ вокруг оси x_3 . Определить коэффициенты преобразования a_{ij} указанных осей и найти компоненты вектора $\mathbf{v} = v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3$ в системе со штрихами.

По определению (см. § 1.13) $a_{ij} = \cos(\hat{\mathbf{x}}'_i, \hat{\mathbf{x}}_j)$. Углы между соответствующими осями указаны на рис. 1.18, что позволяет найти таблицу направляющих косинусов:

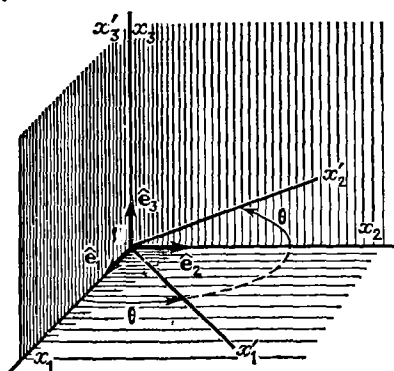


Рис. 1.18.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	$\cos \theta$	$\sin \theta$	0
x'_2	$-\sin \theta$	$\cos \theta$	0
x'_3	0	0	1

Таким образом, тензор преобразования имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По правилу преобразования векторов (1.94) получаем

$$v'_1 = a_{1j} v_j = v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta,$$

$$v'_2 = a_{2j} v_j = -v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta,$$

$$v'_3 = a_{3j} v_j = v_3.$$

1.33. В приведенной таблице частично заданы направляющие косинусы углов между осями двух декартовых ортогональных систем координат. Определить элементы нижнего ряда таблицы так, чтобы система $Ox_1'x_2'x_3'$ была правой.

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$3/5$	$-4/5$	0
x_2'	0	0	1
x_3'			

Первая строка таблицы дает единичный вектор $\hat{e}_1'$ оси x_1' в виде $\hat{e}_1' = 3/5 \hat{e}_1 - 4/5 \hat{e}_2$. Точно так же $\hat{e}_2' = \hat{e}_3$. Для правой системы должно быть выполнено равенство $\hat{e}_3' = \hat{e}_1' \times \hat{e}_2'$, или $\hat{e}_3' = (3/5 \hat{e}_1 - 4/5 \hat{e}_2) \times \hat{e}_3 = -3/5 \hat{e}_2 - 4/5 \hat{e}_1$. Таким образом мы получим третью строку таблицы:

x_3'	$-4/5$	$-3/5$	0
--------	--------	--------	---

1.34. Пусть углы между направлениями осей координат системы со штрихами и системы без штрихов даны в следующей таблице:

	x_1	x_2	x_3
x_1'	135°	60°	120°
x_2'	90°	45°	45°
x_3'	45°	60°	120°

Определить коэффициенты преобразования a_{ij} и показать, что выполнены условия ортогональности.

Коэффициенты a_{ij} являются направляющими косинусами и могут быть сразу вычислены в соответствии с данной таблицей углов. Таким образом,

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Условия ортогональности $a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}$ требуют, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) при $j = k = 1$ должно быть $a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} + a_{31}a_{31} = 1$; левая часть, очевидно, представляет собой сумму квадратов элементов первого столбца;
- 2) при $j = 2, k = 3$ должно быть выполнено равенство $a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0$, левая часть которого является суммой произведений соответствующих элементов второго и третьего столбцов;
- 3) сумма произведений соответствующих элементов любых двух столбцов

должна быть равна нулю; сумма квадратов элементов любого столбца должна быть равна единице.

Если условие ортогональности записано в форме $a_{ji}a_{ki} = \delta_{jk}$, то вместо столбцов перемножаются строки.

Указанное выше решение удовлетворяет всем этим требованиям.

1.35. Показать, что сумма $\lambda A_{ij} + \mu B_{ij}$ представляет компоненты тензора второго ранга, если известно, что A_{ij} и B_{ij} — тензоры второго ранга.

Согласно формуле (1.103) и условию задачи $A_{ij} = a_{pi}a_{qj}A'_{pq}$ и $B_{ij} = a_{pi}a_{qj}B'_{pq}$. Отсюда

$$\lambda A_{ij} + \mu B_{ij} = \lambda (a_{pi}a_{qj}A'_{pq}) + \mu (a_{pi}a_{qj}B'_{pq}) = a_{pi}a_{qj}(\lambda A'_{pq} + \mu B'_{pq}),$$

а это значит, что указанная сумма преобразуется как декартов тензор второго ранга.

1.36. Показать, что $(P_{ijk} + P_{jki} + P_{ikj}) x_i x_j x_k = 3P_{ijk} x_i x_j x_k$.

Так как все индексы являются немymi и, следовательно, порядок написания переменных x_i не играет роли, все слагаемые эквивалентны друг другу. Это легко показать, введя другие немые индексы. Так, заменив i, j, k во втором и третьем членах на p, q, r , получим

$$P_{ijk} x_i x_j x_k + P_{qrp} x_p x_q x_r + P_{qpr} x_p x_q x_r.$$

Теперь вернемся в тех же членах к прежним индексам суммирования i, j, k и получим сумму

$$P_{ijk} x_i x_j x_k + P_{ijk} x_k x_i x_j + P_{ijk} x_j x_i x_k = 3P_{ijk} x_i x_j x_k.$$

1.37. Пусть B_{ij} — антисимметричный и A_{ij} — симметричный тензоры. Показать, что $A_{ij}B_{ij} = 0$.

Так как $A_{ij} = A_{ji}$ и $B_{ij} = -B_{ji}$, то $A_{ij}B_{ij} = -A_{ji}B_{ji}$, или $A_{ij}B_{ij} + A_{ji}B_{ji} = A_{ij}B_{ij} + A_{pq}B_{pq} = 0$. Поскольку все индексы являются немymi, $A_{pq}B_{pq} = A_{ij}B_{ij}$, и поэтому $2A_{ij}B_{ij} = 0$, или $A_{ij}B_{ij} = 0$.

1.38. Показать, что квадратичная форма $D_{ij}x_i x_j$ не изменится, если вместо тензора D_{ij} взять его симметричную часть $D_{(ij)}$.

Разложим D_{ij} на симметричную и антисимметричную части:

$$D_{ij} = D_{(ij)} + D_{[ij]} = \frac{1}{2}(D_{ij} + D_{ji}) + \frac{1}{2}(D_{ij} - D_{ji}).$$

Тогда

$$D_{(ij)} x_i x_j = \frac{1}{2}(D_{ij} + D_{ji}) x_i x_j = \frac{1}{2}(D_{ij} x_i x_j + D_{ji} x_j x_i) = D_{ij} x_i x_j.$$

1.39. Используя индексные обозначения, доказать векторные тождества

$$1) \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}, \quad 2) \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 0.$$

1) Пусть $\mathbf{v} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Тогда $v_i = \epsilon_{ijk} b_j c_k$, и если $\mathbf{a} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$, то

$$\begin{aligned} w_p &= \epsilon_{pqi} a_q \epsilon_{ijk} b_j c_k = \\ &= (\delta_{pj} \delta_{qk} - \delta_{pk} \delta_{qj}) a_q b_j c_k = \quad (\text{см. задачу 1.26}) \\ &= a_q b_p c_q - a_q b_q c_p = (a_q c_q) b_p - (a_q b_q) c_p. \end{aligned}$$

В символических обозначениях это выражение имеет вид

$$w = a \times (b \times c) = (a \cdot c) b - (a \cdot b) c.$$

2) Пусть $a \times b = v$, т. е. $v_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$, и если $\lambda = v \cdot a$, то $\lambda = \varepsilon_{ijk} (a_i a_j b_k)$. Но ε_{ijk} антисимметричен по индексам i и j , в то время как произведение $(a_i a_j b_k)$ симметрично по этим индексам. Следовательно, $\varepsilon_{ijk} a_i a_j b_k$ обращается в нуль, что можно показать, непосредственно расписывая это выражение по индексам:

$$\begin{aligned} \lambda &= \varepsilon_{ij1} a_i a_j b_1 + \varepsilon_{ij2} a_i a_j b_2 + \varepsilon_{ij3} a_i a_j b_3 = \\ &= (\varepsilon_{321} a_3 a_2 + \varepsilon_{231} a_2 a_3) b_1 + \dots = \\ &= (-a_2 a_3 + a_2 a_3) b_1 + (0) b_2 + (0) b_3 = 0. \end{aligned}$$

1.40. Показать, что определитель

$$\det A_{ij} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

можно записать в виде $\varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$.

По формулам (1.52) и (1.109) смешанное произведение $[abc]$ можно представить так:

$$\lambda = a \cdot b \times c = [abc] = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Если теперь положить $a_i = A_{1i}$, $b_i = A_{2i}$ и $c_i = A_{3i}$, то будем иметь

$$\lambda = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}.$$

Этот же результат можно получить и непосредственным разложением определителя по строке. Определитель можно также записать в виде $\varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$; очевидно, эти два выражения эквивалентны.

1.41. Вектор v_i задан в базисе a, b, c своими компонентами $v_i = \alpha a_i + \beta b_i + \gamma c_i$. Показать, что $\alpha = \frac{\varepsilon_{ijk} v_i b_j c_k}{\varepsilon_{pqr} a_p b_q c_r}$.

Мы имеем

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1, \\ v_2 &= \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2, \\ v_3 &= \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3. \end{aligned}$$

По правилу Крамера

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & b_1 & c_1 \\ v_2 & b_2 & c_2 \\ v_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},$$

и, пользуясь формулами (1.52) и (1.109), можно написать

$$\alpha = \frac{e_{ijk} v_i b_j c_k}{e_{pqr} a_p b_q c_r}.$$

Подобным же образом находим

$$\beta = \frac{e_{ijk} a_i v_j c_k}{e_{pqr} a_p b_q c_r}, \quad \gamma = \frac{e_{ijk} a_i b_j v_k}{e_{pqr} a_p b_q c_r}.$$

Матрицы и матричные методы (§ 1.17—1.20)

1.42. Для векторов $\mathbf{a} = 3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{b} = 2\hat{\mathbf{j}} - 6\hat{\mathbf{k}}$ и диадика $\mathbf{D} = 3\hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{k}} - 4\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{j}}$ путем перемножения матриц вычислить произведения $\mathbf{a} \cdot \mathbf{D}$, $\mathbf{D} \cdot \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{b}$.

Пусть $\mathbf{a} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{v}$; тогда

$$[v_1, v_2, v_3] = [3, 0, 4] \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} = [9, -20, 6].$$

Пусть $\mathbf{D} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{w}$; тогда

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -8 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

Пусть $\mathbf{a} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} = \lambda$; тогда

$$[\lambda] = [9, -20, 6] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} = [-76].$$

1.43. Найти главные направления и главные значения декартова тензора $\mathbf{T}$ второго порядка, который представлен матрицей

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для определения главных значений λ , согласно (1.132), имеем уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 1] = 0.$$

Это кубическое уравнение

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0,$$

корни которого $\lambda_{(1)} = 1$, $\lambda_{(2)} = 2$, $\lambda_{(3)} = 4$.

Пусть теперь $n_i^{(1)}$ — компоненты единичного вектора главного направления, соответствующего $\lambda_{(1)} = 1$. Тогда два первых уравнения системы (1.131) дают

$2n_1^{(1)} - n_2^{(1)} = 0$ и $-n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} = 0$, откуда $n_1^{(1)} = n_2^{(1)} = 0$, а из условия $n_i n_i = 1$ получим $n_3^{(1)} = \pm 1$.

Для $\lambda_{(2)} = 2$ система уравнений (1.131) дает $n_1^{(2)} - n_2^{(2)} = 0$, $-n_1^{(2)} + n_2^{(2)} = 0$ и $-n_3^{(2)} = 0$. Таким образом, $n_3^{(2)} = 0$, а $n_1^{(2)} = n_2^{(2)} = \pm 1/\sqrt{2}$, так как $n_i n_i = 1$.

Для $\lambda_{(3)} = 4$ из системы (1.131) получаем $-n_1^{(3)} - n_2^{(3)} = 0$, $-n_1^{(3)} - n_2^{(3)} = 0$ и $3n_3^{(3)} = 0$. Таким образом, $n_3^{(3)} = 0$ и $n_1^{(3)} = -n_2^{(3)} = \mp 1/\sqrt{2}$.

Ориентация главных осей x_i^* относительно исходной системы x_i определяется направляющими косинусами, которые даны в следующей таблице:

	x_1	x_2	x_3
x_1^*	0	0	± 1
x_2^*	$\pm 1/\sqrt{2}$	$\pm 1/\sqrt{2}$	0
x_3^*	$\mp 1/\sqrt{2}$	$\pm 1/\sqrt{2}$	0

Отсюда видно, что матрица тензора преобразования такова:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ \pm 1/\sqrt{2} & \pm 1/\sqrt{2} & 0 \\ \mp 1/\sqrt{2} & \pm 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

1.44. Показать, что главные оси тензора, определенные в задаче 1.43, образуют правую систему ортогональных осей.

Для ортогональности требуется выполнение условий $a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}$. Так как при определении a_{ij} уже были использованы соотношения $n_i n_i = 1$, условия ортогональности для $j = k$ выполнены автоматически. Умножив элементы любой строки (столбца) на соответственные элементы любой другой строки (столбца) и сложив эти произведения, убедимся, что для решения, полученного в задаче 1.43, условия ортогональности выполнены и для $j \neq k$.

Чтобы система к тому же была правой, необходимо, чтобы $\hat{n}^{(2)} \times \hat{n}^{(3)} = \hat{n}^{(1)}$. Таким образом,

$$\begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \\ = (1/2 + 1/2) \hat{e}_3 = \hat{e}_3.$$

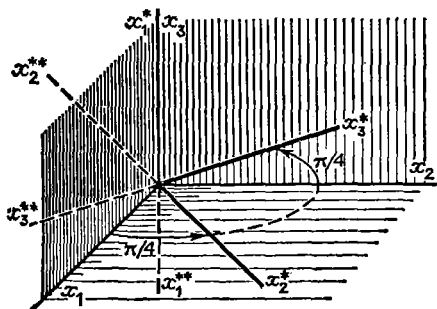


Рис. 1.19.

Наличие знаков $\pm$ у величин a_{ij} в задаче 1.43 указывает на то, что существуют две системы главных осей x_i^* и x_i^{**} . Как показывает рис. 1.19, главные направления x_i^* образуют правую систему, а x_i^{**} — левую.

1.45. Показать, что матрица тензора T_{ij} задачи 1.43 может быть приведена к диагональной (главной) форме преобразованием $T_{ij}^* = a_{ip} a_{jq} T_{pq}$ (или в матричной записи $\mathcal{T}^* = \mathcal{A} \mathcal{T} \mathcal{A}^T$).

$$\begin{aligned} [T_{ij}^*] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.46. Доказать, что если все три главных значения $\lambda_{(1)}$, $\lambda_{(2)}$, $\lambda_{(3)}$ симметричного тензора второго ранга различны, то главные направления взаимно ортогональны.

Доказательство проведем для направлений, соответствующих $\lambda_{(2)}$ и $\lambda_{(3)}$. Для каждого из них выполняется соотношение (1.129), так что $T_{ij} n_i^{(2)} = \lambda_{(2)} n_j^{(2)}$ и $T_{ij} n_j^{(3)} = \lambda_{(3)} n_i^{(3)}$. Умножим первое из этих равенств на $n_i^{(3)}$, а второе на $n_i^{(2)}$:

$$T_{ij} n_i^{(2)} n_j^{(3)} = \lambda_{(2)} n_i^{(2)} n_i^{(3)},$$

$$T_{ij} n_j^{(3)} n_i^{(2)} = \lambda_{(3)} n_i^{(3)} n_i^{(2)}.$$

Так как тензор T_{ij} симметричен, можно поменять местами немые индексы i и j в левой части второго уравнения и затем второе уравнение вычесть из первого. Получим

$$(\lambda_{(2)} - \lambda_{(3)}) n_i^{(2)} n_i^{(3)} = 0.$$

Поскольку $\lambda_{(2)} \neq \lambda_{(3)}$, их разность отлична от нуля. Следовательно, $n_i^{(2)} n_i^{(3)} = 0$, а это и есть условие ортогональности данных двух направлений.

1.47. Вычислить главные значения тензора $(\mathbf{T})^2$ задачи 1.43 и убедиться, что его главные оси совпадают с главными осями тензора $\mathbf{T}$.

$$[T_{ij}]^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для этой матрицы таково:

$$\begin{vmatrix} 10 - \lambda & -6 & 0 \\ -6 & 10 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) [(10 - \lambda)^2 - 36] = (1 - \lambda) (\lambda - 4) (\lambda - 16) = 0,$$

откуда $\lambda_{(1)} = 1$, $\lambda_{(2)} = 4$, $\lambda_{(3)} = 16$. Подставляя эти значения в (1.131) и учитывая условие $n_i n_i = 1$, получаем для $\lambda_{(1)} = 1$

$$\left. \begin{aligned} 9n_1^{(1)} - 6n_2^{(1)} &= 0 \\ -6n_1^{(1)} + 9n_2^{(1)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{или} \quad n_1^{(1)} = n_2^{(1)} = 0, \quad n_3^{(1)} = \pm 1;$$

для $\lambda_{(2)} = 4$

$$\left. \begin{aligned} 6n_1^{(2)} - 6n_2^{(2)} &= 0 \\ -6n_1^{(2)} + 6n_2^{(2)} &= 0 \\ -3n_3^{(2)} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \text{или} \quad n_1^{(2)} = n_2^{(2)} = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_3^{(2)} = 0;$$

для $\lambda_{(3)} = 16$

$$\left. \begin{aligned} -6n_1^{(3)} - 6n_2^{(3)} &= 0 \\ -6n_1^{(3)} - 6n_2^{(3)} &= 0 \\ -15n_3^{(3)} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \text{или} \quad n_1^{(3)} = -n_2^{(3)} = \mp 1/\sqrt{2}, \quad n_3^{(3)} = 0.$$

Видно, что главные направления $\mathbf{T}$ и $(\mathbf{T})^2$ одни и те же.

1.48. Воспользовавшись тем, что тензор $(\mathbf{T})^2$ и симметричный тензор $\mathbf{T}$ имеют одни и те же главные направления, найти тензор $\sqrt{\mathbf{T}}$, если

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Прежде всего мы будем искать главные значения и главные направления тензора $\mathbf{T}$. Действуя так же, как в задаче 1.43, найдем диагональную форму $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T}^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

причем матрица преобразования имеет вид

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Итак, ясно что

$$\sqrt{\mathbf{T}^*} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Тогда, зная матрицу $[a_{ij}]$, вернемся к первоначальным осям при помощи преобразования $\sqrt{\mathbf{T}} = \mathbf{A}_c \sqrt{\mathbf{T}^*} \mathbf{A}$, что можно записать в матричной форме так:

$$[\sqrt{\mathbf{T}}_{ij}] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} + 4 & \sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} - 2 \\ \sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} + \sqrt{6} + 1 & \sqrt{2} - \sqrt{6} + 1 \\ \sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} - \sqrt{6} + 1 & \sqrt{2} + \sqrt{6} + 1 \end{bmatrix} \approx$$

$$\approx 0,402 \begin{bmatrix} 5,414 & -0,586 & -0,586 \\ -0,586 & 4,863 & -0,035 \\ -0,586 & -0,035 & 4,863 \end{bmatrix}.$$

Декартовы тензоры и операции над ними (§ 1.21—1.23)

1.49. Для функции $\lambda = A_{ij}x_i x_j$, где A_{ij} — постоянные, показать, что $\partial\lambda/\partial x_i = (A_{ij} + A_{ji})x_j$ и $\partial^2\lambda/\partial x_i \partial x_j = A_{ij} + A_{ji}$. Упростить эти производные в случае $A_{ij} = A_{ji}$.

Рассмотрим $\frac{\partial\lambda}{\partial x_k} = A_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j + A_{ji} x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k}$. Так как $\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \delta_{ik}$, то $\frac{\partial\lambda}{\partial x_k} = A_{kj}x_j + A_{ik}x_i = (A_{kj} + A_{ik})x_j$. Дифференцируя второй раз, получаем $\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_p \partial x_k} = (A_{kj} + A_{jk}) \frac{\partial x_j}{\partial x_p} = A_{kp} + A_{pk}$. Если $A_{ij} = A_{ji}$, то $\frac{\partial\lambda}{\partial x_k} = 2A_{kj}x_j$ и $\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_p \partial x_k} = 2A_{pk}$.

1.50. Пользуясь индексными обозначениями, доказать векторные тождества: а) $\nabla \times \nabla\varphi = 0$, б) $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{a} = 0$.

а) Согласно (1.147), $\nabla\varphi$ записывается в виде $\varphi_{,i}$, тогда $\mathbf{v} = \nabla \times \nabla\varphi$ имеет компоненты $v_i = \epsilon_{ijk} \partial_j \varphi_{,k} = \epsilon_{ijk} \varphi_{,kj}$. Но ϵ_{ijk} антисимметричен по индексам j и k , тогда как $\varphi_{,kj}$ симметричен по этим индексам, следовательно произведение $\epsilon_{ijk} \varphi_{,kj}$ обращается в нуль. К тому же результату можно прийти, вычисляя отдельно каждую компоненту $\mathbf{v}$; например

$$v_1 = \epsilon_{123}\varphi_{,23} + \epsilon_{132}\varphi_{,32} = (\varphi_{,23} - \varphi_{,32}) = 0.$$

б) $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{a} = \lambda = (\epsilon_{ijk} a_{k,j})_{,i} = \epsilon_{ijk} a_{k,ji} = 0$, так как $a_{k,ij} = a_{k,ji}$ и $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$.

1.51. Найти производную функции $\lambda = (x_1)^2 + 2x_1x_2 - (x_3)^2$ по направлению, заданному единичным вектором $\hat{\mathbf{n}} = \frac{2}{7}\hat{\mathbf{e}}_1 - \frac{3}{7}\hat{\mathbf{e}}_2 - \frac{6}{7}\hat{\mathbf{e}}_3$, или $\hat{\mathbf{n}} = (2\hat{\mathbf{e}}_1 - 3\hat{\mathbf{e}}_2 - 6\hat{\mathbf{e}}_3)/7$.

Искомая производная вычисляется по формуле $\partial\lambda/\partial n = \nabla\lambda \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lambda_{,i}n_i$. Таким образом,

$$\frac{\partial\lambda}{\partial n} = (2x_1 + 2x_2) \frac{2}{7} - (2x_1) \frac{3}{7} + (2x_3) \frac{6}{7} = \frac{2}{7}(-x_1 + 2x_2 + 6x_3).$$

1.52. Пусть A_{ij} — декартов тензор второго ранга. Показать, что его производная по x_k , т. е. $A_{ij,k}$, является декартовым тензором третьего ранга.

Если x_i и x'_i — декартовы системы координат, то $x_i = a_{ji}x'_j$ и $\partial x_i / \partial x'_j = a_{ji}$. Тогда будем иметь

$$A'_{ij,k} = \frac{\partial (A'_{ij})}{\partial x'_k} = \frac{\partial}{\partial x'_k} (a_{ip} a_{jq} A_{pq}) = a_{ip} a_{jq} \frac{\partial A_{pq}}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x'_k} = a_{ip} a_{jq} a_{km} A_{pq,m},$$

а это и есть правило преобразования декартова тензора третьего ранга.

1.53. Пусть $r^2 = x_i x_i$ и $f(r)$ — произвольная функция r . Показать, что: а) $\nabla(f(r)) = f'(r) \mathbf{x}/r$ и б) $\nabla^2(f(r)) = f''(r) + 2f'(r)/r$, где штрихом обозначено дифференцирование по r .

а) Вектор ∇f имеет компоненты $f_{,i}$, причем $f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i}$, а так как $\frac{\partial(r^2)}{\partial x_j} = 2r \frac{\partial r}{\partial x_j} = 2\delta_{ij}x_i$, то $\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{r}$. Следовательно, $f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = f' \frac{x_i}{r}$.

$$\text{б) } \nabla^2 f = f_{,ii} = \left(f' \frac{x_i}{r} \right)_{,i} = f'' \frac{x_i x_i}{r^2} + f' \left(\frac{3}{r} - \frac{x_i x_i}{r^3} \right) = f'' + \frac{2f'}{r}.$$

1.54. Воспользовавшись теоремой Гаусса — Остроградского, показать, что $\int_S x_i n_i dS = V \delta_{ii}$, где $n_i dS$ — элемент поверхности S , ограничивающей объем V

(рис. 1.20), x_i — радиус-вектор элемента $n_i dS$ и n_i — внешняя нормаль этого элемента.

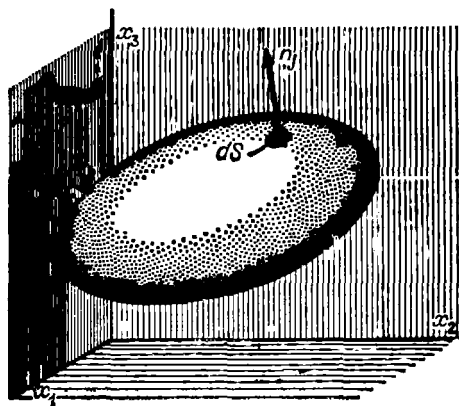


Рис. 1.20.

По формуле (1.157)

$$\begin{aligned} \int_S x_i n_i dS &= \int_V x_{i,j} dV = \\ &= \int_V \delta_{ij} dV = \delta_{ij} V. \end{aligned}$$

1.55. Пусть даны вектор $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{v}$ и скалярная функция координат $\lambda = \lambda(x_i)$; показать, что $\int_S \lambda b_i n_i dS =$

$$= \int_V \lambda_{,i} b_i dV.$$

По условию $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{v}$, т. е. $b_l = \varepsilon_{ijk} v_{k,j}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_S \lambda b_i n_i dS &= \int_S \varepsilon_{ijk} \lambda v_{k,j} n_i dS = \int_V \varepsilon_{ijk} (\lambda v_{k,j})_{,i} dV = \quad (\text{см. (1.157)}) \\ &= \int_V (\varepsilon_{ijk} \lambda_{,i} v_{k,j} + \varepsilon_{ijk} \lambda v_{k,ji}) dV = \int_V \lambda_{,i} b_i dV, \end{aligned}$$

так как $\lambda \varepsilon_{ijk} v_{k,ji} = 0$.

Смешанные задачи

1.56. Для произвольных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ показать, что

$$\lambda = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = (ab)^2.$$

Поменяем местами скалярное и векторное умножение в первом члене. Тогда

$$\begin{aligned}\lambda &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \\ &= \mathbf{a} \cdot [(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b}] + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (ab)^2,\end{aligned}$$

так как второй и третий члены взаимно уничтожаются.

1.57. Пусть $\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$ и $\dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$; показать, что

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}).$$

а) В символических обозначениях:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \dot{\mathbf{v}} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \\ &= (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{u} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{v} = \\ &= (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}).\end{aligned}$$

б) В индексных обозначениях:

Пусть $\frac{d}{dt} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{w}$; тогда

$$w_i = \frac{d}{dt} (\varepsilon_{ijk} u_j v_k) = \varepsilon_{ijk} \dot{u}_j v_k + \varepsilon_{ijk} u_j \dot{v}_k,$$

а так как $\dot{u}_j = \varepsilon_{jpr} \omega_p u_r$ и $\dot{v}_k = \varepsilon_{kmn} \omega_m v_n$, то

$$w_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jpr} \omega_p u_r v_k + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} u_j \omega_m v_n = (\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} - \varepsilon_{ink} \varepsilon_{kmj}) u_j \omega_m v_n.$$

Пользуясь результатом задачи 1.59, а₁ получаем

$$\begin{aligned}w_i &= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) u_j \omega_m v_n = \\ &= (\delta_{ij} \delta_{mn} - \delta_{in} \delta_{jm}) u_j \omega_m v_n = \varepsilon_{imk} \varepsilon_{kjm} u_j \omega_m v_n,\end{aligned}$$

что в индексной форме представляет величину $\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

1.58. Доказать тождество

$$\varepsilon_{pqs} \varepsilon_{mnr} = \begin{vmatrix} \delta_{mp} & \delta_{mq} & \delta_{ms} \\ \delta_{np} & \delta_{nq} & \delta_{ns} \\ \delta_{rp} & \delta_{rq} & \delta_{rs} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим определитель A_{ij}

$$\det A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Перестановка строк или столбцов ведет к изменению знака определителя, например

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{12} & A_{11} & A_{13} \\ A_{22} & A_{21} & A_{23} \\ A_{32} & A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} = -\det A,$$

Если строки менять местами произвольное число раз, то

$$\begin{vmatrix} A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} \\ A_{r1} & A_{r2} & A_{r3} \end{vmatrix} = \varepsilon_{mnr} \det A,$$

а если менять местами столбцы, то

$$\begin{vmatrix} A_{1p} & A_{1q} & A_{1s} \\ A_{2p} & A_{2q} & A_{2s} \\ A_{3p} & A_{3q} & A_{3s} \end{vmatrix} = \varepsilon_{pqs} \det A.$$

Следовательно, для произвольной последовательности перестановок строк и столбцов получим

$$\begin{vmatrix} A_{mp} & A_{mq} & A_{ms} \\ A_{np} & A_{nq} & A_{ns} \\ A_{rp} & A_{rq} & A_{rs} \end{vmatrix} = \varepsilon_{mnr} \varepsilon_{pqs} \det A.$$

Если положить $A_{ij} = \delta_{ij}$, то $\det A = 1$; тождество доказано.

1.59. Воспользовавшись результатами задачи 1.58, доказать, что:

а) $\varepsilon_{pqs} \varepsilon_{snr} = \delta_{pn} \delta_{qr} - \delta_{pr} \delta_{qn}$, б) $\varepsilon_{pqs} \varepsilon_{sqr} = -2\delta_{pr}$.

В тождестве, доказанном в задаче 1.58, разложим определитель по первой строке:

$$\varepsilon_{pqs} \varepsilon_{snr} = \delta_{mp} (\delta_{nq} \delta_{rs} - \delta_{ns} \delta_{rq}) + \delta_{mq} (\delta_{ns} \delta_{rp} - \delta_{np} \delta_{rs}) + \delta_{ms} (\delta_{np} \delta_{rq} - \delta_{nq} \delta_{rp}).$$

а) Положив $m = s$, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{pqs} \varepsilon_{snr} &= \delta_{sp} (\delta_{nq} \delta_{rs} - \delta_{ns} \delta_{rq}) + \delta_{sq} (\delta_{ns} \delta_{rp} - \delta_{np} \delta_{rs}) + \delta_{ss} (\delta_{np} \delta_{rq} - \delta_{nq} \delta_{rp}) = \\ &= \delta_{rp} \delta_{nq} - \delta_{pn} \delta_{rq} + \delta_{qn} \delta_{rp} - \delta_{np} \delta_{qr} + 3\delta_{np} \delta_{rq} - 3\delta_{nq} \delta_{rp} = \\ &= \delta_{np} \delta_{rq} - \delta_{nq} \delta_{rp}. \end{aligned}$$

б) В полученном в «а» соотношении положим n равным q ; тогда

$$\varepsilon_{pqs} \varepsilon_{sqr} = \delta_{qp} \delta_{rq} - \delta_{qq} \delta_{rp} = \delta_{pr} - 3\delta_{pr} = -2\delta_{pr}.$$

1.60. Тензор второго ранга $\mathbf{B}$ кососимметричен, т. е. $\mathbf{B} = -\mathbf{B}_c$. Показать, что $\mathbf{B}_v \times \mathbf{a} = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}$.

Запишем $\mathbf{B}$ в виде $\mathbf{B} = b_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + b_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + b_3 \hat{\mathbf{e}}_3$ (см. задачу 1.6). Тогда

$$\mathbf{B}_v = b_1 \times \hat{\mathbf{e}}_1 + b_2 \times \hat{\mathbf{e}}_2 + b_3 \times \hat{\mathbf{e}}_3$$

и

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_v \times \mathbf{a} &= (\mathbf{b}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_1) \times \mathbf{a} + (\mathbf{b}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_2) \times \mathbf{a} + (\mathbf{b}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_3) \times \mathbf{a} = \\
 &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_1) \hat{\mathbf{e}}_1 - (\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1) \mathbf{b}_1 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_2) \hat{\mathbf{e}}_2 - (\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2) \mathbf{b}_2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_3) \hat{\mathbf{e}}_3 - (\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3) \mathbf{b}_3 = \\
 &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{b}_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{b}_3 \hat{\mathbf{e}}_3) - \mathbf{a} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_1 \mathbf{b}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 \mathbf{b}_2 + \hat{\mathbf{e}}_3 \mathbf{b}_3) = \\
 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{B}_c = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}.
 \end{aligned}$$

1.61. Воспользовавшись соотношением Гамильтона — Кэли, найти $(\mathbf{B})^4$ для тензора

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Проверить результат непосредственным возведением в квадрат $(\mathbf{B})^2$.

Характеристическое уравнение для тензора $\mathbf{B}$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0.$$

По теореме Гамильтона—Кэли тензор удовлетворяет своему собственному характеристическому уравнению. Следовательно, $(\mathbf{B})^3 - 2(\mathbf{B})^2 - 6\mathbf{B} + 9\mathbf{I} = 0$. Умножив это равенство на $\mathbf{B}$, получим $(\mathbf{B})^4 = 2(\mathbf{B})^3 + 6(\mathbf{B})^2 - 9\mathbf{B}$, или $(\mathbf{B})^4 = 10(\mathbf{B})^2 + 3\mathbf{B} - 18\mathbf{I}$. Отсюда найдем

$$(\mathbf{B})^4 = 10 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & 81 & 0 \\ 7 & 0 & 26 \end{pmatrix}.$$

Проверим этот результат, непосредственно умножая тензор $(\mathbf{B})^2$ самого на себя

$$(\mathbf{B})^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & 81 & 0 \\ 7 & 0 & 26 \end{pmatrix}.$$

1.62. Доказать, что: а) A_{ii} , б) $A_{ij}A_{ij}$, в) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klp}A_{ip}$ являются инвариантами относительно преобразования координат (1.103), т. е. что $A_{ii} = A'_{ii}$, и т. д.

а) Согласно (1.103), $A_{ij} = a_{pi}a_{qj}A'_{pq}$; следовательно,

$$A_{ii} = a_{pi}a_{qi}A'_{pq} = \delta_{pq}A'_{pq} = A'_{pp} = A'_{ii}.$$

б) $A_{ij}A_{ij} = a_{pi}a_{qj}A'_{pq}a_{mi}a_{nj}A'_{mn} = \delta_{pm}\delta_{qn}A'_{pq}A'_{mn} = A'_{pq}A'_{pq} = A'_{ij}A'_{ij}$.

в) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klp}A_{ip} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klp}a_{mi}a_{np}A'_{mn} = (\delta_{ij}\delta_{lp} - \delta_{ip}\delta_{jl})a_{mi}a_{np}A'_{mn} =$
 $= (\delta_{mn} - \delta_{mn}\delta_{jj})A'_{mn} = (\delta_{mj}\delta_{ln} - \delta_{mn}\delta_{jj})A'_{mn} = \varepsilon_{mjk}\varepsilon_{kln}A'_{mn}.$

1.63. Показать, что бивектор произвольного тензора T_{ij} зависит только от $T_{[ij]}$, однако произведение $T_{ij}S_{ij}$ тензора T_{ij} на симметричный тензор S_{ij} от $T_{[ij]}$ не зависит.

По определению (1.110) бивектор тензора T_{ij} имеет компоненты $v_i = \varepsilon_{ijk} T_{jk}$, или $v_i = \varepsilon_{ijk}(T_{(jk)} + T_{[jk]}) = \varepsilon_{ijk} T_{[jk]}$, так как $\varepsilon_{ijk} T_{(jk)} = 0$ (ε_{ijk} антисимметричен по j и k , а $T_{(jk)}$ симметричен по индексам j и k).

Указанное произведение можно записать в виде $T_{ij} S_{ij} = T_{(ij)} S_{ij} + T_{[ij]} S_{ij}$. Здесь $T_{[ij]} S_{ij} = 0$ и, следовательно, $T_{ij} S_{ij} = T_{(ij)} S_{ij}$.

1.64. Показать, что $\mathbf{D} : \mathbf{E}$ равно $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$, если $\mathbf{E}$ — симметричный тензор второго ранга.

Запишем тензоры в виде $\mathbf{D} = D_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j$ и $\mathbf{E} = E_{pq} \hat{e}_p \hat{e}_q$. Согласно (1.31), $\mathbf{D} : \mathbf{E} = D_{ij} E_{pq} (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_p) (\hat{e}_j \cdot \hat{e}_q)$. В силу (1.35) имеем

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = D_{ij} E_{pq} (\hat{e}_j \cdot \hat{e}_p) \cdot (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_q) = D_{ij} E_{qp} (\hat{e}_j \cdot \hat{e}_p) (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_q),$$

так как $E_{pq} = E_{qp}$. Если теперь в последнем выражении поменять местами немые индексы p и q , то получим $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = D_{ij} E_{pq} (\hat{e}_j \cdot \hat{e}_q) (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_p)$.

1.65. Пользуясь индексными обозначениями, доказать векторное тождество $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - \mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} (\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}$.

Пусть $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{v}$; тогда $v_p = \varepsilon_{pqi} \varepsilon_{ijk} \partial_q a_j b_k$, или

$$\begin{aligned} v_p &= \varepsilon_{pqi} \varepsilon_{ijk} (a_j b_k)_{,q} = \varepsilon_{pqi} \varepsilon_{ijk} (a_{j,q} b_k + a_j b_{k,q}) = \\ &= (\delta_{pj} \delta_{qk} - \delta_{pk} \delta_{qj}) (a_{j,q} b_k + a_j b_{k,q}) = \\ &= a_{p,q} b_q - a_{q,q} b_p + a_p b_{,q} - a_q b_{p,q}. \end{aligned}$$

А это означает, что $\mathbf{v} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - \mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} (\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}$.

1.66. При помощи теоремы Гаусса — Остроградского показать, что $\int_S \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) dS = 2aV$, где V — объем, заключенный внутри поверхности S , $\hat{\mathbf{n}}$ — внешняя нормаль, $\mathbf{x}$ — радиус-вектор любой точки объема V , а — произвольный постоянный вектор.

В индексных обозначениях данный интеграл по поверхности имеет компоненты $\int_S \varepsilon_{qpi} n_p \varepsilon_{ijk} a_j x_k dS$. По формуле (1.157) он переводится в интеграл по объему $\int_V (\varepsilon_{qpi} \varepsilon_{ijk} a_j x_k)_{,p} dV$. Учитывая, что $\mathbf{a}$ — постоянный вектор, последнее выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_V \varepsilon_{qpi} \varepsilon_{ijk} a_j x_{k,p} dV &= \int_V (\delta_{qk} \delta_{pi} - \delta_{qi} \delta_{pk}) a_j x_{k,p} dV = \int_V (a_q x_{p,p} - a_p x_{q,p}) dV = \\ &= \int_V (a_q \delta_{pp} - a_p \delta_{qp}) dV = \int_V (3a_q - a_q) dV = 2a_q V. \end{aligned}$$

1.67. Показать, что преобразование отражения осей координат (рис. 1.21) является ортогональным.

Из чертежа видно, что матрица преобразования такова:

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Условия ортогональности $a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}$ или $a_{ji}a_{ki} = \delta_{jk}$, очевидно, выполнены. В матричной форме это можно проверить, пользуясь формулой (1.117):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

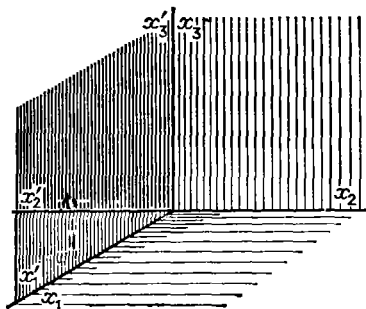


Рис. 1.21.

1.68. Показать, что $(\mathbf{I} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{D} = \mathbf{v} \times \mathbf{D}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \times \mathbf{v} &= (\hat{i} \hat{i} + \hat{j} \hat{j} + \hat{k} \hat{k}) \times (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) = \\ &= \hat{i} (v_y \hat{k} - v_z \hat{j}) + \hat{j} (-v_x \hat{k} + v_z \hat{i}) + \hat{k} (v_x \hat{j} - v_y \hat{i}) = \\ &= (\mathbf{v} \times \hat{i}) \hat{i} + (\mathbf{v} \times \hat{j}) \hat{j} + (\mathbf{v} \times \hat{k}) \hat{k} = \mathbf{v} \times \mathbf{I} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $(\mathbf{I} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{D} = \mathbf{v} \times \mathbf{I} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{v} \times \mathbf{D}$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1.69. Показать, что векторы $\mathbf{u} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ и $\mathbf{v} = \hat{i} - \hat{j}$ взаимно перпендикулярны. Найти такой вектор $\hat{w}$, чтобы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\hat{w}$ образовали правый триэдр.

Ответ: $\hat{w} = (-1/\sqrt{6})(\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$.

1.70. Найти матрицу преобразования, связывающего тройку векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\hat{w}$ задачи 1.69 и орты осей координат.

Ответ: $[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$

1.71. Используя индексные обозначения, доказать, что:

а) $\nabla \cdot \mathbf{x} = 3$, б) $\nabla \times \mathbf{x} = 0$, в) $\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{x} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{x}$ — радиус-вектор, а $\mathbf{a}$ — некоторый постоянный вектор.

1.72. Найти главные значения симметричной части тензора

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -6 & -6 \\ -3 & -18 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\lambda_{(1)} = -15$, $\lambda_{(2)} = 5$, $\lambda_{(3)} = 10$.

1.73. Для симметричного тензора

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

определить главные значения и направления главных осей.

Ответ: $\lambda_{(1)} = 2$, $\lambda_{(2)} = 7$, $\lambda_{(3)} = 12$,

	x_1	x_2	x_3
x_1^*	$-3/(5\sqrt{2})$	$1/\sqrt{2}$	$-4/(5\sqrt{2})$
x_2^*	$4/5$	0	$-3/5$
x_3^*	$3/(5\sqrt{2})$	$1/\sqrt{2}$	$4/(5\sqrt{2})$

1.74. Дан произвольный вектор $\mathbf{v}$ и любой единичный вектор $\hat{\mathbf{e}}$. Показать, что $\mathbf{v}$ можно разложить на две компоненты — параллельную и перпендикулярную вектору $\hat{\mathbf{e}}$, т. е. что $\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}) \hat{\mathbf{e}} + \hat{\mathbf{e}} \times (\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{e}})$.

1.75. Пусть $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, $\nabla \times \mathbf{v} = \dot{\mathbf{w}}$ и $\nabla \times \mathbf{w} = -\dot{\mathbf{v}}$. Показать, что $\nabla^2 \mathbf{v} = \ddot{\mathbf{v}}$.

1.76. Провести проверку решения задачи 1.48, показав непосредственным перемножением, что $\mathbf{T} \bar{\mathbf{T}} = \mathbf{T}$.

1.77. Извлечь корень квадратный из тензора

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1/2(\sqrt{5}+1) & 1/2(\sqrt{5}-1) & 0 \\ 1/2(\sqrt{5}-1) & 1/2(\sqrt{5}+1) & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.78. Воспользовавшись решением задачи 1.40, т. е. равенством $\det \mathbf{A} = \epsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$, показать, что $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$.

1.79. Удостовериться в том, что: а) $\delta_{3p} v_p = v_3$, б) $\delta_{3l} A_{ji} = A_{j3}$, в) $\delta_{il} \epsilon_{ijk} = 0$, г) $\delta_{i2} \delta_{j3} A_{ij} = A_{23}$.

1.80. Преобразование, связывающее системы координат $Ox'_1x'_2x'_3$ и $Ox_1x_2x_3$, задано таблицей

	x_1	x_2	x_3
x'_1	$3/(5\sqrt{2})$	$1/\sqrt{2}$	$4/(5\sqrt{2})$
x'_2	$4/5$	0	$-3/5$
x'_3	$-3/(5\sqrt{2})$	$1/\sqrt{2}$	$-4/(5\sqrt{2})$

а) Показать, что выполнены условия ортогональности $a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}$ и $a_{pq}a_{sq} = \delta_{ps}$.

б) Определить в системе со штрихами координаты точки, имеющей радиус-вектор $\mathbf{x} = 2\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_3$.

в) Как выглядит в системе со штрихами уравнение плоскости $x_1 - x_2 + 3x_3 = 1$?

Ответ: б) $(2/(5\sqrt{2}), 11/5, -2/(5\sqrt{2}))$, в) $\sqrt{2}x'_1 - x'_2 - 2\sqrt{2}x'_3 = 1$.

1.81. Показать, что объем V , заключенный внутри поверхности S , можно задать выражением $V = \frac{1}{6} \int_S \nabla(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$, где $\mathbf{x}$ — радиус-вектор, а $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности.

Указание: записать V в виде $V = \frac{1}{6} \int_S (x_i x_i)_{,j} n_j dS$ и использовать формулу (1.157).

Анализ напряженного состояния

2.1. Понятие сплошной среды

Хотя молекулярная природа строения материи точно установлена, во многих исследованиях поведения материалов важно поведение не отдельных молекул, а лишь материала как целого. В этих случаях при объяснении наблюдаемых макроскопических процессов не учитывают молекулярную структуру вещества, а предполагают, что оно непрерывно распределено по всему занимаемому им объему и целиком заполняет этот объем. Такая концепция *сплошности* вещества является основным постулатом механики сплошной среды (континуума). В пределах ограничений, при которых гипотеза сплошности оправдана, эта концепция обеспечивает основу для единого изучения поведения твердых тел, жидкостей и газов.

Принятие гипотезы сплошности как основы для математического описания поведения материалов означает, что поля величин, таких,

как напряжения и перемещения, выражаются кусочно непрерывными функциями координат и времени.

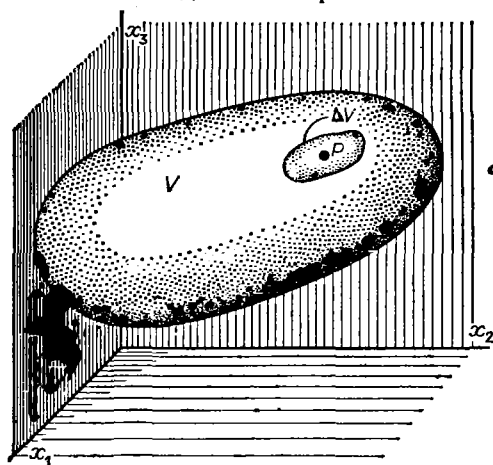


Рис. 2.1.

• 2.2. Однородность.

Изотропия. Массовая плотность

Однородным называется материал, имеющий одинаковые свойства во всех точках. Материал будет *изотропным* по отношению к некоторому свойству, если это свойство в точке оказывается одинаковым по всем направлениям. Ма-

териал является *анизотропным* по отношению к тем свойствам, которые зависят от направления в точке.

Понятие *плотности* вводится для окрестности точки сплошной среды как *отношение массы к объему*. Обозначим массу малого

элемента объема ΔV (рис. 2.1) через ΔM . Средняя плотность материала внутри ΔV равна:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{\Delta M}{\Delta V}. \quad (2.1)$$

Плотность в некоторой точке P элемента объема ΔV в соответствии с понятием сплошной среды задается пределом

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{dM}{dV}. \quad (2.2)$$

Массовая плотность ρ является скалярной величиной.

2.3. Массовые силы. Поверхностные силы

Силы — это векторные величины, которые интуитивно лучше всего представляются такими понятиями, как давление или тяга. Те силы, которые действуют на все элементы объема сплошной среды, называются *массовыми силами*. Примером таких сил могут служить силы гравитации и инерции. Эти силы мы будем обозначать через b_i (сила, отнесенная к единице массы) или p_i (сила, отнесенная к единице объема). Между собой они связаны включающим плотность соотношением

$$\rho b_i = p_i, \quad \text{или} \quad \rho b = p. \quad (2.3)$$

Те силы, которые действуют на элемент поверхности, будь то часть граничной или любой внутренней поверхности, называются *поверхностными силами*. Они обозначаются через f_i (сила, отнесенная к единице площади). Силы контактного взаимодействия между телами относятся к типу поверхностных сил.

2.4. Принцип напряжения Коши. Вектор напряжения

На рис. 2.2 изображена область R пространства, занятая материальным континуумом, на который действуют поверхностные силы f_i и массовые силы b_i . Из-за того, что действие сил передается от одной части среды другой, материал внутри произвольного объема V , ограниченного поверхностью S , взаимодействует с материалом вне этого объема. Возьмем n_i в качестве единичного вектора внешней нормали в точке P к малой площадке ΔS поверхности S и обозначим через Δf_i результирующую силу, действующую через площадку ΔS на материал внутри V со стороны внешней среды. Ясно, что элементарная сила Δf_i зависит от выбора ΔS и от n_i . Следует также заметить, что распределение силы на ΔS не обязательно однородно. В самом деле, в общем случае это распределение эквивалентно одной силе и моменту, приложенным в точке P и представленным на рис. 2.2 векторами Δf_i и ΔM_i .

Средняя сила, отнесенная к единице площади площадки ΔS , задается величиной $\Delta f_i / \Delta S$. Принцип напряжения Коши утверждает, что это отношение $\Delta f_i / \Delta S$ стремится к определенному пределу df_i / dS , когда ΔS стягивается в точку P , в то время как момент силы Δf_i относительно точки P в пределе стремится к нулю. Результирующий вектор df_i / dS (сила, отнесенная к единице площади) называется вектором напряжения $t_i^{(\hat{n})}$ (рис. 2.3). Если бы момент в

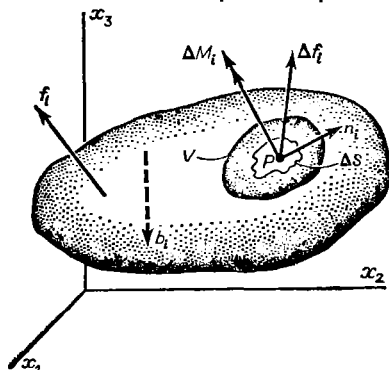


Рис. 2.2.

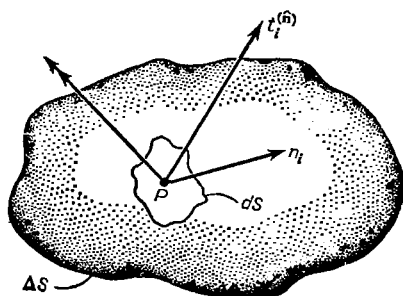


Рис. 2.3.

точке P при предельном переходе не обращался в нуль, то в этой точке был бы также определен вектор момента (пары) напряжений, изображенный на рис. 2.3 стрелкой с двойным острием. Один из разделов теории упругости изучает такие поверхностные пары, но в этой книге они не рассматриваются.

Вектор напряжения определяется следующим образом:

$$t_i^{(\hat{n})} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta S} = \frac{df_i}{dS}, \quad \text{или} \quad \hat{t}^{(\hat{n})} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{f}}{dS}. \quad (2.4)$$

Обозначение $t_i^{(\hat{n})}$ (или $\hat{t}^{(\hat{n})}$) используется для того, чтобы подчеркнуть тот факт, что вектор напряжения в данной точке P сплошной среды, очевидно, зависит от ориентации выбранного элемента поверхности ΔS , которая задается единичным вектором нормали n_i (или $\hat{n}$). Если взять любой иначе ориентированный элемент поверхности с другой единичной нормалью, то связанный с ним вектор напряжения в точке P тоже будет другим. Вектор напряжения, выражающий действие через площадку ΔS в точке P материала, расположенного внутри V , на внешнюю среду, есть вектор $-t_i^{(\hat{n})}$. Тогда по закону Ньютона о равенстве действия и противодействия

$$-t_i^{(\hat{n})} = t_i^{(-\hat{n})}, \quad \text{или} \quad -\hat{t}^{(\hat{n})} = \hat{t}^{(-\hat{n})}. \quad (2.5)$$

Вектор напряжения иногда называют вектором натяжения.

2.5. Напряженное состояние в точке. Тензор напряжений

Принцип напряжения Коши ставит в соответствие в произвольной точке P сплошной среды каждому единичному вектору нормали n_i , определяющему ориентацию бесконечно малого элемента поверхности, содержащего точку P , вектор напряжения $t_i^{(n)}$ (рис. 2.3). Совокупность всех возможных пар таких векторов $t_i^{(n)}$ и n_i в точке

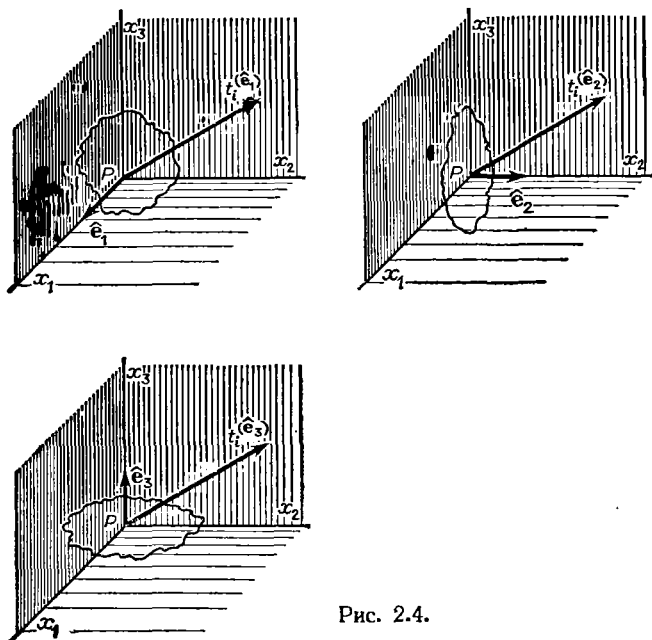


Рис. 2.4.

P определяет *напряженное состояние* в этой точке. К счастью, для того чтобы полностью описать напряженное состояние в данной точке, нет необходимости указывать все пары векторов напряжения и нормали. Это можно сделать, задавая векторы напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках в точке P .

Для определения напряженного состояния в точке выберем плоскости, перпендикулярные осям координат, и будем обозначать векторы нормали и напряжения так, как это сделано на рис. 2.4.

Для удобства три отдельные схемы рис. 2.4 часто заменяют одним схематическим изображением, приведенным на рис. 2.5.

Каждый из трех векторов напряжения на площадках, параллельных координатным плоскостям, согласно (1.69), можно выразить через их декартовы компоненты:

$$\begin{aligned}
 \hat{t}(\hat{e}_1) &= t_1^{(\hat{e}_1)} \hat{e}_1 + t_2^{(\hat{e}_1)} \hat{e}_2 + t_3^{(\hat{e}_1)} \hat{e}_3 = t_j^{(\hat{e}_1)} \hat{e}_j, \\
 \hat{t}(\hat{e}_2) &= t_1^{(\hat{e}_2)} \hat{e}_1 + t_2^{(\hat{e}_2)} \hat{e}_2 + t_3^{(\hat{e}_2)} \hat{e}_3 = t_j^{(\hat{e}_2)} \hat{e}_j, \\
 \hat{t}(\hat{e}_3) &= t_1^{(\hat{e}_3)} \hat{e}_1 + t_2^{(\hat{e}_3)} \hat{e}_2 + t_3^{(\hat{e}_3)} \hat{e}_3 = t_j^{(\hat{e}_3)} \hat{e}_j.
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Девять компонент векторов напряжений

$$t_j^{(\hat{e}_i)} \equiv \sigma_{ij} \quad (2.7)$$

являются компонентами декартова тензора второго ранга ¹⁾, так называемого *тензора напряжений*. Этот тензор напряжений мы

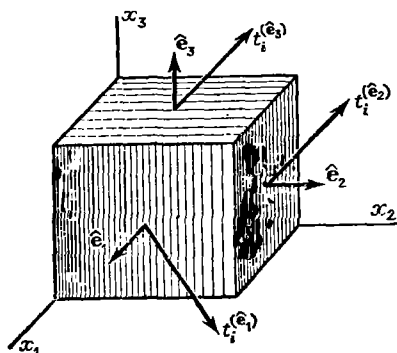


Рис. 2.5.

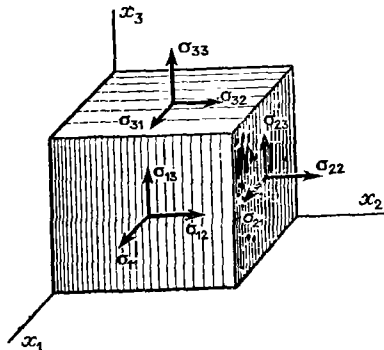


Рис. 2.6.

обозначим через Σ , так что развернутые (покомпонентное и матричное) его представления будут иметь следующий вид:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Напряжения, определяемые компонентами тензора напряжений в декартовой системе координат, и координатные плоскости изображены на рис. 2.6. Компоненты σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , соответствующие перпендикулярным к указанным площадкам силам, называются *нормальными напряжениями*. Компоненты σ_{12} , σ_{13} , σ_{21} , σ_{23} , σ_{31} , σ_{32} , действующие в касательных плоскостях, называются *касательными напряжениями* (или *напряжениями сдвига*). Компонента напряжения положительна, если на площадке, внешняя нормаль к которой совпадает с положительным направлением одной из осей координат, сила действует вдоль положительного направления этой оси. Компонента σ_{ij} задает силу, действующую в направлении j -й оси координат на площадку с внешней нормалью, параллельной i -й оси координат. Все компоненты напряжений, изображенные на рис. 2.6, положительны.

¹⁾ Это обстоятельство можно доказать с помощью формулы (2.12); см. также задачу 2.11.— *Прим. ред.*

2.6. Связь между тензором напряжений и вектором напряжения

Связь между тензором напряжений σ_{ij} в точке P и вектором напряжения $t_i^{(\hat{n})}$ на произвольно сориентированной площадке в той же точке можно установить из условия равновесия сил, или уравнения количества движения для элементарного материального тетраэдра с вершиной в точке P . Возьмем основание тетраэдра перпендикулярным к n_i , а три боковые грани перпендикулярными к осям координат, как показано на рис. 2.7. Пусть dS — площадь основания ABC ; тогда площади боковых граней как площади проекций основания на координатные плоскости будут равны $dS_1 = dS n_1$ для грани CPB , $dS_2 = dS n_2$ для грани APC и $dS_3 = dS n_3$ для грани BPA , или

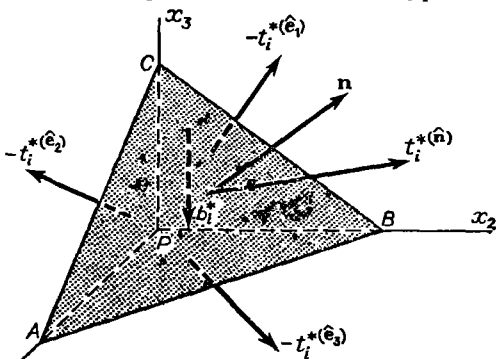


Рис. 2.7.

$$dS_i = dS (\hat{n} \cdot \hat{e}_i) = dS \cos(\hat{n}, \hat{e}_i) = dS n_i. \quad (2.9)$$

На рисунке показаны векторы средних значений напряжений — $t_i^{(\hat{n})}$ на боковых гранях и $t_i^{(\hat{n})}$ на основании, а также средней массовой силы b_i^* (включая силы инерции, если они имеются), действующих на тетраэдр. Для равновесия тетраэдра под действием этих сил необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$t_i^{(\hat{n})} dS - t_i^{(\hat{e}_1)} dS_1 - t_i^{(\hat{e}_2)} dS_2 - t_i^{(\hat{e}_3)} dS_3 + \rho b_i^* dV = 0. \quad (2.10)$$

Если теперь линейные размеры тетраэдра будут пропорционально уменьшаться, то массовые силы, малость которых на порядок выше, будут стремиться к нулю быстрее поверхностных сил. В то же время векторы средних напряжений стремятся к характерным значениям, которые присущи указанным направлениям в точке P . Таким предельным переходом с учетом (2.9) равенство (2.10) приводится к виду

$$t_i^{(\hat{n})} dS = t_i^{(\hat{e}_1)} n_1 dS + t_i^{(\hat{e}_2)} n_2 dS + t_i^{(\hat{e}_3)} n_3 dS = t_i^{(\hat{e}_j)} n_j dS. \quad (2.11)$$

После сокращения на общий множитель dS и использования тождества $t_i^{(\hat{e}_j)} \equiv \sigma_{ji}$ соотношение (2.11) будет выглядеть так:

$$t_i^{(\hat{n})} = \sigma_{ji} n_j, \quad \text{или} \quad \mathbf{t}^{(\hat{n})} = \hat{n} \cdot \Sigma, \quad (2.12)$$

Соотношение (2.12) часто представляют в матричной записи

$$[t_{ij}^{(\hat{n})}] = [n_{ik}] [\sigma_{kj}], \quad (2.13)$$

которую можно развернуть следующим образом:

$$[t_1^{(\hat{n})}, t_2^{(\hat{n})}, t_3^{(\hat{n})}] = [n_1, n_2, n_3] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Матричное равенство (2.14) эквивалентно уравнениям в компонентах

$$\begin{aligned} t_1^{(\hat{n})} &= n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{21} + n_3 \sigma_{31}, \\ t_2^{(\hat{n})} &= n_1 \sigma_{12} + n_2 \sigma_{22} + n_3 \sigma_{32}, \\ t_3^{(\hat{n})} &= n_1 \sigma_{13} + n_2 \sigma_{23} + n_3 \sigma_{33}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.7. Равновесие сил и моментов.

Симметрия тензора напряжений

Для равновесия произвольного объема V сплошной среды под действием системы поверхностных сил $t_i^{(\hat{n})}$ и массовых сил b_i (включая силы инерции, если они существуют), изображенных на рис. 2.8, требуется, чтобы результирующие сила и момент, действующие на этот объем, были равны нулю.

Суммирование поверхностных и массовых сил приводит к интегральному соотношению

$$\int_S t_i^{(\hat{n})} dS + \int_V \rho b_i dV = 0, \quad (2.16)$$

или

$$\int_S \hat{t}^{(\hat{n})} dS + \int_V \rho \mathbf{b} dV = 0.$$

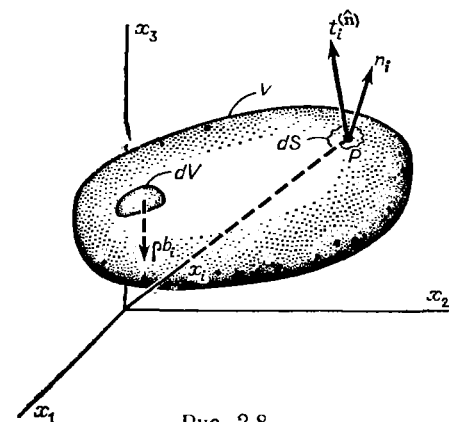


Рис. 2.8.

Заменяя здесь $t_i^{(\hat{n})}$ через $\sigma_{ji} n_j$ и переходя от интеграла по поверхности к интегралу по объему при помощи теоремы Гаусса — Остроградского (1.157), приводим уравнение (2.16) к виду

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i) dV = 0, \quad \text{или} \quad \int_V (\nabla \cdot \Sigma + \rho \mathbf{b}) dV = 0. \quad (2.17)$$

Поскольку объем V произволен, подинтегральное выражение в формуле (2.17) должно обратиться в нуль, так что

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0, \quad \text{или} \quad \nabla \cdot \Sigma + \rho b = 0. \quad (2.18)$$

Эти уравнения называются *уравнениями равновесия*.

При отсутствии распределенных моментов (поверхностных и массовых пар) для равновесия моментов относительно начала отсчета требуется, чтобы

$$\int_S \epsilon_{ijk} x_j t_k^{(\hat{n})} dS + \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = 0, \quad (2.19)$$

или

$$\int_S \mathbf{x} \times \mathbf{t}^{(\hat{n})} dS + \int_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} dV = 0,$$

где x_i — радиус-вектор элемента поверхности или объема. Снова совершив подстановку $t_i^{(\hat{n})} = \sigma_{ji} n_j$, применив теорему Гаусса — Остроградского и используя результат, полученный в (2.18), объединим интегралы в (2.19) и придем к уравнению

$$\int_V \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0, \quad \text{или} \quad \int_V \Sigma_v dV = 0. \quad (2.20)$$

В силу произвольности объема V из (2.20) следует, что

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0, \quad \text{или} \quad \Sigma_v = 0. \quad (2.21)$$

Формула (2.21) содержит в себе равенства $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{23} = \sigma_{32}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31}$, или

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (2.22)$$

которые показывают, что *тензор напряжений симметричен*. Учитывая (2.22), уравнения равновесия (2.18) часто пишут в виде

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0, \quad (2.23)$$

что в развернутой форме выглядит так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho b_1 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho b_2 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.8. Законы преобразования напряжений

Пусть в точке P две ортогональные декартовы системы координат $Px_1x_2x_3$ и $Px'_1x'_2x'_3$ (рис. 2.9) связаны одна с другой таблицей направляющих косинусов

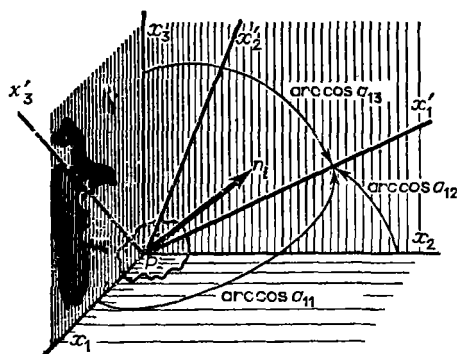


Рис. 2.9.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

или — что эквивалентно — либо матрицей преобразования $[a_{ij}]$, либо тензором преобразования

$$\mathbf{A} = a_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j. \quad (2.25)$$

Согласно правилу (1.93) преобразования декартовых тензоров первого ранга, компоненты вектора напряжения $t'_i(\hat{n})$, отнесенные к осям системы без штрихов, связаны с компонентами $t_i(\hat{n})$ в системе со штрихами формулой

$$t'_i(\hat{n}) = a_{ij} t_j(\hat{n}), \quad \text{или} \quad \mathbf{t}'(\hat{n}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}(\hat{n}). \quad (2.26)$$

Подобным же образом по правилу преобразования (1.102) для декартовых тензоров второго ранга компоненты тензора напряжений в двух системах связаны соотношением¹⁾

$$\sigma'_{ij} = a_{ip} a_{jq} \sigma_{pq}, \quad \text{или} \quad \Sigma' = \mathbf{A} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{A}_c. \quad (2.27)$$

В матричной форме преобразование вектора напряжения записывается в виде

$$[t'_i(\hat{n})] = [a_{ij}] [t_j(\hat{n})], \quad (2.28)$$

а преобразование тензора напряжений — в виде

$$[\sigma'_{ij}] = [a_{ip}] [\sigma_{pq}] [a_{qj}]. \quad (2.29)$$

В развернутой записи произведений матриц формулы (2.28) и (2.29) соответственно выглядят так:

$$\begin{bmatrix} t'_1(\hat{n}) \\ t'_2(\hat{n}) \\ t'_3(\hat{n}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1(\hat{n}) \\ t_2(\hat{n}) \\ t_3(\hat{n}) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

¹⁾ Смотри задачу 2.11. — Прим. ред.

$$\begin{aligned}
 & \text{и} \quad \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

2.9. Поверхности напряжений Коши

Пусть в точке P сплошной среды тензор напряжений имеет компоненты σ_{ij} , отнесенные к направлениям, параллельным местным декартовым осям $P\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ (рис. 2.10). Уравнение

$$\sigma_{ij}\zeta_i\zeta_j = \pm k^2 \quad (k — \text{постоянная}) \quad (2.32)$$

представляет геометрически подобные поверхности второго порядка (квадрики), имеющие общий центр в точке P . Выбор знака плюс или минус обеспечивает то, что поверхности будут действительные.

Рассмотрим вектор напряжения $t_i^{(\hat{n})}$ на площадке с единичной нормалью n_i . Радиус-вектор $\mathbf{r}$, идущий в направлении $\hat{\mathbf{n}}$ к произвольной точке поверхности (2.32), имеет компоненты $\zeta_i = rn_i$. В точке P нормальная составляющая $\sigma_N n_i$ вектора напряжения $t_i^{(\hat{n})}$ имеет величину

$$\sigma_N = t_i^{(\hat{n})} n_i = \mathbf{t}^{(\hat{n})} \cdot \mathbf{n} = \sigma_{ij} n_i n_j. \quad (2.33)$$

Геометрическое место точек $\sigma_N r^2 = \text{const} = \pm k^2$, т. е. поверхность

$$\sigma_{ij}\zeta_i\zeta_j = \sigma_N r^2 = \pm k^2. \quad (2.34)$$

называется *поверхностью напряжений Коши* (или *квадрикой Коши*). Из этого определения следует, что величина σ_N нормальной компоненты напряжения на площадке dS , перпендикулярной радиусу-вектору $\mathbf{r}$ в точке P , обратно пропорциональна квадрату расстояния вдоль $\mathbf{r}$ от точки P до поверхности напряжений Коши, т. е.

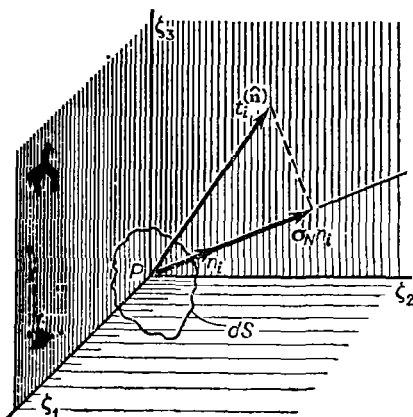


Рис. 2.10.

$\sigma_N = \pm k^2/r^2$. Кроме того, можно показать, что вектор напряжения $\hat{t}_i^{(n)}$, действующий на такой площадке dS , параллелен нормали к плоскости, касательной к поверхности напряжений Коши в точке, радиус-вектор которой есть g .

2.10. Главные напряжения. Инварианты тензора напряжений. Эллипсоид напряжений

В точке P , где компоненты тензора напряжений равны σ_{ij} , соотношение (2.12) $\hat{t}_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j$ ставит в соответствие каждому направлению n_i вектор напряжения $\hat{t}_i^{(n)}$.

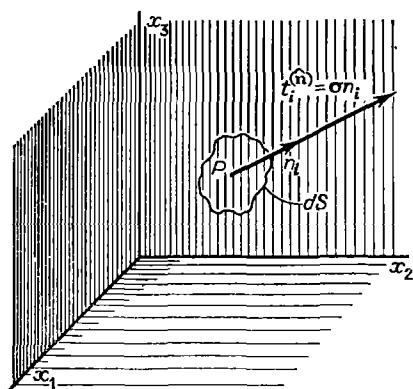


Рис. 2.11.

Направления, для которых $\hat{t}_i^{(n)}$ и n_i коллинеарны (рис. 2.11), называются *главными направлениями* (или *главными осями*) тензора напряжений. Для главного направления имеет место равенство

$$\hat{t}_i^{(n)} = \sigma n_i, \quad \text{или} \quad \hat{t}^{(n)} = \hat{\sigma} n, \quad (2.35)$$

где σ — величина вектора напряжения — называется *главным напряжением*. Подставляя (2.35) в (2.12) и используя тождества $n_i = \delta_{ij} n_j$ и $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, приходим к уравнениям

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma) n_j = 0, \quad \text{или} \quad (\Sigma - \mathbf{I} \sigma) \cdot \hat{n} = 0. \quad (2.36)$$

Три уравнения (2.36) содержат четыре неизвестных, а именно три направляющих косинуса n_i и величину главного напряжения σ .

Для того чтобы система (2.36), кроме $n_i = 0$, имела еще и нетривиальное решение, детерминант из коэффициентов $|\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma|$ должен обращаться в нуль, т. е.

$$|\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma| = 0, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0, \quad (2.37)$$

что после раскрытия определителя приводит к кубическому уравнению относительно σ

$$\sigma^3 - \mathbf{I}_\Sigma \sigma^2 + \mathbf{II}_\Sigma \sigma - \mathbf{III}_\Sigma = 0, \quad (2.38)$$

где

$$I_{\Sigma} = \sigma_{ii} = \text{tr } \Sigma, \quad (2.39)$$

$$II_{\Sigma} = 1/2 (\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}), \quad (2.40)$$

$$III_{\Sigma} = |\sigma_{ij}| = \det \Sigma \quad (2.41)$$

называются соответственно *первым*, *вторым* и *третьим инвариантами тензора напряжений*.

Три корня уравнения (2.38) $\sigma_{(1)}$, $\sigma_{(2)}$, $\sigma_{(3)}$ являются значениями трех главных напряжений. Каждому главному напряжению $\sigma_{(k)}$ соответствует главная ось, для которой направляющие косинусы $n_i^{(k)}$ находятся как решения уравнений

$$\sigma_{ij} - \sigma_{(k)}\delta_{ij} n_j^{(k)} = 0, \quad \text{или} \quad (\Sigma - \sigma_{(k)} I) \cdot \hat{n}^{(k)} = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.42)$$

Здесь верхние или нижние буквы, заключенные в скобки, являются просто индексами и не участвуют ни в каком процессе суммирования. Например, развернутая форма (2.42) для второй главной оси такова:

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma_{(2)}) n_1^{(2)} + \sigma_{12} n_2^{(2)} + \sigma_{13} n_3^{(2)} &= 0, \\ \sigma_{21} n_1^{(2)} + (\sigma_{22} - \sigma_{(2)}) n_2^{(2)} + \sigma_{23} n_3^{(2)} &= 0, \\ \sigma_{31} n_1^{(2)} + \sigma_{32} n_2^{(2)} + (\sigma_{33} - \sigma_{(2)}) n_3^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Так как тензор напряжений симметричен и его элементы — действительные числа, главные напряжения тоже принимают действительные значения.

Матрица $[\sigma_{ij}]$, отнесенная к главным осям, имеет вид

$$[\sigma_{ij}] \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{(3)} \end{bmatrix}, \quad \text{или} \quad [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{111} \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Во второй форме в качестве индексов использованы римские цифры для того, чтобы показать, что главные напряжения упорядочены, т. е. $\sigma_1 > \sigma_{11} > \sigma_{111}$. Вследствие того что главные оси тензора напряжений совпадают с главными осями поверхности напряжений Коши, значения главных напряжений включают как максимальное, так и минимальное значения компонент нормального напряжения в точке.

В пространстве главных напряжений, т. е. в пространстве, где оси координат

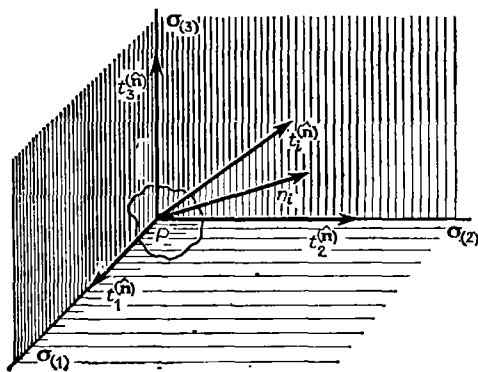


Рис. 2.12.

нат совпадают с главными осями тензора напряжений, а единицами измерения координат служат величины $(\hat{t}_1^{(n)}, \hat{t}_2^{(n)}, \hat{t}_3^{(n)})$, как показано на рис. 2.12, произвольный вектор напряжения $\hat{t}_i^{(n)}$ в соответствии с формулой (2.12) имеет компоненты

$$\hat{t}_1^{(n)} = \sigma_{(1)} n_1, \quad \hat{t}_2^{(n)} = \sigma_{(2)} n_2, \quad \hat{t}_3^{(n)} = \sigma_{(3)} n_3. \quad (2.45)$$

Но поскольку $(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 = 1$ для каждого единичного вектора n_i , то вектор $\hat{t}_i^{(n)}$ в пространстве главных напряжений удовлетворяет уравнению

$$\frac{(\hat{t}_1^{(n)})^2}{(\sigma_{(1)})^2} + \frac{(\hat{t}_2^{(n)})^2}{(\sigma_{(2)})^2} + \frac{(\hat{t}_3^{(n)})^2}{(\sigma_{(3)})^2} = 1. \quad (2.46)$$

Это уравнение эллипсоида, известного под названием *эллипсоида напряжений Ламе*.

2.11. Максимальное и минимальное касательное напряжение

Разложим вектор напряжения $\hat{t}_i^{(n)}$ на ортогональные компоненты — нормальную и касательную к элементу поверхности dS , на котором он действует. Величину нормальной компоненты можно определить по формуле (2.33), а квадрат величины касательной компоненты (напряжения сдвига) получается как разность

$$\sigma_S^2 = \hat{t}_i^{(n)} \hat{t}_i^{(n)} - \sigma_N^2. \quad (2.47)$$

Эта операция продемонстрирована на рис. 2.13, где оси координат выбраны по главным осям тензора напряжений и главные напряжения упорядочены

так, что $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$. Из (2.12) следует, что компоненты $\hat{t}_i^{(n)}$ равны

$$\hat{t}_1^{(n)} = \sigma_I n_1, \quad \hat{t}_2^{(n)} = \sigma_{II} n_2, \quad \hat{t}_3^{(n)} = \sigma_{III} n_3, \quad (2.48)$$

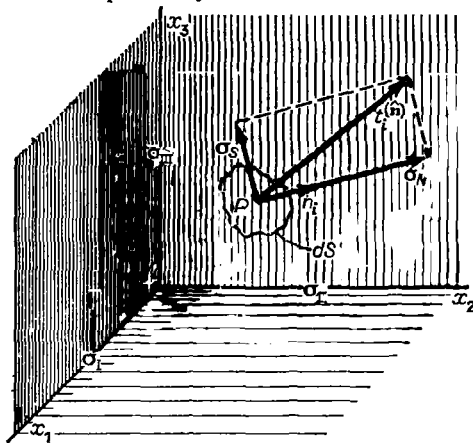


Рис. 2.13.

а из (2.33) получается величина нормальной компоненты

$$\sigma_N = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2. \quad (2.49)$$

Подставляя (2.48) и (2.49) в формулу (2.47), вычислим квадрат величины касательного напряжения как функцию направляющих косинусов n_i :

$$\sigma_S^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2 - (\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2)^2. \quad (2.50)$$

Максимальное и минимальное значения σ_S можно получить из (2.50) методом *множителей Лагранжа*. Процедура состоит в построении функции

$$F = \sigma_S^2 - \lambda n_i n_i, \quad (2.51)$$

где скаляр λ называется множителем Лагранжа. Равенство (2.51) представляет функцию направляющих косинусов n_i , так что условие экстремума (максимума или минимума) величины F имеет вид $\partial F / \partial n_i = 0$. Приравнивая нулю эти частные производные, приходим к уравнениям:

$$n_1 [\sigma_I^2 - 2\sigma_I (\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2) + \lambda] = 0, \quad (2.52a)$$

$$n_2 [\sigma_{II}^2 - 2\sigma_{II} (\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2) + \lambda] = 0, \quad (2.52b)$$

$$n_3 [\sigma_{III}^2 - 2\sigma_{III} (\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2) + \lambda] = 0, \quad (2.52в)$$

которые вместе с условием $n_i n_i = 1$ можно разрешить относительно λ и направляющих косинусов n_1, n_2, n_3 , соответствующих площадкам экстремальных значений касательного напряжения.

Вот одно из решений системы (2.52) и соответствующее ему касательное напряжение, найденное по формуле (2.50):

$$n_1 = \pm 1, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 0, \quad \sigma_S = 0. \quad (2.53a)$$

$$n_1 = 0, \quad n_2 = \pm 1, \quad n_3 = 0, \quad \sigma_S = 0. \quad (2.53b)$$

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = \pm 1, \quad \sigma_S = 0. \quad (2.53в)$$

Величины касательного напряжения в (2.53), очевидно, являются минимальными. Кроме того, так как (2.53) указывает на то, что эти величины обращаются в нуль на главных площадках, то направления, полученные в (2.53), совпадают с главными осями тензора напряжений.

Другие решения системы (2.52) имеют вид:

$$n_1 = 0, \quad n_2 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_3 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad \sigma_S = (\sigma_{II} - \sigma_{III})/2; \quad (2.54a)$$

$$n_1 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad \sigma_S = (\sigma_{III} - \sigma_I)/2; \quad (2.54b)$$

$$n_1 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_2 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_3 = 0, \quad \sigma_S = (\sigma_I - \sigma_{II})/2. \quad (2.54в)$$

Формулы (2.54б) дают максимальное значение касательного напряжения, равное полуразности наибольшего и наименьшего главных напряжений. Таким образом, из (2.54б) следует, что максимальная компонента касательного напряжения действует в плоскости, которая делит пополам прямой угол между направлениями максимального и минимального главных напряжений.

2.12. Круги Мора для напряжения

Удобное двумерное графическое представление трехмерного напряженного состояния в точке дают известные *круги Мора*. Для того чтобы разъяснить это понятие, снова возьмем в качестве

осей координат главные оси тензора напряжений в точке P , как показано на рис. 2.14. Предполагается, что все главные напряжения различны и упорядочены, так что

$$\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}. \quad (2.55)$$

При таких условиях вектор напряжения $\hat{t}_i^{(n)}$ имеет нормальную и касательную компоненты, величины которых удовлетворяют соотношениям

$$\sigma_N = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2, \quad (2.56)$$

$$\sigma_N^2 + \sigma_S^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2. \quad (2.57)$$

Комбинируя эти два равенства с тождеством $n_i n_i = 1$ и разрешая относительно направляющих косинусов n_i , получаем

$$(n_1)^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_{II})(\sigma_N - \sigma_{III}) + (\sigma_S)^2}{(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})}, \quad (2.58a)$$

$$(n_2)^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_{III})(\sigma_N - \sigma_I) + (\sigma_S)^2}{(\sigma_{II} - \sigma_{III})(\sigma_{II} - \sigma_I)}, \quad (2.58б)$$

$$(n_3)^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_I)(\sigma_N - \sigma_{II}) + (\sigma_S)^2}{(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II})}. \quad (2.58в)$$

На этих равенствах основывается построение кругов Мора на плоскости напряжений, где ось σ_N является осью абсцисс, а ось σ_S — осью ординат (рис. 2.15).

Так как из (2.55) следует, что $\sigma_I - \sigma_{II} > 0$ и $\sigma_I - \sigma_{III} > 0$, а величина $(n_1)^2$ неотрицательна, то числитель в правой части (2.58a)

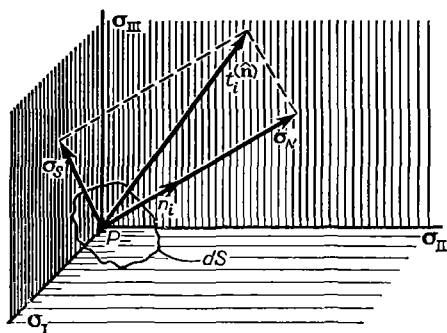


Рис. 2.14.

удовлетворяет соотношению

$$(\sigma_N - \sigma_{II})(\sigma_N - \sigma_{III}) + (\sigma_S)^2 \geq 0, \quad (2.59)$$

которое в плоскости напряжений (σ_N, σ_S) представляет точки, лежащие *вне круга*

$$[\sigma_N - (\sigma_{II} + \sigma_{III})/2]^2 + (\sigma_S)^2 = [(\sigma_{II} - \sigma_{III})/2]^2 \quad (2.60)$$

и на его границе. На рис. 2.15 этот круг обозначен буквой C_1 .

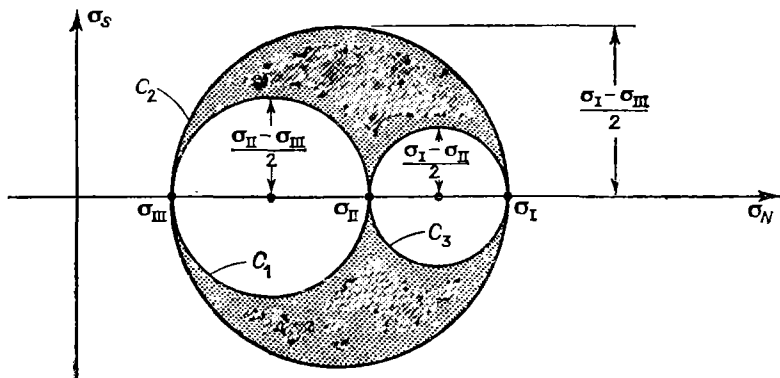


Рис. 2.15.

Точно так же из (2.55) следует, что $\sigma_{II} - \sigma_{III} > 0$ и $\sigma_{II} - \sigma_I < 0$; кроме того, величина $(n_2)^2$ неотрицательна. Тогда в формуле (2.58б) числитель в правой части удовлетворяет неравенству

$$(\sigma_N - \sigma_{III})(\sigma_N - \sigma_I) + (\sigma_S)^2 \leq 0, \quad (2.61)$$

которое представляет точки *внутри круга*

$$[\sigma_N - (\sigma_{III} + \sigma_I)/2]^2 + (\sigma_S)^2 = [(\sigma_{III} - \sigma_I)/2]^2, \quad (2.62)$$

обозначенного на рис. 2.15 буквой C_2 , и на его границе. Наконец, из (2.55) видно, что $\sigma_{III} - \sigma_I < 0$ и $\sigma_{III} - \sigma_{II} < 0$, а величина $(n_3)^2$ неотрицательна, поэтому из формулы (2.58в) следует неравенство

$$(\sigma_N - \sigma_I)(\sigma_N - \sigma_{II}) + (\sigma_S)^2 \geq 0, \quad (2.63)$$

которое представляет точки *вне круга*

$$[\sigma_N - (\sigma_I + \sigma_{II})/2]^2 + (\sigma_S)^2 = [(\sigma_I - \sigma_{II})/2]^2, \quad (2.64)$$

обозначенного на рис. 2.15 буквой C_3 , и на его границе.

Каждая «точка напряжения» (пара величин σ_N и σ_S) на плоскости напряжений (σ_N, σ_S) соответствует вектору напряжения $\hat{t}_i^{(n)}$, а напряженное состояние в точке P , описанное формулами (2.58), можно представить на рис. 2.15 затененной областью, ограниченной кругами Мора для напряжения. Это построение подтверждает, что максимальное напряжение сдвига равно $(\sigma_I - \sigma_{III})/2$, как

было установлено аналитически в § 2.11. Вследствие того что знак напряжения сдвига не имеет принципиального значения, часто изображают только верхнюю половину симметричной диаграммы.

Связь между диаграммой напряжений Мора и физическим напряженным состоянием может быть установлена при помощи рис. 2.16,

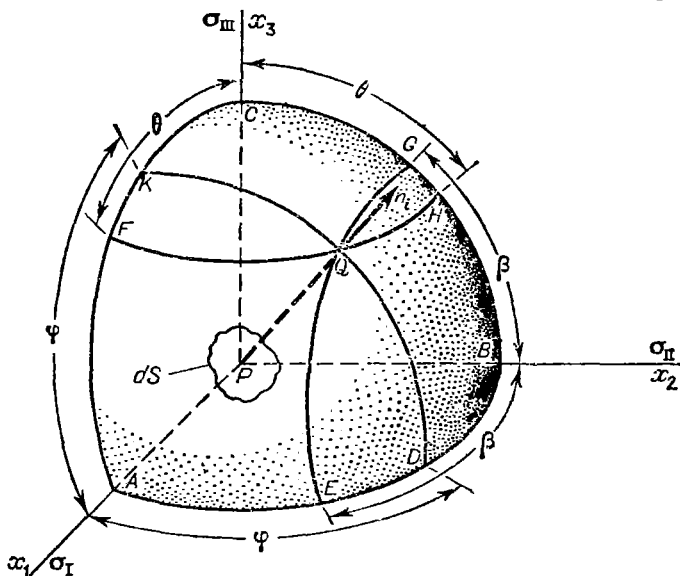


Рис. 2.16.

на котором изображен первый октант сферы с центром в точке P сплошной среды. Нормаль n_i к сферической поверхности ABC в произвольной точке Q одновременно является нормалью к элементу поверхности dS в точке P . Из-за симметрии тензора напряжений и из-за того, что на рис. 2.16 использованы главные оси тензора напряжений, напряженное состояние в точке P полностью характеризуется совокупностью тех положений, которые может занимать точка Q на поверхности ABC . На рисунке круговые дуги KD , GE и FH указывают такие положения Q , где один направляющий косинус из n_i имеет постоянную величину, а именно

$$n_1 = \cos \varphi \text{ на } KD, \quad n_2 = \cos \beta \text{ на } GE, \quad n_3 = \cos \theta \text{ на } FH,$$

а на граничных дугах BC , CA и AB

$$n_1 = \cos \pi/2 = 0 \text{ на } BC, \quad n_2 = \cos \pi/2 = 0 \text{ на } CA,$$

$$n_3 = \cos \pi/2 = 0 \text{ на } AB.$$

В соответствии с первым из этих равенств и уравнением (2.58а) векторы напряжения для точек Q , лежащих на BC , будут иметь

компоненты, определяемые точками напряжения на круге C_1 (рис. 2.15). Подобным же образом CA на рис. 2.16 соответствует кругу C_2 на рис. 2.15, а AB — кругу C_3 .

