Г. ЛАМБ

ГИДРОДИНАМИКА

Перевод с 6-го английского издания
А. В. ГЕРМОГЕНОВА и В. А. КУДРЯВЦЕВА

под редакцией проф. Н. А. СЛЕЗКИНА

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1947 ЛЕНИНГРАД

Редактор *Н. А. Слезкин.* Техн. редактор *Н. А. Тумаркина*

Подписано к печати 21—XII 1946 г. 58 печ. л. 76,05 авт. л. 77,95 уч.-изд. л.
55 600 тип. знак в печ. л. Тираж 8 000 экз. А 08272 Заказ 1929

Цена книги 47 р., переплет 1 р.

Тип. „Красный Печатник", Ленинград, Международный пр., 73а.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга Ламба, являясь фундаментальным руководством, несомненно принадлежит к числу самых лучших книг всей мировой литературы по гидродинамике. Выход в свет этой книги на русском языке принесет большую пользу не только студентам и аспирантам физико-математических факультетов университетов, но и большому кругу научных работников, деятельность которых сопрнкасается в той или иной мере с вопросами гидродинамики.

Впервые эта книга была издана в 1879 г. в значительно меньшем объеме. С каждым новым изданием содержание ее перерабатывалось и расширялось. Последние значительные дополнения были внесены самим автором в 1932 г. при шестом издании, незадолго до своей смерти.

В книге Ламба нашла свое отражение бóльшая часть всей мировой литературы по многим вопросам гидродинамики, но не в одинаковой мере. Например, вопросам теории волн посвящена почти половина всей книги, тогда как вопросам, составляющим проблематику современной гидродинамики, уделялось раньше очень малое внимание. И лишь только в последнем, шестом, издании этим вопросам уделено бóльшее внимание, в частности были внесены добавления по теории пограничного слоя, по теории вихревого сопротивления, по теории неустановившегося движения плоского контура в идеальной жидкости, по электромагнитной аналогии и др.

Следует также указать, что работы известных русских ученых Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина и др. по ряду вопросов, затрагиваемых в различных главах гидродинамики Ламба, были освещены в очень малой степени. В этом отношении преимущественное положение безусловно занимают английские авторы и в первую очередь сам Ламб, перу которого принадлежит очень много результатов.

Изложение в большинстве случаев является очень сжатым, но вполне ясным и достаточным для уяснения сущности того или иного вопроса, что несомненно и составляет одно из достоинств этой книги.

Первые двести шестьдесят четыре параграфа переведены В. А. Кудрявцевым, а остальные А. В. Гермогеновым, причем перевод ими выполнялся с пятого английского издания и немецкого перевода этой книги под редакцией Мизеса. При редактировании же этот перевод был сличен с шестым английским изданием и все изменения и добавления были полностью внесены самим редактором.

Н. А. Слезкин

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Эта книга может рассматриваться как шестое издание Treatise on Hie Mathematical Theory of the Motion of Fluids, опубликованной в 1879 г. Последующие издания, значительно переработанные и расширенные, выходили уже с заголовком настоящей книги.

В настоящем издании в общий план и расположение материала не внесено каких-либо изменений, но все содержание вновь просмотрено, некоторые важные упущения восполнены и много нового материала добавлено.

Сам предмет за последние годы получил значительное развитие, например, в теории приливов, в различных направлениях, имеющих отношение к проблемам воздухоплавания, и др. В этой связи интересно отметить, что „классическая" гидродинамика, на которую часто ссылаются теперь с оттенком пренебрежения, снова нашла себе широкое поле для практических приложений. Некоторые из этих новых достижений по причине их широкой разработанности нельзя было целиком включить в эту книгу; пришлось ограничиться лишь указаниями на более важные результаты и на применяемые методы.

Как и в предшествующих изданиях, были приложены все усилия к тому, чтобы в подстрочных примечаниях указать тех авторов, которым мы обязаны соответствующими результатами; однако следует указать, что в самом тексте оригинальные доказательства часто были значительно видоизменены.

Я должен еще раз поблагодарить штат университетского издательства за большую помощь при издании настоящей книги.