Компоненты вектора напряжения σ_N и σ_S для произвольного положения Q можно определить при помощи построения, выполненного на рис. 2.17. Так, положение точки e на C_3 можно получить, проводя радиусы из центра C_3 под углом 2β . Заметим, что углы в

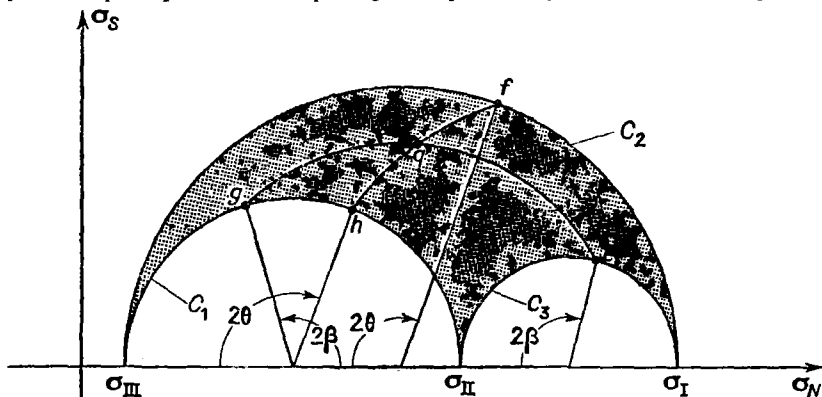


Рис. 2.17.

физическом пространстве (рис. 2.16) при переходе в пространство напряжений (рис. 2.17) удваиваются (дуга AB на рис. 2.16 содержит 90° , а соответствующие точки напряжения σ_I и σ_{II} отстоят друг от друга на круге C_3 на 180°). Аналогичным образом на рис. 2.17 получены точки g , h и f и соответствующие пары соединены круговыми дугами, имеющими центры на оси σ_N . Точка пересечения круговых дуг ge и hf дает компоненты σ_N и σ_S вектора напряжения $t_i^{(n)}$ на площадке с нормалью n_i в точке Q на рис. 2.16.

2.13. Плоское напряженное состояние

В том случае, когда одно и только одно из главных напряжений равно нулю, говорят, что существует *плоское напряженное состояние*. Такая ситуация возникает в свободной от нагрузки точке на свободной поверхности, ограничивающей тело. Если главные напряжения упорядочены, то расположение кругов Мора будет иметь один из видов, представленных на рис. 2.18.

Если главные напряжения неупорядочены и в качестве направления нулевого главного напряжения взято направление x_3 , то плоское напряженное состояние имеет только компоненты в плоскостях, параллельных плоскости x_1x_2 . При произвольном выборе ориентации ортогональных осей x_1 и x_2 в этом случае матрица

напряжений имеет вид

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

Поверхность напряжения для плоского напряженного состояния является цилиндром, основание которого лежит в плоскости x_1x_2 и описывается уравнением

$$\sigma_{11}x_1^2 + 2\sigma_{12}x_1x_2 + \sigma_{22}x_2^2 = \pm k^2. \quad (2.66)$$

В элементарных курсах сопротивления материалов плоское напряженное состояние часто представляют одним кругом Мора.

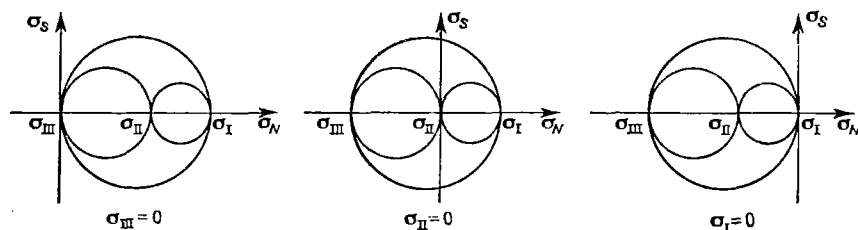


Рис. 2.18.

Как показывает рис. 2.18, такое представление всегда неполно, так как для полной характеристики напряженного состояния нужны все три круга. В частности, если этот единственный круг окажется одним из внутренних кругов на рис. 2.18, то величина максимального касательного напряжения в точке не будет определена. Диаграмма в виде одного круга Мора может, однако, указать точки напряжения для всех тех площадок в точке P , которые содержат ось нулевого главного напряжения. Если оси координат выбраны в соответствии с представлением напряжений, данным формулой

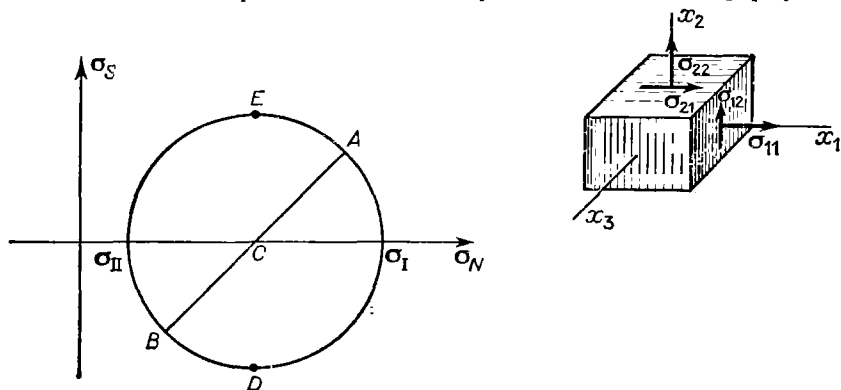


Рис. 2.19.

(2.65), то для таких площадок уравнение единственного круга Мора для плоских напряжений будет

$$[\sigma_N - (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2]^2 + (\sigma_S)^2 = [(\sigma_{11} - \sigma_{22})/2]^2 + (\sigma_{12})^2. \quad (2.67)$$

На рис. 2.19 представлены характерные точки этого круга. Он имеет центр C в точке $\sigma_N = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2$, и радиус его, согласно уравнению (2.67), равен $R = \sqrt{[(\sigma_{11} - \sigma_{22})/2]^2 + (\sigma_{12})^2}$. Точка A на окружности представляет напряженное состояние на элементе поверхности с нормалью n_1 (правой боковой грани прямоугольного параллелепипеда, изображенного на рис. 2.19). Точка B на окружности представляет напряженное состояние на верхней грани параллелепипеда с нормалью n_2 . Точки главных напряжений σ_1 и σ_{11} так и помечены этими буквами на диаграмме, а точки E и D на окружности являются точками максимального значения касательного напряжения.

2.14. Девиатор и шаровой тензор напряжений

Очень часто бывает полезно разложить тензор напряжений σ_{ij} на два тензора, один из которых (*шаровой тензор* или *тензор гидростатических напряжений*) имеет вид

$$\Sigma_M = \sigma_M \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_M & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_M \end{pmatrix}, \quad (2.68)$$

где $\sigma_M = -p = \sigma_{kk}/3$ — среднее значение нормального напряжения, а второй (*девиатор напряжений*) — вид

$$\Sigma_D = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_M & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_M & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_M \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

Это разложение описывается формулами

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \sigma_{kk}/3 + s_{ij}, \quad \text{или} \quad \Sigma = \sigma_M \mathbf{I} + \Sigma_D. \quad (2.70)$$

Главные оси девиатора s_{ij} совпадают с главными осями тензора σ_{ij} . Таким образом, *главные значения девиатора напряжений* равны

$$s_{(k)} = \sigma_{(k)} - \sigma_M. \quad (2.71)$$

Характеристическое уравнение для девиатора напряжений так же, как и характеристическое уравнение (2.38) для тензора напряжений, представляет собой кубическое уравнение вида

$$s^3 + \text{II}_{\Sigma_D} s - \text{III}_{\Sigma_D} = 0, \quad \text{или} \quad s^3 + (s_1 s_{11} + s_{11} s_{11} + s_{11} s_1) s - s_1 s_{11} s_{11} = 0. \quad (2.72)$$

Легко показать, что первый инвариант девиатора напряжений $I_{\Sigma D}$ тождественно равен нулю, что и объясняет его отсутствие в уравнении (2.72).

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Напряженное состояние в точке. Вектор напряжения. Тензор напряжений (§ 2.1—2.6)

2.1. Векторы напряжений $t_i^{(\hat{n})}$ и $t_i^{(\hat{n}^*)}$ в точке P действуют соответственно на элементы поверхности $n_i \Delta S$ и $n_i^* \Delta S^*$. Показать,

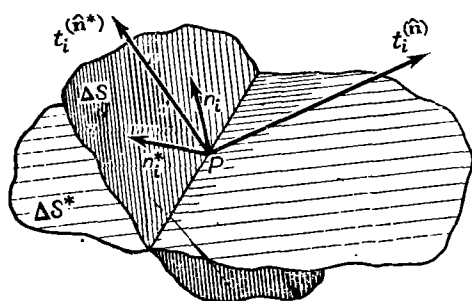


Рис. 2.20.

что компонента $t_i^{(\hat{n})}$ в направлении n_i^* равна компоненте $t_i^{(\hat{n}^*)}$ в направлении n_i (рис. 2.20).

Требуется показать, что

$$t_i^{(\hat{n}^*)} n_i = t_i^{(\hat{n})} n_i^*.$$

В силу (2.12) $t_i^{(\hat{n})} n_i = \sigma_{ji} n_j^* n_i$, а в силу (2.22) $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$, так что

$$\sigma_{ji} n_j^* n_i = (\sigma_{ij} n_i) n_j^* = t_j^{(\hat{n})} n_j^*.$$

2.2. Тензор напряжений в точке P задан так:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определить вектор напряжения в точке P на площадке с единичным вектором нормали $\hat{n} = 2/3 \hat{e}_1 - 2/3 \hat{e}_2 + 1/3 \hat{e}_3$.

Из (2.12) имеем $t^{(\hat{n})} = \hat{n} \cdot \Sigma$. Умножение лучше всего выполнить в матричной форме (2.13):

$$\begin{aligned} [t_1^{(\hat{n})}, t_2^{(\hat{n})}, t_3^{(\hat{n})}] &= [2/3, -2/3, 1/3] \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \\ &= \left[\frac{14}{3} - \frac{2}{3}, \frac{-10}{3}, \frac{-4}{3} + \frac{4}{3} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, $t^{(\hat{n})} = 4\hat{e}_1 - 10/3\hat{e}_2$.

2.3. Для вектора напряжения задачи 2.2 определить: а) компоненту, перпендикулярную площадке; б) модуль $t_i^{(\hat{n})}$; в) угол между $t_i^{(\hat{n})}$ и $\hat{n}$.

$$а) t_i^{(\hat{n})} \cdot \hat{n} = (4\hat{e}_1 - 10/3\hat{e}_2) \cdot (2/3\hat{e}_1 - 2/3\hat{e}_2 + 1/3\hat{e}_3) = 44/9.$$

$$б) |t_i^{(\hat{n})}| = \sqrt{16 + 100/9} \approx 5,2.$$

$$в) \text{ Так как } t_i^{(\hat{n})} \cdot \hat{n} = |t_i^{(\hat{n})}| \cos \theta, \text{ то } \cos \theta \approx (44/9) : 5,2 \approx 0,94 \text{ и } \theta \approx 20^\circ.$$

2.4. Даны векторы напряжения $t_i^{(\hat{e}_1)}$, $t_i^{(\hat{e}_2)}$ и $t_i^{(\hat{e}_3)}$, действующие на три координатные площадки. Показать, что сумма квадратов модулей этих векторов не зависит от ориентации координатных плоскостей.

Пусть S — указанная сумма. Тогда

$$S = t_i^{(\hat{e}_1)} t_i^{(\hat{e}_1)} + t_i^{(\hat{e}_2)} t_i^{(\hat{e}_2)} + t_i^{(\hat{e}_3)} t_i^{(\hat{e}_3)},$$

а из (2.7) следует, что $S = \sigma_{1i} \sigma_{1i} + \sigma_{2i} \sigma_{2i} + \sigma_{3i} \sigma_{3i} = \sigma_{ji} \sigma_{ji}$ — инвариант.

2.5. Напряженное состояние в некоторой точке задано тензором напряжений

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{pmatrix},$$

где a , b , c — константы, а σ — некоторое значение напряжения. Определить константы a , b и c так, чтобы вектор напряжения на *октаэдрической* площадке (см. задачу 2.22. — *Перев.*) с единичной нормалью $\hat{n} = (1/\sqrt{3})\hat{e}_1 + (1/\sqrt{3})\hat{e}_2 + (1/\sqrt{3})\hat{e}_3$ был равен нулю.

Для данных тензора напряжений и вектора нормали величины $t_i^{(\hat{n})} = \sigma_{ij} n_j$ должна быть равна нулю. Запишем это в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{откуда} \quad \begin{aligned} a + b &= -1, \\ a + c &= -1, \\ b + c &= -1. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, получим $a = b = c = -1/2$. Итак, решение дается тензором

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma & -\sigma/2 & -\sigma/2 \\ -\sigma/2 & \sigma & -\sigma/2 \\ -\sigma/2 & -\sigma/2 & \sigma \end{pmatrix}.$$

2.6. В точке P задан тензор напряжений

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

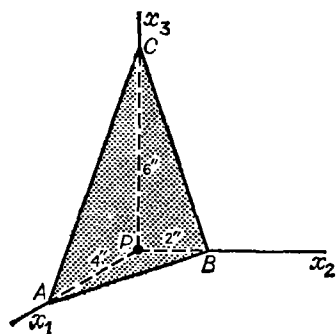


Рис. 2.21.

Определить вектор напряжения на площадке, проходящей через точку P параллельно плоскости ABC , изображенной на рис. 2.21.

Плоскость ABC определяется уравнением $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 12$, а вектор единичной нормали к ней (см. задачу 1.2)—уравнением

$$\hat{n} = 3/7\hat{e}_1 + 6/7\hat{e}_2 + 2/7\hat{e}_3.$$

По формуле (2.14) вектор напряжения можно определить умножением матриц

$$[3/7, 6/7, 2/7] \begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 1/7 [-9, 5, 10].$$

Таким образом, $t^{(n)} = -9/7\hat{e}_1 + 5/7\hat{e}_2 + 10/7\hat{e}_3$.

2.7. Напряженное состояние в любой точке сплошной среды в декартовой системе координат задано тензором

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить вектор напряжения в точке $P(2, 1, \sqrt{3})$ на площадке, касательной в этой точке к цилиндрической поверхности $x_2^2 + x_3^2 = 4$.

Компоненты напряжения в точке P принимают значения

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Единичный вектор нормали в точке P определяется вектором $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \nabla (x_2^2 + x_3^2 - 4)$. Таким образом,

$$\nabla \varphi = 2x_2\hat{e}_2 + 2x_3\hat{e}_3$$

и, следовательно, в точке P

$$\nabla \varphi = 2\hat{e}_2 + 2\sqrt{3}\hat{e}_3.$$

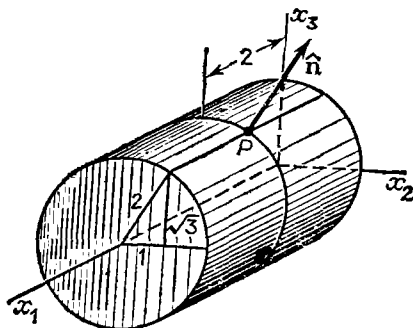


Рис. 2.22.

Тогда единичный вектор нормалн в точке P есть $\hat{n} = \frac{\hat{e}_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{e}_3$ (это легко видеть и из рис. 2.22). Наконец, вектор напряжения на площадке, перпендикулярной

к $\hat{n}$ в точке P , равен

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 3 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix},$$

или

$$t^{(n)} = 5\hat{e}_1/2 + 3\hat{e}_2 + \sqrt{3}\hat{e}_3.$$

Уравнения равновесия (§ 2.7)

2.8. Какой вид должны иметь компоненты массовой силы, если при распределении напряжений, указанном в задаче 2.7, всюду выполнены уравнения равновесия (2.24)?

Подставим в уравнения (2.24) значения, непосредственно вычисленные по заданному в задаче 2.7 тензору напряжений Σ :

$$3x_2 + 10x_2 + 0 + \rho b_1 = 0,$$

$$0 + 0 + 2 + \rho b_2 = 0,$$

$$0 + 0 + 0 + \rho b_3 = 0.$$

Эти уравнения удовлетворяются при $b_1 = -13x_2/\rho$, $b_2 = -2/\rho$, $b_3 = 0$.

2.9. Вывести уравнение (2.20) из уравнения (2.19).

Начнем с уравнения (2.19):

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(n)} dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = 0.$$

Подставим $t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$ в интеграл по поверхности и преобразуем результат к интегралу по объему по формуле (1.157):

$$\int_S (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{pk}) n_p dS = \int_V (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{pk})_{,p} dV,$$

Выполним в этом интеграле по объему дифференцирование и объединим результат с другим интегралом по объему, входящим в формулу (2.19):

$$\int_V \varepsilon_{ijk} [x_{j,p} \sigma_{pk} + x_j (\sigma_{pk,p} + \rho b_k)] dV = 0$$

Но вследствие уравнений равновесия $\sigma_{pk,p} + \rho b_k = 0$, а $x_{j,p} = \delta_{jp}$, и поэтому интеграл по объему приводится к виду (2.20): $\int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0$.

Преобразования тензора напряжений (§ 2.8)

2.10. Напряженное состояние в некоторой точке задано в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ тензором

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Определить тензор напряжений Σ' для повернутых осей $Ox_1'x_2'x_3'$, которые связаны с осями без штрихов тензором преобразования

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Формула (2.27) дает закон преобразования напряжений в виде $\sigma'_{ij} = a_{ip}a_{jq}\sigma_{pq}$, или $\Sigma' = A \cdot \Sigma \cdot A_c$. Детальные вычисления лучше провести умножением матриц $[\sigma'_{ij}] = [a_{ip}][\sigma_{pq}][a_{qj}]$, согласно формуле (2.29). Таким образом,

$$\begin{aligned} [\sigma'_{ij}] &= \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} & -1 \\ 2 & -1 & 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.11. Показать, что закон преобразования напряжений можно получить, воспользовавшись выражением (2.33) $\sigma_N = \sigma_{ii}n_i n_i$ для величины нормального напряжения на произвольной площадке, имеющей единичный вектор нормали n_i .

Так как σ_N — тензор нулевого порядка, в любой системе осей координат (со штрихами или без штрихов) он записывается одинаково:

$$\sigma_N = \sigma'_{ij}n'_i n'_j = \sigma_{ij}n_i n_j,$$

но, согласно (1.94), $n'_i = a_{ij}n_j$, и поэтому

$$\sigma'_{ij}n'_i n'_j = \sigma'_{ij}a_{ip}n_p a_{jq}n_q = \sigma_N = \sigma_{pq}n_p n_q,$$

где в последнем члене использованы новые индексы суммирования. Таким образом,

$$(\sigma'_{ij}a_{ip}a_{jq} - \sigma_{pq})n_p n_q = 0,$$

а поскольку направления осей без штрихов произвольны,

$$\sigma'_{ij}a_{ip}a_{jq} = \sigma_{pq}$$

2.12. В системе осей без штрихов (рис. 2.23) тензор напряжений дан в виде

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}.$$

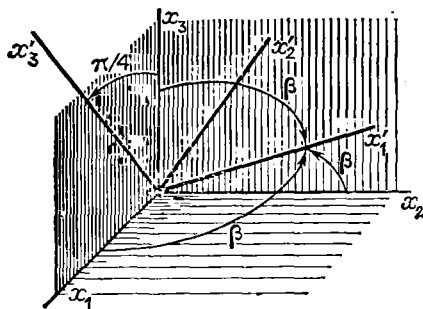


Рис. 2.23.

Определить тензор напряжений в осях со штрихами, направления которых указаны на рисунке.

Прежде всего необходимо полностью определять матрицу преобразования А. Ось x'_1 составляет одинаковые углы с осями x_i , поэтому первая строка таблицы преобразования, а также a_{33} известны:

	x_1	x_2	x_3
x'_1	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
x'_2			
x'_3			$1/\sqrt{2}$

Недостающие элементы таблицы преобразования можно определить из условия ортогональности $a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}$. Читателю предоставляется в качестве упражнения показать, что

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} [\sigma'_{ij}] &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \tau/\sqrt{3} & \tau/\sqrt{3} & \tau/\sqrt{3} \\ -2\tau/\sqrt{6} & \tau/\sqrt{6} & \tau/\sqrt{6} \\ 0 & -\tau/\sqrt{2} & \tau/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Полученный результат не покажется удивительным, если рассмотреть круги Мора для напряженного состояния с тремя равными значениями главных напряжений.

Поверхность напряжения Коши (§ 2.9)

2.13. Найти поверхности напряжения Коши в точке P для следующих состояний напряжения:

а) всестороннее равномерное растяжение (сжатие)

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0;$$

б) одноосное растяжение (сжатие)

$$\sigma_{11} = \sigma, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0;$$

в) простой сдвиг

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0;$$

г) плоское напряженное состояние

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau, \quad \sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = 0.$$

Согласно (2.32), уравнение поверхности напряжений в символической записи таково: $\xi \cdot \Sigma \cdot \xi = \pm k^2$. Используя матричную форму, получаем следующие результаты.

$$\text{а) } [\xi_1, \xi_2, \xi_3] \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \sigma \xi_1^2 + \sigma \xi_2^2 + \sigma \xi_3^2 = \pm k^2.$$

Отсюда видно, что поверхность напряжений для всестороннего равномерного растяжения является сферой $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \pm k^2/\sigma$.

$$\text{б) } [\xi_1, \xi_2, \xi_3] \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \sigma \xi_1^2 = \pm k^2.$$

Поверхность напряжений для одноосного растяжения представляет собой две плоскости, перпендикулярные линии действия напряжения.

$$\text{в) } [\xi_1, \xi_2, \xi_3] \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = 2\tau \xi_1 \xi_2 = \pm k^2.$$

Поверхность напряжений для простого сдвига есть гиперболический цилиндр с образующей, параллельной оси ξ_3 .

$$\text{г) } [\xi_1, \xi_2, \xi_3] \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \sigma \xi_1^2 + 2\tau \xi_1 \xi_2 + \sigma \xi_2^2 = \pm k^2.$$

Для плоского напряженного состояния поверхность напряжения представляет собой цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси нулевого напряжения, и направляющей в виде кривой второго порядка.

2.14. Показать, что для напряженного состояния, заданного тензором

$$\Sigma = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

поверхность напряжения (квадрика) Коши будет эллипсоидом (эллипсоидом напряжения), если a , b и c имеют одинаковые знаки.

Уравнение поверхности напряжений имеет вид

$$[\xi_1, \xi_2, \xi_3] \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = a\xi_1^2 + b\xi_2^2 + c\xi_3^2 = \pm k^2.$$

$$\text{Это эллипсоид } \frac{\xi_1^2}{b/c} + \frac{\xi_2^2}{a/c} + \frac{\xi_3^2}{a/b} = \frac{\pm k^2}{abc}.$$

Главные напряжения (§ 2.10—2.11)

2.15. Тензор напряжений в точке P в декартовых осях $Ox_1x_2x_3$ имеет компоненты

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить главные напряжения и главные оси тензора напряжений, с которыми будет связана система осей координат $Ox_1^*x_2^*x_3^*$.

Согласно (2.37), главные напряжения σ определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} 3-\sigma & 1 & 1 \\ 1 & -\sigma & 2 \\ 1 & 2 & -\sigma \end{vmatrix} = 0,$$

или в развернутом виде

$$(\sigma + 2)(\sigma - 4)(\sigma - 1) = 0.$$

Главные напряжения являются корнями этого уравнения $\sigma_{(1)} = -2$, $\sigma_{(2)} = 1$, $\sigma_{(3)} = 4$. Пусть ось x_1^* совпадает с осью главного напряжения $\sigma_{(1)}$, и пусть $n_i^{(1)}$ — направляющие косинусы этой оси. Тогда, согласно (2.42),

$$(3 + 2)n_1^{(1)} + n_2^{(1)} + n_3^{(1)} = 0,$$

$$n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} + 2n_3^{(1)} = 0,$$

$$n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} + 2n_3^{(1)} = 0.$$

Отсюда $n_1^{(1)} = 0$, $n_2^{(1)} = -n_3^{(1)}$, а так как $n_i n_i = 1$, то $(n_2^{(1)})^2 = 1/2$. Поэтому $n_1^{(1)} = 0$, $n_2^{(1)} = 1/\sqrt{2}$, $n_3^{(1)} = -1/\sqrt{2}$.

Пусть точно так же ось x_2^* соответствует главному напряжению $\sigma_{(2)}$. Тогда, согласно (2.42),

$$2n_1^{(2)} + n_2^{(2)} + n_3^{(2)} = 0,$$

$$n_1^{(2)} - n_2^{(2)} + 2n_3^{(2)} = 0,$$

$$n_1^{(2)} + 2n_2^{(2)} - n_3^{(2)} = 0,$$

так что $n_1^{(2)} = 1/\sqrt{3}$, $n_2^{(2)} = -1/\sqrt{3}$, $n_3^{(2)} = -1/\sqrt{3}$.

Пусть, наконец, x_3^* соответствует $\sigma_{(3)}$. Тогда, согласно (2.42),

$$-n_1^{(3)} + n_2^{(3)} + n_3^{(3)} = 0,$$

$$n_1^{(3)} - 4n_2^{(3)} + 2n_3^{(3)} = 0,$$

$$n_1^{(3)} + 2n_2^{(3)} - 4n_3^{(3)} = 0,$$

так что $n_1^{(3)} = -2/\sqrt{6}$, $n_2^{(3)} = -1/\sqrt{6}$, $n_3^{(3)} = -1/\sqrt{6}$.

2.16. Показать, что тензор преобразования, состоящий из направляющих косинусов, определенных в задаче 2.15, приводит первоначальный тензор напряжения к диагональному виду, т. е. оси x_i являются главными.

Согласно (2.29), $[\sigma_{ij}^*] = [a_{ip}] [\sigma_{pq}] [a_{qj}]$, что для нашей задачи сразу дает

$$[\sigma_{ij}^*] = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ -8/\sqrt{6} & -4/\sqrt{6} & -4/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.17. Определить главные напряжения и главные оси тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \end{pmatrix}.$$

Согласно (2.37),

$$\begin{vmatrix} \tau - \sigma & \tau & \tau \\ \tau & \tau - \sigma & \tau \\ \tau & \tau & \tau - \sigma \end{vmatrix} = 0,$$

или $(\tau - \sigma)[-2\tau + \sigma^2] + 2\tau^2\sigma = [3\tau - \sigma]\sigma^2 = 0$. Отсюда $\sigma_{(1)} = 0$, $\sigma_{(2)} = 0$, $\sigma_{(3)} = 3\tau$. Для $\sigma_{(3)} = 3\tau$ в силу уравнений (2.42)

$$-2n_1^{(3)} + n_2^{(3)} + n_3^{(3)} = 0,$$

$$n_1^{(3)} - 2n_2^{(3)} + n_3^{(3)} = 0,$$

$$n_1^{(3)} + n_2^{(3)} - 2n_3^{(3)} = 0$$

и, следовательно, $n_1^{(3)} = n_2^{(3)} = n_3^{(3)} = 1/\sqrt{3}$.

Для $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = 0$ уравнения (2.42) сводятся к виду

$$n_1 + n_2 + n_3 = 0,$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = 0,$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = 0;$$

вместе с $n_i n_i = 1$ этого недостаточно для однозначного определения первой и второй главных осей. Таким образом, любая пара взаимно перпендикулярных осей, перпендикулярных направлению $n_i^{(3)}$, может служить главными осями. Рассмотрим, например, оси, определенные в задаче 2.12 матрицей преобразования

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

По закону преобразования (2.29) матрица главных напряжений $[\sigma_{ij}^*]$ имеет вид

$$[\sigma_{ij}^*] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{3}\tau & \sqrt{3}\tau & \sqrt{3}\tau \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.18. Показать, что оси $Ox_1^*x_2^*x_3^*$ (где x_2^* , x_3^* и x_1^* лежат в одной и той же вертикальной плоскости, а x_1^* , x_1 и x_2 — в одной горизонтальной плоскости) тоже являются главными осями тензора напряжений задачи 2.17.

Ясно, что некоторые элементы матрицы преобразования $[a_{ij}]$, связывающей две системы осей, известны:

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \sqrt{2}/\sqrt{3} & \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix};$$

это хорошо видно на рис. 2.24. Остальные четыре элемента определяются из условий ортогональности $a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}$, так что

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Поступая как и прежде, находим

$$[\sigma_{ij}^*] = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}\tau & \sqrt{3}\tau & \sqrt{3}\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\tau \end{bmatrix}.$$

2.19. Показать, что главные напряжения $\sigma_{(k)}^*$ и компоненты напряжения σ_{ij} в произвольной системе координат, получающейся из главных осей преобразованием с коэффициентами a_{ij} , связаны соотношением $\sigma_{ij} = \sum_{p=1}^3 a_{pi} a_{pj} \sigma_p^*$.

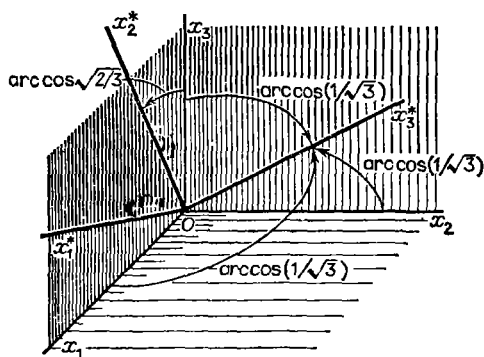


Рис. 2.24.

По правилу преобразования напряжения (2.27) $\sigma_{ij} = a_{pi}a_{qj}\sigma_{pq}^*$, но так как σ_{pq}^* — главные напряжения, в правой части этого равенства остаются только три члена с $p = q$. Значит, правую часть можно записать в виде $\sigma_{ij} = \sum_{p=1}^3 a_{pi}a_{pj}\sigma_p^*$.

2.20. Доказать, что $\sigma_{ij}\sigma_{ik}\sigma_{kj}$ — инвариант тензора напряжений.

По правилу преобразования компонент тензора (2.27)

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij}\sigma'_{ik}\sigma'_{kj} &= a_{ip}a_{jq}\sigma_{pq}a_{ir}a_{ks}\sigma_{rs}a_{km}a_{jn}\sigma_{mn} = \\ &= (a_{ip}a_{ir})(a_{jq}a_{jn})(a_{ks}a_{km})\sigma_{pq}\sigma_{rs}\sigma_{mn} = \\ &= \delta_{pr}\delta_{qn}\delta_{sm}\sigma_{pq}\sigma_{rs}\sigma_{mn} = \\ &= (\delta_{pr}\sigma_{pq})(\delta_{qn}\sigma_{mn})(\delta_{sm}\sigma_{rs}) = \\ &= \sigma_{rq}\sigma_{qm}\sigma_{rm} = \sigma_{ij}\sigma_{ik}\sigma_{kj}.\end{aligned}$$

2.21. Непосредственным вычислением найти инварианты I_{Σ} , II_{Σ} , III_{Σ} тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найти главные напряжения для этого напряженного состояния и показать, что диагональная форма приводит к тем же самым значениям инвариантов.

Согласно (2.39)

$$I_{\Sigma} = \sigma_{ii} = 6 + 6 + 8 = 20.$$

Согласно (2.40)

$$\begin{aligned}II_{\Sigma} &= \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}) = \\ &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}\sigma_{12} - \sigma_{23}\sigma_{23} - \sigma_{31}\sigma_{31} = \\ &= 36 + 48 + 48 - 9 = 123.\end{aligned}$$

Согласно (2.41)

$$III_{\Sigma} = |\sigma_{ij}| = 6(48) + 3(-24) = 216.$$

Величины главных напряжений тензора σ_{ij} равны $\sigma_I = 9$, $\sigma_{II} = 8$, $\sigma_{III} = 3$. Инварианты, подсчитанные через главные значения напряжений, равны

$$I_{\Sigma} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 9 + 8 + 3 = 20.$$

$$II_{\Sigma} = \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I = 72 + 24 + 27 = 123.$$

$$III_{\Sigma} = \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III} = (72)3 = 216.$$

2.22. *Октаэдрической* называется площадка, которая составляет равные углы с главными направлениями напряжений (рис. 2.25). Показать, что касательное напряжение на этой площадке, так

называемое *октаэдрическое касательное напряжение*, вычисляется по формуле

$$\sigma_{\text{окт}} = 1/3 \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}.$$

Нормаль к октаэдрической площадке в главных осях дается выражением

$$\hat{n} = (1/\sqrt{3})(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3).$$

Тогда, согласно (2.12), вектор напряжения на такой площадке равен

$$\mathbf{t}^{(\hat{n})} = (1/\sqrt{3})(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3) \cdot$$

$$\cdot (\sigma_I \hat{e}_1 \hat{e}_1 + \sigma_{II} \hat{e}_2 \hat{e}_2 + \sigma_{III} \hat{e}_3 \hat{e}_3) =$$

$$= (1/\sqrt{3})(\sigma_I \hat{e}_1 + \sigma_{II} \hat{e}_2 + \sigma_{III} \hat{e}_3),$$

а его нормальная компонента будет

$$\sigma_N = \hat{n} \cdot \mathbf{t}^{(\hat{n})} = 1/3 (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}).$$

Следовательно, для касательной компоненты имеем

$$\sigma_{\text{окт}} =$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\mathbf{t}^{(\hat{n})} \cdot \mathbf{t}^{(\hat{n})} - \sigma_N^2} = \{1/3 (\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) - 1/9 (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2\}^{1/2} = \\ &= 1/3 \{3 (\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) - (\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 + 2\sigma_I \sigma_{II} + 2\sigma_{II} \sigma_{III} + 2\sigma_{III} \sigma_I)\}^{1/2} = \\ &= 1/3 \{(\sigma_I^2 - 2\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II}^2) + (\sigma_{II}^2 - 2\sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_{III}^2) + (\sigma_{III}^2 - 2\sigma_{III} \sigma_I + \sigma_I^2)\}^{1/2} = \\ &= 1/3 \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}. \end{aligned}$$

2.23. В некоторой точке задан тензор напряжений

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определить максимальное касательное напряжение в этой точке и показать, что оно действует в плоскости, которая делит пополам угол между площадками максимального и минимального нормальных напряжений.

Используя формулу (2.38), читатель убедится в том, что главные напряжения равны $\sigma_I = 10$, $\sigma_{II} = 5$, $\sigma_{III} = -15$. Из (2.54б) найдем величину максимального касательного напряжения $\sigma_S = (\sigma_{III} - \sigma_I)/2 = -12,5$. Главные оси $Ox_1^* x_2^* x_3^*$

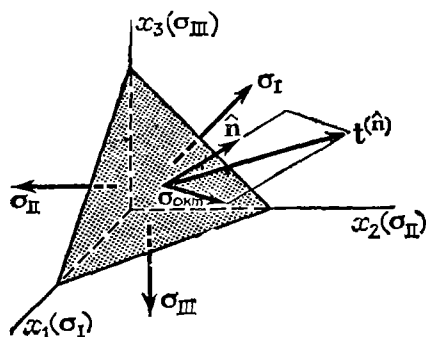


Рис. 2.25.

связаны с осями $Ox'_1x'_2x'_3$ максимального касательного напряжения приведенной ниже таблицей преобразования и расположены так, как показано на рис. 2.26.

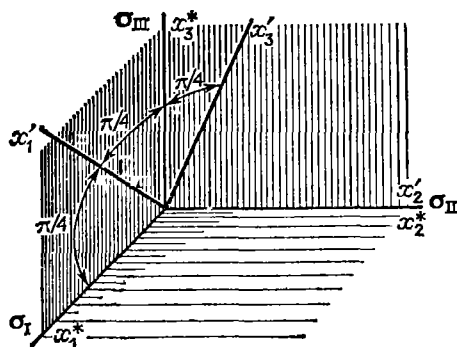


Рис. 2.26.

	x_1^*	x_2^*	x_3^*
x'_1	$1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$
x'_2	0	1	0
x'_3	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$

Тензор напряжения, отнесенный к осям со штрихами, таков:

$$[\sigma'_{ij}] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2,5 & 0 & -12,5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -12,5 & 0 & -2,5 \end{bmatrix}.$$

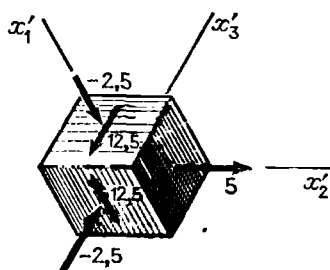
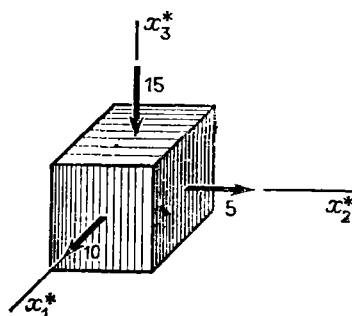


Рис. 2.27.

Эти результаты можно дополнительно пояснить, указав напряжения, действующие в данной точке на элементарные кубики, грани которых перпендикулярны осям координат (рис. 2.27).

Круги Мора (§ 2.12—2.13)

2.24. Построить круги Мора для напряженного состояния, описанного в задаче 2.23. Отметить важнейшие точки. Установить связь между системой осей координат $Ox_1x_2x_3$ (соответствующей

компонентам σ_{ij}) и главными осями $Ox_1^*x_2^*x_3^*$ и нанести на диаграмму Мора точки, характеризующие напряженное состояние на координатных плоскостях системы $Ox_1x_2x_3$.

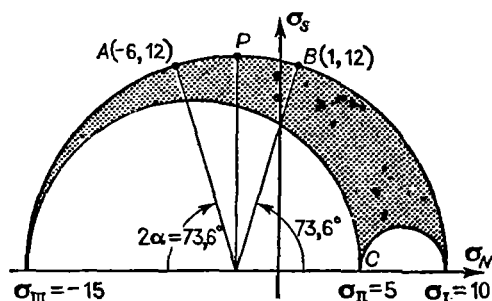


Рис. 2.28.

На верхней половине симметричной диаграммы кругов Мора (рис. 2.28) указана точка P максимального касательного напряжения и отмечены главные напряжения. Таблица направляющих косинусов для преобразования координат

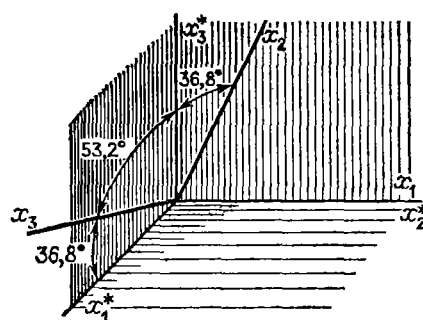


Рис. 2.29.

	x_1^*	x_2^*	x_3^*
x_1	0	1	0
x_2	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{4}{5}$
x_3	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{3}{5}$

приводит к схеме взаимного расположения осей координат, показанной на рис. 2.29. Оси x_1 и x_2^* совпадают. Оси

x_2 и x_3 лежат в плоскости $x_1^*x_3^*$, как по-

казано на рисунке. По указанным углам $\alpha = 36,8^\circ$ и $\beta = 53,2^\circ$ находим положение точки $A(-6, 12)$, характеризующей напряжение на площадке, перпендикулярной оси x_2 , и точки $B(1, 12)$, дающей напряженное состояние на площадке, перпендикулярной оси x_3 . Точка $C(5, 0)$ представляет напряженное состояние на площадке, перпендикулярной оси x_1 .

2.25. Напряженное состояние в некоторой точке в системе координат $Ox_1x_2x_3$ задано компонентами

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определить аналитически компоненты вектора напряжения на площадке с единичной нормалью $\hat{n} = \frac{2}{3}\hat{e}_1 + \frac{1}{3}\hat{e}_2 + \frac{2}{3}\hat{e}_3$. Проверить результаты с помощью диаграммы Мора для этой задачи.

Воспользовавшись (2.13) и свойством симметрии тензора напряжений, получим вектор напряжения на площадке с нормалью $\hat{n}$ в виде произведения матриц

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10/3 \\ -10 \\ -10/3 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $t^{(n)} = -10e_1/3 - 10e_2 - 10e_3/3$, а из (2.33) получаем $\sigma_N = t^{(n)} \cdot \hat{n} = -70/9$. Тогда из (2.47) следует, что $\sigma_S = 70,7/9$.

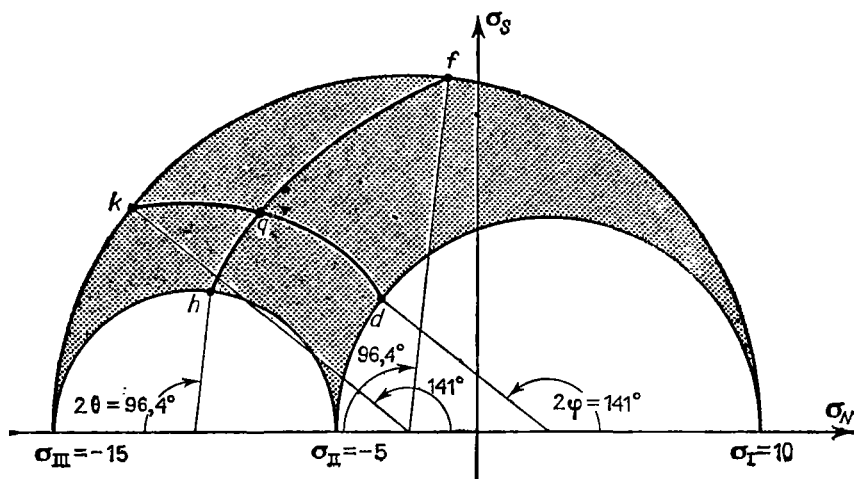


Рис. 2.30.

Для данного тензора σ_{ij} главные напряжения равны $\sigma_1 = 10$, $\sigma_{11} = -5$, $\sigma_{111} = -15$, а главные оси связаны с осями $Ox_1x_2x_3$ преобразованием, определяемым следующей таблицей:

	x_1	x_2	x_3
x_1^*	0	$-3/5$	$4/5$
x_2^*	1	0	0
x_3^*	0	$4/5$	$3/5$

Таким образом, в главных осях $n_i^* = a_{ij}n_j$, или

$$[n_i^*] = \begin{bmatrix} 0 & -3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с этим углы, изображенные на рис. 2.16, имеют величины $\theta = \beta = \arccos 2/3 \approx 48,2^\circ$ и $\varphi = \arccos 1/3 \approx 70,5^\circ$, а диаграмма кругов Мора, соответствующая рис. 2.17, для данного случая построена на рис. 2.30.

2.26. Построить круги Мора для трех случаев плоского напряженного состояния, соответствующих напряжениям, действующим на элементарный куб, ребра которого параллельны осям ко-

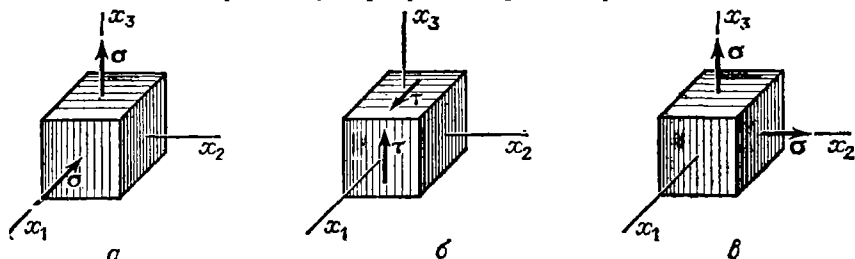


Рис. 2.31.

ординат, как показано на рис. 2.31. Определить максимальное касательное напряжение в каждом случае.

Круги Мора изображены на рис. 2.32.

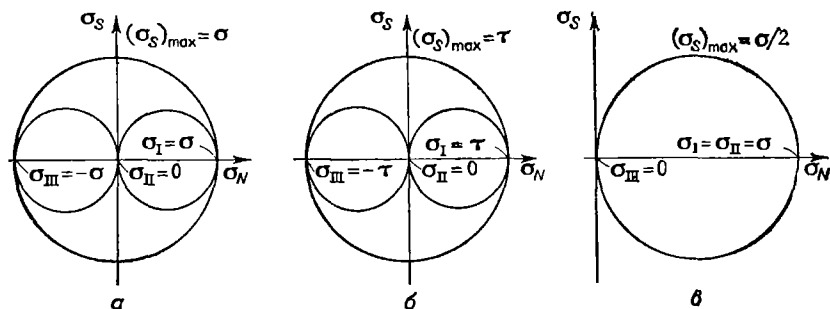


Рис. 2.32.

Шаровой тензор и девиатор напряжений (§ 2.14)

2.27. Разложить тензор напряжений

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

на шаровую часть и девиатор и показать, что первый инвариант девиатора равен нулю.

Мы имеем $\sigma_M = \sigma_{kk}/3 = (12 + 9 + 3)/3 = 8$; тогда

$$\sigma_{ij} = \sigma_M \delta_{ij} + s_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix},$$

причем $s_{ii} = 4 + 1 - 5 = 0$.

2.28. Показать, что девиатор напряжений эквивалентен суперпозиции пяти состояний простого сдвига.

Существует разложение

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s_{12} & 0 \\ s_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ s_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{23} \\ 0 & s_{32} & 0 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -s_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_{33} & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} \end{pmatrix},$$

где два последних тензора, очевидно, эквивалентны состояниям простого сдвига по аналогии со случаями «а» и «б» задачи 2.26. Заметим также, что $-s_{11} - s_{33} = s_{22}$, поскольку $s_{ii} = 0$.

2.29. Определить главные значения девиатора напряжений для

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Девиатор напряжений для σ_{ij} имеет вид

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

а его главные значения можно найти, приравняв нулю определитель

$$\begin{vmatrix} 3-s & -6 & 0 \\ -6 & 3-s & 0 \\ 0 & 0 & -6-s \end{vmatrix} = (-6-s)(s+3)(s-9) = 0.$$

Таким образом, $s_I = 9$, $s_{II} = -3$, $s_{III} = -6$. Тот же результат получится, если сначала вычислить главные значения тензора напряжений σ_{ij} , а затем воспользоваться формулой (2.71). Для тензора σ_{ij} , как может убедиться сам читатель, главные значения равны $\sigma_I = 16$, $\sigma_{II} = 4$, $\sigma_{III} = 1$, откуда $s_I = 16 - 7 = 9$, $s_{II} = 4 - 7 = -3$, $s_{III} = 1 - 7 = -6$.

2.30. Показать, что второй инвариант девиатора напряжений выражается через главные значения девиатора следующим обра-

зом: $\Pi_{\Sigma_D} = (s_I s_{II} + s_{II} s_{III} + s_{III} s_I)$, или (что то же самое) $\Pi_{\Sigma_D} = -1/2 (s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2)$.

Характеристическое уравнение для девиатора напряжений, записанное через главные значения девиатора, получается приравниванием нулю определителя

$$\begin{vmatrix} s_I - s & 0 & 0 \\ 0 & s_{II} - s & 0 \\ 0 & 0 & s_{III} - s \end{vmatrix} = (s_I - s)(s_{II} - s)(s_{III} - s) = 0 =$$

$$= s^3 + (s_I s_{II} + s_{II} s_{III} + s_{III} s_I) s - s_I s_{II} s_{III}.$$

Отсюда в соответствии с (2.72) имеем $\Pi_{\Sigma_D} = (s_I s_{II} + s_{II} s_{III} + s_{III} s_I)$. Так как $s_I + s_{II} + s_{III} = 0$, то

$$\Pi_{\Sigma_D} = 1/2 [2s_I s_{II} + 2s_{II} s_{III} + 2s_{III} s_I - (s_I + s_{II} + s_{III})^2] = -1/2 (s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2).$$

Смешанные задачи

2.31. Доказать, что любой симметричный тензор, например тензор напряжений σ_{ij} , при переходе к любой другой системе преобразуется также в симметричный тензор σ'_{ij} .

По формуле (2.27) $\sigma'_{ij} = a_{ip} a_{jq} \sigma_{pq} = a_{jq} a_{ip} \sigma_{pq} = \sigma'_{ji}$.

2.32. Главные напряжения в точке P таковы, что $2\sigma_{II} = \sigma_I + \sigma_{III}$. Определить единичный вектор нормали n_i к площадке, на которой $\sigma_N = \sigma_{II}$ и $\sigma_S = (\sigma_I - \sigma_{III})/4$.

Согласно (2.33), $\sigma_N = n_1^2 \sigma_I + n_2^2 (\sigma_I + \sigma_{III})/2 + n_3^2 \sigma_{III} = (\sigma_I + \sigma_{III})/2$, и, так как $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, из совместного решения этих двух уравнений можно получить $n_1 = n_3$. Далее, из (2.47)

$$\sigma_S^2 = n_1^2 \sigma_I^2 + n_2^2 (\sigma_I + \sigma_{III})^2/4 + n_3^2 \sigma_{III}^2 - (\sigma_I + \sigma_{III})^2/16.$$

Подставляя в это уравнение $n_3 = n_1$ и $n_2^2 - 1 = -n_1^2 - n_3^2 = -2n_1^2$, а затем решая его относительно n_1 , находим направляющие косинусы $n_1 = 1/(2\sqrt{2})$, $n_2 = \sqrt{3}/2$, $n_3 = 1/(2\sqrt{2})$. Читателю предлагается использовать эти результаты для тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

2.33. Показать, что разложить тензор напряжений σ_{ij} на шаровую часть и девиатор можно только единственным образом.

Предположим, что существуют два разложения $\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda + s_{ij} = \delta_{ij} \lambda^* + \dot{s}_{ij}$, для которых $s_{ii} = 0$ и $\dot{s}_{ii} = 0$. Тогда $\sigma_{ii} = 3\lambda = 3\lambda^*$ и, следовательно, $\lambda = \lambda^*$; а из $\lambda \delta_{ij} + s_{ij} = \lambda \delta_{ij} + \dot{s}_{ij}$ следует, что $s_{ij} = \dot{s}_{ij}$.

2.34. Доказать, что если Σ — симметричный тензор с действительными компонентами, то главные напряжения тоже действительны.

При действительных значениях компонент напряжения инварианты тензора напряжений действительны и, следовательно, все коэффициенты уравнения (2.38) — действительные величины. По теории таких уравнений хотя бы один корень (главное значение) должен быть действительным. Обозначим его через $\sigma_{(3)}$ и рассмотрим совокупность осей со штрихами x'_i , причем направление x'_3 соответствует $\sigma_{(3)}$. Относительно таких осей характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} \sigma'_{11} - \sigma & \sigma'_{12} & 0 \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{(3)} - \sigma \end{vmatrix} = 0,$$

или $(\sigma_{(3)} - \sigma) [(\sigma'_{11} - \sigma)(\sigma'_{22} - \sigma) - (\sigma'_{12})^2] = 0$. Так как дискриминант квадратичной формы, стоящей в квадратных скобках, положителен:

$$D = (\sigma'_{11} + \sigma'_{22})^2 - 4[\sigma'_{11}\sigma'_{22} - (\sigma'_{12})^2] = (\sigma'_{11} - \sigma'_{22})^2 + 4(\sigma'_{12})^2 > 0,$$

то и остальные корни должны быть действительными.

2.35. Используя метод множителей Лагранжа, показать, что экстремальные (максимальное и минимальное) значения нормального напряжения σ_N совпадают с главными напряжениями.

Из (2.33) $\sigma_N = \sigma_{ij}n_i n_j$, причем $n_i n_i = 1$. По аналогии с (2.51) построим функцию $H = \sigma_N - \lambda n_i n_i$, для которой $\partial H / \partial n_i = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial n_p} &= \sigma_{ij} n_i n_j + \sigma_{ij} n_i n_j - 2\lambda n_i n_i = \\ &= \sigma_{ij} \delta_{ip} n_j + \sigma_{ij} n_i \delta_{jp} - 2\lambda \delta_{ip} n_i = \\ &= \sigma_{pj} n_j + \sigma_{ip} n_i - 2\lambda \delta_{ip} n_i = 2(\sigma_{pi} - \lambda \delta_{ip}) n_i = 0, \end{aligned}$$

а это эквивалентно уравнению (2.36) для определения главных напряжений.

2.36. Предположим, что компоненты напряжения σ_{ij} получены из симметричного тензорного поля φ_{ij} при помощи соотношения $\sigma_{ij} = \varepsilon_{ipq} \varepsilon_{jmn} \varphi_{qn, pm}$. Показать, что при отсутствии массовых сил удовлетворяются уравнения равновесия (2.23).

Пользуясь результатами задачи 1.58, найдем компоненты напряжения

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} (\varphi_{qq, pp} - \varphi_{qr, qp}) + \varphi_{pi, pj} + \varphi_{jp, pi} - \varphi_{pp, ji} - \varphi_{ji, pp},$$

или в развернутой записи

$$\sigma_{11} = \varphi_{33, 22} + \varphi_{22, 33}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = -\varphi_{33, 21},$$

$$\sigma_{22} = \varphi_{11, 33} + \varphi_{33, 11}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} = -\varphi_{11, 23},$$

$$\sigma_{33} = \varphi_{22, 11} + \varphi_{11, 22}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{13} = -\varphi_{22, 13}.$$

Подставляя эти значения в уравнение $\sigma_{ij,i} = 0$, получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} &= \varphi_{33,221} + \varphi_{22,331} - \varphi_{33,212} - \varphi_{22,133} = 0, \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} &= -\varphi_{33,211} + \varphi_{11,332} + \varphi_{33,112} - \varphi_{11,233} = 0, \\ \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} &= -\varphi_{22,131} - \varphi_{11,232} + \varphi_{22,113} + \varphi_{11,223} = 0.\end{aligned}$$

2.37. Показать, что, как утверждается в § 2.9, нормаль к поверхности напряжений Коши в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ параллельна вектору напряжения $\hat{t}_i^{(n)}$.

Пусть поверхность напряжений задана уравнением $\varphi = \sigma_{ij}\xi_i\xi_j \pm k^2 = 0$. Нормаль к ней в любой точке определяется как $\nabla\varphi$, или $\partial\varphi/\partial\xi_i = \varphi_{,i}$. Следовательно, $\varphi_{,p} = \sigma_{ij}\delta_{ip}\xi_j + \sigma_{ij}\xi_i\delta_{jp} = 2\sigma_{pi}\xi_i$. Но так как $\xi_i = r n_i$, последнее выражение превращается в $2\sigma_{pi}r n_i$ или $2r(\sigma_{pi}n_i) = 2\hat{t}_p^{(n)}$.

2.38. Тензор напряжений в точке P , отнесенный к осям $Ox_1x_2x_3$, имеет вид

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 15 & -10 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Пусть новые оси $Ox'_1x'_2x'_3$ получены поворотом около начала отсчета, т. е. преобразованием с матрицей

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix}.$$

Определить вектор напряжения на каждой из координатных площадок системы со штрихами путем проектирования вектора напряжения в первоначальных осях на направления осей со штрихами. Определить таким образом σ'_{ij} . Проверить результат, используя формулу преобразования (2.27).

Из (2.6) и тождества $\hat{t}_j^{(\hat{e}_i)} = \sigma_{ij}$ (2.7) следует, что векторы напряжения на координатных площадках в системе без штрихов равны

$$\hat{t}^{(\hat{e}_1)} = 15\hat{e}_1 - 10\hat{e}_2, \quad \hat{t}^{(\hat{e}_2)} = -10\hat{e}_1 + 5\hat{e}_2, \quad \hat{t}^{(\hat{e}_3)} = 20\hat{e}_3,$$

что соответствует строкам тензора напряжений. Проектируя эти векторы на оси системы со штрихами, при помощи соотношения (2.12) $\hat{t}^{(\hat{e}'_i)} = n_1\hat{t}^{(\hat{e}_1)} + n_2\hat{t}^{(\hat{e}_2)} + n_3\hat{t}^{(\hat{e}_3)}$ получаем

$$\hat{t}^{(\hat{e}'_1)} = 3/5(15\hat{e}_1 - 10\hat{e}_2) - 4/5(20\hat{e}_3) = 9\hat{e}_1 - 6\hat{e}_2 - 16\hat{e}_3;$$

после преобразования единичных базисных векторов это равенство принимает вид

$$\hat{t}^{(\hat{e}'_1)} = 9(3/5\hat{e}'_1 + 4/5\hat{e}'_3) - 6\hat{e}'_2 - 16(-4/5\hat{e}'_1 + 3/5\hat{e}'_3) = 9\hat{e}'_1/5 - 6\hat{e}'_2 - 12\hat{e}'_3/5.$$

Аналогично

$$t^{(\hat{e}_2')} = -6\hat{e}_1' + 5\hat{e}_2' - 8\hat{e}_3'$$

и

$$t^{(\hat{e}_3')} = -12\hat{e}_1'/5 - 8\hat{e}_2' + 84\hat{e}_3'/5,$$

так что

$$\sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} 91/5 & -6 & -12/5 \\ -6 & 5 & -8 \\ -12/5 & -8 & 84/5 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, по формуле (2.27)

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & -10 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 9 & -6 & -16 \\ -10 & 5 & 0 \\ 12 & -8 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 91/5 & -6 & -12/5 \\ -6 & 5 & -8 \\ -12/5 & -8 & 84/5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.39. Показать, что второй инвариант девiatorа напряжений Π_{Σ_D} связан с октаэдрическим касательным напряжением соотношением $\sigma_{\text{окт}} = \sqrt{-2/3 \Pi_{\Sigma_D}}$.

Из задачи 2.22 $\sigma_{\text{окт}} = 1/3 \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$, но $\sigma_I = \sigma_M + s_I$, $\sigma_{II} = \sigma_M + s_{II}$ и т. д.; поэтому

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{окт}} &= 1/3 \sqrt{(s_I - s_{II})^2 + (s_{II} - s_{III})^2 + (s_{III} - s_I)^2} = \\ &= 1/3 \sqrt{2(s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2) - 2(s_I s_{II} + s_{II} s_{III} + s_{III} s_I)}. \end{aligned}$$

А так как $s_I + s_{II} + s_{III} = 0$, то и $(s_I + s_{II} + s_{III})^2 = 0$, или

$$s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2 = -2(s_I s_{II} + s_{II} s_{III} + s_{III} s_I).$$

Отсюда

$$\sigma_{\text{окт}} = 1/3 \sqrt{-6(s_I s_{II} + s_{II} s_{III} + s_{III} s_I)} = \sqrt{-2/3 \Pi_{\Sigma_D}}.$$

2.40. Напряженное состояние во всех точках тела задано тензором напряжений

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & Cx_3 & 0 \\ Cx_3 & 0 & -Cx_1 \\ 0 & -Cx_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где C — произвольная постоянная. а) Показать, что если массовые силы равны нулю, то уравнения равновесия удовлетворяются.

- б) Вычислить вектор напряжения в точке $P(4, -4, 7)$ на плоскости $2x_1 + 2x_2 - x_3 = -7$ и на сфере $(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = (9)^2$.
 в) Определить главные напряжения, максимальное касательное напряжение и главные значения девиатора напряжений в точке P .
 г) Построить круги Мора для напряженного состояния в точке P .

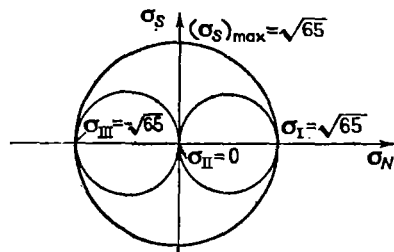


Рис. 2.33.

а) Подставляя непосредственно в (2.24) компоненты σ_{ij} , убеждаемся в том, что уравнения равновесия удовлетворяются тождественно.

б) Из задачи 1.2 следует, что единичный вектор нормали к плоскости $2x_1 + 2x_2 - x_3 = -7$ определяется выражением $\hat{n} = 2/3\hat{e}_1 + 2/3\hat{e}_2 - 1/3\hat{e}_3$. Тогда, согласно формуле (2.12), вектор напряжения на этой площадке в точке P равен

$$\begin{aligned} t(\hat{n}) &= (2/3\hat{e}_1 + 2/3\hat{e}_2 - 1/3\hat{e}_3) \cdot (7C\hat{e}_1\hat{e}_2 + 7C\hat{e}_2\hat{e}_1 - 4C\hat{e}_2\hat{e}_3 - 4C\hat{e}_3\hat{e}_2) = \\ &= C(14/3\hat{e}_2 + 14/3\hat{e}_1 - 8/3\hat{e}_3 + 4/3\hat{e}_2) = 1/3C(14\hat{e}_1 + 18\hat{e}_2 - 8\hat{e}_3). \end{aligned}$$

Нормаль к сфере $x_i x_i = (9)^2$ в точке P определяется выражением $n_i = \varphi_i$, где $\varphi = x_i x_i - 81$; следовательно, $\hat{n} = 4/9\hat{e}_1 - 4/9\hat{e}_2 + 7/9\hat{e}_3$. Вектор напряжения в точке P , согласно (2.14), в матричной записи имеет вид

$$[t_i^{\hat{n}}] = [4/9, -4/9, 7/9] \begin{bmatrix} 0 & 7C & 0 \\ 7C & 0 & -4C \\ 0 & -4C & 0 \end{bmatrix} = [-28C/9, 0, 16C/9].$$

в) В силу (2.37) для главных напряжений σ имеем уравнение

$$\begin{vmatrix} -\sigma & 7 & 0 \\ 7 & -\sigma & -4 \\ 0 & -4 & -\sigma \end{vmatrix} = \sigma(\sigma^2 - 65) = 0,$$

откуда $\sigma_I = \sqrt{65}$, $\sigma_{II} = 0$, $\sigma_{III} = -\sqrt{65}$. Величина максимального касательного напряжения по формуле (2.54б) равна $\sigma_S = (\sigma_{III} - \sigma_I)/2 = \pm \sqrt{65}$. Так как среднее нормальное напряжение в точке P равно $\sigma_M = (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})/3 = 0$, главные значения девиатора напряжений те же, что и у тензора напряжений.

г) Круги Мора изображены на рис. 2.33.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

2.41. В точке P дан тензор напряжений

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 14 & 7 & -7 \\ 7 & 21 & 0 \\ -7 & 0 & 35 \end{pmatrix}.$$

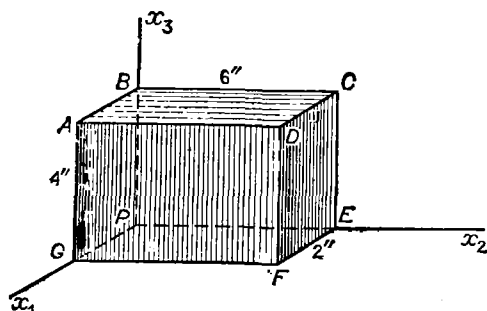


Рис. 2.34.

Определить вектор напряжения в точке P на площадке, параллельной плоскости: а) BGE , б) $BGFC$ в элементарном параллелепипеде, изображенном на рис. 2.34.

Ответ: а) $t^{(\hat{n})} = 11\hat{e}_1 + 12\hat{e}_2 + 9\hat{e}_3$; б) $t^{(\hat{n})} = (21\hat{e}_1 + 14\hat{e}_2 + 12\hat{e}_3)/\sqrt{5}$.

2.42. Определить нормальную и касательную компоненты напряжения на плоскости $BGFC$ задачи 2.41.

Ответ: $\sigma_N = 63/5$, $\sigma_S = 37,7/5$.

2.43. Главные напряжения в точке P таковы: $\sigma_I = 12$, $\sigma_{II} = 3$, $\sigma_{III} = -6$. Определить вектор напряжения и его нормальную компоненту на октаэдрической площадке в точке P .

Ответ: $t^{(\hat{n})} = (12\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 - 6\hat{e}_3)/\sqrt{3}$, $\sigma_N = 3$.

2.44. Определить величины главных напряжений для тензоров

$$\text{а) } \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \text{б) } \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и показать, что главные оси этих тензоров совпадают.

Ответ: а) $\sigma_I = 2$, $\sigma_{II} = \sigma_{III} = -1$; б) $\sigma_I = 4$, $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 1$.

2.45. Разложить тензор напряжений

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -10 & 0 \\ -10 & 0 & 30 \\ 0 & 30 & -27 \end{pmatrix}$$

на шаровую часть и девиатор и найти главные значения девиатора напряжений.

Ответ: $s_I = 31$, $s_{II} = 8$, $s_{III} = -39$.

2.46. Показать, что нормальная компонента вектора напряжения на октаэдрической площадке равна одной трети первого инварианта тензора напряжений.

2.47. В некоторой точке задан тензор напряжений

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \sigma_{22} & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

причем величина σ_{22} не указана. Определить σ_{22} так, чтобы вектор напряжения на некоторой площадке в этой точке обращался в нуль. Найти единичную нормаль к этой свободной от напряжения площадке.

Ответ: $\sigma_{22} = 1$, $\hat{n} = (\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + \hat{e}_3)/\sqrt{6}$.

2.48. Построить круги Мора и определить максимальное касательное напряжение для следующих напряженных состояний:

$$\text{а) } \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \tau & \tau & 0 \\ \tau & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & -2\tau \end{pmatrix}.$$

Ответ: а) $\sigma_S = \tau$; б) $\sigma_S = 3\tau/2$.

2.49. Используя результат задачи 1.58 и закон (2.27) преобразования напряжений, показать, что произведение $\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}\sigma_{ip}\sigma_{jq}\sigma_{km}$ является инвариантом.

2.50. Поле напряжений в сплошной среде задано тензором

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 & (1 - x_2^2) x_1 & 0 \\ (1 - x_2^2) x_1 & (x_2^3 - 3x_2)/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Определить: а) распределение массовых сил, если уравнения равновесия удовлетворены повсюду; б) величины главных напряжений в точке $P(a, 0, 2\sqrt{a})$; в) максимальное касательное напряжение в точке P ; г) главные значения девятора напряжений в точке P .

Ответ: а) $b_3 = -4x_3$; б) $a, -a, 8a$; в) $\pm 4,5a$; г) $-11a/3, -5a/3, 16a/3$.

Деформации

3.1. Частицы и точки

В кинематике сплошной среды смысл слова «точка» должен быть строго уяснен, так как оно может относиться либо к «точке» пространства, либо к «точке» сплошной среды. Во избежание недо-разумений слово «точка» будет использоваться исключительно для обозначения места в неподвижном пространстве. Слово «частица» будет означать малый элемент объема (или «материальную точку») сплошной среды. Короче говоря, *точка* есть место в пространстве, а *частица* — малая часть материального континуума.

3.2. Конфигурация сплошной среды. Деформация и течение

В любой момент времени t объем V сплошной среды, ограниченный поверхностью S , занимает некоторую область R физического пространства. Если в определенной системе координат указано соответствие частиц некоторого объема сплошной среды и точек пространства, которые они занимают в момент времени t , то говорят, что в этот момент времени указана *конфигурация* сплошной среды.

Термин *деформация* относится к изменению формы континуума от некоторой начальной (недеформированной) конфигурации до последующей (деформированной) конфигурации. При изучении деформации учитываются только начальная и конечная конфигурации; промежуточным состояниям, или частной последовательности конфигураций, по которым происходит деформация, внимания не уделяется. В противоположность этому термин *течение* используется для обозначения непрерывного состояния движения континуума. В самом деле, изучение истории конфигурации является неотъемлемой частью исследования течения. для которого задано переменное во времени поле скоростей.

3.3. Радиус-вектор. Вектор перемещения

На рис. 3.1 изображены недеформированная конфигурация материального континуума в момент $t = 0$ и деформированная конфигурация того же самого континуума в более поздний момент времени $t = t$. В проводимом нами исследовании целесообразно

относительно начальную и конечную конфигурации к различным осям координат, как это сделано на рисунке.

Тогда в начальном состоянии характерная частица среды занимает точку P_0 пространства и имеет радиус-вектор

$$\mathbf{X} = X_1 \hat{\mathbf{i}}_1 + X_2 \hat{\mathbf{i}}_2 + X_3 \hat{\mathbf{i}}_3 = X_K \hat{\mathbf{i}}_K \quad (3.1)$$

относительно ортогональных декартовых координат $OX_1X_2X_3$. Здесь в качестве индексов суммирования использованы заглавные

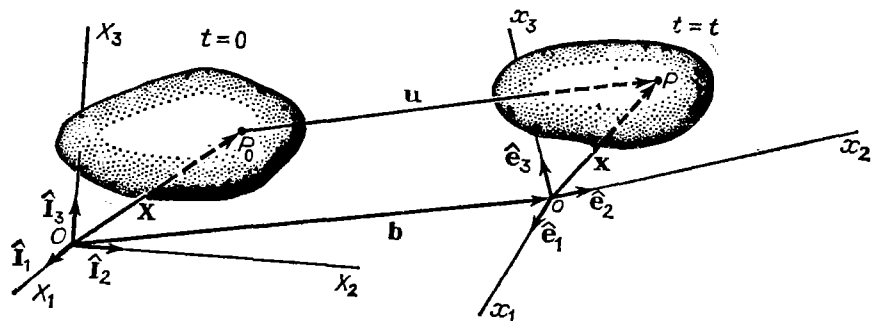


Рис. 3.1.

буквы; они будут появляться также в некоторых равенствах и в дальнейшем, но их использование в качестве индексов суммирования ограничено этим параграфом. В остальной части книги заглавные буквы служат только различительными верхними или нижними индексами. Здесь они применяются для того, чтобы особо подчеркнуть связь некоторых выражений с системой координат пространства начального состояния (X_1, X_2, X_3) , которые называются *материальными координатами*. В деформированном состоянии частица, которая сначала была в точке P_0 , займет положение P и будет иметь относительно ортогональных декартовых координат $ox_1x_2x_3$ радиус-вектор

$$\mathbf{x} = x_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + x_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + x_3 \hat{\mathbf{e}}_3 = x_i \hat{\mathbf{e}}_i. \quad (3.2)$$

Здесь в качестве нижних индексов использованы строчные буквы, чтобы указать на связь с координатами (x_1, x_2, x_3) , которые дают текущее положение частицы и часто называются *пространственными координатами*.

Относительная ориентация материальных осей $OX_1X_2X_3$ и пространственных осей $ox_1x_2x_3$ характеризуется направляющими косинусами α_{kK} и α_{Kk} , которые определяются скалярными произведениями единичных векторов

$$\hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{i}}_K = \hat{\mathbf{i}}_K \cdot \hat{\mathbf{e}}_k = \alpha_{kK} = \alpha_{Kk}. \quad (3.3)$$

Суммирование по индексам в этих выражениях не подразумевается, так как k и K — различные индексы. Ввиду того что дельта Кронекера определяется равенствами $\hat{\mathbf{I}}_K \cdot \hat{\mathbf{I}}_P = \delta_{KP}$ и $\hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{e}}_p = \delta_{kp}$, условия ортогональности пространственных и материальных осей принимают вид

$$\alpha_{kK}\alpha_{Kp} = \alpha_{kK}\alpha_{pK} = \delta_{kp}, \quad \alpha_{Kp}\alpha_{pM} = \alpha_{pK}\alpha_{pM} = \delta_{KM}. \quad (3.4)$$

Вектор $\mathbf{u}$, соединяющий точки P_0 и P на рис. 3.1 (соответственно начальное и конечное положения частицы), называется *вектором перемещения*. Этот вектор можно записать в виде

$$\mathbf{u} = u_k \hat{\mathbf{e}}_k \quad (3.5)$$

или же в виде

$$\mathbf{U} = U_K \hat{\mathbf{I}}_K, \quad (3.6)$$

где компоненты U_K и u_k связаны через направляющие косинусы α_{kK} . Согласно (1.89), единичный вектор $\hat{\mathbf{e}}_k$ выражается через материальные базисные векторы $\hat{\mathbf{I}}_K$ следующим образом:

$$\hat{\mathbf{e}}_k = \alpha_{kK} \hat{\mathbf{I}}_K. \quad (3.7)$$

Подставляя (3.7) в (3.5), получаем

$$\mathbf{u} = u_k (\alpha_{kK} \hat{\mathbf{I}}_K) = U_K \hat{\mathbf{I}}_K = \mathbf{U}, \quad (3.8)$$

откуда

$$U_K = \alpha_{kK} u_k. \quad (3.9)$$

Так как направляющие косинусы — величины постоянные, компоненты вектора перемещения, как видно из (3.9), подчиняются правилу преобразования декартовых тензоров первого ранга, что и следовало ожидать.

Вектор $\mathbf{b}$ на рис. 3.1 служит для определения положения начала координат o относительно точки O ; очевидно,

$$\mathbf{u} = \mathbf{b} + \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (3.10)$$

В механике сплошной среды очень часто существует возможность совместить системы координат $OX_1X_2X_3$ и $ox_1x_2x_3$; тогда $\mathbf{b} \equiv \mathbf{0}$, а (3.10) принимает вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (3.11)$$

В декартовых компонентах это равенство в общем случае выглядит так:

$$u_k = x_k - \alpha_{kK} X_K. \quad (3.12)$$

Однако для совмещенных осей триэдры единичных базисных векторов обеих систем одни и те же, а это ведет к тому, что направляющие косинусы α_{kK} превращаются в дельты Кронекера. Вследствие этого

(3.12) упрощается и сводится к равенству

$$u_k = x_k - X_k, \quad (3.13)$$

где в качестве нижних индексов используются только строчные буквы. В остальной части книги, если специально не оговорено противное, материальные и пространственные оси предполагаются *совмещенными*, и поэтому для индексов будут применяться только строчные буквы.

3.4. Лагранжево и эйлерово описания движения

Если в некотором объеме сплошной среды происходит деформация (или течение), то его частицы двигаются вдоль различных путей в пространстве. Это движение можно описать уравнениями вида

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(\mathbf{X}, t), \quad \text{или} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad (3.14)$$

которые дают положение x_i в текущий момент частицы, занимавшей в момент $t=0$ точку (X_1, X_2, X_3) . Таким образом, (3.14) можно толковать как установление соответствия между точками начальной конфигурации и их положением в текущем состоянии. Предполагается, что такое соответствие взаимно однозначно и непрерывно с непрерывными частными производными любого порядка, который потребуется. Такой способ описания движения или деформации, выраженный формулой (3.14), называется *лагранжевым*.

С другой стороны, если движение или деформация задаются уравнениями вида

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) = X_i(\mathbf{x}, t), \quad \text{или} \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \quad (3.15)$$

в которых независимыми переменными являются координаты x_i и время t , способ описания называется *эйлеровым*. Это описание можно рассматривать как такое, которое позволяет проследить к начальному положению частицу, которая теперь занимает положение (x_1, x_2, x_3) . Если (3.15) дает непрерывное взаимно однозначное соответствие с непрерывными частными производными, как было допущено для (3.14), то эти два соответствия представлены единственной парой взаимно обратных функций. Необходимым и достаточным условием существования обратной функции является отличие от нуля якобиана

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right|. \quad (3.16)$$

Например, лагранжево описание движения уравнениями

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + X_2(e^t - 1), \\ x_2 &= X_1(e^{-t} - 1) + X_2, \\ x_3 &= X_3 \end{aligned} \quad (3.17)$$

имеет взаимно обратную эйлерову формулировку

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-x_1 + x_2(e^t - 1)}{1 - e^t - e^{-t}}, \\ X_2 &= \frac{x_1(e^{-t} - 1) - x_2}{1 - e^t - e^{-t}}, \\ X_3 &= x_3. \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.5. Градиенты деформации. Градиенты перемещения

Дифференцирование (3.14) частным образом по X_i приводит к тензору $\partial x_i / \partial X_j$, который называется *материальным градиентом деформации*. В символических обозначениях $\partial x_i / \partial X_j$ представляется тензором второго ранга

$$\mathbf{F} = \mathbf{x} \nabla_{\mathbf{X}} \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_2} \hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_3} \hat{\mathbf{e}}_3, \quad (3.19)$$

где $\nabla_{\mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial X_i} \hat{\mathbf{i}}_i = \frac{\partial}{\partial X_i} \hat{\mathbf{e}}_i$ (материальные и пространственные оси предполагаются совмещенными). Матричная форма $\mathbf{F}$ служит для дальнейшего уяснения этого тензорного свойства оператора $\nabla_{\mathbf{X}}$, когда он выступает в качестве второго сомножителя в диаде. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \left[\frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial X_2}, \frac{\partial}{\partial X_3} \right] = \\ &= \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial X_1 & \partial x_1 / \partial X_2 & \partial x_1 / \partial X_3 \\ \partial x_2 / \partial X_1 & \partial x_2 / \partial X_2 & \partial x_2 / \partial X_3 \\ \partial x_3 / \partial X_1 & \partial x_3 / \partial X_2 & \partial x_3 / \partial X_3 \end{bmatrix} = [\partial x_i / \partial X_j]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Частное дифференцирование (3.15) по x_j приводит к тензору $\partial X_i / \partial x_j$, который называется *пространственным градиентом деформации*. Этот тензор представляется диадником

$$\mathbf{H} = \mathbf{X} \nabla_{\mathbf{x}} \equiv \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_1} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_2} \hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_3} \hat{\mathbf{e}}_3, \quad (3.21)$$

имеющим матричную форму

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right] = \\ &= \begin{bmatrix} \partial X_1 / \partial x_1 & \partial X_1 / \partial x_2 & \partial X_1 / \partial x_3 \\ \partial X_2 / \partial x_1 & \partial X_2 / \partial x_2 & \partial X_2 / \partial x_3 \\ \partial X_3 / \partial x_1 & \partial X_3 / \partial x_2 & \partial X_3 / \partial x_3 \end{bmatrix} = [\partial X_i / \partial x_j]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Материальный и пространственный тензоры деформации связаны правилом частного дифференцирования

$$\frac{\partial x_l}{\partial X_j} \frac{\partial X_l}{\partial x_k} = \frac{\partial X_l}{\partial x_j} \frac{\partial x_l}{\partial X_k} = \delta_{ik}. \quad (3.23)$$

Частное дифференцирование вектора перемещения u_i по координатам приводит либо к *материальному градиенту перемещения* $du_i/\partial X_j$, либо к *пространственному градиенту перемещения* $du_i/\partial x_j$. При помощи формулы (3.13), которая представляет u_i через разность координат, эти тензоры выражаются через градиенты деформации в лагранжевых (материальных) переменных

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_l}{\partial X_j} - \delta_{ij}, \quad \text{или} \quad \mathbf{J} \equiv \mathbf{uV}_X = \mathbf{F} - \mathbf{I} \quad (3.24)$$

и в эйлеровых (пространственных) переменных

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial X_l}{\partial x_j}, \quad \text{или} \quad \mathbf{K} \equiv \mathbf{uV}_x = \mathbf{I} - \mathbf{H}. \quad (3.25)$$

Как обычно, матричные формы $\mathbf{J}$ и $\mathbf{K}$ имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \left[\frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial X_2}, \frac{\partial}{\partial X_3} \right] = \\ &= \begin{bmatrix} du_1/\partial X_1 & du_1/\partial X_2 & du_1/\partial X_3 \\ du_2/\partial X_1 & du_2/\partial X_2 & du_2/\partial X_3 \\ du_3/\partial X_1 & du_3/\partial X_2 & du_3/\partial X_3 \end{bmatrix} = [du_i/\partial X_j]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right] = \\ &= \begin{bmatrix} du_1/\partial x_1 & du_1/\partial x_2 & du_1/\partial x_3 \\ du_2/\partial x_1 & du_2/\partial x_2 & du_2/\partial x_3 \\ du_3/\partial x_1 & du_3/\partial x_2 & du_3/\partial x_3 \end{bmatrix} = [du_i/\partial x_j]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.6. Тензоры деформаций. Тензоры конечных деформаций

На рис. 3.2 начальная (недеформированная) и конечная (деформированная) конфигурации отнесены к совмещенным ортогональным декартовым осям координат $OX_1X_2X_3$ и $ox_1x_2x_3$. Соседние частицы, которые находились в точках P_0 и Q_0 до деформации, перемещаются соответственно в точки P и Q деформированной конфигурации.

Квадрат бесконечно малого расстояния между P_0 и Q_0 есть

$$(dX)^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = dX_i dX_i = \delta_{ij} dX_i dX_j. \quad (3.28)$$

Согласно (3.15), дифференциал расстояния dX_i , очевидно, равен

$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j, \quad \text{или} \quad d\mathbf{X} = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.29)$$

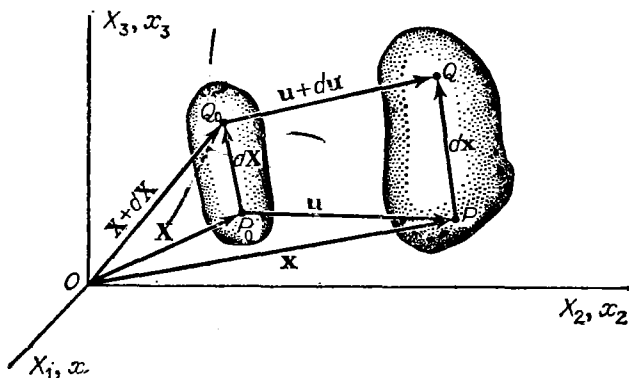


Рис. 3.2.

так что квадрат длины $(dX)^2$ в формуле (3.28) можно написать в виде

$$(dX)^2 = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} dx_i dx_j = C_{ij} dx_i dx_j, \quad \text{или} \quad (dX)^2 = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.30)$$

где тензор второго ранга

$$C_{ij} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j}, \quad \text{или} \quad \mathbf{C} = \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{H}, \quad (3.31)$$

называется *тензором деформаций Коши*.

В деформированной конфигурации квадрат бесконечно малого расстояния между P и Q равен

$$(dx)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx_i dx_i = \delta_{ij} dx_i dx_j. \quad (3.32)$$

В силу (3.14) этот дифференциал расстояния имеет вид

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j, \quad \text{или} \quad d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}, \quad (3.33)$$

так что квадрат длины $(dx)^2$ в формуле (3.32) может быть записан следующим образом:

$$(dx)^2 = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_i dX_j = G_{ij} dX_i dX_j, \quad \text{или} \quad (dx)^2 = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{G} \cdot d\mathbf{X}, \quad (3.34)$$

где тензор второго ранга

$$G_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j}, \quad \text{или} \quad \mathbf{G} = \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{F}, \quad (3.35)$$

называется *тензором деформаций Грина*.

Разность $(\vec{dx})^2 - (dX)^2$ для двух соседних частиц сплошной среды используется как *мера деформации* некоторой окрестности этих частиц между начальным и конечным состояниями. Если эта разность тождественно равна нулю для всех соседних частиц, то говорят, что имеет место *абсолютно жесткое перемещение* (перемещение сплошной среды как абсолютно твердого тела). Используя (3.34) и (3.28), эту разность можно представить в виде

$$(dx)^2 - (dX)^2 = \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) dX_i dX_j = 2L_{ij} dX_i dX_j,$$

или

$$(dx)^2 - (dX)^2 = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}_c \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{L}_G \cdot d\mathbf{X}, \quad (3.36)$$

где тензор второго ранга

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right), \quad \text{или} \quad \mathbf{L}_G = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_c \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad (3.37)$$

называется *лагранжевым тензором конечных деформаций* (или *тензором конечных деформаций Грина*).

Используя (3.32) и (3.30), ту же самую разность можно представить в виде

$$(dx)^2 - (dX)^2 = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j = 2E_{ij} dx_i dx_j,$$

или

$$(dx)^2 - (dX)^2 = d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{H}_c \cdot \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot 2\mathbf{E}_A \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.38)$$

где тензор второго ранга

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right), \quad \text{или} \quad \mathbf{E}_A = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_c \cdot \mathbf{H}), \quad (3.39)$$

называется *эйлеровым тензором конечных деформаций* (или *тензором конечных деформаций Альманси*).

Особенно полезна такая форма лагранжева и эйлерова тензоров конечных деформаций, когда эти тензоры представлены в виде функций градиентов перемещения. Тогда, если $\partial x_i / \partial X_j$ из (3.24) подставить в (3.37), то после некоторых простых алгебраических преобразований лагранжев тензор конечных деформаций примет вид

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right), \quad \text{или} \\ \mathbf{L}_G = \frac{1}{2} (\mathbf{J} + \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{J}). \quad (3.40)$$

Таким же образом, если $\partial X_i / \partial x_j$ из (3.25) подставить в (3.39), в результате получим эйлеров тензор конечных деформаций в виде

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad \text{или} \\ E_A = \frac{1}{2} (K + K_c - K_c \cdot K). \quad (3.41)$$

Матричные представления тензоров (3.40) и (3.41) можно написать, непосредственно используя формулы (3.26) и (3.27) соответственно.

3.7. Теория малых деформаций.

Тензоры бесконечно малых деформаций

Так называемая *теория малых деформаций* в механике сплошных сред имеет своим основным условием требование малости градиентов перемещения по сравнению с единицей. Основной мерой деформации служит разность $(dx)^2 - (dX)^2$, которую можно выразить через градиенты перемещения, подставляя (3.40) и (3.41) в (3.36) и (3.38) соответственно. Если градиенты перемещения малы, то тензоры конечных деформаций в (3.36) и (3.38) сводятся к тензорам бесконечно малых деформаций, а результирующие соотношения представляют малые деформации.

Если все компоненты градиента перемещения $\partial u_i / \partial X_j$ малы по сравнению с единицей, то произведения в формуле (3.40) пренебрежимо малы и их можно опустить. В результате получим *лагранжев тензор бесконечно малых деформаций*, который имеет вид

$$I_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right), \quad \text{или} \quad L = \frac{1}{2} (u \nabla_x + \nabla_x u) = \frac{1}{2} (J + J_c). \quad (3.42)$$

Аналогично если $\partial u_i / \partial x_j \ll 1$, то в (3.41) произведением можно пренебречь и мы приходим к *эйлерову тензору бесконечно малых деформаций*, который по определению равен

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \text{или} \quad E = \frac{1}{2} (u \nabla_x + \nabla_x u) = \frac{1}{2} (K + K_c). \quad (3.43)$$

Если как градиент перемещения, так и само перемещение малы, то разница между материальными и пространственными координатами частицы среды очень мала. Поэтому компоненты материального градиента $\partial u_i / \partial X_j$ и компоненты пространственного градиента $\partial u_i / \partial x_j$ почти равны и эйлеров и лагранжев тензоры бесконечно малых деформаций можно принять равными. Таким образом, если и перемещения, и их градиенты достаточно малы, то

$$I_{ij} = \epsilon_{ij}, \quad \text{или} \quad L = E. \quad (3.44)$$

3.8. Относительное перемещение.

Тензор линейного поворота. Вектор поворота

На рис. 3.3 перемещения двух соседних частиц изображены векторами $u_i^{(P_0)}$ и $u_i^{(Q_0)}$ (см. также рис. 3.2). Вектор

$$du_i = u_i^{(Q_0)} - u_i^{(P_0)}, \quad \text{или} \quad du = u^{(Q_0)} - u^{(P_0)}, \quad (3.45)$$

называется *вектором относительного перемещения* частицы, расположенной первоначально в точке Q_0 , относительно частицы, занимавшей положение P_0 . Предположим, что для поля перемещений выполнены условия непрерывности; тогда $u_i^{(Q_0)}$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки P_0 . Пренебрегая в этом разложении членами более высокого порядка, для вектора относительного перемещения получаем

$$du_i = (\partial u_i / \partial X_j)_{P_0} dX_j, \quad \text{или} \\ du = (u \nabla_X)_{P_0} \cdot dX. \quad (3.46)$$

Здесь скобки у частных производных поставлены, чтобы подчеркнуть, что производные вычислены в точке P_0 . Эти производные на самом деле являются компонентами материального градиента перемещения. Равенство (3.46) представляет *лагранжеву форму* вектора относительного перемещения.

Полезно также определить *вектор относительного перемещения*, приходящийся на *единицу длины* рассматриваемого отрезка, du_i/dX , где dX — модуль бесконечно малого вектора расстояния dX_i . Согласно этому, если v_i — единичный вектор направления dX_i , так что $dX_i = v_i dX$, то

$$\frac{du_i}{dX} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{dX_j}{dX} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} v_j, \quad \text{или} \quad \frac{du}{dX} = u \nabla_X \cdot \hat{v} = J \cdot \hat{v}. \quad (3.47)$$

Так как материальный градиент перемещения $\partial u_i / \partial X_j$ можно единственным образом разложить на симметричную и антисимметричную части, то вектор относительного перемещения du_i можно записать в виде

$$du_i = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \right] dX_j, \quad (3.48)$$

или

$$du = \left[\frac{1}{2} (u \nabla_X + \nabla_X u) + \frac{1}{2} (u \nabla_X - \nabla_X u) \right] \cdot dX.$$

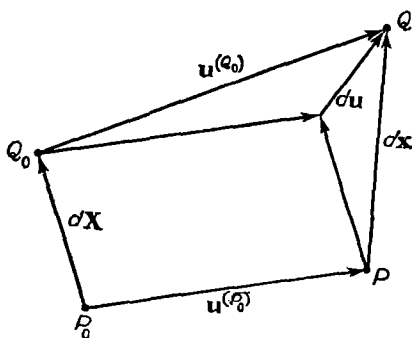


Рис. 3.3.

В первом члене в квадратных скобках формулы (3.48) можно узнать лагранжев тензор линейной деформации l_{ij} . Второй член называется *лагранжевым тензором линейного поворота* и обозначается

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \text{или} \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla_{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}). \quad (3.49)$$

Если тензор деформации l_{ij} тождественно равен нулю в окрестности точки P_0 , то относительное перемещение окрестности этой точки будет бесконечно малым поворотом абсолютно твердого тела. Этот бесконечно малый поворот можно представить *лагранжевым вектором линейного поворота*

$$\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} W_{kj}, \quad \text{или} \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{u}; \quad (3.50)$$

тогда соответствующее относительное перемещение запишется так:

$$du_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j dX_k, \quad \text{или} \quad d\mathbf{u} = \mathbf{w} \times d\mathbf{X}. \quad (3.51)$$

Рассуждения, проведенные при лагранжевом описании вектора относительного перемещения, тензора линейного поворота и вектора линейного поворота, полностью можно повторить для эйлеровых аналогов тех же величин. Так, при *эйлеровом подходе* имеем для вектора относительного перемещения

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j, \quad \text{или} \quad d\mathbf{u} = \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.52)$$

а для вектора относительного перемещения, приходящегося на единицу длины,

$$\frac{du_i}{dx} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dx} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mu_j, \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{u}}{dx} = \mathbf{u} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{K} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}. \quad (3.53)$$

Разложение эйлерова градиента перемещения $\partial u_i / \partial x_j$ дает

$$du_i = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dx_j, \quad (3.54)$$

или

$$d\mathbf{u} = \left[\frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) + \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla_{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) \right] \cdot d\mathbf{x}.$$

Первый член в квадратных скобках в (3.54) является эйлеровым тензором линейной деформации e_{ij} . Второй член есть *эйлеров тензор линейного поворота*

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla_{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}). \quad (3.55)$$

Формула (3.55) определяет *эйлеров вектор линейного поворота*

$$\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_{kj}, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{u}; \quad (3.56)$$

тогда относительное перемещение выражается следующим образом:

$$du_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j dx_k, \quad \text{или} \quad d\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x}. \quad (3.57)$$

3.9. Геометрический смысл тензоров линейных деформаций

В теории малых деформаций лагранжев тензор конечных деформаций L_{ij} в формуле (3.36) можно заменить лагранжевым тензором линейных деформаций l_{ij} , и тогда эта формула примет вид

$$(dx)^2 - (dX)^2 = (dx - dX)(dx + dX) = 2l_{ij}dX_i dX_j, \quad (3.58)$$

или

$$(dx)^2 - (dX)^2 = (dx - dX)(dx + dX) = dX \cdot 2L \cdot dX.$$

Для малых деформаций $dx \approx dX$, поэтому последнее равенство можно представить еще и так:

$$\frac{dx - dX}{dX} = l_{ij} \frac{dX_i}{dX} \frac{dX_j}{dX} = l_{ij} n_i n_j, \quad \text{или} \quad \frac{dx - dX}{dX} = \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{v}}. \quad (3.59)$$

Левая часть (3.59) характеризует изменение длины бесконечно малого элемента, приходящееся на единицу первоначальной длины, и называется коэффициентом относительного удлинения линейного элемента, первоначально имевшего направляющие косинусы dX_i/dX .

Применим формулу (3.59) к бесконечно малому линейному элементу $P_0 Q_0$, расположенному относительно местных осей в точке P_0 так, как показано на рис. 3.4, и получим коэффициент относительного удлинения этого элемента. Так как в этом случае $P_0 Q_0$ расположен вдоль оси X_2 ,

$$\begin{aligned} dX_1/dX &= dX_3/dX = 0, \\ dX_2/dX &= 1, \end{aligned}$$

и поэтому в силу (3.59)

$$\frac{dx - dX}{dX} = l_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2}. \quad (3.60)$$

Итак, оказывается, что коэффициент относительного удлинения элемента, первоначально расположенного вдоль направления X_2 , равен компоненте l_{22} . Точно так же для элементов, первоначально лежащих вдоль осей X_1 и X_3 , по формуле (3.59) коэффициенты относительных удлинений равны l_{11} и l_{33} соответственно. Таким образом, диагональные члены тензора линейных деформаций вообще представляют собой коэффициенты относительного удлинения вдоль осей координат.

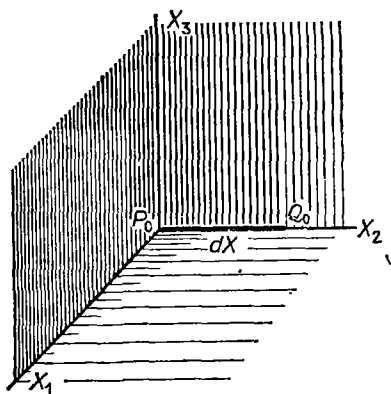


Рис. 3.4.

Физическая интерпретация недиагональных членов l_{ij} основывается на рассмотрении линейных элементов, которые первоначально лежат вдоль двух осей координат. На рис. 3.5 линейные

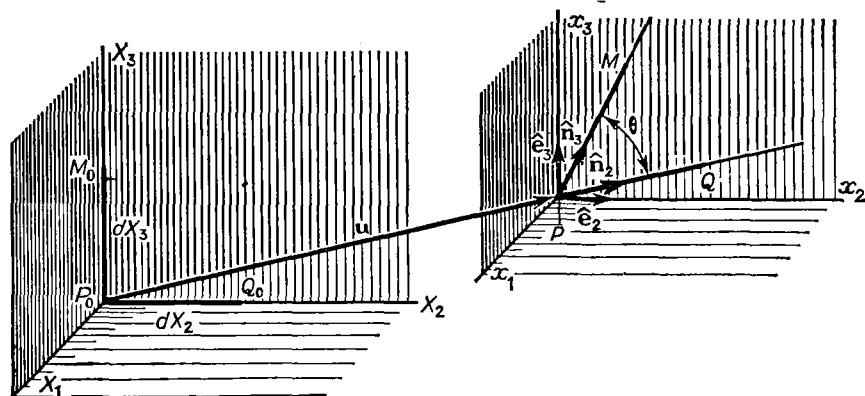


Рис. 3.5.

элементы P_0Q_0 и P_0M_0 , взятые первоначально на осях X_2 и X_3 , после деформации превращаются соответственно в линейные элементы PQ и PM в локальной системе координат с осями, параллельными исходным, и началом в точке P . Первоначально прямой угол между линейными элементами превращается в угол θ . По формуле (3.46) в предположении теории малых деформаций в первом приближении единичный вектор, идущий из точки P в точку Q , равен

$$\hat{n}_2 = \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \hat{e}_3, \quad (3.61)$$

а единичный вектор, идущий из P в M , равен

$$\hat{n}_3 = \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \hat{e}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \hat{e}_2 + \hat{e}_3. \quad (3.62)$$

Поэтому

$$\cos \theta = \hat{n}_2 \cdot \hat{n}_3 = \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2}, \quad (3.63)$$

или, пренебрегая членами более высокого порядка малости,

$$\cos \theta = \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} = 2l_{23}. \quad (3.64)$$

Кроме того, если рассмотреть изменение прямого угла между этими элементами $\gamma_{23} = \pi/2 - \theta$ и вспомнить, что в линейной теории γ_{23} мало, то можно написать

$$\gamma_{23} \approx \sin \gamma_{23} = \sin (\pi/2 - \theta) = \cos \theta = 2l_{23}. \quad (3.65)$$

Следовательно, недиагональные члены тензора линейных деформаций представляют собой половины изменения углов между двумя первоначально ортогональными линейными элементами. Такие компоненты деформации называются *деформациями сдвига*, а из-за множителя 2 в (3.65) эти компоненты тензора деформаций равны половине обычных «технических» деформаций сдвига.

Рассуждения, в основном аналогичные тем, которые только что были проведены для выяснения смысла компонент l_{ij} , могут быть проведены и для эйлерова тензора линейных деформаций e_{ij} . Основное различие заключено в выборе линейных элементов, которые при эйлеровом подходе должны быть направлены вдоль осей координат после деформации. Диагональные члены являются коэффициентами относительного удлинения, а недиагональные — деформациями сдвига. Для таких деформаций, для которых верно предположение $l_{ij} = e_{ij}$, разницы между эйлеровым и лагранжевым подходами нет.

3.10. Коэффициент длины.

Интерпретация конечных деформаций

Важной мерой деформации бесконечно малого линейного элемента является отношение dx/dX , известное под названием *коэффициента длины*. Эту величину можно определить как для точки P_0 в недеформированном состоянии, так и для точки P в деформированном состоянии. Так, в силу (3.34) квадрат коэффициента длины в точке P_0 для линейного элемента, взятого вдоль единичного вектора $\hat{m} = dX/dX$, дается формулой

$$\left(\frac{dx}{dX}\right)_{P_0}^2 = \Lambda_{(\hat{m})}^2 = G_{ij} \frac{dX_i}{dX} \frac{dX_j}{dX}, \quad \text{или} \quad \Lambda_{(\hat{m})}^2 = \hat{m} \cdot \mathbf{G} \cdot \hat{m}. \quad (3.66)$$

Аналогично в силу (3.30) обратная величина квадрата коэффициента длины для линейного элемента в точке P , взятого вдоль единичного вектора $\hat{n} = dx/dx$, дается формулой

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)_P^2 = \frac{1}{\lambda_{(\hat{n})}^2} = C_{ij} \frac{dx_i}{dx} \frac{dx_j}{dx}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{\lambda_{(\hat{n})}^2} = \hat{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \hat{n}. \quad (3.67)$$

Для элемента, первоначально расположенного вдоль местной оси X_2 (рис. 3.4), $\hat{m} \equiv \hat{e}_2$, и поэтому $dX_1/dX = dX_3/dX = 0$, $dX_2/dX = 1$, так что (3.66) для такого элемента дает

$$\Lambda_{(\hat{e}_2)}^2 = G_{22} = 1 + 2L_{22}. \quad (3.68)$$

Такие же результаты получаются для $\Lambda_{(\hat{e}_1)}^2$ и $\Lambda_{(\hat{e}_3)}^2$.

Для элемента, параллельного оси x_2 после деформации, формула (3.67) дает

$$1/\lambda_{(\hat{e}_2)}^2 = 1 - 2E_{22} \quad (3.69)$$

и аналогичные выражения для $1/\lambda_{(\hat{e}_1)}^2$ и $1/\lambda_{(\hat{e}_3)}^2$. В общем случае $\Lambda_{(\hat{e}_2)}$ не равно $\lambda_{(\hat{e}_2)}$, так как элемент, расположенный до деформации вдоль оси X_2 , не обязательно будет после деформации направлен вдоль оси x_2 .

Понятие коэффициента длины дает основу для интерпретации тензоров конечных деформаций. Так, изменение длины, приходящееся на единицу первоначальной длины (*относительное удлинение*), определяется отношением

$$\frac{dx - dX}{dX} = \frac{dx}{dX} - 1 = \Lambda_{(\hat{m})} - 1, \quad (3.70)$$

а для элемента P_0Q_0 , расположенного вдоль оси X_2 (рис. 3.4), оно составляет

$$L_{(2)} = \Lambda_{(\hat{e}_2)} - 1 = \sqrt{1 + 2L_{22}} - 1. \quad (3.71)$$

Этот результат можно также получить непосредственно из (3.36). В теории малых деформаций формула (3.71) сводится к (3.60). Относительные удлинения $L_{(1)}$ и $L_{(3)}$ выражаются подобными равенствами через L_{11} и L_{33} соответственно.

Изменение угла между двумя малыми линейными элементами, изображенными на рис. 3.5, характеризуется величиной $\gamma_{23} = \pi/2 - \theta$ и выражается через $\Lambda_{(\hat{e}_2)}$ и $\Lambda_{(\hat{e}_3)}$ следующим образом:

$$\sin \gamma_{23} = \frac{2L_{23}}{\Lambda_{(\hat{e}_2)} \Lambda_{(\hat{e}_3)}} = \frac{2L_{23}}{\sqrt{1 + 2L_{22}} \sqrt{1 + 2L_{33}}}. \quad (3.72)$$

Если деформации малы, то (3.72) сводится к (3.65).

3.11. Тензоры коэффициентов длины. Тензор поворота

[В тензорном исчислении существует так называемое *полярное разложение* произвольного неособого тензора второго ранга. Оно состоит в том, что такой тензор можно представить произведением симметричного положительного (с положительными главными компонентами) тензора второго ранга на тензор второго ранга с ортогональной матрицей¹⁾. Если такое представление применить к градиенту деформации F , то в результате получится

$$F_{ij} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = R_{ik} S_{kj} = T_{ik} R_{kj}, \quad \text{или} \quad F = R \cdot S = T \cdot R, \quad (3.73)$$

¹⁾ См. например: Седов Л. И., Введение в механику сплошной среды, гл. 1, § 4, Физматгиз, М., 1962.— *Прим. перев.*

где $\mathbf{R}$ — ортогональный тензор поворота, а $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$ — положительные симметричные тензоры, которые называются *правым* и *левым* тензорами коэффициентов длины соответственно.

Интерпретацию (3.73) легко получить, воспользовавшись соотношением (3.33) $dx_i = (\partial x_i / \partial X_j) dX_j$. Подставляя сюда скалярные произведения, взятые из формулы (3.73), получаем

$$dx_i = R_{ik} S_{kj} dX_j = T_{ik} R_{kj} dX_j, \quad \text{или} \quad dx = \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}. \quad (3.74)$$

При помощи этих выражений превращение элемента dX_i в dx_i (рис. 3.2) можно физически интерпретировать двояко. Согласно первой форме записи правой части (3.74), это преобразование состоит из растяжения ($\mathbf{S}$) и затем поворота с последующим переносом как твердого тела в точку P . При второй форме записи сначала происходит параллельный перенос как твердого тела в точку P , затем поворот и, наконец, растяжение ($\mathbf{T}$). Параллельный перенос не меняет, конечно, компонент вектора относительно декартовых осей X_i и x_i .

3.12. Свойства преобразований тензоров деформаций

Все тензоры деформаций L_{ij} , E_{ij} , l_{ij} и e_{ij} , определенные соответственно формулами (3.37), (3.39), (3.42) и (3.43), являются декартовыми тензорами второго ранга. В соответствии с этим для со-

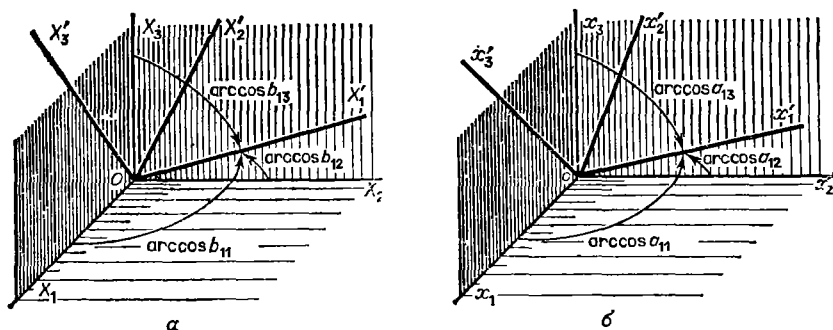


Рис. 3.6

вокупности повернутых осей X'_i , имеющих матрицу преобразования $[b_{ij}]$ относительно совокупности локальных осей без штрихов X_i в точке P_0 (рис. 3.6, а), компоненты L'_{ij} и l'_{ij} выражаются формулами

$$L'_{ij} = b_{ip} b_{jq} L_{pq}, \quad \text{или} \quad \mathbf{L}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{B}_c, \quad (3.75)$$

$$l'_{ij} = b_{ip} b_{jq} l_{pq}, \quad \text{или} \quad \mathbf{L}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{B}_c. \quad (3.76)$$

Точно так же для повернутых осей x'_i , имеющих матрицу преобразования $[a_{ij}]$ относительно осей без штрихов (рис. 3.6, б), компоненты E'_{ij} и ε'_{ij} имеют вид

$$E'_{ij} = a_{ip}a_{jq}E_{pq}, \quad \text{или} \quad \mathbf{E}'_A = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_A \cdot \mathbf{A}_c, \quad (3.77)$$

$$\text{и} \quad \varepsilon'_{ij} = a_{ip}a_{jq}\varepsilon_{pq}, \quad \text{или} \quad \mathbf{E}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}_c. \quad (3.78)$$

По аналогии с поверхностью напряжений, описанной в § 2.9, можно ввести *лагранжеву и эйлерову поверхности линейных деформаций* (квадрики деформаций) относительно локальных декартовых

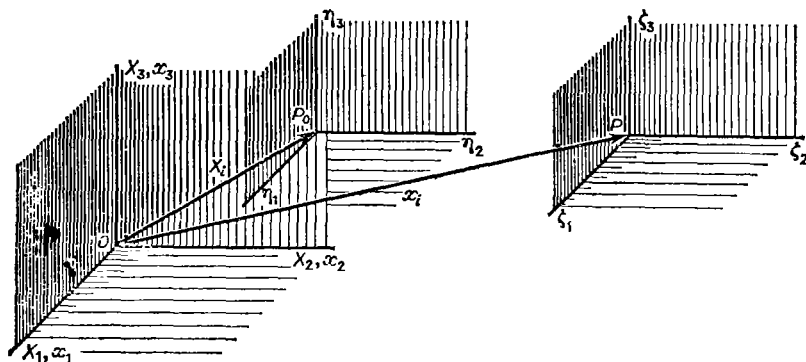


Рис. 3.7.

координат η_i и ξ_i в точках P_0 и P соответственно (рис. 3.7). Так, уравнение *лагранжевой поверхности деформаций* имеет вид

$$l_{ij}\eta_i\eta_j = \pm h^2, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\eta} = \pm h^2, \quad (3.79)$$

а уравнение *эйлеровой поверхности деформаций* — вид

$$\varepsilon_{ij}\xi_i\xi_j = \pm g^2, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\xi} = \pm g^2. \quad (3.80)$$

Существуют два следующих важных свойства лагранжевой {эйлеровой} поверхности линейных деформаций.

1. Коэффициент удлинения вдоль некоторого луча, отнесенный к начальной {конечной} длине линейного элемента, обратно пропорционален квадрату расстояния от центра поверхности деформаций P_0 { P } до точки на этой поверхности.

2. Относительное перемещение соседней частицы, расположенной в точке Q_0 { Q }, параллельно нормали к поверхности деформаций в точке ее пересечения с линией P_0Q_0 { PQ }.

Следующим шагом в изучении природы локальных деформаций в окрестности точки P_0 является определение *эллипсоида деформаций* в этой точке. Для этого возьмем в недеформированной среде материальный объем, ограниченный поверхностью в виде бесконечно малой

сферы радиуса R . Уравнение этой поверхности в материальных координатах в соответствии с формулой (3.28) будет

$$(dX)^2 = \delta_{ij} dX_i dX_j = R^2, \quad \text{или} \quad (dX)^2 = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{I} \cdot d\mathbf{X} = R^2. \quad (3.81)$$

После деформации уравнение поверхности того же самого материального объема при использовании формулы (3.30) оказывается таким:

$$(dx)^2 = C_{ij} dx_i dx_j = R^2, \quad \text{или} \quad (dx)^2 = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{x} = R^2, \quad (3.82)$$

и определяет эллипсоид, известный как *материальный эллипсоид деформаций*. Сферический в недеформированном состоянии объем сплошной среды превращается при деформации в эллипсоид с центром в точке P_0 . Подобным же образом заключаем, что бесконечно малый сферический объем в точке P деформированной среды в недеформированном начальном состоянии был эллипсоидальным. Уравнения этих поверхностей в локальных координатах получаются при помощи формулы (3.32) для сферы в виде

$$(dx)^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j = r^2, \quad \text{или} \quad (dx)^2 = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{I} \cdot d\mathbf{x} = r^2, \quad (3.83)$$

и при помощи формулы (3.34) для эллипсоида в виде

$$(dx)^2 = G_{ij} dX_i dX_j = r^2, \quad \text{или} \quad (dx)^2 = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{G} \cdot d\mathbf{X} = r^2. \quad (3.84)$$

Эллипсоид (3.84) называется *пространственным эллипсоидом деформаций*. Такие эллипсоиды, как описаны здесь, часто называются *эллипсоидами деформации Коши*.

3.13. Главные деформации. Инварианты деформации.

Кубическое расширение

Лагранжевы и эйлеровы тензоры линейных деформаций являются симметричными декартовыми тензорами второго ранга, и поэтому определение их главных направлений (главных осей) и главных значений (главных деформаций) ведется стандартным методом, изложенным в § 1.19. С физической точки зрения главное направление тензора деформаций — это такое, для которого ориентация элемента в данной точке не меняется при чистой деформации. Главное значение деформации есть просто приходящееся на единицу длины относительное перемещение (коэффициент относительного удлинения) вдоль главного направления.

— Для лагранжева тензора деформаций l_{ij} вектор относительного перемещения на единицу длины дан формулой (3.47), которую можно представить еще и так:

$$\frac{du_i}{dX} = (l_{ij} + W_{ij}) v_j, \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{u}}{dX} = (\mathbf{L} + \mathbf{W}) \cdot \hat{\mathbf{v}}. \quad (3.85)$$

Обозначим через $l_i^{(\hat{n})}$ величины du_i/dX для линейного элемента в направлении единичного вектора n_i . Для чистой деформации ($W_{ij} \equiv 0$) из (3.85) следует

$$l_i^{(\hat{n})} = l_{ij}n_j, \quad \text{или} \quad \mathbf{l}^{(\hat{n})} = \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (3.86)$$

Если направление n_i главное, а l — соответствующее главное значение тензора l_{ij} , то

$$l_i^{(\hat{n})} = l n_i = l \delta_{ij} n_j, \quad \text{или} \quad \mathbf{l}^{(\hat{n})} = l \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (3.87)$$

Приравнивая правые части (3.86) и (3.87), приходим к соотношению

$$(l_{ij} - \delta_{ij}l) n_j = 0, \quad \text{или} \quad (\mathbf{L} - \mathbf{I}l) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad (3.88)$$

которое вместе с условием $n_i n_i = 1$ на единичные векторы n_i дает необходимые уравнения для определения главного значения деформации l и направляющих косинусов n_i соответствующего главного направления. Нетривиальные решения системы (3.88) существуют тогда и только тогда, когда определитель из коэффициентов обращается в нуль, т. е.

$$|l_{ij} - \delta_{ij}l| = 0, \quad \text{или} \quad |\mathbf{L} - \mathbf{I}l| = 0, \quad (3.89)$$

что после раскрытия определителя приводит к характеристическому уравнению для тензора l_{ij} . Это кубическое уравнение

$$l^3 - \mathbf{I}_L l^2 + \mathbf{II}_L l - \mathbf{III}_L = 0, \quad (3.90)$$

где

$$\mathbf{I}_L = l_{ii} = \text{tr } \mathbf{L}, \quad \mathbf{II}_L = \frac{1}{2}(l_{ii}l_{jj} - l_{ij}l_{ji}), \quad \mathbf{III}_L = |l_{ij}| = \det \mathbf{L} \quad (3.91)$$

— соответственно первый, второй и третий *лагранжесвы инварианты деформации*. Корни уравнения (3.90) являются главными значениями деформации и обозначаются $l_{(1)}$, $l_{(2)}$ и $l_{(3)}$.

Первый инвариант лагранжева тензора деформаций является суммой главных деформаций

$$\mathbf{I}_L = l_{ii} = l_{(1)} + l_{(2)} + l_{(3)} \quad (3.92)$$

и имеет важный физический смысл. Чтобы обнаружить это, рассмотрим элементарный прямоугольный параллелепипед, ребра которого параллельны главным направлениям деформации (рис. 3.8). Изменение объема на единицу первоначального объема этого элемента называется *коэффициентом кубического расширения* и по определению равно

$$D_0 = \frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{dX_1(1 + l_{(1)}) dX_2(1 + l_{(2)}) dX_3(1 + l_{(3)}) - dX_1 dX_2 dX_3}{dX_1 dX_2 dX_3}. \quad (3.93)$$

В теории малых деформаций это соотношение в первом приближении дает интересующую нас сумму

$$D_0 = l_{(1)} + l_{(2)} + l_{(3)} = \mathbf{I}_L. \quad (3.94)$$

Что касается эйлерова тензора деформаций e_{ij} и соответствующего вектора относительного перемещения $e_i^{(\hat{n})}$, главные направления и главные деформации $e_{(1)}$, $e_{(2)}$, $e_{(3)}$ определяются точно

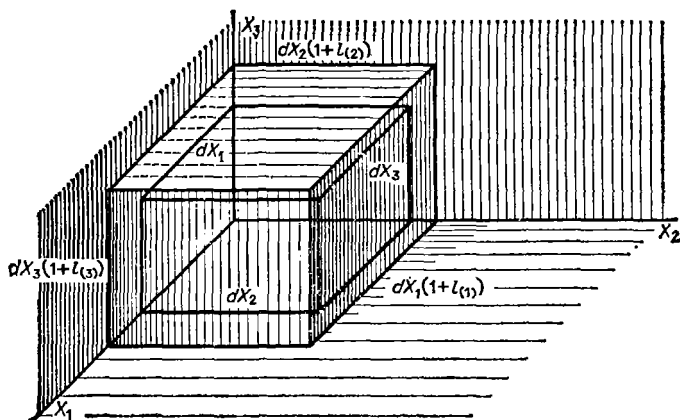


Рис. 3.8.

так же, как их лагранжевы аналоги. Эйлеровы инварианты деформации выражаются через главные деформации следующим образом:

$$\begin{aligned} I_E &= e_{(1)} + e_{(2)} + e_{(3)}, \\ II_E &= e_{(1)}e_{(2)} + e_{(2)}e_{(3)} + e_{(3)}e_{(1)}, \\ III_E &= e_{(1)}e_{(2)}e_{(3)}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Для кубического расширения в эйлеровом описании при малых деформациях получается

$$\Delta V/V = D = e_{(1)} + e_{(2)} + e_{(3)}. \quad (3.96)$$

3.14. Шаровой тензор и девиатор деформаций

Лагранжев и эйлеров тензоры *линейных* деформаций можно разложить на *шаровые* тензоры и *девиаторы* тем же самым способом, как в гл. 2 было выполнено разложение тензора напряжений. Если компоненты лагранжева и эйлерова девиаторов обозначить через d_{ij} и e_{ij} соответственно, то нужные выражения имеют вид

$$l_{ij} = d_{ij} + \delta_{ij}l_{kk}/3, \quad \text{или} \quad \mathbf{L} = \mathbf{L}_D + \mathbf{I}(\text{tr } \mathbf{L})/3, \quad (3.97)$$

и

$$e_{ij} = e_{ij} + \delta_{ij}e_{kk}/3, \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_D + \mathbf{I}(\text{tr } \mathbf{E})/3. \quad (3.98)$$

Первые инварианты d_{ii} и e_{ii} девиаторов деформаций тождественно равны нулю. Поэтому девиаторы описывают деформацию сдвига, для которой кубическое расширение равно нулю,

3.15. Плоская деформация. Круги Мора для деформации

Когда одна и только одна из главных деформаций в точке сплошной среды равна нулю, говорят, что в этой точке существует состояние *плоской деформации*. Если в эйлеровом описании (лагранжево описание проводится точно по той же схеме) за ось x_3 принять направление нулевой главной деформации, то плоская деформация происходит в плоскостях, параллельных плоскости x_1x_2 , и характеризуется тензором линейных деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.99)$$

Если x_1 и x_2 — тоже главные направления, то тензор деформаций принимает вид

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.100)$$

Во многих книгах по сопротивлению материалов и теории упругости *плоской деформацией* называют состояние с плоским полем коэффициентов длины (тензоров Коши или Грина), когда это поле одно и то же во всех плоскостях, перпендикулярных к направлению нулевого главного удлинения. Для плоской деформации, перпендикулярной к оси x_3 , вектор перемещения является функцией только x_1 и x_2 . Соответствующие компоненты перемещения для этого случая обозначим так:

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = C; \quad (3.101)$$

здесь C — постоянная, которую обычно считают равной нулю. Подстановка этих значений в формулу (3.43), определяющую ε_{ij} , дает тензор плоских деформаций того же вида, что (3.99).

Графически состояние плоской деформации в точке описывается *кругами Мора для деформации* точно таким же способом, что приведен в гл. 2 для кругов Мора для напряжения. При этом тензор деформаций часто представляют в виде

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 1/2\gamma_{12} & 1/2\gamma_{13} \\ 1/2\gamma_{12} & \varepsilon_{22} & 1/2\gamma_{23} \\ 1/2\gamma_{13} & 1/2\gamma_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.102)$$

Здесь γ_{ij} (при $i \neq j$) — компоненты так называемых «технических» деформаций сдвига, которые равны удвоенным тензорным компонентам деформаций сдвига.

При экспериментальном исследовании, включающем измерение деформаций в тех точках поверхности тела, где деформиро-

ванное состояние можно считать локально плоским, три нормальных удлинения измеряются посредством «розетки деформаций» (т. е. набора радиально расположенных датчиков, измеряющих деформации в точке по разным направлениям), а диаграмма кругов Мора строится по этим удлинениям. По аналогии с кругами Мора для плоских напряжений типичная диаграмма для плоской деформации приведена на рис. 3.9. Главные удлинения помечены теми же буквами на диаграмме, а величинам максимальных деформаций сдвига соответствуют точки D и E .

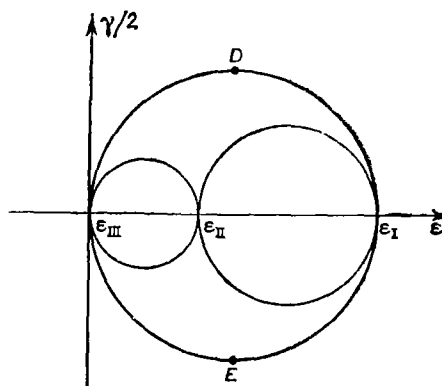


Рис. 3.9.

3.16. Уравнения совместности для линейных деформаций

Если компоненты деформации ϵ_{ij} заданы в явном виде как функции координат, то шесть независимых уравнений (3.43)

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

можно рассматривать как систему шести уравнений в частных производных для определения трех компонент перемещения u_i . Система переопределена и в общем случае не имеет решения при произвольном выборе компонент деформации ϵ_{ij} . Значит, чтобы существовали однозначные и непрерывные компоненты перемещения u_i , на компоненты деформаций должны быть наложены некоторые условия. Необходимые и достаточные условия для существования такого поля перемещений выражаются уравнениями

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 \epsilon_{km}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \epsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 \epsilon_{jm}}{\partial x_i \partial x_k} = 0. \quad (3.103)$$

Всего в (3.103) содержится восемьдесят одно уравнение, но только шесть из них различны. Эти шесть уравнений, записанные в развернутой и символической форме, выглядят так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_2^2} &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_3^2} &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1}, \end{aligned} \right\} \quad (3.104)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1}, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}, \end{aligned} \right\}$$

или

$$\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{E} \times \nabla_{\mathbf{x}} = 0.$$

Уравнения совместности можно написать и для компонент лагранжева тензора линейных деформаций вследствие очевидной аналогии с эйлеровой интерпретацией, приведенной выше. Для плоской деформации, происходящей в плоскостях, параллельных x_1x_2 , шесть уравнений (3.104) сводятся к одному:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \text{или} \quad \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{E} \times \nabla_{\mathbf{x}} = 0, \quad (3.105)$$

где $\mathbf{E}$ определяется формулой (3.99).

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Перемещение и деформация (§ 3.1—3.5)

3.1. Относительно совмещенных материальных осей X_i и пространственных осей x_i задано поле перемещений сплошной среды $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + AX_3$, $x_3 = X_3 + AX_2$, где A — константа. Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме (в лагранжевых и эйлеровых переменных).

Компоненты перемещения в материальной форме находим непосредственно из (3.13): $u_1 = x_1 - X_1 = 0$, $u_2 = x_2 - X_2 = AX_3$, $u_3 = x_3 - X_3 = AX_2$. Разрешая относительно X_i , получаем $X_1 = x_1$, $X_2 = (x_2 - Ax_3)/(1 - A^2)$, $X_3 = (x_3 - Ax_2)/(1 - A^2)$, а пространственные компоненты вектора $\mathbf{u}$ будут равны $u_1 = 0$, $u_2 = A(x_3 - Ax_2)/(1 - A^2)$, $u_3 = A(x_2 - Ax_3)/(1 - A^2)$.

Из полученных результатов видно, что первоначально прямая линия в материальной частице, представленная уравнениями $X_1 = 0$, $X_2 + X_3 = 1/(1 + A)$, займет после деформации положение $x_1 = 0$, $x_2 + x_3 = 1$. А материальная линия $X_1 = 0$, $X_2 = X_3$ станет после деформации $x_1 = 0$, $x_2 = x_3$. (Истолковать механический смысл этих результатов.)

3.2. Для поля перемещений задачи 3.1 определить смещенное положение материальных частиц, которые первоначально составляли: а) круг с границей $X_2^2 + X_3^2 = 1/(1 - A^2)$ в плоскости $X_1 = 0$; б) бесконечно малый куб, ребра которого лежат на осях координат и имеют длину $dX_i = dX$. Нарисовать смещенные конфигурации для «а» и «б», если $A = 1/2$.

а) Замена координат $X_2 = (x_2 - Ax_3)/(1 - A^2)$ и $X_3 = (x_3 - Ax_2)/(1 - A^2)$ переводит круг в область, ограниченную эллипсом $(1 + A^2)x_2^2 - 4Ax_2x_3 + (1 + A^2)x_3^2 = (1 - A^2)$. При $A = 1/2$ уравнение эллипса $5x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2 = 3$; в главных осях x_i^* (образующих углы 45° с x_i , $i = 2, 3$) оно принимает вид $x_2^{*2} + 9x_3^{*2} = 3$. На рис. 3.10 показано геометрическое место смещенных точек.

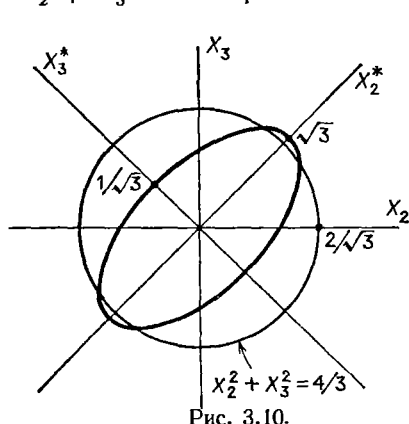


Рис. 3.10.

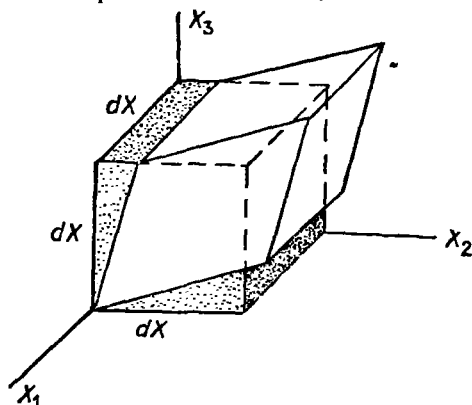


Рис. 3.11.

б) Из задачи 3.1 перемещения ребер кубика находятся без труда. На ребре $X_1 = X_1$, $X_2 = X_3 = 0$ компоненты перемещения $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. На ребре $X_1 = 0 = X_2$, $X_3 = X_3$ мы имеем $u_1 = u_3 = 0$, $u_2 = AX_3$, и частицы перемещаются в направлении X_2 пропорционально их расстоянию от начала координат. Для ребра $X_1 = X_3 = 0$, $X_2 = X_2$, $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = AX_2$. Начальное и смещенное положения куба показаны на рис. 3.11.

3.3. Относительно совмещенных материальных и пространственных осей задан вектор перемещения $\mathbf{u} = 4X_1^2\hat{\mathbf{e}}_1 + X_2X_3^2\hat{\mathbf{e}}_2 + X_1X_3^2\hat{\mathbf{e}}_3$. Определить смещенное положение частицы, первоначально находившейся в точке $(1, 0, 2)$.

Радиус-вектор начального положения частицы равен $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{e}}_1 + 2\hat{\mathbf{e}}_3$. Ее смещение составляет $\mathbf{u} = 4\hat{\mathbf{e}}_1 + 4\hat{\mathbf{e}}_3$, и, поскольку $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$, радиус-вектор конечного положения будет $\mathbf{x} = 5\hat{\mathbf{e}}_1 + 6\hat{\mathbf{e}}_3$.

3.4. В ортогональной декартовой материальной системе координат X_i задано поле перемещений $U_1 = -AX_2X_3$, $U_2 = AX_1X_3$, $U_3 = 0$, где A — константа. Определить компоненты перемещения в цилиндрической пространственной системе координат x_i , если обе системы имеют общее начало.

В силу геометрии задачи (рис. 3.12) тензор преобразования осей $\alpha_{pK} = \hat{\mathbf{e}}_p \cdot \hat{\mathbf{I}}_K$ имеет вид

$$\alpha_{pK} = \begin{pmatrix} \cos x_2 & \sin x_2 & 0 \\ -\sin x_2 & \cos x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

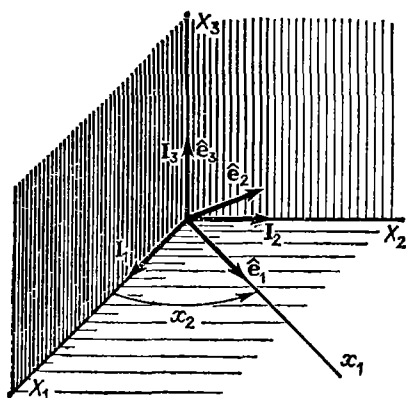


Рис. 3.12.

а из обращенной записи формулы (3.9) $u_p = \alpha_{pK} U_K$. Так как декартовы и цилиндрические координаты связаны соотношениями $X = x_1 \cos x_2$, $X_2 = x_1 \sin x_2$, $X_3 = x_3$, формула (3.9) дает

$$\begin{aligned} u_1 &= (-\cos x_2) A X_2 X_3 + (\sin x_2) \times \\ &\quad \times A X_1 X_3 = (-\cos x_2) A x_3 x_1 \times \\ &\quad \times \sin x_2 + (\sin x_2) A x_3 x_1 \cos x_2 = 0, \\ u_2 &= (\sin x_2) A X_2 X_3 + (\cos x_2) \times \\ &\quad \times A X_1 X_3 = (\sin^2 x_2) A x_1 x_3 + \\ &\quad + (\cos^2 x_2) A x_1 x_3 = A x_1 x_3, \\ u_3 &= 0. \end{aligned}$$

Это смещения в круглом стержне при кручении.

3.5. Деформация задана в лагранжевой форме: $x_1 = X_1 + X_3(e^2 - 1)$, $x_2 = X_2 + X_3(e^2 - e^{-2})$, $x_3 = e^2 X_3$, где e — константа. Доказать, что якобиан J отличен от нуля, и найти эйлеровы уравнения, описывающие эту деформацию.

Из (3.16)

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^2 - 1 \\ 0 & 1 & e^2 - e^{-2} \\ 0 & 0 & e^2 \end{vmatrix} = e^2 \neq 0.$$

Обращенные уравнения будут таковы:

$$X_1 = x_1 + x_3(e^{-2} - 1), \quad X_2 = x_2 + x_3(e^{-4} - 1), \quad X_3 = e^{-2} x_3.$$

3.6. Дано поле перемещений $\mathbf{u} = X_1 X_3^2 \hat{\mathbf{e}}_1 + X_1^2 X_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + X_2^2 X_3 \hat{\mathbf{e}}_3$. Определить независимо материальный градиент деформации $\mathbf{F}$ и материальный градиент перемещения $\mathbf{J}$ и удостовериться в правильности формулы (3.24) $\mathbf{J} = \mathbf{F} - \mathbf{I}$.

По данному вектору перемещения $\mathbf{u}$ находим $\mathbf{J}$:

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \begin{pmatrix} X_3^2 & 0 & 2X_1 X_3 \\ 2X_1 X_2 & X_1^2 & 0 \\ 0 & 2X_2 X_3 & X_2^2 \end{pmatrix}.$$

Так как $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{X}$, поле перемещений можно также описывать соотношениями $x_1 = X_1(1 + X_3^2)$, $x_2 = X_2(1 + X_1^2)$, $x_3 = X_3(1 + X_2^2)$, из которых легко находим $\mathbf{F}$:

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \begin{pmatrix} 1 + X_3^2 & 0 & 2X_1 X_3 \\ 2X_1 X_2 & 1 + X_1^2 & 0 \\ 0 & 2X_2 X_3 & 1 + X_2^2 \end{pmatrix}.$$

Непосредственной подстановкой полученных тензоров $\mathbf{F}$ и $\mathbf{J}$ в (3.24) убеждаемся, что равенство выполнено.

3.7. Некоторый объем сплошной среды совершает перемещение $\mathbf{u} = (3X_2 - 4X_3)\hat{\mathbf{e}}_1 + (2X_1 - X_3)\hat{\mathbf{e}}_2 + (4X_2 - X_1)\hat{\mathbf{e}}_3$. Определить смещенное положение вектора, соединяющего частицы $A(1, 0, 3)$ и $B(3, 6, 6)$, считая, что материальные и пространственные оси совпадают.

Согласно (3.13), пространственные координаты при таком перемещении равны $x_1 = X_1 + 3X_2 - 4X_3$, $x_2 = 2X_1 + X_2 - X_3$, $x_3 = -X_1 + 4X_2 + X_3$. Таким образом, в смещенном положении частица A имеет координаты $x_1 = -11$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, а частица B — координаты $x_1 = -3$, $x_2 = 6$, $x_3 = 27$. В смещенном положении вектор, соединяющий точки A и B , имеет вид $\mathbf{V} = 8\hat{\mathbf{e}}_1 + 7\hat{\mathbf{e}}_2 + 25\hat{\mathbf{e}}_3$.

3.8. Для поля перемещений задачи 3.7 определить смещенное положение радиуса-вектора частицы $C(2, 6, 3)$, который параллелен вектору, соединяющему частицы A и B . Показать, что эти два вектора остаются параллельными и после деформации.

Теми же операциями, что и в задаче 3.7, получим радиус-вектор точки C после деформации: $\mathbf{U} = 8\hat{\mathbf{e}}_1 + 7\hat{\mathbf{e}}_2 + 25\hat{\mathbf{e}}_3$. Ясно, что он параллелен вектору $\mathbf{V}$. Это пример так называемой *однородной деформации*.

3.9. В общей формулировке деформация называется однородной, если она задана полем перемещений вида $u_i = A_{ij}X_j$, где A_{ij} — константы или, быть может, функции времени. Доказать, что при такой деформации: а) плоские сечения остаются плоскими, б) прямые линии остаются прямыми.

а) Из (3.13)

$$x_i = X_i + u_i = X_i + A_{ij}X_j = (\delta_{ij} + A_{ij})X_j.$$

Согласно (3.16), обращенные соотношения $X_i = (\delta_{ij} + B_{ij})x_j$ существуют, если детерминант $|\delta_{ij} + A_{ij}|$ не обращается в нуль. Если предположить это, то уравнение материальной плоскости $\beta_i X_i + \alpha = 0$ перейдет в $\beta_i (\delta_{ij} + B_{ij})x_j + \alpha = 0$, что можно записать в виде стандартного уравнения плоскости $\lambda_j x_j + \alpha = 0$, где коэффициенты $\lambda_j = \beta_i (\delta_{ij} + B_{ij})$.

б) Прямую линию можно рассматривать как пересечение двух плоскостей. В деформированном состоянии, как доказано, плоскости остаются плоскостями и, следовательно, линия пересечения двух плоскостей остается прямой.

3.10. *Бесконечно малой* однородной деформацией называется такая деформация, для которой коэффициенты A_{ij} в формуле $u_i = A_{ij}X_j$ настолько малы, что их произведениями можно пренебречь по сравнению с самими коэффициентами. Доказать, что полную деформацию, полученную в результате двух последовательных бесконечно малых однородных деформаций, можно рассматривать как сумму двух отдельных деформаций и порядок, в котором происходят перемещения, не влияет на конечную конфигурацию.

Пусть $x_i = (\delta_{ij} + A_{ij})X_j$ и $x'_i = (\delta_{ij} + B_{ij})x_j$ определяют последовательные бесконечно малые перемещения. Тогда $x'_i = (\delta_{ij} + B_{ij})(\delta_{jk} + A_{jk})X_k =$

$= (\delta_{ik} + B_{ik} + A_{ik} + B_{ij}A_{jk}) X_k$. Пренебрегая произведениями $B_{ij}A_{jk}$ как малыми высшего порядка, получаем $x'_i = (\delta_{ik} + B_{ik} + A_{ik}) X_k = (\delta_{ik} + C_{ik}) X_k$, что представляет бесконечно малую однородную деформацию

$$u''_i = x'_i - X_i = C_{ik} X_k = (B_{ik} + A_{ik}) X_k = (A_{ik} + B_{ik}) X_k = u_i + u'_i.$$

Тензоры деформаций (§ 3.6—3.9)

3.11. Некоторый объем сплошной среды испытывает деформацию $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + AX_3$, $x_3 = X_3 + AX_2$, где A — константа. Вычислить тензор деформаций Грина G и использовать его для определения лагранжева тензора конечных деформаций L_G .

Из (3.35) имеем $G = F_c \cdot F$, причем F в матричной форме определяется по формуле (3.20):

$$\left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A \\ 0 & A & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{так что} \quad [G_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1 + A^2 \end{bmatrix}.$$

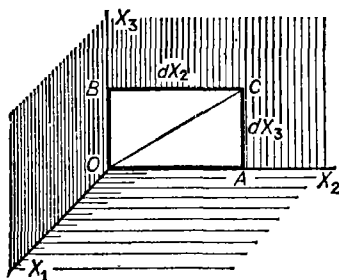


Рис. 3.13.

Таким образом, из (3.37)

$$L_G = \frac{1}{2} (G - I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 2A \\ 0 & 2A & A^2 \end{pmatrix}.$$

3.12. В случае поля перемещений задачи 3.11 вычислить квадрат длины $(dx)^2$ сторон OA и OB и диагонали OC малого прямоугольника, изображенного на рис. 3.13, после деформации.

Воспользовавшись тензором G , определенным в задаче 3.11, по формуле (3.34) найдем квадрат длины диагонали в матричной форме:

$$\begin{aligned} (dx)^2 &= [0, dX_2, dX_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1 + A^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix} = \\ &= (1 + A^2) (dX_2)^2 + 4AdX_2 dX_3 + (1 + A^2) (dX_3)^2. \end{aligned}$$

Подобным же образом для OA имеем $(dx)^2 = (1 + A^2) (dX_2)^2$ и для OB имеем $(dx)^2 = (1 + A^2) (dX_3)^2$.

3.13. Вычислить изменение квадрата длины линейного элемента задачи 3.12 и сверить результат с полученным по формуле (3.36), воспользовавшись тензором деформаций L_G , найденным в задаче 3.11.

Непосредственно по результатам задачи 3.12 найдем изменения

$$\begin{aligned} \text{а) для } OC: \quad (dx)^2 - (dX)^2 &= (1 + A^2) (dX_2^2 + dX_3^2) + 4AdX_2 dX_3 - \\ &- (dX_2^2 + dX_3^2) = A^2 (dX_2^2 + dX_3^2) + 4AdX_2 dX_3; \end{aligned}$$

б) для OB : $(dx)^2 - (dX)^2 = (1 + A^2) dX_3^2 - dX_3^2 = A^2 dX_3^2$;

в) для OA : $(dx)^2 - (dX)^2 = (1 + A^2) dX_2^2 - dX_2^2 = A^2 dX_2^2$.

Из уравнения (3.36) для OC имеем

$$\begin{aligned} (dx)^2 - (dX)^2 &= [0, dX_2, dX_3] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 2A \\ 0 & 2A & A^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix} = \\ &= A^2 (dX_2^2 + dX_3^2) + 4AdX_2 dX_3. \end{aligned}$$

Изменения OA и OB можно установить тем же путем.

3.14. Для поля перемещений задачи 3.11 вычислить материальный градиент смещения $\mathbf{J}$ и использовать этот тензор для определения лагранжева тензора конечных деформаций $\mathbf{L}_G$. Сравнить с результатами задачи 3.11.

В силу условий задачи 3.11 компоненты вектора перемещения равны $u_1 = 0$, $u_2 = AX_3$, $u_3 = AX_2$, так что

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 0 \\ 0 & 0 & A^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле (3.40)

$$2\mathbf{L}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 0 \\ 0 & 0 & A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 2A \\ 0 & 2A & A^2 \end{pmatrix},$$

что совпадает с результатами задачи 3.11.

3.15. Дано поле перемещений $x_1 = X_1 + AX_2$, $x_2 = X_2 + AX_3$, $x_3 = X_3 + AX_1$, где A — константа. Вычислить лагранжев тензор линейной деформации $\mathbf{L}$ и эйлеров тензор линейной деформации $\mathbf{E}$. Сравнить $\mathbf{L}$ и $\mathbf{E}$ в случае, когда константа A очень мала.

Из (3.42)

$$2\mathbf{L} = (\mathbf{J} + \mathbf{J}_c) = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A & A \\ A & 0 & A \\ A & A & 0 \end{pmatrix}.$$

Путем обращения получим формулы для перемещений

$$\begin{aligned} u_1 &= A(A^2 x_1 + x_2 - Ax_3)/(1 + A^3), \quad u_2 = A(-Ax_1 + A^2 x_2 + x_3)/(1 + A^3), \\ u_3 &= A(x_1 - Ax_2 + A^2 x_3)/(1 + A^3), \end{aligned}$$

откуда по формуле (3.43) найдем

$$2E = (K + K_c) = \frac{A}{1 + A^3} \begin{pmatrix} A^2 & 1 & -A \\ -A & A^2 & 1 \\ 1 & -A & A^2 \end{pmatrix} + \frac{A}{1 + A^3} \begin{pmatrix} A^2 & -A & 1 \\ 1 & A^2 & -A \\ -A & 1 & A^2 \end{pmatrix} = \\ = \frac{A}{1 + A^3} \begin{pmatrix} 2A^2 & 1 - A & 1 - A \\ 1 - A & 2A^2 & 1 - A \\ 1 - A & 1 - A & 2A^2 \end{pmatrix}.$$

Если константа A очень мала, то членами с A^2 и более высокими степенями A можно пренебречь. В результате E сводится к L .

3.16. Поле перемещений задано формулой $u = X_1^2 X_2 \hat{e}_1 + (X_2 - X_3^2) \hat{e}_2 + X_2^2 X_3 \hat{e}_3$. Определить вектор относительного перемещения du в направлении оси $-X_2$ в точке $P(1, 2, -1)$. Определить относительные перемещения $u_{Q_i} - u_P$ для точек $Q_1(1, 1, -1)$, $Q_2(1, 3/2, -1)$, $Q_3(1, 7/4, -1)$ и $Q_4(1, 15/8, -1)$ и сравнить их направления с направлением du .

Для данного u градиент перемещения J в матричной форме выглядит так:

$$[du_i/\partial X_j] = \begin{bmatrix} 2X_1 X_2 & X_1^2 & 0 \\ 0 & 1 & -2X_3 \\ 0 & 2X_2 X_3 & X_2^2 \end{bmatrix},$$

так что по формуле (3.46) относительное перемещение в точке P в направлении $-X_2$ равно

$$[du_i] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Далее непосредственным вычислением из выражения для u найдем $u_P = 2\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - 4\hat{e}_3$ и $u_{Q_1} = \hat{e}_1 - \hat{e}_3$. Тогда $u_{Q_1} - u_P = -\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 3\hat{e}_3$. Подобным же образом $u_{Q_2} - u_P = (-\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 3.5\hat{e}_3)/2$, $u_{Q_3} - u_P = (-\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 3.75\hat{e}_3)/4$, $u_{Q_4} - u_P = (-\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 3.875\hat{e}_3)/8$. Ясно, что, когда Q_i приближается к P , направление относительного смещения двух частиц стремится к предельному направлению du .

3.17. Для поля перемещений задачи 3.16 определить относительное перемещение единичного вектора, идущего из точки $P(1, 2, -1)$ в точку $Q(4, 2, 3)$.

Единичный вектор в направлении из P в Q есть $\hat{v} = 3\hat{e}_1/5 + 4\hat{e}_3/5$, так что по формуле (3.47), используя матрицу J , вычисленную в задаче 3.16, получаем

$$[du_i/dX] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/5 \\ 8/5 \\ 16/5 \end{bmatrix}.$$

3.18. Для поля перемещений $\mathbf{u} = (x_1 - x_3)^2 \hat{\mathbf{e}}_1 + (x_2 + x_3)^2 \hat{\mathbf{e}}_2 - x_1 x_2 \hat{\mathbf{e}}_3$ при ограничениях, принятых в теории малых деформаций ($\mathbf{L} = \mathbf{E}$), определить тензор линейной деформации, тензор линейного поворота и вектор поворота в точке $P(0, 2, -1)$.

В данном случае градиент перемещения имеет матричную форму

$$\{\partial u_i / \partial x_j\} = \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_3) & 0 & -2(x_1 - x_3) \\ 0 & 2(x_2 + x_3) & 2(x_2 + x_3) \\ -x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

и в точке P принимает вид

$$\{\partial u_i / \partial x_j\}_P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Разложим эту матрицу на симметричную и антисимметричную составляющие:

$$\{\mathbf{e}_{ij}\} + \{\omega_{ij}\} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда, как показывает формула (3.56), вектор ω_i имеет компоненты $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$.

3.19. Для поля перемещений задачи 3.18 найти изменение длины, приходящееся на единицу начальной длины (относительное удлинение), в направлении $\hat{\mathbf{v}} = (8\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2 + 4\hat{\mathbf{e}}_3)/9$ в точке $P(0, 2, -1)$.

Пользуясь формулой (3.59) и тензором деформаций в точке P , вычисленным в задаче 3.18, получаем относительное удлинение в точке P в направлении $\hat{\mathbf{v}}$ как произведение матриц

$$\mathbf{e}_P(\hat{\mathbf{v}}) = [8/9, -1/9, 4/9] \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8/9 \\ -1/9 \\ 4/9 \end{bmatrix} = -6/81.$$

3.20. Доказать, что в теории малых деформаций изменение прямого угла между двумя ортогональными единичными векторами $\hat{\mathbf{v}}$ и $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ недеформированной конфигурации дается формулой

$$\gamma_{\mathbf{v}\boldsymbol{\mu}} = \hat{\mathbf{v}} \cdot 2\mathbf{L} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}.$$

При предположении малости градиентов перемещения единичные векторы направлений, полученных при деформации из $\hat{\mathbf{v}}$ и $\hat{\boldsymbol{\mu}}$, в силу (3.47) имеют соответственно вид $\hat{\mathbf{v}} + \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{v}}$ и $\hat{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{J} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}$. (Читателю предлагается проверить этим методом правильность соотношений (3.61) и (3.62).) Запишем $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{v}}$ в эквивалентной форме $\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{J}_c$ и перемножим скалярно полученные при деформации векторы. Тогда

(как и в (3.63)) получим $\cos \theta = \sin(\pi/2 - \theta) = \sin \gamma_{\nu\mu} = \gamma_{\nu\mu}$ или $\gamma_{\nu\mu} = [\hat{\nu} + \hat{\nu} \cdot \mathbf{J}_c] \cdot [\hat{\mu} + \mathbf{J} \cdot \hat{\mu}] = \hat{\nu} \cdot \hat{\mu} + \hat{\nu} \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{J}_c) \cdot \hat{\mu} + \hat{\nu} \cdot \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{J} \cdot \hat{\mu}$. Здесь в случае малых градиентов перемещения $\mathbf{J}_c \cdot \mathbf{J}$ имеет более высокий порядок малости, чем другие члены. Кроме того, $\hat{\nu} \perp \hat{\mu}$ и, следовательно, $\hat{\nu} \cdot \hat{\mu} = 0$. Таким образом, используя (3.42), окончательно получаем $\gamma_{\nu\mu} = \hat{\nu} \cdot 2\mathbf{L} \cdot \hat{\mu}$.

3.21. Используя результаты задачи 3.20, найти изменение прямого угла между векторами $\hat{\nu} = (8\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 4\hat{e}_3)/9$ и $\hat{\mu} = (4\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2 - 7\hat{e}_3)/9$ в точке $P(0, 2, -1)$ для поля перемещений задачи 3.18.

Так как в теории малых деформаций $\mathbf{L} = \mathbf{E}$, компоненты тензоров деформаций $\epsilon_{ij} = l_{ij}$ и, следовательно, в точке P

$$\gamma_{\nu\mu} = [8/9, -1/9, 4/9] \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/9 \\ 4/9 \\ -7/9 \end{bmatrix} = 318/81.$$

Коэффициенты длины и поворот (§ 3.10—3.11)

3.22. Для деформации сдвига $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + AX_3$, $x_3 = X_3 + AX_2$ задачи 3.11 показать, что коэффициент длины $\Lambda_{(\hat{m})}$

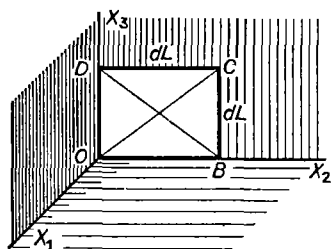


Рис. 3.14.

линейного элемента, параллельного оси X_1 , равен единице (относительное удлинение равно нулю). Найти $\Lambda_{(\hat{m})}$ для диагональных направлений OC и DB бесконечно малого квадрата $OBCD$ (рис. 3.14) и сравнить результаты с непосредственно вычисленными по полю перемещений.

По формуле (3.66), пользуясь матрицей $\mathbf{G}$, найденной в задаче 3.11, получим квадрат коэффициента длины для направления $\hat{m} = \hat{e}_1$:

$$\Lambda_{(\hat{e}_1)}^2 = [1, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1 + A^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Для направления $\hat{m} = (\hat{e}_2 + \hat{e}_3)/\sqrt{2}$ вдоль OC аналогично находим

$$\Lambda_{(\hat{m})}^2 = [0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1 + A^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = (1 + A)^2.$$

Согласно соотношениям, определяющим перемещения, положение точки C после деформации таково: $x_1 = 0$, $x_2 = dL + AdL$, $x_3 = dL + AdL$. Таким образом,

$(dx)^2 = 2(1+A)^2(dL)^2$, а так как $dX = \sqrt{2}dL$, квадрат коэффициента длины $(dx/dX)^2$ равен $(1+A)^2$, как и было подсчитано по формуле (3.66).

Точно так же для направления DB $\hat{m} = (-\hat{e}_2 + \hat{e}_3)/\sqrt{2}$ и, следовательно, $\Lambda_{(\hat{m})}^2 = (1-A)^2$.

3.23. Коэффициенты длины $\Lambda_{(\hat{m})}$ и $\lambda_{(\hat{n})}$ равны только в том случае, когда направление, характеризуемое вектором $\hat{n}$, получено при деформации из направления вектора $\hat{m}$. Для поля перемещений задачи 3.22 вычислить $\lambda_{(\hat{n})}^2$, если $\hat{n} = (\hat{e}_2 + \hat{e}_3)/\sqrt{2}$, и показать, что оно совпадает с $\Lambda_{(\hat{m})}^2$, вычисленным в задаче 3.22 для диагонали OC .

Обращая соотношения задачи 3.22 для перемещений, получаем

$$X_1 = x_1, \quad X_2 = (x_2 - Ax_3)/(1 - A^2), \quad X_3 = (x_3 - Ax_2)/(1 - A^2),$$

откуда можно найти тензор деформации Коши C . Затем, используя (3.67), вычисляем

$$\frac{1}{\lambda_{(\hat{n})}^2} = [0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+A^2)/(1-A^2)^2 & -2A/(1-A^2)^2 \\ 0 & -2A/(1-A^2)^2 & (1+A^2)/(1-A^2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

$$= (1-A)^2/(1-A^2)^2.$$

Таким образом, $\lambda_{(\hat{n})}^2 = (1-A)^2/(1-A^2)^2 = (1+A)^2$, что совпадает с $\Lambda_{(\hat{m})}^2$, вычисленным для OC . Диагональный элемент OC не меняет своего направления при данной деформации сдвига.

3.24. Используя полярное разложение градиента деформации F при деформации сдвига $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + AX_3$, $x_3 = X_3 + AX_2$, определить правый тензор коэффициентов длины S и тензор поворота R . Показать, что главные значения тензора S являются коэффициентами длины диагоналей OC и DB задачи 3.22.

При полярном разложении F тензор коэффициентов длины $S = \sqrt{G}$; по формуле (3.73) имеем $R = FS^{-1}$. Согласно (3.35), $G = F_c \cdot F$, или в нашем случае

$$[G_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1+A^2 \end{bmatrix}.$$

Главные оси тензора G получаются поворотом на 45° вокруг оси X_1 , а сам тензор в главных осях имеет вид

$$[G_{ij}^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-A)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1+A)^2 \end{bmatrix};$$

поэтому

$$[S_{ij}] = [\sqrt{G_{ij}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-A & 0 \\ 0 & 0 & 1+A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{(DB)} & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{(OC)} \end{bmatrix}.$$

В системе координат X_i это разложение записывается в виде

$$[F_{ij}] = [R_{ik}] [S_{kj}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A \\ 0 & A & 1 \end{bmatrix}.$$

В этом примере градиент деформации F сам является тензором коэффициентов длины S , а тензор поворота $R \equiv I$. Это результат совпадения главных осей тензоров L_G и E_A для данной деформации сдвига.

3.25. Бесконечно малый поворот твердого тела задан формулами $u_1 = -CX_2 + BX_3$, $u_2 = CX_1 - AX_3$, $u_3 = -BX_1 + AX_2$, где A, B, C — очень малые константы. Доказать, что растяжение отсутствует ($S = I$), если пренебречь членами, содержащими квадраты и произведения констант.

Для заданного поля перемещений

$$[G_{ij}] = \begin{bmatrix} 1+C^2+B^2 & -AB & -AC \\ -AB & 1+A^2+C^2 & -BC \\ -AC & -BC & 1+A^2+B^2 \end{bmatrix}.$$

Пренебрегая малыми высшего порядка, получаем

$$[G_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\sqrt{G_{ij}}] = [S_{ij}].$$

Преобразования тензоров деформации и главные деформации (§ 3.12—3.14)

3.26. Доказать, что для деформации сдвига $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + \sqrt{2}X_3$, $x_3 = X_3 + \sqrt{2}X_2$ главные направления тензоров L_G и E_A совпадают, как было упомянуто в задаче 3.24.

Согласно (3.37),

$$[L_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Этот тензор в главных осях, определяемых матрицей преобразования

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

приводится к виду

$$[L_{ij}^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Аналогично, согласно (3.39),

$$[E_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix},$$

и преобразованием с той же самой матрицей $[a_{ij}]$ этот тензор приводится к диагональному виду

$$[E_{ij}^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Проверка этих вычислений предоставляется читателю.

3.27. Используя определение (3.37), доказать, что при преобразованиях координат $x_i = b_{ij}x'_j$ и $X'_i = b_{ij}X_j$ лагранжев тензор конечных деформаций L_{ij} преобразуется как декартов тензор второго ранга.

По формуле (3.37) $L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right)$, что при указанном преобразовании координат дает

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (b_{pk}x'_p)}{\partial X'_m} \frac{\partial X'_m}{\partial X_i} \frac{\partial (b_{qk}x'_q)}{\partial X'_n} \frac{\partial X'_n}{\partial X_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(b_{mi}b_{nj}\delta_{pq} \frac{\partial x'_p}{\partial X'_m} \frac{\partial x'_q}{\partial X'_n} - \frac{\partial (b_{mi}x'_m)}{\partial x'_n} \frac{\partial x'_n}{\partial x_j} \right) = \\ &\quad \text{(так как } b_{pk}b_{qk} = \delta_{pq}) \\ &= b_{mi}b_{nj} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial x'_p}{\partial X'_m} \frac{\partial x'_p}{\partial X'_n} - \delta'_{mn} \right) \right] = b_{mi}b_{nj}L'_{mn}. \end{aligned}$$

3.28. Некоторое поле однородной деформации приводит к тензору конечных деформаций

$$[L_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Определить главные деформации и направления главных осей.

Мы имеем дело с симметричным декартовым тензором второго порядка поэтому главные деформации являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-L & 3 & -2 \\ 3 & 1-L & -2 \\ -2 & -2 & 6-L \end{vmatrix} = L^3 - 8L^2 - 4L + 32 = 0.$$

Отсюда $L_{(1)} = -2$, $L_{(2)} = 2$, $L_{(3)} = 8$. Матрица преобразования к главным направлениям имеет вид

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

3.29. Для однородной деформации $x_1 = \sqrt{3}X_1$, $x_2 = 2X_2$, $x_3 = \sqrt{3}X_3 - X_2$ определить материальный эллипсоид деформаций, получающийся при деформации сферической поверхности $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1$. Показать, что уравнение этого эллипсоида имеет вид $x_1^2/\Lambda_{(1)}^2 + x_2^2/\Lambda_{(2)}^2 + x_3^2/\Lambda_{(3)}^2 = 1$.

Используя (3.82), или, что то же самое, обращая данные формулы для перемещений и подставляя результат в уравнение сферы $X_i X_i = 1$, получим уравнение материального эллипсоида деформации $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_2 x_3 = 3$. Это уравнение приводится к каноническому виду в главных осях $x_1^2/3 + x_2^2/6 + x_3^2/2 = 1$ преобразованием с матрицей

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Из соотношений теории деформаций найдем тензор деформации $S = \sqrt{G}$ (вычисления подобны тем, которые были проведены в задаче 3.24):

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}-3}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}-3}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}+3}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Преобразованием с матрицей

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

этот тензор приводится к главным осям (диагональной форме)

$$[S_{ij}^*] = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

где главные значения коэффициентов длины равны $\Lambda_{(1)}^2 = 3$, $\Lambda_{(2)}^2 = 6$, $\Lambda_{(3)}^2 = 2$. Заметим также, что эти главные коэффициенты длины можно вычислить непосредственно по формуле (3.66), используя приведенную выше матрицу $[a_{ij}]$.

3.30. Для деформации, заданной в задаче 3.29, определить пространственный эллипсоид деформации и показать, что его уравнение $\Lambda_{(1)}^2 X_1^2 + \Lambda_{(2)}^2 X_2^2 + \Lambda_{(3)}^2 X_3^2 = 1$.

Согласно (3.84), сфера $x_i x_i = 1$ получена в результате деформации эллипсоида $X \cdot G \cdot X = 1$, или

$$[X_1, X_2, X_3] \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 3X_1^2 + 5X_2^2 + 3X_3^2 - 2\sqrt{3}X_2X_3 = 1.$$

Это уравнение эллипсоида приводится к каноническому виду (в главных осях) $3X_1^2 + 6X_2^2 + 2X_3^2 = 1$ преобразованием с матрицей

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}.$$

3.31. Непосредственным разложением проверить, что второй инвариант Π_L тензора деформаций можно представить в виде

$$\Pi_L = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_{11} & l_{13} \\ l_{31} & l_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_{22} & l_{23} \\ l_{32} & l_{33} \end{vmatrix}.$$

Вычисление данных детерминантов приводит к выражению

$$\Pi_L = l_{11}l_{22} + l_{22}l_{33} + l_{33}l_{11} - (l_{12}^2 + l_{23}^2 + l_{31}^2).$$

С другой стороны, вторая формула (3.91) в развернутой записи дает то же самое:

$$\begin{aligned} \Pi_L &= 1/2 [(l_{11} + l_{22} + l_{33}) l_{jj} - (l_{1j}l_{1j} + l_{2j}l_{2j} + l_{3j}l_{3j})] = \\ &= 1/2 [(l_{11} + l_{22} + l_{33}) (l_{11} + l_{22} + l_{33}) - (l_{11}l_{11} + l_{12}l_{12} + l_{13}l_{13} + \\ &\quad + l_{21}l_{21} + l_{22}l_{22} + l_{23}l_{23} + l_{31}l_{31} + l_{32}l_{32} + l_{33}l_{33})] = \\ &= l_{11}l_{22} + l_{22}l_{33} + l_{33}l_{11} - (l_{12}^2 + l_{23}^2 + l_{31}^2). \end{aligned}$$

3.32. Однородная конечная деформация характеризуется соотношениями $u_i = A_{ij}X_j$, где A_{ij} — константы. Найти выражение для относительного изменения объема (изменения, приходящегося на единицу начального объема). Доказать, что при очень малых A_{ij} оно сводится к кубическому расширению.

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед с начальными размерами dX_1 , dX_2 , dX_3 вдоль осей координат. При данной деформации $x_i = (A_{ij} + \delta_{ij}) X_j$. Согласно (3.33), этот начальный объем dV_0 превращается в скошенный параллелепипед с ребрами длины $dx_i = (A_{i(n)} + \delta_{i(n)}) dX_{(n)}$, $n = 1, 2, 3$. В силу формулы (1.109) этот деформированный элемент имеет объем

$$dV = e_{ijk} (A_{i1} + \delta_{i1}) (A_{j2} + \delta_{j2}) (A_{k3} + \delta_{k3}) dX_1 dX_2 dX_3.$$

Тогда

$$\frac{dV}{dV_0} = \frac{dV_0 + \Delta V}{dV_0} = 1 + \frac{\Delta V}{dV_0} = \varepsilon_{ijk} (A_{i1} + \delta_{i1}) (A_{j2} + \delta_{j2}) (A_{k3} + \delta_{k3}).$$

Если A_{ij} очень малы и их степенями выше первой можно пренебречь, то

$$\begin{aligned} \Delta V/dV_0 &= \varepsilon_{ijk} (A_{i1}\delta_{j2}\delta_{k3} + \delta_{i1}A_{j2}\delta_{k3} + \delta_{i1}\delta_{j2}A_{k3} + \delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{k3}) - 1 = \\ &= A_{11} + A_{22} + A_{33}. \end{aligned}$$

В линейной теории коэффициент кубического расширения равен $l_{ii} = \partial u_i / \partial X_i$, что в случае $u_i = A_{ij}X_j$ дает $l_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$.

3.33. Линейная (малая) деформация задана соотношениями $u_1 = 4x_1 - x_2 + 3x_3$, $u_2 = x_1 + 7x_2$, $u_3 = -3x_1 + 4x_2 + 4x_3$. Найти для такой деформации главные деформации (удлинения) $\varepsilon_{(n)}$ и главные значения девиатора деформаций $e_{(n)}$.

Так как ε_{ij} является симметричной частью градиента перемещения $\partial u_i / \partial x_j$, для данного случая

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

или в главных осях

$$\varepsilon_{ij}^* = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Итак, $\varepsilon_{kk}/3 = 5$; находим девиатор деформаций

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

который в главных осях имеет вид

$$e_{ij}^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $e_{(m)} = \varepsilon_{(m)} - \varepsilon_{kk}/3$.

Плоская деформация и уравнения совместности (§ 3.15—3.16)

3.34. Сорокапятиградусной розеткой деформаций измерены продольные деформации вдоль осей, изображенных на рис. 3.15. В точке P найдены $\varepsilon_{11} = 5 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon'_{11} = 4 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_{22} = 7 \cdot 10^{-4}$. Определить деформацию сдвига ε_{12} в этой точке.

Воспользуемся формулой (3.59). Учитывая, что $\hat{v} = (\hat{e}_1 + \hat{e}_2)/\sqrt{2}$ — единичный вектор направления x'_1 , составляем уравнение для ϵ_{12} :

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right] \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-4} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{12} & 7 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = 4 \cdot 10^{-4}.$$

Отсюда $\frac{12 \cdot 10^{-4} + 2\epsilon_{12}}{2} = 4 \cdot 10^{-4}$, или $\epsilon_{12} = -2 \cdot 10^{-4}$.

3.35. Построить круги Мора для случая плоской деформации

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

и определить максимальную деформацию сдвига. Проверить результат аналитически.

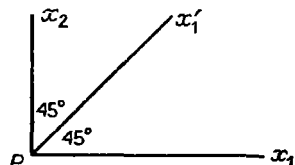


Рис. 3.15.

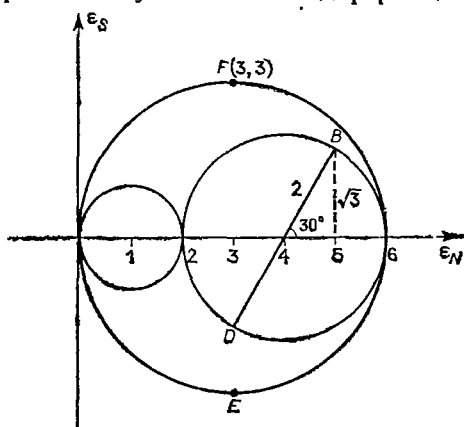


Рис. 3.16.

Для данного состояния деформации, отнесенного к осям x_i , точки B ($\epsilon_{22} = 5$, $\epsilon_{23} = \sqrt{3}$) и D расположены на концах диаметра наибольшего из внутренних кругов (рис. 3.16). Для плоской деформации величина главного напряжения $\epsilon_{(1)} = 0$, поэтому другие круги Мора выглядят так, как показано на рисунке.

Поворотом на угол 30° (рис. 3.17) вокруг оси x_1 (что эквивалентно углу 60° на диаграмме Мора) приведем тензор деформации к главным осям с главными значениями ϵ_{ij}^* :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Еще одним поворотом на 45° (рис. 3.18) вокруг оси x_3^* (на 90° на диаграмме кругов Мора) приведем к системе координат x'_i , в которой тензор деформаций имеет компоненты ϵ'_{ij} , представленные матрицей

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

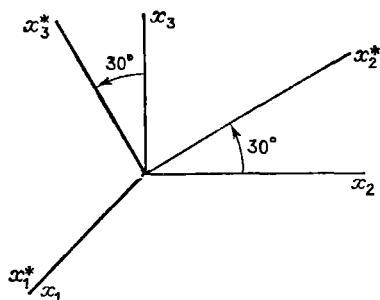


Рис. 3.17.

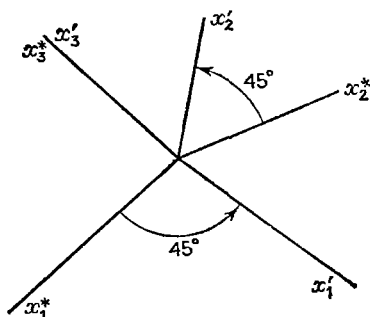


Рис. 3.18.

Здесь первые две строки описывают деформированное состояние в точке F (рис. 3.16). Заметим, что поворот на -45° около x_3^* соответствовал бы точке E на рис. 3.16.

3.36. Деформированное состояние сплошной среды задано тензором

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_1 x_3 \\ x_2^2 & x_3 & x_3^2 \\ x_1 x_3 & x_3^2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Удовлетворяются ли уравнения совместности?

Непосредственной подстановкой в (3.104) убеждаемся, что все уравнения удовлетворяются тождественно. Читателю предлагается проделать эту проверку детально.

Смешанные задачи

3.37. Вывести индексную форму лагранжева тензора конечных деформаций L_G (3.40), воспользовавшись его определением (3.37).

В силу формулы (3.24) имеем $\partial x_i / \partial X_j = \delta_{ij} + \partial u_i / \partial X_j$. Тогда, пользуясь (3.37), можно получить

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\left(\delta_{ki} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right) \left(\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) - \delta_{ij} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\delta_{ki} \delta_{kj} + \delta_{ki} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \delta_{kj} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right]. \end{aligned}$$

3.38. Дано поле перемещений $x_1 = X_1 - CX_2 + BX_3$, $x_2 = CX_1 + X_2 - AX_3$, $x_3 = -BX_1 + AX_2 + X_3$. Показать, что эти перемещения соответствуют повороту абсолютно твердого тела, если константы A , B , C очень малы. Определить вектор поворота $\mathbf{w}$ для бесконечно малого поворота твердого тела.

Для данного поля перемещений

$$F = \begin{pmatrix} 1 - C & B \\ C & 1 - A \\ -B & A & 1 \end{pmatrix}$$

и, согласно (3.37),

$$L_G = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} B^2 + C^2 & -AB & -AC \\ -AB & A^2 + C^2 & -BC \\ -AC & -BC & A^2 + B^2 \end{pmatrix}.$$

Если пренебречь произведениями малых констант, то этот тензор деформаций равен нулю, а перемещение сводится к повороту абсолютно твердого тела. По формуле (3.50) вектор поворота равен

$$w = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \partial/\partial X_1 & \partial/\partial X_2 & \partial/\partial X_3 \\ -CX_2 + BX_3 & CX_1 - AX_3 & -BX_1 + AX_2 \end{vmatrix} = A\hat{e}_1 + B\hat{e}_2 + C\hat{e}_3.$$

3.39. Поворот абсолютно твердого тела описывается полем перемещений $u_1 = 0,02X_3$, $u_2 = -0,03X_3$, $u_3 = -0,02X_1 + 0,03X_2$. Определить перемещение точки $Q(3, 0, 1, 4)$ относительно точки $P(3, 0, 4)$.

Поле перемещений для точек Q и P дает $u_Q = 0,08\hat{e}_1 - 0,12\hat{e}_2 - 0,057\hat{e}_3$ и $u_P = 0,08\hat{e}_1 - 0,12\hat{e}_2 - 0,06\hat{e}_3$. Отсюда $du = u_Q - u_P = 0,003\hat{e}_3$. Тот же результат получим, пользуясь формулой (3.51), где $w = 0,03\hat{e}_1 + 0,02\hat{e}_2$:

$$du = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0,03 & 0,02 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{vmatrix} = 0,003\hat{e}_3.$$

3.40. Для плоской деформации, происходящей в плоскостях, параллельных x_2x_3 , определить выражение для относительного удлинения ϵ_{22} и деформации сдвига ϵ_{23} , если оси со штрихами и без штрихов расположены так, как показано на рис. 3.19.

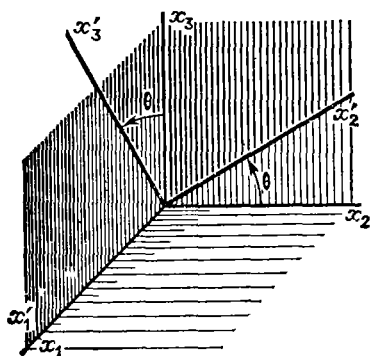


Рис. 3.19.

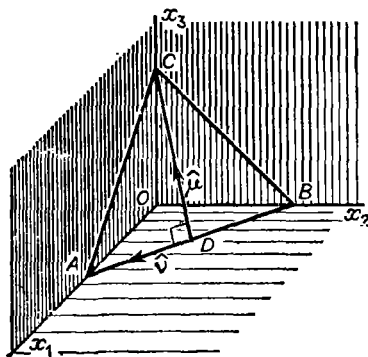


Рис. 3.20.

Из формулы (3.59)

$$\begin{aligned}\epsilon'_{22} &= [0, \cos \theta, \sin \theta] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ 0 & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \\ &= \epsilon_{22} \cos^2 \theta + 2\epsilon_{23} \sin \theta \cos \theta + \epsilon_{33} \sin^2 \theta = \\ &= \frac{\epsilon_{22} + \epsilon_{33}}{2} + \frac{\epsilon_{22} - \epsilon_{33}}{2} \cos 2\theta + \epsilon_{23} \sin 2\theta.\end{aligned}$$

Аналогично, используя (3.65) и результат задачи 3.20, находим

$$\begin{aligned}\epsilon'_{23} &= [0, \cos \theta, \sin \theta] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ 0 & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} = \\ &= -\epsilon_{22} \sin \theta \cos \theta + \epsilon_{23} \cos^2 \theta - \epsilon_{23} \sin^2 \theta + \epsilon_{33} \sin \theta \cos \theta = \\ &= \epsilon_{23} \cos 2\theta - \frac{\epsilon_{22} - \epsilon_{33}}{2} \sin 2\theta.\end{aligned}$$

3.41. Для однородной деформации дан тензор малых деформаций

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0,01 & -0,005 & 0 \\ -0,005 & 0,02 & 0,01 \\ 0 & 0,01 & -0,03 \end{bmatrix}.$$

Каково изменение прямого угла ADC на грани элементарного тетраэдра $OABC$ (рис. 3.20), если $OA = OB = OC$, а точка D — середина ребра AB ?

Единичные векторы $\hat{\mathbf{v}}$ и $\hat{\mathbf{\mu}}$, выходящие из точки D , можно записать в виде $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2)/\sqrt{2}$ и $\hat{\mathbf{\mu}} = (2\hat{\mathbf{e}}_3 - \hat{\mathbf{e}}_2 - \hat{\mathbf{e}}_1)/\sqrt{6}$. Тогда, используя результат задачи 3.20, получаем

$$\gamma_{\mu\nu} = [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0] \begin{bmatrix} 0,02 & -0,01 & 0 \\ -0,01 & 0,04 & 0,02 \\ 0 & 0,02 & -0,06 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} = -0,01/\sqrt{3}.$$

3.42. В некоторой точке тензор деформаций имеет вид

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

т. е. в главных осях

$$\epsilon_{ij}^* = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислить инварианты для каждого из этих тензоров и показать, что они совпадают.

Применяя формулу (3.95) и результат задачи 3.31, находим $I_E = 5 + 4 + 4 = 13$, $I_{E^*} = 6 + 4 + 3 = 13$. Подобным же образом $II_E = 19 + 19 + 16 = 54$, $II_{E^*} = 24 + 18 + 12 = 54$. Наконец, $III_E = 5 \cdot 16 - 4 - 4 = 72$, $III_{E^*} = 6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$. Читатель может проверить эти вычисления.

3.43. Для поля перемещений $x_1 = X_1 + AX_3$, $x_2 = X_2 - AX_3$, $x_3 = X_3 - AX_1 + AX_2$ определить тензор конечных деформаций L_G . Показать, что если константа A очень мала, то перемещение представляет поворот абсолютно твердого тела.

Из условия задачи следует, что $u_1 = AX_3$, $u_2 = -AX_3$, $u_3 = -AX_1 + AX_2$; тогда по формуле (3.40)

$$\begin{aligned} 2L_G &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & -A \\ -A & A & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -A \\ 0 & 0 & A \\ A & -A & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^2 & -A^2 & 0 \\ -A^2 & A^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2A^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A^2 & -A^2 & 0 \\ -A^2 & A^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2A^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если A мало, то A^2 можно пренебречь и $L_G \equiv 0$. Вектор поворота, согласно (3.50), равен $w = A\hat{e}_1 + A\hat{e}_2$.

3.44. Показать, что поле перемещений $u_1 = Ax_1 + 3x_2$, $u_2 = 3x_1 - Bx_2$, $u_3 = 5$ дает состояние плоской деформации. Найти связь между A и B , при которой деформация будет изохорической (отсутствует объемное расширение).

По полю перемещений и формуле (3.43) найдем

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} A & 3 & 0 \\ 3 & -B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

что соответствует форме (3.99) для плоской деформации. Согласно (3.96), коэффициент объемного расширения равен $D = \varepsilon_{ii} = A - B$. Он обращается в нуль, если $A = B$.

3.45. Так называемая дельта-розетка для измерения продольных поверхностных деформаций имеет форму равностороннего треугольника и измеряет относительные удлинения ε_{11} , ε'_{11} , ε''_{11} в направлениях, показанных на рис. 3.21. Пусть $\varepsilon_{11} = a$, $\varepsilon'_{11} = b$, $\varepsilon''_{11} = c$; определить ε_{12} и ε_{22} в той же точке.

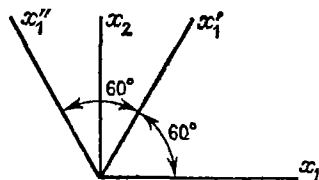


Рис. 3.21.

В случае $L = E$ формула (3.59) для направления x'_1 дает

$$\begin{bmatrix} 1/2, \sqrt{3}/2, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix} = b, \quad \text{или} \quad 2\sqrt{3}\varepsilon_{12} + 3\varepsilon_{22} = 4b - a.$$

Для направления x_1'' так же получаем

$$[-1/2, \sqrt{3}/2, 0] \begin{bmatrix} a & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix} = c, \text{ или } -2\sqrt{3}\epsilon_{12} + 3\epsilon_{22} = 4c - a.$$

Решая эту систему уравнений относительно ϵ_{12} и ϵ_{22} , находим $\epsilon_{12} = (b - c)/\sqrt{3}$ и $\epsilon_{22} = (-a + 2b + 2c)/3$.

3.46. Вывести формулу (3.72), выражающую изменение угла между координатными направлениями X_2 и X_3 в случае конечной деформации. Доказать, что если градиенты перемещений малы, то эта формула сводится к (3.65).

Пусть $\gamma_{23} = \pi/2 - \theta$ — интересное нас изменение угла (рис. 3.5). Тогда $\sin \gamma_{23} = \cos(\pi/2 - \theta) = \hat{n}_2 \cdot \hat{n}_3$, или в силу (3.33) и (3.34)

$$\sin \gamma_{23} = \frac{dx_2}{|dx_2|} \cdot \frac{dx_3}{|dx_3|} = \frac{dX_2 \cdot F_c \cdot F \cdot dX_3}{\sqrt{dX_2 \cdot G \cdot dX_2} \sqrt{dX_3 \cdot G \cdot dX_3}}.$$

Разделим числитель и знаменатель этого выражения на $|dX_2|$ и $|dX_3|$. Учитывая (3.35) и (3.66), получаем

$$\sin \gamma_{23} = \frac{\hat{e}_2 \cdot G \cdot \hat{e}_3}{\sqrt{\hat{e}_2 \cdot G \cdot \hat{e}_2} \sqrt{\hat{e}_3 \cdot G \cdot \hat{e}_3}} = \frac{\hat{e}_2 \cdot G \cdot \hat{e}_3}{\Lambda_{(\hat{e}_2)} \Lambda_{(\hat{e}_3)}}.$$

Далее, в силу (3.37) имеем $\hat{e}_2 \cdot G \cdot \hat{e}_3 = \hat{e}_2 \cdot (2L_G + I) \cdot \hat{e}_3 = \hat{e}_2 \cdot 2L_G \cdot \hat{e}_3 + \hat{e}_2 \cdot I \cdot \hat{e}_3 = 2L_{23}$, так как $\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = 0$. Согласно (3.68), $\Lambda_{(\hat{e}_2)} = \sqrt{1 + 2L_{22}}$ и т. д.; следовательно,

$$\begin{aligned} \sin \gamma_{23} &= \frac{2L_{23}}{\sqrt{1 + 2L_{22}} \sqrt{1 + 2L_{33}}} = \\ &= \frac{\partial u_2 / \partial X_3 + \partial u_3 / \partial X_2 + (\partial u_k / \partial X_2) (\partial u_k / \partial X_3)}{\sqrt{1 + 2\partial u_2 / \partial X_2 + (\partial u_k / \partial X_2) (\partial u_k / \partial X_2)} \sqrt{1 + 2\partial u_3 / \partial X_3 + (\partial u_k / \partial X_3) (\partial u_k / \partial X_3)}}. \end{aligned}$$

Если $\partial u_i / \partial X_j \ll 1$, это равенство сводится к следующему виду: $\sin \gamma_{23} = \partial u_2 / \partial X_3 + \partial u_3 / \partial X_2 = 2L_{23}$.

3.47. Для перемещения простого сдвига $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3 + 2X_2/\sqrt{3}$ определить направление линейного элемента в плоскости X_2X_3 , для которого относительное удлинение равно нулю.

Пусть $\hat{m} = m_2 \hat{e}_2 + m_3 \hat{e}_3$ — единичный вектор нормали в направлении нулевого удлинения. Тогда из (3.66), учитывая, что $\Lambda_{(\hat{m})}^2 = 1$, получаем

$$[0, m_2, m_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = 1,$$

или $7m_2^2 + 4\sqrt{3}m_2m_3 + 3m_3^2 = 3$. Кроме того, $m_2^2 + m_3^2 = 1$. Решая совместно эти два уравнения, находим $m_2 = \pm\sqrt{3}/2$, $m_3 = \mp 1/2$ или $m_2 = 0$, $m_3 = \pm 1$. Таким образом, нулевое удлинение имеют элемент, расположенный вдоль оси X_3 , и элемент, идущий под углом 60° к оси X_3 .

Читателю предлагается проверить этот результат, воспользовавшись соотношением $\hat{m} \cdot 2L_G \cdot \hat{m} = 0$, которое получается из (3.36).

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

3.48. Для перемещения сдвига задачи 3.47 найти уравнение эллипса, в который переходит при деформации круг $X_2^2 + X_3^2 = 1$.

Ответ: $x_2^2 + 9x_3^2 = 3$.

3.49. Определить угол сдвига γ_{23} для деформации задачи 3.47 (рис. 3.22).

Ответ: $\gamma_{23} = \arcsin(2/\sqrt{7})$.

3.50. Дано поле перемещений $x_1 = X_1 + 2X_3$, $x_2 = X_2 - 2X_3$, $x_3 = X_3 - 2X_1 + 2X_2$. Найти лагранжев и эйлеров тензоры конечных деформаций L_G и E_A .

Ответ: $L_G = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

$$E_A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

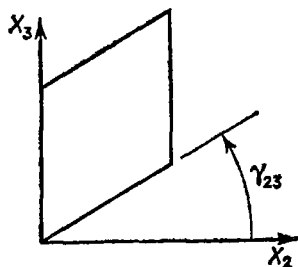


Рис. 3.22.

3.51. Найти диагональную форму обоих тензоров задачи 3.50.

Ответ: $L_G^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $E_A^* = \begin{pmatrix} 4/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/9 \end{pmatrix}$.

3.52. Для поля перемещений задачи 3.50 найти градиент деформации F и, воспользовавшись полярным разложением F , определить тензор поворота R и правый тензор коэффициентов длины S .

Ответ:

$$R = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.53. Доказать, что первый инвариант тензора L_G можно представить через главные значения коэффициентов длины следующим образом:

$$I_{L_G} = [(\Lambda_{(e_1)}^2 - 1) + (\Lambda_{(e_2)}^2 - 1) + (\Lambda_{(e_3)}^2 - 1)]/2,$$

Указание: воспользоваться соотношением (3.68).