Г. Ламб

Апрель 1932.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I

Уравнения движения

§ 1, 2. Основные свойства жидкости (13).—**§ 3.** Две формы исследования (14).—**§ 4—9.** Эйлерова форма уравнений движения (15).— Динамические уравнения. Уравнение неразрывности. Уравнение физического состояния жидкости. Граничные условия (20).—**§ 10.** Уравнение энергии (22).—**§ 10a.** Перенос количества движения (24).—**§ 11.** Мгновенно вызванное движение (25).—**§ 12.** Уравнения, отнесенные к подвижной системе координат (27).—**§ 13, 14.** Динамические уравнения движения и уравнение неразрывности в форме Лагранжа (28).—**§ 15, 16.** Преобразование Вебера (29).—**§ 16a.** Уравнения в полярных координатах (31).

Глава II

Интегрирование уравнений движения в частных случаях

§ 17. Потенциал скоростей. Теорема Лагранжа (32).—**§ 18, 19.** Физические и кинематические свойства функции φ (34).—**§ 20.** Интегрирование уравнений для потенциального движения. Уравнение давления (35).—**§ 21—23.** Установившееся движение. Вывод уравнения давления из принципа энергии. Предельное значение скорости (36).—**§ 24.** Истечение жидкости; сжатие струи (39).—**§ 24a, 25.** Истечение газов (42).—**§ 26—29.** Примеры вращающейся жидкости. Равномерное вращение. Вихрь Ранкина. Электромагнитные вращения (45).

Глава III

Безвихревое движение

§ 30. Анализ бесконечно малого движения элемента жидкости при деформации и вращении (48).—**§ 31, 32.** Поток и циркуляция. Теорема Стокса (50).—**§ 33.** Независимость циркуляции от времени (53).—**§ 34, 35.** Безвихревое движение в односвязной области; однозначность потенциала скорости (54).—**§ 36—39.** Несжимаемая жидкость; трубка тока. Функция φ не имеет максимума и минимума. Скорость не имеет максимума. Среднее значение функции φ на сферической поверхности (55).—**§ 40, 41.** Условия, определяющие функцию φ (59).—**§ 42—46.** Теорема Грина; динамическая интерпретация. Формула для кинетической энергии. Теорема Кельвина о минимуме энергии (62).—**§ 47, 48.** Многосвязные области; замкнутые кривые и сечения (68).—**§ 49—51.** Безвихревое движение в многосвязных областях; многозначность потенциала скорости; циклические постоян-

ные (70). — **§ 52.** Случай несжимаемой жидкости. Условия, определяющие функцию φ (73). — **§ 53—55.** Обобщение Кельвина для теоремы Грина; динамическая интерпретация; энергия безвихревого движения жидкости в циклической области (74). — **§ 56—58.** Источники и стоки. Дублеты. Замена безвихревого движения жидкости источниками, распределенными по поверхности (78).

Глава IV

Плоское движение несжимаемой жидкости

§ 59. Функция тока Лагранжа (83). — **§ 60, 60a.** Соотношение между функцией тока и потенциалом скорости. Источник в плоскости. Электрические аналогии (85). — **§ 61.** Кинетическая энергия (88). — **§ 62.** Связь с теорией функций комплексного переменного (88). — **§ 63, 64.** Простейшие случаи циклического и нециклического движения. Изображение источника относительно окружности. Потенциал скорости нескольких источников (91). — **§ 65, 66.** Формулы преобразования. Конфокальные кривые. Истечение из отверстий (95). — **§ 67.** Общая формула. Метод Фурье (93). — **§ 68.** Движение цилиндра без циркуляции; линии тока (99). — **§ 69.** Движение цилиндра с циркуляцией. Подъемная сила. Траектория при постоянной силе (101). — **§ 70.** Замечание к более общей задаче. Методы преобразований. Задача Кутта (104). — **§ 71.** Методы преобразования. Поступательное движение цилиндра. Случай эллиптического цилиндра. Обтекание наклонной пластинки. Результирующая давления жидкости (107). — **§ 72.** Движение жидкости, вызванное вращением твердого тела. Вращение призматического сосуда произвольного сечения. Вращение эллиптического цилиндра в безграничной жидкости; общий случай движения с циркуляцией (111). — **§ 72a.** Представление эффекта движущегося цилиндра в жидкости диполем (115). — **§ 72b.** Формула Блазиуса для силы воздействия потенциального потока при обтекании цилиндра. Применения; теорема Жуковского; сила, создаваемая источником (117). — **§ 73.** Струйное течение. Метод Шварца при конформном преобразовании (120). — **§ 74—78.** Насадок Борда. Истечение жидкости из прямоугольного отверстия. Коэфициент сжатия. Удар струи о перпендикулярную и наклонную пластинку. Вычисление сопротивления. Задача Бобылева (123). — **§ 79.** Разрывные движения (133). — **§ 80.** Обтекание поверхности (135).

Глава V

Безвихревое движение жидкости: трехмерные задачи

§ 81, 82. Специальные функции. Теория Максвелла о полюсах (137). — **§ 83.** Уравнение Лапласа в полярных координатах (140). — **§ 84, 85.** Зональные функции. Гипергеометрические ряды. (141). — **§ 86.** Тессеральные и секториальные функции (145). — **§ 87, 88.** Сопряженные поверхностные функции. Обобщения (147). — **§ 89.** Символическая запись уравнения Лапласа. Решение в форме определенного интеграла (149). — **§ 90, 91.** Приложение специальных функций к гидродинамике. Импульсивное давление на сферической поверхности. Условие для скорости по нормали. Энергия возникшего движения (150). — **§ 91a.** Примеры: Сжатие сферического воздушного пузырька. Расширение сферической полости под действием внутреннего давления (152). — **§ 92, 93.** Движение сферы в безграничной жидкости. Присоединенная масса. Сфера в жидкости с концентрической сферической границей (154). — **§ 94—96.** Стоксовы функции тока. Выражение в сферических функциях. Линии тока на сфере. Замена сферы диполем.

Распределение давления по сфере (157). — **§ 97.** Обратный метод Ранкина (162). — **§ 98, 99.** Движение двух сфер в жидкости; кинематические условия. Присоединенные массы (163). — **§ 100, 101.** Цилиндрические функции. Решение уравнения Лапласа в бесселевых фуикциях. Обобщение на произвольные функции (168). — **§ 102.** Гидродинамические примеры. Истечение из круглого отверстия. Присоединенная масса круглого диска (171). — **§ 103—106.** Эллипсондальные функции для эллипсоида вращения. Решения уравнения Лапласа. Применение к движению эллипсоида вращения в жидкости (175). — **§ 107—109.** Функции для сплющеиного эллипсоида. Истечение из круглого отверстия. Линии тока при обтекаиии круглого диска. Поступательное и вращательное движения сплющенного эллипсоида (180). — **§ 110.** Движение жидкости в эллипсоидальной полости (184). — **§ 111.** Общее выражение для $\Delta\varphi$ в ортогональных координатах (186). — **§ 112.** Софокусные поверхности второго порядка; эллиптические координиаты (187). — **§ 113.** Истечение из эллиптического отверстия (189). — **§ 114—115.** Поступательное и вращательное движение эллипсоида в жидкости. Коэфицнент присоединенной массы (191). — **§ 116.** Отношение к другим задачам. (196). — *Добавление к главе V.* Гидродинамические уравнения, отнесенные к общим ортогональным координатам (197).

Глава VI

Движение твердых тел в жидкости. Дииамическая теория

§ 117, 118. Кинематические условия в случае одного тела (200). — **§ 119.** Теория импульсов (202). — **§ 120.** Уравнеиия движения жидкости в системе координат, связанной с телом (204). — **§ 121, 121а.** Киистическая эиергия. Коэфициент присоединениой массы. Представление движения жидкостн вдали от тела диполям (204). — **§ 122, 123.** Компоиенты импульса. Обратные формулы (207). — **§ 124.** Выражение для гидродинамических сил. Три постоянных направлення движения; устойчивость (210). — **§ 125.** Возможные случаи установившегося движения. Движение от импульсивной пары (213). — **§ 126.** Гидрокинетическая симметрия (215). — **§ 127—129.** Движение тела вращения. Устойчивость движения, параллельного оси симметрии. Влияние вращения. Другие случаи устаиовившегося движения (218). — **§ 130.** Движение винтовой поверхности (224). — **§ 131.** Коэфициент присоединенной массы жидкости, заключенной в движущейся твердой оболочке (224). — **§ 132—134.** Циклическое движение жидкости через отверстия в теле. Установившееся движение кольца; условия устойчивости (225). — **§ 135, 136.** Уравнения Лагранжа в обобщенных координатах. Принцип Гамильтона. Применение в гидродинамике (233). — **§ 137, 138.** Примеры. Движение сферы вблизи твердой стенки. Движение двух сфер по линии их центров (237). — **§ 139—141.** Изменение уравнений Лагранжа в случае циклического движения; игнорирование координатами. Уравнения для вращающейся системы (241). — **§ 142, 143.** Кинетостатика. Гидродинамические силы, действующие на тело, обтекаемое ускоренным потоком (246). — **§ 144.** Замечанне к интуитивному распространению принципов динамики (251).