3.54. В некоторой точке задан тензор деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Определить относительное удлинение в направлении $\hat{v} = \hat{e}_1/2 - \hat{e}_2/2 + \hat{e}_3/\sqrt{2}$ и изменение угла между направлениями $\hat{v}$ и $\hat{\mu} = -\hat{e}_1/2 + \hat{e}_2/2 + \hat{e}_3/\sqrt{2}$.

Ответ: $\epsilon_{(\hat{v})} = 6$, $\gamma_{\nu\mu} = 0$.

3.55. Как выглядит в главных осях тензор e_{ij} задачи 3.54? Учесть, что направления $\hat{v}$ и $\hat{\mu}$, указанные в этой задаче, являются главными (следовательно, $\gamma_{\nu\mu} = 0$).

Ответ:
$$e_{ij}^* = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3.56. Построить круги Мора для деформированного состояния задачи 3.54 и найти величину максимальной деформации сдвига. Проверить результат аналитически.

Ответ: $\gamma_{\max} = 4$.

3.57. Вычислить все три инварианта тензора e_{ij} задачи 3.54 и тензора e_{ij}^* задачи 3.55 и сравнить результаты.

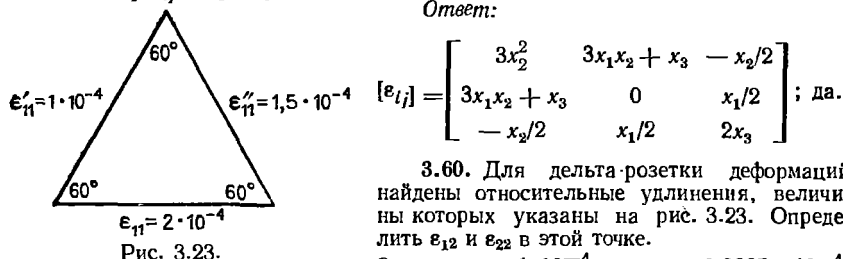
Ответ: $I_E = 6$, $II_E = -4$, $III_E = -24$.

3.58. Для тензора e_{ij} задачи 3.54 определить девиатор e_{ij} и вычислить его главные значения.

Ответ:
$$e_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & -1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, \quad e_{ij}^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

3.59. Дано поле перемещений $u_1 = 3x_1x_2^2$, $u_2 = 2x_3x_1$, $u_3 = x_3^2 - x_1x_2$. Определить тензор e_{ij} и проверить, удовлетворяются ли условия совместности.

Ответ:



3.60. Для дельта-розетки деформаций найдены относительные удлинения, величины которых указаны на рис. 3.23. Определить e_{12} и e_{22} в этой точке.

Ответ: $e_{22} = 1 \cdot 10^{-4}$, $e_{12} = -0,2885 \cdot 10^{-4}$.

3.61. Для поля перемещений $x_1 = X_1 + AX_3$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3 - AX_1$ вычислить изменение объема и показать, что оно равно нулю, если константа A очень мала.

Движение и течение

4.1. Движение. Течение. Материальная производная

Термины *движение* и *течение* используются при описании мгновенного или непрерывного изменения конфигурации сплошной среды. Иногда словом *течение* называют движение, приводящее к остаточной деформации, как, например, в теории пластичности. Однако при изучении жидкостей это слово означает непрерывное движение. Как было указано в (3.14) и (3.15), движение некоторого объема сплошной среды можно выразить либо в материальных координатах (лагранжево представление):

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(\mathbf{X}, t), \quad \text{или} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad (4.1)$$

либо, разрешая эти уравнения, в пространственных координатах (эйлерово представление):

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) = X_i(\mathbf{x}, t), \quad \text{или} \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t). \quad (4.2)$$

Для существования обратных функций (4.2) необходимо и достаточно, чтобы якобиан

$$J = |\partial x_i / \partial X_j| \quad (4.3)$$

был отличен от нуля. С физической точки зрения лагранжев способ описания фиксирует внимание на индивидуальных частицах континуума, в то время как при эйлеровом подходе интересуются определенной областью пространства, занятой сплошной средой.

Так как (4.1) и (4.2) взаимно обратны, любое физическое свойство континуума, приписанное индивидуальной частице (в лагранжевом, или материальном, описании), может также быть выражено для определенного места в пространстве, занятого этой частицей (в эйлеровом, или пространственном, описании). Например, если в материальных переменных дана плотность ρ

$$\rho = \rho(X_i, t), \quad \text{или} \quad \rho = \rho(\mathbf{X}, t), \quad (4.4)$$

то пространственное представление ее получается заменой $\mathbf{X}$ в этом соотношении функцией из (4.2). Таким образом, в пространственных координатах плотность равна

$$\rho = \rho(X_i(\mathbf{x}, t), t) = \rho^*(x_i, t), \quad \text{или} \quad \rho = \rho(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) = \rho^*(\mathbf{x}, t), \quad (4.5)$$

где символ ρ^* использован для того, чтобы подчеркнуть, что вид функции в эйлеровом представлении не обязательно тот же, что в лагранжевом.

Скорость изменения со временем любого свойства в индивидуальных частицах движущейся среды называется *материальной* (или *индивидуальной*) *производной* по времени от этой величины. Материальную производную (также называемую *субстанциональной* или *полной* производной) можно представить себе как скорость изменения рассматриваемой величины со временем, которая была бы измерена наблюдателем, движущимся вместе с индивидуальной частицей. Мгновенное положение частицы x_i само является свойством этой частицы. Материальная производная по времени от положения частицы есть ее *мгновенная скорость*. Поэтому, принимая символ d/dt или точку над буквой для обозначения операции материального дифференцирования (в некоторых книгах используют символ D/Dt), получаем определение вектора скорости:

$$v_i = dx_i/dt = \dot{x}_i, \quad \text{или} \quad \mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt = \dot{\mathbf{x}}. \quad (4.6)$$

Вообще, если $P_{ij\dots}$ — любое скалярное, векторное или тензорное свойство континуума, которое можно описать локальной функцией координат, и если в лагранжевом представлении

$$P_{ij\dots} = P_{ij\dots}(\mathbf{X}, t), \quad (4.7)$$

то индивидуальная производная по времени от этой величины имеет вид

$$\frac{dP_{ij\dots}}{dt} = \frac{\partial P_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (4.8)$$

Правую часть (4.8) иногда записывают в форме $[\partial P_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)/\partial t]_{\mathbf{x}}$, чтобы подчеркнуть, что координаты $\mathbf{X}$ считаются постоянными, т. е. что при вычислении производной имеют дело с одними и теми же частицами. Если некоторое свойство задано функцией $P_{ij\dots}$ в пространственных переменных

$$P_{ij\dots} = P_{ij\dots}(\mathbf{x}, t), \quad (4.9)$$

то вычисление материальной производной приводит к выражению

$$\frac{dP_{ij\dots}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial P_{ij\dots}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial P_{ij\dots}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}, \quad (4.10)$$

где второй член в правой части появляется из-за того, что индивидуальные частицы меняют свое местоположение в пространстве. Первый член в правой части (4.10) характеризует скорость изменения данного свойства в фиксированной точке пространства и соответственно называется *локальной* (или *местной*) *скоростью изменения*. Этот член иногда записывают в виде $[\partial P_{ij\dots}(\mathbf{x}, t)/\partial t]_{\mathbf{x}}$, чтобы подчеркнуть, что $\mathbf{x}$ считается постоянным при этом дифферен-

цировании. Второй член в правой части равенства (4.10) называется *конвективной скоростью изменения*, так как он выражает вклад, обусловленный движением частиц в переменном поле данного свойства.

Принимая во внимание (4.6), для индивидуальной производной можно написать

$$\frac{dP_{ij\dots}(x, t)}{dt} = \frac{\partial P_{ij\dots}(x, t)}{\partial t} + v_k \frac{\partial P_{ij\dots}(x, t)}{\partial x_k}, \quad (4.11)$$

что сразу наводит на мысль ввести *оператор материального дифференцирования по времени*

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}, \quad (4.12)$$

который используется при вычислении индивидуальных производных от величин, записанных в пространственных координатах.

4.2. Скорость. Ускорение. Мгновенное поле скоростей

Определение поля скоростей дано формулой (4.6) в виде $v_i = dx_i/dt$ (или $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$). Другое определение того же вектора можно получить из (3.11), согласно которому $x_i = u_i + X_i$ (или $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{X}$). Тогда скорость можно определить так:

$$v_i \equiv \frac{dx_i}{dt} = \frac{d(u_i + X_i)}{dt} = \frac{du_i}{dt},$$

или

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d(\mathbf{u} + \mathbf{X})}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt},$$

так как $\mathbf{X}$ не зависит от времени. Если в (4.13) перемещение выражено в лагранжевых переменных $u_i = u_i(\mathbf{X}, t)$, то

$$v_i \equiv \dot{u}_i = \frac{du_i(\mathbf{X}, t)}{dt} = \frac{\partial u_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t},$$

или

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}.$$

Если, с другой стороны, перемещение задано в эйлеровой форме $u_i = u_i(\mathbf{x}, t)$, то

$$v_i(\mathbf{x}, t) \equiv \dot{u}_i(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{du_i(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + v_k(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k},$$

или

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (4.15)$$

Этой формулой скорость задается в неявном виде, так как она входит и как множитель во второй член правой части. Говорят, что

функция

$$v_i = v_i(\mathbf{x}, t), \quad \text{или} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (4.16)$$

представляет поле скоростей.

Материальная производная от скорости по времени есть *ускорение*. Если скорость задана в лагранжевой форме (4.14), то

$$a_i \equiv \dot{v}_i \equiv \frac{dv_i(\mathbf{X}, t)}{dt} = \frac{\partial v_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t},$$

или

$$\mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{v}} \equiv \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (4.17)$$

Если же скорость выражена в эйлеровой форме (4.15), то

$$a_i(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{dv_i(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + v_k(\mathbf{x}, t) \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k},$$

или

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (4.18)$$

4.3. Траектории. Линии тока. Установившееся движение

Траектория — это линия, по которой следует частица в процессе ее движения или течения. *Линией тока* для поля скоростей в некоторый момент времени называется кривая, касательная к которой в любой точке совпадает по направлению со скоростью в этой точке. Движение континуума называется *установившимся* (или *стационарным*), если поле скорости не зависит от времени, так что $\partial v_i / \partial t = 0$. Для установившегося движения линии тока и траектории совпадают.

4.4. Скорость деформации. Завихренность.

Приращения деформации

Пространственный градиент мгновенного поля скорости дает *тензор градиента скорости* $\partial v_i / \partial x_j$ (или Y_{ij}). Этот тензор можно разложить на симметричную и антисимметричную части следующим образом:

$$Y_{ij} \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = D_{ij} + V_{ij},$$

или

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{2} (\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) + \frac{1}{2} (\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) = \mathbf{D} + \mathbf{V}. \quad (4.19)$$

Симметричный тензор

$$D_{ij} = D_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \text{или} \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}), \quad (4.20)$$

называется *тензором скоростей деформации*. Антисимметричный тензор

$$V_{ij} = -V_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \text{или} \quad \mathbf{V} = 1/2 (\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}), \quad (4.21)$$

называется *тензором завихренности*, или *вихря*.

Легко показать, что тензор скоростей деформации представляет собой материальную производную по времени от эйлера тензора линейных деформаций ¹⁾. Так, если в выражении

$$\frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

или

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{u} \nabla_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})$$

поменять местами операции дифференцирования по координатам и времени, т. е. заменить $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$ на $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{du_i}{dt} \right)$, то указанное равенство примет вид

$$\frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = D_{ij},$$

или

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{1}{2} (\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) = \mathbf{D}.$$

Таким же образом можно показать, что тензор вихря равен материальной производной по времени от эйлера тензора линейного поворота. Этот результат выражается формулой

$$\frac{d\omega_{ij}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = V_{ij},$$

или

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} = \frac{1}{2} (\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) = \mathbf{V}.$$

Довольно интересную интерпретацию можно придать равенству (4.23), если переписать его в форме

$$d\epsilon_{ij} = D_{ij} dt, \quad \text{или} \quad d\mathbf{E} = \mathbf{D} dt. \quad (4.25)$$

Левая часть (4.25) представляет собой компоненты тензора, которые широко используются в теории пластичности (см. гл. 8) и которые мы будем называть *приращениями деформации*.

¹⁾ Это утверждение верно только в том случае, когда ϵ_{ij} бесконечно малы (см. задачу 4.40). О связи между тензором скоростей деформации и производными по времени от тензоров конечных деформаций см., например: Седов Л. И., Введение в механику сплошной среды, гл. II, § 6, 7, Физматгиз, М., 1962.— *Прим. ред.*

4.5. Физическая интерпретация тензоров скоростей деформации и завихренности

На рис. 4.1 скорости соседних частиц, находящихся в точках P и Q движущегося объема сплошной среды, обозначены соответственно v_i и $v_i + dv_i$. Таким образом, скорость частицы Q относительно точки P равна

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j, \quad \text{или} \quad (4.26)$$

$$dv = v \nabla_x \cdot dx,$$

где частные производные вычислены в точке P . Это выражение можно записать через D_{ij} и V_{ij} :

$$dv_i = (D_{ij} + V_{ij}) dx_j, \quad \text{или} \quad dv = (D + V) \cdot dx. \quad (4.27)$$

Если тензор скоростей деформации тождественно равен нулю ($D_{ij} \equiv 0$), то

$$dv_i = V_{ij} dx_j, \quad \text{или} \quad dv = V \cdot dx, \quad (4.28)$$

и движение в окрестности точки P будет *вращением абсолютно твердого тела*. По этой причине поле скоростей называют «безвращательным» (*безвихревым*), если тензор завихренности обращается в нуль во всех его точках.

Ассоциированный с тензором завихренности вектор определяется соотношением

$$q_i = \epsilon_{ijk} v_{k,j}, \quad \text{или} \quad \mathbf{q} = \nabla_x \times \mathbf{v}, \quad (4.29)$$

и называется *вектором завихренности*. Символическая форма записи (4.29) показывает, что вектор завихренности получается действием оператора ротор (rot или curl) на поле скоростей. Вектор, равный половине вектора $\mathbf{q}$,

$$\Omega_i = \frac{1}{2} q_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} v_{k,j}, \quad \text{или} \quad \Omega = \frac{1}{2} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \nabla_x \times \mathbf{v}, \quad (4.30)$$

называется *вектором вихря скорости*. При вращении абсолютно твердого тела, как получено в (4.28), относительная скорость частицы, соседней с P и находящейся от нее на расстоянии dx_i , дается формулой

$$dv_i = \epsilon_{ijk} \Omega_j dx_k, \quad \text{или} \quad dv = \Omega \times dx. \quad (4.31)$$

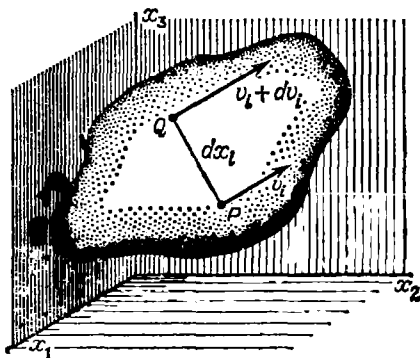


Рис. 4.1.

Компоненты тензора скоростей деформации имеют следующий физический смысл. Диагональные элементы D_{ij} — это *скорости относительного удлинения* отрезков, расположенных вдоль осей координат. Так, для чистой деформации из (4.27) следует, что

$$dv_i = D_{ij}dx_j, \quad \text{или} \quad dv = \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x}, \quad (4.32)$$

а так как скорость изменения длины линейного элемента dx_i , приходящаяся на единицу мгновенной длины, есть

$$d_i^{(\hat{\mathbf{v}})} = \frac{dv_i}{dx} = D_{ij} \frac{dx_j}{dx} = D_{ij}v_j, \quad \text{или} \quad d^{(\hat{\mathbf{v}})} = \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{v}}, \quad (4.33)$$

то *скорость удлинения* в направлении единичного вектора v_i равна

$$d = d_i^{(\hat{\mathbf{v}})}v_i = D_{ij}v_jv_i, \quad \text{или} \quad d = \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{v}}. \quad (4.34)$$

Если v_i — направление какой-либо оси координат, например $\hat{\mathbf{e}}_2$, то, согласно (4.34),

$$d = D_{22}, \quad \text{или} \quad d = \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = D_{22}. \quad (4.35)$$

Недиагональные элементы D_{ij} характеризуют *скорости сдвига* и являются мерой скорости изменения прямых углов между направлениями отрезков, расположенных вдоль осей координат (см. задачу 4.18).

Вследствие того что D_{ij} является симметричным тензором второго ранга, для него существуют такие понятия, как *главные оси, главные значения, инварианты, поверхность скоростей деформации и девиатор скоростей деформации*. Кроме того, для компонент тензора скоростей деформации можно написать уравнения *совместности*, аналогичные уравнениям, полученным в гл. 3 для тензора линейных деформаций.

4.6. Материальные производные по времени от элемента объема, элемента поверхности и линейного элемента

В результате движения из некоторого начального состояния в момент $t = 0$ к рассматриваемому в момент t состоянию частицы сплошной среды, которые вначале занимали элементарный объем dV_0 , займут элементарный объем dV . Если начальный элемент объема взят в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 4.2), то, согласно (1.10),

$$dV_0 = dX_1\hat{\mathbf{e}}_1 \times dX_2\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot dX_3\hat{\mathbf{e}}_3 = dX_1dX_2dX_3. \quad (4.36)$$

При движении этот параллелепипед перемещается и искажается, но из-за непрерывности движения не разрушается. Действительно,

вследствие связи (3.33) $dx_i = (\partial x_i / \partial X_j) dX_j$ между материальными и пространственными линейными элементами, «жидкий отрезок», который раньше был dX_1 , теперь образует бесконечно малый линейный отрезок $dx_i^{(1)} = (\partial x_i / \partial X_1) dX_1$. Аналогично dX_2 переходит в $dx_i^{(2)} = (\partial x_i / \partial X_2) dX_2$, а dX_3 превращается в $dx_i^{(3)} = (\partial x_i / \partial X_3) dX_3$. Поэтому бесконечно малый элемент объема dV представляет собой

скошенный параллелепипед с ребрами $dx_i^{(1)}$, $dx_i^{(2)}$, $dx_i^{(3)}$. Величина его объема вычисляется как смешанное произведение

$$dV = dx^{(1)} \times dx^{(2)} \cdot dx^{(3)} = \varepsilon_{ijk} dx_i^{(1)} dx_j^{(2)} dx_k^{(3)}. \quad (4.37)$$

Очевидно, этот объем равен

$$dV = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \frac{\partial x_j}{\partial X_2} \frac{\partial x_k}{\partial X_3} \times dX_1 dX_2 dX_3 = J dV_0, \quad (4.38)$$

где $J = |\partial x_i / \partial X_j|$ — якобиан, определенный формулой (4.3).

Теперь, используя (4.38), можно получить материальную производную от dV по времени:

$$\frac{d}{dt} (dV) = \frac{d}{dt} (J dV_0) = \frac{dJ}{dt} dV_0, \quad (4.39)$$

поскольку dV_0 от времени не зависит, так что $\frac{d}{dt} (dV_0) = 0$. Можно показать (см. задачу 4.28), что материальная производная от якобиана J равна

$$\frac{dJ}{dt} = J \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \quad \text{или} \quad \dot{J} = J \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}, \quad (4.40)$$

и, следовательно, (4.39) принимает вид

$$\frac{d}{dt} (dV) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} (dV) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} dV. \quad (4.41)$$

Бесконечно малый элемент поверхности, имеющий в начальном состоянии площадь dS^0 , можно задать (вместе с его ориентацией) при помощи единичного вектора его нормали n_i выражением $dS^0 n_i$. При движении среды частицы, вначале составлявшие площадку $dS^0 n_i$, в рассматриваемом состоянии заполняют элемент площади

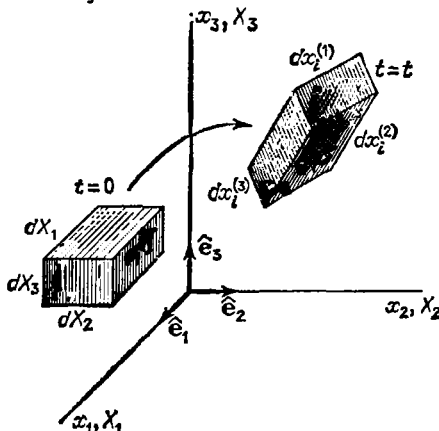


Рис. 4.2.

dSn'_i , или dS_i . Можно показать, что

$$dS_i = J \frac{\partial X_I}{\partial x_i} dX_I, \quad \text{или} \quad dS = J d\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} \nabla_{\mathbf{x}}, \quad (4.42)$$

откуда находим материальную производную элемента площади:

$$\frac{d}{dt} (dS_i) = \frac{d}{dt} \left(J \frac{\partial X_I}{\partial x_i} \right) dX_I = \frac{\partial v_I}{\partial x_i} dS_i - \frac{\partial v_I}{\partial x_i} dS_I. \quad (4.43)$$

Материальную производную от квадрата длины бесконечно малого линейного элемента dx_i можно вычислить аналогичным образом:

$$\frac{d}{dt} (dx^2) = \frac{d}{dt} (dx_i dx_i) = 2 \frac{d(dx_i)}{dt} dx_i. \quad (4.44)$$

Но так как $dx_i = (\partial x_i / \partial X_J) dX_J$, мы имеем

$$\frac{d}{dt} (dx_i) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_J} \right) dX_J = \frac{\partial v_i}{\partial X_J} dX_J = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_J} dX_J = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k \quad (4.45)$$

и тогда (4.44) примет вид

$$\frac{d}{dt} (dx^2) = 2 \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k dx_i, \quad (4.46)$$

или

$$\frac{d}{dt} (dx^2) = 2 d\mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}.$$

Выражение в правой части в индексной форме (4.46) симметрично по индексам i и k , и, следовательно, можно написать

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k dx_i + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} dx_i dx_k = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k, \quad (4.47)$$

либо, принимая во внимание (4.20),

$$\frac{d}{dt} (dx^2) = 2 D_{ij} dx_i dx_j, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} (dx^2) = 2 d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x}. \quad (4.48)$$

4.7. Материальные производные по времени от интеграла по объему, интеграла по поверхности и линейного интеграла

Не все свойства континуума можно задать для индивидуальной частицы функцией ее координат так, как это сделано в (4.7) и (4.9); некоторые свойства определяются интегралами по конечной части континуума. Пусть, например, какое-либо скалярное, векторное

или тензорное свойство представлено интегралом по объему

$$P_{ij...}(t) = \int_V P_{ij...}^*(\mathbf{x}, t) dV, \quad (4.49)$$

где V — объем, который рассматриваемая часть сплошной среды занимает в момент t . Материальная производная от $P_{ij...}(t)$ равна

$$\frac{d}{dt} [P_{ij...}(t)] = \frac{d}{dt} \int_V P_{ij...}^*(\mathbf{x}, t) dV, \quad (4.50)$$

а так как интегрирование идет по определенной части континуума (т. е. индивидуализированной системе масс), операции дифференцирования и интегрирования можно менять местами. Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \int_V P_{ij...}^*(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \frac{d}{dt} [P_{ij...}^*(\mathbf{x}, t) dV]. \quad (4.51)$$

После выполнения дифференцирования с учетом (4.41) приходим к следующему равенству:

$$\frac{d}{dt} \int_V P_{ij...}^*(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \left[\frac{dP_{ij...}^*(\mathbf{x}, t)}{dt} + P_{ij...}^*(\mathbf{x}, t) \frac{\partial v_p}{\partial x_p} \right] dV. \quad (4.52)$$

Оператор индивидуальной производной определен формулой (4.12) как $d/dt = \partial/\partial t + v_p \partial/\partial x_p$. Тогда равенству (4.52) можно придать вид

$$\frac{d}{dt} \int_V P_{ij...}^*(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \left[\frac{\partial P_{ij...}^*(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_p} (v_p P_{ij...}^*(\mathbf{x}, t)) \right] dV. \quad (4.53)$$

По теореме Гаусса — Остроградского (1.157) преобразуем второй член в правой части (4.53) в интеграл по поверхности; получим

$$\frac{d}{dt} \int_V P_{ij...}^*(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \frac{\partial P_{ij...}^*(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \int_S v_p [P_{ij...}^*(\mathbf{x}, t)] dS_p. \quad (4.54)$$

Это соотношение утверждает, что скорость изменения некоторой величины $P_{ij...}(t)$ в части сплошной среды, занимающей в данный момент объем V , равна сумме изменений этой величины во всех точках внутри V плюс поток величины $P_{ij...}^*(\mathbf{x}, t)$ через поверхность S , ограничивающую V .

Процедура определения материальных производных от интеграла по поверхности и линейного интеграла в общем та же, что только что сделанная для интеграла по объему. Так, для любого тензорного свойства сплошной среды, которое выражается интегралом

по поверхности

$$Q_{ij...}(t) = \int_S Q_{ij...}^*(\mathbf{x}, t) dS_p, \quad (4.55)$$

где S — поверхность, занятая в момент t рассматриваемой частью континуума, имеем, как и прежде,

$$\frac{d}{dt} \int_S Q_{ij...}^*(\mathbf{x}, t) dS_p = \int_S \frac{d}{dt} [Q_{ij...}^*(\mathbf{x}, t) dS_p]. \quad (4.56)$$

Отсюда, учитывая (4.43), получаем правило дифференцирования интеграла по поверхности:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{ij...}(t)}{dt} = \\ = \int_S \left[\frac{dQ_{ij...}^*(\mathbf{x}, t)}{dt} + \frac{\partial v_q}{\partial x_q} Q_{ij...}^*(\mathbf{x}, t) \right] dS_p - \int_S \left[Q_{ij...}^* \frac{\partial v_q}{\partial x_p} dS_q \right]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Для величин, выраженных линейным интегралом типа

$$R_{ij...}(t) = \int_C R_{ij...}^*(\mathbf{x}, t) dx_p, \quad (4.58)$$

материальная производная равна

$$\frac{d}{dt} \int_C R_{ij...}^*(\mathbf{x}, t) dx_p = \int_C \frac{d}{dt} [R_{ij...}^*(\mathbf{x}, t) dx_p]. \quad (4.59)$$

Проводя указанное дифференцирование в правой части (4.59) и учитывая при этом (4.45), находим материальную производную линейного интеграла:

$$\frac{d}{dt} [R_{ij...}(t)] = \int_C \frac{d[R_{ij...}^*(\mathbf{x}, t)]}{dt} dx_p + \int_C \frac{\partial v_p}{\partial x_q} [R_{ij...}^*(\mathbf{x}, t)] dx_q. \quad (4.60)$$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Материальные производные. Скорость.

Ускорение (§ 4.1—4.3)

4.1. Дано пространственное (эйлерово) описание движения континуума $x_1 = X_1 e^t + X_3 (e^t - 1)$, $x_2 = X_3 (e^t - e^{-t}) + X_2$, $x_3 = X_3$. Доказать, что якобиан J для такого движения отличен от нуля, и найти материальное (лагранжево) представление этого движения, обращая уравнения для перемещений.

Согласно (4.3), якобиан равен

$$J = |\partial x_i / \partial X_j| = \begin{vmatrix} e^t & 0 & e^t - 1 \\ 0 & 1 & e^t - e^{-t} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^t.$$

Обращая уравнения движения, получаем $X_1 = x_1 e^{-t} + x_3 (e^{-t} - 1)$, $X_2 = x_2 - x_3 (e^t - e^{-t})$, $X_3 = x_3$. Заметим, что при обоих способах описания $x_i = X_i$ при $t = 0$.

4.2. Дан закон движения континуума $x_1 = X_1$, $x_2 = e^t (X_2 + X_3)/2 + e^{-t} (X_2 - X_3)/2$, $x_3 = e^t (X_2 + X_3)/2 - e^{-t} (X_2 - X_3)/2$. Определить компоненты скорости в эйлеровой и лагранжевой форме.

Из второго и третьего уравнений получаем $X_2 + X_3 = e^{-t} (x_2 + x_3)$ и $X_2 - X_3 = e^t (x_2 - x_3)$. Разрешая их, находим обращенные уравнения $X_1 = x_1$, $X_2 = e^{-t} (x_2 + x_3)/2 + e^t (x_2 - x_3)/2$, $X_3 = e^{-t} (x_2 + x_3)/2 - e^t (x_2 - x_3)/2$. Тогда компоненты перемещения $u_i = x_i - X_i$ можно записать либо в лагранжевой форме: $u_1 = 0$, $u_2 = e^t (X_2 + X_3)/2 + e^{-t} (X_2 - X_3)/2 - X_2$, $u_3 = e^t (X_2 + X_3)/2 - e^{-t} (X_2 - X_3)/2 - X_3$, либо в эйлеровой форме: $u_1 = 0$, $u_2 = x_2 - e^{-t} (x_2 + x_3)/2 - e^t (x_2 - x_3)/2$, $u_3 = x_3 - e^{-t} (x_2 + x_3)/2 + e^t (x_2 - x_3)/2$.

Согласно (4.14), $v_i = \partial u_i / \partial t = \partial x_i / \partial t$, и компоненты скорости в лагранжевом представлении будут равны $v_1 = 0$, $v_2 = e^t (X_2 + X_3)/2 - e^{-t} (X_2 - X_3)/2$, $v_3 = e^t (X_2 + X_3)/2 + e^{-t} (X_2 - X_3)/2$. С учетом соотношений $X_2 + X_3 = e^{-t} (x_2 + x_3)$ и $X_2 - X_3 = e^t (x_2 - x_3)$, эти выражения для компонент сводятся к $v_1 = 0$, $v_2 = x_3$, $v_3 = x_2$. С другой стороны, если движение задано в эйлеровых переменных, то из формулы (4.15) находим

$$\begin{aligned} du_2/dt = v_2 &= e^{-t} (x_2 + x_3)/2 - e^t (x_2 - x_3)/2 + v_2 (2 - e^{-t} - e^t)/2 + \\ &\quad + v_3 (-e^{-t} + e^t)/2, \\ du_3/dt = v_3 &= e^{-t} (x_2 + x_3)/2 + e^t (x_2 - x_3)/2 + v_2 (-e^{-t} + e^t)/2 + \\ &\quad + v_3 (2 - e^{-t} - e^t)/2. \end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения относительно v_2 и v_3 , получаем, как и прежде, $v_2 = x_3$, $v_3 = x_2$.

4.3. Дано поле скоростей $v_1 = x_1/(1+t)$, $v_2 = 2x_2/(1+t)$, $v_3 = 3x_3/(1+t)$. Найти компоненты ускорения.

Пользуясь формулой (4.18), находим

$$\begin{aligned} dv_1/dt = a_1 &= -x_1/(1+t)^2 + x_1/(1+t)^2 = 0, \\ dv_2/dt = a_2 &= -2x_2/(1+t)^2 + 4x_2/(1+t)^2 = 2x_2/(1+t)^2, \\ dv_3/dt = a_3 &= -3x_3/(1+t)^2 + 9x_3/(1+t)^2 = 6x_3/(1+t)^2. \end{aligned}$$

4.4. Проинтегрировать выражения для скорости, данные в задаче 4.3, и получить уравнения для перемещений $x_i = x_i(X, t)$ (закон движения); по ним найти компоненты ускорения в лагранжевой форме.

По определению (4.13) $v_1 = dx_1/dt = x_1/(1+t)$; разделяем переменные $dx_1/x_1 = dt/(1+t)$ и интегрируем: $\ln x_1 = \ln(1+t) + \ln C$, где C — постоянная интегрирования. Так как $x_1 = X_1$ при $t = 0$, то $C = X_1$, и, следовательно, $x_1 = X_1(1+t)$. Точно так же находим $x_2 = X_2(1+t)^2$ и $x_3 = X_3(1+t)^3$. Затем, используя (4.14) и (4.17), получаем $v_1 = X_1$, $v_2 = 2X_2(1+t)$, $v_3 = 3X_3(1+t)^2$ и $a_1 = 0$, $a_2 = 2X_2$, $a_3 = 6X_3(1+t)$.

4.5. Задан закон движения сплошной среды $x_1 = A + (e^{-B\lambda}/\lambda) \sin \lambda(A + \omega t)$, $x_2 = -B - (e^{-B\lambda}/\lambda) \cos \lambda(A + \omega t)$, $x_3 = X_3$. Показать, что траектории — окружности, а величина скорости постоянна. Определить также связь между X_1 и X_2 и константами A и B .

Перепишем закон движения в виде $x_1 - A = (e^{-B\lambda}/\lambda) \sin \lambda(A + \omega t)$, $x_2 + B = (-e^{-B\lambda}/\lambda) \cos \lambda(A + \omega t)$. Возведя эти равенства в квадрат и сложив результаты, исключим t и получим траектории — окружности $(x_1 - A)^2 + (x_2 + B)^2 = e^{-2B\lambda}/\lambda^2$. По формуле (4.6) найдем скорости $v_1 = \omega e^{-B\lambda} \cos \lambda(A + \omega t)$, $v_2 = \omega e^{-B\lambda} \sin \lambda(A + \omega t)$, $v_3 = 0$, следовательно, $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \omega^2 e^{-2B\lambda}$. Наконец, $x_i = X_i$ при $t = 0$, откуда $X_1 = A + (e^{-B\lambda}/\lambda) \sin \lambda A$, $X_2 = -B - (e^{-B\lambda}/\lambda) \cos \lambda A$.

4.6. Поле скоростей задано вектором $\mathbf{v} = x_1^2 \hat{\mathbf{e}}_1 + x_2 t^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + x_1 x_3 t \hat{\mathbf{e}}_3$. Определить скорость и ускорение частицы, находящейся в момент $t = 1$ в точке $P(1, 3, 2)$.

Прямой подстановкой найдем $\mathbf{v}_P = \hat{\mathbf{e}}_1 + 3\hat{\mathbf{e}}_2 + 2\hat{\mathbf{e}}_3$. Пользуясь векторной формой формулы (4.18), получим поле ускорений

$$\mathbf{a} = x_1^2 \hat{\mathbf{e}}_1 + 2x_2 t \hat{\mathbf{e}}_2 + x_1 x_3 \hat{\mathbf{e}}_3 + (x_1^2 \hat{\mathbf{e}}_1 + x_2 t^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + x_1 x_3 t \hat{\mathbf{e}}_3) \cdot (2x_1 t \hat{\mathbf{e}}_1 + x_3 t \hat{\mathbf{e}}_3 + t^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + x_1 t \hat{\mathbf{e}}_3),$$

или

$$\mathbf{a} = (x_1^2 + 2x_1^3 t^2) \hat{\mathbf{e}}_1 + (2x_2 t + x_2 t^4) \hat{\mathbf{e}}_2 + (x_1 x_3 + 2x_1^2 x_3 t^2) \hat{\mathbf{e}}_3.$$

Таким образом, $\mathbf{a}_P = 3\hat{\mathbf{e}}_1 + 9\hat{\mathbf{e}}_2 + 6\hat{\mathbf{e}}_3$.

4.7. Для поля скоростей задачи 4.3 найти линии тока и траектории и доказать, что они совпадают.

Касательная к линии тока в каждой точке направлена по вектору скорости. Следовательно, для бесконечно малого вектора $d\mathbf{x}$ касательной к линии тока можно написать $\mathbf{v} \times d\mathbf{x} = 0$ и получить таким образом дифференциальные уравнения линий тока $dx_1/v_1 = dx_2/v_2 = dx_3/v_3$. Для указанного течения эти уравнения имеют вид $dx_1/x_1 = dx_2/2x_2 = dx_3/3x_3$. Интегрируя их с учетом начальных условий $x_i = X_i$ при $t = 0$, находим уравнения линий тока: $(x_1/X_1)^2 = x_2/X_2$, $(x_1/X_1)^3 = x_3/X_3$, $(x_2/X_2)^3 = (x_3/X_3)^2$.

Интегрирование выражений для скорости $dx_i/dt = v_i$ было выполнено в задаче 4.4 и дало закон движения $x_1 = X_1(1+t)$, $x_2 = X_2(1+t)^2$, $x_3 = X_3(1+t)^3$. Исключая из этих уравнений время t , получаем траектории, которые в точности совпадают с найденными выше линиями тока.

4.8. В электромагнитном континууме напряженность магнитного поля равна $\lambda = e^{-At}/r$, где $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ и A — константа, и движение задано полем скоростей $v_1 = Bx_1x_3t$, $v_2 = Bx_2t^2$, $v_3 = Bx_3x_2$. Определить скорость изменения напряженности магнитного поля для частицы, расположенной в момент $t = 1$ в точке $P(2, -1, 2)$.

Так как $\partial(r^{-1})/\partial x_i = -x_i/r^3$, формула (4.11) дает

$$\dot{\lambda} = -Ae^{-At}/r - e^{-At}(Bx_1^2x_3t + Bx_2^3t^2 + Bx_3^2x_2)/r^3.$$

Таким образом, в точке P в момент $t = 1$

$$\dot{\lambda}_P = -e^{-A}(3A + B)/9.$$

4.9. Дано поле скоростей $v_1 = 4x_3 - 3x_2$, $v_2 = 3x_1$, $v_3 = -4x_1$. Определить компоненты ускорения в точках $P(b, 0, 0)$ и $Q(0, 4b, 3b)$ и обратить внимание на то, что поле скоростей соответствует вращению абсолютно твердого тела с угловой скоростью, равной 5, вокруг оси, направленной вдоль вектора $\hat{e} = (4\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3)/5$.

По формуле (4.18) $a_1 = -25x_1$, $a_2 = -9x_2 + 12x_3$, $a_3 = 12x_2 - 16x_3$. Тогда в точке $P(b, 0, 0)$ $\mathbf{a} = -25b\hat{e}_1$ и ускорение имеет только осесремительную компоненту, а в точке $Q(0, 4b, 3b)$, расположенной на оси вращения, $\mathbf{a} = 0$. Можно заметить, что $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} = (4\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3) \times (x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3) = (4x_3 - 3x_2)\hat{e}_1 + 3x_1\hat{e}_2 - 4x_1\hat{e}_3$ и, следовательно, $\boldsymbol{\omega} = 5\hat{e}$.

Скорости деформации, завихренность (§ 4.4—4.5)

4.10. Некоторое течение задано полем скоростей $v_1 = 0$, $v_2 = A(x_1x_2 - x_3^2)e^{-Bt}$, $v_3 = A(x_2^2 - x_1x_3)e^{-Bt}$, где A и B — константы. Найти градиент скорости $\partial v_i/\partial x_j$ для этого движения и вычислить тензор скоростей деформации $\mathbf{D}$ и тензор завихренности $\mathbf{V}$ в точке $P(1, 0, 3)$ в момент $t = 0$.

Согласно (4.19),

$$\partial v_i/\partial x_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & -2x_3 \\ -x_3 & 2x_2 & -x_1 \end{pmatrix} Ae^{-Bt}.$$

Этот тензор можно вычислить в точке P в момент $t = 0$, а его составные части подсчитать соответственно по формулам (4.20) и (4.21):

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} = \mathbf{D} + \mathbf{V} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & -6A \\ -3A & 0 & -A \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1,5A \\ 0 & A & -3A \\ -1,5A & -3A & -A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1,5A \\ 0 & 0 & -3A \\ -1,5A & 3A & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.11. Для движения $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + X_1(e^{-2t} - 1)$, $x_3 = X_3 + X_1(e^{-3t} - 1)$ вычислить тензор скоростей деформации $\mathbf{D}$ и тензор завихренности $\mathbf{V}$. Сравнить компоненты $\mathbf{D}$ с de_{ij}/dt — скоростями изменения компонент эйлера тензора малых деформаций $\mathbf{E}$.

В данном случае компоненты перемещения равны $u_1 = 0$, $u_2 = x_1(e^{-2t} - 1)$, $u_3 = x_1(e^{-3t} - 1)$, и по (4.14) компоненты скорости будут $v_1 = 0$, $v_2 = -2x_1e^{-2t}$, $v_3 = -3x_1e^{-3t}$. Разложение градиента скорости $\partial v_i/\partial x_j$ дает $\partial v_i/\partial x_j = D_{ij} + V_{ij}$, т. е.

$$\begin{aligned}\partial v_i/\partial x_j &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2e^{-2t} & 0 & 0 \\ -3e^{-3t} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -e^{-2t} & -3e^{-3t}/2 \\ -e^{-2t} & 0 & 0 \\ -3e^{-3t}/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e^{-2t} & 3e^{-3t}/2 \\ -e^{-2t} & 0 & 0 \\ -3e^{-3t}/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Аналогично получаем разложение градиента перемещения $\partial u_i/\partial x_j = e_{ij} + \omega_{ij}$, т. е.

$$\begin{aligned}\partial u_i/\partial x_j &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e^{-2t} & 0 & 0 \\ e^{-3t} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-2t} & e^{-3t} \\ e^{-2t} & 0 & 0 \\ e^{-3t} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -e^{-2t} & -e^{-3t} \\ e^{-2t} & 0 & 0 \\ e^{-3t} & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Сравнивая $\mathbf{D}$ с $d\mathbf{E}/dt$, видим, что

$$de_{ij}/dt = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-2t} & -3e^{-3t}/2 \\ -e^{-2t} & 0 & 0 \\ -3e^{-3t}/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D_{ij}.$$

Читателю предоставляется самому показать, что $d\omega_{ij}/dt = V_{ij}$.

4.12. *Вихревой линией* называется такая линия, касательная к которой в каждой точке движущейся среды направлена по вектору вихря $\boldsymbol{\Omega} = 1/2\boldsymbol{\omega}$. Доказать, что уравнения вихревых линий имеют вид $dx_1/q_1 = dx_2/q_2 = dx_3/q_3$.

Пусть $d\mathbf{x}$ — бесконечно малый вектор в направлении $\mathbf{q}$. Тогда $\mathbf{q} \times d\mathbf{x} \equiv 0$, или

$$(q_2dx_3 - q_3dx_2)\hat{\mathbf{e}}_1 + (q_3dx_1 - q_1dx_3)\hat{\mathbf{e}}_2 + (q_1dx_2 - q_2dx_1)\hat{\mathbf{e}}_3 \equiv 0,$$

откуда получаем уравнение вихревой линии $dx_1/q_1 = dx_2/q_2 = dx_3/q_3$.

4.13. Доказать, что для поля скоростей $\mathbf{v} = (Ax_3 - Bx_2)\hat{\mathbf{e}}_1 + (Bx_1 - Cx_3)\hat{\mathbf{e}}_2 + (Cx_2 - Ax_1)\hat{\mathbf{e}}_3$ вихревые линии являются прямыми. Написать их уравнения.

По определению (4.29) $\mathbf{q} = -\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{v} = 2(C\hat{\mathbf{e}}_1 + A\hat{\mathbf{e}}_2 + B\hat{\mathbf{e}}_3)$, а, согласно результату задачи 4.12, дифференциальные уравнения вихревых линий будут $A dx_3 = B dx_2$, $B dx_1 = C dx_3$, $C dx_2 = A dx_1$. Интегрируя их, найдем уравнения вихревых линий в конечной форме $x_3 = Bx_2/A + K_1$, $x_1 = Cx_3/B + K_2$, $x_2 = Ax_1/C + K_3$, где K_i — постоянные интегрирования.

4.14. Доказать, что поле скоростей задачи 4.13 представляет вращение абсолютно твердого тела, так как для него $\mathbf{D} \equiv 0$.

Вычислим градиент скорости $\partial v_i / \partial x_j$. Он оказывается антисимметричным тензором, а это значит, что

$$\partial v_i / \partial x_j = \begin{pmatrix} 0 & -B & A \\ B & 0 & -C \\ -A & C & 0 \end{pmatrix} = V_{ij}$$

и $D_{ij} \equiv 0$.

4.15. Для вращения абсолютно твердого тела со скоростью $\mathbf{v} = 3x_3\hat{\mathbf{e}}_1 - 4x_3\hat{\mathbf{e}}_2 + (4x_2 - 3x_1)\hat{\mathbf{e}}_3$ определить вектор вихря скорости $\boldsymbol{\Omega}$ и показать, что $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$.

По определению (4.30) $2\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{q}$ или $\boldsymbol{\Omega} = 4\hat{\mathbf{e}}_1 + 3\hat{\mathbf{e}}_2$. Этот вектор направлен вдоль оси вращения. Можно проверить, что

$$(4\hat{\mathbf{e}}_1 + 3\hat{\mathbf{e}}_2) \times (x_1\hat{\mathbf{e}}_1 + x_2\hat{\mathbf{e}}_2 + x_3\hat{\mathbf{e}}_3) = 3x_3\hat{\mathbf{e}}_1 - 4x_3\hat{\mathbf{e}}_2 + (4x_2 - 3x_1)\hat{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{v}.$$

4.16. Дано стационарное поле скоростей $\mathbf{v} = (x_1^3 - x_1x_2^2)\hat{\mathbf{e}}_1 + (x_1^2x_2 + x_2)\hat{\mathbf{e}}_2$. Найти скорости относительно точки $P(1, 1, 3)$ частиц в точках $Q_1(1, 0, 3)$, $Q_2(1, 3/4, 3)$, $Q_3(1, 7/8, 3)$, отнесенные к расстоянию от этих точек до точки P , и показать, что их величины стремятся к относительной скорости, определенной формулой (4.26).

Непосредственное вычисление дает $\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_{Q_1} = -\hat{\mathbf{e}}_1 + 2\hat{\mathbf{e}}_2$, $4(\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_{Q_2}) = -7\hat{\mathbf{e}}_1/4 + 2\hat{\mathbf{e}}_2$ и $8(\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_{Q_3}) = -15\hat{\mathbf{e}}_1/8 + 2\hat{\mathbf{e}}_2$. Матрица градиента скорости имеет вид

$$[\partial v_i / \partial x_j] = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 & -2x_1x_2 & 0 \\ 2x_1x_2 & x_1^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и в точке $P(1, 1, 3)$ градиент скорости в отрицательном направлении оси x_2 равен

$$(dv_i/dx)_{\hat{\mathbf{e}}_2} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $(d\mathbf{v}/dx)_{\hat{\mathbf{e}}_2} = -2\hat{\mathbf{e}}_1 + 2\hat{\mathbf{e}}_2$, и это величина, к которой стремятся относительные скорости $\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_{Q_i}$, отнесенные к расстоянию до точки P .

4.17. Для стационарного поля скоростей $\mathbf{v} = 3x_1^2x_2\hat{\mathbf{e}}_1 + 2x_2^2x_3\hat{\mathbf{e}}_2 + x_1x_2x_3^2\hat{\mathbf{e}}_3$ определить скорость удлинения материального отрезка в точке $P(1, 1, 1)$ в направлении $\hat{\mathbf{v}} = (3\hat{\mathbf{e}}_1 - 4\hat{\mathbf{e}}_3)/5$.

В нашем случае градиент скорости равен

$$[\partial v_i / \partial x_j] = \begin{bmatrix} 6x_1x_2 & 3x_1^2 & 0 \\ 0 & 4x_2x_3 & 2x_2^2 \\ x_2x_3^2 & x_1x_3^2 & 2x_1x_2x_3 \end{bmatrix}$$

и его симметричная часть в точке P принимает значения

$$[D_{ij}]_P = \begin{bmatrix} 6 & 1,5 & 0,5 \\ 1,5 & 4 & 1,5 \\ 0,5 & 1,5 & 2 \end{bmatrix}.$$

По формуле (4.34) для направления $\hat{\mathbf{v}} = (3\hat{\mathbf{e}}_1 - 4\hat{\mathbf{e}}_3)/5$ получаем

$$d = [3/5, 0, -4/5] \begin{bmatrix} 6 & 1,5 & 0,5 \\ 1,5 & 4 & 1,5 \\ 0,5 & 1,5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ -4/5 \end{bmatrix} = 74/25.$$

4.18. Для движения, предложенного в задаче 4.17, определить в точке P скорость изменения угла между ортогональными направлениями $\hat{\mathbf{v}} = (3\hat{\mathbf{e}}_1 - 4\hat{\mathbf{e}}_3)/5$ и $\hat{\boldsymbol{\mu}} = (4\hat{\mathbf{e}}_1 + 3\hat{\mathbf{e}}_3)/5$.

Пользуясь результатами задачи 3.20, скорость сдвига $\dot{\gamma}_{\mu\nu}$ можно найти по формуле $\dot{\gamma}_{\mu\nu} = \hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot 2\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{v}}$, или в матричной форме

$$\dot{\gamma}_{\mu\nu} = [4/5, 0, 3/5] \begin{bmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ -4/5 \end{bmatrix} = 89/25.$$

4.19. Дано стационарное поле скорости $v_1 = 2x_3$, $v_2 = 2x_3$, $v_3 = 0$. Найти главные направления и главные значения тензора скоростей деформации.

В данном случае

$$[\partial v_i / \partial x_j] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

и главные значения λ тензора D_{ij} находятся из уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 2\lambda,$$

откуда $\lambda_I = +\sqrt{2}$, $\lambda_{II} = 0$, $\lambda_{III} = -\sqrt{2}$.

Преобразование тензора к главным осям дается матрицей

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

и приводит тензор скоростей деформации к виду

$$[D_{ij}^*] = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

4.20. Определить максимальную скорость сдвига $\dot{\gamma}_{\max}$ для движения, заданного в задаче 4.19.

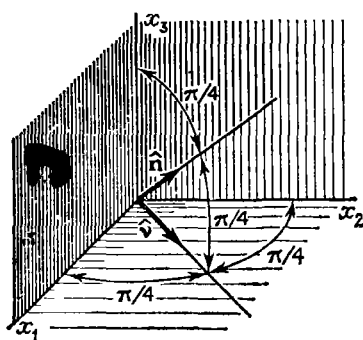


Рис. 4.3.

По аналогии с нахождением главных деформаций сдвига в гл. 3 найдем максимальную скорость сдвига $\dot{\gamma}_{\max} = (\lambda_I - \lambda_{III})/2 = \sqrt{2}$.

Этот же результат получится, если заметить, что указанное движение представляет собой простой сдвиг, параллельный плоскости x_1x_2 в направлении вектора $\hat{v} = (\hat{e}_1 + \hat{e}_2)/\sqrt{2}$ (рис. 4.3). Поэтому, как и прежде,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{\max} &= \dot{\gamma}_{\mu\nu} = \\ &= [0, 0, 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Следует также заметить, что максимальная скорость удлинения для данного движения имеет место в направлении $\hat{n} = (\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \sqrt{2}\hat{e}_3)/2$, как было найдено в задаче 4.19. Таким образом,

$$\lambda_I = d(\hat{n}) = [1/2, 1/2, \sqrt{2}/2] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \sqrt{2}.$$

Материальные производные от объемов, площадей, интегралов и т. д. (§ 4.6—4.7)

4.21. Вычислить вторую материальную производную по времени от скалярного произведения двух линейных элементов, т. е. найти $d^2(dx^2)/dt^2$.

По формуле (4.45) $\frac{d(dx_i)}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k$, но равенство (4.48) показывает, что $\frac{d(dx^2)}{dt} = 2D_{ij}dx_idx_j$. Поэтому

$$\frac{d^2(dx^2)}{dt^2} = 2 \left[\frac{dD_{ij}}{dt} dx_idx_j + D_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k dx_j + D_{ij} dx_i \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dx_k \right].$$

После простой операции по переименованию индексов суммирования получим

$$\frac{d^2(dx^2)}{dt^2} = 2 \left[\frac{dD_{ij}}{dt} + D_{kj} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + D_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right] dx_i dx_j.$$

4.22. Найти материальную производную $\frac{d}{dt} \int_S p_i dS_i$ от потока некоторой векторной величины p_i через поверхность S .

По формуле (4.57)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_S p_i dS_i &= \int_S \left[\frac{dp_i}{dt} + p_i \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right] dS_i - \int_S p_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} dS_k = \\ &= \int_S \left[\frac{dp_i}{dt} + p_i \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - p_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right] dS_i. \end{aligned}$$

4.23. Доказать, что формулу для производной от потока, полученную в задаче 4.22, в символических обозначениях можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{p}) + \nabla \times (\mathbf{p} \times \mathbf{v}) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS.$$

Переписывая непосредственно в символических обозначениях результат задачи 4.22, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \int_S \left[\frac{d\mathbf{p}}{dt} + \mathbf{p} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \\ &= \int_S \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{p} + \mathbf{p} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \end{aligned}$$

Теперь (см. задачу 1.65) воспользуемся векторным тождеством

$$\nabla \times (\mathbf{p} \times \mathbf{v}) = \mathbf{p} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{p}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{v};$$

тогда

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{p}) + \nabla \times (\mathbf{p} \times \mathbf{v}) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS.$$

4.24. Представить теорему Рейнольдса о переносе, выраженную формулами (4.53) и (4.54), в символических обозначениях.

Пусть $P^*(\mathbf{x}, t)$ — любая тензорная функция эйлеровых координат и времени. Тогда (4.53) записывается так:

$$\frac{d}{dt} \int_V P^*(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \left[\frac{\partial P^*}{\partial t} + \nabla \cdot (P^* \mathbf{v}) \right] dV.$$

По теореме Гаусса — Остроградского этому выражению придадим вид, соответствующий (4.54):

$$\frac{d}{dt} \int_V P^*(x, t) dV = \int_V \frac{\partial P^*}{\partial t} dV + \int_S P^* \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS.$$

4.25. Если функция $P^*(x, t)$ в задаче 4.24 есть скалярная величина, равная 1, то интеграл в левой части есть просто мгновенный объем некоторой части континуума. Найти материальную производную от этого объема.

Используя векторную форму равенства (4.53) в том виде, в котором она приведена в задаче 4.24, получаем $\frac{d}{dt} \int_V dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV$. Здесь $\nabla \cdot \mathbf{v} dV$ представляет скорость изменения dV , и поэтому $\nabla \cdot \mathbf{v}$ называют *скоростью кубического расширения*. Это соотношение можно также установить непосредственным дифференцированием (4.38); см. задачу 4.43.

Смешанные задачи

4.26. Используя определение вектора завихренности (4.29) $\mathbf{q} = \text{rot } \mathbf{v}$, доказать, что $q_i = \epsilon_{ijk} V_{kj}$ и что $2V_{ij} = \epsilon_{ijk} q_k$.

Представим выражение для $\mathbf{q}$ (4.29) в виде суммы $q_i = \epsilon_{ijk} v_{k,j} = \epsilon_{ijk} (v_{[k,i]} + v_{(k,i)})$. А так как $\epsilon_{ijk} v_{(k,i)} = 0$ (см., например, задачу 1.50), то $q_i = \epsilon_{ijk} v_{[k,i]} = \epsilon_{ijk} V_{kj}$. Отсюда окончательно получим

$$\epsilon_{irs} q_i = \epsilon_{irs} \epsilon_{ijk} V_{kj} = (\delta_{rs} \delta_{ik} - \delta_{rk} \delta_{is}) V_{kj} = 2V_{sr}.$$

4.27. Доказать, что ускорение $\mathbf{a}$ можно записать в виде

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{q} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2.$$

Согласно (4.18), $a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + 2v_k V_{ik} + \frac{1}{2} \frac{\partial (v_k v_k)}{\partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \epsilon_{ijk} q_j v_k + \frac{1}{2} \frac{\partial (v_k v_k)}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Читатель может сам убедиться в том, что это индексная форма доказываемого равенства.

4.28. Доказать, что $d(\ln J)/dt = \text{div } \mathbf{v}$.

Запишем $\partial x_i / \partial X_P$ в виде $x_{i,P}$, так что $J = \epsilon_{PQR} x_{1,P} x_{2,Q} x_{3,R}$ и $\dot{J}$ будет представлено суммой трех определителей:

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \epsilon_{PQR} (\dot{x}_{1,P} x_{2,Q} x_{3,R} + x_{1,P} \dot{x}_{2,Q} x_{3,R} + x_{1,P} x_{2,Q} \dot{x}_{3,R}). \text{ Далее, } \dot{x}_{1,P} = v_{1,P} x_{S,P} \\ \text{и т. д., поэтому} \\ \dot{J} &= \epsilon_{PQR} (v_{1,S} x_{S,P} x_{2,Q} x_{3,R} + x_{1,P} v_{2,S} x_{S,Q} x_{3,R} + x_{1,P} x_{2,Q} v_{3,S} x_{S,R}). \end{aligned}$$

Из девяти определителей третьего порядка, получающихся при суммировании этого выражения по S , только три отличны от нуля. Таким образом, $\vec{J} = v_{1,1}J + v_{2,2}J + v_{3,3}J = v_{S,S}J$, или $\vec{J} = J(\nabla \cdot \mathbf{v})$ и, следовательно, $d(\ln J)/dt = \operatorname{div} \mathbf{v}$.

4.29. Доказать, что при установившемся движении среды $(\partial v_i / \partial t = 0)$ линии тока и траектории совпадают.

Как было показано в задаче 4.7, линии тока в данный момент времени t являются решениями дифференциальных уравнений $dx_1/v_1 = dx_2/v_2 = dx_3/v_3$, а траектории — решениями дифференциальных уравнений $dx_i/dt = v_i(\mathbf{x}, t)$. Если $v_i = v_i(\mathbf{x})$, то уравнения траекторий принимают вид $dt = dx_1/v_1 = dx_2/v_2 = dx_3/v_3$ и, следовательно, совпадают с уравнениями линий тока.

4.30. Для стационарного поля скоростей $v_1 = x_1^2 x_2 + x_2^3$, $v_2 = -x_1^3 - x_1 x_2^2$, $v_3 = 0$ найти главные значения тензора скоростей деформации $\mathbf{D}$ в произвольной точке $P(x_1, x_2, x_3)$.

По формуле (4.19) $\partial v_i / \partial x_j = D_{ij} + V_{ij}$, или

$$\begin{pmatrix} 2x_1x_2 & x_1^2 + 3x_2^2 & 0 \\ -3x_1^2 - x_2^2 & -2x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 & -x_1^2 + x_2^2 & 0 \\ -x_1^2 + x_2^2 & -2x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 0 & 2(x_1^2 + x_2^2) & 0 \\ -2(x_1^2 + x_2^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Главные значения $d_{(i)}$ являются решениями уравнения

$$\begin{vmatrix} 2x_1x_2 - d & -x_1^2 + x_2^2 & 0 \\ -x_1^2 + x_2^2 & -2x_1x_2 - d & 0 \\ 0 & 0 & -d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -d[-4x_1^2x_2^2 + d^2 - (x_2^2 - x_1^2)^2].$$

Отсюда $d_{(1)} = 0$, $d_{(2)} = -(x_1^2 + x_2^2)$, $d_{(3)} = x_1^2 + x_2^2$. Эти значения можно упорядочить по мере их убывания $d_I = x_1^2 + x_2^2$, $d_{II} = 0$, $d_{III} = -(x_1^2 + x_2^2)$.

4.31. Доказать равенство (4.43), вычислив материальную производную от площади dS_i , записанной в виде векторного произведения $dS_i = \varepsilon_{ijk} dx_j^{(2)} dx_k^{(3)}$.

Используя формулу (3.33), получим $dS_i = \varepsilon_{ijk} (\partial x_j / \partial X_2) dX_2 (\partial x_k / \partial X_3) dX_3$ и

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_1} dS_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \frac{\partial x_j}{\partial X_2} \frac{\partial x_k}{\partial X_3} dX_2 dX_3 = J dX_2 dX_3.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_p} \frac{\partial x_i}{\partial X_1} dS_i = \delta_{ip} dS_i = dS_p = \frac{\partial X_1}{\partial x_p} J dX_2 dX_3.$$

и, учитывая результат задачи 4.28, находим

$$\begin{aligned}\frac{dS_p}{dt} &= \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_p} J \frac{\partial v_q}{\partial x_q} - J \frac{\partial X_1}{\partial x_q} \frac{\partial v_q}{\partial x_p} \right) dX_2 dX_3 = \\ &= \left(\epsilon_{pjk} \frac{\partial x_j}{\partial X_2} dX_2 \frac{\partial x_k}{\partial X_3} dX_3 \right) \frac{\partial v_q}{\partial x_q} - \left(\epsilon_{qjk} \frac{\partial x_j}{\partial X_2} dX_2 \frac{\partial x_k}{\partial X_3} dX_3 \right) \frac{\partial v_q}{\partial x_p} = \\ &= \left(\frac{\partial v_q}{\partial x_q} \right) dS_p - \left(\frac{\partial v_q}{\partial x_p} \right) dS_q.\end{aligned}$$

4.32. Используя результаты задач 4.27 и 4.23, доказать, что материальная скорость изменения потока завихренности, т. е. производная $\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$, равна потоку вектора rot от ускорения $\mathbf{a}$.

Применим операцию rot к выражению ускорения, полученному в задаче 4.27,

$$\nabla \times \mathbf{a} = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{q} \times \mathbf{v}) + \nabla \times \nabla (v^2/2)$$

и учтем при этом, что $\mathbf{q} = \nabla \times \mathbf{v}$ и $\nabla \times \nabla (v^2/2) = 0$; тогда $\nabla \times \mathbf{a} = \partial \mathbf{q} / \partial t + \nabla \times (\mathbf{q} \times \mathbf{v}) = d\mathbf{q} / dt + \mathbf{q} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{v}$. Если в формулу задачи 4.23 вместо ρ подставить $\mathbf{q}$, то получим требуемый результат

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S \left[\frac{d\mathbf{q}}{dt} + \mathbf{q} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS.$$

4.33. Доказать, что для вектора завихренности $\mathbf{q}$ имеет место равенство $\frac{\partial}{\partial t} \int_V q_i dV = \int_S [e_{ijk} a_k + q_j v_i - q_i v_j] dS_j$.

Тождество задачи 4.32 $\nabla \times \mathbf{a} = \partial \mathbf{q} / \partial t + \nabla \times (\mathbf{q} \times \mathbf{v})$ можно переписать в индексной форме $\partial q_i / \partial t = e_{ijk} a_k - e_{isp} (e_{pmr} q_m v_r)_{,s}$; тогда

$$\int_V \frac{\partial q_i}{\partial t} dV = \int_V [e_{ijk} a_k - (e_{isp} e_{pmr} q_m v_r)_{,s}] dV.$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса — Остроградского (1.157), получим

$$\begin{aligned}\int_V \frac{\partial q_i}{\partial t} dV &= \int_S e_{ijk} a_k dS_j - \int_S (\delta_{im} \delta_{sr} - \delta_{ir} \delta_{sm}) (q_m v_r) dS_s = \\ &= \int_S [e_{ijk} a_k + q_j v_i - q_i v_j] dS_j.\end{aligned}$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

4.34. Дан закон движения среды $x_1 = X_1 e^t + X_3 (e^t - 1)$, $x_2 = X_2 + X_3 (e^t - e^{-t})$, $x_3 = X_3$. Показать, что $J \neq 0$, и найти компоненты скорости.

Ответ: $v_1 = (X_1 + X_3) e^t$, $v_2 = X_3 (e^t + e^{-t})$, $v_3 = 0$, или $v_1 = x_1 - x_3$, $v_2 = x_3 (e^t + e^{-t})$, $v_3 = 0$.

4.35. Поле скоростей задано в переменных Лагранжа $v_1 = -X_2 e^{-t}$, $v_2 = -X_3$, $v_3 = 2t$. Найти компоненты ускорения в эйлеровой форме.

Ответ: $a_1 = e^{-t}(x_2 + tx_3 - t^3)$, $a_2 = 0$, $a_3 = 2$.

4.36. Доказать, что поле скоростей $v_i = \varepsilon_{ijk} b_j x_k + c_i$, где b_i и c_i — постоянные векторы, представляет вращение абсолютно твердого тела, и определить вектор вихря скорости Ω_i для этого движения.

Ответ: $2\Omega_i = q_i = b_i x_{j,j} - b_i = 2b_i$.

4.37. Доказать, что для течения $v_i = x_i/(1+t)$ линии тока и траектории совпадают.

4.38. Напряженность электрического поля в области, занятой движущейся жидкостью, равна $\lambda = (A \cos 3t)/r$, где $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ и A — константа. Скорость жидкости задана своими компонентами $v_1 = x_1^2 x_2 + x_2^3$, $v_2 = -x_1^3 - x_1 x_2^2$, $v_3 = 0$. Найти $d\lambda/dt$ в точке $P(x_1, x_2, x_3)$.

Ответ: $d\lambda/dt = (-3A \sin 3t)/r$.

4.39. Доказать, что для поля скоростей $v_1 = x_1^2 x_2 + x_2^3$, $v_2 = -x_1^3 - x_1 x_2^2$, $v_3 = 0$ линии тока будут окружностями.

4.40. Дан закон движения сплошной среды $x_1 = X_1$, $x_2 = e^t(X_2 + X_3)/2 + e^{-t}(X_2 - X_3)/2$, $x_3 = e^t(X_2 + X_3)/2 - e^{-t}(X_2 - X_3)/2$. Доказать, что $D_{ij} = de_{ij}/dt$ при $t = 0$. Сравнить эти же тензоры при $t = 0.5$.

4.41. По данному полю скоростей $v_1 = x_1^2 x_2 + x_2^3$, $v_2 = -(x_1^3 + x_1 x_2^2)$, $v_3 = 0$ найти главные оси и главные значения тензора $\mathbf{D}$ в точке $P(1, 2, 3)$.

Ответ: $D_{ij}^* = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$; $a_{ij} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}$.

4.42. Для поля скоростей задачи 4.41 определить скорость удлинения материального отрезка в направлении $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{\mathbf{e}}_1 - 2\hat{\mathbf{e}}_2 + 2\hat{\mathbf{e}}_3)/3$ в точке $P(1, 2, 3)$. Какова максимальная скорость сдвига в точке P ?

Ответ: $d(\hat{\mathbf{v}}) = -24/9$, $\dot{\gamma}_{\max} = 5$.

4.43. Доказать, что $d(\partial x_i / \partial X_j) / dt = v_{i,k} x_{k,j}$, и, используя это равенство, получить формулу (4.41) непосредственно из (4.38).

4.44. Доказать тождество $1/2 \varepsilon_{pqr} (v_s v_{r,s})_{,q} = \Omega_p v_{q,q} + v_q \Omega_{p,q} - \Omega_q v_{p,q}$, где v_i — скорость, а Ω_i — вектор вихря скорости. Показать также, что $v_{i,j} v_{j,i} = D_{ij} D_{ji} - 2\Omega_i \Omega_i$.

4.45. Доказать, что материальная производная от суммарной завихренности вычисляется по формуле

$$\frac{d}{dt} \int_V q_i dV = \int_S [\varepsilon_{ijk} a_k + q_j v_i] dS_j.$$

Основные законы механики сплошной среды

5.1. Сохранение массы. Уравнение неразрывности

Всякий материальный континуум обладает свойством, называемым *массой*. Суммарная масса некоторой части сплошной среды, занимающей в момент t объем пространства V , выражается интегралом

$$m = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV, \quad (5.1)$$

где $\rho(\mathbf{x}, t)$ — непрерывная функция координат, называемая *плотностью*. Закон сохранения массы утверждает, что масса выделенной части среды остается постоянной и, следовательно, материальная производная от (5.1) равна нулю. Если в формуле (4.52) положить $P_{ij\dots}^*(\mathbf{x}, t) \equiv \rho(\mathbf{x}, t)$, то получим выражение для скорости изменения массы m

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right] dV = 0. \quad (5.2)$$

Поскольку это равенство верно для произвольного объема V , подинтегральное выражение само должно обращаться в нуль, т. е.

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho v_{k,k} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0. \quad (5.3)$$

Это уравнение называется *уравнением неразрывности* (или непрерывности). Раскрывая оператор материальной производной, его можно написать в другой равнозначной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (5.4)$$

В *несжимаемой* среде плотность массы каждой частицы не зависит от времени, т. е. $d\rho/dt = 0$, и уравнение (5.3) принимает вид

$$v_{k,k} = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (5.5)$$

Поле скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ в несжимаемой среде можно поэтому представить выражением

$$v_i = \epsilon_{ijk} s_{k,j}, \quad \text{или} \quad \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{s}, \quad (5.6)$$

где функция $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ называется *векторным потенциалом* $\mathbf{v}$.

Уравнение неразрывности можно записывать в лагранжевой, или материальной, форме. Для сохранения массы требуется, чтобы

выполнялось уравнение

$$\int_{V_0} \rho_0(\mathbf{X}, 0) dV_0 = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV. \quad (5.7)$$

Здесь оба интеграла взяты по одним и тем же частицам, т. е. V — это объем, который теперь занимает среда, заполнявшая в момент $t = 0$ объем V_0 . Используя (4.1) и (4.38), интеграл в правой части (5.7) можно преобразовать следующим образом:

$$\int_{V_0} \rho_0(\mathbf{X}, 0) dV_0 = \int_{V_0} \rho(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) J dV_0 = \int_{V_0} \rho(\mathbf{X}, t) J dV_0. \quad (5.8)$$

Соотношение (5.8) должно иметь силу для произвольно выбранного объема V_0 , и поэтому

$$\rho_0 = \rho J. \quad (5.9)$$

Это означает, что произведение ρJ не зависит от времени, так как объем V произволен, т. е. что

$$\frac{d}{dt}(\rho J) = 0. \quad (5.10)$$

Уравнение (5.10) является лагранжевой дифференциальной формой уравнения неразрывности.

5.2. Теорема об изменении количества движения.

Уравнения движения. Уравнения равновесия

На рис. 5.1 изображен движущийся объем сплошной среды V в момент t . На него действуют массовые силы с плотностью распределения b_i . На каждом бесконечно малом элементе dS поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем, действует вектор напряжения $t_i^{(\hat{n})}$. Во всей области, занятой средой, определено поле скоростей $v_i = du_i/dt$. Общее количество движения системы масс, заполняющих объем V , определяется интегралом

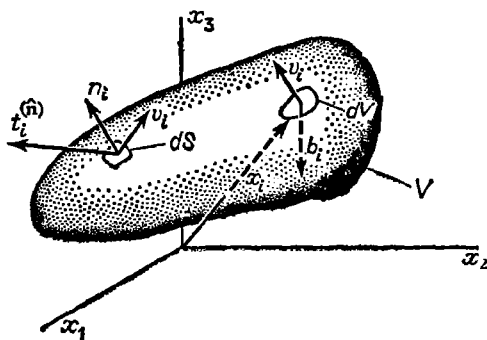


Рис. 5.1.

$$P_i(t) = \int_V \rho v_i dV. \quad (5.11)$$

Основываясь на втором законе Ньютона, теорема об изменении количества движения утверждает, что скорость изменения со

временем количества движения некоторой части континуума равна результирующей сил, действующих на рассматриваемую область ¹⁾. Если внутренние силы, действующие между частицами данного объема (рис. 5.1), подчиняются третьему закону Ньютона о действии и противодействии, то теорема об изменении количества движения для этой системы масс выражается уравнением

$$\int_S \hat{t}_i^{(n)} dS + \int_V \rho b_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV,$$

или

$$\int_S \hat{t}^{(n)} dS + \int_V \rho b dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v dV. \quad (5.12)$$

После подстановки $\hat{t}_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$ в первый интеграл и преобразования интеграла по поверхности в интеграл по объему (согласно теореме Гаусса — Остроградского) это уравнение примет вид

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i) dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV,$$

или

$$\int_V (\nabla_x \cdot \Sigma + \rho b) dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v dV. \quad (5.13)$$

Распишем материальную производную правой части (5.13) и воспользуемся уравнением неразрывности в форме (5.10). Это даст

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV &= \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho v_i J dV_0 = \\ &= \int_{V_0} \left[v_i \frac{d(\rho J)}{dt} + \rho J \frac{dv_i}{dt} \right] dV_0 = \int_V \frac{dv_i}{dt} \rho dV. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Подстановка этого выражения в правую часть (5.13) и объединение членов приводят к интегральной форме теоремы об изменении количества движения:

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i - \rho \dot{v}_i) dV = 0,$$

или

$$\int_V (\nabla_x \cdot \Sigma + \rho b - \rho \dot{v}) dV = 0. \quad (5.15)$$

¹⁾ Теоремы об изменении количества движения и об изменении момента количества движения (см. стр. 183) фактически уже были использованы в гл. 2.— *Прим. перев.*

Так как объем V произволен, само подинтегральное выражение (5.15) должно обращаться в нуль. Полученные таким образом уравнения

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i, \quad \text{или} \quad \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}} \quad (5.16)$$

называются *уравнениями движения*.

Для важного случая равновесия, когда отсутствуют ускорения, из (5.16) сразу получаются уравнения

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0, \quad \text{или} \quad \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \mathbf{b} = 0. \quad (5.17)$$

Они называются *уравнениями равновесия* и широко используются в механике твердого тела.

5.3. Теорема об изменении момента количества движения

Будем предполагать, что *момент количества движения* для сплошной среды равен моменту вектора количества движения относительно какой-либо точки. Так, для части континуума, изображенной на рис. 5.1, полный момент количества движения относительно начала координат по определению равен интегралу

$$N_i(t) = \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho v_k dV, \quad \text{или} \quad \mathbf{N} = \int_V (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) dV, \quad (5.18)$$

где $\mathbf{x}_j$ — радиус-вектор элемента объема dV . *Теорема об изменении момента количества движения* утверждает, что скорость изменения момента количества движения произвольно выбранной части континуума относительно любой точки равна главному моменту (относительно той же точки) массовых и поверхностных сил, действующих на рассматриваемую область среды (более общая формулировка этой теоремы дана в задаче 5.35). Для объема V сплошной среды можно написать уравнение момента количества движения в интегральной форме:

$$\int_S \epsilon_{ijk} x_j \hat{t}_k^{(n)} dS + \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = \frac{d}{dt} \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho v_k dV, \quad (5.19)$$

или

$$\int_S (\mathbf{x} \times \hat{\mathbf{t}}^{(n)}) dS + \int_V (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{b}) dV = \frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) dV.$$

Уравнение (5.19) справедливо для таких сред, в которых силы взаимодействия частиц равны по величине, коллинеарны и противоположны по направлению, а распределенные моменты отсутствуют.

Уравнение момента количества движения не всегда представляет собой новое дифференциальное уравнение. Если в (5.19) подставить $\hat{t}_k^{(n)} = \sigma_{pk} n_p$ и предположить симметрию тензора напряжений, то уравнение будет удовлетворено тождественно при учете только

соотношения (5.16). Если же симметрия тензора напряжений не предполагается заранее, то она получается как прямое следствие уравнения (5.19), которое после подстановки $t_k^{(\hat{n})} = \sigma_{pk}n_p$ сводится к виду

$$\int_V \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0, \quad \text{или} \quad \int_V \Sigma_o dV = 0. \quad (5.20)$$

В силу произвольности объема V это ведет к равенствам

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0, \quad \text{или} \quad \Sigma_o = 0, \quad (5.21)$$

откуда видно, что $\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$.

5.4. Сохранение энергии. Первый закон термодинамики. Уравнение энергии

Если изучаются только механические величины, то закон сохранения механической энергии для объема сплошной среды можно вывести непосредственно из уравнения движения (5.16). Чтобы сделать это, нужно сначала (5.16) скалярно умножить на вектор скорости v_i , а затем результат проинтегрировать по объему V . Таким образом,

$$\int_V \rho v_i \dot{v}_i dV = \int_V v_i \sigma_{ji,j} dV + \int_V \rho v_i b_i dV. \quad (5.22)$$

Интеграл

$$\int_V \rho v_i \dot{v}_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{v_i v_i}{2} dV = \frac{d}{dt} \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV = \frac{dK}{dt} \quad (5.23)$$

представляет скорость изменения со временем *кинетической энергии* K объема V сплошной среды. Заметим, что $v_i \sigma_{ji,j} = (v_i \sigma_{ji})_{,j} - v_i \rho_{,j} v_{ji}$ и, согласно (4.19), $v_{i,j} = D_{ij} + V_{ij}$; если еще учесть, что $V_{ij} \sigma_{ji} = 0$, то уравнение (5.22) можно записать в виде

$$\frac{dK}{dt} + \int_V D_{ij} \sigma_{ji} dV = \int_V (v_i \sigma_{ji})_{,j} dV + \int_V \rho v_i b_i dV. \quad (5.24)$$

Наконец, преобразуя (по теореме Гаусса — Остроградского) первый интеграл в правой части (5.24) в интеграл по поверхности и используя тождество $t_i^{(\hat{n})} = \sigma_{ji} n_j$, получаем *уравнение механической энергии* для сплошной среды

$$\frac{dK}{dt} + \int_V D_{ij} \sigma_{ji} dV = \int_S v_i t_i^{(\hat{n})} dS + \int_V \rho b_i v_i dV. \quad (5.25)$$

Оно устанавливает связь между скоростью изменения полной механической энергии континуума, стоящей слева, и мощностью

(работой за единицу времени) поверхностных и массовых сил, которая стоит в правой части уравнения. Интеграл в левой части называется скоростью изменения *внутренней механической энергии* (эта величина со знаком минус называется также работой внутренних поверхностных сил в единицу времени). Тогда (5.25) можно записать короче:

$$\frac{dK}{dt} + \frac{\delta P}{dt} = \frac{\delta \dot{W}}{dt}, \quad (5.26)$$

где $-\delta P/dt$ и $\delta W/dt$ — соответственно мощность внутренних и внешних сил, а символ δ указывает, что соответствующее приращение в общем случае не является точным дифференциалом какой-либо функции.

Если, кроме механической, следует учитывать и другие виды энергии, то закон сохранения энергии должен использоваться в самой общей своей форме. В такой форме этот закон утверждает, что *скорость изменения со временем кинетической плюс внутренней энергии равна сумме механической работы внешних сил, совершаемой в единицу времени, и притока прочих видов энергии за единицу времени*. Приток энергии может включать в себя тепловую, химическую, электромагнитную энергию и т. д. В дальнейшем будем рассматривать только механическую и тепловую энергии, а уравнением энергии будет знаменитый *первый закон термодинамики*.

Для термомеханического континуума скорость изменения внутренней энергии U обычно представляют интегралом

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho u dV = \int_V \rho \dot{u} dV, \quad (5.27)$$

где u называют *удельной внутренней энергией*. (Символ u для удельной внутренней энергии столь прочно установился в литературе, что и мы будем пользоваться им в уравнении энергии этой главы; вероятность же того, что он будет спутан с символом абсолютной величины вектора перемещения u_i , очень мала.) Пусть вектор c_i характеризует *поток тепла* через единицу площади в единицу времени за счет теплопроводности, и пусть z — *постоянная теплового излучения* на единицу массы в единицу времени. Тогда скорость притока тепла к среде выражается суммой

$$\frac{\delta Q}{dt} = - \int_S c_i n_i dS + \int_V \rho z dV. \quad (5.28)$$

Закон изменения энергии термомеханического континуума записывается уравнением

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{\delta W}{dt} + \frac{\delta Q}{dt}, \quad (5.29)$$

или (при представлении всех величин интегралами)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{v_i v_i}{2} dV + \int_V \rho \dot{u} dV = \\ = \int_S \hat{t}_i^{(n)} v_i dS + \int_V \rho v_i b_i dV + \int_V \rho z dV - \int_S c_i n_i dS. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Преобразуя здесь интегралы по поверхности в интегралы по объему (теорема Гаусса — Остроградского) и снова используя произвольность объема V , приходим к локальной форме уравнения энергии:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + u \right) = \frac{1}{\rho} (\sigma_{ij} v_i)_{,j} + b_i v_i - \frac{1}{\rho} c_{i,i} + z, \quad (5.31)$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{v^2}{2} + \frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \Sigma : D - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot c + b \cdot v + z + v \cdot \nabla_x \cdot \Sigma.$$

Внутри произвольного малого элемента объема, для которого справедливо локальное уравнение энергии (5.31), должно также быть выполнено и уравнение количества движения (5.16). Возьмем скалярное произведение уравнения (5.16) и вектора скорости: $\rho v_i v_i = v_i \sigma_{ij,j} + \rho v_i b_i$, сделаем с ним некоторые простые преобразования, а затем вычтем его из (5.31). В результате получим более короткую, но крайне полезную форму записи локального уравнения энергии

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} - \frac{1}{\rho} c_{i,i} + z. \quad (5.32)$$

Это уравнение утверждает, что *скорость изменения внутренней энергии равна сумме мощности напряжений плюс приток тепла к среде*.

5.5. Уравнения состояния. Энтропия.

Второй закон термодинамики

Задать *состояние* термодинамической системы (в нашем случае континуума) это значит полностью охарактеризовать систему. Это описание в общем случае определяется несколькими термодинамическими и кинематическими величинами, которые называются *параметрами состояния*. Если параметры состояния изменяются со временем, то происходит *термодинамический процесс*. Параметры состояния, используемые для характеристики данной системы, обычно не все независимы: между ними существуют функциональные связи, которые выражаются так называемыми *уравнениями состояния*. Любой параметр состояния, который можно представить однозначной функцией других параметров состояния, называется *функцией состояния*.

Как было установлено в предыдущем параграфе, первый закон термодинамики постулирует взаимный переход механической и тепловой энергии одной в другую. Соотношение, выражающее переход тепла и работы в кинетическую и внутреннюю энергии во время термодинамического процесса, заключено в уравнении энергии. Однако первый закон оставляет без ответа вопрос, является ли этот переход *обратимым* или *необратимым*. Все реальные процессы необратимы, но обратимые процессы представляют очень полезную идеализацию, так как во многих ситуациях диссипацию энергии можно считать пренебрежимо малой. Основной критерий необратимости содержится во *втором законе термодинамики*, который устанавливает некоторые ограничения на производство энтропии.

Второй закон термодинамики постулирует существование двух различных функций состояния — *абсолютной температуры* T и *энтропии* S , свойства которых будут указаны ниже. Абсолютная температура T — положительная величина, которая является функцией только эмпирической температуры θ . Считаем, что энтропия обладает свойством аддитивности, т. е. что полная энтропия системы равна сумме энтропий ее частей. В механике сплошной среды вводят *удельную энтропию* (на единицу массы), или *плотность энтропии* s , так что полная энтропия S равна интегралу $\int \rho s dV$. Энтропия

системы может меняться либо из-за взаимодействия с окружающей средой, либо за счет изменений, которые происходят внутри самой системы; поэтому можно написать

$$ds = ds^{(e)} + ds^{(i)}, \quad (5.33)$$

где ds — приращение удельной энтропии, $ds^{(e)}$ — приращение, вызванное взаимодействием с внешней средой, а $ds^{(i)}$ — внутреннее изменение. Приращение $ds^{(i)}$ никогда не бывает отрицательным. Оно равно нулю при обратимых процессах и положительно при необратимых. Таким образом,

$$ds^{(i)} > 0 \quad (\text{при необратимых процессах}), \quad (5.34)$$

$$ds^{(i)} = 0 \quad (\text{при обратимых процессах}). \quad (5.35)$$

Если при обратимом процессе обозначить приток тепла на единицу массы системы через $dq_{(R)}$, то изменение $ds^{(e)}$ выразится формулой

$$ds^{(e)} = dq_{(R)}/T \quad (\text{при обратимых процессах}). \quad (5.36)$$

5.6. Неравенство Клаузиуса — Дюгема.

Диссипативная функция

Согласно второму закону термодинамики, скорость изменения полной энтропии S сплошной среды, занимающей объем V , никогда не может быть меньше, чем сумма притока энтропии через границу

объема и энтропии, производимой внутри объема внешними источниками. Математически этот закон изменения энтропии выражается в интегральной форме в виде *неравенства Клаузиуса — Дюгема*

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dV \geq \int_V \rho e dV - \int_S \frac{c_i n_i}{T} dS, \quad (5.37)$$

где e — мощность локальных внешних источников энтропии, отнесенная к единице массы. Равенство в формуле (5.37) осуществляется для обратимых процессов; неравенство относится к процессам необратимым.

Неравенство Клаузиуса — Дюгема верно при произвольном выборе объема V , так что, преобразуя в формуле (5.37) интеграл по поверхности в интеграл по объему, прежним методом приходим к локальной форме соотношения для *скорости внутреннего производства энтропии* γ ; отнесенной к единице массы:

$$\gamma \equiv \frac{ds}{dt} - e - \frac{1}{\rho} \left(\frac{c_i}{T} \right)_{,i} \geq 0. \quad (5.38)$$

Это неравенство должно удовлетворяться при каждом процессе и при любом выборе параметров состояния. По этой причине оно играет важную роль, накладывая известные ограничения на так называемые определяющие уравнения, которые будут обсуждаться в следующем параграфе.

В механике сплошной среды часто предполагают (основываясь на статистической механике необратимых процессов), что тензор напряжений можно разложить на две части:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(C)} + \sigma_{ij}^{(D)}, \quad (5.39)$$

где $\sigma_{ij}^{(C)}$ — тензор *консервативных* напряжений, а $\sigma_{ij}^{(D)}$ — тензор *диссипативных* напряжений. При этом предположении уравнение энергии (5.32) можно переписать с учетом (4.25) в виде

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij}^{(C)} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{1}{\rho} \sigma_{ij}^{(D)} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{dq}{dt}. \quad (5.40)$$

В этом уравнении $(1/\rho) \sigma_{ij}^{(D)} \dot{\epsilon}_{ij}$ представляет собой скорость диссипации энергии в единице массы напряжениями ¹⁾, а dq/dt — скорость притока тепла к среде на единицу массы. Если в среде проис-

¹⁾ Так поступают, например, при изучении движения вязкой жидкости, когда напряжения представляют в виде суммы давления и вязких напряжений. В теории пластичности, наоборот, раскладывают деформации на «обратимые» упругие $\epsilon_{ij}^{(E)}$ и «необратимые» пластические $\epsilon_{ij}^{(P)}$ и скорость диссипации энергии представляют в виде $(1/\rho) \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{(P)}$; см., например: Седов Л. И., Механика сплошной среды, т. II, гл. X, § 3, «Наука», изд. 2, М., 1973.— Прим. ред.

ходит обратимый процесс, то диссипации энергии не будет; к тому же $dq/dt = dq_{(R)}/dt$, так что, комбинируя (5.40) и (5.36), получаем

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij}^{(C)} \dot{\epsilon}_{ij} + T \frac{ds}{dt}. \quad (5.41)$$

Для необратимых процессов, которые описываются уравнением (5.40), скорость производства энтропии можно найти из уравнения (5.41)¹⁾. Таким образом,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{\rho T} \sigma_{ij}^{(D)} \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (5.42)$$

Скаляр $\sigma_{ij}^{(D)} \dot{\epsilon}_{ij}$ называется *диссипативной функцией*. Для необратимых адиабатических процессов ($dq = 0$), согласно второму закону термодинамики, $ds/dt > 0$. Тогда из (5.42) следует, что диссипативная функция является *положительно определенной*, так как ρ и T всегда положительны.

5.7. Определяющие уравнения.

Термомеханический и механический континуумы

В предыдущих параграфах этой главы было выведено несколько уравнений, которые должны выполняться для всех процессов или движений, какие могут происходить в сплошной среде. Для термомеханической среды, где механические и тепловые явления взаимосвязаны, основными уравнениями будут следующие:

а) *уравнение неразрывности* (5.4)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0; \quad (5.43)$$

б) *уравнения движения* (5.16)

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i, \quad \text{или} \quad \nabla_x \cdot \Sigma + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}}; \quad (5.44)$$

в) *уравнение энергии* (5.32)

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} - \frac{1}{\rho} c_{i,i} + z, \quad \text{или} \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \Sigma : \mathbf{D} - \rho \nabla \cdot \mathbf{c} + z. \quad (5.45)$$

При предположении, что массовые силы b_i и распределенные источники тепла z заданы, уравнения (5.43), (5.44) и (5.45) составляют систему *пяти* независимых уравнений, содержащих *четырнадцать* неизвестных функций координат и времени. Неизвестными являются: *плотность* ρ , три компоненты *скорости* v_i (или, что равно-

¹⁾ При этом делается существенное предположение, что (5.41) выполняется также и при необратимых процессах. В термодинамике (5.41) носит название *тождества Гиббса*. — Прим. ред.

сильно, компоненты *перемещения* u_i), шесть независимых компонент *напряжения* σ_{ij} , три компоненты вектора *потока тепла* c_i и плотность *внутренней энергии* u . В дополнение к этому должно быть выполнено неравенство Клаузиуса — Дюгема (5.38)

$$\frac{ds}{dt} - e - \frac{1}{\rho} \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} \geq 0, \quad (5.46)$$

предписывающее положительность производства энтропии. Оно добавляет еще две неизвестные — *плотность энтропии* s и *абсолютную температуру* T . Значит, чтобы сделать систему замкнутой, нужно изыскать дополнительно еще *одиннадцать* уравнений. *Шесть* из них известны как *определяющие уравнения*, которые характеризуют частные физические свойства изучаемой среды. Из остальных пяти *три* будут соотношениями для задания закона *теплопроводности*, а два — *термодинамическими уравнениями состояния*; например, *калорическое* уравнение состояния и уравнение для *энтропии*. Характерная формулировка задачи для термомеханического континуума будет дана в следующей главе.

Следует отметить, что назначение определяющих уравнений состоит в том, чтобы установить математические соотношения между статическими, кинематическими и термодинамическими параметрами, описывающими поведение материала при наличии механических и термодинамических воздействий. Так как реальные среды реагируют на различные нагрузки крайне сложным образом, определяющие уравнения не пытаются отразить все наблюдаемые явления, связанные с конкретным материалом, а скорее служат для того, чтобы ввести некоторые *идеализированные среды*, такие, например, как идеально упругое тело или идеальная жидкость. Такие идеализации, или, как они иногда называются, *модели сред*, очень полезны тем, что они разумно отражают поведение реальных сред в определенном интервале нагрузок и температур.