Глава VII

Вихревое движение

§ 145. Вихревая линия и вихревая нить. Кинематические свойства (251). — **§ 146.** Постоянство вихрей. Доказательство Кельвина. Уравнения Коши, Стокса и Гельмгольца. Движение жидкости в неподвижном эллипсоидальном сосуде с постоянной угловой скоростью в

каждой точке (253). — **§ 147.** Условия, определяющие вихревое движение (259). — **§ 148, 149.** Выражение скорости через компоненты вихря; электромагнитные аналогии. Случай изолированного вихря (260). — **§ 150.** Потенциал скорости, создаваемый вихрями (265). — **§ 151.** Вихревой слой (267). — **§ 152, 153.** Количество движения и энергия вихревой системы (269). — **§ 154, 155.** Прямолинейные вихри. Линии тока вихревой пары. Другие примеры (275). — **§ 156.** Исследования устойчивости одинарного и двойного вихревого ряда. Вихревая дорожка Кармана (281). — **§ 157.** Теоремы Кирхгофа для параллельных вихрей (288). — **§ 158, 159.** Устойчивость вихревых колец. Эллиптический вихрь Кирхгофа (290). — **§ 159a.** Движение твердого тела во вращающейся жидкости (293). — **§ 160.** Вихри в криволинейном слое жидкости (298). — **§ 161—163.** Круговые вихри. Потенциал скорости и функция тока изолированного вихревого кольца. Линии тока. Импульс и энергия; скорость движения вихревого кольца (299). — **§ 164.** Взаимное влияние вихревых колец. Изображение вихревого кольца относительно сферы (305). — **§ 165.** Общие условия для установившегося движения жидкости. Цилиндрические и сферические вихри (307). — **§ 166.** Ссылки на другие работы (310). — **§ 166a.** Теоремы Бьеркнеса (311). — **§ 167.** Преобразование Клебша уравнений гидродинамики (312).

Глава VIII

Приливные волны

§ 168. Общая теория малых колебаний, главные колебания, вынужденные колебания (314). — **§ 169—174.** Свободные волны в прямолинейном канале; скорость распространения волны; эффект начальных условий; физический смысл различных приближений; энергия системы волн (320). — **§ 175.** Установившееся движение (328). — **§ 176.** Наложение волновых систем; отражение (330). — **§ 177—179.** Эффект возмущающих сил; свободные и вынужденные колебания в ограниченном канале (331). — **§ 180—184.** Каналовая теория приливов. Потенциал возмущающих сил. Приливы в экваториальном канале и канале, параллельном экватору; полусуточные и суточные приливы. Канал, совпадающий с меридианом. Изменение среднего уровня. Двухнедельный прилив. Экваториальный канал конечной длины. Продолжительность приливов (336). — **§ 185, 186.** Волны в канале произвольного сечения. Примеры свободных и вынужденных колебаний. Увеличение прилива в мелких морях и лиманах (344). — **§ 187, 188.** Волны конечной амплитуды. Изменение вида прогрессивной волны. Приливы второго порядка (350). — **§ 189, 190.** Движение волны в двух горизонтальных направлениях; общее уравнение. Колебание в прямоугольном бассейне (355). — **§ 191, 192.** Колебания в круглом бассейне. Функции Бесселя; эллиптический бассейн; приближение к медленному течению (358). — **§ 193.** Случай произвольной глубины. Круглый бассейн (365). — **§ 194—197.** Распространение возмущений от центра; функции Бесселя второго рода. Волны, вызванные местным периодическим давлением. Общая формула для расходящихся волн. Примеры на неустановившееся местное возмущение (367). — **§ 198—201.** Колебание тонкого сферического слоя воды; свободные и вынужденные волны. Эффект взаимного притяжения воды. Приложение к случаю океана, ограниченного меридианами и параллелями (378). — **§ 202, 203.** Уравнения движения динамической системы относительно вращающихся осей (385). — **§ 204—205a.** Малые колебания вращающейся системы; устойчивость обыкновенная и вековая. Влияния малой степени вращения на тип и частоту нормальных видов колебаний (388). — **§ 205b.** Приближенное вычисление частот (393). — **§ 206.** Вынужденные