Во многих ситуациях взаимодействием механических и термодинамических процессов можно пренебречь; исследованием такого типа является, например, теория *несвязанной термоупругости*. В этом случае чисто механические процессы описываются уравнениями (5.43) и (5.44). Система уравнений, образованная (5.43) и (5.44), состоит из *четырёх* уравнений с *десятью* неизвестными. Нужны еще *шесть* определяющих уравнений, чтобы сделать систему замкнутой. В несвязанной теории, где не учитывается взаимодействие механических и тепловых процессов, определяющие уравнения содержат только *динамические* (напряжения) и *кинематические* (скорости, перемещения, деформации) параметры и часто представляют собой *соотношения между напряжениями и деформациями*. Кроме того, в такой теории поле температур обычно считается известным или, быть может, задача теплопроводности решается отдельно и незави-

симо от механической задачи. При *изотермических* процессах температура предполагается постоянной и задача является чисто механической.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Уравнение неразрывности (§ 5.1)

5.1. В гл. 4 описано *безвихревое* движение, для которого вектор вихря скорости тождественно равен нулю. Найти вид уравнения неразрывности для такого движения.

Согласно (4.29), $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, если $\mathbf{q} \equiv 0$, и, следовательно, $\mathbf{v}$ становится градиентом скалярного поля $\varphi(x_i, t)$; см. задачу 1.50. Таким образом, $v_i = \varphi_{,i}$ и уравнение неразрывности (5.3) имеет вид $d\rho/dt + \rho\varphi_{,kk} = 0$, или $d\rho/dt + \rho\nabla^2\varphi = 0$.

5.2. Пусть функция $P_{ij\dots}^{**}(x, t)$ представляет любую скалярную, векторную или тензорную величину, отнесенную к единице массы сплошной среды, так что $P_{ij\dots}^{*}(x, t) = \rho P_{ij\dots}^{**}(x, t)$. Показать, что

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho P_{ij\dots}^{**}(x, t) dV = \int_V \rho \frac{dP_{ij\dots}^{**}(x, t)}{dt} dV.$$

По формуле (4.52)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho P_{ij\dots}^{**} dV &= \int_V \left[\frac{d}{dt} (\rho P_{ij\dots}^{**}) + \rho P_{ij\dots}^{**} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right] dV = \\ &= \int_V \left[\rho \frac{dP_{ij\dots}^{**}}{dt} + P_{ij\dots}^{**} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right] dV = \int_V \rho \frac{dP_{ij\dots}^{**}}{dt} dV, \end{aligned}$$

так как, согласно (5.3), $d\rho/dt + \rho v_{k,k} = 0$.

5.3. Доказать, что лагранжева форма $d(\rho J)/dt = 0$ уравнения неразрывности и эйлера его форма $d\rho/dt + \rho v_{k,k} = 0$ эквивалентны.

Выполним дифференцирование $d(\rho J)/dt = (d\rho/dt) J + \rho dJ/dt = 0$ и воспользуемся результатом задачи 4.28 $dJ/dt = J v_{k,k}$. Это дает $d(\rho J)/dt = J (d\rho/dt + \rho v_{k,k}) = 0$.

5.4. Показать, что поле скоростей $v_i = A x_i/r^3$, где $x_i x_i = r^2$ и A — произвольная константа, удовлетворяет уравнению неразрывности несжимаемой жидкости.

Согласно (5.5), для несжимаемой жидкости $v_{k,k} = 0$. В нашем случае

$$v_{i,k} = A (x_{i,k}/r^3 - 3x_i x_k/r^5) = A (\delta_{ik}/r^3 - 3x_i x_k/r^5);$$

следовательно, $v_{k,k} = (3-3)/r^3 = 0$ и уравнение неразрывности несжимаемой жидкости удовлетворяется.

5.5. Для поля скоростей $v_i = x_i/(1+t)$ показать, что $\rho x_1 x_2 x_3 = \rho_0 X_1 X_2 X_3$.

В этом случае $v_{k,k} = 3/(1+t)$ и, проинтегрировав (5.3), получаем $\ln \rho = -\ln(1+t)^3 + \ln C$, где C — постоянная интегрирования. Так как $\rho = \rho_0$ при $t=0$, это равенство принимает вид $\rho = \rho_0/(1+t)^3$. Далее, интегрируя уравнения $dx_i/x_i = dt/(1+t)$ (суммирование по i не проводится), находим $x_i = X_i/(1+t)$, откуда $\rho x_1 x_2 x_3 = \rho_0 X_1 X_2 X_3$.

Количество движения и момент количества движения.

Уравнения движения (§ 5.2—5.3)

5.6. Непосредственным расписыванием обеих частей доказать справедливость тождества $\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} \hat{e}_i = \Sigma_v$, использованного в формулах (5.20) и (5.21).

Согласно (1.15) и (2.8),

$$\begin{aligned} \Sigma_v &= \sigma_{11} \hat{e}_1 \times \hat{e}_1 + \sigma_{12} \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 + \sigma_{13} \hat{e}_1 \times \hat{e}_3 + \dots + \sigma_{33} \hat{e}_3 \times \hat{e}_3 = \\ &= (\sigma_{23} - \sigma_{32}) \hat{e}_1 + (\sigma_{31} - \sigma_{13}) \hat{e}_2 + (\sigma_{12} - \sigma_{21}) \hat{e}_3. \end{aligned}$$

Раскрывая $\epsilon_{ijk} \sigma_{jk}$, приходим к тем же выражениям: $\sigma_{23} - \sigma_{32}$ при $i=1$, $\sigma_{31} - \sigma_{13}$ при $i=2$, $\sigma_{12} - \sigma_{21}$ при $i=3$.

5.7. Пусть на континуум действуют распределенные массовые моменты (m_i на единицу объема). Доказать, что уравнения (5.16) остаются в силе, но тензор напряжений нельзя больше считать симметричным.

Уравнения (5.16) получены из условия равновесия сил, поэтому наличие моментов на них не влияет. Однако в (5.19) появляются дополнительные члены, так что

$$\frac{d}{dt} \int_V \epsilon_{ijk} x_j v_k dV = \int_S \epsilon_{ijk} x_j \hat{t}_k^{(n)} dS + \int_V (\epsilon_{ijk} x_j \rho b_k + m_i) dV.$$

Это можно свести к равенству $\int_V (\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + m_i) dV = 0$ (см. задачу 2.9), и вследствие произвольности объема V в данном случае будет выполняться соотношение $\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + m_i = 0$.

5.8. Теорема об изменении количества движения в дифференциальной форме (так называемой локальной форме, или «в малом») выражается уравнением $\partial(\rho v_i)/\partial t = \rho b_i + (\sigma_{ij} - \rho v_i v_j)_{,j}$. Доказать, что уравнения движения (5.16) следуют из этого уравнения.

Выполняя указанное дифференцирование и перегруппировывая члены, получаем

$$v_i (\partial \rho / \partial t + \rho_{,j} v_j + \rho v_{i,j}) + \rho (\partial v_i / \partial t + v_i v_{i,j}) = \rho b_i + \sigma_{ij,j}.$$

Первый член в левой части равен нулю, согласно (5.4), а второй член равен ρa_i . Таким образом, $\rho a_i = \rho b_i + \sigma_{ij,j}$, что совпадает с (5.16).

5.9. Показать, каким образом уравнение (5.19) сводится к форме (5.20).

Подставим в (5.19) для $t_k^{(n)}$ выражение $\sigma_{pk} n_p$ и применим теорему Гаусса — Остроградского (1.157) к получившемуся интегралу по поверхности:

$$\int_V \varepsilon_{ijk} [(x_j \sigma_{pk})_{,p} + x_j \rho b_k] dV = \frac{d}{dt} \int_V \varepsilon_{ijk} \rho (x_j v_k) dV.$$

Используя результат задачи 5.2 и выполняя дифференцирование, приводим это уравнение к виду

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \{x_{j,p} \sigma_{pk} + x_j [\sigma_{pk,p} + \rho b_k - \rho \dot{v}_k] - \rho v_j v_k\} dV = 0.$$

Сумма членов в квадратных скобках равна нулю в силу (5.16); кроме того, $x_{j,p} = \delta_{jp}$ и $\varepsilon_{ijk} v_j v_k = 0$, так что окончательно получаем $\int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0$.

5.10. При движении абсолютно твердого тела с неподвижной точкой поле скоростей имеет вид $v_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k$. Доказать, что для такого движения уравнение (5.19) сводится к известному уравнению моментов динамики твердого тела.

Слева в уравнении (5.19) стоит полный момент M_i всех поверхностных и массовых сил относительно начала отсчета. При $v_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k$ это уравнение преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{d}{dt} \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho \varepsilon_{kpq} \omega_p x_q dV = \frac{d}{dt} \int_V \omega_p \rho (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) x_j x_q dV = \\ &= \frac{d}{dt} \left[\omega_p \int_V \rho (\delta_{ip} x_q x_q - x_p x_i) dV \right] = \frac{d}{dt} (\omega_p I_{ip}), \end{aligned}$$

где $I_{ip} = \int_V \rho (\delta_{ip} x_q x_q - x_p x_i) dV$ — тензор моментов инерции.

Энергия. Энтропия. Диссипативная функция (§ 5.4—5.6)

5.11. Доказать, что для движения абсолютно твердого тела с полем скоростей $v_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k$ интеграл кинетической энергии (5.23) сводится к аналогичному выражению из динамики твердого тела.

Из (5.23) находим

$$\begin{aligned} K &= \int_V \rho \frac{v_i v_i}{2} dV = \frac{1}{2} \int_V \rho \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k \varepsilon_{ipq} \omega_p x_q dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \rho \omega_p \omega_i (\delta_{ip} \delta_{kq} - \delta_{iq} \delta_{kp}) x_k x_q dV = \\ &= \frac{\omega_j \omega_p}{2} \int_V \rho (\delta_{jp} x_q x_q - x_p x_j) dV = \frac{\omega_j \omega_p I_{jp}}{2}, \end{aligned}$$

или в символической записи $K = (\omega \cdot I \cdot \omega)/2$.

5.12. В некоторой точке сплошной среды даны тензоры скоростей деформации и напряжений

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Определить в этой точке величину λ мощности напряжений $D_{ij}\sigma_{ij}$.

Умножая каждый элемент D_{ij} на соответствующий элемент тензора σ_{ij} и складывая, получаем $\lambda = 4 + 0 - 4 + 0 - 6 + 14 - 4 + 14 + 40 = 58$.

5.13. Пусть $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$; показать, что мощность напряжений можно представить выражением $D_{ij}\sigma_{ij} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$.

По (4.19) $D_{ij} = v_{i,j} - V_{ij}$, а так как $V_{ij}\sigma_{ij} = 0$, то $D_{ij}\sigma_{ij} = v_{i,j}(-p\delta_{ij}) = -pv_{i,i}$. Из уравнения неразрывности (5.3) мы имеем $v_{i,i} = -(1/\rho)(d\rho/dt)$. Таким образом, окончательно получаем $D_{ij}\sigma_{ij} = (p/\rho)(d\rho/dt)$ при $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$.

5.14. Найти вид уравнения энергии при условии, что $\sigma_{ij} = (-p + \lambda^* D_{kk})\delta_{ij} + 2\mu^* D_{ij}$, а теплопроводность подчиняется закону Фурье $c_i = -kT_{,i}$.

Из (5.32)

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= (-p + \lambda^* D_{kk})\delta_{ij}D_{ij} + 2\mu^* D_{ij}D_{ij} + kT_{,ii} + z = \\ &= \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + (\lambda^* + 2\mu^*) (I_D)^2 - 4\mu^* II_D + kT_{,ii} + z, \end{aligned}$$

где I_D и II_D — соответственно первый и второй инварианты тензора скоростей деформации.

5.15. Пусть $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$. Написать уравнение для скорости изменения удельной энтропии при обратимом термодинамическом процессе.

В этом случае $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(C)}$ и уравнение (5.41) с учетом результата задачи 5.13 дает $T \frac{ds}{dt} = \frac{du}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}$.

5.16. Задана диссипативная часть тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(D)} = \beta D_{ik}D_{kj}$. Найти диссипативную функцию и выразить ее через инварианты тензора скоростей деформации D .

По формуле (4.25) $\sigma_{ij}^{(D)} = \beta D_{ik}D_{kj}$, что является следом матрицы D^3 (см. § 1.15) и может быть записано через главные значения $D_{(1)}$, $D_{(2)}$, $D_{(3)}$. Согласно (1.138), след матрицы равен

$$\begin{aligned} D_{ij}D_{ik}D_{kj} &= D_{(1)}^3 + D_{(2)}^3 + D_{(3)}^3 = (D_{(1)} + D_{(2)} + D_{(3)})^3 - \\ &- 3(D_{(1)} + D_{(2)} + D_{(3)})(D_{(1)}D_{(2)} + D_{(2)}D_{(3)} + D_{(3)}D_{(1)}) + 3D_{(1)}D_{(2)}D_{(3)}. \end{aligned}$$

Отсюда получим $\sigma_{ij}^{(D)} e_{ij} = \beta [I_D^3 - 3I_D II_D + 3III_D]$.

Определяющие уравнения (§ 5.7)

5.17. Пусть определяющие уравнения имеют вид $\sigma_{ij} = K_{ijpq} D_{pq}$. Доказать, что из-за симметрии тензоров напряжений и скоростей деформации тензор четвертого ранга K_{ijpq} имеет не более 36 независимых компонент. Записать эти компоненты в виде матрицы шестого порядка.

Так как $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, то $K_{ijpq} = K_{ji pq}$; кроме того, $K_{ijpq} = K_{ij qp}$, поскольку $D_{ij} = D_{ji}$. Подобно внешнему произведению двух симметричных тензоров A_{ij} и B_{ij} , имеющих по шесть независимых компонент, тензор K_{ijpq} будет иметь не более 36 различных компонент.

Обычно принято располагать компоненты K_{ijpq} следующим образом:

$$K_{ijpq} = \begin{bmatrix} K_{1111} & K_{1122} & K_{1133} & K_{1123} & K_{1131} & K_{1112} \\ K_{2211} & K_{2222} & K_{2233} & K_{2223} & K_{2231} & K_{2212} \\ K_{3311} & K_{3322} & K_{3333} & K_{3323} & K_{3331} & K_{3312} \\ K_{2311} & K_{2322} & K_{2333} & K_{2323} & K_{2331} & K_{2312} \\ K_{3111} & K_{3122} & K_{3133} & K_{3123} & K_{3131} & K_{3112} \\ K_{1211} & K_{1222} & K_{1233} & K_{1223} & K_{1231} & K_{1212} \end{bmatrix},$$

5.18. Если предположить, что среда, имеющая определяющие уравнения $\sigma_{ij} = K_{ijpq} D_{pq}$ задачи 5.17, является *изотропной*, так что тензор K_{ijpq} имеет одинаковые компоненты в любой ортогональной декартовой системе координат, то циклическим переименованием осей координат 36 независимых компонент тензора K_{ijpq} можно сократить до двух. Показать это.

Координатные направления можно переобозначить шестью различными способами (рис. 5.2). Для изотропии требуется, чтобы $K_{1122} = K_{1133} = K_{2233} = K_{2211} = K_{3311} = K_{3322}$ и $K_{1212} = K_{1313} = K_{2323} = K_{2121} = K_{3131} = K_{3232}$. Это ведет к тому, что от 36 компонент остается 26. Соответствующими отражениями и поворотами осей координат эти 26 компонент в случае изотропии могут быть сведены к двум.

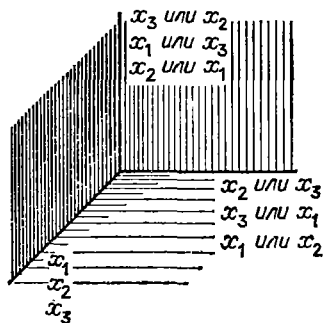


Рис. 5.2.

5.19. Для изотропной среды компоненты тензора K_{ijpq} могут быть представлены в виде $K_{ijpq} = \lambda^* \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu^* (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp})$. Использовать это выражение и записать определяющие уравнения $\sigma_{ij} = K_{ijpq} D_{pq}$ через λ^* и μ^* .

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda^* \delta_{ij} \delta_{pq} D_{pq} + \mu^* (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) D_{pq} = \\ &= \lambda^* \delta_{ij} D_{pp} + \mu^* (D_{ij} + D_{ji}) = \lambda^* \delta_{ij} D_{pp} + 2\mu^* D_{ij}. \end{aligned}$$

5.20. Доказать, что определяющие уравнения задачи 5.19 можно разбить на две группы $\sigma_{ii} = (3\lambda^* + 2\mu^*) D_{ii}$ и $s_{ij} = 2\mu^* D_{ij}$,

где s_{ij} и D'_{ij} — девиаторы тензоров напряжений и скоростей деформации соответственно.

Подставим $\sigma_{ij} = s_{ij} + \delta_{ij}\sigma_{kk}/3$ и $D_{ij} = D'_{ij} + \delta_{ij}D_{kk}/3$ в выражение $\sigma_{ij} = \lambda^*\delta_{ij}D_{kk} + 2\mu^*D'_{ij}$ задачи 5.19. Получим следующее равенство: $s_{ij} + \delta_{ij}\sigma_{kk}/3 = \lambda^*\delta_{ij}D_{kk} + 2\mu^*(D'_{ij} + \delta_{ij}D_{kk}/3)$. Из него видно, что если $i \neq j$, то $s_{ij} = 2\mu^*D'_{ij}$ и, следовательно, $\sigma_{kk} = (3\lambda^* + 2\mu^*)D_{kk}$.

Смешанные задачи

5.21. Доказать, что $\frac{d}{dt} \left(\frac{q_i}{\rho} \right) = (\epsilon_{ijk}a_{k,j} + q_j v_{i,j})/\rho$, где ρ — плотность, a_i — ускорение и q_i — вектор завихренности.

Непосредственным дифференцированием найдем $\frac{d}{dt} \left(\frac{q_i}{\rho} \right) = \frac{\dot{q}_i}{\rho} - \frac{q_i \dot{\rho}}{\rho^2}$. Но $\dot{q}_i = \epsilon_{ijk}a_{k,j} + q_j v_{i,j} - q_i v_{j,j}$ (см. задачу 4.32), а из уравнения неразрывности (5.3) следует, что $\dot{\rho} = -\rho v_{i,i}$. Окончательно получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{q_i}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} (\epsilon_{ijk}a_{k,j} + q_j v_{i,j} - q_i v_{j,j} + q_i v_{i,j}) = (\epsilon_{ijk}a_{k,j} + q_j v_{i,j})/\rho.$$

5.22. Дано плоское течение несжимаемой жидкости $v_1 = A(x_1^2 - x_2^2)/r^4$, $v_2 = A(2x_1x_2)/r^4$, $v_3 = 0$, где $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Доказать, что такое поле скоростей удовлетворяет уравнению неразрывности.

Для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности имеет вид (5.5) $v_{i,i} = 0$. В данном случае $v_{1,1} = A[-4x_1(x_1^2 - x_2^2)/r^6 + 2x_1/r^4]$ и $v_{2,2} = A[2x_1/r^4 - 8x_1x_2^2/r^6]$. Складывая, получаем $v_{1,1} + v_{2,2} = 0$.

5.23. Доказать, что поле скоростей задачи 5.22 является безвихревым.

Для безвихревого течения в соответствии с (4.29) необходимо выполнение условия $\text{rot } \mathbf{v} = 0$. Проверяем и видим, что в данном случае

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ A(x_1^2 - x_2^2)/r^4 & 2Ax_1x_2/r^4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= A[2x_2/r^4 - 8x_1^2x_2/r^6 + 2x_2/r^4 + 4x_2(x_1^2 - x_2^2)/r^6] \hat{\mathbf{e}}_3 = 0.$$

5.24. Имеется плоский поток несжимаемой жидкости, в котором $v_1 = -Ax_2/r^2$, где $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Найти во всем потоке компоненту v_2 , если $v_2 = 0$ при $x_1 = 0$ для всех значений x_2 . Показать, что движение безвихревое, а линии тока — окружности.

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости (5.5) $v_{i,i} = 0$ в данном случае дает $v_{1,1} = -v_{2,2} = 2Ax_1x_2/r^4$. Интегрируя его по x_2 и налагая упомянутые условия на v_2 , находим $v_2 = Ax_1/r^2$.

Для безвихревого движения нужно, чтобы $\text{rot } \mathbf{v} = 0$. У нас

$$\text{rot } \mathbf{v} = A [(x_1^2 - x_2^2)/r^4 + (-x_1^2 + x_2^2)/r^4] \hat{\mathbf{e}}_3 = 0.$$

В задаче 4.7 выведены уравнения линий тока $dx_1/v_1 = dx_2/v_2$. Для данного поля скоростей они имеют вид $x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = 0$, что после интегрирования дает уравнения окружностей $x_1^2 + x_2^2 = \text{const}$.

5.25. Определяющие уравнения для некоторой среды имеют вид $\sigma_{ij} = (-p + \lambda^* D_{kk}) \delta_{ij} + 2\mu^* D_{ij}$, где λ^* и μ^* — постоянные. Написать уравнения движения, выраженные через вектор скорости v_i .

Уравнения движения (5.16) $\rho \dot{v}_i = \rho b_i + \sigma_{ij,j}$ в этом случае имеют форму $\rho \dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} \delta_{ij} + \lambda^* D_{kk,i} \delta_{ij} + 2\mu^* D_{ij,j}$. По определению $2D_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i}$, так что $D_{kk} = v_{k,k}$, $2D_{ij,j} = v_{i,jj} + v_{j,ji}$. Поэтому

$$\rho \dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} + (\lambda^* + \mu^*) v_{j,ji} + \mu^* v_{i,jj}.$$

Это уравнение можно записать в символических обозначениях

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{b} - \nabla p + (\lambda^* + \mu^*) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu^* \nabla^2 \mathbf{v}.$$

5.26. Вычислить материальную скорость изменения кинетической энергии среды, занимающей объем V , и объяснить физический смысл полученных интегралов.

Согласно (5.23), $dK/dt = \int_V \rho v_i \dot{v}_i dV$. Работа внешних поверхностных сил (в единицу времени) равна $\int_S v_i t_i^{(n)} dS$, что можно записать иначе: $\int_S v_i \sigma_{ij} n_j dS$. Применим к этому интегралу теорему Гаусса — Остроградского (1.157) и воспользуемся уравнением движения (5.16). Тогда $\int_S v_i \sigma_{ij} n_j dS = \int_V \sigma_{ij} v_{i,j} dV + \int_V \rho (v_i \dot{v}_i - b_i v_i) dV$. Отсюда получим

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \rho b_i v_i dV - \int_V \sigma_{ij} v_{i,j} dV + \int_S v_i t_i^{(n)} dS.$$

Интегралы этой суммы представляют мощность массовых сил, внутренних поверхностных сил и внешних поверхностных сил соответственно.

5.27. В несжимаемой среде, для которой $\sigma_{ij}^{(D)} = \lambda^* D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu^* D_{ij}$, происходит безвихревое движение с потенциалом скоростей ϕ , так что $\mathbf{v} = \text{grad } \phi$. Найти диссипативную функцию $\sigma_{ij}^{(D)} \dot{\epsilon}_{ij}$.

Так как для несжимаемой жидкости $D_{kk} = v_{k,k} = 0$, то в данном случае $\sigma_{ij}^{(D)} \dot{\epsilon}_{ij} = \sigma_{ij}^{(D)} D_{ij} = (\lambda^* D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu^* D_{ij}) D_{ij} = 2\mu^* D_{ij} D_{ij}$. Кроме того, $v_i = \phi_{,i}$, и, следовательно, скаляр $D_{ij} D_{ij} = \phi_{,ij} \phi_{,ij}$, а поэтому $\sigma_{ij}^{(D)} D_{ij} = 2\mu^* \phi_{,ij} \phi_{,ij}$.

Из-за того что среда несжимаемая, а движение безвихревое, выполняются соотношения $\phi_{,ii} = 0$ и $2\phi_{,ij} \phi_{,ij} = (\phi_{,i} \phi_{,i})_{,jj} = \nabla^2 (\nabla \phi)^2$.

Интересно отметить также, что

$$\nabla^4 (\varphi^2) = (\nabla\varphi)_{,ij} = 2(\varphi_{,i} \varphi_{,j} + 4\varphi_{,ij} \varphi + \varphi_{,i} \varphi_{,j} + 2\varphi_{,ij} \varphi_{,j})$$

Это выражение при $\varphi_{,i} = 0$ сводится к $4\varphi_{,ij} \varphi_{,j}$. Тогда окончательно находим $\sigma_{ij}^{(D)} \dot{\varepsilon}_{ij} = \mu^* \nabla^2 (\nabla\varphi)^2 = \mu^* \nabla^4 (\varphi^2)/2$.

5.28. Для среды, в которой $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, вводится понятие *удельной энтальпии* $h = u + p/\rho$. Доказать, что, используя это понятие, можно записать уравнение энергии в виде $\dot{h} = \dot{p}/\rho + T\dot{s}$.

Уравнение энергии (5.41) при данном законе напряжений имеет вид $\dot{u} = -p\delta_{ij} D_{ij}/\rho + Ts$. Воспользуемся результатом задачи 5.13 и определением h . Тогда $\dot{u} = \dot{h} - \dot{p}/\rho - p\dot{\rho}/\rho^2 = -p\dot{\rho}/\rho^2 + T\dot{s}$. Сокращая одинаковые члены, находим $\dot{h} = \dot{p}/\rho + T\dot{s}$.

5.29. Пусть среда задачи 5.25' движется как несжимаемая. Написать уравнения движения, выраженные через вектор завихренности $\mathbf{q}$ при условии отсутствия массовых сил и постоянства плотности.

В случае несжимаемости $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. При $\mathbf{b} = 0$ уравнение движения задачи 5.25 примет форму $\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \mu^* v_{i,jj}$. Умножая векторно оператор ∇ на это уравнение, при $\rho = \text{const}$ получаем $\varepsilon_{pqj} \dot{v}_{i,q} = -\varepsilon_{pqj} p_{,i,q}/\rho + (\mu^*/\rho) \varepsilon_{pqj} v_{i,jj,q}$. Но $\varepsilon_{pqj} p_{,i,q} = 0$, поэтому, учитывая (4.29), можно написать $\dot{q}_p = (\mu^*/\rho) q_{j,j}$, или в символических обозначениях $d\mathbf{q}/dt = (\mu^*/\rho) \nabla^2 \mathbf{q}$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

5.30. Доказать, что для вектора вихря скорости $\boldsymbol{\Omega}$ верна формула $\frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\rho} \right) = \frac{\boldsymbol{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v})}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}$.

5.31. Доказать, что течение с полем скоростей $v_1 = -2x_1 x_2 x_3 / r^4$, $v_2 = (x_1^2 - x_2^2) x_3 / r^4$, $v_3 = x_2 / r^3$, где $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, удовлетворяет условию несжимаемости. Будет ли это течение безвихревым?

5.32. Уравнение неразрывности в декартовых координатах x, y, z выглядит так:

$$\partial \rho / \partial t + \partial (\rho v_x) / \partial x + \partial (\rho v_y) / \partial y + \partial (\rho v_z) / \partial z = 0.$$

Доказать, что в цилиндрических координатах r, θ, z оно примет вид

$$r (\partial \rho / \partial t) + \partial (r \rho v_r) / \partial r + \partial (\rho v_\theta) / \partial \theta + r (\partial (\rho v_z) / \partial z) = 0.$$

5.33. Доказать, что течение с полем скоростей $v_r = (1 - r^2) \cos \theta / r^2$, $v_\theta = (1 + r^2) \sin \theta / r^2$, $v_z = 0$ удовлетворяет уравнению неразрывности в цилиндрических координатах, если плотность ρ — константа.

5.34. Доказать, что для любой скалярной, векторной или тензорной величины $P_{ij\dots}$ ($\mathbf{x}, t$) имеет место равенство

$$\int_S P_{ij\dots} \sigma_{pq} n_q dS = \int_V [\sigma_{pq} P_{ij\dots,q} + \rho P_{ij\dots} (\dot{v}_p - b_p)] dV.$$

5.35. Если в среде, кроме массовых сил $\mathbf{b}$, действуют еще массовые моменты $\mathbf{h}$ (на единицу массы), а, кроме напряжений $\hat{\mathbf{t}}^{(n)}$, еще пары напряжений $\hat{\mathbf{g}}^{(n)}$, то уравнение моментов количества движения может быть записано в виде

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho (\mathbf{m} + \mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV = \int_V (\mathbf{h} + \mathbf{x} \times \mathbf{b}) dV + \int_S (\hat{\mathbf{g}}^{(n)} + \mathbf{x} \times \hat{\mathbf{t}}^{(n)}) dS,$$

где $\mathbf{m}$ — распределенный момент количества движения на единицу массы. Доказать, что если $\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{G} = \hat{\mathbf{g}}^{(n)}$, то локальная форма этого уравнения такова: $\rho d\mathbf{m}/dt = \mathbf{h} + \nabla \cdot \mathbf{G} + \Sigma_v$.

5.36. Среда задана своими определяющими уравнениями $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \beta D_{ij} + \alpha D_{ik}D_{kj}$. Показать, что $\sigma_{ii} = 3(-p - 2\alpha \Pi_D/3)$. Допустить при этом несжимаемость $D_{ii} = 0$.

5.37. Доказать, что для среды, в которой $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, соотношение (5.41) принимает вид $du = Tds - p dv$. (В этой задаче использовано обозначение $v = 1/\rho$ — удельный объем.)

5.38. Пусть $T ds/dt = -\frac{c_{i,i}}{\rho} = \frac{dq}{dt}$. Удельной свободной энергией по определению называется величина $\Psi = u - Ts$. Доказать, что уравнение энергии можно записать в виде $\rho d\Psi/dt + \rho s dT/dt = \sigma_{ij} D_{ij}$.

5.39. Имеется термомеханический континуум с определяющими уравнениями

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \delta_{ij} (T - T_0),$$

где T_0 — температура начального состояния. Доказать, что $\varepsilon_{kk} = 3\alpha (T - T_0)$, если $\sigma_{kk} = 0$.

Линейная теория упругости

6.1. Обобщенный закон Гука. Функция энергии деформации

В классической линейной теории упругости предполагается, что сами *смещения* и их *градиенты* настолько малы, что можно не делать различия между их лагранжевым и эйлеровым представлениями. В соответствии с этим выражение тензора линейных деформаций через вектор перемещения u_i может быть записано в следующих эквивалентных формах:

$$l_{ij} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (6.1)$$

или

$$\mathbf{L} = \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}).$$

В дальнейшем будем, кроме того, пренебрегать тепловыми эффектами, сопровождающими деформирование, если специально не оговаривается противное.

Для линейного упругого тела определяющие уравнения связывают тензор напряжений и тензор деформаций соотношением

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \tilde{\mathbf{C}} : \mathbf{E}, \quad (6.2)$$

которое называется *обобщенным законом Гука*. Коэффициенты этого соотношения образуют *тензор упругих констант* C_{ijkl} , который имеет 81 компоненту. Однако вследствие симметрии обоих тензоров — и напряжений и деформаций — различных упругих констант имеется не более 36. При записи закона Гука через эти 36 коэффициентов двойные индексы у компонент тензоров напряжений и деформаций часто заменяют одинарными индексами, которые меняются от 1 до 6. В таких обозначениях

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1, & \sigma_{23} &= \sigma_{32} = \sigma_4, \\ \sigma_{22} &= \sigma_2, & \sigma_{13} &= \sigma_{31} = \sigma_5, \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \sigma_3, & \sigma_{12} &= \sigma_{21} = \sigma_6 \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1, & 2\varepsilon_{23} &= 2\varepsilon_{32} = \varepsilon_4, \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2, & 2\varepsilon_{13} &= 2\varepsilon_{31} = \varepsilon_5, \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon_3, & 2\varepsilon_{12} &= 2\varepsilon_{21} = \varepsilon_6. \end{aligned} \quad (6.4)$$

и

Закон Гука можно записать в виде

$$\sigma_K = C_{KM} \epsilon_M \quad (K, M = 1, 2, 3, 4, 5, 6), \quad (6.5)$$

где 36 упругих констант обозначены теперь C_{KM} , а заглавные латинские буквы использованы в качестве индексов для того, чтобы подчеркнуть, что эти индексы меняются от 1 до 6.

Если пренебречь тепловыми эффектами, то уравнение (5.32) примет вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (6.6)$$

Внутренняя энергия в этом случае оказывается чисто механической величиной, которая называется *энергией деформации* (на единицу массы). Из уравнения (6.6) следует, что

$$du = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}. \quad (6.7)$$

Если u считать функцией девяти компонент деформации $u = u(\epsilon_{ij})$, то дифференциал ее равен

$$du = \frac{\partial u}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij}. \quad (6.8)$$

Сравнивая (6.7) и (6.8), замечаем, что ¹⁾

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{ij} = \frac{\partial u}{\partial \epsilon_{ij}}. \quad (6.9)$$

Введем функцию u^* , такую, что

$$u^* = \rho u; \quad (6.10)$$

она называется *плотностью энергии деформации* (на единицу объема). В теории малых деформаций ρ в (6.10) можно считать постоянной, поэтому функция u^* обладает следующим свойством:

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial u}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial u^*}{\partial \epsilon_{ij}}. \quad (6.11)$$

Состояние, в котором энергия деформации равна нулю, можно выбрать произвольно. И так как напряжения должны обращаться

¹⁾ Формулы (6.9) для упругого тела верны также и при учете тепловых эффектов. При этом вместо (6.6) имеем

$$du = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} + dq, \quad dq = T ds,$$

и поэтому

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{ij} = \frac{\partial u(\epsilon_{ij}, s)}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad T = \frac{\partial u(\epsilon_{ij}, s)}{\partial s};$$

см. также задачу 6.24, в которой показано, что в термоупругом теле всегда $\sigma_{ij} = \rho \partial f / \partial \epsilon_{ij}$, $s = -\partial f / \partial T$, где $f(\epsilon_{ij}, T)$ — свободная энергия. — Прим. ред.

в нуль одновременно с деформациями, простейшим видом выражения энергии деформации, обеспечивающим линейную связь между напряжениями и деформациями, является квадратичная форма

$$u^* = 1/2 C_{ijkm} \epsilon_{ij} \epsilon_{km}. \quad (6.12)$$

Принимая во внимание закон Гука (6.2), это выражение можно записать так:

$$u^* = 1/2 \sigma_{ij} \epsilon_{ij}, \quad \text{или} \quad u^* = 1/2 \Sigma : E. \quad (6.13)$$

В обозначениях с одним индексом квадратичная форма (6.12) имеет вид

$$u^* = 1/2 C_{KM} \epsilon_K \epsilon_M, \quad (6.14)$$

причем $C_{KM} = C_{MK}$. Если функция энергии деформации существует, то вследствие симметрии C_{KM} число независимых упругих констант будет не более 21.

6.2. Изотропные и анизотропные среды.

Симметрия упругих свойств

Если упругие свойства среды не зависят от выбора системы координат, использованной для их описания, то такую упругую среду называют *изотропной*. Среда, которая не является изотропной, называется *анизотропной*. Упругие свойства твердого тела, подчиняющегося закону Гука, выражены коэффициентами C_{KM} , поэтому в общем случае анизотропное тело имеет следующую *матрицу упругих констант*:

$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

Если существует функция энергии деформации, то $C_{KM} = C_{MK}$ и 36 констант матрицы (6.15) сводятся к 21.

Пусть в некоторой точке существует *плоскость симметрии упругих свойств*, т. е. упругие константы имеют одинаковые значения для любой пары систем координат, которые получены одна из другой отражением относительно указанной плоскости. Оси таких систем координат называются «направлениями эквивалентных упругих свойств». Если плоскость $x_1 x_2$ — плоскость симметрии упругих свойств (короче — плоскость упругой симметрии), то константы C_{KM} инвариантны относительно преобразования координат

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = -x_3, \quad (6.16)$$

которое показано на рис. 6.1. Это преобразование описывается матрицей

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

Подставляя компоненты матрицы (6.17) в формулы (2.27) и (3.78) преобразования тензоров напряжений и деформаций, находим, что матрица упругих констант для среды,

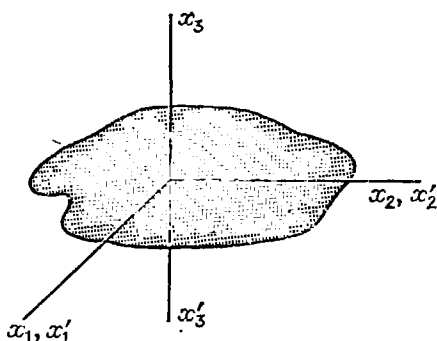


Рис. 6.1.

обладающей симметрией относительно плоскости x_1x_2 , имеет вид

$$[C_{KL}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Если существует функция энергии деформации, то из 20 ненулевых членов этой матрицы независимы только 13.

Если среда обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, то она называется *ортотропной*, а матрица упругих констант (в системе координат, в которой координатными плоскостями являются плоскости симметрии) имеет форму

$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

Здесь независимых постоянных 12 (или 9, если $C_{KM} = C_{MK}$).

Говорят, что в некоторой точке существует *ось симметрии упругих свойств* порядка N , если существует набор направлений эквивалентных упругих свойств, которые могут быть совмещены поворотом около оси на угол $2\pi/N$. Некоторые случаи осевой и плоской симметрии эквивалентны.

6.3. Изотропные среды. Упругие постоянные

Тела, у которых упругие свойства одинаковы по всем направлениям, обладают полной симметрией и называются *изотропными*. В этом случае любая плоскость и любая ось являются плоскостью и осью симметрии. Для изотропных сред число независимых упругих постоянных сводится к двум, и их матрица симметрична независимо от существования функции энергии деформации. Выбирая в качестве двух независимых констант известные постоянные Ламе λ и μ , напомним матрицу (6.19) для изотропной упругой среды:

$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

Закон Гука (6.2) для изотропного тела через коэффициенты λ и μ записывается равенством

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad \text{или} \quad \Sigma = \lambda \mathbf{I} \epsilon + 2\mu \mathbf{E}, \quad (6.21)$$

где $\epsilon = \epsilon_{kk} = \mathbf{I} \epsilon$. Это соотношение нетрудно обратить и выразить деформации через напряжения:

$$\epsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}, \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \mathbf{I} \Theta + \frac{1}{2\mu} \Sigma, \quad (6.22)$$

где $\Theta = \sigma_{kk} = \mathbf{I} \Sigma$ — обозначение, по традиции используемое в теории упругости для первого инварианта тензора напряжений.

При простом одноосном растяжении в направлении оси x_1 можно ввести технические упругие модули E и ν , которые служат коэффициентами в соотношениях $\sigma_{11} = E \epsilon_{11}$ и $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\nu \epsilon_{11}$. Постоянная E называется *модулем Юнга*, а ν — *коэффициентом Пуассона*. Через эти упругие постоянные закон Гука для изотропного тела записывается следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{kk} \right), \quad \text{или} \quad \Sigma = \frac{E}{1+\nu} \left(\mathbf{E} + \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{I} \epsilon \right), \quad (6.23)$$

или, в обращенной форме,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk}, \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = \frac{1+\nu}{E} \Sigma - \frac{\nu}{E} \mathbf{I} \Theta. \quad (6.24)$$

При изучении состояния равномерного гидростатического сжатия вводят *модуль объемного сжатия*

$$K = \frac{E}{3(1-2\lambda)}, \text{ или } K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}, \quad (6.25)$$

который связывает давление с величиной кубического расширения при нагрузке такого типа. В случае так называемого состояния чистого сдвига *модуль сдвига* G связывает касательные компоненты напряжения и деформации. Коэффициент G фактически равен μ ; легко установить его связь с другими модулями:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (6.26)$$

6.4. Постановка статических и динамических задач теории упругости

При постановке статических задач для упругой однородной изотропной среды используются следующие уравнения, которые должны выполняться всюду внутри тела:

а) уравнения равновесия

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0, \quad \text{или} \quad \nabla \cdot \Sigma + \rho \mathbf{b} = 0, \quad (6.27)$$

б) закон Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad \text{или} \quad \Sigma = \lambda \mathbf{e} + 2\mu \mathbf{E}, \quad (6.28)$$

в) соотношения, связывающие деформации с перемещениями,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}). \quad (6.29)$$

Кроме того, на поверхности, ограничивающей тело, должны быть удовлетворены заданные условия, наложенные на напряжения и/или перемещения.

Краевые задачи теории упругости обычно классифицируют по типу этих условий. Их разделяют на группы, для которых:

- 1) на всей границе заданы перемещения,
- 2) на всей границе заданы напряжения (поверхностные силы),
- 3) на части границы заданы перемещения, а на остальной поверхности — напряжения.

Во всех трех случаях предполагается, что всюду в теле массовые силы известны.

Для тех задач, в которых на всей границе даны компоненты перемещения в виде функции

$$u_i = g_i(\mathbf{X}), \quad \text{или} \quad \mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{X}), \quad (6.30)$$

выражение деформаций через перемещения (6.29) можно подставить в закон Гука (6.28), а результат в свою очередь подставить в (6.27).

Так получаются основные уравнения для перемещений

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,i} + \rho b_i = 0, \quad \text{или} \quad (6.31)$$

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = 0,$$

которые называются *уравнениями Навье — Коши*¹⁾. Решение задач этого типа состоит в отыскании вектора перемещения u_i , удовлетворяющего уравнению (6.31) всюду внутри тела и условиям (6.30) на его границе.

Для тех задач, в которых на всей границе известны поверхностные силы

$$\hat{t}_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j, \quad \text{или} \quad \hat{\mathbf{t}}^{(n)} = \Sigma \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (6.32)$$

комбинацией уравнений совместности (3.104), закона Гука (6.24) и уравнений равновесия (6.27) получим основные уравнения для напряжений

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} + \rho (b_{i,j} + b_{j,i}) + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \rho b_{k,k} = 0, \quad \text{или} \quad (6.33)$$

$$\nabla^2 \Sigma + \frac{1}{1+\nu} \nabla \nabla \Theta + \rho (\nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \nabla) + \frac{\nu}{1-\nu} \mathbf{I} \rho \nabla \cdot \mathbf{b} = 0,$$

которые называются уравнениями совместности *Бельтрами — Мичелла*. Решение задач этого типа состоит в нахождении тензора напряжений, который удовлетворяет уравнениям (6.27) и (6.33) всюду внутри тела и условиям (6.32) на границе.

Для задач, имеющих смешанные граничные условия, должна решаться система уравнений (6.27), (6.28) и (6.29). Решение дает поле напряжений и перемещений для всех точек тела. На некоторой части граничной поверхности компоненты напряжений должны удовлетворять условиям (6.32), а на оставшейся ее части перемещения должны удовлетворять условиям (6.30).

При постановке динамических задач уравнения равновесия (6.27) нужно заменить уравнениями движения (5.16):

$$\sigma_{i,j} + \rho b_i = \rho \dot{u}_i, \quad \text{или} \quad \nabla \cdot \Sigma + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{u}}, \quad (6.34)$$

и наряду с *граничными условиями* нужно задать еще *начальные условия*. Основные уравнения для поля перемещений в этом случае аналогичны уравнениям (6.31) статики

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,i} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i, \quad \text{или} \quad (6.35)$$

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}}.$$

¹⁾ В русской литературе эти уравнения обычно называются уравнениями Ламе.— *Прим. перев.*

Решение уравнений (6.35) ищем в виде $u_i = u_i(x, t)$. Оно должно удовлетворять не только начальным условиям, которые обычно записываются в виде равенств

$$u_i = u_i(x, 0) \quad \text{и} \quad \dot{u}_i = \dot{u}_i(x, 0), \quad (6.36)$$

но и граничным условиям, наложенным либо на перемещения

$$u_i = g_i(x, t), \quad \text{или} \quad u = g(x, t), \quad (6.37)$$

либо на напряжения

$$\hat{t}_i^{(n)} = \hat{t}_i^{(n)}(x, t), \quad \text{или} \quad \hat{t}^{(n)} = \hat{t}^{(n)}(x, t). \quad (6.38)$$

6.5. Теорема о суперпозиции. Единственность решений.

Принцип Сен-Венана

Вследствие того что в линейной теории упругости уравнения и граничные условия линейны, можно использовать принцип суперпозиции для получения новых решений из ранее найденных. Если, например, $\sigma_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)}$ — решение системы (6.27), (6.28) и (6.29) при массовых силах, равных $b_i^{(1)}$, а $\sigma_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)}$ — решение при массовых силах $b_i^{(2)}$, то $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}, u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)}$ будет решением той же системы при массовых силах $b_i = b_i^{(1)} + b_i^{(2)}$.

Единственность решения общей статической задачи теории упругости может быть установлена при помощи принципа суперпозиции и закона сохранения энергии. Доказательство единственности включено в задачи к этой главе.

Принцип Сен-Венана касается разностей между напряжениями и деформациями в некоторой области внутри упругого тела, вызванными двумя различными, но статически эквивалентными системами поверхностных сил, приложенных к определенной части границы. Принцип утверждает, что в областях, достаточно далеких от места приложения нагрузки, эти разности пренебрежимо малы. Это допущение часто оказывает большую помощь при решении практических задач.

6.6. Плоские задачи теории упругости.

Плоское напряженное состояние и плоская деформация

Во многих задачах теории упругости можно вполне удовлетворительно обойтись двумя измерениями, или так называемой *плоской теорией упругости*. Имеется два общих типа задач такого рода. Хотя эти два типа можно выделить, принимая определенные ограничения и допущения для полей напряжений и перемещений, часто их вводят описательно при помощи типичных примеров. Для реализации *плоского напряженного состояния* тело должно представлять

собой пластину, у которой один размер много меньше, чем другие. Нагрузка распределена равномерно по толщине пластины и действует в ее плоскости, как показано стрелками на рис. 6.2, а. Для реализации *плоской деформации* тело должно иметь форму цилиндра, когда один размер много больше, чем другие. Нагрузка равномерно распределена вдоль оси наибольшего размера и действует перпендикулярно ей, как показано стрелками на рис. 6.2, б.

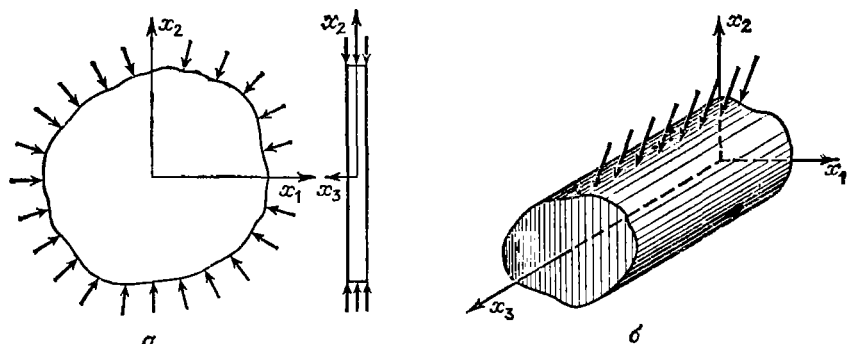


Рис. 6.2.

В задачах с плоским напряженным состоянием (рис. 6.2, а) компоненты напряжения σ_{33} , σ_{13} , σ_{23} принимаются равными нулю всюду, а остальные компоненты считаются функциями только x_1 и x_2 ,

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}(x_1, x_2) \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \quad (6.39)$$

В соответствии с этим постановка задач для плоского поля напряжений содержит следующие уравнения:

$$\text{а) } \sigma_{\alpha\beta,\beta} + \rho b_\alpha = 0, \quad \text{или} \quad \nabla \cdot \Sigma + \rho \mathbf{b} = 0, \quad (6.40)$$

$$\text{б) } \epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\gamma}, \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = \frac{1+\nu}{E} \Sigma - \frac{\nu}{E} \mathbf{I} \Theta,$$

$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{\alpha\alpha}, \quad (6.41)$$

$$\text{в) } \epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}), \quad (6.42)$$

где $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \hat{\mathbf{e}}_2$ и

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (6.43)$$

Из-за специальной формы тензора деформации в случае плоского напряженного состояния шесть уравнений совместности (3.104)

для очень тонких пластин с достаточной точностью сводятся к одному уравнению

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}. \quad (6.44)$$

Выписанную систему уравнений можно преобразовать и получить основное уравнение для компонент перемещения u_α :

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \nabla^2 u_\alpha + \frac{E}{2(1-\nu)} u_{\beta,\beta\alpha} + \rho b_\alpha = 0, \quad (6.45)$$

или

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{E}{2(1-\nu)} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = 0,$$

где

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Для задач о плоской деформации (рис. 6.2, б) компонента перемещения u_3 принимается равной нулю, а остальные компоненты считаются функциями только x_1 и x_2 :

$$u_\alpha = u_\alpha(x_1, x_2). \quad (6.46)$$

В этом случае система уравнений, дающая постановку задачи, имеет вид:

$$а) \sigma_{\alpha\beta,\beta} + \rho b_\alpha = 0, \quad \text{или} \quad \nabla \cdot \Sigma + \rho \mathbf{b} = 0, \quad (6.47)$$

$$б) \sigma_{\alpha\beta} = \lambda \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\gamma} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \text{или} \quad \Sigma = \lambda \mathbf{I} \varepsilon + 2\mu \mathbf{E}, \quad (6.48)$$

$$\sigma_{33} = \nu \sigma_{\alpha\alpha} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \sigma_{\alpha\alpha},$$

$$в) \varepsilon_{\alpha\beta} = 1/2 (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = 1/2 (\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}), \quad (6.49)$$

причем

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.50)$$

Из уравнений (6.47), (6.48), (6.49) в случае плоской деформации получается соответствующая форма уравнений Навье:

$$\mu \nabla^2 u_\alpha + (\lambda + \mu) u_{\beta,\beta\alpha} + \rho b_\alpha = 0, \quad (6.51)$$

или

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = 0.$$

Так же как при плоском напряженном состоянии, уравнения совместности для плоских деформаций сводятся к одному уравнению (6.44).

Если силы, приложенные к ребру пластины на рис. 6.2,а, распределены по толщине не равномерно, а симметрично относительно средней плоскости пластины, то напряженное состояние называют *обобщенным плоским напряженным состоянием*. При постановке задач в этом случае переменные поля истинных величин $\sigma_{\alpha\beta}$, $\epsilon_{\alpha\beta}$ и u_α нужно заменить напряжениями, деформациями и перемещениями, осредненными по толщине пластины. Для таких осредненных переменных формулировка задач в случае обобщенного плоского напряжения в сущности такая же, как при плоской деформации, если λ заменить на величину

$$\lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}. \quad (6.52)$$

В курсах теории упругости иногда упоминается понятие *обобщенной плоской деформации*, когда ϵ_{33} в (6.50) будет постоянной, отличной от нуля.

6.7. Функция напряжений Эри

Если массовые силы отсутствуют или постоянны, то при решении плоских статических задач теории упругости (задач о плоской деформации или обобщенном плоском напряженном состоянии) часто пользуются функцией напряжений Эри (если массовые силы отличны от нуля, то их вклад в решение может быть учтен дополнительно при помощи принципа суперпозиции путем нахождения частных интегралов системы линейных дифференциальных уравнений).

Для плоских статических задач при отсутствии массовых сил уравнения равновесия сводятся к следующим:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} = 0, \quad \text{или} \quad \nabla \cdot \Sigma = 0. \quad (6.53)$$

Уравнения совместности, выраженные через компоненты напряжений (уравнения Бельтрами — Мичелла), дают

$$\nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0, \quad \nabla^2 \Theta_1 = 0. \quad (6.54)$$

Из уравнений (6.53) видно, что компоненты напряжений можно представить частными производными *функции напряжений Эри* $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$:

$$\sigma_{11} = \varphi_{,22}, \quad \sigma_{12} = -\varphi_{,12}, \quad \sigma_{22} = \varphi_{,11}. \quad (6.55)$$

При этом уравнения равновесия (6.53) удовлетворяются тождественно, а условие совместности (6.54) превращается в *бигармоническое уравнение*

$$\nabla^2 (\nabla^2 \varphi) = \nabla^4 \varphi = \varphi_{,1111} + 2\varphi_{,1122} + \varphi_{,2222} = 0. \quad (6.56)$$

Функции, удовлетворяющие этому уравнению, называются *бигармоническими*. Пользуясь бигармоническими функциями с однозначными вторыми производными, можно строить многочисленные

решения плоских задач теории упругости, которые автоматически удовлетворяют и уравнениям равновесия, и условиям совместности. Конечно, эти решения нужно еще «подогнать» к заданным граничным условиям.

6.8. Двумерные статические задачи теории упругости в полярных координатах

По геометрическим соображениям некоторые двумерные статические задачи теории упругости удобно формулировать в полярных координатах r и θ . После преобразования координат

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta \quad (6.57)$$

компоненты напряжения, изображенные на рис. 6.3, будут удовлетворять уравнениям равновесия в полярных координатах

$$\frac{\partial \sigma_{(rr)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{(r\theta)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{(rr)} - \sigma_{(\theta\theta)}}{r} + R = 0, \quad (6.58)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{(\theta\theta)}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{(r\theta)}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{(r\theta)}}{r} + Q = 0, \quad (6.59)$$

где R и Q — отнесенные к единице объема компоненты массовых сил в соответствующих направлениях.

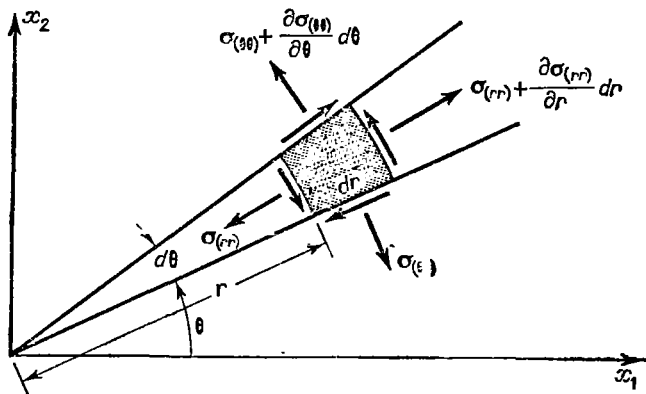


Рис. 6.3.

Возьмем функцию напряжений Эри в виде $\Phi = \Phi(r, \theta)$ и выразим через нее компоненты напряжений

$$\sigma_{(rr)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad (6.60)$$

$$\sigma_{(\theta\theta)} = \partial^2 \Phi / \partial r^2, \quad (6.61)$$

$$\sigma_{(r\theta)} = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \quad (6.62)$$

Условия совместности снова приводят к бигармоническому уравнению

$$\nabla^2 (\nabla^2 \Phi) = \nabla^4 \Phi = 0, \quad (6.63)$$

причем в полярных координатах $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.

6.9. Гиперупругость. Гипоупругость

В современной механике сплошной среды иногда используются определяющие уравнения для сред, которые являются упругими в специальном смысле. Материал называют *гиперупругим*, если для него существует функция энергии деформации u , такая, что материальная производная от нее равна мощности напряжений в единице объема. Таким образом, определяющее уравнение такой среды имеет вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (6.64)$$

где D_{ij} — тензор скоростей деформации. С другой стороны, материал называют *гипоупругим*, если скорости напряжений являются однородными линейными функциями скоростей деформации. В этом случае в качестве определяющего берется уравнение

$$\sigma_{ij}^\nabla = K_{ijkl} D_{kl}, \quad (6.65)$$

причем тензор скоростей напряжения σ_{ij}^∇ определяется выражением

$$\sigma_{ij}^\nabla = \frac{d}{dt} (\sigma_{ij}) - \sigma_{iq} V_{qj} - \sigma_{jq} V_{qi}, \quad (6.66)$$

где V_{ij} — тензор завихренности.

6.10. Линейная термоупругость

Если учитывать тепловые эффекты, то компоненты тензора линейных деформаций можно представить суммой

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{(S)} + \epsilon_{ij}^{(T)}, \quad (6.67)$$

в которой $\epsilon_{ij}^{(S)}$ — деформации, вызванные полем напряжений, а $\epsilon_{ij}^{(T)}$ — полем температур. Компоненты деформации элементарного объема изотропного тела, вызванные изменением температуры от некоторого начального значения T_0 до T , при отсутствии внешних сил определяются формулой

$$\epsilon_{ij}^{(T)} = \alpha (T - T_0) \delta_{ij}, \quad (6.68)$$

где α — коэффициент линейного теплового расширения. Подставляя (6.68) и (6.22) в равенства (6.67), находим выражения

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) + \alpha (T - T_0) \delta_{ij}, \quad (6.69)$$

которые называются соотношениями *Дюгамеля — Неймана*. Равенства (6.69) можно обратить и написать определяющие уравнения термоупругости в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \delta_{ij} (T - T_0). \quad (6.70)$$

Теплопроводность в изотропном упругом теле подчиняется известному *закону теплопроводности Фурье*

$$c_i = -k T_{,i}, \quad (6.71)$$

где скаляр k — коэффициент теплопроводности среды, который должен быть положительным, чтобы обеспечить положительную скорость производства энтропии. Если ввести *удельную теплоемкость* при постоянной деформации $c^{(v)}$ равенством

$$-c_{i,i} = \rho c^{(v)} \dot{T} \quad (6.72)$$

и предположить, что внутренняя энергия является функцией компонент деформации ϵ_{ij} и температуры T , то уравнение энергии (5.45) запишется в виде (см. задачу 6.24)

$$k T_{,ii} = \rho c^{(v)} \dot{T} + (3\lambda + 2\mu) \alpha T \dot{\epsilon}_{ii}; \quad (6.73)$$

(6.73) называется уравнением *притока тепла связанной термоупругости*.

Система уравнений общей задачи термоупругости для изотропной среды состоит из:

а) уравнения движения

$$\sigma_{i,jj} + \rho b_i = \ddot{u}_i, \quad \text{или} \quad \nabla \cdot \Sigma + \rho b = \ddot{u}, \quad (6.74)$$

б) определяющего уравнения термоупругой модели

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \delta_{ij} (T - T_0), \quad (6.75)$$

или

$$\Sigma = \lambda E + 2\mu E - (3\lambda + 2\mu) \alpha I (T - T_0);$$

в) выражения деформаций через перемещения

$$\epsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{или} \quad E = 1/2 (u \nabla + \nabla u); \quad (6.76)$$

г) уравнения притока тепла

$$k T_{,ii} = \rho c^{(v)} \dot{T} + (3\lambda + 2\mu) \alpha T \dot{\epsilon}_{kk}, \quad (6.77)$$

или

$$k \nabla^2 T = \rho c^{(v)} \dot{T} + (3\lambda + 2\mu) \alpha T \dot{\epsilon}.$$

Из этой системы нужно найти поля напряжений, деформаций и температур, удовлетворив указанным начальным и граничным условиям. Условия совместности будут выполнены автоматически в силу (6.76).

Существует широкий круг задач, в которых эффектами инерции и взаимосвязи тепловых и механических процессов можно

пренебречь. В таких случаях общая задача термоупругости распадается на две отдельные задачи, которые решаются последовательно, но независимо. Так, для квазистатической задачи несвязанной термоупругости (без учета теплообразования при деформации) основные уравнения будут следующие:

а) уравнение теплопроводности

$$kT_{,ii} = \rho c^{(v)} \dot{T}, \quad \text{или} \quad k \nabla^2 T = \rho c^{(v)} \dot{T}; \quad (6.78)$$

б) уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,i} + \rho b_i = 0, \quad \text{или} \quad \nabla \cdot \Sigma + \rho \mathbf{b} = 0; \quad (6.79)$$

в) уравнения, связывающие тензоры напряжений и деформаций,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \delta_{ij} (T - T_0), \\ \text{или} \quad \Sigma &= \lambda \mathbf{E} + 2\mu \mathbf{E} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \mathbf{I} (T - T_0); \end{aligned} \quad (6.80)$$

г) выражение деформаций через перемещения

$$\epsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = 1/2 (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla). \quad (6.81)$$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Закон Гука. Энергия деформации. Изотропия (§ 6.1—6.3)

6.1. Доказать, что плотность энергии деформации u^* для изотропной гуковой среды можно выразить через тензор деформаций в виде $u^* = \lambda (\text{tr } \mathbf{E})^2/2 + \mu \mathbf{E}^2 : \mathbf{E}$ и через тензор напряжений в виде $u^* = [(1 + \nu) \Sigma : \Sigma - \nu (\text{tr } \Sigma)^2]/2E$.

Подставляя (6.21) в (6.13), находим

$$u^* = (\lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}) \epsilon_{ij}/2 = \lambda \epsilon_{ii} \epsilon_{jj}/2 + \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij},$$

или в символических обозначениях $u^* = \lambda (\text{tr } \mathbf{E})^2/2 + \mu \mathbf{E} : \mathbf{E}$.

Подставляя (6.24) в (6.13), аналогично получаем

$$u^* = \sigma_{ij} [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}]/2E = [(1 + \nu) \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \nu \sigma_{ii} \sigma_{jj}]/2E,$$

или в символических обозначениях $u^* = [(1 + \nu) \Sigma : \Sigma - \nu (\text{tr } \Sigma)^2]/2E$.

6.2. Разложив каждый из тензоров напряжений и деформаций на шаровые части и девиаторы, представить плотность энергии деформации u^* в виде суммы плотности энергии расширения $u_{(S)}^*$ и плотности энергии искажения формы (энергии дисторсии) $u_{(D)}^*$.

Подставив (3.98) и (2.70) в формулу (6.13), получим

$$\begin{aligned} u^* &= 1/2 (s_{ij} + \sigma_{kk} \delta_{ij}/3) (e_{ij} + \epsilon_{pp} \delta_{ij}/3) = \\ &= 1/2 (s_{ij} e_{ij} + \sigma_{ii} e_{jj}/3 + s_{ii} e_{jj}/3 + \sigma_{ii} \epsilon_{jj}/3). \end{aligned}$$

Вследствие того что $e_{ii} = s_{ii} = 0$, выражение для u^* сводится к сумме $u^* = u_{(S)}^* + u_{(D)}^* = \sigma_{ii} \epsilon_{jj}/6 + s_{ij} e_{ij}/2$

6.3. Имеется состояние всестороннего равномерного сжатия с тензором напряжений $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$. Получить формулы (6.25) для модуля объемного сжатия (отношения давления к изменению объема).

Для тензора напряжений $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ соотношение (6.24) принимает вид $\epsilon_{ij} = [(1 + \nu)(-p\delta_{ij}) + \nu\delta_{ij}(3p)]/E$, откуда получаем $\epsilon_{ii} = [-3p(1 + \nu) + 9\nu]/E$. Тогда $K = -p/\epsilon_{ii} = E/3(1 - 2\nu)$. Аналогично из закона Гука (6.21) для данного случая имеем $\sigma_{ii} = (3\lambda + 2\mu)\epsilon_{ii} = -3p$, так что $K = (3\lambda + 2\mu)/3$.

6.4. Выразить $u_{(S)}^*$ и $u_{(D)}^*$ задачи 6.2 через технические упругие модули K и G и компоненты деформаций.

В задаче 6.3 получено $\sigma_{ii} = 3K\epsilon_{ii}$, и, следовательно,

$$u_{(S)}^* = \sigma_{ij}\epsilon_{ij}/6 = K\epsilon_{ii}\epsilon_{jj}/2 = K(I_E)^2/2.$$

Представим компоненты напряжения по закону Гука (6.21) и по формуле (2.70): $\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{ij} = s_{ij} + \sigma_{kk}\delta_{ij}/3$. А так как $\sigma_{ii} = (3\lambda + 2\mu)\epsilon_{ii}$, то $s_{ij} = 2\mu(\epsilon_{ij} - \epsilon_{kk}\delta_{ij}/3)$. Таким образом,

$$u_{(D)}^* = 2\mu(\epsilon_{ij} - \epsilon_{kk}\delta_{ij}/3)(\epsilon_{ij} - \epsilon_{pp}\delta_{ij}/3)/2 = \mu(\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} - \epsilon_{ii}\epsilon_{jj}/3).$$

Заметим, что плотность энергии расширения $u_{(S)}^*$ оказывается функцией только K , а плотность энергии искажения формы $u_{(D)}^*$ выражается через модуль сдвига μ (или G).

6.5. В общем случае u^* можно представить квадратичной формой $u^* = C_{KM}^*\epsilon_K\epsilon_M$, коэффициенты C_{KM}^* которой не обязательно симметричны. Доказать, что это выражение можно записать в виде (6.14) и что $\partial u^*/\partial \epsilon_K = \sigma_K$.

Преобразуем квадратичную форму следующим образом:

$$\begin{aligned} u^* &= 1/2 C_{KM}^*\epsilon_K\epsilon_M + 1/2 C_{KM}^*\epsilon_K\epsilon_M = 1/2 C_{KM}^*\epsilon_K\epsilon_M + 1/2 C_{PN}^*\epsilon_N\epsilon_P = \\ &= 1/2 (C_{KM}^* + C_{MK}^*)\epsilon_K\epsilon_M = 1/2 C_{KM}^*\epsilon_K\epsilon_M, \end{aligned}$$

где $C_{KM} = C_{MK}$.

Теперь вычислим производную $\partial u^*/\partial \epsilon_R$:

$$\begin{aligned} \partial u^*/\partial \epsilon_R &= 1/2 C_{KM}(\epsilon_{K,R}\epsilon_M + \epsilon_K\epsilon_{M,R}) = 1/2 C_{KM}(\delta_{KR}\epsilon_M + \epsilon_K\delta_{MR}) = \\ &= 1/2 (C_{RM}\epsilon_M + C_{KR}\epsilon_K) = C_{RM}\epsilon_M = \sigma_R. \end{aligned}$$

6.6. Доказать, что для ортотропной упругой среды (с тремя ортогональными плоскостями упругой симметрии) матрица упругих констант имеет вид (6.19).

Пусть плоскость x_1x_2 (или, что то же самое, $x'_1x'_2$) является плоскостью упругой симметрии (рис. 6.4). Тогда $\sigma_K = C_{KM}\epsilon_M$ и одновременно $\sigma'_K = C_{KM'}\epsilon'_M$.

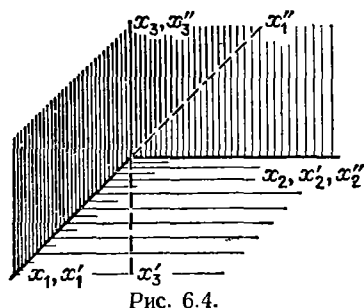


Рис. 6.4.

Матрица преобразования осей x_i в оси x'_i будет

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Из (2.27) и (3.78) $\sigma'_K = \sigma_K$, $\epsilon'_K = \epsilon_K$ при $K = 1, 2, 3, 6$, в то время как $\sigma'_K = -\sigma_K$, $\epsilon'_K = -\epsilon_K$ при $K = 4, 5$. Так, например, для $\sigma'_1 = C_{1M}\epsilon'_M$ получим

$$\sigma'_1 = \sigma_1 = C_{11}\epsilon_1 + C_{12}\epsilon_2 + C_{13}\epsilon_3 - C_{14}\epsilon_4 - C_{15}\epsilon_5 + C_{16}\epsilon_6.$$

Но, с другой стороны, $\sigma_1 = C_{1M}\epsilon_M$, т. е.

$$\sigma_1 = C_{11}\epsilon_1 + C_{12}\epsilon_2 + C_{13}\epsilon_3 + C_{14}\epsilon_4 + C_{15}\epsilon_5 + C_{16}\epsilon_6.$$

Эти два выражения для $\sigma_1 = \sigma'_1$ совпадают только в том случае, когда $C_{14} = C_{15} = 0$. Точно так же из равенств $\sigma'_2 = \sigma_2$, $\sigma'_3 = \sigma_3$, $\sigma'_4 = -\sigma_4$, $\sigma'_5 = -\sigma_5$, $\sigma'_6 = \sigma_6$ следует, что $C_{24} = C_{25} = C_{34} = C_{35} = C_{64} = C_{65} = C_{41} = C_{42} = C_{43} = C_{51} = C_{52} = C_{53} = C_{66} = 0$.

Если плоскость x_2x_3 (или $x_2''x_3''$) является второй плоскостью упругой симметрии, так что $\sigma''_K = C_{KM}\epsilon''_M$ и матрица преобразования к осям x'_i имеет вид

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то из (2.27) и (3.78) получаем $\sigma''_K = \sigma_K$, $\epsilon''_K = -\epsilon_K$ при $K = 1, 2, 3, 4$, тогда как $\sigma''_K = -\sigma_K$, $\epsilon''_K = -\epsilon_K$ при $K = 5, 6$. Отсюда следует, что $C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = C_{54} = C_{61} = C_{62} = C_{63} = 0$ и матрица упругих констант принимает вид (6.19). Читателю предлагается проверить, что упругая симметрия относительно (третьей) плоскости x_1x_3 при такой матрице получается автоматически.

6.7. Подробно провести операцию по сведению матрицы упругих констант (6.19) для ортотропного материала к матрице для изотропной среды (6.20).

В случае изотропии упругие свойства среды одинаковы во всех декартовых системах координат. В частности, для осей, повернутых так, как изображено на рис. 6.5, тот же способ, что в задаче 6.6, приводит к дальнейшему упрощению матрицы (6.19) за счет равенств $C_{11} = C_{22} = C_{33}$, $C_{44} = C_{55} = C_{66}$ и $C_{12} = C_{21} = C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32}$. Наконец, для системы x''_i , полученной поворотом на угол 45° вокруг оси x_3 (рис. 6.6), матрица преобразования будет

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

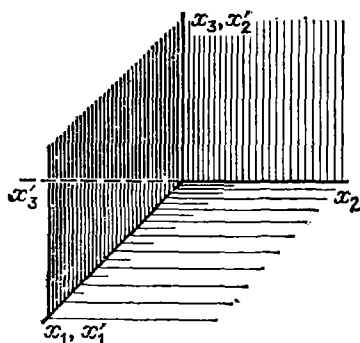


Рис. 6.5.

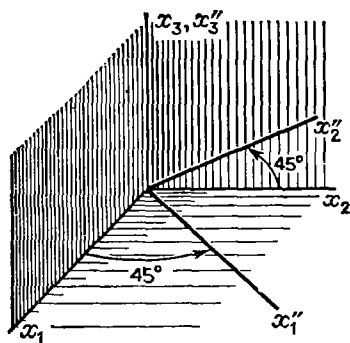


Рис. 6.6.

так что $\sigma_6'' = (\sigma_2 - \sigma_1)/2 = (C_{11} - C_{12})(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/2$ и $\varepsilon_6'' = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. Но $\sigma_6'' = C_{44}\varepsilon_6''$, поэтому $2C_{44} = C_{11} - C_{12}$. Вводя обозначения $\mu = C_{44}$ и $\lambda = C_{12}$, приходим к матрице (6.20)

6.8. Прodelать операцию обращения закона Гука (6.21), чтобы получить соотношение (6.22).

Равенство (6.21) при $i = j$ дает $\sigma_{ii} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{ii}$; следовательно, $2\mu\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij}\sigma_{kk}/(3\lambda + 2\mu)$, или $\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}/(2\mu) - \lambda\delta_{ij}\sigma_{kk}/[2\mu(3\lambda + 2\mu)]$.

6.9. Выразить технические константы ν и E через постоянные Ламе λ и μ .

Из равенств (6.25) видно, что $E/(1 - 2\nu) = 3\lambda + 2\mu$, а из (6.26) $E/(1 + \nu) = 2\mu$. Таким образом, $(3\lambda + 2\mu)(1 - 2\nu) = 2\mu(1 + \nu)$, откуда $\nu = \lambda/[2(\lambda + \mu)]$. Теперь опять воспользуемся (6.26) и найдем $E = 2\mu(1 + \nu) = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$.

6.10. Написать матрицу упругих констант для среды, имеющей ось упругой симметрии порядка $N = 4$. Считать при этом $C_{KM} = C_{MK}$.

Пусть осью упругой симметрии будет ось x_3 . Поворотом других осей на угол $\theta = 2\pi/4 = \pi/2$ относительно x_3 (рис. 6.7) получим направления эквивалентных упругих свойств при $N = 4$. Матрица такого преобразования

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

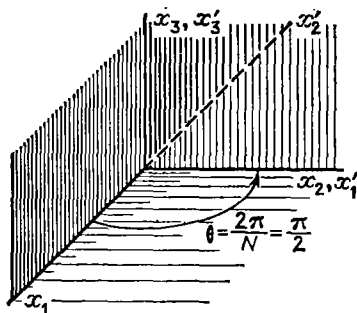


Рис. 6.7.

и формулы (2.27) и (3.78) приводят к группе равенств $\sigma_1' = \sigma_2$, $\sigma_2' = \sigma_1$, $\sigma_3' = \sigma_3$, $\sigma_4' = -\sigma_6$, $\sigma_5' = \sigma_4$, $\sigma_6' = -\sigma_5$ и $\varepsilon_1' = \varepsilon_2$, $\varepsilon_2' = \varepsilon_1$, $\varepsilon_3' = \varepsilon_3$, $\varepsilon_4' = -\varepsilon_5$, $\varepsilon_5' = \varepsilon_4$, $\varepsilon_6' = -\varepsilon_6$. Они накладывают условия на коэффициенты C_{KM} ; так, например, из равенства $\sigma_3' = \sigma_3$ следуют равенства

$C_{34} = C_{35} = C_{36} = 0$, $C_{31} = C_{32}$. Аналогично, используя остальные пять соотношений для напряжений, запишем матрицу упругих констант так:

$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & -C_{16} \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ C_{16} & -C_{16} & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

(с семью независимыми константами).

Статические и динамические задачи теории упругости (§ 6.4—6.5)

6.11. Вывести уравнения Навье (6.31).

Заменим компоненты деформации в (6.28) эквивалентными выражениями через перемещения: $\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i})$. Таким образом, $\sigma_{ij,j} = \lambda \mu_{k,ki} + \mu (u_{i,jj} + u_{j,ji})$. Подставив это выражение в уравнения равновесия (6.27) и перегруппировав члены, получим искомое уравнение: $\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i = 0$.

6.12. Доказать, что если $\nabla^4 F_i = 0$, то компоненты перемещения $u_i = (\lambda + 2\mu) F_{i,jj} / \mu (\lambda + \mu) - F_{j,ji} / \mu$ являются решением уравнений Навье (6.31) при отсутствии массовых сил.

Дифференцируя предполагаемое решение, найдем члены

$$\mu u_{i,jj} = (\lambda + 2\mu) F_{i,kkjj} / (\lambda + \mu) - F_{k,kiji}$$

и

$$(\lambda + \mu) u_{j,ji} = (\lambda + 2\mu) F_{j,kkji} / \mu - (\lambda + \mu) F_{k,kjji} / \mu.$$

Подставим их в уравнение (6.31), что дает

$$(\lambda + 2\mu) F_{i,kkjj} / (\lambda + \mu) - [\mu - (\lambda + 2\mu) + (\lambda + \mu)] F_{j,kkji} = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется, если $F_{i,kkjj} = \nabla^4 F_i = 0$.

6.13. Доказать, что при отсутствии массовых сил функции $u_i = \varphi_i + \varepsilon_{ijk} \psi_{k,j}$ удовлетворяют уравнению движения (6.35), если каждая из функций φ и ψ_i является решением трехмерного волнового уравнения.

Подставим функции u_i в уравнение (6.35):

$$\mu (\varphi_{i,kk} + \varepsilon_{ijk} \psi_{k,jqq}) + (\lambda + \mu) (\varphi_{j,ji} + \varepsilon_{j\rho q} \psi_{q,\rho ji}) = \rho (\ddot{\varphi}_i + \varepsilon_{ijk} \ddot{\psi}_{k,j}).$$

Но $\varepsilon_{j\rho q} \psi_{q,\rho ji} = 0$, поэтому уравнение

$$((\lambda + 2\mu) \varphi_{,kk} - \rho \ddot{\varphi})_i + \varepsilon_{ijk} (\mu \psi_{k,qq} - \rho \ddot{\psi}_k)_j = 0$$

удовлетворяется, если $\nabla^2 \varphi = \rho \ddot{\varphi} / (\lambda + 2\mu)$ и $\nabla^2 \psi_k = \rho \ddot{\psi}_k / \mu$.

6.14. Доказать, что полученное в задаче 6.13 волновое уравнение $c^2 \nabla^2 \varphi = \ddot{\varphi}$, где $c^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, имеет решение

$$\varphi = \frac{g(r+ct) + h(r-ct)}{r},$$

где g и h — произвольные функции своих аргументов, а $r^2 = x_i x_i$.

В данном случае удобно воспользоваться выражением оператора Лапласа в сферических координатах $\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$, так как $\varphi = \varphi(r, t)$. Имеем $r^2 (\partial \varphi / \partial r) = r(g' + h') - (g + h)$, где штрих означает дифференцирование функций g и h по их аргументам. После повторного дифференцирования находим $\nabla^2 \varphi = (g'' + h'')/r$. Аналогично $\dot{\varphi} = (g'c - h'c)/r$ и $\ddot{\varphi} = c^2(g'' + h'')/r$. Теперь видно, что функция φ удовлетворяет уравнению $c^2 \nabla^2 \varphi = \ddot{\varphi}$.

6.15. Вывести уравнения Бельтрами — Мичелла (6.33) и указать ту форму, которую они принимают в случае потенциальных массовых сил, т. е. при $\rho b_i = \varphi_{,i}$.

Подставим соотношения (6.24) в условия совместности деформаций (3.103). Получим

$$(1 + \nu)(\sigma_{ij,km} + \sigma_{km,ij} - \sigma_{ik,jm} - \sigma_{jm,ik}) = \nu(\delta_{ij}\Theta_{,km} + \delta_{km}\Theta_{,ij} - \delta_{ik}\Theta_{,jm} - \delta_{jm}\Theta_{,ik}),$$

где $\Theta = I_{\Sigma} = \sigma_{ii}$. Только шесть уравнений из написанных здесь 81 независимы. Полагая $m = k$ и используя уравнения равновесия (6.27), можем написать

$$\sigma_{ij,kk} + \Theta_{,ij} + \rho(b_{i,j} + b_{j,i}) = \nu(\delta_{ij}\Theta_{,kk} + \Theta_{,ij})/(1 + \nu),$$

откуда находим $\Theta_{,kk} = -(1 + \nu)\rho b_{k,k}/(1 - \nu)$. Подстановка выражения для $\Theta_{,kk}$ в предыдущее уравнение приводит к требуемому результату (6.33).

Если $\rho b_i = \varphi_{,i}$, то $\rho(b_{i,j} + b_{j,i}) = 2\varphi_{,ij}$ и $\rho b_{k,k} = \varphi_{,kk} = \nabla^2 \varphi$, так что уравнение (6.33) принимает вид

$$\nabla^2 \sigma_{ij} = \Theta_{,ij}/(1 + \nu) + 2\varphi_{,ij} + \nu \delta_{ij} \nabla^2 \varphi / (1 - \nu) = 0.$$

Двумерные задачи теории упругости (§ 6.6—6.8)

6.16. Для плоских напряжений, действующих параллельно плоскости $x_1 x_2$, написать соотношение между напряжениями и деформациями, используя коэффициенты λ и μ . Показать, что эти формулы совпадают с (6.41).

В данном случае $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, а учитывая еще (6.21), имеем $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ и $\varepsilon_{33} = -\lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})/(\lambda + 2\mu)$. Закон Гука (6.21) записывается тогда в виде $\sigma_{\alpha\beta} = 2\lambda\mu\delta_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\gamma}/(\lambda + 2\mu) + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}$, где $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$. Отсюда находим $\sigma_{\alpha\alpha} = 2\mu(3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\gamma\gamma}/(\lambda + 2\mu)$. Теперь формулу для $\sigma_{\alpha\beta}$ можно обратить и найти

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = -\lambda\delta_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\gamma}/2\mu(3\lambda + 2\mu) + \sigma_{\alpha\beta}/2\mu = -\nu\delta_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\gamma}/E + (1 + \nu)\sigma_{\alpha\beta}/E.$$

В частности, отсюда следует, что

$$\varepsilon_{33} = -\lambda\varepsilon_{\gamma\gamma}/(\lambda + 2\mu) = -\lambda\sigma_{\gamma\gamma}/2\mu(3\lambda + 2\mu) = -\nu\sigma_{\gamma\gamma}/E,$$

6.17. Для плоской деформации, параллельной плоскости x_1x_2 , написать соотношение между напряжениями и деформациями, используя коэффициенты ν и E . Показать, что эти формулы совпадают с (6.48).

В этом случае $u_3 \equiv 0$ и, следовательно, $\varepsilon_{33} = 0$, а из (6.24) $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \lambda\sigma_{\alpha\alpha}/2(\lambda + \mu)$. Теперь формула (6.24) принимает вид

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = (1 + \nu)\sigma_{\alpha\beta}/E - \nu(1 + \nu)\delta_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\gamma}/E,$$

откуда $\varepsilon_{\alpha\alpha} = (1 + \nu)(1 - 2\nu)\sigma_{\alpha\alpha}/E$. Обращая, окончательно находим

$$\sigma_{\alpha\beta} = \nu E \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\gamma} / (1 + \nu)(1 - 2\nu) + E \varepsilon_{\alpha\beta} / (1 + \nu) = \lambda \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\gamma} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}.$$

6.18. Вывести уравнения Навье для плоского напряженного состояния (6.45) и показать, что они эквивалентны соответствующим уравнениям для плоской деформации (6.51), если λ заменить на $\lambda' = 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$.

Обращение равенства (6.41) при учете (6.42) дает

$$\sigma_{\alpha\beta} = E(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha})/2(1 + \nu) + 2\nu E \delta_{\alpha\beta} u_{\gamma,\gamma} / [2(1 - \nu^2)].$$

Продифференцируем это по x_β и подставим результат в уравнения равновесия (6.40); получим

$$\begin{aligned} E u_{\alpha,\beta\beta} / [2(1 + \nu)] + E u_{\beta,\beta\alpha} / [2(1 - \nu)] + \rho b_\alpha = \\ = \mu \nabla^2 u_\alpha + \mu (3\lambda + 2\mu) u_{\beta,\beta\alpha} / (\lambda + 2\mu) + \rho b_\alpha = 0. \end{aligned}$$

Если провести замену $\mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + 2\mu) = 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu) + \mu = \lambda' + \mu$, то уравнения (6.45) совпадут с (6.51).

6.19. Найти связь между константами A и B , при которой функция $\varphi = Ax_1^2x_2^3 + Bx_2^5$ будет функцией напряжений Эри.

Согласно (6.56), функция φ должна быть бигармонической, т. е. $\varphi_{,1111} + 2\varphi_{,1122} + \varphi_{,2222} = 0 + 24Ax_2 + 120Bx_2 = 0$. Это верно, если $A = -5B$.

6.20. Доказать, что функцией напряжений Эри может служить

$$\varphi = \frac{3F}{4c} \left[x_1x_2 - \frac{x_1^3x_2^3}{3c^2} \right] + \frac{P}{4c} x_2^2.$$

Найти компоненты напряжения в области $x_1 > 0$, $-c < x_2 < c$.

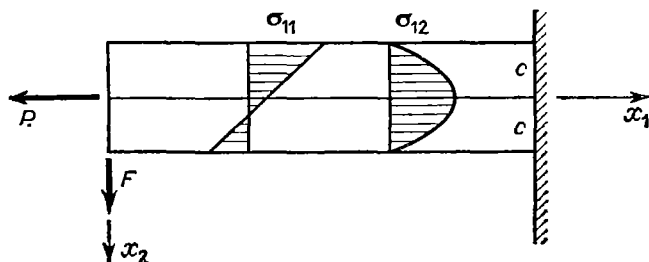


Рис. 6.8.

Вследствие того что $\nabla^4 \varphi$ тождественно равно нулю, функция φ может служить функцией напряжения. Компоненты напряжения, вычисленные по формуле (6.55), равны

$$\sigma_{11} = \varphi_{,22} = -3F x_1 x_2 / 2c^3 + P/2c, \quad \sigma_{12} = -\varphi_{,12} = -3F (c^2 - x_2^2) / 4c^3,$$

$$\sigma_{22} = \varphi_{,11} = 0.$$

Такие напряжения возникают в консольной балке под действием продольной нагрузки P и поперечной нагрузки F на конце балки (рис. 6.8).

6.21. В задаче 2.36 было показано, что при отсутствии массовых сил уравнениям равновесия удовлетворяют функции $\sigma_{ij} = \varepsilon_{ipq} \varepsilon_{jmn} \varphi_{qn,pm}$. Доказать, что функцией напряжений Эри в этом случае служит $\varphi_{33} = \varphi(x_1, x_2)$, в то время как $\varphi_{11} = \varphi_{22} = \varphi_{12} = \varphi_{13} = \varphi_{23} \equiv 0$.

Компонента φ_{33} является единственной отличной от нуля, и поэтому равенство $\sigma_{ij} = \varepsilon_{ipq} \varepsilon_{jmn} \varphi_{qn,pm}$ превращается в $\sigma_{ij} = \varepsilon_{ip3} \varepsilon_{jmn} \varphi_{33,pm}$ или $\sigma_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\gamma\zeta} \varepsilon_{\beta\gamma\zeta} \varphi_{33,\gamma\zeta}$. В силу того что $\varphi_{33} = \varphi$, $\sigma_{\alpha\beta} = (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\zeta} - \delta_{\alpha\zeta} \delta_{\gamma\beta}) \varphi_{,\gamma\zeta} = \delta_{\alpha\beta} \varphi_{,\gamma\gamma} - \varphi_{,\alpha\beta}$.

Поэтому компоненты напряжений выражаются через функцию φ так:

$$\sigma_{11} = \varphi_{,11} + \varphi_{,22} - \varphi_{,11} = \varphi_{,22}, \quad \sigma_{12} = -\varphi_{,12},$$

$$\sigma_{22} = \varphi_{,11} + \varphi_{,22} - \varphi_{,22} = \varphi_{,11}.$$

6.22. При решении задачи о диске радиуса a , находящемся под действием вращающего момента M , используется функция напряжений Эри $\Phi = B\theta$ в полярных координатах r, θ (рис. 6.9). Найти компоненты напряжения и величину константы B .

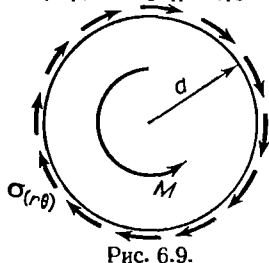


Рис. 6.9.

Вычислим компоненты напряжения. По формулам (6.60) и (6.61) $\sigma_{(rr)} = \sigma_{(\theta\theta)} = 0$, а из (6.62) $\sigma_{(r\theta)} = B/r^2$. Для равновесия моментов относительно центра диска требуется, чтобы $M = \int_0^{2\pi} \sigma_{(r\theta)} a^2 d\theta = \int_0^{2\pi} B d\theta = 2\pi B$. Таким образом, $B = M/2\pi$.

Линейная термоупругость (§ 6.10)

6.23. Обратив (6.69), получить определяющие уравнения термоупругости (6.70).

При $i = j$ из (6.69) имеем $\sigma_{ii} = (3\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{ii} - 3\alpha(T - T_0))$. Разрешая (6.69) относительно σ_{ij} , находим

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\sigma_{kk}/(3\lambda + 2\mu) - 2\mu\alpha\delta_{ij}(T - T_0) = \\ &= 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}(\varepsilon_{kk} - 3\alpha(T - T_0)) - 2\mu\alpha\delta_{ij}(T - T_0) = \\ &= 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\delta_{ij}(T - T_0). \end{aligned}$$

6.24. Вывести уравнение энергии (6.73) для термоупругости, используя при этом функцию свободной энергии $f = u - Ts$.

Предположим, что свободная энергия является функцией деформаций и температуры $f = f(\epsilon_{ij}, T)$. Подставим ее в уравнение (5.41), т. е. в уравнение $\rho \dot{u} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \rho Ts$, где точками обозначено дифференцирование по времени. Тогда $(\sigma_{ij} - \rho \partial f / \partial \epsilon_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} - \rho (s + \partial f / \partial T) \dot{T} = 0$. Так как члены в скобках не зависят от скоростей изменения деформаций и температуры, то из последнего равенства следует, что $\sigma_{ij} = \rho \partial f / \partial \epsilon_{ij}$ и $s = -\partial f / \partial T$.

Уравнение второго закона термодинамики для термоупругой среды имеет вид $T ds = dq$, т. е.

$$\rho T \dot{s} = \rho T \left(\frac{\partial s}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\partial s}{\partial T} \dot{T} \right) = -c_{i,i}.$$

Отсюда, в частности, видно, что $T (\partial s / \partial T) = c^{(v)}$, где $c^{(v)}$ — теплоемкость при постоянных деформациях, когда $\dot{\epsilon}_{ij} = 0$. Воспользовавшись полученными выше выражениями для s и σ_{ij} через f , получаем $\partial s / \partial T = -\partial^2 f / \partial T^2$, т. е. $c^{(v)} = -T (\partial^2 f / \partial T^2)$ и $\partial s / \partial \epsilon_{ij} = -\partial^2 f / \partial \epsilon_{ij} \partial T = -(\rho) (\partial \sigma_{ij} / \partial T)$; поэтому

$$-c_{i,i} = kT_{,ii} = \rho T \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{c^{(v)}}{T} \dot{T} \right).$$

Из (6.70) видно, что $\partial \sigma_{ij} / \partial T = -\alpha (3\lambda + 2\mu) \delta_{ij}$, поэтому

$$kT_{,ii} = \rho c^{(v)} \dot{T} + (3\lambda + 2\mu) \alpha T \dot{\epsilon}_{ii},$$

а это совпадает с (6.73).

6.25. Используя соотношения (6.13) и (6.70), получить плотность энергии деформации для термоупругой среды.

Непосредственной подстановкой (6.70) в формулу (6.13) находим

$$\begin{aligned} u^* &= \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} \epsilon_{ij} / 2 + \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \delta_{ij} (T - T_0) \epsilon_{ij} / 2 = \\ &= \lambda \epsilon_{ii} \epsilon_{jj} / 2 + \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0) \epsilon_{ii} / 2. \end{aligned}$$

Смешанные задачи

6.26. Доказать, что плотность энергии искажения формы $u_{(D)}^*$ для линейного упругого материала можно выразить через главные значения напряжений следующим образом:

$$u_{(D)}^* = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] / 12G.$$

Как видно из результатов задачи 6.2, $u_{(D)}^* = s_{ij} e_{ij} / 2 = s_{ij} s_{ij} / 4G$, что можно записать через компоненты напряжений так:

$$u_{(D)}^* = (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_{kk} / 3) (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_{pp} / 3) / 4G = (\sigma_{ij} \sigma_{ij} - \sigma_{ii} \sigma_{jj} / 3) / 4G.$$

В главных напряжениях это выражение примет вид

$$\begin{aligned} u_{(D)}^* &= [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3] / 4G = \\ &= [2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1) / 3] / 4G = \\ &= [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] / 12G. \end{aligned}$$

6.27. Используя выводы задачи 6.1, доказать, что для упругого материала $\partial u^*/\partial \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}$ и $\partial u^*/\partial \sigma_{ij} = \varepsilon_{ij}$.

В задаче 6.1 было получено $u^* = \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj}/2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$; поэтому

$$\begin{aligned} \partial u^*/\partial \varepsilon_{pq} &= (\lambda/2) [\varepsilon_{ii} (\partial \varepsilon_{jj}/\partial \varepsilon_{pq}) + \varepsilon_{jj} (\partial \varepsilon_{ii}/\partial \varepsilon_{pq})] + 2\mu \varepsilon_{ij} (\partial \varepsilon_{ij}/\partial \varepsilon_{pq}) = \\ &= (\lambda/2) [\varepsilon_{ii} \delta_{jp} \delta_{iq} + \varepsilon_{jj} \delta_{ip} \delta_{iq}] + 2\mu \varepsilon_{ij} \delta_{ip} \delta_{jq} = (\lambda/2) [\varepsilon_{ii} \delta_{pq} + \varepsilon_{jj} \delta_{pq}] + 2\mu \varepsilon_{pq} = \\ &= \lambda \varepsilon_{ii} \delta_{pq} + 2\mu \varepsilon_{pq} = \sigma_{pq}. \end{aligned}$$

Аналогично, из равенства $u^* = [(1 + \nu) \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \nu \sigma_{ii} \sigma_{jj}]/(2E)$, полученного в задаче 6.1, имеем

$$\begin{aligned} \partial u^*/\partial \sigma_{pq} &= [2(1 + \nu) \sigma_{ij} \delta_{ip} \delta_{jq} - \nu (\sigma_{ii} \delta_{pq} + \sigma_{jj} \delta_{pq})]/(2E) = \\ &= [(1 + \nu) \sigma_{pq} - \nu \delta_{pq} \sigma_{ii}]/E = \varepsilon_{pq}. \end{aligned}$$

6.28. Представить плотность энергии деформации u^* в виде функции инвариантов деформации.

В задаче 6.1 установлено, что $u^* = \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj}/2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$. Но, согласно (3.91), $I_E = \varepsilon_{ii}$ и $II_E = (\varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij})/2$, и поэтому

$$u^* = \lambda (I_E)^2/2 + \mu [-2II_E + (I_E)^2] = (\lambda/2 + \mu) (I_E)^2 - 2\mu II_E.$$

6.29. Цилиндрический вал длины L и кругового сечения радиуса a находится под действием пары сил в торцевом сечении, как показано на рис. 6.10. При этом отличными от нуля будут компоненты напряжения $\sigma_{13} = -G\alpha x_2$, $\sigma_{23} = G\alpha x_1$, где α — угол закручивания на единицу длины вала. Найти выражение для плотности энергии деформации и полную энергию деформации вала.

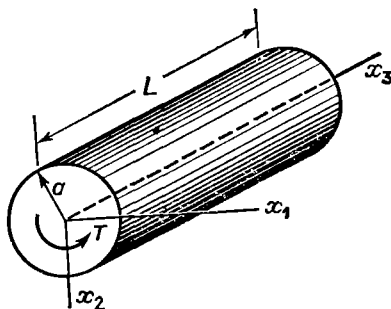


Рис. 6.10.

В силу результата задачи 6.1 $u^* = [(1 + \nu) \Sigma : \Sigma - \nu (\text{tr } \Sigma)^2]/(2E)$. В данном случае $\text{tr } \Sigma = 0$ и $\Sigma : \Sigma = 2G^2 \alpha^2 r^2$, где $r = x_1^2 + x_2^2$. Поэтому $u^* = G\alpha^2 r^2/2$. Полная энергия деформации находится в виде интеграла

$$U = \int_V u^* dV = \frac{G\alpha^2}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 dr d\theta dx_3 = G\alpha^2 a^4 \pi L/4.$$

Заметим, что так как $T = \int_0^L \int_0^{2\pi} G\alpha (x_1^2 + x_2^2) r dr d\theta = G\alpha a^4 \pi/2$, то $U = T\alpha L/2$, т. е.

U равна работе внешнего момента.

6.30. Доказать, что упругие свойства (закон Гука и плотность энергии деформации) среды, имеющей ось упругой симметрии порядка $N = 2$, и среды с одной плоскостью упругой симметрии совпадают.

Поворот осей на угол $\theta = 2\pi/N = 2\pi/2 = \pi$ приводит к направлениям эквивалентных упругих свойств. Но в точности к тому же положению мы приходим при отражении относительно плоскости упругой симметрии.

6.31. Доказать, что матрицу (6.19), в которой $C_{11} = C_{22} = C_{33}$, $C_{44} = C_{55} = C_{66}$ и $C_{12} = C_{13} = C_{23}$, можно свести к виду (6.20) поворотом осей на произвольный угол θ вокруг оси x_3 (рис. 6.11).

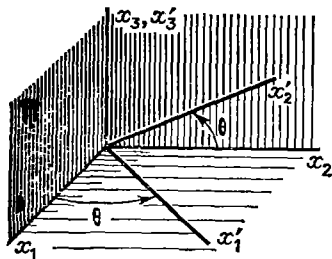


Рис. 6.11.

Преобразование осей x_i в оси x'_i дается матрицей

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а согласно (2.27), имеем

$$\sigma'_{12} = (-\sin \theta \cos \theta) \sigma_{11} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sigma_{12} + (\sin \theta \cos \theta) \sigma_{22}$$

или в обозначениях с одним индексом

$$\sigma'_6 = (-\sin \theta \cos \theta) \sigma_1 + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sigma_6 + (\sin \theta \cos \theta) \sigma_2.$$

Точно так же, используя формулу (3.78) и учитывая (6.4), получаем

$$\epsilon'_6 = (-2 \sin \theta \cos \theta) \epsilon_1 + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \epsilon_6 + (2 \sin \theta \cos \theta) \epsilon_2.$$

Но для изотропного тела $\sigma'_6 = C_{44} \epsilon'_6$, и, следовательно, в данном случае $\sigma_2 - \sigma_1 = 2C_{44}(\epsilon_2 - \epsilon_1)$. Наконец, в соответствии с видом матрицы (6.19) при указанных выше условиях будем иметь $\sigma_1 = C_{11}\epsilon_1 + C_{12}(\epsilon_2 + \epsilon_1)$ и $\sigma_2 = C_{11}\epsilon_2 + C_{12}(\epsilon_1 + \epsilon_2)$, и, значит, $\sigma_2 - \sigma_1 = (C_{11} - C_{12})(\epsilon_2 - \epsilon_1)$. Таким образом, $C_{11} - C_{12} = 2C_{44}$. Полагая $C_{44} = \mu$, $C_{12} = \lambda$, $C_{11} = \lambda + 2\mu$, приходим к форме (6.20).

6.32. Упругое тело, подчиняющееся закону Гука, находится в равновесии под действием массовых сил b_i и поверхностных сил $t_i^{(n)}$. Доказать, что полная энергия деформации равна половине работы внешних сил на перемещениях u_i .

Требуется доказать, что $\int_V \rho b_i u_i dV + \int_S t_i^{(n)} u_i dS = 2 \int_V u^* dV$. Рассмотрим сна-

чала интеграл по поверхности, в котором проведем замену $t_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j$, и преобразуем его по теореме Гаусса — Остроградского:

$$\int_S \sigma_{ij} u_i n_j dS = \int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV = \int_V (\sigma_{ij,j} u_i + \sigma_{ij} u_{i,j}) dV.$$

Но $\sigma_{ij} u_{i,j} = \sigma_{ij}(\epsilon_{ij} + \omega_{ij}) = \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$, а из уравнения равновесия $\sigma_{ij,j} = -\rho b_i$. Таким образом,

$$\int_S t_i^{(n)} u_i dS = - \int_V \rho b_i u_i dV + 2 \int_V (\sigma_{ij} \epsilon_{ij} / 2) dV$$

и теорема доказана.

6.38. Найти $c (= \text{const})$, при котором функции $u_1 = A \sin \frac{2\pi}{l} (x_1 \pm ct)$, $u_2 = u_3 = 0$ служат решением уравнения (6.35) при отсутствии массовых сил.

Ответ: $c = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$.

6.39. Доказать, что для изотропной линейно упругой среды плотность энергии искажения формы равна $u_{(D)} = (\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}/3)/4G$, а плотность энергии расширения равна $u_{(S)} = \sigma_{ii}\sigma_{jj}/18K$.

6.40. Доказать, что $1/(1 + \nu) = 2(\lambda + \mu)/3\lambda + 2\mu$ и $\nu/(1 - \nu) = \lambda/(\lambda + 2\mu)$.

6.41. Доказать, что для плоской деформации, параллельной плоскости x_1x_2 , компонента массовой силы $b_3 \equiv 0$, а компоненты b_1 и b_2 являются функциями только x_1 и x_2 .

6.42. Используя правило преобразования напряжений и деформаций, доказать, что упругие константы C_{ijklm} являются компонентами декартова тензора четвертого ранга, так что $C'_{ijklm} = a_{ip}a_{jq}a_{kr}a_{ms}C_{pqrs}$.

6.43. Доказать, что функция напряжений Эри $\varphi = 2x_1^4 + 12x_1^2x_2^2 - 6x_2^4$ удовлетворяет бигармоническому уравнению $\nabla^4\varphi = 0$, и найти компоненты напряжений, считая деформацию плоской.

Ответ:
$$\sigma_{ij} = 24 \begin{pmatrix} x_1^2 - 3x_2^2 & -2x_1x_2 & 0 \\ -2x_1x_2 & x_1^2 + x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\nu(x_1^2 - x_2^2) \end{pmatrix}.$$

6.44. Найти деформации, вызванные напряжениями задачи 6.43, и доказать, что уравнение совместности (6.44) удовлетворяется.

Ответ:

$$\varepsilon_{ij} = 24 \left(\frac{1 + \nu}{E} \right) \begin{pmatrix} x_1^2 - 3x_2^2 - 2\nu(x_1^2 - x_2^2) & -2x_1x_2 & 0 \\ -2x_1x_2 & x_1^2 + x_2^2 - 2\nu(x_1^2 - x_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.45. Для упругого тела, имеющего ось симметрии порядка $N = 6$, доказать, что $C_{22} = C_{11}$, $C_{55} = C_{44}$, $C_{66} = 2(C_{11} - C_{12})$, а из остальных упругих констант отличны от нуля только C_{13} и C_{33} .

6.46. Доказать, что в упругой среде при потенциальных массовых силах $\rho b_\alpha = \nabla \psi = \psi_{,\alpha}$ уравнение совместности (6.44) имеет вид $\nabla^2 \sigma_{\alpha\alpha} = \nabla^2 \psi / (1 - \nu)$ в случае плоской деформации или $\nabla^2 \sigma_{\alpha\alpha} = (1 + \nu) \nabla^2 \psi$ в случае плоского напряженного состояния.

6.47. Пусть $\nabla^4 F_i = 0$. Доказать, что функции $u_i = 2(1 - \nu) \nabla^2 F_i / G - F_{i,jj} / G$ будут решением уравнений Навье (6.31), если $b_i \equiv 0$ (см. задачу 6.12). Найти компоненты напряжений, когда $\mathbf{F} = B(x_2 \hat{\mathbf{e}}_1 - x_1 \hat{\mathbf{e}}_2)/r$, где $r^2 = x_1 x_1$.

Ответ: $\sigma_{11} = -\sigma_{22} = 6QGx_1x_2/r^5$, $\sigma_{33} = 0$, $\sigma_{12} = 3QG(x_2^2 - x_1^2)/r^5$, $\sigma_{13} = -\sigma_{23} = 3QGx_2x_3/r^5$, где $Q = 4B(1 - \nu)/G$.

6.48. Функция напряжений Эри задана в полярных координатах: $\Phi = Cr^2 (\cos 2\theta - \cos 2\alpha)$, где C и α — постоянные. Найти величину C , если $\sigma_{\theta\theta} = 0$, $\sigma_{r\theta} = \tau$ при $\theta = \alpha$ и $\sigma_{\theta\theta} = 0$, $\sigma_{r\theta} = -\tau$ при $\theta = -\alpha$,

Ответ: $C = \tau / (2 \sin 2\alpha)$.

6.49. Доказать, что в задачах термоупругости при плоской деформации $\sigma_{33} = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \alpha E (T - T_0)$ и

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda \delta_{\alpha\beta} e_{\gamma\gamma} + 2\mu e_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0),$$

а при плоском напряженном состоянии $e_{33} = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})/E + \alpha (T - T_0)$ и

$$e_{\alpha\beta} = (1 + \nu) \sigma_{\alpha\beta}/E - \nu \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\gamma}/E + \delta_{\alpha\beta} (T - T_0) \alpha.$$

6.50. Доказать, что в термоупругости уравнение совместности (6.44) можно записать через функцию напряжений Эри $\Phi = \Phi(x_1, x_2)$ в случае плоской деформации в виде $\nabla^4 \Phi = -\alpha E \nabla^2 (T - T_0)/(1 - \nu)$, а в случае плоского напряженного состояния — в виде $\nabla^4 \Phi = -\alpha E \nabla^2 (T - T_0)$.

Жидкости

7.1. Давление жидкости. Тензор вязких напряжений.

Баротропное течение

В любой жидкости ¹⁾ в состоянии покоя вектор напряжения $\hat{t}_i^{(n)}$ на произвольном элементе поверхности коллинеарен нормали $\hat{n}$ к поверхности и одинаков по величине для всех направлений в данной точке. Таким образом,

$$\hat{t}_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j = -p_0 n_i, \quad \text{или} \quad \hat{t}^{(n)} = \Sigma \cdot \hat{n} = -p_0 \hat{n}. \quad (7.1)$$

Здесь p_0 — величина напряжения, или *гидростатическое давление*. Отрицательный знак указывает на сжимающее действие напряжения при положительном значении давления. Каждое направление является главным, и из (7.1) следует, что

$$\sigma_{ij} = -p_0 \delta_{ij}, \quad \text{или} \quad \Sigma = -p_0 \mathbf{I}. \quad (7.2)$$

Это сферическое напряженное состояние, часто называемое гидростатическим сжатием. Из (7.2) видно, что касательные компоненты напряжения равны нулю в покоящейся жидкости.

При движении компоненты касательных напряжений в общем случае не равны нулю, и обычно в этом случае тензор напряжений представляют суммой двух слагаемых

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad \text{или} \quad \Sigma = -p \mathbf{I} + \Gamma, \quad (7.3)$$

при этом τ_{ij} называют *тензором вязких напряжений*, а p — *давлением*.

Все реальные жидкости — сжимаемые и вязкие. Однако эти свойства очень различны у разных жидкостей, и часто бывает возможно пренебречь этими эффектами в некоторых ситуациях без существенной потери точности в расчетах, основанных на таких предположениях. Согласно этому, *невязкая*, или так называемая *идеальная, жидкость* — это такая жидкость, в которой τ_{ij} тождественно равны нулю, даже если происходит движение. Напротив, *вязкие жидкости* — это такие, для которых нужно учитывать τ_{ij} . Для сжимаемых жидкостей давление p по существу то же самое, что и в классической термодинамике. Согласно (7.3), среднее

¹⁾ Понятие «жидкость» в этом тексте включает в себя как истинные жидкости, так и газы. — Прим. перев.

нормальное напряжение дается формулой

$$\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -p + \frac{1}{3}\tau_{ii}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{3}\Theta = -p + \frac{1}{3}\Gamma. \quad (7.4)$$

Для покоящихся жидкостей τ_{ij} обращается в нуль, а p сводится к p_0 , которое в этом случае равно взятому с обратным знаком среднему нормальному напряжению. Для несжимаемых жидкостей термодинамическое давление независимо от механических условий не определяется, и для таких жидкостей p нужно рассматривать как самостоятельную неизвестную механической природы.

В сжимаемых жидкостях давление p , плотность ρ и абсолютная температура T связаны уравнением состояния

$$p = p(\rho, T). \quad (7.5)$$

Примером такого уравнения состояния может служить известный закон совершенного газа

$$p = \rho RT, \quad (7.6)$$

где R — газовая постоянная. Процессы в жидкости, подчиняющиеся уравнению состояния, которое не содержит температуры, т. е. имеет вид $p = p(\rho)$, называются *баротропными*. Изотермический процесс в совершенном газе — пример частного случая, в котором выполняется предположение баротропии.

7.2. Определяющие уравнения. Стоксовы жидкости.

Ньютоновы жидкости

Наличие в жидкости вязких напряжений связано с диссипацией энергии. При установлении определяющих соотношений для жидкостей в общем случае считают, что тензор вязких напряжений τ_{ij} является функцией тензора скоростей деформации D_{ij} . Если эта функциональная связь нелинейна, что символически можно выразить формулой

$$\tau_{ij} = f_{ij}(D_{pq}), \quad \text{или} \quad \Gamma = f(D), \quad (7.7)$$

то жидкость называется *стоксовой*. Если эта функция линейна, т. е. имеет вид

$$\tau_{ij} = K_{ijpq} D_{pq}, \quad \text{или} \quad \Gamma = \tilde{K} : D, \quad (7.8)$$

где константы K_{ijpq} называются *коэффициентами вязкости*, то жидкость называется *ньютоновой*. Некоторые авторы классифицируют жидкости просто как *ньютоновы* и *неньютоновы*.

Определяющие уравнения для изотропной однородной ньютоновой жидкости можно получить из (7.7) и (7.3), следуя точно такой же процедуре, которая была проделана с обобщенным законом Гука для упругих сред в гл. 6. Окончательная их форма такова:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} D_{kk} + 2\mu^* D_{ij}, \quad (7.9)$$

или

$$\Sigma = -pI + \lambda^* I(\text{tr } D) + 2\mu^* D,$$

где λ^* и μ^* — коэффициенты вязкости жидкости. Из (7.9) можно найти среднее нормальное напряжение

$$\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -p + \frac{1}{3}(3\lambda^* + 2\mu^*)D_{ii} = -p + \kappa^*D_{ii},$$

или

$$\frac{1}{3}(\text{tr } \Sigma) = -p + \frac{1}{3}(3\lambda^* + 2\mu^*)(\text{tr } \mathbf{D}) = -p + \kappa^*(\text{tr } \mathbf{D}), \quad (7.10)$$

где $\kappa^* = \frac{1}{3}(3\lambda^* + 2\mu^*)$ называется коэффициентом объемной вязкости. Условие

$$\kappa^* = \lambda^* + \frac{2}{3}\mu^* = 0, \quad (7.11)$$

известное как *условие Стокса*, утверждает, что давление p определяется как среднее нормальное напряжение в покоящейся сжимаемой жидкости. В таком случае термодинамическое давление определено через механические напряжения.

Используя компоненты девиаторов $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3$ и $D'_{ij} = D_{ij} - \delta_{ij}D_{kk}/3$, приведенные выше уравнения (7.9) можно переписать следующим образом:

$$s_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk} = -p\delta_{ij} + \delta_{ij}(\lambda^* + \frac{2}{3}\mu^*)D_{ii} + 2\mu^*D'_{ij},$$

или

$$\mathbf{S} + \frac{1}{3}\mathbf{I}(\text{tr } \Sigma) = -p\mathbf{I} + \mathbf{I}(\lambda^* + \frac{2}{3}\mu^*)(\text{tr } \mathbf{D}) + 2\mu^*\mathbf{D}'. \quad (7.12)$$

Учитывая соотношения (7.10), уравнения (7.12) можно записать в виде двух групп уравнений:

$$s_{ij} = 2\mu^*D'_{ij}, \quad \text{или} \quad \mathbf{S} = 2\mu^*\mathbf{D}', \quad (7.13)$$

$$\sigma_{ii} = -3p + 3\kappa^*D_{ii}, \quad \text{или} \quad \text{tr } \Sigma = -3p + 3\kappa^*(\text{tr } \mathbf{D}); \quad (7.14)$$

первая из них относится к эффектам сдвига, а вторая дает соотношения для изменения объема.

7.3. Основные уравнения ньютоновой жидкости.

Уравнения Навье — Стокса — Дюгема

При постановке задач о движении ньютоновой жидкости (или газа) основными уравнениями в эйлеровой форме будут следующие:

а) уравнение неразрывности (5.3)

$$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0, \quad \text{или} \quad \dot{\rho} + \rho(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}) = 0; \quad (7.15)$$

б) уравнения движения (5.16)

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i, \quad \text{или} \quad \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \Sigma + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}}; \quad (7.16)$$

в) уравнение энергии (5.32)

$$\dot{u} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} - \frac{1}{\rho} c_{i,i} + z, \quad \text{или} \quad \dot{u} = \frac{1}{\rho} \Sigma : \mathbf{D} - \frac{1}{\rho} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{c} + z; \quad (7.17)$$

г) определяющие уравнения (7.9)

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^*\delta_{ij}D_{kk} + 2\mu^*D_{ij}, \quad (7.18)$$

$$\Sigma = -pI + \lambda^*I(\operatorname{tr} D) + 2\mu^*D;$$

д) уравнение состояния (7.5)

$$p = p(\rho, T). \quad (7.19)$$

Если учитываются тепловые эффекты, что очень часто бывает необходимо в задачах о движении жидкости, то требуются дополнительные уравнения, а именно:

е) закон теплопроводности Фурье (6.71)

$$c_i = -kT_{,i}, \quad \text{или} \quad \mathbf{c} = -k\nabla T; \quad (7.20)$$

ж) калорическое уравнение состояния

$$u = u(\rho, T). \quad (7.21)$$

Система уравнений (7.15) — (7.21) содержит шестнадцать уравнений с шестнадцатью неизвестными и поэтому является замкнутой.

Если определяющие соотношения (7.18) подставить в уравнения движения (7.16) и воспользоваться определением $2D_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})$, то получатся так называемые *уравнения движения Навье — Стокса — Дюгема*:

$$\rho\dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} + (\lambda^* + \mu^*)v_{j,i} + \mu^*v_{i,jj}, \quad (7.22)$$

$$\rho\dot{\mathbf{v}} = \rho\mathbf{b} - \nabla p + (\lambda^* + \mu^*)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu^*\nabla^2\mathbf{v}.$$

Для несжимаемой жидкости ($v_{j,j} = 0$) уравнения (7.22) сводятся к *уравнениям Навье — Стокса*:

$$\rho\dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} + \mu^*v_{i,jj}, \quad \text{или} \quad \rho\dot{\mathbf{v}} = \rho\mathbf{b} - \nabla p + \mu^*\nabla^2\mathbf{v}. \quad (7.23)$$

Если выполнено условие Стокса ($\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu^*$), то для такой сжимаемой среды из (7.22) получаются уравнения Навье — Стокса в форме

$$\rho\dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} + \frac{1}{3}\mu^*v_{j,i} + \mu^*v_{i,jj}, \quad (7.24)$$

$$\rho\dot{\mathbf{v}} = \rho\mathbf{b} - \nabla p + \frac{1}{3}\mu^*\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu^*\nabla^2\mathbf{v}.$$

Уравнения Навье — Стокса (7.23) вместе с уравнением неразрывности (7.15) образуют полную систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными: давлением p и тремя компонентами скорости v_i . В каждой конкретной задаче решение этой системы должно еще удовлетворять граничным и начальным условиям, наложенным на напряжения и компоненты скорости. В вязкой жидкости в качестве граничных условий на неподвижной непроницаемой

поверхности принимается требование обращения в нуль нормальной и касательной компонент скорости. Это условие вытекает из экспериментально установленного факта прилипания, в результате которого жидкость приобретает скорость границы. Для невязкой жидкости на неподвижной непроницаемой поверхности требуется обращение в нуль только нормальной компоненты скорости.

Если уравнения Навье — Стокса записаны в безразмерной форме, то появляются некоторые коэффициенты в виде комбинаций из характерных значений параметров. Одним из наиболее важных и чаще всего используемых таких коэффициентов является *число Рейнольдса* $N_{(R)}$, которое выражает соотношение между силами инерции и силами вязкости. Так, если поток имеет следующие характерные параметры: линейный размер L , скорость V и плотность ρ , то числом Рейнольдса является отношение

$$N_{(R)} = VL/\nu, \quad (7.25)$$

где $\nu = \mu^*/\rho$ называется *кинематическим коэффициентом вязкости*. Для очень больших значений числа Рейнольдса влиянием вязкости на напряжения в уравнениях количества движения можно пренебрегать. В турбулентном потоке кажущиеся (турбулентные) напряжения действуют в осредненном по времени потоке таким же образом, как вязкие напряжения в ламинарном потоке. При отсутствии турбулентности при больших $N_{(R)}$ силы инерции превосходят силы вязкости и жидкость ведет себя так, как будто она невязкая. Способность потока поддерживать турбулентные движения устанавливается по числу Рейнольдса. Определяющие уравнения (7.18) применяются для описания реальных жидкостей только в случае ламинарного течения.

7.4. Установившееся течение. Гидростатика.

Безвихревое течение

Движение жидкости будет *установившимся*, если компоненты скорости не зависят от времени. При этом производные $\partial v_i / \partial t$ равны нулю, а материальная производная по времени от скорости

$$\frac{dv_i}{dt} \equiv \dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j}, \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dt} \equiv \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}, \quad (7.26)$$

упрощается и принимает вид

$$\dot{v}_i = v_j v_{i,j}, \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}. \quad (7.27)$$

Если скорость всюду равна нулю, то уравнения Навье — Стокса сводятся к равенству

$$\rho b_i = p_{,i}, \quad \text{или} \quad \rho \mathbf{b} = \nabla_{\mathbf{x}} p, \quad (7.28)$$

и описывают состояние *гидростатического равновесия*. При наличии баротропии, когда $\rho = \rho(p)$, можно ввести по определению

функцию давления

$$P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}. \quad (7.29)$$

Если к тому же массовые силы потенциальны, т. е.

$$b_i = -\Omega_{,i}, \quad \text{или} \quad \mathbf{b} = -\nabla \Omega, \quad (7.30)$$

то уравнение (7.28) принимает вид

$$(\Omega + P)_{,i} = 0, \quad \text{или} \quad \nabla (\Omega + P) = 0. \quad (7.31)$$

Течение, в котором тензор завихренности (4.21)

$$V_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \text{или} \quad \mathbf{V} = 1/2 (\mathbf{v} \cdot \nabla - \nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (7.32)$$

всюду равен нулю, называется *безвихревым*. Вектор завихренности q_i связан с тензором завихренности соотношением

$$q_i = \epsilon_{ijk} V_{kj}, \quad \text{или} \quad \mathbf{q} = \mathbf{V}_v; \quad (7.33)$$

поэтому этот вектор также обращается в нуль в безвихревом потоке. Кроме того,

$$q_i = \epsilon_{ijk} v_{k,j}, \quad \text{или} \quad \mathbf{q} = \nabla \times \mathbf{v}. \quad (7.34)$$

Но равенство $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ выражает необходимое и достаточное условие существования *потенциала скорости* φ , значит, вектор скорости в безвихревом течении можно представить следующим образом:

$$v_i = -\varphi_{,i}, \quad \text{или} \quad \mathbf{v} = -\nabla \varphi. \quad (7.35)$$

7.5. Идеальная жидкость. Уравнение Бернулли.

Циркуляция

Если коэффициенты вязкости λ^* и μ^* равны нулю, то жидкость называется *невязкой* или *идеальной* (без трения) и уравнения Навье — Стокса — Дюгема (7.22) превращаются в уравнения

$$\rho \dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i}, \quad \text{или} \quad \rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{b} - \nabla p, \quad (7.36)$$

которые называются *уравнениями движения Эйлера*. Для баротропной жидкости при потенциальных массовых силах условия (7.29) и (7.30) можно ввести в уравнение (7.36), в результате чего получится

$$\dot{v}_i = -(\Omega + P)_{,i}, \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{v}} = -\nabla (\Omega + P). \quad (7.37)$$

При установившемся движении (7.37) имеет следующую форму:

$$v_j v_{i,j} = -(\Omega + P)_{,i}, \quad \text{или} \quad \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla (\Omega + P). \quad (7.38)$$

Если уравнения Эйлера (7.37) проинтегрировать вдоль линии тока, то получится известное уравнение Бернулли (см. задачу 7.17):

$$\Omega + P + v^2/2 + \int (\partial v_i / \partial t) dx_i = C(t). \quad (7.39)$$

При установившемся движении $\partial v_i / \partial t = 0$ и $C(t)$ становится постоянной Бернулли C , которая, вообще говоря, различна для разных линий тока. Но если течение является к тому же и безвихревым, то постоянная C будет одной и той же во всем поле течения.

Когда из массовых сил действует только сила тяжести, то ее можно представить потенциалом $\Omega = gh$, где g — постоянное ускорение силы тяжести, а h — высота, отсчитываемая от некоторого уровня. Величина $h_p = P/\rho g$ характеризует так называемый напор давления, а $v^2/2g = h_v$ — скоростной напор. Уравнение Бернулли требует постоянства полного напора вдоль линии тока. Для несжимаемой жидкости это уравнение записывается следующим образом:

$$h + h_p + h_v = h + p/\rho g + v^2/2g = \text{const}. \quad (7.40)$$

По определению *циркулирующей скорости по замкнутой жидкой линии* называют линейный интеграл

$$\Gamma_c = \oint v_i dx_i, \quad \text{или} \quad \Gamma_c = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}. \quad (7.41)$$

По теореме Стокса (1.153) или (1.154) линейный интеграл (7.41) можно преобразовать в интеграл по поверхности:

$$\Gamma_c = \int_S n_i \varepsilon_{ijk} v_{k,j} dS, \quad \text{или} \quad \Gamma_c = \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) dS, \quad (7.42)$$

где $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор нормали к поверхности S , натянутой на данную линию. Если течение безвихревое, то $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ и циркуляция равна нулю. В этом случае подинтегральное выражение в (7.41) оказывается полным дифференциалом некоторой функции $d\phi = -\mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$, а эта функция ϕ представляет собой потенциал скорости.

Материальную производную $d\Gamma_c/dt$ от циркуляции по времени можно найти, воспользовавшись формулой (4.60). В приложении к циркуляции (7.41) эта формула дает

$$\dot{\Gamma}_c = \oint (\dot{v}_i dx_i + v_i dv_i), \quad \text{или} \quad \dot{\Gamma}_c = \oint (\dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}). \quad (7.43)$$

Можно показать, что в баротропной невязкой жидкости при потенциальных массовых силах циркуляция постоянна. Это известная *теорема Кельвина* (Томсона) о постоянстве циркуляции.

7.6. Потенциальное течение.

Плоское потенциальное течение

Термин *потенциальное течение* часто используют для обозначения безвихревого движения, так как условие отсутствия вихрей $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ является одновременно необходимым и достаточным

для существования потенциала скорости φ , через который компоненты скорости определяются по формулам (7.35). Для безвихревого течения сжимаемой жидкости уравнения Эйлера и уравнение неразрывности в некоторых случаях могут быть линеаризованы и совместно преобразованы, как это делается в акустике, к волновому уравнению

$$\ddot{\varphi} = c^2 \varphi_{,ii}, \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} = c^2 \nabla^2 \varphi, \quad (7.44)$$

где c — скорость звука в среде. В случае установившегося безвихревого течения сжимаемой баротропной жидкости уравнения Эйлера и уравнение неразрывности можно совместно преобразовать к следующему виду:

$$(c^2 \delta_{ij} - v_i v_j) v_{j,i} = 0, \quad \text{или} \quad c^2 \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = 0. \quad (7.45)$$

Это так называемые *уравнения газовой динамики*.

Для потенциального течения несжимаемой жидкости уравнение неразрывности сводится к *уравнению Лапласа*

$$\varphi_{,ii} = 0, \quad \text{или} \quad \nabla^2 \varphi = 0, \quad (7.46)$$

и решение его обеспечит нахождение компонент скорости по формулам (7.35). При этом должны также удовлетворяться граничные условия для скорости, например, на неподвижной непроницаемой границе $\partial\varphi/\partial n = 0$. Вследствие линейности уравнения Лапласа существенной чертой этой постановки задачи является возможность использования метода суперпозиции решений.

В двумерном течении несжимаемой жидкости, параллельном плоскости $x_1 x_2$, $v_3 = 0$ и уравнение неразрывности имеет вид

$$v_{\alpha,\alpha} = 0, \quad \text{или} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (7.47)$$

где, как принято в этой книге, греческие индексы принимают значения 1 и 2. В соответствии с (7.47) независимо от того, будет ли течение безвихревым, можно ввести *функцию тока* $\psi = \psi(x_1, x_2)$, такую, что

$$v_\alpha = -\epsilon_{\alpha\beta 3} \psi_{,\beta}. \quad (7.48)$$

Если плоское течение является к тому же еще и безвихревым, т. е.

$$v_\alpha = -\varphi_{,\alpha}, \quad \text{или} \quad \mathbf{v} = -\nabla \varphi, \quad (7.49)$$

то из равенств (7.48) и (7.49) видно, что функция тока и потенциал скоростей удовлетворяют *условиям Коши — Римана*:

$$\varphi_{,1} = \psi_{,2} \quad \text{и} \quad \varphi_{,2} = -\psi_{,1}. \quad (7.50)$$

Исключая φ и ψ поочередно из уравнений (7.50), легко показать, что

$$\varphi_{,\alpha\alpha} = 0, \quad \text{или} \quad \nabla^2 \varphi = 0, \quad (7.51)$$

$$\psi_{,\alpha\alpha} = 0, \quad \text{или} \quad \nabla^2 \psi = 0. \quad (7.52)$$

Таким образом, если течение безвихревое, то обе функции φ и ψ являются гармоническими. В силу этого можно ввести *комплексный потенциал*

$$\Phi(z) = \varphi(x_1, x_2) + i\psi(x_1, x_2), \quad (7.53)$$

который будет аналитической функцией комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$, а его производная $d\Phi/dz$ определяет *комплексную скорость*

$$d\Phi/dz = -v_1 + iv_2. \quad (7.54)$$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Основные свойства жидкостей.

Ньютоновы жидкости (§ 7.1—7.3)

7.1. Доказать, что девиатор s_{ij} тензора напряжений σ_{ij} , удовлетворяющего соотношению (7.3), равен t_{ij} — девиатору тензора τ_{ij} , определенного тем же соотношением.

Из указанной формулы (7.3) найдем $\sigma_{ii} = -3p + \tau_{ii}$; следовательно,

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3 = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} - \delta_{ij}(-3p + \tau_{kk})/3 = \tau_{ij} - \delta_{ij}\tau_{kk}/3 = t_{ij}.$$

7.2. Определить среднее нормальное напряжение $\sigma_{ii}/3$ в несжимаемой стоксовой (нелинейной) жидкости, для которой $\tau_{ij} = \alpha D_{ij} + \beta D_{ik}D_{kj}$, причем α и β — постоянные.

Из (7.3) следует, что $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \alpha D_{ij} + \beta D_{ik}D_{kj}$, и поэтому $\sigma_{ii} = -3p + \alpha D_{ii} + \beta D_{ik}D_{ki}$. Но $D_{ik} = D_{ki}$ и $D_{ii} = v_{i,i} = 0$ для несжимаемой жидкости. Таким образом,

$$\sigma_{ii}/3 = -p + \beta D_{ij}D_{ij}/3 = -p - 2\beta \Pi_D/3,$$

где Π_D — второй инвариант тензора скоростей деформации.

7.3. Адиабатическое (или изэнтропическое) течение идеального (без трения) совершенного (подчиняющегося уравнению Клапейрона) газа представляет собой баротропное течение и описывается уравнением $p = C\rho^k$, где C и k — постоянные, причем $k = c^{(p)}/c^{(v)}$ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме. Найти зависимости между температурой и плотностью, а также между температурой и давлением для данного процесса.

Подставляя $p = C\rho^k$ в уравнение состояния (7.6), находим соотношение между температурой и плотностью: $\rho^{k-1}/T = R/C = \text{const}$. Кроме того, из уравнения $\rho = (p/C)^{1/k}$ и опять из уравнения (7.6) получим зависимость между температурой и давлением: $\rho^{(k-1)/k}/T = R/C^{1/k} = \text{const}$.

7.4. Написать определяющие уравнения для ньютоновой жидкости с нулевой объемной вязкостью $\kappa^* \equiv 0$.

При $\kappa^* \equiv 0$, согласно (7.11), $\lambda^* = -2\mu^*/3$ и из (7.9) следует, что $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} - (2\mu^*/3)\delta_{ij}D_{kk} + 2\mu^*D_{ij}$. Это выражение можно записать через девиатор тензора скоростей деформации

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu^*(D_{ij} - \delta_{ij}D_{kk}/3) = -p\delta_{ij} + 2\mu^*D'_{ij}.$$

Если ввести еще девиатор напряжений s_{ij} , то определяющие уравнения можно представить двумя соотношениями $s_{ij} = 2\mu^*D'_{ij}$ и $\sigma_{ii} = -3p$.

7.5. Найти выражение для мощности напряжений $\sigma_{ij}D_{ij}$ в ньютоновой жидкости с определяющими уравнениями (7.9).

При определяющих уравнениях (7.9) мощность напряжений по определению равна

$$\sigma_{ij}D_{ij} = -p\delta_{ij}D_{ij} + \lambda^*\delta_{ij}D_{kk}D_{ij} + 2\mu^*D_{ij}D_{ij} = -pD_{ii} + \lambda^*D_{ii}D_{jj} + 2\mu^*D_{ij}D_{ij}.$$

В символических обозначениях это равенство имеет вид

$$\Sigma : D = -p(\text{tr } D) + \lambda^*(\text{tr } D)^2 + 2\mu^*D : D.$$

Можно записать его через девиатор D'_{ij} :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}D_{ij} &= -pD_{ii} + \lambda^*D_{ii}D_{jj} + 2\mu^*(D'_{ij} + \delta_{ij}D_{kk}/3)(D'_{ij} + \delta_{ij}D_{kk}/3) = \\ &= -pD_{ii} + \lambda^*D_{ii}D_{jj} + 2\mu^*D'_{ij}D'_{ij},\end{aligned}$$

или в символических обозначениях

$$\Sigma : D = -p(\text{tr } D) + \lambda^*(\text{tr } D)^2 + 2\mu^*D' : D'.$$

7.6. Написать условия, при которых среднее нормальное давление $p_{(m)} = -\sigma_{ii}/3$ равно термодинамическому давлению p в ньютоновой жидкости.

Второе из определяющих уравнений (7.14) дает $p_{(m)} - p = \kappa^*D_{ii}$. Таким образом, $p_{(m)} = p$ в следующих случаях: когда $\kappa^* = 0$ (т. е., как видно из (7.11), при $\lambda^* = -2/3\mu^*$) и когда $D_{ii} = 0$.

7.7. Проверить правильность написания уравнений движения Навье — Стокса — Дюгема ньютоновой жидкости (7.22) и найти, какой вид принимает уравнение энергии (7.17) для этой жидкости, если теплопроводность подчиняется закону Фурье (7.20).

Учитывая, что $D_{ii} = v_{i,i}$, соотношения (7.18) можно написать в виде $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^*\delta_{ij}v_{k,k} + \mu^*(v_{i,j} + v_{j,i})$; тогда

$$\sigma_{ij,j} = -p_{,j}\delta_{ij} + \lambda^*\delta_{ij}v_{k,k,j} + \mu^*(v_{i,jj} + v_{j,ij}) = -p_{,i} + (\lambda^* + \mu^*)v_{j,ii} + \mu^*v_{i,jj}.$$

Подставляя это выражение в (7.16), непосредственно проверяем выполнение (7.22).

Подставим вышеупомянутые формулы для σ_{ij} и закон Фурье (7.20) в уравнение энергии (7.17) и найдем

$$\dot{\rho}u = [-p\delta_{ij} + \lambda^*\delta_{ij}v_{k,k} + \mu^*(v_{i,j} + v_{j,i})](v_{i,j} + v_{j,i})/2 - kT_{,ii} + \rho z.$$

После некоторых преобразований получим

$$\dot{\rho}u = -\rho v_{i,i} + \lambda^*v_{i,i}v_{j,j} + \mu^*(v_{i,j} + v_{j,i})(v_{i,j} + v_{j,i})/2 - kT_{,ii} + \rho z.$$

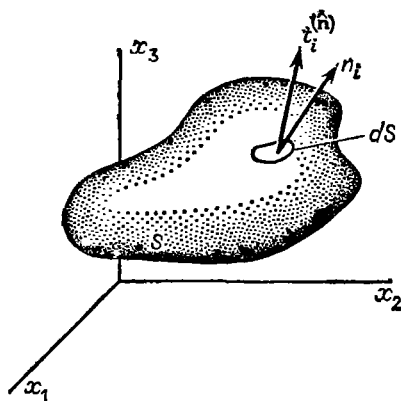


Рис. 7.1.

7.8. Найти суммарную поверхностную силу T_i , действующую на замкнутую поверхность S , содержащую объем V ньютоновой жидкости (рис. 7.1) с нулевым коэффициентом объемной вязкости.

Элементарная поверхностная сила равна $dT_i = t_i^{(n)} dS$, а полная сила определяется интегралом $T_i = \int_S t_i^{(n)} dS$,

который, используя свойства напряжений, можно представить в виде $T_i = \int_S \sigma_{ji} n_j dS$. При учете результата зада-

чи 7.4 в случае нулевого коэффициента объемной вязкости получаем

$$T_i = \int_S (-p \delta_{ij} + 2\mu^* D'_{ij}) n_j dS.$$

Применив теорему Гаусса — Остроградского, это выражение можно записать так:

$$T_i = \int_V (2\mu^* D'_{ij,j} - p_{,i}) dV.$$

7.9. В осесимметричном потоке в направлении оси x_3 скорость является функцией x_3 и r , где $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Найти, какой вид принимает при этом уравнение неразрывности, если вектор скорости представлен в форме $\mathbf{v} = q \hat{\mathbf{e}}_r + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3$, где $\hat{\mathbf{e}}_r$ — единичный вектор радиального направления.

Уравнение неразрывности в символических обозначениях имеет вид $\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ (уравнение (5.4)). В данном случае используем оператор ∇ в цилиндрических координатах

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho q)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho v_3)}{\partial x_3}.$$

Подставив его в (5.4) и проведя некоторые упрощения, получим искомый вид уравнения неразрывности:

$$r (\partial \rho / \partial t) + \partial (r \rho q) / \partial r + \partial (r \rho v_3) / \partial x_3 = 0.$$

7.10. В двумерном течении, параллельном плоскости $x_1 x_2$, компонента скорости v_3 и $\partial / \partial x_3$ равны нулю. Написать для такого случая уравнения Навье — Стокса и уравнение неразрывности несжимаемой жидкости.

Уравнение (7.23) при $i = 3$ дает $\rho b_3 = p_{,3}$, а при $i = 1, 2$ дает $\dot{\rho} v_\alpha = \rho b_\alpha - p_{,\alpha} + \mu^* v_{\alpha,\beta\beta}$. Уравнение неразрывности (7.15) принимает вид $v_{\alpha,\alpha} = 0$.

Если массовые силы равны нулю и $v_1 = v_1(x_1, x_2, t)$, $v_2 = 0$, $p = p(x_1, x_2, t)$, то указанные уравнения принимают вид $\rho v_1 = -\partial p / \partial x_1 + \mu^* (\partial^2 v_1 / \partial x_1^2 + \partial^2 v_1 / \partial x_2^2)$ и $\partial v_1 / \partial x_1 = 0$.

Установившееся течение. Гидростатика. Безвихревое течение (§ 7.4)

7.11. Будем считать атмосферный воздух совершенным газом, температура которого меняется линейно с высотой $T = T_0 - \alpha x_3$, где T_0 — температура на уровне Земли, а координата x_3 отсчитывается от уровня Земли вверх. Определить атмосферное давление как функцию x_3 в условиях гидростатики.

В этом случае из уравнения состояния (7.6) следует, что $p = \rho R (T_0 - \alpha x_3)$. Так как из массовых сил действует только постоянная сила тяжести $b_3 = -g$, уравнение (7.28) дает $dp/dx_3 = -\rho g = -\rho g / R (T_0 - \alpha x_3)$. Разделяем переменные и интегрируем: $\ln p = (g/R\alpha) \ln (T_0 - \alpha x_3) + \ln C$, где C — постоянная интегрирования. Таким образом, $p = C (T_0 - \alpha x_3)^{g/R\alpha}$, и если $p = p_0$ при $x_3 = 0$, то $C = p_0 T_0^{-g/R\alpha}$, и, следовательно, $p = p_0 (1 - \alpha x_3 / T_0)^{g/R\alpha}$.

7.12. Баротропная жидкость описывается уравнением состояния $p = \lambda \rho^k$, где λ и k — постоянные. Жидкость остается в покое в поле силы тяжести, действующей в направлении оси x_3 . Найти распределение давления в жидкости в зависимости от x_3 , если при $x_3 = 0$ оно равно p_0 .

Из уравнения равновесия (7.28) $\partial p / \partial x_3 = -\rho g$, $\partial p / \partial x_1 = \partial p / \partial x_2 = 0$. Заметим, что при отсутствии у массовых сил компонент b_1 и b_2 давление в направлениях x_1 и x_2 постоянно. При $\rho = (p/\lambda)^{1/k}$ уравнение равновесия дает $p^{-1/k} dp = -g \lambda^{-1/k} dx_3$. Интегрируя его, находим $(k/(k-1)) p^{(k-1)/k} = -g \lambda^{-1/k} x_3 + C$. Но $p = p_0$ при $x_3 = 0$, откуда $C = (k/(k-1)) p_0^{(k-1)/k}$. Таким образом, $x_3 = (k p_0 / ((k-1) g \rho_0)) (1 - (p/p_0)^{(k-1)/k})$, где $\rho_0 = (p_0/\lambda)^{1/k}$.

7.13. Широкий сосуд, наполненный несжимаемой жидкостью, движется с постоянным ускорением $\mathbf{a} = a_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a_3 \hat{\mathbf{e}}_3$ в поле силы тяжести, направленном вдоль оси x_3 (рис. 7.2). Найти наклон свободной поверхности жидкости в сосуде.

Из уравнений равновесия (7.28) $\partial p / \partial x_1 = 0$, $\partial p / \partial x_2 = \rho a_2$ и $\partial p / \partial x_3 = -\rho (g - a_3)$. Интегрируем: $p = \rho a_2 x_2 + f(x_3)$ и $p = -\rho (g - a_3) x_3 + h(x_2)$, где f и h — произвольные функции своих аргументов. Объединяя, получаем общую формулу для давления $p = \rho a_2 x_2 - \rho (g - a_3) x_3 + p_0$, где p_0 — давление в начале координат на свободной поверхности. Так как всюду на свободной поверхности $p = p_0$, то уравнение искомой свободной границы будет $x_2/x_3 = (g - a_3)/a_2$.

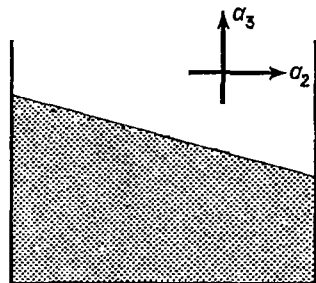


Рис. 7.2.

7.14. Если течение жидкости происходит очень медленно, так что членами порядка квадрата скорости и выше можно пренебречь, то получается предельный случай, который известен под названием

ползущего движения. Доказать, что в таком случае в установившемся движении несжимаемой жидкости при нулевых массовых силах давление является гармонической функцией, т. е. $\nabla^2 p = 0$.

Уравнения Навье — Стокса (7.23) для несжимаемой жидкости имеют вид

$$\rho (\partial v_i / \partial t + v_j v_{i,j}) = \rho b_i - p_{,i} + \mu^* v_{i,jj},$$

а для ползущих движений их можно линеаризовать, что дает

$$\rho (\partial v_i / \partial t) = \rho b_i - p_{,i} + \mu^* v_{i,jj}.$$

Отсюда видно, что при установившемся движении с нулевыми массовыми силами $p_{,i} = \mu^* v_{i,jj}$. Возьмем дивергенцию от обеих частей этого равенства: $p_{,ii} = \mu^* v_{i,ijj}$. Учитывая уравнение неразрывности $v_{i,i} = 0$, получаем $p_{,ii} = \nabla^2 p = 0$.

7.15. Записать уравнение неразрывности и уравнения Навье — Стокса — Дюгема для безвихревого движения через потенциал скорости φ .

Согласно (7.35), $v_i = -\varphi_{,i}$, вследствие чего уравнение неразрывности принимает вид $\dot{\rho} - \rho \nabla^2 \varphi = 0$. Уравнения (7.22) при $v_i = -\varphi_{,i}$ запишутся следующим образом:

$$-\rho \ddot{\varphi}_{,i} = \rho b_i - p_{,i} - (\lambda^* + \mu^*) \varphi_{,jjj} - \mu^* \varphi_{,ijj},$$

или

$$-\rho (\partial \varphi_{,i} / \partial t + \varphi_{,k} \varphi_{,ik}) = \rho b_i - p_{,i} - (\lambda^* + 2\mu^*) \varphi_{,jji}.$$

Эти уравнения можно представить и в символических обозначениях:

$$-\rho \nabla (\partial \varphi / \partial t + (\nabla \varphi)^2 / 2) = \rho b - \nabla p - (\lambda^* + 2\mu^*) \nabla (\nabla^2 \varphi).$$

7.16. Найти функцию давления $P(p)$ при баротропном течении жидкости с уравнением состояния $p = \lambda \rho^k$, где λ и k — постоянные.

По определению (7.29)

$$P(p) = \int_{\rho_0}^p \frac{dp}{\rho} = \int_{\rho_0}^p (p/\lambda)^{-1/k} dp = \frac{k\lambda^{1/k}}{k-1} \left[p^{(k-1)/k} \right]_{\rho_0}^p = \frac{k}{k-1} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0} \right).$$

Так как $dp = \lambda k \rho^{k-1} d\rho$, этот же результат можно получить и иным путем:

$$P(p) = \int_{\rho_0}^p \lambda k \rho^{k-2} d\rho = \frac{\lambda k}{k-1} \left[\rho^{k-1} \right]_{\rho_0}^p = \frac{k}{k-1} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0} \right).$$

Идеальная жидкость. Уравнение Бернулли. Циркуляция (§ 7.5)

7.17. Интегрированием уравнений Эйлера (7.37) вдоль линий тока получить уравнение (7.39).

Пусть dx_i — элементарное перемещение вдоль линии тока. Возьмем скалярное произведение этого перемещения на (7.37) и проинтегрируем:

$$\int \frac{\partial v_i}{\partial t} dx_i + \int v_j v_{i,j} dx_i + \int \Omega_i dx_i + \int P_{,i} dx_i = C(t).$$

Так как $\Omega_i dx_i = d\Omega$ и $P_{,i} dx_i = dP$, последние два интеграла сразу находятся. Кроме того, вдоль линии тока $dx_i = (v_i/v) ds$, где ds — элемент расстояния. Таким образом, во втором интеграле

$$v_j v_{i,j} dx_i = v_j v_{i,j} (v_j/v) ds = v_i v_{i,j} (v_j/v) ds = v_i v_{i,j} dx_j = v_i dv_i.$$

Поэтому $\int v_j v_{i,j} dx_i = \int v_i dv_i = 1/2 v_i v_i = 1/2 v^2$ и (7.39) получено.

7.18. Жидкость с уравнением состояния задачи 7.16 вытекает из большого закрытого резервуара через гладкую тонкую трубку; течение баротропное. Давление в резервуаре равно N атмосферам. Определить скорость истечения газа, считая давление в струе на выходе из резервуара равным атмосферному.

Применим интеграл Бернулли к установившемуся течению в двух точках: A — в жидкости, покоящейся внутри резервуара, и B — на свободной поверхности вытекающей струи. Уравнение (7.39) дает $\Omega_A + P_A + 1/2 v_A^2 = \Omega_B + P_B + 1/2 v_B^2$. Но $v_A = 0$, и если пренебречь силой тяжести, то это уравнение примет вид (см. задачу 7.16)

$$\frac{k}{k-1} \left(\frac{P_A}{\rho_A} - \frac{P_B}{\rho_B} \right) = \frac{1}{2} v_B^2, \quad \text{или} \quad v_B^2 = \frac{2k}{k-1} \frac{P_B}{\rho_B} \left(\frac{N\rho_B}{\rho_A} - 1 \right).$$

Так как $\rho_B/\rho_A = (p_B/p_A)^{-1/k} = N^{-1/k}$, то окончательно

$$v_B^2 = \frac{2k}{k-1} \frac{P_B}{\rho_B} (N^{(k-1)/k} - 1).$$

7.19. Доказать, что в невязкой баротропной жидкости при потенциальных массовых силах скорость изменения циркуляции равна нулю (теорема Кельвина).

По формуле (7.43) $\dot{\Gamma}_c = \oint (\dot{v}_i dx_i + v_i dv_i)$. Но для данного случая уравнения (7.37) сразу дают $\dot{v}_i = -(\Omega + P)_{,i}$, и поэтому

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_c &= \oint (-\Omega_{,i} dx_i - P_{,i} dx_i + v_i dv_i) = \\ &= -\oint (d\Omega + dP - d(v^2/2)) = -\oint d(\Omega + P - v^2/2) = 0 \end{aligned}$$

вследствие того, что подинтегральное выражение оказалось полным дифференциалом.

7.20. Найти циркуляцию скорости по контуру квадрата $x_1 = \pm 1, x_2 = \pm 1, x_3 = 0$ (см. рис. 7.3) в двумерном течении с полем скоростей $\mathbf{v} = (x_1 + x_2) \hat{\mathbf{e}}_1 + (x_1^2 - x_2) \hat{\mathbf{e}}_2$

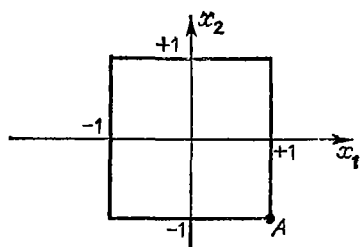


Рис. 7.3.

Воспользуемся символической записью формулы (7.42) при $\hat{n} = \hat{e}_3$ и $\nabla \times v = (2x_1 - 1)\hat{e}_3$:

$$\Gamma_c = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (2x_1 - 1) dx_1 dx_2 = -4.$$

К тому же результату можно прийти и из формулы (7.41):

$$\Gamma_c = \oint v \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^1 (1 - x_2) dx_2 + \int_1^{-1} (x_1 + 1) dx_1 + \int_1^{-1} (1 - x_2) dx_2 + \int_{-1}^1 (x_1 - 1) dx_1 = -4.$$

Здесь интегрирование начинается в точке A и ведется против движения часовой стрелки.

Потенциальное течение.

Плоское потенциальное течение (§ 7.6)

7.21. Вывести уравнения газовой динамики (7.45) и записать эти уравнения через потенциал скорости ϕ .

Уравнение неразрывности (5.4) для установившегося течения будет $\rho_{,i} v_i + \rho v_{i,i} = 0$, а уравнения Эйлера (7.36) дадут $\rho v_i v_{i,j} + p_{,i} = 0$, если пренебречь массовыми силами. Из условия баротропии $p = p(\rho)$ следует $dp = (dp/d\rho) d\rho$, или $p_{,i} = (dp/d\rho) \rho_{,i} = c^2 \rho_{,i}$, где c — местная скорость звука. Подставляя это выражение в уравнения Эйлера и умножая результат на v_i , находим $\rho v_i v_i v_{i,j} + c^2 v_i \rho_{,i} = 0$. Из уравнения неразрывности $c^2 v_i \rho_{,i} = -c^2 v_{i,i} = -c^2 \delta_{ij} v_{i,j}$, и тогда для уравнений движения окончательно получаем $(c^2 \delta_{ij} - v_i v_j) v_{i,j} = 0$. Через потенциал скорости $\phi_{,i} = -v_i$ эти уравнения записываются следующим образом: $(c^2 \delta_{ij} - \phi_{,i} \phi_{,j}) \phi_{,ij} = 0$.

7.22. Доказать, что функция $\phi = A(-x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Найти компоненты скорости и описать движение.

Подстановкой ϕ в уравнение (7.46) убеждаемся, что $-2A - 2A + 4A \equiv 0$. По формулам (7.35) $v_1 = 2Ax_1$, $v_2 = 2Ax_2$, $v_3 = -4Ax_3$. Используя результаты задачи 4.7, видим, что линии тока в плоскости x_1 имеют уравнение $x_2^2 x_3 = \text{const}$, а в плоскости x_2 уравнение $x_1^2 x_3 = \text{const}$. Таким образом, поток направлен вдоль оси x_3 навстречу плоскости $x_1 x_2$ (натекание на твердую стенку).

7.23. Доказать, что функция тока $\psi(x_1, x_2)$ постоянна вдоль линии тока.

Из соотношений (7.48) и дифференциального уравнения линии тока $dx_1/v_1 = dx_2/v_2$ (см. задачу 4.7) получаем $-dx_1/\psi_{,2} = dx_2/\psi_{,1}$, или $\psi_{,1} dx_1 + \psi_{,2} dx_2 = d\psi = 0$. Таким образом, вдоль каждой линии тока $\psi = \text{const}$.

7.24. Проверить, что функция $\varphi = A(x_1^2 - x_2^2)$ может служить потенциалом скорости несжимаемой жидкости, и описать заданное ею течение.

Данная функция φ удовлетворяет уравнению (7.46) тождественно, так как $2A - 2A = 0$. Компоненты скорости определяются формулами (7.49): $v_1 = -2Ax_1$, $v_2 = 2Ax_2$. Линии тока получаются интегрированием уравнения $dx_1/x_1 = -dx_2/x_2$ и представляют собой гиперболы $x_1x_2 = C$ с взаимно перпендикулярными асимптотами (рис. 7.4). Экипотенциальные линии $A(x_1^2 - x_2^2) = C_1$ образуют семейство таких же гипербол, ортогональных линиям тока. Наконец, из (7.50) найдем функцию тока $\psi = -2Ax_1x_2 + C_0$, которая оказывается постоянной вдоль линий тока, как и утверждалось в задаче 7.23.

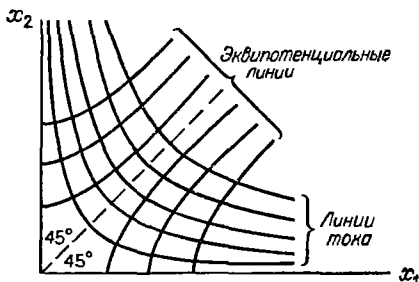


Рис. 7.4.

7.25. Дан потенциал скорости $\varphi = Ax_1 + Bx_1/r^2$, где $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Найти функцию тока ψ для этого течения.

Согласно (7.50), $\psi_{,1} = -\varphi_{,2} = 2Bx_1x_2/r^4$, откуда интегрированием находим $\psi = -Bx_2/r^2 + f(x_2)$, где $f(x_2)$ — произвольная функция от x_2 . Продифференцируем функцию тока: $\psi_{,2} = -B(x_1^2 - x_2^2)/r^4 + f'(x_2)$. Но из (7.50) известно, что $\psi_{,2} = \varphi_{,1} = A + B(-x_1^2 + x_2^2)/r^4$. Таким образом, $f'(x_2) = A$ и $f(x_2) = Ax_2 + C$. Окончательно получаем $\psi = Ax_2 - Bx_2/r^2 + C$.

7.26. Дифференцированием комплексного потенциала $\Phi(z) = A/z$ получить компоненты скорости.

В данном случае $d\Phi/dz = -A/z^2 = -A/(x_1 + ix_2)^2$, что после некоторых алгебраических преобразований можно записать следующим образом: $d\Phi/dz = -A(x_1^2 - x_2^2)/r^4 + i2Ax_1x_2/r^4$. Таким образом,

$$v_1 = A(x_1^2 - x_2^2)/r^4 \quad \text{и} \quad v_2 = 2Ax_1x_2/r^4.$$

Заметим еще, что если $\Phi = A/z = A(x_1 - ix_2)/r^2$, то $\varphi = Ax_1/r^2$, а $\psi = -Ax_2/r^2$, и мы снова получаем

$$v_1 = -\varphi_{,1} = A(x_1^2 - x_2^2)/r^4 \quad \text{и} \quad v_2 = -\varphi_{,2} = 2Ax_1x_2/r^4.$$

Смешанные задачи

7.27. Вывести уравнение неразрывности для одномерного течения несжимаемой жидкости в трубке тока (боковая поверхность трубки тока образована линиями тока).

Пусть V — объем, заключенный между двумя произвольными сечениями A и B трубки тока (рис. 7.5). Уравнение сохранения массы (5.2) в интегральной форме для этого объема при постоянной плотности ρ записывается в виде $\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = 0$. Преобразуем этот интеграл по теореме Гаусса — Остроградского;

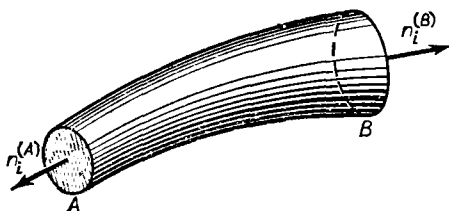


Рис. 7.5.

это даст $\int_S \hat{n} \cdot v dS = 0$, где $\hat{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S , ограничивающей объем V . Из-за того что на боковой поверхности $\hat{n} \perp v$, от интеграла остаются только члены

$$\int_{S_A} \hat{n}_A \cdot v_A dS + \int_{S_B} \hat{n}_B \cdot v_B dS = 0.$$

Будем предполагать, что скорость распределена равномерно по сечению и перпендикулярна плоскостям сечений S_A и S_B . Вследствие того что $v_B = -v_B \hat{n}_B$, получим $v_A \int_{S_A} dS - v_B \int_{S_B} dS = 0$ или $v_A S_A = v_B S_B = \text{const.}$

7.28. В некоторой точке ньютоновой жидкости с нулевым коэффициентом объемной вязкости задан тензор напряжений

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -1 \\ 2 & -9 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти тензор τ_{ij} .

Для такой жидкости, согласно (7.14), $p = -\sigma_{ii}/3 = 6$. Тогда из соотношения (7.3) получаем

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} + 6\delta_{ij}, \text{ или } \tau_{ij} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -1 \\ 2 & -9 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

7.29. Доказать, что тензоры σ_{ij} и τ_{ij} в формуле (7.3) имеют одни и те же главные оси.

Напишем полностью все соотношения (7.3): $\sigma_{11} = -p + \tau_{11}$, $\sigma_{22} = -p + \tau_{22}$, $\sigma_{33} = -p + \tau_{33}$, $\sigma_{12} = \tau_{12}$, $\sigma_{23} = \tau_{23}$, $\sigma_{13} = \tau_{13}$. В главных осях x_i^* тензора σ_{ij} должны быть выполнены равенства $\sigma_{12}^* = \sigma_{23}^* = \sigma_{13}^* = 0$. Но последние три уравнения из (7.3) при этом дают $\sigma_{ij}^* = \tau_{ij}^* = 0$, если $i \neq j$. А это значит, что оси x_j^* оказываются главными и для тензора τ_{ij} тоже.

7.30. Для ньютоновой жидкости часто вводят диссипативный потенциал Φ_D , определяемый формулой $\Phi_D = (\kappa/2) D_{ii} D_{jj} + \mu^* D'_{ij} D'_{ij}$. Доказать, что $\partial \Phi_D / \partial D_{ij} = \tau_{ij}$.

Пользуясь определением, находим

$$\partial \Phi_D / \partial D_{pq} = (\kappa/2) [D_{ii} (\partial D_{jj} / \partial D_{pq}) + (\partial D_{ii} / \partial D_{pq}) D_{jj}] + 2\mu^* [D'_{ij} (\partial D'_{ij} / \partial D_{pq})].$$

Но $\partial D_{ii} / \partial D_{pq} = \delta_{ip} \delta_{iq} = \delta_{pq}$ и $\partial D'_{ij} / \partial D_{pq} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{ij} \delta_{pq} / 3$. Поэтому

$$\begin{aligned} \partial \Phi_D / \partial D_{pq} &= \kappa D_{ii} \delta_{pq} + 2\mu^* (D_{ij} - \delta_{ij} D_{kk} / 3) (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{ij} \delta_{pq} / 3) = \\ &= \kappa D_{ii} \delta_{pq} + 2\mu^* (D_{pq} - \delta_{pq} D_{ii} / 3). \end{aligned}$$

Наконец, вследствие того, что $\kappa = \lambda^* + 2\mu^*/3$, получаем

$$\partial \Phi_D / \partial D_{pq} = \lambda^* \delta_{pq} D_{ii} + 2\mu^* D_{pq} = \tau_{pq}.$$

7.31. Найти зависимость между давлением и плотностью в совершенном газе при условиях задачи 7.11.

При $x_3 = 0$ имеем $\rho = \rho_0$ и $p = p_0$. Уравнение состояния совершенного газа в нашем случае будет иметь вид $p = \rho R (T_0 - \alpha x_3)$ и, следовательно, $p_0 = \rho_0 R T_0$. Из зависимости давления от высоты, определенной в задаче 7.11 как $p = p_0 (1 - \alpha x_3 / T_0)^{g/R\alpha}$, можно получить $\rho/\rho_0 = (T/T_0)^{(g/R\alpha - 1)}$. Равенство $p = p_0 (1 - \alpha x_3 / T_0)^{g/R\alpha}$ представим в форме $p/p_0 = (T/T_0)^{g/R\alpha}$, откуда $T/T_0 = (p/p_0)^{R\alpha/g}$, и окончательно находим $\rho/\rho_0 = (p/p_0)^{(1 - R\alpha/g)}$.

7.32. Доказать, что в баротропной невязкой жидкости при потенциальных силах материальная производная от полной завихренности выражается формулой $\frac{d}{dt} \int_V q_i dV = \int_S v_i q_i dS_j$.

По формуле (4.54), используя результат задачи 4.33, находим $\frac{d}{dt} \int_V q_i dV = \int_S (\varepsilon_{ijk} a_k + q_j v_i) dS_j$. Но в нашем случае, согласно (7.37), $a_k = -(\Omega + P)_{,k}$. Тогда по теореме Гаусса — Остроградского (1.157) можно написать

$$\int_S \varepsilon_{ijk} (\Omega + P)_{,k} dS_j = \int_V \varepsilon_{ijk} (\Omega + P)_{,kj} dV = 0$$

вследствие того, что подынтегральное выражение равно нулю (как произведение симметричного и антисимметричного тензоров). Отсюда следует

$$\frac{d}{dt} \int_V q_i dV = \int_S q_j v_i dS_j.$$

7.33. Несжимаемая ньютонова жидкость движется внутри закрытого покоящегося сосуда с твердыми стенками. Доказать, что если массовые силы отсутствуют, то скорость изменения со временем кинетической энергии жидкости будет равна $-\mu^* \int_V q^2 dV$ (q здесь означает модуль вектора завихренности).

Как было установлено в задаче 5.27, скорость изменения со временем кинетической энергии среды равна

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \rho b_i v_i dV - \int_V \sigma_{ij} v_{i,j} dV + \int_S v_i \hat{n}^{(n)} dS.$$

В нашей задаче первый и третий интегралы обращаются в нуль, и для ньютоновой жидкости, используя (7.18), получаем

$$\frac{dK}{dt} = - \int_V \sigma_{ij} v_{i,j} dV = - \int_V (-\rho \delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} D_{kk} + 2\mu^* D_{ij}) v_{i,j} dV.$$

Но вследствие несжимаемости $v_{i,i} = D_{ii} = 0$; поэтому

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= -2\mu^* \int_V D_{ij} v_{i,j} dV = -\mu^* \int_V (v_{i,j} + v_{j,i}) v_{i,j} dV = \\ &= -\mu^* \int_V (\epsilon_{kji} q_k) v_{i,j} dV = -\mu^* \int_V q_k (\epsilon_{kji} v_{i,j}) dV = -\mu^* \int_V q_k q_k dV. \end{aligned}$$

7.34. Доказать, что в идеальной жидкости при отсутствии массовых сил скорость изменения циркуляции $\dot{\Gamma}_c$ выражается интегралом

$$-\int_S \epsilon_{ijk} (1/\rho)_{,j} p_{,k} dS_i.$$

По формуле (7.43) $\dot{\Gamma}_c = \oint \dot{v}_i dx_i + \oint v_i dv_i$. Но второй из интегралов обращается в нуль, так как $\oint d(1/2 v^2) = 0$. Из уравнения (7.36) при $b_i = 0$ имеем $\dot{v}_i = -p_{,i}/\rho$; следовательно,

$$\dot{\Gamma}_c = -\oint (p_{,k}/\rho) dx_k = -\int_S \epsilon_{ijk} (p_{,k}/\rho)_{,j} n_i dS.$$

Здесь использована формула (7.42) для преобразования линейного интеграла в интеграл по поверхности. Выполняя указанное дифференцирование, находим

$$\dot{\Gamma}_c = -\int_S \epsilon_{ijk} [(1/\rho)_{,j} p_{,k} + p_{,kj}/\rho] dS_i = -\int_S \epsilon_{ijk} (1/\rho)_{,j} p_{,k} dS_i.$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

7.35. Даны определяющие уравнения изотропной жидкости $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + K_{ijpq}D_{pq}$, где K_{ijpq} — постоянные, не зависящие от координат. Доказать, что главные оси тензора напряжений и тензора скоростей деформации совпадают.

7.36. Доказать следующее утверждение: если имеет место равенство $dp/dt = 0$, то в ньютоновой жидкости $-\sigma_{ii}/3 = p$.

7.37. Доказать, что определяющие уравнения ньютоновой жидкости с нулевым коэффициентом объемной вязкости можно представить двумя группами уравнений: $s_{ij} = 2\mu^* D_{ij}$ и $-\sigma_{ii} = 3p$.

7.38. Доказать, что, используя вектор завихренности $\mathbf{q}$, уравнения Навье — Стокса для несжимаемой жидкости можно записать следующим образом: $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \nabla p/\rho - \mathbf{v}^* \nabla \times \mathbf{q}$, где $\mathbf{v}^* = \mu^*/\rho$ — кинематический коэффициент вязкости. Показать, что для безвихревого движения эти уравнения приводятся к виду (7.36).

7.39. Движение жидкости происходит по радиусам со скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r, t)$, где $r^2 = x_i x_i$. Доказать, что уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v) = 0.$$

7.40. Жидкость вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси x_3 . Из массовых сил действует только сила тяжести. Доказать, что $p/\rho - \omega^2 r^2/2 + gx_3 = \text{const}$.

7.41. Имеем совершенный газ в поле силы тяжести в условиях изотермии (при постоянной температуре T_0). Доказать, что $\rho/\rho_0 = p/p_0 = e^{-(g/RT_0 x_3)}$, где ρ_0 и p_0 — плотность и давление при $x_3 = 0$.

7.42. Массовые силы потенциальны, т. е. $b_i = -\Omega_{,i}$, и процесс баротропный. Доказать, что для безвихревого движения можно проинтегрировать уравнения Навье — Стокса — Дюгема и получить соотношение

$$-\rho (\partial\varphi/\partial t + (\nabla\varphi)^2/2) + \rho\Omega + P + (\lambda^* + 2\mu^*) \nabla^2\varphi = f(t)$$

(см. задачу 7.15).

7.43. Показать, что в невязкой жидкости при потенциальных массовых силах и постоянной плотности векторы скорости и завихренности связаны соотношением $\dot{q}_i - q_j v_{i,j} = 0$. Доказать, что для стационарного потока той же жидкости $v_j q_{i,j} = q_j v_{i,j}$.

7.44. Доказать, что для баротропного процесса, в котором $\rho = \rho(p)$ и функция $P(p)$ определена формулой (7.29), выполняется равенство $\text{grad } P = \text{grad } p/\rho$.

7.45. Доказать, что уравнение Бернулли (7.39) при установившемся движении совершенного газа записывается в виде:

- а) $\Omega + \rho \ln(p/\rho) + v^2/2 = \text{const}$ при изотермическом течении;
б) $\Omega + [k/(k-1)](p/\rho) + v^2/2 = \text{const}$ при изэнтропическом течении.

7.46. Доказать, что поле скоростей $v_1 = -2x_1x_2x_3/r^4$, $v_2 = (x_1^2 - x_2^2)x_3/r^4$, $v_3 = x_2/r^3$, где $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, возможно при движении несжимаемой жидкости. Будет ли это движение безвихревым?

Ответ: да.

7.47. Потенциал скорости $\Phi(z) = \varphi + i\psi$ является аналитической функцией комплексного переменного $z = x_1 + ix_2 = re^{i\theta}$. Показать, что в полярных координатах

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \quad \text{и} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Теория пластичности

8.1. Основные положения и определения

Упругие деформации, которые изучались в гл. 6, обладают свойством полного восстановления недеформированного состояния после снятия приложенных нагрузок. Кроме того, упругие деформации зависят только от величины напряжений и не зависят от истории деформирования или нагружения. Любая деформация, возникающая как ответная реакция материала на приложенные нагрузки или изменения в окружающей среде и не подчиняющаяся определяющим законам классической теории упругости, может рассматриваться как *неупругая деформация*. В частности, необратимые смещения, которые получаются в результате *скольжения* или дислокаций на атомном уровне и как следствие ведут к остаточным изменениям размеров, называются *пластическими деформациями*. Такие деформации имеют место только при интенсивности напряжения выше некоторого порога, известного как *предел упругости* или *предел текучести*. Будем обозначать этот предел σ_y .

Основные проблемы *теории пластичности* состоят в математической формулировке соотношений между напряжениями и деформациями, соответствующих феноменологическому описанию пластических деформаций, и в установлении правил определения количественных критериев для указания начала наступления пластичности. С другой стороны, изучение пластических деформаций с микроскопической точки зрения относится к области физики твердого тела.

Термин *пластическое течение* широко используется в теории пластичности для обозначения процесса пластического деформирования. Однако в отличие от течения жидкости, при котором предполагается движение частиц среды, понятие пластического течения относится к непрерывному изменению суммарной деформации, а скорость представляет собой скорость деформации. В самом деле, твердое тело в состоянии пластичности может испытывать касательные напряжения, оставаясь в покое.

Многие основные понятия теории пластичности можно ввести непосредственно, рассматривая диаграммы зависимости напряжений от деформаций при испытании некоторого гипотетического материала на простое одноосное растяжение (или сжатие). Такая диаграмма представлена на рис. 8.1. На этой схеме σ — условное напря-

жение (сила, деленная на начальную площадь сечения), тогда как в качестве ε можно взять либо *обычную (техническую)* относительную деформацию, определяемую формулой

$$e = (L - L_0)/L_0, \quad (8.1)$$

где L — текущая длина образца, а L_0 — его начальная длина, либо *натуральную (логарифмическую)* относительную деформацию, определяемую формулой

$$\varepsilon = \ln(L/L_0) = \ln(1 + e) = e - e^2/2 + O(e^3). \quad (8.2)$$

Для малых деформаций эти две их меры почти равны, как видно из (8.2), и часто допустимо пренебрегать разницей между ними.

Предел текучести точка P , соответствующая предельному напряжению σ_y , разделяет кривую напряжение — деформация

на рис. 8.1 на *упругую область* и *пластическую область*. К сожалению, предел упругости разные авторы определяют по-разному. Иногда он берется как *предел пропорциональности* и лежит в верхнем конце линейной части кривой. Иногда за него принимают точку J , которая называется *пределом текучести Джонсона* и по определению представляет собой точку, где наклон кривой достигает 50% от своего первоначального значения. Есть и другие способы определения предела текучести. Так, один из них принимает за предел текучести такое значение напряжения, которое дает 0,2% остаточной деформации.

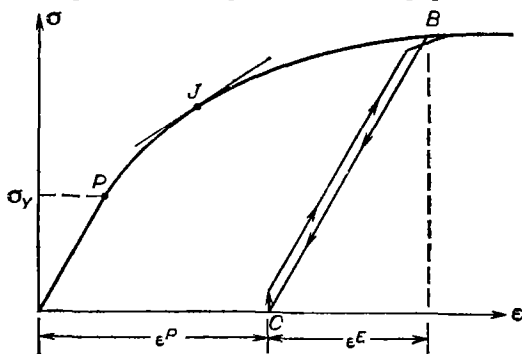


Рис. 8.1.

определению представляет собой точку, где наклон кривой достигает 50% от своего первоначального значения. Есть и другие способы определения предела текучести. Так, один из них принимает за предел текучести такое значение напряжения, которое дает 0,2% остаточной деформации.

В начальной упругой области, которая может быть как линейной, так и нелинейной, увеличение нагрузки заставляет точку, изображающую напряженно-деформированное состояние, двигаться вверх по кривой, а уменьшение нагрузки (разгрузка) ведет к движению точки вниз по тому же самому пути. Таким образом, в упругой области существует взаимно однозначное соответствие между напряжением и деформацией.

В пластической области дело обстоит иначе. При разгрузке от некоторого состояния, например B на рис. 8.1, точка, изображающая состояние, следует по пути BC , практически параллельному линейной упругой части кривой. В точке C , где напряжение достигает нуля, обнаруживается остаточная пластическая деформация ε^P .

На рис. 8.1 символом ϵ^P обозначена восстановленная упругая деформация, соответствующая точке B . При повторной нагрузке точка, изображающая состояние, движется из C обратно к B по пути, очень близкому к BC , но не попадает точно в B^1), и из-за потери энергии в цикле разгрузка — нагрузка образуется небольшая петля гистерезиса. После возвращения к точке B требуется увеличение нагрузки, чтобы вызвать дальнейшую деформацию. Это явление связано с так называемым свойством *упрочнения* материала. Итак, ясно, что в пластической области напряжение зависит от всей истории нагружения или деформирования среды.

Хотя известно, что температура оказывает существенное влияние на пластическое поведение реального материала, в теории пластичности часто принимают условие изотермии и считают температуру просто параметром. Точно так же на практике в общепринятой теории пластичности обычно пренебрегают влиянием скорости нагружения на диаграмму напряжение — деформация. В соответствии с этим пластические деформации считаются не зависящими от времени и изучаются отдельно от таких явлений, как ползучесть и релаксация.

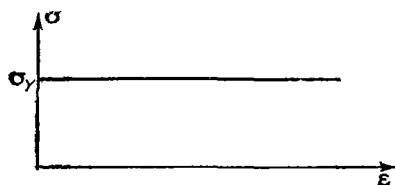
8.2. Идеализированные диаграммы пластического поведения

Многие из трехмерных теорий, изучающих пластическое поведение, можно рассматривать как некоторое обобщение ряда идеализированных одномерных диаграмм зависимости напряжения от деформации. Четыре из наиболее часто употребляемых диаграмм такого рода представлены на рис. 8.2 вместе с простыми механическими схемами осуществления каждой из них. В этих схемах перемещение массы M имитирует пластическую деформацию, а сила F играет роль напряжения.

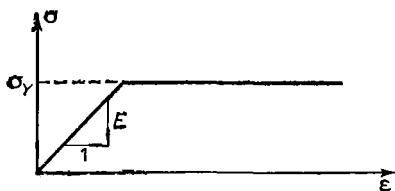
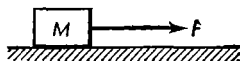
На рис. 8.2, *а* упругая область и явление упрочнения полностью отсутствуют, тогда как на рис. 8.2, *б* существует упругая зона, существующая пределу текучести, а упрочнения нет. При отсутствии упрочнения деформация называется *идеально пластической*. Представления *а* и *б* наиболее полезны при изучении *ограниченных пластических деформаций*, когда большие деформации запрещены. На рис. 8.2, *в* упругая зона отсутствует, а упрочнение предполагается линейным. Эта модель, так же как и модель, представленная на рис. 8.2, *г*, широко используется при изучении не ограниченного внешними условиями *пластического течения*.

Диаграммы напряжение — деформация, изображенные на рис. 8.2, именуются в тексте кривыми растяжения. Кривая сжатия для недеформированного предварительно образца (при отсутствии истории

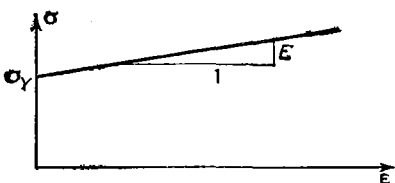
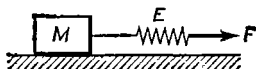
¹⁾ Чтобы попасть точно в B , нужно было бы разгрузку продолжить несколько дальше за нулевое напряжение. — *Прим. перев.*



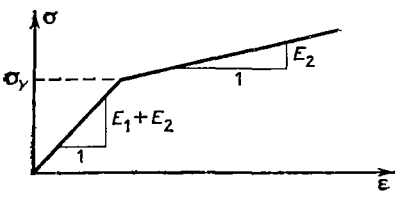
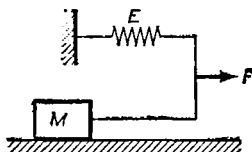
а



б



в



г

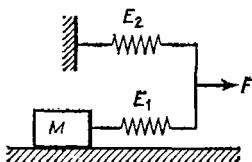


Рис. 8.2.

а — жестко-идеально-пластический материал; б — упруго-идеально-пластический материал; в — жесткопластический материал с линейным упрочнением; г — упругопластический материал с линейным упрочнением. Во всех механических моделях существенно трение между массой M и горизонтальной плоскостью.

пластического деформирования) обычно представляет собой отражение кривой растяжения относительно начала координат. Однако если изменение напряжения на обратное (растяжения на сжатие или наоборот) производится для материала, уже находящегося в пластическом состоянии, то наблюдается определенное уменьшение напряжения предела текучести при втором типе нагрузки. Это явление называется *эффектом Баушингера* и в этой книге рассматриваться не будет.

8.3. Условия пластичности. Критерии Треска и Мизеса

Условие (или критерий) пластичности является важным обобщением на трехмерное напряженное состояние понятия предела текучести для одноосного растяжения. С математической точки зрения условие пластичности представляет собой соотношение между компонентами напряжений в точке, которое должно быть выполнено, когда в этой точке начинается пластическое поведение¹⁾. В общем случае условие пластичности можно записать уравнением

$$f(\sigma_{ij}) = C_Y, \quad (8.3)$$

где C_Y — *постоянная текучести*. Иногда это условие задают уравнением

$$f_1(\sigma_{ij}) = 0, \quad (8.4)$$

в котором $f_1(\sigma_{ij})$ называется *функцией текучести*.

Для изотропного материала условие пластичности не должно зависеть от направлений и поэтому может быть выражено в виде функции инвариантов напряжения, или, что все равно, в виде симметричной функции главных напряжений. Тогда равенство (8.3) можно представить следующим образом:

$$f_2(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = C_Y. \quad (8.5)$$

Кроме того, эксперименты показывают, что для многих сред (в частности, для металлов) напряжение всестороннего сжатия не вызывает пластических деформаций. Поэтому обычно считают, что в условии пластичности фигурирует функция инвариантов девиатора напряжений

$$f_3(II_{\Sigma D}, III_{\Sigma D}) = 0. \quad (8.6)$$

Из многочисленных условий пластичности, которые были предложены, два приемлемо просто математически и в то же время достаточно точны, чтобы быть весьма полезными при изучении начальной стадии пластичности изотропных материалов. Это условия (критерии) Треска и Мизеса.

1. *Критерий текучести Треска* (теория максимального касательного напряжения).

Согласно этому критерию, пластическое поведение начинается тогда, когда максимальное касательное напряжение достигает заданной величины C_Y . Проще всего критерий Треска записывается в главных напряжениях. Так, при $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ критерий Треска в соответствии с формулой (2.54б) выглядит так:

$$\frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III}) = C_Y = \text{const.} \quad (8.7)$$

¹⁾ Иногда (обычно для сред без упрочнения) это условие называют условием (критерием) текучести. В дальнейшем будут использоваться оба эти термина. — Прим. ред.

Чтобы установить связь между постоянной текучести C_Y и пределом текучести при простом растяжении σ_Y , найдем максимальное касательное напряжение при простом растяжении в условиях пластичности (например, при помощи кругов Мора; рис. 8.3, а). Оно

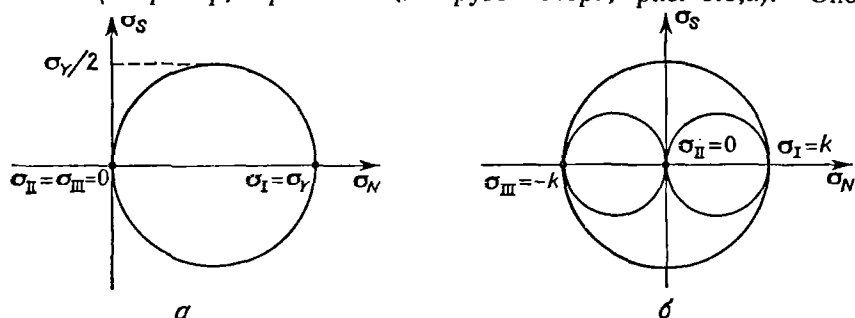


Рис. 8.3.

а — простое растяжение; б — чистый сдвиг.

оказывается равным $\sigma_Y/2$. Поэтому критерий Треска выражается через предел текучести при простом растяжении следующим образом:

$$\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_Y. \quad (8.8)$$

С той же целью установления величины постоянной C_Y можно использовать предел текучести в процессе, который называют *чистым сдвигом*. Так, если предел текучести при чистом сдвиге равен k , то величина постоянной C_Y равна k (этот результат опять сразу получается из кругов Мора на рис. 8.3, б) и критерий Треска записывается равенством

$$\sigma_I - \sigma_{III} = 2k. \quad (8.9)$$

2. *Критерий текучести Мизеса* (теория энергии искажения формы)

Согласно этому критерию, пластическое поведение начинается тогда, когда второй инвариант девiatorа напряжений достигает некоторого критического значения. Математически критерий Мизеса записывается так:

$$-\Pi_{\Sigma D} = C_Y, \quad (8.10)$$

или через главные напряжения так:

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 6C_Y. \quad (8.11)$$

Рассматривая простое растяжение, легко показать, что (8.11) можно записать в виде

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 2\sigma_Y^2. \quad (8.12)$$

Критерий Мизеса (8.11) также можно записать и через величину k — предел текучести при чистом сдвиге:

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 6k^2. \quad (8.13)$$

Существует несколько вариантов представления соотношений (8.12) и (8.13), когда используются другие компоненты напряжения, отличные от главных.

8.4. Пространство напряжений. П-плоскость. Поверхность текучести

Пространство напряжений определяется тем, что в качестве меры расстояний вдоль осей координат берутся величины напряжений. В пространстве главных напряжений (пространстве

Хея—Вестергарда), изображенном на рис. 8.4, по осям координат откладываются главные значения тензора напряжений. Каждая точка такого пространства соответствует некоторому напряженному состоянию. Радиус-вектор OP любой точки $P(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ может быть разложен на две компоненты: OA — вдоль прямой OZ , которая составляет равные углы с осями координат, и OB — в плоскости

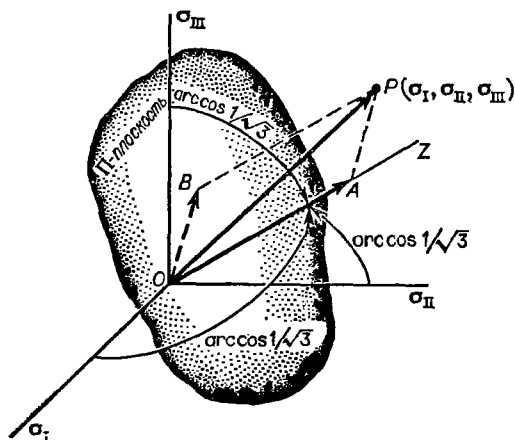


Рис. 8.4.

ти, перпендикулярной OZ и проходящей через начало координат (эта плоскость известна под названием П-плоскости). Компонента вдоль OZ , для которой $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$, представляет гидростатическое давление, а компонента в П-плоскости — девиаторную часть напряжения. Легко показать, что П-плоскость имеет уравнение

$$\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 0. \quad (8.14)$$

В пространстве напряжений условие (8.5) $f_2(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = C_Y$ определяет некоторую поверхность; эта поверхность называется *поверхностью текучести*. Если принять, что условие пластичности не зависит от гидростатического напряжения всестороннего сжатия, то соответствующие поверхности текучести являются цилиндрами с образующими, параллельными OZ . Точки пространства напряжений, которые лежат внутри цилиндрической поверхности текучести, соответствуют упругому напряженному состоянию, а точки, лежащие на поверхности текучести, представляют начальное пластическое напряженное состояние. Пересечение поверхности текучести с П-плоскостью называется *кривой текучести*.

Если посмотреть вдоль прямой OZ в направлении к началу координат — точке O , то станет ясно, что проекции осей координат на Π -плоскость оказываются расположенными симметрично под углом 120° одна к другой, как показано на рис. 8.5, а. Кривые текучести, соответствующие критериям Треска и Мизеса, изображены на Π -плоскости на рис. 8.5, б и 8.5, в. Кривые на рис. 8.5, б соответствуют уравнениям (8.7) и (8.11), и за основу (точку, через которую должна проходить кривая) принято пластическое напря-

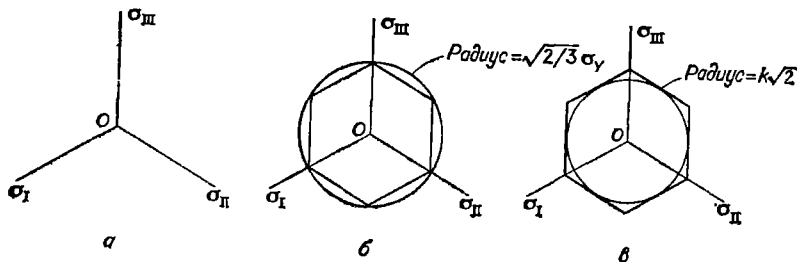


Рис. 8.5.

женное состояние при простом растяжении. В такой ситуации окружность Мизеса радиуса $\sqrt{2/3} \sigma_y$ оказывается описанной около правильного шестиугольника Треска. На рис. 8.5, в обе эти кривые текучести имеют в качестве базиса предельное напряжение текучести k при чистом сдвиге. В этом случае окружность Мизеса вписана в шестиугольник Треска.

Положение на Π -плоскости проекции произвольной точки напряжения $P(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ находится непосредственным проектированием, так как каждая из осей координат пространства напряжений составляет с Π -плоскостью угол, косинус которого равен $\sqrt{2/3}$. Таким образом, компоненты девиаторной проекции равны $(\sqrt{2/3} \sigma_I, \sqrt{2/3} \sigma_{II}, \sqrt{2/3} \sigma_{III})$. Решение обратной задачи — определение компонент напряжения для какой-либо точки Π -плоскости — оказывается не единственным, так как гидростатическая компонента напряжения может принимать какое угодно значение.

8.5. Поведение материала за пределом текучести.

Изотропное и кинематическое упрочнение

Продолжение нагружения после достижения начального предела текучести приводит к пластическим деформациям, которые могут сопровождаться изменениями первоначальной поверхности текучести. Если материал предполагается *идеально пластическим*, то поверхность текучести не изменяется в процессе пластического деформирования и начальное условие пластичности остается в силе. Этому соответствуют одномерные диаграммы напряжение — деформация,

изображенные на рис. 8.2,а и 8.2,б. Однако для материала с *упрочнением* пластическое деформирование в общем случае сопровождается изменениями поверхности текучести. Для учета таких изменений необходимо обобщить функцию текучести $f_1(\sigma_{ij})$ в формуле (8.4), чтобы она могла задавать изменения поверхности текучести при деформировании (при этом поверхность текучести часто называют *поверхностью нагружения*). Такое обобщение достигается введением *функции нагружения*

$$f_1^*(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^P, K) = 0, \quad (8.15)$$

которая зависит не только от напряжений, но также и от пластических деформаций ϵ_{ij}^P и характеристик упрочнения, представленных параметром K . Уравнение (8.15) дает поверхность нагружения, что означает следующее: $f_1^* = 0$ определяет границу упругой зоны, $f_1^* < 0$ соответствует упругой зоне внутри поверхности нагружения, а $f_1^* > 0$ соответствует области вне поверхности нагружения и смысла не имеет.

Найдем полный дифференциал функции (8.15):

$$df_1^* = \frac{\partial f_1^*}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f_1^*}{\partial \epsilon_{ij}^P} d\epsilon_{ij}^P + \frac{\partial f_1^*}{\partial K} dK. \quad (8.16)$$

Если $f_1^* = 0$ и $(\partial f_1^* / \partial \sigma_{ij}) d\sigma_{ij} < 0$, то говорят, что имеет место процесс *разгрузки*; если $f_1^* = 0$ и $(\partial f_1^* / \partial \sigma_{ij}) d\sigma_{ij} = 0$, то мы имеем *нейтральное нагружение*; если $f_1^* = 0$ и $(\partial f_1^* / \partial \sigma_{ij}) d\sigma_{ij} > 0$, то происходит процесс *активного нагружения*. Тот способ, каким пластические деформации ϵ_{ij}^P входят в функцию (8.15) в процессе нагружения, определяется *законом упрочнения*. Здесь описываются два наиболее простых из этих законов.

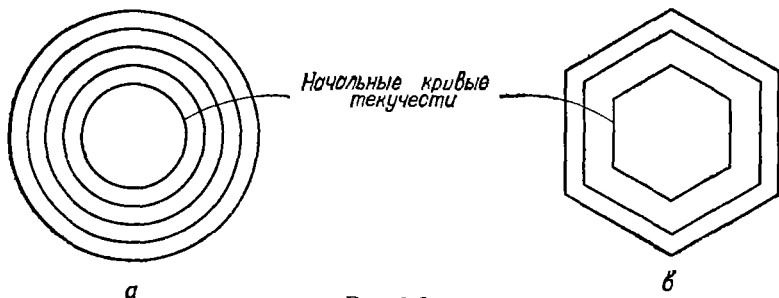


Рис. 8.6.

а — окружности Мизеса; б — правильные шестиугольники Треска.

Гипотеза *изотропного упрочнения* при нагружении постулирует, что поверхность текучести просто увеличивается в размерах, со-

храняя при этом свою начальную форму. Кривые текучести в Π -плоскости для критериев Мизеса и Треска будут концентрическими окружностями и правильными шестиугольниками соответственно (рис. 8.6).

При *кинематическом* упрочнении начальная поверхность текучести поступательно перемещается в новое положение в пространстве напряжений без изменений размеров и формы. Тогда формулу (8.4), задающую начальную поверхность текучести, нужно заменить следующей:

$$f_1(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = 0, \quad (8.17)$$

где α_{ij} — координаты центра новой поверхности текучести. Если упрочнение предполагается *линейным*, то

$$\dot{\alpha}_{ij} = c \dot{\epsilon}_{ij}^P, \quad (8.18)$$

причем c — постоянная. В одномерном случае кривая текучести Треска переносилась бы так, как показано на рис. 8.7.

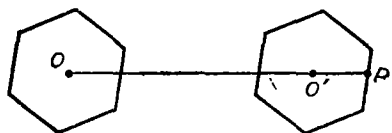


Рис. 8.7.

8.6. Соотношения между напряжениями и деформациями в пластическом состоянии. Теория пластического потенциала

Как только возникают пластические деформации, определяющие уравнения теории упругости перестают быть верными. В силу того что пластические деформации зависят от всей истории нагружения материала, в теории пластичности соотношения между напряжением и деформацией очень часто формулируют через приращения деформации. Это так называемые *инкрементальные теории*, или *теории течения*. Например, *уравнения Леви — Мизеса*, при записи которых пренебрегают упругой частью деформации и предполагают, что главные оси тензоров приращений деформации и напряжений совпадают, связывают приращения полной деформации с компонентами девиатора напряжений следующим образом:

$$d\epsilon_{ij} = s_{ij} d\lambda. \quad (8.19)$$

Здесь коэффициент пропорциональности $d\lambda$ дается в дифференциальной форме, чтобы подчеркнуть, что приращения деформации связаны с конечными компонентами напряжений. Множитель $d\lambda$ может меняться в процессе нагружения и является поэтому скалярной функцией, а не фиксированной постоянной. Соотношения (8.19) представляют *закон течения* для жестко-идеально-пластического материала.

Разложив приращения деформации на упругую и пластическую части:

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^E + d\epsilon_{ij}^P \quad (8.20)$$

и связав приращения пластической деформации с компонентами девиатора напряжений:

$$d\epsilon_{ij}^P = s_{ij} d\lambda, \quad (8.21)$$

мы приходим к *уравнениям Прандтля — Рейсса*. Формулы (8.21) представляют закон течения упруго-идеально-пластического материала. Они устанавливают связь между приращениями пластической деформации и девиатором текущих напряжений, но не дают самих величин приращений деформации.

Функцию компонент напряжения $g(\dot{\sigma}_{ij})$, которая обладает следующим свойством:

$$d\epsilon_{ij}^P = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda, \quad (8.22)$$

называют *пластическим потенциалом*. Для так называемого устойчиво пластического материала такая функция существует и тождественно совпадает с функцией текучести. Если к тому же функция текучести взята в виде $f_1(\sigma_{ij}) = \Pi_{\Sigma_D}$, то равенства (8.22) превращаются в уравнения Прандтля — Рейсса.

8.7. Эквивалентное напряжение.

Эквивалентное приращение пластической деформации

Для математической формулировки закона упрочнения полезно определить *эквивалентное, или эффективное, напряжение* $\sigma_{\text{экр}}$ формулой

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \}^{1/2}. \quad (8.23)$$

Кратко это выражение можно записать так:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2} = \sqrt{3\Pi_{\Sigma_D}}. \quad (8.24)$$

Подобным же образом вводится *эквивалентное, или эффективное, приращение пластической деформации*

$$d\epsilon_{\text{экр}}^P = \{ \frac{2}{9} [(d\epsilon_{11}^P - d\epsilon_{22}^P)^2 + (d\epsilon_{22}^P - d\epsilon_{33}^P)^2 + (d\epsilon_{33}^P - d\epsilon_{11}^P)^2] + \frac{4}{3} [(d\epsilon_{12}^P)^2 + (d\epsilon_{23}^P)^2 + (d\epsilon_{31}^P)^2] \}^{1/2}. \quad (8.25)$$

Его компактная форма имеет вид

$$d\epsilon_{\text{экр}}^P = \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon_{ij}^P d\epsilon_{ij}^P}. \quad (8.26)$$

Используя эквивалентные напряжения и приращения пластической деформации, определенные соответственно формулами (8.24)

и (8.26), получим выражение для коэффициента $d\lambda$ из соотношения (8.21):

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{\text{экв}}^P}{\sigma_{\text{экв}}} . \quad (8.27)$$

8.8. Работа на пластических деформациях.

Гипотезы упрочнения

Скорость, с которой напряжения совершают работу на деформациях, или так называемая *мощность напряжений*, была определена для единицы объема формулой (5.32) как $\sigma_{ij} D_{ij}$. Согласно (4.25), $d\varepsilon_{ij} = D_{ij} dt$, поэтому можно ввести приращение работы в единице объема:

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (8.28)$$

Применяя разложение (8.20), эту величину тоже можно представить суммой

$$dW = \sigma_{ij} (d\varepsilon_{ij}^E + d\varepsilon_{ij}^P) = dW^E + dW^P . \quad (8.29)$$

Для пластически несжимаемого материала *приращение работы на пластических деформациях* будет равно

$$dW^P = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P = s_{ij} d\varepsilon_{ij}^P . \quad (8.30)$$

Если к тому же этот материал подчиняется уравнениям Прандтля — Рейсса (8.21), то приращение работы на пластических деформациях представляется выражением

$$dW^P = \sigma_{\text{экв}} d\varepsilon_{\text{экв}}^P , \quad (8.31)$$

а (8.21) принимает вид

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{3}{2} \frac{dW^P}{\sigma_{\text{экв}}^2} s_{ij} . \quad (8.32)$$

Из всех гипотез, предложенных для расчета мгновенных пластических напряжений при пластическом деформировании материала с *изотропным упрочнением*, наибольшее распространение получили две: энергетическая и деформационная. *Энергетическая гипотеза упрочнения* заключается в том, что мгновенная поверхность текучести зависит только от полной работы на пластических деформациях. Итак, через полную работу на пластических деформациях, которая дается интегралом

$$W^P = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P , \quad (8.33)$$

критерий пластичности выражается в символических обозначениях равенством

$$f_1(\sigma_{ij}) = F(W^P), \quad (8.34)$$

в котором точный вид функциональной зависимости должен быть определен экспериментально. *Деформационная гипотеза упрочнения* состоит в том, что упрочнение определяется величиной пластических деформаций. Через полную эквивалентную деформацию

$$\epsilon_{\text{экв}}^P = \int d\epsilon_{\text{экв}}^P \quad (8.35)$$

закон упрочнения в символических обозначениях представляется соотношением

$$f_1(\sigma_{ij}) = H(\epsilon_{\text{экв}}^P), \quad (8.36)$$

в котором вид функциональной связи находится из экспериментальной зависимости напряжение — деформация при одноосном испытании материала. Можно показать, что для критерия Мизеса законы упрочнения (8.34) и (8.36) эквивалентны.

8.9. Деформационная теория пластичности

При изучении пластических деформаций наряду с теорией течения, которая основывается на уравнениях (8.19) и (8.21) и связывает приращения деформаций с напряжениями, существует так называемая *деформационная теория пластичности* Генки, в которой предполагается зависимость между напряжениями и полными деформациями. Эти соотношения имеют вид

$$e_{ij} = [\varphi + 1/(2G)] s_{ij}, \quad (8.37)$$

$$\epsilon_{ii} = (1 - 2\nu) \sigma_{ii}/E. \quad (8.38)$$

Параметр Генки φ можно выразить через эквивалентные напряжения и деформацию

$$\varphi = \frac{3}{2} \frac{\epsilon_{\text{экв}}^P}{\sigma_{\text{экв}}^P}; \quad (8.39)$$

здесь $\epsilon_{\text{экв}}^P = \sqrt{2\epsilon_{ij}^P\epsilon_{ij}^P/3}$ и, таким образом,

$$\epsilon_{ij}^P = \frac{3}{2} \frac{\epsilon_{\text{экв}}^P}{\sigma_{\text{экв}}^P} s_{ij}. \quad (8.40)$$

8.10. Задачи упругопластичности

Ситуации, в которых и упругие, и пластические деформации, возникающие в теле при нагружении, имеют примерно одинаковый порядок, обычно относят к задачам *упругопластичности*. Много широко известных задач такого типа встречается в теории балок и теории кручения валов, а также в исследовании толстостенных труб и оболочек, находящихся под давлением. В общем случае постановка задач в упругой зоне, пластической зоне и на границе между ними включает следующие соотношения.

а) *Упругая область:*

уравнения равновесия (2.23),

связь между напряжениями и деформациями (6.23) или (6.24),

граничные условия, наложенные на напряжения или перемещения,

условия совместности.

б) *Пластическая область:*

уравнения равновесия (2.23),

связи между напряжениями и приращениями деформации, определяемые формулами (8.20), (8.21) и (6.24),

условие совместности полных деформаций,

условие пластичности (8.8) или (8.11),

граничные условия на границе пластической области, если таковая граница существует.

в) *Граница между упругой и пластической областями:*

условия непрерывности напряжений и перемещений.

8.11. Элементарная теория линий скольжения при плоской пластической деформации

В неограниченном пластическом течении, например при прокатке металла, часто допустимо пренебрегать упругими деформациями и рассматривать материал как жестко-идеально-пластическую среду. Если течение в дальнейшем можно предполагать таким, как в случае плоской деформации, то получающееся поле скоростей можно изучать, пользуясь *теорией линий скольжения*.

Пусть x_1x_2 — плоскость течения; тогда

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad (8.41)$$

и, так как упругими деформациями мы пренебрегаем, тензор скоростей пластической деформации будет равен

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{11} & \dot{\epsilon}_{12} & 0 \\ \dot{\epsilon}_{12} & \dot{\epsilon}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.42)$$

Неизвестные в выражениях (8.41) и (8.42) являются функциями только x_1 и x_2 . Кроме того, известно, что

$$\dot{\epsilon}_{ij} = 1/2 (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad (8.43)$$

где v_i — компоненты скорости.

При предполагаемых условиях плоской деформации имеем $d\epsilon_{33} = 0$. Тогда из уравнений Прандтля — Рейсса (8.21) для напряжения σ_{33} получим формулу

$$\sigma_{33} = 1/2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad (8.44)$$

Используя обычные обозначения теории линий скольжения $\sigma_{33} = -p$ и $\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2/4 + (\sigma_{12})^2} = k$, находим главные значения тензора напряжений (8.41):

$$\sigma_{(1)} = -p + k, \quad \sigma_{(2)} = -p - k, \quad \sigma_{(3)} = -p. \quad (8.45)$$

Положение главных направлений тензора напряжений относительно осей x_1x_2 показано на рис. 8.8, где $\tan 2\theta = 2\sigma_{12}/(\sigma_{11} - \sigma_{22})$.

Направления площадок максимальных касательных напряжений (см. § 2.11) образуют углы в 45° с главными осями тензора напряжений. На рис. 8.8 соответствующие направления помечены буквами α и β . Из этого построения видно, что $\theta = \pi/4 + \varphi$ и, следовательно,

$$\tan 2\varphi = -\cotg 2\theta. \quad (8.46)$$

Для данного поля напряжений при пластическом течении можно ввести в рассмотрение

два семейства кривых, в каждой точке идущих вдоль направлений максимальных касательных напряжений. Эти кривые называются *линиями сдвига* или *линиями скольжения* (в дальнейшем мы будем называть их также α -линиями и β -линиями).

Рассматривая малый элемент, ограниченный двумя парами линий скольжения и изображенный на рис. 8.9, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -p - k \sin 2\varphi, \\ \sigma_{22} &= -p + k \sin 2\varphi, \\ \sigma_{12} &= k \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (8.47)$$

Используя уравнения равновесия, можно показать, что

$$\begin{aligned} p + 2k\varphi &= C_1 \quad \text{постоянно вдоль } \alpha\text{-линии,} \\ p - 2k\varphi &= C_2 \quad \text{постоянно вдоль } \beta\text{-линии.} \end{aligned} \quad (8.48)$$

Что касается компонент скорости, то рис. 8.10 показывает, как они связаны с положением α - и β -линий:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_\alpha \cos \varphi - v_\beta \sin \varphi, \\ v_2 &= v_\alpha \sin \varphi + v_\beta \cos \varphi. \end{aligned} \quad (8.49)$$

Для изотропной среды в теориях течения главные оси тензоров напряжений и скоростей пластической деформации совпадают. Поэтому если x_1 и x_2 — направления линий скольжения, то ϵ_{11} и ϵ_{22}

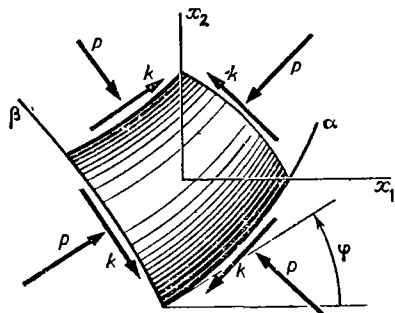


Рис. 8.9.

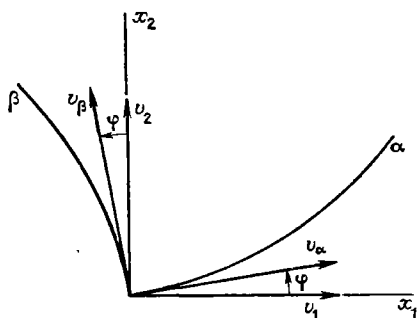


Рис. 8.10.

равны нулю вдоль этих линий, так что

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (v_\alpha \cos \varphi - v_\beta \sin \varphi) \right\}_{\varphi=0} = 0, \quad (8.50)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} (v_\alpha \sin \varphi + v_\beta \cos \varphi) \right\}_{\varphi=0} = 0. \quad (8.51)$$

Отсюда получаются соотношения

$$dv_1 - v_2 d\varphi = 0 \quad \text{на } \alpha\text{-линии}, \quad (8.52)$$

$$dv_2 + v_1 d\varphi = 0 \quad \text{на } \beta\text{-линии}. \quad (8.53)$$

Итак, для статически определимых задач поле линий скольжения находится из (8.48); затем, используя это поле и соотношения (8.52) и (8.53), можно построить поле скоростей.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Основные понятия. Явление текучести (§ 8.1—8.4)

8.1. Используя определения (8.1) и (8.2), получить соотношение между логарифмической и технической деформацией. Как связаны приращения этих величин?

Согласно (8.1), $L \cdot L_0 = e + 1$; тогда (8.2) дает $e = \ln(e + 1)$. Дифференцируя это равенство, находим $de/de = 1/(e + 1) = L_0/L$ вследствие того, что $dL = = L de = L_0 de$.

8.2. При нагрузке P в одномерном испытании образца истинное напряжение $\sigma = P/A$, в то время как техническое принимается в виде $S = P/A_0$, где A_0 — начальная площадь сечения, а A — текущая ее величина. Найти условие максимума нагрузки при пластическом деформировании с сохранением объема ($A_0 L_0 = AL$).

В нашем случае $S = P/A_0 = (P/A) (A/A_0) = \sigma (L_0/L) = \sigma / (1 + e)$ и участок максимальной нагрузки на S - e диаграмме находится там, где наклон ее равен нулю ($dS/de = 0$). Дифференцирование дает $dS/de = (d\sigma/de - \sigma)/(1 + e)^2$. Это выражение равно нулю, если $d\sigma/de = \sigma$. Используя результат задачи 8.1, последнее условие можно записать в виде $d\sigma/de = \sigma / (1 + e)$.

8.3. В качестве меры влияния промежуточного главного напряжения на пластическое состояние часто используют параметр Лоде $\mu = (2\sigma_{II} - \sigma_I - \sigma_{III}) / (\sigma_I - \sigma_{III})$. Доказать, что параметр Лоде можно выразить через главные значения девиатора напряжений формулой $\mu = 3s_{II} / (s_I - s_{III})$.

Согласно (2.71), $\sigma_I = s_I + \sigma_M$ и т. д., причем $\sigma_M = \sigma_{II}/3$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu &= [2(s_{II} + \sigma_M) - (s_I + \sigma_M) - (s_{III} + \sigma_M)] / [(s_I + \sigma_M) - (s_{III} + \sigma_M)] = \\ &= [3s_{II} - (s_I + s_{III} + s_{III})] / (s_I - s_{III}). \end{aligned}$$

Но $s_I + s_{II} + s_{III} = I_{\Sigma D} = 0$, и, следовательно, $\mu = 3s_{II} / (s_I - s_{III})$.

8.4. Для напряженного состояния $\sigma_{11} = \sigma$, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$, $\sigma_{12} = \tau$, $\sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$, которое возникает при испытании на растяжение — кручение тонкостенной трубы, получить кривые текучести в плоскости σ - τ в соответ-

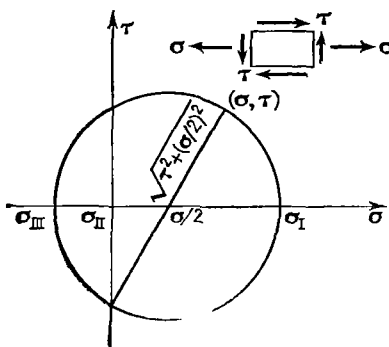


Рис. 8.11.

ствии в плоскости σ - τ в соответ-

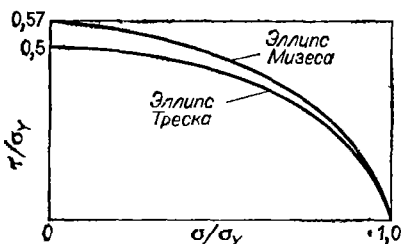


Рис. 8.12.

ствии с критериями Треска и Мизеса, если предел текучести при простом растяжении равен σ_Y .

В данном напряженном состоянии главные значения напряжений равны $\sigma_I = (\sigma + \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2})/2$, $\sigma_{II} = 0$, $\sigma_{III} = (\sigma - \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2})/2$, как показывает диаграмма Мора на рис. 8.11. Таким образом, по формуле (8.8) найдем кривую текучести Треска $\sqrt{4\tau^2 + \sigma^2} = \sigma_Y$, или $\sigma^2 + 4\tau^2 = \sigma_Y^2$. Это эллипс в σ - τ плоскости. Аналогично формула (8.12) дает кривую текучести Мизеса в виде эллипса $\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_Y^2$. Эллипсы текучести Мизеса и Треска для этого случая сравниваются на рис. 8.12.

8.5. Преобразовать условие пластичности Мизеса (8.10) к форме (8.11), т. е. записать его через главные напряжения.

По формуле (2.72) $-\Pi_{\Sigma D} = -(s_I s_{II} + s_{II} s_{III} + s_{III} s_I)$, а, согласно (2.71), $s_I = \sigma_I - \sigma_M$ и т. д., причем $\sigma_M = (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})/3$. Отсюда

$$-\Pi_{\Sigma D} = -(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_{III} \sigma_I) + (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2/3 = \\ = 2(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - \sigma_I \sigma_{II} - \sigma_{II} \sigma_{III} - \sigma_{III} \sigma_I)/6.$$

Таким образом, $(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 6C_Y$.

8.6. Пусть ортогональная система координат $OXYZ$ ориентирована так, что плоскость XY совпадает с Π -плоскостью, а ось σ_{III} лежит в плоскости YOZ (см. рис. 8.13 и 8.4). Доказать, что поверхность текучести Мизеса пересекает Π -плоскость по окружности Мизеса (рис. 8.5, б).

Таблица коэффициентов преобразования одной системы осей в другую находится без труда и имеет следующий вид:

	σ_I	σ_{II}	σ_{III}
X	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	0
Y	$-1/\sqrt{6}$	$-1/\sqrt{6}$	$2/\sqrt{6}$
Z	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$

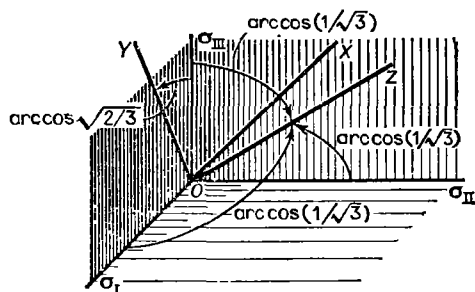


Рис. 8.13.

Отсюда следует, что

$$\sigma_I = -X/\sqrt{2} - Y/\sqrt{6} + Z/\sqrt{3}, \quad \sigma_{II} = X/\sqrt{2} - Y/\sqrt{6} + Z/\sqrt{3}, \\ \sigma_{III} = 2Y/\sqrt{6} + Z/\sqrt{3}.$$

Тогда формула (8.12) сводится к уравнению

$$(-\sqrt{2}X)^2 + (X/\sqrt{2} - 3Y/\sqrt{6})^2 + (X/\sqrt{2} + 3Y/\sqrt{6})^2 = 2\sigma_Y^2,$$

которое после упрощения приводит к окружности Мизеса $3X^2 + 3Y^2 = 2\sigma_Y^2$, изображенной на рис. 8.5, б.

8.7. Используя преобразование координат задачи 8.6, доказать, что уравнение (8.14) $\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 0$ является уравнением Π -плоскости.

Подставляя в уравнение (8.14) выражения для σ_I , σ_{II} , σ_{III} , найденные в задаче 8.6, получаем $\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = \sqrt{3}Z = 0$, или $Z = 0$, а это и есть плоскость XY (Π -плоскость).

8.8. Для двусосного напряженного состояния, когда $\sigma_{II} = 0$, найти поверхности текучести Мизеса и Треска и сравнить их, пользуясь диаграммой в плоскости σ_I/σ_Y , σ_{III}/σ_Y .

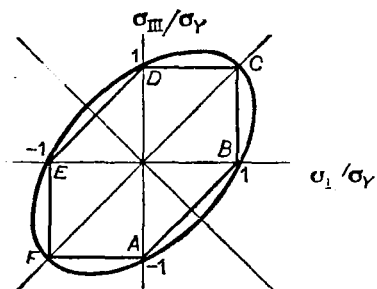


Рис. 8.14.

равенствами $\sigma_{III} - \sigma_{II} = \sigma_Y$, $\sigma_{II} - \sigma_I = \sigma_Y$ приводит к шестиугольнику Треска, образованному (рис. 8.14) отрезками AB и ED с уравнениями $(\sigma_I / \sigma_Y) - (\sigma_{III} / \sigma_Y) = \pm 1$, DC и FA с уравнениями $\sigma_{III} / \sigma_Y = \pm 1$ и BC и EF с уравнениями $\sigma_I / \sigma_Y = \pm 1$ соответственно.

8.9. В § 8.3 критерий Мизеса назван теорией энергии искажения формы. Доказать, что если энергию искажения формы на единицу объема $u_{(D)}^*$ положить равной постоянной текучести C_Y , то в результате получится критерий Мизеса в форме (8.12).

В задаче 6.26 было найдено выражение $u_{(D)}^*$ через главные напряжения:

$$u_{(D)}^* = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] / 12G.$$

При одноосном растяжении или сжатии, когда $\sigma_1 = \sigma_Y$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, из этой формулы следует, что $u_{(D)}^* = \sigma_Y^2 / 6G$. Тогда $C_Y = \sigma_Y^2 / 6G$ и, как и прежде, критерий Мизеса выражается равенством (8.12).

Пластические деформации. Упрочнение (§ 8.4—8.8)

8.10. Доказать, что уравнения Прандтля — Рейсса (8.21) содержат в себе утверждение, что главные оси тензора приращений пластической деформации совпадают с главными осями тензора напряжений. Записать эти уравнения через главные напряжения.

Из формулы (8.21) видно, что в системе координат, в которой равны нулю касательные напряжения, отсутствуют также и приращения пластической деформации сдвига. В системе главных осей уравнение (8.21) принимает вид $d\epsilon_I^P / s_I = d\epsilon_{II}^P / s_{II} = d\epsilon_{III}^P / s_{III} = d\lambda$. Таким образом, $d\epsilon_I^P = (\sigma_I - \sigma_M) d\lambda$, $d\epsilon_{II}^P = (\sigma_{II} - \sigma_M) d\lambda$ и т. д. Последовательным вычитанием находим

$$\frac{d\epsilon_I^P - d\epsilon_{II}^P}{\sigma_I - \sigma_{II}} = \frac{d\epsilon_{II}^P - d\epsilon_{III}^P}{\sigma_{II} - \sigma_{III}} = \frac{d\epsilon_{III}^P - d\epsilon_I^P}{\sigma_{III} - \sigma_I} = d\lambda.$$

8.11. Доказать, что в случае плоской пластической деформации, когда $\epsilon_{33} = 0$, $d\epsilon_{33} = 0$ и $\sigma_{22} = 0$, уравнения Леви — Мизеса (8.19) приводят к тождественному совпадению критериев текучести Треска и Мизеса (записанных через предел текучести при чистом сдвиге k).

В нашем случае уравнения (8.19) записываются так:

$$d\epsilon_{11} = (2\sigma_{11} - \sigma_{33}) d\lambda/3, \quad d\epsilon_{22} = -(\sigma_{11} + \sigma_{33}) d\lambda/3, \quad 0 = 2\sigma_{33} - \sigma_{11}.$$

При отсутствии касательных напряжений $\sigma_1 = \sigma_{11}$, $\sigma_{11} = \sigma_{33} = \sigma_{11}/2$, $\sigma_{111} = 0 = \sigma_{22}$. Тогда из формулы (8.9) находим критерий Треска в виде $\sigma_1 - \sigma_{111} = \sigma_{11} = 2k$, а из (8.13) получаем для данного случая критерий Мизеса $(\sigma_{11}/2)^2 + + (-\sigma_{11}/2)^2 + (-\sigma_{11})^2 = 6k^2$, или $\sigma_{11}^2 = 4k^2$, т. е. $\sigma_{11} = 2k$.

8.12. Доказать, что из уравнений Прандтля — Рейсса следует равенство параметра Лоде μ (см. задачу 8.3) и величины

$$\nu = (2d\epsilon_{11}^P - d\epsilon_1^P - d\epsilon_{111}^P)/(d\epsilon_1^P - d\epsilon_{111}^P).$$

Из соотношения (8.21) получаем

$$\begin{aligned} \nu &= (2s_{11} - s_1 - s_{111}) d\lambda/(s_1 - s_{111}) d\lambda = \\ &= (2(\sigma_{11} - \sigma_M) - (\sigma_1 - \sigma_M) - (\sigma_{111} - \sigma_M))/((\sigma_1 - \sigma_M) - (\sigma_{111} - \sigma_M)) = \\ &= (2\sigma_{11} - \sigma_1 - \sigma_{111})/(\sigma_1 - \sigma_{111}) = \mu. \end{aligned}$$

8.13. Доказать, что для второго инварианта девиатора напряжений $\Pi_{\Sigma_D} = s_{ij}s_{ij}/2$ выполняется равенство $\partial\Pi_{\Sigma_D}/\partial\sigma_{ij} = s_{ij}$.

Пользуясь выражением для Π_{Σ_D} находим

$$\begin{aligned} \partial\Pi_{\Sigma_D}/\partial\sigma_{pq} &= (\partial s_{ij}/\partial\sigma_{pq}) s_{ij}, \quad \text{где } \partial s_{ij}/\partial\sigma_{pq} = \partial(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3)/\partial\sigma_{pq} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \\ &- \delta_{ij}\delta_{pq}/3. \quad \text{Таким образом, } \partial\Pi_{\Sigma_D}/\partial\sigma_{pq} = (\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{ij}\delta_{pq}/3) s_{ij} = s_{pq}, \quad \text{поскольку} \\ s_{ii} &= I_{\Sigma_D} = 0. \end{aligned}$$

8.14. Пусть пластический потенциал имеет вид $g(\sigma_{ij}) = \Pi_{\Sigma_D}$; доказать, что соотношения (8.22) для пластического потенциала превращаются в уравнения Прандтля — Рейсса.

Доказательство сразу следует из результата задачи 8.13, так как в этом случае $dg/\partial\sigma_{ij} = s_{ij}$ и, следовательно, (8.22) сводятся к (8.21).

8.15. Записать в развернутом виде выражение (8.24) и доказать, что эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{экв}}$ можно записать в форме (8.23).

Из равенства (8.24) имеем

$$\sigma_{\text{экв}}^2 = 3s_{ij}s_{ij}/2 = 3(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{pp}/3)(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{qq}/3)/2 = (3\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj})/2.$$

Записывая его в развернутом виде, получаем

$$\begin{aligned} & [3(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) - (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2]/2 = \\ & = [2(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11}) + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)] = \\ & = [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)]/2, \end{aligned}$$

что и утверждается формулой (8.23).

8.16. В теории пластического потенциала вектор приращения пластической деформации перпендикулярен поверхности нагружения (текучности) в любой регулярной точке; доказать, что если удовлетворяется критерий Мизеса, то выполняются уравнения $de_I^P/s_I = de_{II}^P/s_{II} = de_{III}^P/s_{III}$.

Пусть числа N_1, N_2, N_3 задают направление нормали к поверхности текучности $f_1(\sigma_{ij})$, т. е. эту нормаль можно характеризовать величиной $N = \text{grad } f_1$, а для этого требуется, чтобы $N_1/(\partial f_1/\partial \sigma_I) = N_2/(\partial f_1/\partial \sigma_{II}) = N_3/(\partial f_1/\partial \sigma_{III})$, причем, согласно критерию Мизеса, $f_1 = (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 - 2\sigma_Y^2 = 0$. Тогда $\partial f_1/\partial \sigma_I = 2(\sigma_I - \sigma_{II}) = 6s_I$ и т. д., а так как вектор приращения пластической деформации направлен по нормали к f_1 , отсюда следует, что $de_I^P/s_I = de_{II}^P/s_{II} = de_{III}^P/s_{III}$.

8.17. Найти отношения приращений пластических деформаций: а) для простого растяжения, когда $\sigma_{11} = \sigma_Y$; б) для двусосного напряженного состояния, при котором $\sigma_{11} = -\sigma_Y/\sqrt{3}$, $\sigma_{22} = \sigma_Y/\sqrt{3}$, $\sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$; в) для чистого сдвига при $\sigma_{12} = \sigma_Y/\sqrt{3}$.

а) При данных условиях $\sigma_{11} = \sigma_I = \sigma_Y$, $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$ и $s_I = 2\sigma_Y/3$, $s_{II} = s_{III} = -\sigma_Y/3$. Используя результат задачи 8.16, находим $de_I^P/2 = -de_{II}^P/1 = -de_{III}^P/1$.

б) В данном случае $\sigma_I = \sigma_Y/\sqrt{3}$, $\sigma_{II} = 0$, $\sigma_{III} = -\sigma_Y/\sqrt{3}$ и $s_I = \sigma_Y/\sqrt{3}$, $s_{II} = 0$, $s_{III} = -\sigma_Y/\sqrt{3}$. Таким образом, $de_I^P/1 = -de_{III}^P/1$, а третий член опускается, поскольку обычно предполагается, что при обращении в нуль знаменателя и числитель тоже обращается в нуль.

в) В этом случае $\sigma_I = \sigma_Y/\sqrt{3}$, $\sigma_{II} = 0$, $\sigma_{III} = -\sigma_Y/\sqrt{3}$ и снова получаем $de_I^P/1 = -de_{III}^P/1$.

8.18. Найти приращение работы на пластических деформациях dW^P и приращение эквивалентной пластической деформации $de_{\text{экв}}^P$ для двусосного напряженного состояния $\sigma_{11} = -\sigma_Y/\sqrt{3}$, $\sigma_{22} = \sigma_Y/\sqrt{3}$, $\sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$, если пластическая деформация происходит так, что $de_I^P = C$, где C — некоторая постоянная.

Выражение для приращения работы (8.30) в главных осях имеет вид $dW^P = \sigma_I de_I^P + \sigma_{II} de_{II}^P + \sigma_{III} de_{III}^P$. Для указанного напряженного состояния результат задачи 8.17 показывает, что $de_I^P = -de_{III}^P$, $de_{II}^P = 0$. Отсюда следует, что

$$dW^P = -\sigma_Y C/\sqrt{3} + (\sigma_Y/\sqrt{3})(-C) = -2C\sigma_Y/\sqrt{3}.$$

Используя формулу (8.25), находим

$$\begin{aligned} d\epsilon_{\text{экр}}^P &= \{2[(d\epsilon_1^P - d\epsilon_{11}^P)^2 + (d\epsilon_{11}^P - d\epsilon_{111}^P)^2 + (d\epsilon_{111}^P - d\epsilon_1^P)^2]\}^{1/2}/3 = \\ &= \{2[C^2 + C^2 + 4C^2]\}^{1/2}/3 = 2C/\sqrt{3}. \end{aligned}$$

8.19. Проверить правильность соотношения (8.32), доказав, что приращение работы на пластических деформациях для материала Прандтля—Рейсса равно $dW^P = \sigma_{\text{экр}} d\epsilon_{\text{экр}}^P$, как утверждает формула (8.31).

Для материала Прандтля—Рейсса, удовлетворяющего уравнениям (8.21), формула (8.30) дает $dW^P = s_{ij}s_{ij}d\lambda$. Но, согласно (8.27), для такого материала $d\lambda = 3d\epsilon_{\text{экр}}^P/2\sigma_{\text{экр}}$, и, следовательно, $dW^P = (3s_{ij}s_{ij}/2)(d\epsilon_{\text{экр}}^P/\sigma_{\text{экр}})$, а если учесть определение (8.24), то последнее выражение упрощается: $dW^P = \sigma_{\text{экр}} d\epsilon_{\text{экр}}^P$. Таким образом, в данном случае $d\epsilon_{\text{экр}}^P = dW^P/\sigma_{\text{экр}}$. Соотношение (8.32) теперь сразу следует из формулы (8.21).

8.20. Для материала, удовлетворяющего критерию текучести Мизеса, в качестве функции текучести в законах упрочнения (8.34) и (8.36) можно взять эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{экр}}$. Доказать, что в этом случае выполняется равенство $\sigma_{\text{экр}} F' = H'$, где F' и H' — производные характеризующих упрочнение функций по их аргументам.

Закон упрочнения (8.34) в указанном случае принимает вид $\sigma_{\text{экр}} = F(W^P)$, и, значит, $d\sigma_{\text{экр}} = F' dW^P$. Аналогично закон упрочнения (8.36) записывается следующим образом: $\sigma_{\text{экр}} = H(\epsilon_{\text{экр}}^P)$, и тогда $d\sigma_{\text{экр}} = H' d\epsilon_{\text{экр}}^P$. Таким образом, $F' dW^P = H' d\epsilon_{\text{экр}}^P$. А так как из формулы (8.31) (или задачи 8.19) известно, что $dW^P = \sigma_{\text{экр}} d\epsilon_{\text{экр}}^P$, сразу получаем $\sigma_{\text{экр}} F' = H'$.

Деформационная теория пластичности (§ 8.9)

8.21. Основу деформационной теории пластичности Генки составляют следующие соотношения: $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^E + \epsilon_{ij}^P$, причем $\epsilon_{ij}^E = \epsilon_{ij}^E + \delta_{ij}\epsilon_{kk}^E/3 = s_{ij}/(2G) + \delta_{ij}(1 - 2\nu)\sigma_{kk}/(3E)$ и $\epsilon_{ij}^P = \phi s_{ij}$. Доказать, что эти равенства эквивалентны формулам (8.37) и (8.38).

Среди уравнений $\epsilon_{ij}^P = \phi s_{ij}$ содержится и такое: $\epsilon_{ii}^P = 0$, а это означает, что $\epsilon_{ij}^P = \epsilon_{ij}^P = \phi s_{ij}$. Из равенства $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^E + \epsilon_{ij}^P$ следует, что тогда $\epsilon_{jj} = \epsilon_{jj}^E$. Из того же самого равенства получается еще соотношение $\epsilon_{ij} + \delta_{ij}\epsilon_{kk}/3 = \epsilon_{ij}^E + \delta_{ij}\epsilon_{kk}^E/3 + \epsilon_{ij}^P$, которое сводится к виду $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^E + \epsilon_{ij}^P = [\phi + 1/(2G)]s_{ij}$, а это и есть (8.37). Кроме того, из равенства $\epsilon_{ii} = \epsilon_{ii}^E$ получаем $\epsilon_{ii} = (1 - 2\nu)\sigma_{kk}/E$, что представляет собой (8.38).

8.22. Проверить тот факт, что параметр Генки ϕ можно представить формулой (8.39).

Возводя в квадрат и складывая компоненты тензоров в уравнении $\varepsilon_{ij}^P = \varphi s_{ij}$ задачи 8.21, приходим к следующему равенству: $\varepsilon_{ij}^P \varepsilon_{ij}^P = \varphi^2 s_{ij} s_{ij}$, или $\varphi = \sqrt{3\varepsilon_{ij}^P \varepsilon_{ij}^P / 2\sigma_{\text{экв}}}$. Умножая обе части последнего равенства на $2/3$, получаем

$$\varphi = 3 \sqrt{2\varepsilon_{ij}^P \varepsilon_{ij}^P / 3 / 2\sigma_{\text{экв}}} = 3\varepsilon_{\text{экв}}^P / 2\sigma_{\text{экв}}.$$

Задачи упругопластичности (§ 8.10)

8.23. Балка прямоугольного сечения из упруго-идеально-пластического материала находится под нагрузкой на чистый изгиб.

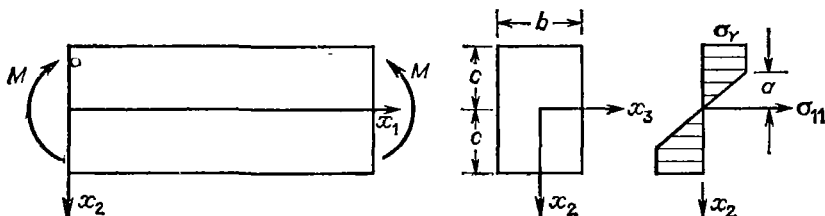


Рис. 8.15.

Пользуясь элементарной теорией балок, найти величину изгибающего момента M , действующего на конце балки, при которой упругое ядро балки простирается от $-a$ до a , как показано на рис. 8.15.

В данной задаче единственным отличным от нуля напряжением будет изгибающее напряжение σ_{11} . В упругом ядре внутри балки ($-a < x_2 < a$) имеет место равенство $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} = Ex_2/R$, где R — радиус кривизны изогнутой оси балки, а E — модуль Юнга. В пластической зоне $\sigma_{11} = \sigma_Y$. Таким образом,

$$M = 2 \int_0^a \frac{E}{R} (x_2)^2 b dx_2 + 2 \int_a^c x_2 \sigma_Y b dx_2 = b \sigma_Y (c^2 - a^2/3),$$

где $\sigma_Y = Ea/R$, т. е. использовано условие непрерывности напряжения на границе между упругой и пластической зонами. Из полученной формулы видно, что $M = 2bc^2\sigma_Y/3$, когда пластическая зона только появляется (при $a = 0$), и $M = bc^2\sigma_Y$, когда вся балка оказывается в пластическом состоянии (при $a = 0$).

8.24. Найти изгибающий момент для балки из материала с кусочно-линейным упрочнением (так что за пределом текучести $\sigma_{11} = \sigma_Y + A (\varepsilon_{11} - \sigma_Y/E)$), на которую действует такая же нагрузка, как в задаче 8.23.

Распределение напряжений в такой балке показано на рис. 8.16. Снова $\varepsilon_{11} = x_2/R$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} M &= 2 \int_0^a \frac{E}{R} (x_2)^2 b dx_2 + 2 \int_a^c \left[\sigma_Y + A \left(\frac{x_2}{R} - \frac{\sigma_Y}{E} \right) \right] x_2 b dx_2 = \\ &= \frac{2Eba^3}{3R} + 2b \left\{ \frac{\sigma_Y}{2} \left(1 - \frac{A}{E} \right) (c^2 - a^2) + \frac{A(c^3 - a^3)}{3R} \right\}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись, как и в задаче 8.23, условием $\sigma_Y = Ea/R$, найдем

$$M = c^2 b \sigma_Y (1 - A/E) + 2c^3 b A/3R + b \sigma_Y^3 R^2 (A/E - 1)/3E^2.$$

8.25. Круглый вал радиуса c из упруго-идеально-пластического материала закручивается на концах моментом T , как показано на рис. 8.17. Найти величину крутящего момента, при котором внутри вала остается упругое ядро радиуса a .

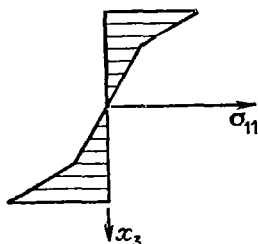


Рис. 8.16.

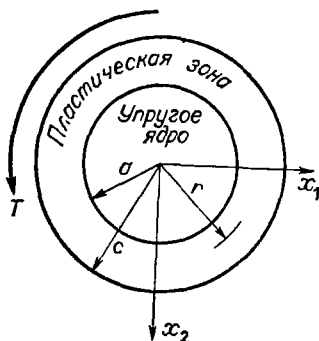


Рис. 8.17.

В данном случае касательное напряжение σ_{12} распределено следующим образом: $\sigma_{12} = kr/a$ при $0 \leq r \leq a$ и $\sigma_{12} = k$ при $a \leq r \leq c$, где k — предел текучести материала при чистом сдвиге. Тогда

$$T = 2\pi \int_0^a (kr^3/a) dr + 2\pi \int_a^c kr^2 dr = \frac{2\pi k}{3} (c^3 - a^3/4).$$

Таким образом, крутящий момент, характеризующий самое начало появления пластической зоны ($a = c$), равен $T_1 = \pi k c^3/2$. Вал полностью находится в пластическом состоянии ($a = 0$) при $T_2 = 2\pi k c^3/3 = 4T_1/3$.

8.26. Толстая сферическая оболочка, размеры которой указаны на рис. 8.18, находится под действием растущего давления p_0 . Используя критерий Мизеса, найти то давление, при котором впервые появится пластическое состояние.

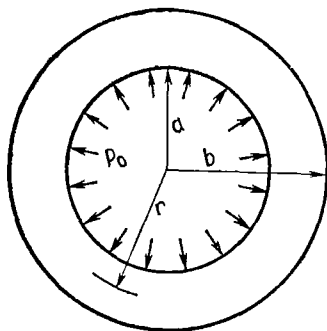


Рис. 8.18.

Из-за симметрии действующей нагрузки главные напряжения являются компонентами в сферических координатах $\sigma_{(\theta\theta)} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_I \approx \sigma_{II}$, $\sigma_{(rr)} = \sigma_{III}$. Тогда критерий Мизеса (8.12) выглядит так: $\sigma_{(\theta\theta)} - \sigma_{(rr)} = \sigma_Y$. Можно показать,

что компоненты напряжения в упругом состоянии представляются выражениями

$$\sigma_{(rr)} = -p_0 (b^3/r^3 - 1)/(b^3/a^3 - 1),$$

$$\sigma_{(\theta\theta)} = \sigma_{(\varphi\varphi)} = p_0 (b^3/2r^3 + 1)/(b^3/a^3 - 1).$$

Поэтому $\sigma_Y = 3b^3 p_0 / [2r^3 (b^3/a^3 - 1)]$, откуда $p_0 = 2\sigma_Y (1 - a^3/b^3)/3$. Это то давление, при котором впервые появляется пластическое состояние на внутренней границе оболочки (при $r = a$).

Теория линий скольжения (§ 8.11)

8.27. Проверить, что формула (8.45) действительно дает главные значения тензора напряжений (8.41), если принято условие $\sigma_{33} = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2$ (формула (8.44)).

Главные значения тензора напряжений находятся из векового уравнения (2.37), которое в нашем случае имеет вид

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -p - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель по третьему столбцу, получаем

$$(-p - \sigma) [(\sigma_{11} - \sigma)(\sigma_{22} - \sigma) - \sigma_{12}^2] = (-p - \sigma) [\sigma^2 - (\sigma_{11} + \sigma_{22})\sigma - \sigma_{12}^2] = 0.$$

Очевидно, корнями этого уравнения будут $\sigma = -p$ и

$$\sigma = 1/2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \pm \sqrt{1/4 (\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2} = -p \pm k.$$

8.28. Воспользовавшись условием постоянства предела текучести при чистом сдвиге k , подставить выражения (8.47) в уравнения равновесия и, проинтегрировав, доказать справедливость соотношений (8.48).

Уравнения равновесия $\partial\sigma_{11}/\partial x_1 + \partial\sigma_{12}/\partial x_2 = 0$ и $\partial\sigma_{12}/\partial x_1 + \partial\sigma_{22}/\partial x_2 = 0$ после подстановки в них выражений (8.47) превращаются в следующие:

$$-\partial p/\partial x_1 - k(2 \cos 2\varphi)(\partial\varphi/\partial x_1) + k(-2 \sin 2\varphi)(\partial\varphi/\partial x_2) = 0,$$

$$-k(2 \sin 2\varphi)(\partial\varphi/\partial x_1) - \partial p/\partial x_2 + k(2 \cos 2\varphi)(\partial\varphi/\partial x_2) = 0.$$

Если x_1 — координата вдоль α -линии, а x_2 — вдоль β -линии, то $\varphi = 0$ и уравнения равновесия дают $-\partial p/\partial x_1 - 2k(\partial\varphi/\partial x_1) = 0$ вдоль α -линии и $-\partial p/\partial x_2 + 2k(\partial\varphi/\partial x_2) = 0$ вдоль β -линии. Эти уравнения сразу интегрируются, в результате чего получаем $p + 2k\varphi = C_1$ на α -линии и $p - 2k\varphi = C_2$ на β -линии.

8.29. При штамповке с вытяжкой без трения через квадратную матрицу, приводящей к уменьшению сечения на пятьдесят процентов, линии скольжения заполняют веерообразную область, которая состоит из радиальных прямых — β -линий и дуг окружностей — α -линий (рис. 8.19). Найти компоненты скорости вдоль этих линий

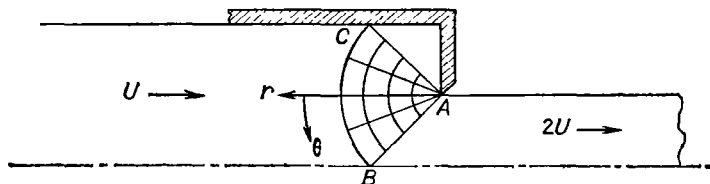


Рис. 8.19.

скольжения, выраженные через скорость подачи материала U и полярные координаты r и θ .

Вдоль прямых β -линий $d\varphi = 0$, и по формуле (8.53) находим $dv_2 = 0$ или $v_2 = \text{const}$. Поскольку нормальная компонента скорости вдоль BC непрерывна, в данной задаче эта константа должна быть равна $U \cos \theta$, т. е. $v_2 = U \cos \theta$. Вдоль круговых α -линий $d\varphi = d\theta$, и по формуле (8.52) получаем

$$v_1 = \int_{-\pi/4}^{\theta} U \cos \theta \, d\theta = U (\sin \theta + 1/\sqrt{2}).$$

Смешанные задачи

8.30. Доказать, что условие пластичности Мизеса можно записать через октаэдрическое касательное напряжение $\sigma_{\text{окт}}$ (см. задачу 2.22) следующим образом: $\sigma_{\text{окт}} = \sqrt{2} \sigma_Y / 3$.

Октаэдрическое касательное напряжение через главные напряжения представляется формулой (см. задачу 2.22)

$$3\sigma_{\text{окт}} = \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}.$$

Следовательно, согласно (8.12),

$$9\sigma_{\text{окт}}^2 = (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 2\sigma_Y^2.$$

8.31. Доказать, что уравнение (8.13), выражающее критерий Мизеса, можно записать в виде $s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2 = 2k^2$.

Согласно (2.71), $\sigma_I = s_I + \sigma_M$ и т. д.; тогда уравнение (8.13) сразу принимает форму

$$(s_I - s_{II})^2 + (s_{II} - s_{III})^2 + (s_{III} - s_I)^2 = 6k^2.$$

Раскрывая скобки и перегруппировывая члены, это можно записать так: $s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2 - (s_I + s_{II} + s_{III})^2/3 = 2k^2$. Но $s_I + s_{II} + s_{III} = I_{\Sigma D} = 0$ и требуемое уравнение получено.

8.32. При каком значении $\mu = (2\sigma_{II} - \sigma_I - \sigma_{III}) / (\sigma_I - \sigma_{III})$ (μ — параметр Лоде) критерии Треска и Мизеса совпадают?

Из формулы, определяющей величину μ , имеем $\sigma_{II} = (\sigma_I + \sigma_{III})/2 + \mu(\sigma_I - \sigma_{III})/2$. Если подставить это выражение в критерий Мизеса (8.12), то после некоторых алгебраических преобразований (см. задачу 8.42) получим $\sigma_I - \sigma_{III} = 2\sigma_Y \sqrt{3 + \mu^2}$. Критерий Треска записывается уравнением (8.8): $\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_Y$. Очевидно, если $\mu = 1$, оба критерия совпадают. Когда $\sigma_{II} = \sigma_I$, то $\mu = 1$; этот случай иногда называют цилиндрическим (осесимметричным) напряженным состоянием.

8.33. Для напряженного состояния

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix},$$

где σ и τ — постоянные, найти условия пластичности, соответствующие критериям Треска и Мизеса.

Легко показать, что главными значениями данного тензора напряжений будут $\sigma_I = \sigma + \tau$, $\sigma_{II} = \sigma$, $\sigma_{III} = \sigma - \tau$. Тогда критерий Треска (8.8) $\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_Y$ приводит к уравнению $2\tau = \sigma_Y$, критерий же Мизеса (8.12) дает $\tau = \sigma_Y / \sqrt{3}$. Снова убеждаемся в том, что в обоих критериях фигурирует τ и не фигурирует σ , т. е. что гидростатическое давление никоим образом не влияет ни на характеристики пластического состояния, ни на само наличие такого состояния.

8.34. Доказать, что если уравнения Прандтля — Рейсса выполняются, то выполняется и условие несжимаемости материала при пластической деформации. Записать эти уравнения через мгновенные напряжения.

Из (8.21) видно, что $d\epsilon_{ii}^P = s_{ii}d\lambda = 0$, так как $s_{ii} = I_{\Sigma D} = 0$, и, следовательно, условие несжимаемости $d\epsilon_{ii}^P = 0$ выполняется.

Запишем уравнения Прандтля — Рейсса через компоненты тензора напряжений: $d\epsilon_{ij}^P = (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3)d\lambda$. Таким образом, $d\epsilon_{11}^P = 2/3[\sigma_{11} - (\sigma_{22} + \sigma_{33})/2]d\lambda$ и т. д. для нормальных компонент и $d\epsilon_{12}^P = \sigma_{12}d\lambda$ и т. д. для касательных.

8.35. Используя критерий Мизеса, доказать, что в Π -плоскости компоненты девиатора напряжений на кривой текучести равны

$$s_I = [-2\sigma_Y \cos(\theta - \pi/6)]/3, \quad s_{II} = [2\sigma_Y \cos(\theta + \pi/6)]/3, \\ s_{III} = (2\sigma_Y \sin \theta)/3,$$

где $\theta = \arctg Y/X$ (определение X и Y дано в задаче 8.6).

Радиус окружности текучести Мизеса равен $\sqrt{2/3}\sigma_Y$, так что по определению $X = \sqrt{2/3}\sigma_Y \cos \theta$, $Y = \sqrt{2/3}\sigma_Y \sin \theta$ на кривой текучести. Таблица коэффициентов преобразования осей координат, приведенная в задаче 8.6, вместе с равенствами $\sigma_I = s_I + \sigma_M$ и т. д. позволяет получить уравнения $s_I - s_{II} = -\sqrt{2}X = -(2/\sqrt{3})\sigma_Y \cos \theta$ и $s_I + s_{II} - 2s_{III} = -\sqrt{6}Y = -2\sigma_Y \sin \theta$. Известно также и уравнение Π -плоскости $s_I + s_{II} + s_{III} = 0$. Решая совместно

эти три уравнения, приходим к требуемым формулам, как может убедиться сам читатель.

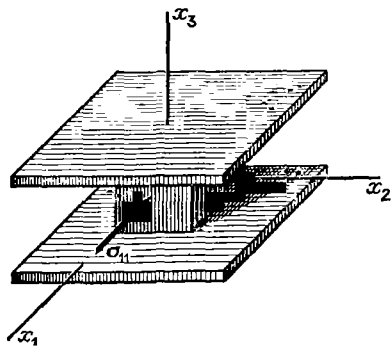


Рис. 8.20.

8.36. Упруго-идеально-пластический несжимаемый материал находится под нагрузкой в условиях плоской деформации между двумя жесткими пластинами, так что $\sigma_{22} = 0$ и $\epsilon_{33} = 0$ (рис. 8.20). Используя критерий Мизеса, определить напряжение σ_{11} в момент появления пластичности и соответствующую деформацию ϵ_{11} .

Соотношение, связывающее напряжение с деформацией в упругом состоянии

$$E\varepsilon_{33} = \sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}),$$

в данном случае сводится к уравнению $\sigma_{33} = \nu\sigma_{11}$. Тогда главные напряжения будут равны $\sigma_I = 0$, $\sigma_{II} = -\nu\sigma_{11}$, $\sigma_{III} = -\sigma_{11}$. По формуле (8.12) мы имеем

$$(\nu\sigma_{11})^2 + (\sigma_{11}(1-\nu))^2 + (-\sigma_{11})^2 = 2\sigma_Y^2,$$

отсюда находим $\sigma_{11} = -\sigma_Y/\sqrt{1-\nu-\nu^2}$ (сжатие) на пределе текучести. Аналогично из соотношения $E\varepsilon_{11} = \sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})$ мы видим, что на пределе текучести $\varepsilon_{11} = -\sigma_Y(1-\nu^2)/E\sqrt{1-\nu-\nu^2}$.

8.37. Балка прямоугольного сечения из упруго-идеально-пластического материала подвергается нагрузке, приводящей к чистому изгибу (рис. 8.21). Нагрузка возрастает до такого значения момента, что весь материал балки полностью переходит в пластическое состояние. Найти остаточное напряжение в балке после того, как изгибающий момент M снят.

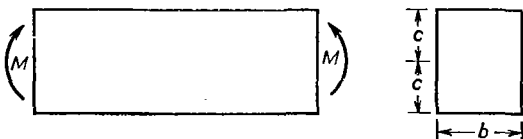


Рис. 8.21

Все сечение балки полностью оказывается в пластическом состоянии, когда момент достигает значения $M = bc^2\sigma_Y$ (см. задачу 8.23). При таком моменте упругое напряжение в крайних волокнах было бы равно $\sigma = Mc/I = 3\sigma_Y/2$, где $I = 2bc^3/3$ — момент инерции сечения балки относительно оси x_3 . Последующее снятие момента M эквивалентно приложению соответственно распределенных

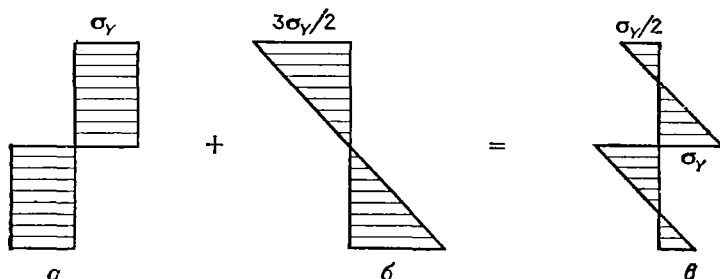


Рис. 8.22.

a — пластическое напряжение; b — отрицательное упругое напряжение; c — остаточное напряжение.

отрицательных упругих напряжений, что дает в результате остаточное напряжение, представленное на рис. 8.22.

8.38. Толстостенная цилиндрическая труба, размеры которой указаны на рис. 8.23, находится под действием внутреннего давления p_0 ; труба закрыта с концов. Найти значение p_0 , при котором впервые достигается предел текучести. Принять критерии текучести: а) Мизеса, б) Треска.

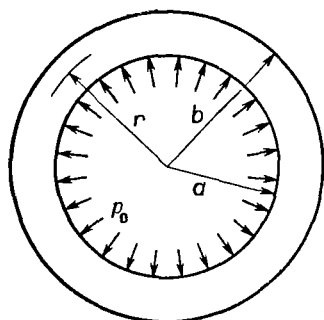


Рис. 8.23.

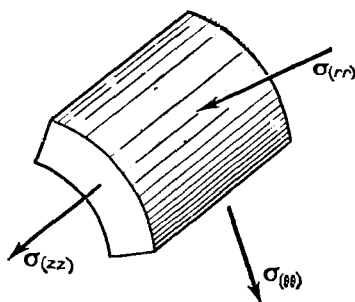


Рис. 8.24.

Компоненты напряжения в цилиндрических координатах (рис. 8.24) будут главными напряжениями. Анализ упругого состояния позволяет показать, что $\sigma_{(rr)} = -p_0 (b^2/r^2 - 1)/Q$, $\sigma_{(\theta\theta)} = p_0 (b^2/r^2 + 1)/Q$, $\sigma_{(zz)} = p_0/Q$, где $Q = (b^2/a^2 - 1)$.

а) В данном случае критерий Мизеса имеет вид

$$(\sigma_{(rr)} - \sigma_{(\theta\theta)})^2 + (\sigma_{(\theta\theta)} - \sigma_{(zz)})^2 + (\sigma_{(zz)} - \sigma_{(rr)})^2 = 2\sigma_Y^2,$$

или

$$p_0^2 b^4 / r^4 = Q^2 \sigma_Y^2 / 3.$$

Предел текучести впервые достигается при $r = a$ и $p_0 = (\sigma_Y / \sqrt{3}) (1 - a^2/b^2)$.

б) Критерий Треска сводится к равенству $\sigma_{(\theta\theta)} - \sigma_{(rr)} = \sigma_Y$, так как $\sigma_{(zz)} =$ промежуточное по величине из главных напряжений. Таким образом, $2p_0 b^2/r^2 = Q\sigma_Y$, и теперь предел текучести впервые достигается при $r = a$ и $p_0 = (\sigma_Y/2) (1 - a^2/b^2)$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

8.39. Дан закон одномерной зависимости напряжение — деформация $\sigma = K\varepsilon^n$, причем K и n — постоянные, а ε — истинная деформация. Доказать, что максимальная нагрузка имеет место при $\varepsilon = n$.

8.40. Решить еще раз задачу 8.4, записав критерии Мизеса и Треска через предел текучести при чистом сдвиге k , а не через σ_Y .

Ответ: Мизес: $(\sigma/(\sqrt{3}k))^2 + (\tau/k)^2 = 1$;

Треска: $(\sigma/(2k))^2 + (\tau/k)^2 = 1$.

8.41. Приняв условия задачи 8.6, удостовериться в правильности геометрического построения на рис. 8.5, в.

8.42. Используя определение параметра Лоде μ (см. задачу 8.3) и критерий Мизеса, доказать, что $\sigma_I - \sigma_{III} = 2\sigma_Y/\sqrt{3} + \mu^2$.

8.43. Доказать, что в Π -плоскости, где $\theta = \arctg Y/X$ (X и Y определены в задаче 8.6), выполняется формула $\mu = -\sqrt{3} \operatorname{tg} \theta$.

8.44. Доказать, что инварианты девиатора напряжений $\Pi_{\Sigma D} = s_{ij}s_{ij}/2$ и $\Pi_{\Sigma D} = s_{ij}s_{jk}s_{ki}/3$ можно представить соответственно в виде $\Pi_{\Sigma D} = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)/2$ и $\Pi_{\Sigma D} = (s_1^3 + s_2^3 + s_3^3)/3$.

8.45. Доказать, что критерий Мизеса можно записать в форме

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) = 6k^2.$$

8.46. Используя метод решения задачи 8.17, найти отношения приращений пластической деформации: а) для двусосного растяжения, когда $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_Y$; б) для растяжения с кручением, когда $\sigma_{11} = \sigma_Y/2$, $\sigma_{12} = \sigma_Y/2$.

Ответ: а) $d\epsilon_{11}^P = d\epsilon_{22}^P = -d\epsilon_{33}^P/2$;

$$б) d\epsilon_{11}^P/2 = -d\epsilon_{22}^P = -d\epsilon_{33}^P = d\epsilon_{12}^P/3.$$

8.47. Проверить следующие эквивалентные выражения для приращения эффективной пластической деформации $d\epsilon_{\text{эв}}^P$:

$$а) d\epsilon_{\text{эв}}^P = \sqrt{2/3} [(d\epsilon_{11}^P)^2 + (d\epsilon_{22}^P)^2 + (d\epsilon_{33}^P)^2 + 2(d\epsilon_{12}^P)^2 + 2(d\epsilon_{23}^P)^2 + 2(d\epsilon_{31}^P)^2]^{1/2},$$

$$б) d\epsilon_{\text{эв}}^P = (\sqrt{2}/3) [(d\epsilon_{11}^P - d\epsilon_{22}^P)^2 + (d\epsilon_{22}^P - d\epsilon_{33}^P)^2 + (d\epsilon_{33}^P - d\epsilon_{11}^P)^2 + 6(d\epsilon_{12}^P)^2 + 6(d\epsilon_{23}^P)^2 + 6(d\epsilon_{31}^P)^2]^{1/2}.$$

Обратите внимание на то, что в обоих случаях $d\epsilon_{\text{эв}}^P = d\epsilon_{11}^P$ при одноосном растяжении напряжением σ_{11} .

8.48. Тонкостенная труба из упруго-идеально-пластического материала подвергается нагрузке на растяжение и кручение. Первым прикладывается напряжение вдоль оси трубы $\sigma = \sigma_Y/2$, которое остается постоянным, в то время как касательное напряжение τ равномерно нарастает начиная от нуля. Основываясь на критерии Мизеса, найти, при каком значении τ начинается переход к пластическому состоянию.

Ответ: $\tau = \sigma_Y/2$.

8.49. Балка треугольного поперечного сечения, изображенная на рис. 8.25, подвергается нагрузке на чистый изгиб. Найти положение нейтральной оси бал-

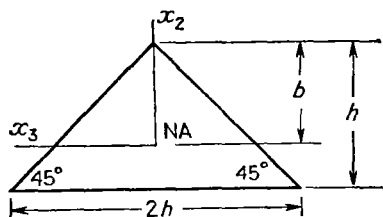


Рис. 8.25.

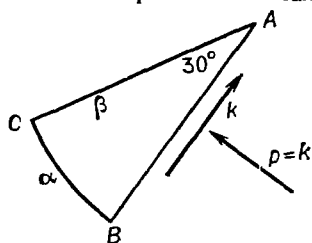


Рис. 8.26.

ки NA (ее расстояние b от вершины треугольника) в условиях, когда сечение целиком находится в пластическом состоянии.

Ответ: $b = h/\sqrt{2}$.

8.50. Показать, что тензор напряжений (8.41) имеет вид

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -p & k & 0 \\ k & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

в системе координат, повернутой вокруг x_3 на угол θ (рис. 8.8).

8.51. Линии скольжения образуют веерообразную область с углом раствора 30° ; α -линии — дуги окружностей, β -линии — радиусы (рис. 8.26). Давление на линии AB равно k . Найти давление на линии AC .

Ответ: $p = k(1 + \pi/3)$.

Линейная вязкоупругость

9.1. Вязкоупругое поведение материала

Упругие тела и вязкие жидкости существенно различаются своими свойствами при деформировании. Упругие деформируемые тела после снятия приложенных нагрузок возвращаются к своему естественному, или недеформированному, состоянию. В отличие от них несжимаемые вязкие жидкости совсем не имеют тенденции возвращаться после снятия нагрузки в исходное состояние. Кроме того, напряжения в упругом теле связаны непосредственно с деформациями, в то время как напряжения в вязкой жидкости зависят (за исключением гидростатической составляющей) от скоростей деформации.

Поведение материала, которое объединяет в себе оба эти свойства — и упругости, и вязкости, — называют *вязкоупругим*. Упругое тело и вязкая жидкость занимают крайние противоположные точки в широком спектре вязкоупругих сред. Хотя вязкоупругие материалы чувствительны к температуре, последующее изложение ограничивается условиями изотермии и температура входит в уравнения только как параметр.

9.2. Простейшие механические модели вязкоупругого поведения

Линейную вязкоупругость для одномерного состояния удобно трактовать при помощи механических моделей, которые наглядно демонстрируют поведение различных вязкоупругих материалов. Эти модели строятся из таких механических элементов, как линейно-упругая пружина с модулем упругости G (массой этой пружины пренебрегают) и вязкий элемент (демпфер) с коэффициентом вязкости η (вязкий элемент представляет собой поршень, движущийся в цилиндре с вязкой жидкостью). Как показано на рис. 9.1, сила σ , растягивающая пружину, связана с ее удлинением ϵ формулой

$$\sigma = G\epsilon. \quad (9.1)$$

Подобное же соотношение существует и для демпфера

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon}, \quad (9.2)$$

где $\dot{\epsilon} = d\epsilon/dt$. Можно придать большую общность этим моделям и устранить размерные эффекты, если в качестве σ рассматривать *напряжение*, а в качестве ϵ — *относительную деформацию*,

Модель Максвелла вязкоупругого тела является комбинацией пружины и вязкого элемента (демпфера), соединенных последовательно (рис. 9.2, а). Модель Кельвина или Фойхта представляет собой параллельное соединение тех же элементов (рис. 9.2, б)¹⁾. Соот-

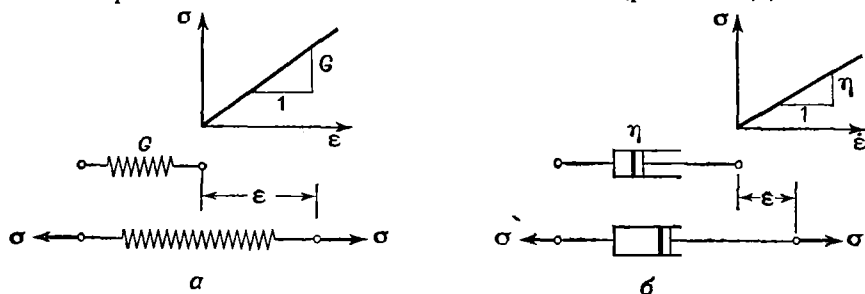


Рис. 9.1.

а — линейный упругий элемент; б — вязкий элемент.

ношение между напряжением и деформацией (фактически содержащее также и их скорости) для модели Максвелла дается формулой

$$\frac{\dot{\sigma}}{G} + \frac{\sigma}{\eta} = \dot{\epsilon}, \quad (9.3)$$

а для модели Кельвина формулой

$$\sigma = G\epsilon + \eta\dot{\epsilon}. \quad (9.4)$$

Эти уравнения являются по существу определяющими уравнениями вязкоупругости в одномерном случае. Полезно написать их в опе-

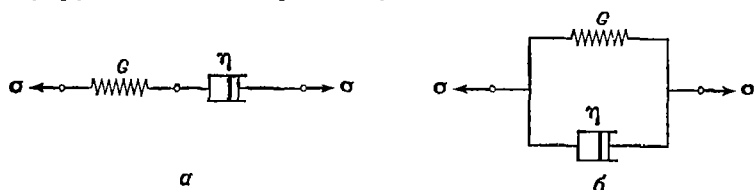


Рис. 9.2.

а — модель Максвелла; б — модель Кельвина.

раторной форме, используя линейный оператор дифференцирования по времени $\partial_t \equiv \partial/\partial t$. Тогда уравнение (9.3) будет иметь вид

$$\{\partial_t/G + 1/\eta\} \sigma = \{\partial_t\} \epsilon, \quad (9.5)$$

¹⁾ В дальнейшем, когда на основе моделей Максвелла и Кельвина будут строиться более сложные модели, для обозначения соответствующих «узлов» таких многопараметрических моделей будут употребляться термины «узел Максвелла» и «узел Кельвина». — Прим. ред.

а уравнение (9.4) примет форму

$$\sigma = \{G + \eta \partial_t\} \epsilon, \quad (9.6)$$

где соответствующие операторы выделены скобками.

Простые модели Максвелла и Кельвина не дают точного полного описания поведения реальных сред. Усложненные модели обладают большей гибкостью в отражении процессов в фактических материалах.

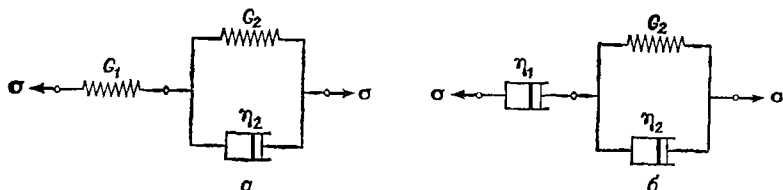


Рис. 9.3.

а — стандартное линейное твердое тело; б — трехпараметрическая модель вязкой жидкости.

лах. Так, существует трехпараметрическая модель, состоящая из двух упругих и одного вязкого элементов (рис. 9.3, а); она называется *стандартным линейным твердым телом*. Трехпараметрическая модель вязкой жидкости, состоящая из двух вязких и одного упругого элементов, представлена на рис. 9.3, б. Полезно заметить, что с точки зрения формы записи определяющих уравнений аналогом стандартного линейного твердого тела, соответствующего рис. 9.3, а, является узел Максвелла, параллельно соединенный с упругим элементом, а аналогом модели вязкой жидкости, изображенной на рис. 9.3, б, узел Максвелла, параллельно соединенный с вязким элементом.

Четырехпараметрическая модель, состоящая из двух упругих и двух вязких элементов, может рассматриваться как последовательно соединенные узел Максвелла и узел Кельвина (рис. 9.4).

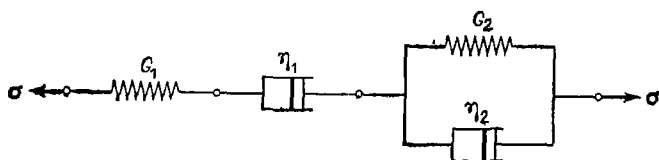


Рис. 9.4.

Существует несколько эквивалентных форм этой модели. Четырехпараметрическая модель способна описать все три основных типа поведения вязкоупругой среды. Так, она объединяет в себе *мгновенную упругую реакцию* (за счет свободного упругого элемента G_1), *вязкое течение* (за счет свободного вязкого элемента η_1) и, наконец, *запаздывающую упругую реакцию* (за счет узла Кельвина).

Соотношение между напряжением и деформацией для любой из трех- или четырехпараметрических моделей дается общей формулой

$$p_2 \ddot{\sigma} + p_1 \dot{\sigma} + p_0 \sigma = q_2 \ddot{\epsilon} + q_1 \dot{\epsilon} + q_0 \epsilon, \quad (9.7)$$

где величины p_i и q_i представляют собой комбинации коэффициентов G и η и зависят от способа соединения элементов в модели. В операторной форме соотношение (9.7) записывается так:

$$\{p_2 \partial_t^2 + p_1 \partial_t + p_0\} \sigma = \{q_2 \partial_t^2 + q_1 \partial_t + q_0\} \epsilon. \quad (9.8)$$

9.3. Обобщенные модели.

Линейное дифференциальное операторное уравнение

Обобщенная модель Кельвина состоит из совокупности ряда узлов Кельвина, соединенных последовательно, как показано на рис. 9.5. Полная деформация в такой модели равна сумме дефор-

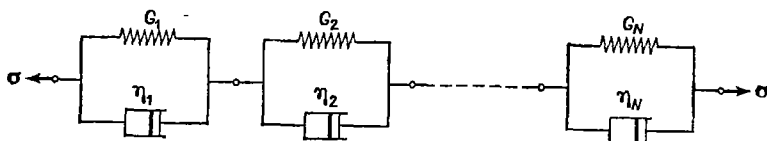


Рис. 9.5.

маций в отдельных узлах. Тогда в операторной форме определяющее уравнение в соответствии с (9.6) можно написать следующим образом:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{\{G_1 + \eta_1 \partial_t\}} + \frac{\sigma}{\{G_2 + \eta_2 \partial_t\}} + \dots + \frac{\sigma}{\{G_N + \eta_N \partial_t\}}. \quad (9.9)$$

Аналогично, набор узлов Максвелла, соединенных параллельно, как изображено на рис. 9.6, называется обобщенной моделью Макс-

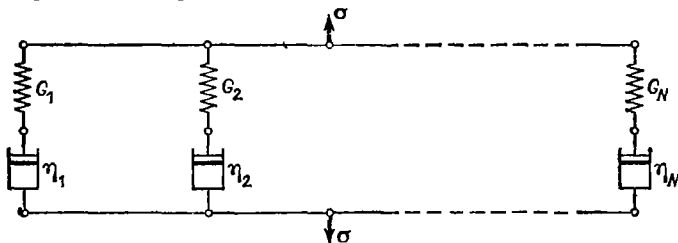


Рис. 9.6.

велла. В этом случае полное напряжение равно сумме напряжений в каждом узле, т. е. в соответствии с (9.5) можно написать

$$\sigma = \frac{\dot{\epsilon}}{\{\partial_t G_1 + 1/\eta_1\}} + \frac{\dot{\epsilon}}{\{\partial_t G_2 + 1/\eta_2\}} + \dots + \frac{\dot{\epsilon}}{\{\partial_t G_N + 1/\eta_N\}}. \quad (9.10)$$

Для обобщенных моделей соотношения (9.9) и (9.10) можно записать так:

$$p_0\sigma + p_1\dot{\sigma} + p_2\ddot{\sigma} + \dots = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} + q_2\ddot{\varepsilon} + \dots, \quad (9.11)$$

или более компактно так:

$$\sum_{i=0}^m p_i \frac{\partial^i \sigma}{\partial t^i} = \sum_{i=0}^n q_i \frac{\partial^i \varepsilon}{\partial t^i}. \quad (9.12)$$

Это линейное дифференциальное операторное уравнение можно записать символически

$$\{P\} \sigma = \{Q\} \varepsilon, \quad (9.13)$$

где операторы $\{P\}$ и $\{Q\}$ определены формулами

$$\{P\} = \sum_{i=0}^m p_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}, \quad \{Q\} = \sum_{i=0}^n q_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}. \quad (9.14)$$

9.4. Ползучесть и релаксация

Двумя основными экспериментами вязкоупругости являются испытания на *ползучесть* и *релаксацию*. Их можно выполнить как испытания на одномерное растяжение (сжатие) или на простой сдвиг. Эксперимент на *ползучесть* состоит в мгновенном приложении к образцу из вязкоупругого материала напряжения σ_0 , которое затем остается постоянным, и измерении деформации как функции времени (проявление ползучести). В экспериментах на *релаксацию* образец подвергается мгновенной деформации ε_0 , которая затем остается постоянной, в то время как проводятся измерения напряжения как функции времени (эффект релаксации). Математически процесс нагружения при ползучести и релаксации выражается *единичной ступенчатой функцией* $[U(t - t_1)]$, определенной следующим образом:

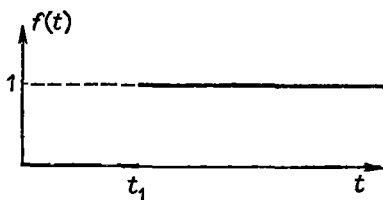


Рис. 9.7.

$$[U(t - t_1)] = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1, \\ 1 & \text{при } t \geq t_1 \end{cases} \quad (9.15)$$

и изображенной на рис. 9.7.

Нагружение в опыте на ползучесть представляется функцией

$$\sigma = \sigma_0 [U(t)], \quad (9.16)$$

причем $[U(t)]$ — единичная ступенчатая функция со скачком в момент $t_1 = 0$. Деформация ползучести для модели Кельвина определяется решением дифференциального уравнения

$$\dot{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\tau} = \frac{\sigma_0 [U(t)]}{\eta}, \quad (9.17)$$

которое получается при подстановке функции (9.16) в уравнение (9.4). Введенная здесь величина $\tau = \eta/G$ называется *временем запаздывания*. Можно показать, что для любой непрерывной функции времени $f(t)$ верно интегральное соотношение

$$\int_{-\infty}^t f(t') [U(t' - t_1)] dt' = [U(t - t_1)] \int_{t_1}^t f(t') dt', \quad (9.18)$$

где t' — переменная интегрирования. С помощью этого соотношения можно проинтегрировать уравнение (9.17) и найти изменение деформации со временем при ползучести для модели Кельвина

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G} (1 - e^{-t/\tau}) [U(t)]. \quad (9.19)$$

Закон нагружения в опытах на ползучесть вместе с соответствующей деформацией ползучести для моделей (материалов) Кельвина и Максвелла представлены на рис. 9.8.

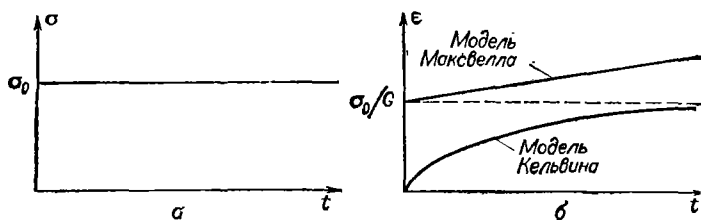


Рис. 9.8.

а — закон нагружения в опыте на ползучесть; б — деформация ползучести.

Релаксация напряжения, имеющая место в материале Максвелла после приложения деформации, меняющейся по закону

$$\epsilon = \epsilon_0 [U(t)], \quad (9.20)$$

дается решением дифференциального уравнения

$$\dot{\sigma} + \sigma/\tau = G\epsilon_0 [\delta(t)], \quad (9.21)$$

которое получено подстановкой производной по времени от функции (9.20) в уравнение (9.3). Здесь $[\delta(t)] = d[U(t)]/dt$ — функция, называемая *единичной импульсной функцией* или *дельта-функцией*

Дирака. По определению это такая функция, для которой

$$[\delta(t - t_1)] = 0, \quad t \neq t_1, \quad (9.22a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t - t_1)] dt = 1. \quad (9.22b)$$

Она равна нулю всюду, кроме $t = t_1$, где, как видно из определения, она должна иметь бесконечно большой пик. Можно показать, что для любой непрерывной функции $f(t)$ при $t > t_1$ выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^t f(t') [\delta(t' - t_1)] dt' = f(t_1) [U(t - t_1)], \quad (9.23)$$

с помощью которого можно проинтегрировать уравнение (9.21) и найти релаксацию напряжения для материала Максвелла

$$\sigma(t) = G\varepsilon_0 e^{-t/\tau} [U(t)]. \quad (9.24)$$

Релаксация напряжения для материала Кельвина получается непосредственной подстановкой $\dot{\varepsilon} = \varepsilon_0 [\delta(t)]$ в уравнение (9.4), откуда

$$\sigma(t) = G\varepsilon_0 [U(t)] + \eta\varepsilon_0 [\delta(t)]. \quad (9.25)$$

Наличие дельта-функции в уравнении (9.25) указывает на то, что потребовалось бы бесконечное напряжение, чтобы вызвать мгновенную конечную деформацию в материале Кельвина.

9.5. Функция ползучести. Функция релаксации.

Интегралы наследственности

Деформация ползучести любого материала (модели), вызванная нагрузкой специального вида $\sigma = \sigma_0 [U(t)]$, может быть записана в виде

$$\varepsilon(t) = \psi(t) \sigma_0. \quad (9.26)$$

Введенная таким образом функция $\psi(t)$ называется *функцией ползучести*. Например, для обобщенной модели Кельвина (рис. 9.5) функция ползучести определяется в соответствии с (9.19) формулой

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^N J_i (1 - e^{-t/\tau_i}) [U(t)], \quad (9.27)$$

где $J_i = 1/G_i$ называется *податливостью* материала. Если число узлов Кельвина неограниченно растет, так что $N \rightarrow \infty$ и конечную совокупность постоянных (τ_i, J_i) можно заменить непрерывной функцией податливости $J(\tau)$, то функция ползучести для модели

Кельвина принимает вид

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} J(\tau) (1 - e^{-t/\tau}) d\tau. \quad (9.28)$$

Функция $J(\tau)$ называется *функцией распределения времен запаздывания* или *спектром запаздывания*.

По аналогии с ползучестью релаксация напряжения для любой модели, подвергающейся деформации вида $\epsilon = \epsilon_0 [U(t)]$, может быть записана так:

$$\sigma(t) = \varphi(t) \epsilon_0; \quad (9.29)$$

$\varphi(t)$ называется *функцией релаксации*. Для обобщенной модели Максвелла (рис. 9.6) функция релаксации в соответствии с (9.24) определяется как

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^N G_i e^{-t/\tau_i} [U(t)]. \quad (9.30)$$

В этом случае при $N \rightarrow \infty$ дискретный набор постоянных (G_i, τ_i) заменяется функцией $G(\tau)$ и функция релаксации определяется выражением

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} G(\tau) e^{-t/\tau} d\tau. \quad (9.31)$$

Функция $G(\tau)$ называется *функцией распределения времен релаксации* или *спектром релаксации*.

В линейной вязкоупругости имеет место принцип суперпозиции, т. е. полный «эффект» от суммы «причин» равен сумме «эффектов» от каждой из «причин». В силу этого если к материалу, для

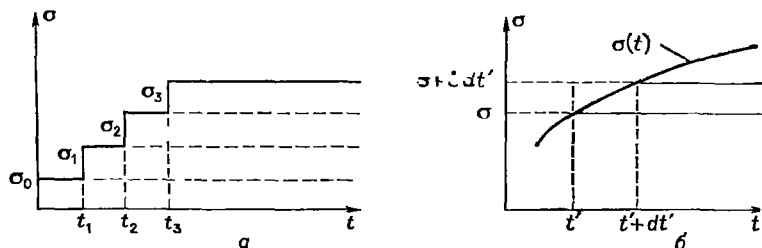


Рис. 9.9.

которого функция ползучести равна $\psi(t)$, прикладывается напряжение со ступенчатым изменением во времени, как показано на рис. 9.9, а, то деформация ползучести будет вычисляться

по формуле

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \sigma_0 \psi(t) + \sigma_1 \psi(t - t_1) + \sigma_2 \psi(t - t_2) + \sigma_3 \psi(t - t_3) = \\ &= \sum_{i=0}^3 \sigma_i \psi(t - t_i).\end{aligned}\quad (9.32)$$

Тогда произвольный закон изменения напряжения $\sigma = \sigma(t)$, представленный на рис. 9.9, б, можно рассматривать как функцию, состоящую из бесконечного числа ступенек, величина каждой из которых равна $d\sigma$. Соответствующая деформация ползучести по принципу суперпозиции дается интегралом

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \frac{d\sigma(t')}{dt'} \psi(t - t') dt'. \quad (9.33)$$

Такие интегралы часто называют *интегралами наследственности*, так как деформация в любой момент времени оказывается зависящей от всей истории изменения напряжений.

Для материала первоначально «мертвого», т. е. полностью свободного от напряжений и деформаций в нулевой момент времени, в формуле (9.33) можно заменить нулем нижний предел интеграла и представить деформацию ползучести в следующем виде:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{d\sigma(t')}{dt'} \psi(t - t') dt'. \quad (9.34)$$

Если закон нагружения, кроме того, содержит в себе еще разрыв в виде ступеньки величины σ_0 в момент $t = 0$, то выражение (9.34) обычно записывают следующим образом:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \psi(t) + \int_0^t \frac{d\sigma(t')}{dt'} \psi(t - t') dt'. \quad (9.35)$$

Проводя рассуждения, аналогичные тем, что были выше, по принципу суперпозиции можно представить напряжение как функцию времени интегралом, содержащим указанную историю деформации $\varepsilon(t)$ и функцию релаксации $\varphi(t)$. Подобно (9.33), напряжение дается выражением

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \varphi(t - t') dt'. \quad (9.36)$$

Для материала, у которого в момент $t = 0$ отсутствуют напряжения и деформации, интегралы, аналогичные тем, что были в (9.34) и

(9.35), соответственно будут равны

$$\sigma(t) = \int_0^t \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \varphi(t-t') dt' \quad (9.37)$$

и

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \varphi(t) + \int_0^t \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \varphi(t-t') dt'. \quad (9.38)$$

Поскольку для описания характерных вязкоупругих свойств данного материала могут быть использованы в равной мере как интеграл ползучести (9.34), так и интеграл релаксации (9.37), должно существовать некоторое соотношение между функцией ползучести $\psi(t)$ и функцией релаксации $\varphi(t)$. Такое соотношение в общем случае получить непросто, но, воспользовавшись преобразованием Лапласа, которое по определению дается интегралом

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad (9.39)$$

можно показать, что указанные преобразования $\bar{\psi}(s)$ и $\bar{\varphi}(s)$ функций $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ связаны равенством

$$\bar{\psi}(s) \bar{\varphi}(s) = 1/s^2, \quad (9.40)$$

где s — параметр преобразования.

9.6. Комплексные модули и податливости

Если образец из линейного вязкоупругого материала подвергается одномерному (растяжение или сдвиг) нагружению по закону $\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$, то в результате устанавливается деформированное со-

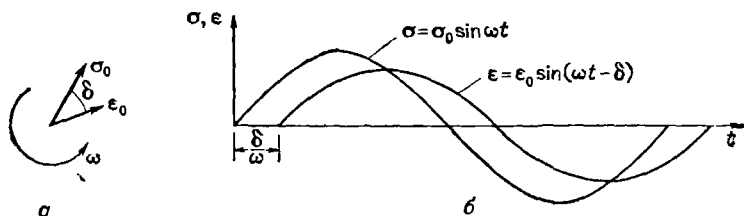


Рис. 9.10.

стояние $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \delta)$, т. е. деформация будет синусоидальной с той же частотой ω , что и напряжение, но по фазе отстанет от напряжения на угол запаздывания δ . В таком случае напряжение и деформацию можно графически представить вертикальными

проекциями векторов, имеющих постоянную длину и вращающихся с постоянной угловой скоростью ω , как показано на рис. 9.10.

Отношение амплитуд напряжения и деформации определяет *абсолютный динамический модуль* σ_0/ϵ_0 и *абсолютную динамическую податливость* ϵ_0/σ_0 . Кроме того, совпадающие и не совпадающие по фазе компоненты вращающихся векторов напряжения и деформации на рис. 9.10, а используются для определения следующих коэффициентов:

а) модуль накопления $G_1 = \frac{\sigma_0 \cos \delta}{\epsilon_0},$

б) модуль потерь $G_2 = \frac{\sigma_0 \sin \delta}{\epsilon_0},$

в) податливость накопления $J_1 = \frac{\epsilon_0 \cos \delta}{\sigma_0},$

г) податливость потерь $J_2 = \frac{\epsilon_0 \sin \delta}{\sigma_0}.$

Обобщение приведенного выше описания поведения вязкоупругого материала достигается представлением в комплексной форме как напряжения

$$\sigma^* = \sigma_0 e^{i\omega t}, \quad (9.41)$$

так и деформации

$$\epsilon^* = \epsilon_0 e^{i(\omega t - \delta)}. \quad (9.42)$$

При использовании представлений (9.41) и (9.42) вводится *комплексный модуль* $G^*(i\omega)$, по определению равный величине

$$\sigma^*/\epsilon^* = G^*(i\omega) = (\sigma_0/\epsilon_0) e^{i\delta} = G_1 + iG_2, \quad (9.43)$$

действительная часть которой равна модулю накопления, а мнимая часть — модулю потерь. Аналогично *комплексная податливость* определяется формулой

$$\begin{aligned} \epsilon^*/\sigma^* &= J^*(i\omega) = (\epsilon_0/\sigma_0) e^{-i\delta} = \\ &= J_1 - iJ_2, \end{aligned} \quad (9.44)$$

где действительная часть равна податливости накопления, а мнимая часть — взятой с обратным знаком податливости потерь. На рис. 9.11 приведены векторные диаграммы G^* и J^* (заметим, что по определению $G^* = 1/J^*$).

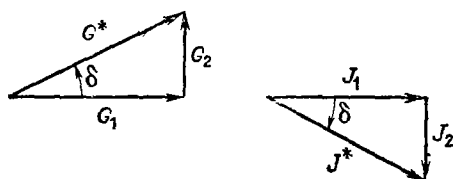


Рис. 9.11.

9.7. Трехмерная теория

При создании трехмерной теории линейной вязкоупругости обычно принято рассматривать отдельно вязкоупругое поведение в условиях так называемого чистого сдвига и чистого расширения. Таким образом, эффекты искажения формы и изменения величины объема изучаются независимо и затем их описания комбинируются, чтобы построить общую теорию. Математически это обеспечивается разложением тензоров напряжений и деформаций на их девиаторную и шаровую части, для каждой из которых затем пишутся определяющие соотношения вязкоупругости. Разложение тензора напряжений дано формулой (2.70)

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \delta_{ij}\sigma_{kk}/3, \quad (9.45)$$

а разложение тензора малых деформаций — формулой (3.98)

$$e_{ij} = e'_{ij} + \delta_{ij}e_{kk}/3. \quad (9.46)$$

Принимая обозначения, использованные в этих равенствах, запишем в операторной форме трехмерное обобщение определяющих уравнений вязкоупругости (9.13):

$$\{P\} s_{ij} = 2 \{Q\} e_{ij} \quad (9.47a)$$

и

$$\{M\} \sigma_{ii} = 3 \{N\} e_{ii}, \quad (9.47b)$$

где $\{P\}$, $\{Q\}$, $\{M\}$ и $\{N\}$ — дифференциальные операторы, определенные в соответствии с (9.14), а числовые множители введены для удобства. Так как практически все материалы упруго реагируют на умеренные гидростатические нагрузки, в качестве операторов $\{M\}$ и $\{N\}$, связанных с расширением, обычно берут постоянные и преобразуют соотношения (9.47) к виду

$$\{P\} s_{ij} = 2 \{Q\} e_{ij}, \quad (9.48a)$$

$$\sigma_{ii} = 3K e_{ii}, \quad (9.48b)$$

где K — объемный модуль упругости.

Следуя тому же общему правилу разделения эффектов искажения формы и изменения величины объема, напомним трехмерные определяющие соотношения вязкоупругости в форме *интегралов ползучести*

$$e_{ij} = \int_0^t \psi_s(t-t') \frac{\partial s_{ij}}{\partial t'} dt', \quad (9.49a)$$

$$e_{ii} = \int_0^t \psi_v(t-t') \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial t'} dt' \quad (9.49b)$$

и интегралов релаксации

$$s_{ij} = \int_0^t \varphi_s(t-t') \frac{\partial e_{ij}}{\partial t'} dt', \quad (9.50a)$$

$$\sigma_{ii} = \int_0^t \varphi_v(t-t') \frac{\partial e_{ii}}{\partial t'} dt'. \quad (9.50b)$$

Для того чтобы распространить на трехмерный случай описание вязкоупругого процесса при помощи комплексного модуля, требуется ввести комплексный объемный модуль K^* . Уравнения, раздельно написанные для чистого сдвига и для чистого расширения, таковы:

$$\dot{s}_{ij} = 2G^*(i\omega) \dot{e}_{ij} = 2(G_1 + iG_2) \dot{e}_{ij}, \quad (9.51a)$$

$$\dot{\sigma}_{ii} = 3K^*(i\omega) \dot{e}_{ii} = 3(K_1 + iK_2) \dot{e}_{ii}. \quad (9.51b)$$

9.8. Анализ вязкоупругого напряженного состояния.

Принцип соответствия

Задача исследования напряженного состояния в некотором изотропном вязкоупругом теле, которое занимает объем V и ограничено поверхностью S (рис. 9.12), ставится следующим образом. Пусть заданы массовые силы b_i , действующие внутри V , и пусть на части S_1 границы тела известны внешние поверхностные силы

$\hat{t}_i^{(n)}(x_k, t)$, а на части S_2 поверхности тела — смещения поверхности $g_i(x_k, t)$. Тогда система, дающая постановку задачи, состоит из следующих соотношений:

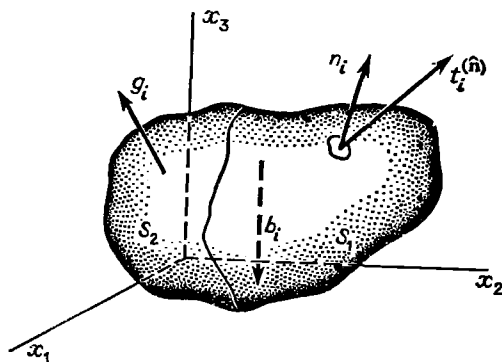


Рис. 9.12.

- 1) уравнения движения (или равновесия)

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i; \quad (9.52)$$

- 2) соотношения, выражающие деформации через перемещения

$$2\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (9.53)$$

или скорости деформации через скорости

$$2\dot{\epsilon}_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i}); \quad (9.54)$$

3) граничные условия

$$\sigma_{ij}(x_k, t) n_i(x_k) = \hat{t}_i^{(n)}(x_k, t) \text{ на } S_1, \quad (9.55)$$

$$u_i(x_k, t) = g_i(x_k, t) \text{ на } S_2; \quad (9.56)$$

4) начальные условия

$$u_i(x_k, 0) = u_0, \quad (9.57)$$

$$v_i(x_k, 0) = v_0; \quad (9.58)$$

5) определяющие уравнения, записанные в одном из следующих видов:

а) через линейные дифференциальные операторы, т. е. в форме (9.48),

б) через интеграл наследственности, т. е. в форме (9.49) или (9.50);

в) через комплексный модуль, т. е. в форме (9.51).

Если форма тела и условия нагружения достаточно просты и если поведение материала может быть представлено одной из простейших моделей, то приведенную выше систему уравнений можно проинтегрировать непосредственно (см. задачу 9.22). Однако для более общих условий обычно принято искать решение, пользуясь *принципом соответствия упругой и вязкоупругой задач*. Этот принцип основывается на том, что система основных уравнений теории упругости и преобразования Лапласа по времени вышеприведенной системы основных уравнений теории вязкоупругости записываются одинаково. Соответствующие уравнения для квазистатических изотермических задач, в которых черточки означают преобразования Лапласа по времени, например

$$\bar{f}(x_k, s) = \int_0^\infty f(x_k, t) e^{-st} dt, \quad (9.59)$$

сопоставлены в следующей таблице:

Уравнения теории
упругости

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

$$2\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\sigma_{ij} n_j = \hat{t}_i^{(n)} \text{ на } S_1$$

$$u_i = g_i \text{ на } S_2$$

$$\epsilon_{ij} = 2Ge_{ij}$$

$$\sigma_{ii} = 3K\epsilon_{ii}$$

Преобразования уравнений
теории вязкоупругости

$$\bar{\sigma}_{ij,j} + \bar{b}_i = 0$$

$$2\bar{\epsilon}_{ij} = (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})$$

$$\bar{\sigma}_{ij} \bar{n}_j = \hat{t}_i^{(n)} \text{ на } S_1$$

$$\bar{u}_i = \bar{g}_i \text{ на } S_2$$

$$\bar{P}(s) \bar{\epsilon}_{ij} = 2\bar{Q}(s) \bar{e}_{ij}$$

$$\bar{\sigma}_{ii} = 3K\bar{\epsilon}_{ii}$$

Из этой таблицы видно, что если G в уравнениях теории упругости заменить на $\bar{Q}/\bar{P}$, то обе группы уравнений будут иметь одинаковую форму. В силу этого, если в решении соответствующей задачи теории упругости G заменить на $\bar{Q}/\bar{P}$ для вязкоупругого материала, то полученный результат будет преобразованием Лапласа решения задачи теории вязкоупругости. Обратным преобразованием найдем само решение для вязкоупругого материала.

Этот принцип соответствия может быть установлен и для задач, отличных от квазистатических. Более того, определяющие уравнения не обязательно записывать через линейные дифференциальные операторы, а можно брать в виде (9.49), (9.50) или (9.51). В предлагаемых далее конкретных задачах каждый раз будет указываться форма, в которой следует использовать этот принцип.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Простейшие механические модели вязкоупругого поведения (§9.1—9.3)

9.1. Проверить правильность соотношений между напряжениями и деформациями, данных формулами (9.3) и (9.4) для моделей Максвелла и Кельвина соответственно.

В модели Максвелла (рис. 9.2, а) полная деформация равна сумме деформации пружины и перемещения поршня в вязком элементе. Таким образом, $\epsilon = \epsilon_S + \epsilon_D$, а также $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_S + \dot{\epsilon}_D$. Так как напряжение в каждом элементе равно σ , формулы (9.1) и (9.2) позволяют найти $\dot{\epsilon} = \dot{\sigma}/G + \sigma/\eta$.

В модели Кельвина (рис. 9.2, б) $\sigma = \sigma_S + \sigma_D$ и непосредственно из формул (9.1) и (9.2) получаем $\sigma = \eta\dot{\epsilon} + G\epsilon$.

9.2. Использовать операторную форму соотношения между напряжением и деформацией для модели Кельвина и получить закон, связывающий напряжение и деформацию в стандартном линейном твердом теле (рис. 9.3, а).

В указанной модели полная деформация равна сумме деформаций упругого элемента и элемента Кельвина, т. е. $\epsilon = \epsilon_S + \epsilon_K$, или в операторной форме $\epsilon = \sigma/G_1 + \sigma/(G_2 + \eta_2\partial_t)$. Отсюда находим

$$G_1 \{G_2 + \eta_2\partial_t\} \epsilon = \{G_2 + \eta_2\partial_t\} \sigma + G_1\sigma$$

и, следовательно,

$$G_1G_2\epsilon + G_1\eta_2\dot{\epsilon} = (G_1 + G_2)\sigma + \eta_2\dot{\sigma}.$$

9.3. Написать соотношение, связывающее напряжения и деформации в четырехпараметрической модели (рис. 9.4). При $\eta_1 \rightarrow \infty$ сравнить с результатом задачи 9.2.

Для указанной модели полная деформация вычисляется как сумма $\varepsilon = \varepsilon_K + \varepsilon_M$, или в операторной форме как

$$\varepsilon = \sigma / \{G_2 + \eta_2 \partial_t\} + \{\partial_t + 1/\tau_1\} \sigma / G_1 \{ \partial_t \}.$$

Распишем операторы и сгруппируем члены:

$$\ddot{\sigma} + (G_1 \eta_1 + (G_1 + G_2)/\eta_2) \dot{\sigma} + G_1 G_2 \sigma / (\eta_1 \eta_2) = G_1 \ddot{\varepsilon} + G_1 G_2 \dot{\varepsilon} / \eta_2.$$

При $\eta_1 \rightarrow \infty$ это соотношение принимает вид $\ddot{\sigma} + (G_1 + G_2) \dot{\sigma} / \eta_2 = G_1 \ddot{\varepsilon} + G_1 G_2 \dot{\varepsilon} / \eta_2$, что эквивалентно результату, полученному в задаче 9.2.

9.4. Рассматривая модель, изображенную на рис. 9.13, как частный случай обобщенной модели Максвелла, найти для нее соотношение между напряжениями и деформациями.

Равенство (9.10) при $N = 2$ дает

$$\sigma = \frac{G_1 \dot{\varepsilon}}{\{\partial_t + 1/\tau_1\}} + \frac{G_2 \dot{\varepsilon}}{\{\partial_t + 1/\tau_2\}}.$$

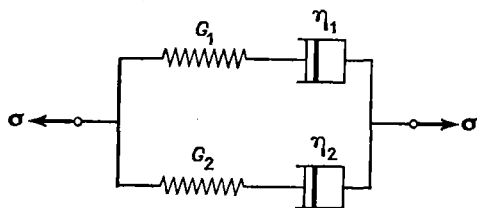


Рис. 9.13.

Выполняя указанные действия, получаем

$$\{\partial_t + 1/\tau_2\} (\dot{\sigma} + \sigma/\tau_1) = G_1 \{\partial_t + 1/\tau_2\} \dot{\varepsilon} + G_2 \{\partial_t + 1/\tau_1\} \dot{\varepsilon}.$$

Раскроем операторы и перегруппируем члены; это дает

$$\ddot{\sigma} + (\tau_1 + \tau_2) \dot{\sigma} / \tau_1 \tau_2 + \sigma / \tau_1 \tau_2 = (G_1 + G_2) \ddot{\varepsilon} + (G_1/\tau_2 + G_2/\tau_1) \dot{\varepsilon}.$$

9.5. Модель, изображенную на рис. 9.14, можно считать вырожденным случаем обобщенной модели Максвелла ($N = 3$) при $G_1 = \eta_2 = \infty$. Используя такие значения коэффициентов в уравнении (9.10), написать соотношение между напряжениями и деформациями для этой модели.

В данном случае уравнение (9.10) принимает вид

$$\sigma = \eta_1 \dot{\varepsilon} + \frac{G_2 \dot{\varepsilon}}{\{\partial_t\}} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\{\partial_t/G_3 + 1/\eta_3\}},$$

или

$$\{\partial_t/G_3 + 1/\eta_3\} \dot{\sigma} = \{\partial_t/G_3 + 1/\eta_3\} (\eta_1 \ddot{\varepsilon} + G_2 \dot{\varepsilon}) + \ddot{\varepsilon}.$$

Выполняя действия, указанные операторами, получаем

$$\ddot{\sigma} / G_3 + \dot{\sigma} / \eta_3 = \eta_1 \ddot{\varepsilon} / G_3 + (1 + G_2/G_3 + \eta_1/\eta_3) \ddot{\varepsilon} + G_2/\eta_3 \dot{\varepsilon},$$

что после интегрирования можно записать в форме

$$\eta_3 \dot{\sigma} + G_3 \sigma = \eta_1 \eta_3 \ddot{\varepsilon} + (G_2 \eta_3 + G_3 \eta_1 + G_3 \eta_3) \dot{\varepsilon} + G_2 G_3 \varepsilon.$$

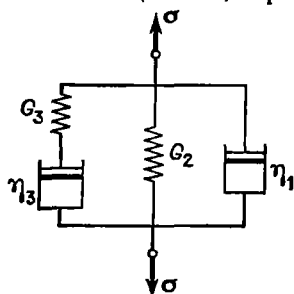


Рис. 9.14.

Ползучесть и релаксация (§ 9.4)

9.6. Найти выражения для характеристик ползучести в моделях Кельвина и Максвелла непосредственным интегрированием уравнений (9.17) и (9.21) соответственно.

Пользуясь интегрирующим множителем $e^{t'/\tau}$, из уравнения (9.17) находим

$$\epsilon e^{t'/\tau} = \frac{\sigma_0}{\eta} \int_0^t e^{t'/\tau} [U(t')] dt',$$

а применяя формулу (9.18), имеем

$$\epsilon e^{t'/\tau} = (\sigma_0 [U(t)]/\eta) [\tau e^{t'/\tau}]_0^t = (\sigma_0/G) (e^{t'/\tau} - 1) [U(t)],$$

$$\text{или } \epsilon = (\sigma_0/G) (1 - e^{-t/\tau}) [U(t)].$$

Возьмем $e^{t'/\tau}$ в качестве интегрирующего множителя в (9.21); тогда

$$\sigma e^{t'/\tau} = G \epsilon_0 \int_0^t e^{t'/\tau} [\delta(t')] dt',$$

и по формуле (9.23) получим

$$\sigma e^{t/\tau} = G \epsilon_0 [U(t)], \quad \text{или} \quad \sigma = G \epsilon_0 e^{-t/\tau} [U(t)].$$

9.7. Найти деформацию ползучести для стандартного линейного твердого тела (рис. 9.3,а).

В силу того что $\epsilon = \epsilon_S + \epsilon_K$, деформация ползучести для данной модели, согласно (9.1) и (9.19), вычисляется по формуле

$$\epsilon(t) = [1/G_1 + (1/G_2)(1 - e^{-t/\tau_2})] \sigma_0 [U(t)].$$

Тот же результат можно получить, положив $\eta_2 = \infty$ в обобщенной модели Кельвина (при $N = 2$), где деформация равна $\epsilon = \sum_{i=1}^2 J_i (1 - e^{-t/\tau_i}) \sigma_0 [U(t)]$, или непосредственным интегрированием закона, связывающего напряжения и деформации для стандартного твердого тела. Читателю предлагается провести соответствующие выкладки.

9.8. Эксперимент по исследованию обратной ползучести состоит из нагружения, как в опыте на ползучесть: $\sigma = \sigma_0$ сохраняется некоторый период времени, а затем мгновенно снимается. Найти кривую деформации обратной ползучести для стандартного твердого тела (рис. 9.3,а) при законе нагружения, изображенном на рис. 9.15.

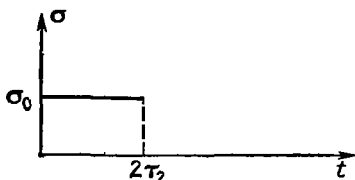


Рис. 9.15.

Пока приложена нагрузка (т. е. при $t < 2\tau_2$), как найдено в задаче 9.7, деформация

$$\epsilon = \sigma_0 [1/G_1 + (1/G_2)(1 - e^{-t/\tau_2})].$$

В момент $t = 2\tau_2$ нагрузка снимается, σ обращается в нуль и одновременно восстанавливается упругая деформация σ_0/G_1 . При $t > 2\tau_2$ изменение деформации

описывается уравнением $\dot{\epsilon} + \epsilon/\tau_2 = 0$, которое отражает закон связи между напряжением и деформацией для указанной модели при $\sigma = 0$ (см. задачу 9.2). Решение этого дифференциального уравнения есть $\epsilon = Ce^{-T/\tau_2}$, где C — постоянная, а $T = t - 2\tau_2$. При $T = 0$ мы имеем $\epsilon = C = \sigma_0(1 - e^{-2})/G_2$, следовательно,

$$\epsilon = \sigma_0(1 - e^{-2})e^{-T/\tau_2}/G_2 = \sigma_0(e^2 - 1)e^{-t/\tau_2}/G_2 \quad \text{при } t > 2\tau_2.$$

9.9. Модель, изображенная на рис. 9.16, растягивается с постоянной скоростью $\dot{\epsilon} = e_0/t_1$, как показано на рис. 9.17. Найти

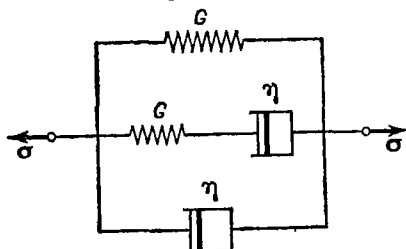


Рис. 9.16.

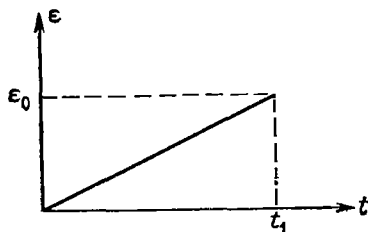


Рис. 9.17.

напряжение в такой модели при указанном процессе деформирования.

По результатам задачи 9.5 зависимость между напряжением и деформацией в такой модели будет описываться уравнением $\dot{\sigma} + \sigma/\tau = \eta\dot{\epsilon} + 3G\dot{\epsilon} + G\epsilon/\tau$, а для нашего случая уравнением $\dot{\sigma} + \sigma/\tau = 3Ge_0/t_1 + Ge_0 t/t_1$. Пронтегрируем его и найдем $\sigma = e_0(2\eta + Gt)/t_1 + Ce^{-t/\tau}$, где C — постоянная интегрирования. При $t = 0$ $\sigma = \eta e_0/t_1$ и, следовательно, $C = -\eta e_0/t_1$. Таким образом, $\sigma = e_0(2\eta + Gt - \eta e^{-t/\tau})/t_1$. Заметим, что тот же результат получается при интегрировании уравнения другим способом:

$$\sigma e^{t/\tau} = \frac{e_0}{t_1} \int_0^t 3Ge^{t'/\tau} dt' + \frac{e_0}{t_1} \int_0^t \frac{Gt'e^{t'/\tau}}{\tau} dt' + \frac{\eta e_0}{t_1}.$$

9.10. Непосредственным интегрированием найти закон, связывающий напряжение и деформацию для стандартного линейного твердого тела в процессе релаксации напряжения, если деформация задана законом $\epsilon = e_0[U(t)]$.

Запишем соотношение между напряжением и деформацией (см. задачу 9.2) для данного случая в виде

$$\dot{\sigma} + (G_1 + G_2)\sigma/\eta_2 = e_0G([\delta(t)] + G_1G_2[U(t)]/\eta_2).$$

Если воспользоваться интегрирующим множителем $e^{(G_1+G_2)t/\eta_2}$, то

$$\sigma e^{(G_1+G_2)t/\eta_2} = e_0G_1 \int_0^t [\delta(t')]e^{(G_1+G_2)t'/\eta_2} dt' + \frac{e_0G_1G_2}{\eta_2} \int_0^t [U(t')]e^{(G_1+G_2)t'/\eta_2} dt'.$$

Вычисляя интегралы с помощью формул (9.18) и (9.23), находим

$$\sigma = e_0G_1(G_2 + G_1e^{-(G_1+G_2)t/\eta_2})[U(t)]/(G_1 + G_2).$$

Функции ползучести и релаксации. Интегралы наследственности (§ 9.5)

9.11. Найти функцию релаксации $\varphi(t)$ для трехпараметрической модели, изображенной на рис. 9.18.

Соотношение между напряжением и деформацией для указанной модели таково:

$$\dot{\sigma} + \sigma/\tau_2 = (G_1 + G_2) \dot{\epsilon} + G_1 G_2 \epsilon / \eta_2.$$

Тогда при $\epsilon = \epsilon_0 [U(t)]$ и $\dot{\epsilon} = \epsilon_0 [\delta(t)]$ с помощью интегрирующего множителя e^{t/τ_2} можем написать

$$\begin{aligned} \sigma e^{t/\tau_2} &= \epsilon_0 (G_1 + G_2) \int_0^t e^{t'/\tau_2} [\delta(t')] dt' + \\ &+ \frac{\epsilon_0 G_1 G_2}{\eta_2} \int_0^t e^{t'/\tau_2} [U(t')] dt'. \end{aligned}$$

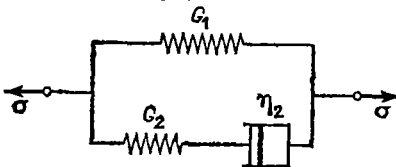


Рис. 9.18.

Затем, пользуясь формулами (9.18) и (9.23), находим $\sigma = \epsilon_0 (G_1 + G_2 e^{-t/\tau_2}) = \epsilon_0 \varphi(t)$. Заметим, что этот результат можно получить также, положив $\eta_1 \rightarrow \infty$ в формуле (9.30) для обобщенной модели Максвелла.

9.12. Используя функцию релаксации $\varphi(t)$ для модели, предложенной в задаче 9.11, найти функцию ползучести по формуле 9.40.

Преобразованием Лапласа функции $\varphi(t) = G_1 + G_2 e^{-t/\tau_2}$ будет $\bar{\varphi}(s) = G_1/s + G_2/(s + 1/\tau_2)$ (см. любую таблицу преобразований Лапласа). Тогда по формуле 9.40 находим

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(s) &= (s + 1/\tau_2) / [G_1 s (s + 1/\tau_2) + G_2 s^2] = \\ &= 1/(G_1 s) - [G_2/G_1 (G_1 + G_2)] / (s + G_1/(G_1 + G_2) \tau_2). \end{aligned}$$

Пользуясь таблицей преобразований Лапласа, легко обратить это выражение и получить

$$\psi = 1/G_1 - [G_2/G_1 (G_1 + G_2)] e^{-G_1 t / (G_1 + G_2) \tau_2}.$$

Данный результат можно проверить интегрированием соотношения между напряжением и деформацией для указанной модели при законе нагружения, таком, как в опытах на ползучесть.

9.13. К материалу Кельвина приложено напряжение, которое линейно растет со временем, а затем долгое время сохраняет постоянную величину σ_1 (рис. 9.19). Вычислить вызванную им деформацию, полагая при этом $\sigma_1/\tau_1 = \lambda$.

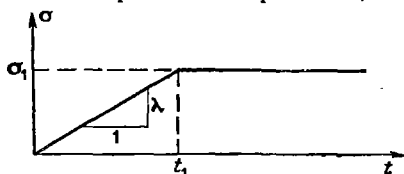


Рис. 9.19.

Закон изменения напряжения можно записать так:

$$\sigma = \lambda t [U(t)] - \lambda (t - t_1) [U(t - t_1)].$$

Подставляя его в уравнение (9.4), получаем

$$\varepsilon e^{t/\tau} = \frac{\lambda}{\eta} \left\{ \int_0^t t' e^{t'/\tau} [U(t')] dt' - \int_{t_1}^t (t' - t_1) e^{t'/\tau} [U(t' - t_1)] dt' \right\}.$$

Интегрируя с помощью (9.18), находим

$$\varepsilon = (\lambda/G) \{ (t + \tau(e^{-t/\tau} - 1)) [U(t)] - ((t - t_1) + \tau(e^{-(t-t_1)/\tau} - 1)) [U(t - t_1)] \}.$$

При $t \rightarrow \infty$ это выражение сводится к виду $\varepsilon = \lambda t_1 / G = \sigma_1 / G$.

9.14. Воспользовавшись интегралом ползучести (9.34) и функцией ползучести для модели Кельвина, проверить результат задачи 9.13.

Для модели Кельвина $\psi(t) = (1 - e^{-t/\tau})/G$ и формула (9.34) приводит к выражению

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\lambda}{G} \{ [U(t')] + t' [\delta(t')] - [U(t' - t_1)] - (t' - t_1) [\delta(t' - t_1)] \} (1 - e^{-(t-t')/\tau}) dt',$$

которое с помощью (9.18) и (9.23) сводится к следующему:

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{G} \left\{ [U(t)] \int_0^t (1 - e^{-(t-t')/\tau}) dt' - [U(t - t_1)] \int_{t_1}^t (1 - e^{-(t-t')/\tau}) dt' \right\}.$$

Непосредственное вычисление этих интегралов подтверждает результат, полученный в задаче 9.13.

9.15. Применяя принцип суперпозиции, найти реакцию материала Кельвина на закон нагружения, изображенный на рис. 9.20.

Указанное изменение нагрузки можно представить в виде последовательности нагружений, заданных наклонными прямыми в плоскости σ - t как показано

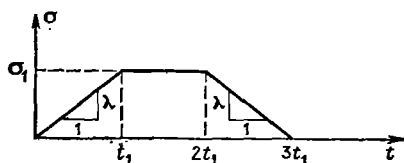


Рис. 9.20.

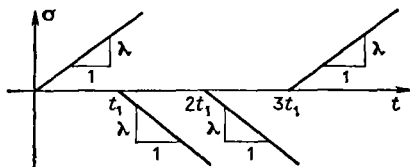


Рис. 9.21.

на рис. 9.21. В задаче 9.13 было найдено, что для нагружения такого типа деформация вычисляется по формуле $\varepsilon = (\lambda/G) [t + \tau(e^{-t/\tau} - 1)] [U(t)]$; поэтому в нашем случае она будет равна

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = (\lambda/G) \{ & (t + \tau(e^{-t/\tau} - 1)) [U(t)] - ((t - t_1) + \\ & + \tau(e^{-(t-t_1)/\tau} - 1)) [U(t - t_1)] - ((t - 2t_1) + \\ & + \tau(e^{-(t-2t_1)/\tau} - 1)) [U(t - 2t_1)] + ((t - 3t_1) + \\ & + \tau(e^{-(t-3t_1)/\tau} - 1)) [U(t - 3t_1)] \}, \end{aligned}$$

Заметим, что $\varepsilon \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Комплексные модули и податливости (§ 9.6)

9.16. Найти комплексный модуль G^* и угол запаздывания δ для модели Максвелла (рис. 9.2).

Запишем формулу (9.3) в виде $\dot{\sigma} + \sigma/\tau = G\dot{e}$ и подставим в нее выражения (9.41) и (9.42). Получим $i\omega\sigma_0 e^{i\omega t} + \sigma_0 e^{i\omega t}/\tau = Gi\omega e_0 e^{i(\omega t - \delta)}$, откуда $\sigma_0 e^{i\delta}/e_0 = = G^* = Gi\omega\tau/(1 + i\omega\tau)$, или в стандартной форме

$$G^* = \frac{G(\omega^2\tau^2 + i\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2}.$$

Из чертежа на рис. 9.11 находим $\operatorname{tg} \delta = G_2/G_1 = G\omega\tau/G\omega^2\tau^2 = 1/\omega\tau$.

9.17. Показать, что результат задачи 9.16 можно получить также непосредственно из определения $\sigma/e = G^*$ простой заменой оператора ∂_t на $i\omega$ в уравнении (9.5).

После предложенной замены уравнение (9.5) примет вид $(i\omega/G + 1/\eta)\sigma = = i\omega e$, откуда находим

$$\sigma/e = \frac{Gi\omega}{i\omega + 1/\tau} = \frac{Gi\omega\tau}{1 + i\omega\tau},$$

как и прежде.

9.18. На частном примере уравнения (9.10) для обобщенной модели Максвелла показать справедливость правила, утверждающего, что при параллельном соединении моделей их комплексные модули складываются.

В задаче 9.17 для комплексного модуля модели Максвелла получено выражение $G^* = \sigma/e = Gi\omega\tau/(1 + i\omega\tau)$. Уравнение (9.10) можно записать в виде

$$\sigma = \frac{G_1 \{\partial_t\} e}{\{\partial_t + 1/\tau_1\}} + \frac{G_2 \{\partial_t\} e}{\{\partial_t + 1/\tau_2\}} + \dots + \frac{G_N \{\partial_t\} e}{\{\partial_t + 1/\tau_N\}}.$$

Тогда комплексный модуль обобщенной модели Максвелла будет равен

$$G^* = \frac{G_1 i\omega\tau_1}{1 + i\omega\tau_1} + \frac{G_2 i\omega\tau_2}{1 + i\omega\tau_2} + \dots + \frac{G_N i\omega\tau_N}{1 + i\omega\tau_N} = G_1^* + G_2^* + \dots + G_N^*.$$

9.19. Проверить соотношение $J_1 = 1/[G_1(1 + \operatorname{tg}^2 \delta)]$ между модулем накопления и податливостью накопления.

Согласно формулам (9.43) и (9.44), имеем $J^* = 1/G^*$, следовательно, $J_1 - - iJ_2 = 1/(G_1 + iG_2) = (G_1 - iG_2)/(G_1^2 + G_2^2)$, т. е.

$$J_1 = \frac{G_1}{G_1^2 + G_2^2} = \frac{1}{G_1(1 + (G_2/G_1)^2)} = \frac{1}{G_1(1 + \operatorname{tg}^2 \delta)}.$$

9.20. Для циклического нагружения (рис. 9.10) вычислением интеграла $\int \sigma d\epsilon$ по одному циклу показать, что диссипация энергии за один цикл прямо пропорциональна податливости потерь J_2 .

Для векторов напряжения и деформации, изображенных на рис. 9.10, вычисление интеграла $\int \sigma d\epsilon$ за цикл дает

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/\omega} \sigma \frac{d\epsilon}{dt} dt &= \int_0^{2\pi/\omega} (\sigma_0 \sin \omega t) \epsilon_0 \omega \cos (\omega t - \delta) dt = \\ &= \sigma_0 \epsilon_0 \omega \int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t (\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta) dt = \\ &= \sigma_0^2 \omega \left[J_1 \int_0^{2\pi/\omega} \frac{\sin 2\omega t}{2} dt + J_2 \int_0^{2\pi/\omega} (\sin^2 \omega t) dt \right] = \sigma_0^2 \pi J_2. \end{aligned}$$

Трехмерная теория вязкоупругости.

Анализ напряженного состояния (§ 9.7—9.8)

9.21. Комбинируя соотношения (9.48а) и (9.48б), получить определяющее уравнение $\sigma_{ij} = \delta_{ij} \{R\} \epsilon_{kk} + \{S\} \epsilon_{ij}$ и найти вид операторов $\{R\}$ и $\{S\}$.

Запишем (9.48а) в форме $\{P\} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_{kk}/3) = 2 \{Q\} (\epsilon_{ij} - \delta_{ij} \epsilon_{kk}/3)$ и заменим σ_{kk} в этом выражении правой частью равенства (9.48б). После некоторых простых операций получим

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \{ (3KP - 2Q)/3P \} \epsilon_{kk} + \{ 2Q/P \} \epsilon_{ij}.$$

9.22. Брус из материала Кельвина находится в состоянии одноосного растяжения, так что $\sigma_{11} = \sigma_0 [U(t)]$, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$, причем σ_0 постоянно. Найти деформацию ϵ_{11} при таком законе нагружения.

Из равенства (9.48б) для данного случая имеем $3\epsilon_{ii} = \sigma_0 [U(t)]/K$, а уравнение (9.48а) при $i = j = 1$ дает $\{P\} (\sigma_{11} - \sigma_{11}/3) = \{2Q\} (\epsilon_{11} - \epsilon_{kk}/3)$. Но соотношение (9.6) показывает, что для материала Кельвина $\{P\} = 1$ и $\{Q\} = \{G + \eta \partial_t\}$; поэтому в нашей задаче

$$2\sigma_0 [U(t)]/3 = 2\{G + \eta \partial_t\} (\epsilon_{11} - \sigma_0 [U(t)]/9K),$$

или

$$\dot{\epsilon}_{11} + \epsilon_{11}/\tau = \sigma_0 [U(t)] (3K + G)/9\eta K + \sigma_0 [\delta(t)]/9K.$$

Решая это дифференциальное уравнение, получаем

$$\epsilon_{11} = \sigma_0 (3K + G) (1 - e^{-t/\tau}) [U(t)]/9KG + \sigma_0 e^{-t/\tau} [U(t)]/9K;$$

при $t \rightarrow \infty$ имеем $\epsilon_{11} \rightarrow (3K + G) \sigma_0/9KG = \sigma_0/E$.

9.23. Материал Кельвина заполняет форму с жесткими стенками, так что $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 0$, когда прикладывается напряжение по закону $\sigma_{11} = -\sigma_0 [U(t)]$; см. рис. 9.22. Найти ϵ_{11} и возникающие за счет наличия стенок компоненты напряжения $\sigma_{23} = \sigma_{33}$.

В нашем случае $\epsilon_{ii} = \epsilon_{11}$ и $\sigma_{22} = \sigma_{33}$, поэтому для материала Кельвина равенство (9.48б) имеет вид $\sigma_{11} + 2\sigma_{23} = 3K\epsilon_{11}$, а из (9.48а) следует $2(\sigma_{11} - \sigma_{22})/3 = 2G \{1 + \tau \partial_t\} (2\epsilon_{11}/3)$. Комбинируя эти соотношения, получаем дифференци-

альное уравнение

$$\dot{\epsilon}_{11} + (4G + 3K) \epsilon_{11}/4G\tau = -3\sigma_0 [U(t)]/4G\tau,$$

которое после интегрирования дает

$$\epsilon_{11} = -3\sigma_0 [U(t)] (1 - e^{-(4G+3K)t/4G\tau})/(4G + 3K).$$

Подставляя это выражение в равенство (9.48а) при $i = j = 2$, получаем

$$\sigma_{22} = \left(+ \frac{\sigma_0}{2} - \frac{9K\sigma_0 (1 - e^{-(4G+3K)t/4G\tau})}{8G + 6K} \right) [U(t)].$$

9.24. Радиальная компонента напряжения в упругом полупространстве при действии концентрированной нагрузки P , приложенной в начале координат (рис. 9.23), выражается формулой

$$\sigma_{(rr)} = (P/2\pi) [(1 - 2\nu) \alpha(r, z) - \beta(r, z)],$$

где α и β — известные функции. Пусть закон нагружения задан функцией $P = P_0 [U(t)]$. Найти радиальную компоненту напряжения в полупространстве из вязкоупругого материала Кельвина, пользуясь принципом соответствия.

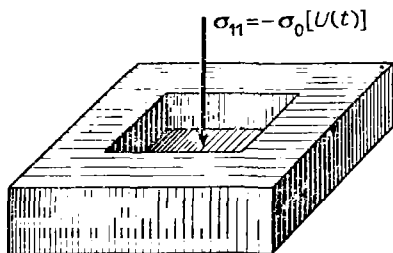


Рис. 9.22.

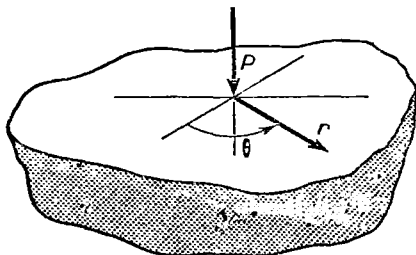


Рис. 9.23.

Члену $1 - 2\nu$ в вязкоупругой среде соответствует оператор $\{3Q\}/\{3KP + Q\}$; следовательно, для кельвиновского тела преобразование решения вязкоупругой задачи будет

$$\bar{\sigma}_{(rr)} = \frac{3P_0}{2\pi s} \left[\frac{G + \eta s}{3K + G + \eta s} \alpha(r, z) - \beta(r, z) \right].$$

Это выражение можно обратить, представив его в виде суммы дробей и воспользовавшись таблицами преобразований. В результате получим напряжение в вязкоупругой среде

$$\sigma_{(rr)} = \frac{3P_0}{2\pi} \left[\left(\frac{G}{3K + G} + \frac{3K}{3K + G} e^{-(3K+G)t/\eta} \right) \alpha(r, z) + \beta(r, z) \right].$$

9.25. Принцип соответствия можно использовать для получения не только напряжений, но и перемещений. Перемещение поверхности упругого полупространства, рассмотренного в задаче 9.24, по направлению оси z задано формулой $w_{(z=0)} = P(1 - \nu^2)/E\pi r$. Найти перемещение поверхности полупространства из вязкоупругого материала в условиях упомянутой задачи.

Оператор теории вязкоупругости, соответствующий члену $(1 - \nu^2)/E$ упругого решения, будет $\{3K + 4Q\}/4Q(3K + Q)$. Тогда для материала Кельвина преобразование Лапласа перемещения дается выражением

$$\bar{w}_{(z=0)} = \frac{P_0(3K + 4(G + \eta s))}{4\pi r s(3K + G + \eta s)(G + \eta s)}.$$

После довольно длительных преобразований и обращения получаем

$$w_{(z=0)} = \frac{P_0(3K + 4G)}{4\pi r^2(3K + G)} \left[\frac{1}{G} - \frac{3e^{-(3K+G)t/\eta}}{3K + 4G} - \frac{3K + G}{G(3K + 4G)} e^{-t/\tau} \right].$$

Заметим, что $w_{(z=0)} = 0$ при $t = 0$ и что $w_{(z=0)}$ стремится к $P_0(1 - \nu^2)/E\pi r$, т. е. к упругому смещению, при $t \rightarrow \infty$.

9.26. Предполагается, что равномерно нагруженная свободно опертая балка изготовлена из материала Максвелла (рис. 9.24).

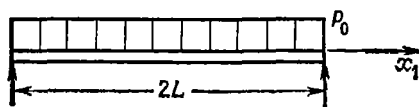


Рис. 9.24.

Найти изгибающее напряжение σ_{11} и величину прогиба $w(x_1, t)$, если нагрузка задана в виде $p = p_0[U(t)]$.

Изгибающее напряжение для свободно опертой балки не зависит от свойств материала, поэтому изгибающее напряжение и для упругого, и для вязкоупругого материала будет одним и тем же. Прогиб упругой балки определяется формулой $w(x_1) = p_0\alpha(x_1)/24EI$, где $\alpha(x_1)$ — известная функция, а I — момент инерции поперечного сечения балки. Для материала Максвелла $\{P\} = \{\partial_t + 1/\tau\}$ и $\{Q\} = \{G\partial_t\}$, так что преобразование Лапласа величины прогиба будет

$$\bar{w} = \frac{p_0\alpha(x_1)}{24I} \left(\frac{3K/\tau + (3K + G)s}{9KGs^2} \right).$$

После обращения этого выражения получим

$$w(x_1, t) = \frac{p_0\alpha(x_1)}{24I} \left(\frac{t}{3\eta} + \frac{3K + G}{9KG} \right).$$

Прогиб $w(x_1, 0) = p_0\alpha(x_1)/(24EI)$ при $t = 0$ равен прогибу упругой балки.

9.27. Показать, что если материал считается несжимаемым ($\nu = 1/2$), то при $t \rightarrow \infty$ напряжение σ_{22} , найденное в задаче 9.23, стремится к σ_0 (среда ведет себя как жидкость).

В задаче 9.23 получено

$$\sigma_{22}|_{t \rightarrow \infty} = -\sigma_0(9K - (4G + 3K))/2(4G + 3K) = -\frac{\sigma_0(3K - 2G)}{3K + 4G}.$$

Это выражение можно записать через ν в виде $\sigma_{22}|_{t \rightarrow \infty} = -\nu\sigma_0/(1 - \nu)$. Таким образом, $\sigma_{22}|_{t \rightarrow \infty} = -\sigma_0$ при $\nu = 1/2$.

Смешанные задачи

9.28. Написать определяющее соотношение для комбинированной модели Кельвина — Максвелла, представленной на рис. 9.25. Вывести из него определяющие соотношения для модели Кельвина и модели Максвелла.

Для предложенной модели

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_K = \frac{\dot{\epsilon}}{\{\partial_t/G_1 + 1/\eta_1\}} + (G_2 + \eta_2 \partial_t) \epsilon.$$

Выполняя указанное операторами дифференцирование по времени, имеем

$$\dot{\sigma} + \sigma/\tau_1 = \eta_2 \ddot{\epsilon} + (G_1 + G_2 + \eta_2/\tau_1) \dot{\epsilon} + (G_2/\tau_1) \epsilon.$$

Если в этом уравнении положить $\eta_2 = 0$ (соединить параллельно с узлом Максвелла упругий элемент), то уравнение будет $\dot{\sigma} + \sigma/\tau_1 = (G_1 + G_2) \dot{\epsilon} + (G_2/\tau_1) \epsilon$. Если к тому же и $G_2 = 0$, то получаем определяющее соотношение для модели Максвелла $\dot{\sigma} + \sigma/\tau_1 = G_1 \dot{\epsilon}$. Аналогично если сначала положить $G = 0$ (соединить параллельно с узлом Максвелла вязкий элемент), то уравнение будет иметь вид $\dot{\sigma} + \sigma/\tau_1 = \eta_2 \ddot{\epsilon} + (G_1 + \eta_2/\tau_1) \dot{\epsilon}$, а когда и $\eta_2 = 0$, оно опять сводится к определяющему соотношению для модели Максвелла.

Если определяющее соотношение для этой четырехпараметрической модели записать в виде

$$\eta_1 \dot{\sigma} = G_1 \sigma = \eta_1 \eta_2 \ddot{\epsilon} + (G_1 \eta_1 + G_2 \eta_1 + G_1 \eta_2) \dot{\epsilon} + G_1 G_2 \epsilon$$

и положить η_1 равным нулю, то в результате получается определяющее уравнение для модели Кельвина $\sigma = \eta_2 \dot{\epsilon} + G_2 \epsilon$. Точно так же если $G_1 = 0$, то уравнение сводится к виду $\dot{\sigma} = \eta_2 \ddot{\epsilon} + G_2 \dot{\epsilon}$ и опять представляет модель Кельвина.

9.29. Воспользоваться принципом суперпозиции и получить деформацию обратной ползучести для стандартного линейного твердого тела (рис. 9.3, а). Сравнить результат с тем, что получено в задаче 9.8.

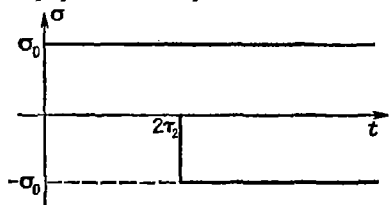


Рис. 9.26.

При законе нагружения

$$\sigma = \sigma_0 [U(t)] - \sigma_0 [U(t - 2\tau_2)]$$

(рис. 9.26), деформацию сразу можно записать, воспользовавшись выражением, найденным в задаче 9.7:

$$\epsilon = \sigma_0 (1/G_1 + (1 - e^{-t/\tau_2})/G_2) [U(t)] - \sigma_0 (1/G_1 + (1 - e^{-(t-2\tau_2)/\tau_2})/G_2) [U(t - 2\tau_2)].$$

В момент $t > 2\tau_2$ обе ступенчатые функции равны единице, следовательно,

$$\epsilon = \sigma_0 (-e^{-t/\tau_2} + e^{-(t-2\tau_2)/\tau_2})/G_2 = \sigma_0 (e^2 - 1) e^{-t/\tau_2}/G_2,$$

что согласуется с результатом задачи 9.8.

9.30. Найти напряжение в модели, предложенной в задаче 9.9, при деформации по закону, изображенному на рис. 9.27. Показать, что в конце концов все напряжение будет приходить на «свободный» упругий элемент.

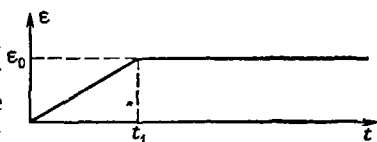


Рис. 9.27.

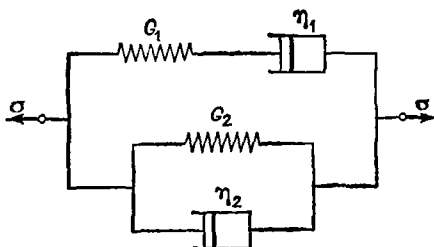


Рис. 9.25.

Решение задачи 9.9 и принцип суперпозиции позволяют найти напряжение в виде

$$\sigma = \varepsilon_0 (\eta (2 - e^{-t/\tau}) + Gt) [U(t)/t_1 - \varepsilon_0 (\eta (2 - e^{-(t-t_1)/\tau}) + G(t-t_1)) [U(t-t_1)/t_1].$$

Для моментов времени $t > t_1$ напряжение равно $\sigma = \varepsilon_0 \eta (e^{t_1/\tau} - 1) e^{-t/\tau}/t_1 + G\varepsilon_0$, а при $t \rightarrow \infty$ оно сводится к величине $\sigma = G\varepsilon_0$.

9.31. «Логарифмический спектр запаздывания» L определяется через обычный спектр запаздывания J формулой $L(\ln \tau) = \tau J(\tau)$. Пользуясь этим определением, найти функцию ползучести $\psi(t)$ как функцию от $L(\ln \tau)$.

Пусть $\ln \tau = \lambda$, т. е. $e^\lambda = \tau$; тогда $d\tau/d\lambda = e^\lambda = \tau$, или $d\tau = \tau d(\ln \tau)$. Теперь формула (9.28) для функции $\psi(t)$ позволяет написать

$$\psi(t) = \int_0^\infty L(\ln \tau) (1 - e^{-t/\tau}) d(\ln \tau).$$

Аналогично если функция $H(\ln \tau) = \tau G(\tau)$ определяет логарифмический спектр релаксации, то функцию $\varphi(t)$, введенную формулой (9.31), можно представить в виде

$$\varphi(t) = \int_0^\infty H(\ln \tau) e^{-t/\tau} d(\ln \tau).$$

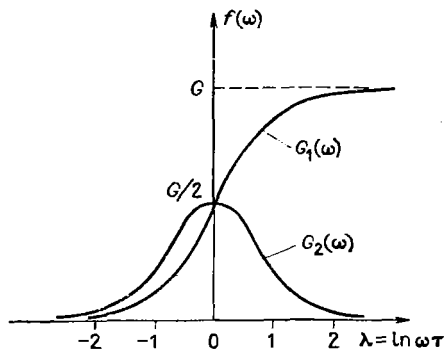


Рис. 9.28.

9.32. Для модели Максвелла (рис. 9.2,а) найти модули накопления и потерь G_1 и G_2 как функции $\ln \omega \tau$ и построить графики этих функций.

В задаче 9.16 установлено, что для материала Максвелла

$$G^* = \frac{G(\omega^2 \tau^2 + i\omega\tau)}{1 + \omega^2 \tau^2};$$

таким образом,

$$G_1 = \frac{G\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} = \frac{Ge^{2\lambda}}{1 + e^{2\lambda}},$$

где $\lambda = \ln \omega \tau$. При $\lambda = 0$ имеем $G_1 = G/2$, при $\lambda = \infty$ имеем $G_1 = G$ и при $\lambda = -\infty$ имеем $G_1 = 0$. Таким же образом находим $G_2 = Ge^\lambda / (1 + e^{2\lambda})$ и при $\lambda = 0$ имеем $G_2 = G/2$, при $\lambda = \pm \infty$ имеем $G_2 = 0$. Графики этих функций приведены на рис. 9.28.

9.33. Найти вид оператора в определяющих соотношениях вязкоупругости (9.48), соответствующего упругой постоянной ν (коэффициенту Пуассона).

При одноосном растяжении $\sigma_{11} = \sigma_0$. Формула (9.48б) в этом случае имеет вид $\varepsilon_{ii}/3 = \sigma_0/9K$, а формула (9.48а) при подстановке $i = j = 1$ дает

$\epsilon_{11} = \{3KP + Q\} \sigma_0 / \{9KQ\}$. Точно так же из (9.48a) при $i = j = 2$ получаем $\epsilon_{22} = \{2Q - 3PK\} \sigma_0 / \{18KQ\}$. Таким образом, в операторной форме можно написать $v = -\epsilon_{22}/\epsilon_{11} = \{3PK - 2Q\} / \{6KP + 2Q\}$.

9.34. Цилиндр из вязкоупругого материала помещен в плотно пригнанную форму с жесткими стенками (рис. 9.29), так что $\epsilon_{(rr)} = 0$ (радиальные деформации отсутствуют). При расширении материал ведет себя как упругий; функция ползучести равна $\psi = A + Bt + Ce^{\lambda t}$, где A, B, C, λ — постоянные. Найти $\sigma_{33}(t)$, если $\epsilon_{33} = \epsilon_0 [U(t)]$.

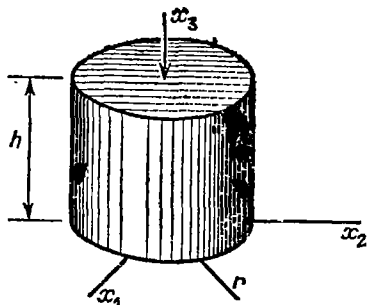


Рис. 9.29.

Для данной среды $\sigma_{ii} = 3K\epsilon_{ii}$, и в силу симметрии задачи это равенство имеет вид $2\sigma_{11} + \sigma_{33} = 3K\epsilon_{33}$. Согласно формуле (9.50a), при $i = j = 1$ имеем

$$\sigma_{11} - \sigma_{33} = - \int_0^t \frac{d\epsilon_{33}}{dt'} \varphi(t - t') dt'.$$

Разрешая эту систему двух уравнений относительно σ_{33} , находим

$$\sigma_{33} = K\epsilon_{33} + \frac{2}{3} \int_0^t \frac{d\epsilon_{33}}{dt'} \varphi(t - t') dt'.$$

Функцию релаксации φ можно найти, пользуясь формулой (9.40). В результате получим

$$\varphi = [(r_1 - \lambda) e^{r_1 t} - (r_2 - \lambda) e^{r_2 t}] / (r_1 - r_2),$$

где $r_{1,2} = [A\lambda - B \pm \sqrt{(A\lambda + B)^2 + 4BC\lambda}] / 2(A + C)$. Таким образом, окончательно имеем

$$\sigma_{33} = K\dot{\epsilon}_0 t + \frac{2}{3} \int_0^t \dot{\epsilon}_0 \frac{[(r_1 - \lambda) e^{r_1 (t-t')} - (r_2 - \lambda) e^{r_2 (t-t')}]}{r_1 - r_2} [U(t')] dt'$$

и после интегрирования приходим к выражению

$$\sigma_{33} = (K\dot{\epsilon}_0 t + 2\dot{\epsilon}_0 [-(r_1 - \lambda)(1 - e^{r_1 t})/3r_1 + (r_2 - \lambda)(1 - e^{r_2 t})/3r_2] / (r_1 - r_2)) [U(t)].$$

9.35. Продольный изгиб стержня из вязкоупругого материала в условиях ползучести в рамках линейной теории можно исследовать при помощи принципа соответствия. Найти этим методом величину прогиба $w(x_1, t)$ шарнирно закрепленного на концах стержня из материала Кельвина (рис. 9.30).

Прогиб упругого стержня описывается уравнением $\partial^2 w / \partial x_1^2 + P_0 w / EI = 0$. Для материала Кельвина E следует заменить оператором $\{E + \eta \partial_t\}$, значит, для стержня из вязкоупругого материала должно выполняться уравнение

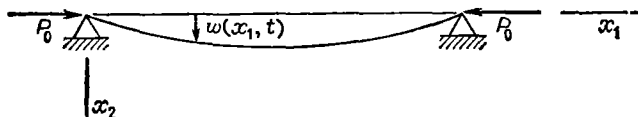


Рис. 9.30.

$\{E + \eta \partial_t\} (\partial^2 w / \partial x_1^2) + P_0 w / l = 0$. Будем искать величину прогиба в виде произведения $w(x_1, t) = W(x_1) \theta(t)$. Тогда упомянутый оператор приведет к дифференциальному уравнению

$$(E\theta + \eta \dot{\theta}) (d^2 W / dx_1^2) + P_0 W \theta / l = 0,$$

откуда

$$\dot{\theta} + [1 + P_0 W / EI (d^2 W / dx_1^2)] \theta / \tau = 0,$$

где $\tau = \eta / E$. Но нагрузка при продольном изгибе упругого стержня равна $P_B = -EI (d^2 W / dx_1^2) / W$, поэтому можно записать последнее уравнение в виде $\dot{\theta} + (1 + P_0 / P_B) \theta / \tau = 0$, проинтегрировать и получить решение $\theta = e^{(P_0 / P_B - 1) t / \tau}$. Окончательно прогиб при продольном изгибе в условиях ползучести определяется выражением $w = W e^{(P_0 / P_B - 1) t / \tau}$.

9.36. Сформулировать задачу о стационарных колебаниях балки из вязкоупругого материала, считая, что определяющие уравнения этой среды заданы формулами (9.48).

Свободные колебания балки из упругого материала описываются уравнением $EI (\partial^4 w / \partial x_1^4) + \rho A (\partial^2 w / \partial t^2) = 0$. Согласно (9.48), соответствующий E оператор уравнений теории вязкоупругости будет $\{9KQ / (3KP + Q)\}$. Если прогиб искать в виде $w(x_1, t) = W(x_1) \theta(t)$, то дифференциальное уравнение колебаний вязкоупругой балки можно расщепить на два уравнения — одно с производными по пространственным координатам $d^4 W / dx_1^4 - k^4 W = 0$, а другое — с производными по времени $\{3KP + Q\} (d^2 \theta / dt^2) + (k^4 I / \rho A) \{9KQ\} (\theta) = 0$. Решение W_i пространственного уравнения дает форму i -го главного колебания, а временное уравнение при $k = k_i$ имеет решение $\theta_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} e^{\lambda_{ij} t}$, где N зависит от порядка оператора. Общее решение представляется, таким образом, суммой $w(x_1, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N W_i(x_1) A_{ij} e^{\lambda_{ij} t}$, в которой λ_{ij} — комплексные величины.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

9.37. Написать определяющее уравнение для четырехпараметрической модели, представленной на рис. 9.31.

Ответ: $\ddot{\sigma} + (G_1/\eta_2 + G_2/\eta_2 + G_1/\eta_1) \dot{\sigma} + (G_1 G_2 / (\eta_1 \eta_2)) \sigma = G_1 \ddot{\epsilon} + (G_1 G_2 / \eta_2) \dot{\epsilon}$.

9.38. Непосредственным интегрированием уравнения

$$\dot{\epsilon} + \epsilon / \tau_2 = \sigma_0 [U(t)] (G_1 + G_2) / G_1 \eta_2 + \sigma_0 [\delta(t)] / G_1$$

найти деформацию ползучести для стандартного линейного твердого тела (см. задачу 9.7).

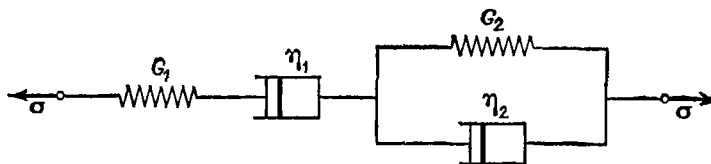


Рис. 9.31.

9.39. Вывести определяющие соотношения для модели Кельвина и для модели Максвелла из соотношения, установленного в задаче 9.5 для предложенной в этой задаче четырехпараметрической модели.

Указание: положить $G_3 = 0$ и т. д.

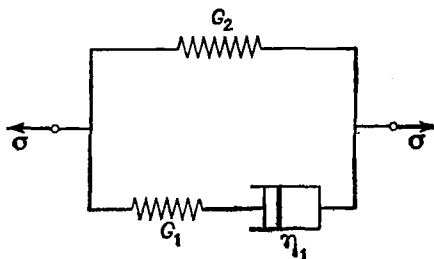


Рис. 9.32.

9.40. Воспользоваться уравнением (9.40) для нахождения функции $\psi(t)$, если $\varphi(t) = a(b/t)^m$ и $m < 1$.

Указание: положить $m = 1 - k$, так что $\varphi(t) = ab^m t^{k-1}$.

Ответ: $\psi(t) = \frac{\sin \pi m}{\pi m} \left(\frac{t}{b} \right)^m$.

9.41. Найти функцию ползучести и функцию релаксации для модели, изображенной на рис. 9.32.

Ответ: $\psi(t) = 1/G_2 - G_1 e^{-G_2 t / (G_1 + G_2)}$, $\varphi(t) = G_2 + G_1 e^{-t/\tau_1}$.

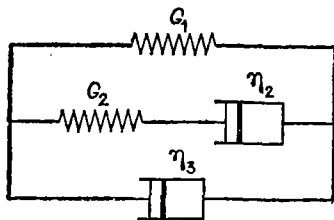


Рис. 9.33.

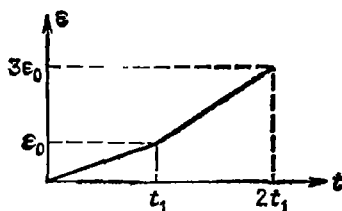


Рис. 9.34.

9.42. Найти G^* для модели, представленной на рис. 9.33.

Ответ: $G^* = \frac{G_1(1 + \tau_2^2 \omega^2) + G_2 \omega^2 \tau_2^2}{1 + \omega^2 \tau_2^2} + i \frac{\omega(G_2 \tau_2 + \eta_3(1 + \tau_2^2 \omega^2))}{1 + \omega^2 \tau_2^2}$.

9.43. В модели, предложенной в задаче 9.42, положить $G_1 = G_2 = G$ и $\eta_2 = \eta_3 = \eta$ и определить закон изменения напряжения при деформировании по закону, представленному на рис. 9.34.

Ответ: $\sigma = (e_0/t_1) [G(2t - t_1) + \eta(4 - (1 + e^{t/t_1})e^{-t/\tau})]$ при $t_1 < t < 2t_1$.

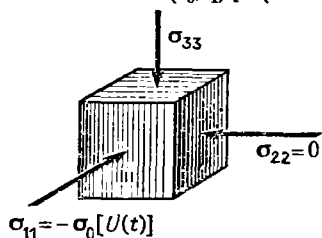


Рис. 9.35.

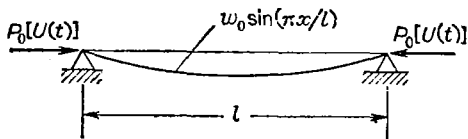


Рис. 9.36

9.44. Вязкоупругий материал с определяющим уравнением $\dot{\sigma} + \alpha\sigma = \beta\dot{\epsilon} + \gamma\epsilon$, где α, β, γ — постоянные, подвергается нагружению в следующих условиях: $\sigma_{11} = -\sigma_0[U(t)]$, $\sigma_{22} = 0$, $\epsilon_{33} = 0$ (рис. 9.35). Считая, что $\sigma_{ii} = 3K\epsilon_{ii}$, найти $\sigma_{33}(t)$, $\sigma_{33}(0)$ и $\sigma_{33}(\infty)$.

$$\text{Ответ: } \sigma_{33} = -\sigma_0 \left[\frac{3\alpha K - 2\gamma}{2(3\alpha K + \gamma)\lambda} + \left(\frac{3K - 2\beta}{2(3K + \beta)} - \frac{3\alpha K - 2\gamma}{2(3\alpha K + \gamma)\lambda} \right) e^{-\lambda t} \right],$$

где $\lambda = (3\alpha K + \gamma)/(3K + \beta)$.

9.45. Шарнирно закрепленный на концах стержень сделан из материала Максвелла, для которого $\dot{\sigma} + \sigma/\tau = E\dot{\epsilon}$. Начальная форма стержня задана величиной прогиба $w = w_0 \sin(\pi x/l)$; приложенная сила равна $P_0[U(t)]$ (рис. 9.36). Найти величину прогиба $w(x, t)$ в следующие моменты времени как функцию от P_B — нагрузки при продольном изгибе упругого стержня.

$$\text{Ответ: } w(x, t) = w_0 \sin(\pi x/l) e^{-t/(1 - P_B/P_0)\tau}.$$

Список литературы

- Бленд Д., Теория линейной вязкоупругости, «Мир», М., 1965.
Бэтчелор Дж., Введение в динамику жидкости, «Мир», М., 1973.
Жермен П., Механика сплошных сред, «Мир», М., 1965.
Зоммерфельд А., Механика деформируемых сред, ИЛ, М., 1954.
Зоммерфельд А., Термодинамика и статистическая физика, ИЛ, М., 1955.
Ильюшин А. А., Механика сплошной среды, Изд-во МГУ, М., 1971.
Ильюшин А. А., Ленский В. С., Сопротивление материалов, Физматгиз, М., 1959.
Ильюшин А. А., Ломакин В. А., Шмаков А. П., Задачи и упражнения по механике сплошной среды, Изд-во МГУ, М., 1973.
Качанов Л. М., Теория ползучести, Физматгиз, М., 1960.
Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. I и II, Физматгиз, М., 1963.
Кристенсен Р., Введение в теорию вязкоупругости, «Мир», М., 1974.
Куликовский А. Г., Любимов Г. А., Магнитная гидродинамика, Физматгиз, 1962.
Лаидау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, изд. 2, ГИТТЛ, М., 1954.
Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, изд. 4, «Наука», М., 1973.
Ляв А., Математическая теория упругости, ОНТИ, М., 1935.
Мак-Коннел А. Дж., Введение в тензорный анализ, Физматгиз, М., 1963.
Милн-Томсон Л. М., Теоретическая гидродинамика, «Мир», М., 1964.
Новожилов В. В., Теория упругости, Судпромгиз, Л., 1958.
Прагер В., Введение в механику сплошных сред, ИЛ, М., 1963.
Прагер В., Ходж Ф. Г., Теория идеально-пластических тел, ИЛ, М., 1956.
Прайдтль Л., Гидроаэромеханика, ИЛ, М., 1949.
Седов Л. И., Введение в механику сплошной среды, Физматгиз, М., 1962.
Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике, изд. 7, «Наука», 1972.
Седов Л. И., Механика сплошной среды, т. 1—2, изд. 2, «Наука», М., 1973.
Сокольников И. С., Тензорный анализ, «Наука», М., 1971.
Соколовский В. В., Теория пластичности, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
Тимошенко С. П., Сопротивление материалов, т. I—II, «Наука», М., 1965.
Тимошенко С. П., Теория упругости, ОНТИ, М., 1934.
Хилл Р., Математическая теория пластичности, Гостехиздат, М., 1956.

Предметный указатель

- Абсолютная температура 187
Абсолютно жесткое перемещение 119
Адиабатическое течение 236
Алгебраическое дополнение элемента матрицы 32—33
Альтернирующий тензор 31
- Базис 17
— ортонормированный 17
Бивектор 17
- Вектор 10
— вихря скорости 162
— единичный 10
— завихренности 162
— линейного поворота 122
— момента напряжений 70
— напряжения 70
— натяжения 70
— нулевой 10
— перемещения 114
— — — относительного 121
— — — на единицу длины 121
- Векторы базисные 16
—, вычитание их 16
— ковариантные 24
— контравариантные 24
—, произведение их векторное 12
— — — двойное 13
— — — неопределенное 13
— — — скалярное 12
— — — смешанное 13
— равные 10
—, сложение их 11
Вихревая линия 171
Время запаздывания 284
- Гидростатическое сжатие 222
Гипотеза упрочнения деформации 259, 260
— — энергетическая 259
Гистерезис 250
- Давление 228
— гидростатическое 228
- Давление термодинамическое 229
Движение 157
— безвихревое 191
— ползущее 240
— установившееся 160
Девiator деформаций 131
— напряжений 87
— —, главные значения его 87
— скоростей деформации 163
Дельта Кронекера 26, 28
Дельта-функция Дирака 284—285
Деформации сдвига 125
— — технические 125
Деформация 112
— бесконечно малая 120
—, градиент ее 116
— идеально пластическая 250
— изохорическая 153
— логарифмическая 249
—, мера ее 119
— натуральная 249
— неупругая 248
— однородная 137
— пластическая 248
— плоская 132
— полная 248
— техническая 249
— упругая 248
— чистая 130
- Диада 13
Диад произведение векторное 15
— — — дважды 15
— — — скалярное 15
— — — дважды 15
— — смешанное 15
- Диадик 10, 13
— антисимметричный 15
—, вектор его 14
— единичный 14
— самоспряженный 15
— симметричный 15
—, скаляр его 14
Диадик взаимно обратные 15
— равные 14
Дислокации 248

- Жидкость вязкая** 228
 — идеальная 228
 — ньютонова 229
 — неньютонова 229
 — стокова 229
- Закон Гука обобщенный** 200
 — сохранения массы 180
 — — энергии 185
 — теплопроводности Фурье 194, 213
 — — — механической 184
 — термодинамики первый 185
 — — второй 187
 — течения 257
 — упрочнения 256
- Инвариантность тензорных соотноше-
ний** 9
Инварианты тензора 37
Индекс немой 20
 —, размерность его 20
 — свободный 20
Интегралы наследственности 287
 — ползучести 290
 — релаксации 290
- Квадрика деформаций** 128
 — Коши 128
Количество движения 181
Конфигурация сплошной среды 112
Концепция сплошности 68
Координаты материальные 113
 — пространственные 113
Коэффициент вязкости 229
 — — кинематический 232
 — — объемной 250
 — длины 125
 — относительного удлинения линей-
ного элемента 123
 — Пуассона 204
 — расширения кубического 130
 — — линейного теплового 212
 — теплопроводности 213
Кривая растяжения (сжатия) 250
 — текучести 254
Критерий пластичности Мизеса 253
 — — Треска 252
Круги Мора для деформации 132
 — — — напряжения 82
- Лагранжев способ описания движе-
ния** 115
Линия сдвига 262
 — скольжения 262
 — тока 160
- Масса** 180
Материал, см. также Среда
 — анизотропный 68
 — вязкоупругий 279
 — гиперупругий 212
 — гиппоупругий 212
 — жестко-идеально-пластический 251
 — жесткопластический 251
 — идеально пластический 250, 255
 — изотропный 68
 — однородный 68
 — пластический 248
 — с упрочнением 256
 — упруго-идеально-пластический 251
 — упругопластический 251
Матрица 32
 — вырожденная 32
 — диагональная 32
 — единичная 32
 — квадратная 32
 — обратная 33
 — ортогональная 33
 — присоединенная 33
 — тождественная 33
 — транспонированная 32
 — упругих констант 202
Матрица-столбец 32
Матрица-строка 32
Минор 33
**Модель вязкоупругого тела Кельвина
(Фойхта)** 280
 — — — — обобщенная 282
 — — — Максвелла 280
 — — — — обобщенная 282
 — — — трехпараметрическая 281
 — — — четырехпараметрическая 281
Модуль абсолютный динамический
289
 — комплексный 289
 — накопления 289
 — объемного сжатия 205
 — потерь 289
 — сдвига 205
 — Юнга 204
Момент количества движения 183
 — — — распределенный 199
**Моменты поверхностных и массовых
пар распределенные** 75
Мощность напряжений 259
- Нагружение активное** 257
 — нейтральное 256
**Направления эквивалентных упругих
свойств** 202
Напряжение касательное 72
 — — октаэдрическое 99
 — нормальное 72

- Напряжения главные 78
 Напряженное состояние 71
 — — плоское 85, 94
 — — сферическое 228
 — — цилиндрическое 273
 Неравенство Клаузиуса — Дюгема 188
- Обозначения индексные 20
 — символические 10
 Объем удельный 199
 Октаэдрическая площадка 89, 98
 Оператор замены 28
 — материального дифференцирования по времени 159
 Ось симметрии упругих свойств 203
 Относительное удлинение 126
- Параметр Генки 260
 — Лоде 264
 Параметры состояния 186
 П-плоскость 254
 Плоская деформация 208
 — — обобщенная 210
 Плоское напряженное состояние 207
 — — — обобщенное 210
 Плоскость симметрии упругих свойств 202
 Плотность 69, 180
 — средняя 69
 Поверхность линейных деформаций 128
 — нагружения 256
 — напряжений Коши 77
 — скоростей деформации 163
 — текучести 254
 Податливость (материала) 285
 — абсолютная динамическая 289
 — комплексная 289
 — накопления 289
 — потеря 289
 Поле скоростей 160
 — — безвихревое 162
 — тензорное 38
 — — стационарное 38
 Ползучесть 283
 Полярное разложение тензора 126
 Постоянная текучести 252
 Постоянные Ламе 204
 Потенциал векторный 180
 — диссипативный 244
 — комплексный 236
 — пластический 258
 — скорости 233
 Поток тепла 185
 Предел текучести 248
 — — Джонсона 249
- Предел упругости 248
 Преобразование координат ортогональное 26, 28
 Принцип напряжения Коши 70
 — Сен-Венана 207
 — соответствия упругой и вязкоупругой задач 292
 Приращения деформации 257
 Произведение вектора на тензор 34
 — векторов, см. Векторы
 — диад, см. Диад произведение
 — тензоров внешнее 29
 — — внутреннее 30
 Производная по времени индивидуальная 158
 — — — материальная 158
 — — — полная 158
 — — — субстанциональная 158
 Пространство напряжений 254
 — — главных 79, 254
 — Хейя — Вестергарда 254
 Процесс баротропный 229
 — изотермический 191
 — термодинамический 186
 — — обратимый 187
 — — необратимый 187
 — чистого сдвига 253
- Работа внешних сил 185
 — внутренних поверхностных сил 185
 — — на пластических деформациях 259
 — — —, приращение ее 259
 Равновесие гидростатическое 232
 Радиус-вектор 25
 Разгрузка 256
 Растяжение всестороннее равномерное 93
 — одноосное 93
 Реакция упругая запаздывающая 281
 — — мгновенная 281
 Релаксация 283
- Сдвиг простой 93
 Силы массовые 69
 — поверхностные 69
 Система координат декартова 16
 — — однородная 26
 — обозначений символическая (гиббсова) 10
 Скаляр 10
 Скольжение 248
 Скорость внутреннего производства энтропии 188
 — изменения свойства локальная (местная) 158
 — — конвективная 158

Скорость кубического расширения
176
— комплексная 236
— мгновенная частицы 158
— сдвига 163
— удлинения 163
— — относительного 163
Соглашение о суммировании 20
Соотношение Гамильтона — Кэли 38
Соотношение Дюгамеля — Неймана 213
— между напряжениями и деформациями 190
Состояния параметры 186
— уравнения 186
— функции 186
Спектр запаздывания 286
— — логарифмический 304
— релаксации 286
Способ описания движения лагранжев 115
— — — эйлеров 185
Среда, см. также Материал
— анизотропная 202
— — идеализированная 190
— изотропная 202
—, модель ее 190
— несжимаемая 180
— ортотропная 203
Стандартное линейное твердое тело 281
Тензор 9
— альтернирующий 31
— антисимметричный 34
— вихря 161
—, главные значения его 37
— — направления его 36
— — оси его 36
— градиента скорости 160
— декартов 9, 26
— деформаций бесконечно малых лагранжев 120
— — — — эйлеров 120
— — Грина 119
— — конечных Альманси 119
— — — Грина 119
— — — лагранжев 119
— — — эйлеров 119
— — Коши 118
— — шаровой 131
— завихренности 161
—, инварианты его 37
— ковариантный 24, 25
—, компоненты его 9
— — —, закон их преобразования 9
— — кососимметричный 34
— коэффициентов длины 127

Тензор Левн-Чивиты 31
— метрический 25
— моментов инерции 193
— напряжений 72
— — вязких 228
— — гидростатических 87
— —, главные направления его 78
— — диссипативных 188
— —, инварианты его 79
— — консервативных 188
— —, симметричность его 75
— — шаровой 87
— — обычный 9
— ортогональный 127
— поворота линейного лагранжев 122
— — — эйлеров 122
—, полярное разложение его 126
—, порядок его 9
— приращений деформации 257
—, ранг его 9
— ранга нулевого 10
— — первого 10, 20
— — второго 10, 21
—, свертка его 30
—, свертывание его 30
— симметричный 34
— скоростей деформации 161
— — —, главные значения его 163
— — — — направления его 163
— — —, инварианты его 163
— — смешанный 25
— упругих констант 200
— фундаментальный пространства 25
—, характеристическое уравнение его 36
Тензоры сопряженные 13
Теорема Гаусса — Остроградского 41
— об изменении количества движения 181—182
— — — момента количества движения 183
— Кельвина (Томсона) 234
— Рейнольдса о переносе 175
— Стокса 40
Теория инкрементальная 257
— линейных скольжения 261
— малых деформаций 120
— несвязанной термоупругости 190
— пластичности деформационная (Генки) 260
— течения 257
Теплоемкость удельная 213
Тетрадик 10
Течение 112, 157
— адиабатическое 236
— безвихревое 233
— вязкое 281
— пластическое 248

- Течение потенциальное 234—235
 Тождество Гиббса 189
 Точка 112
 Траектория 160
 Транспозиция матрицы 32
 Триадик 10
 Триэдр единичных векторов 17
 Трубка тока 243
- Угол запаздывания 288
 Узел Кельвина 280
 — Максвелла 280
 Упрочнение 250, 256
 — изотропное 256, 259
 — кинематическое 257
 — линейное 257
 Уравнение Бернулли 234
 — бигармоническое 210
 — волновое 218
 — калорическое 190
 — Лапласа 235
 — неразрывности 180, 189
 — характеристическое 36
 — энергии 190
 — для энтропии 190
 Уравнения газовой динамики 235
 — движения 183, 189
 — Ламе 206
 — Леви — Мизеса 257
 — Навье — Коши 206
 — Навье — Стокса 231
 — Навье — Стокса — Дюгема 231
 — определяющие 190
 — Прандтля — Рейсса 258
 — равновесия 75, 183
 — связанной термоупругости 213
 — совместности Бельтрами — Мичел-
 ла 206
 — — для линейных деформаций
 133—134
 — — скоростей деформации 163
 — состояния 186
 — Эйлера 233
 Ускорение 160
 Условие Стокса 230
 Условия Коши — Римана 235
- Функция бигармоническая 210
 — давления 232—233
 — диссипативная 189
 — единичная импульсная 284—285
 — — ступенчатая 283
 — нагружения 256
 — ползучести 285
 — распределения времен запаздыва-
 ния 286
- — — релаксации 286
 Функция релаксации 286
 — состояния 186
 — текучести 252
 — тока 235
 — Эри 210
- Цилиндрическое напряженное состоя-
 ние 273
 Циркуляция скорости 234
- Частица 112
 Число Рейнольдса 232
- Эйлеров способ описания движения
 115
 Эквивалентное напряжение 258
 — приращение пластической деформа-
 ции 258
 Эксперимент на ползучесть 283
 — — — обратную 295
 — — релаксацию 283
 Элемент вязкий 280
 — упругий 280
 Эллипсоид деформаций 128
 — — Коши 129
 — — материальный 129
 — — пространственный 129
 — напряжений Ламе 80
 Энергия внутренняя механическая 185
 — — — удельная 185
 — деформации 201
 — — , плотность ее 201
 — искажения формы (дисторсии) 214
 — кинетическая 184
 — расширения 214
 — свободная 222
 — — удельная 199
 — тепловая 185
 — химическая 185
 — электромагнитная 185
 Энтальпия удельная 198
 Энтропия 187
 — , плотность ее 187
 — производство ее 185
 — удельная 187
 Эффект Баушингера 251
 Эффективное напряжение 258
 — приращение пластической дефор-
 мации 258
- Якобиан (преобразования коорди-
 нат) 24

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА	5
ПРЕДИСЛОВИЕ	7
К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ	8
Глава 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ	
1.1. Тензоры и механика сплошной среды	9
1.2. Тензоры. Декартовы тензоры. Ранг тензора	9
1.3. Векторы и скаляры	10
1.4. Векторное сложение. Умножение вектора на скаляр	11
1.5. Скалярное и векторное произведения векторов	12
1.6. Диады и диадики	13
1.7. Системы координат. Базисные векторы. Триэдр единичных векторов	16
1.8. Линейные векторные функции. Диадики как линейные векторные операторы	19
1.9. Индексные обозначения. Интервал изменения индексов и соглашение о суммировании	20
1.10. Соглашение о суммировании в символических обозначениях	22
1.11. Преобразование координат. Общее понятие тензора	23
1.12. Метрический тензор. Декартовы тензоры	25
1.13. Законы преобразования декартовых тензоров. Дельта Кронекера. Условия ортогональности	26
1.14. Сложение декартовых тензоров. Умножение на скаляр	29
1.15. Умножение тензоров	29
1.16. Векторное произведение. Тензор Леви-Чивиты. Бивектор	31
1.17. Матрицы. Матричные представления декартовых тензоров	32
1.18. Симметрия диадиков, матриц и тензоров	34
1.19. Главные значения и главные направления симметричных тензоров второго ранга	35
1.20. Степени тензоров второго ранга. Соотношение Гамильтона — Кэли	37
1.21. Тензорные поля. Дифференцирование тензоров	38
1.22. Криволинейные интегралы. Теорема Стокса	39
1.23. Теорема Гаусса — Остроградского	41
Задачи с решениями	41
Дополнительные задачи	65
Глава 2. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ	68
2.1. Понятие сплошной среды	68
2.2. Однородность. Изотропия. Массовая плотность	68
2.3. Массовые силы. Поверхностные силы	69
2.4. Принцип напряжения Коши. Вектор напряжения	69
2.5. Напряженное состояние в точке. Тензор напряжений	71
2.6. Связь между тензором напряжений и вектором напряжения	73
2.7. Равновесие сил и моментов. Симметрия тензора напряжений	74

2.8. Законы преобразования напряжений	75
2.9. Поверхности напряжений Коши	77
2.10. Главные напряжения. Инварианты тензора напряжений. Эллипсоид напряжений	78
2.11. Максимальное и минимальное касательное напряжение	80
2.12. Круги Мора для напряжений	82
2.13. Плоское напряженное состояние	85
2.14. Девиатор и шаровой тензор напряжений	87
Задачи с решениями	88
Дополнительные задачи	109
Глава 3. ДЕФОРМАЦИИ	112
3.1. Частицы и точки	112
3.2. Конфигурация сплошной среды. Деформация и течение	112
3.3. Радиус-вектор. Вектор перемещения	112
3.4. Лагранжево и эйлерово описания движения	115
3.5. Градиенты деформации. Градиенты перемещения	116
3.6. Тензоры деформаций. Тензоры конечных деформаций	117
3.7. Теория малых деформаций. Тензоры бесконечно малых деформаций	120
3.8. Относительное перемещение. Тензор линейного поворота. Вектор поворота	121
3.9. Геометрический смысл тензоров линейных деформаций	123
3.10. Коэффициент длины. Интерпретация конечных деформаций	125
3.11. Тензоры коэффициентов длины. Тензор поворота	126
3.12. Свойства преобразований тензоров деформаций	127
3.13. Главные деформации. Инварианты деформации. Кубическое расширение	129
3.14. Шаровой тензор и девиатор деформаций	131
3.15. Плоская деформация. Круги Мора для деформации	132
3.16. Уравнения совместности для линейных деформации	133
Задачи с решениями	134
Дополнительные задачи	155
Глава 4. ДВИЖЕНИЕ И ТЕЧЕНИЕ	157
4.1. Движение. Течение. Материальная производная	157
4.2. Скорость. Ускорение. Мгновенное поле скоростей	159
4.3. Траектории. Линии тока. Установившееся движение	160
4.4. Скорость деформации. Завихренность. Приращения деформации	160
4.5. Физическая интерпретация тензоров скоростей деформации и завихренности	162
4.6. Материальные производные по времени от элемента объема, элемента поверхности и линейного элемента	163
4.7. Материальные производные по времени от интеграла по объему, интеграла по поверхности и линейного интеграла	165
Задачи с решениями	167
Дополнительные задачи	178
Глава 5. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ	180
5.1. Сохранение массы. Уравнение неразрывности	180
5.2. Теорема об изменении количества движения. Уравнения движения. Уравнения равновесия	181
5.3. Теорема об изменении момента количества движения	183
5.4. Сохранение энергии. Первый закон термодинамики. Уравнение энергии	184

ОГЛАВЛЕНИЕ	317
5.5. Уравнения состояния. Энтропия. Второй закон термодинамики	186
5.6. Неравенство Клаузиуса — Дюгема. Диссипативная функция	187
5.7. Определяющие уравнения. Термомеханический и механический континуумы	189
Задачи с решениями	191
Дополнительные задачи	198
Глава 6. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ	200
6.1. Обобщенный закон Гука. Функция энергии деформации	200
6.2. Изотропные и анизотропные среды. Симметрия упругих свойств	202
6.3. Изотропные среды. Упругие постоянные	204
6.4. Постановка статических и динамических задач теории упругости	205
6.5. Теорема о суперпозиции. Единственность решений. Принцип Сен-Венана	207
6.6. Плоские задачи теории упругости. Плоское напряженное состояние и плоская деформация	207
6.7. Функция напряжений Эри	210
6.8. Двумерные статические задачи теории упругости в полярных координатах	211
6.9. Гиперупругость. Гипоупругость	212
6.10. Линейная термоупругость	212
Задачи с решениями	214
Дополнительные задачи	225
Глава 7. ЖИДКОСТИ	228
7.1. Давление жидкости. Тензор вязких напряжений. Баротропное течение	228
7.2. Определяющие уравнения. Стоксовы жидкости. Ньютоновы жидкости	229
7.3. Основные уравнения ньютоновой жидкости. Уравнения Навье — Стокса — Дюгема	230
7.4. Установившееся течение. Гидростатика. Безвихревое течение	232
7.5. Идеальная жидкость. Уравнение Бернулли. Циркуляция	233
7.6. Потенциальное течение. Плоское потенциальное течение	234
Задачи с решениями	236
Дополнительные задачи	246
Глава 8. ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ	248
8.1. Основные положения и определения	248
8.2. Идеализированные диаграммы пластического поведения	250
8.3. Условия пластичности. Критерии Треска и Мизеса	252
8.4. Пространство напряжений. П-плоскость. Поверхность текучести	254
8.5. Поведение материала за пределом текучести. Изотропное и кинематическое упрочнение	255
8.6. Соотношения между напряжениями и деформациями в пластическом состоянии. Теория пластического потенциала	257
8.7. Эквивалентное напряжение. Эквивалентное приращение пластической деформации	258
8.8. Работа на пластических деформациях. Гипотезы упрочнения	259
8.9. Деформационная теория пластичности	260
8.10. Задачи упругопластичности	260

8.11. Элементарная теория линий скольжения при плоской пластической деформации	261
Задачи с решениями	263
Дополнительные задачи	276
Глава 9. ЛИНЕЙНАЯ ВЯЗКОУПРУГОСТЬ	279
9.1. Вязкоупругое поведение материала	279
9.2. Простейшие механические модели вязкоупругого поведения	279
9.3. Обобщенные модели. Линейное дифференциальное операторное уравнение	282
9.4. Ползучесть и релаксация	283
9.5. Функция ползучести. Функция релаксации. Интегралы наследственности	285
9.6. Комплексные модули и податливости	288
9.7. Трехмерная теория	290
9.8. Анализ вязкоупругого напряженного состояния. Принцип соответствия	291
Задачи с решениями	293
Дополнительные задачи	306
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	309
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	310

Дж. Мейз
ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ
МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Редактор *Г. М. Ильичева*. Художник *Г. Д. Коняхина*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Н. А. Новлева*
Корректор *В. С. Соколов*

Сдано в набор 29/V 1974 г. Подписано к печати 10/X 1974 г.
Бумага тип. № 3 60×90¹/₁₆—10 б. л. 20 печ. л. Уч.-изд. л. 18,66.
Изд. № 1/7459. Цена 1 р. 50 к. Зак. 399.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Отпечатано в ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградской типографии № 2 имени Евгении Соколовой
Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52,
Измайловский проспект, 29, с матриц Головного предприятия
республиканского производственного объединения
«Полиграфкинг» Госкомиздата УССР,
г. Киев, ул. Довженко, 3.