колебания (396). — **§ 207, 208.** Гидродинамические примеры; приливные колебания вращающегося тонкого слоя воды; волны в сужающемся канале (398). — **§ 209—211.** Вращающийся круглый бассейн постоянной глубины; свободные и вынужденные колебания (402). — **§ 212.** Круглый бассейн произвольной глубины (409). — **§ 212a.** Примеры приближенных решений (412). — **§ 213, 214.** Приливные колебания на вращающемся земном шаре. Кинетическая теория Лапласа (414). — **§ 215—217.** Симметричные колебания. Приливы длинных периодов (419). — **§ 218—221.** Суточные и полусуточные приливы. Рассмотрение решений Лапласа (428). — **§ 222, 223.** Исследования Hough'a; цитаты и результаты (437). — **§ 223a.** Исследования Гальдсброу (443). — **§ 224.** Изменение кинетической теории для действительной конфигурации океана; вопрос фазы (444). — **§ 225, 226.** Устойчивость океана. Замечания относительно общей теории кинитеческой устойчивости (447). Приложение: Силы, вызывающие приливы (449).

Глава IX

Поверхностные волны

§ 227. Двухмерные задачи; условия на поверхности (455). — **§ 228.** Стоячие волны; линии тока (456). — **§ 229, 230.** Прогрессивные волны; траектории частиц. Скорость волны; числовая таблица. Энергия гармонической волны (458). — **§ 231.** Колебания границы раздела двух жидкостей (463). — **§ 232.** Неустойчивость граиицы двух потоков (467). — **§ 233, 234.** Стационарные пр грессивные волны (470). — **§ 235.** Волны в неоднородной жидкостн (473). — **§ 236, 237.** Групповая скорость. Передача энергии (476). — **§ 238—240.** Задача Коши-Пуассона; волны, вызванные начальным местным возвышением жидкости или местным импульсом (481). — **§ 241.** Приближенная формула Кельвина для эффекта местного возмущения в середине прямой линии. Графические построения (494). — **§ 242—246.** Поверхностные возмущения в потоке. Случай конечной глубины. Влияние неровностей дна (498). — **§ 247.** Волны, возникающие при погружении цилиндра в жидкость (513). — **§ 248, 249.** Общая теория волн, возникающих при подвижном возмущении. Волновое сопротивление (516). — **§ 250.** Волны конечной высоты. Волны постоянного вида. Предельные формы (521). — **§ 251.** Волны Герстнера (526). — **§ 252, 253.** Одиночные волны. Колебательные волны Kortemeg'a и De Vries (528). — **§ 254.** Динамические условия Гельмгольца для волн постоянного вида (534). — **§ 255, 256.** Распространение волн в горизонтальной плоскости. Влияние местного возмущения. Влияние перемещающегося давления на возмущение в жидкости; формы волн (537). — **§ 256a, 256b.** Перемещающиеся возмущения другого вида. Корабельные волны. Волновое сопротивление. Влияние конечной глубины на форму волны (546). — **§ 257—259.** Стоячие волны в ограниченной массе воды. Распространение колебаний в канале треугольного сечения и в канале круглого сечения (550). — **§ 260, 261.** Продольные колебания; канал треугольного сечения; гребень волны (556). — **§ 262—264.** Колебание жидкого шара, линии тока. Сферический океан постоянной глубины (563). — **§ 265.** Капиллярность. Условия на поверхности (568). — **§ 266.** Капиллярные волны. Групповая скорость (570). — **§ 267, 268.** Волны под действием силы тяжести и капиллярности. Минимум скорости волны. Волны на поверхности раздела двух потоков (573). — **§ 269.** Волны, вызванные местным возмущением. Эффект движущегося источника возмущения; волны и рябь (578). — **§ 270—272.** Возмущение на поверхности потока; формальные исследования. Формы волны (580). — **§ 273, 274.** Колебания цилиндрического столба жидкости. Неустойчивость струи (588). — **§ 275.** Колебание жидкого шара и тора (591).

Глава X

Звуковые волны

§ 276—280. Плоские волны; скорость звука; энергия системы волн (593). — **§ 281—284.** Плоские волны конечной амплитуды; методы Римана и Earnshaw. Условия стоячих волн; исследования Ранкина. Волны уплотнения (600). — **§ 285, 286.** Сферические волны. Решение при начальных условиях (611). — **§ 287, 288.** Общее уравнение звуковых волн. Уравнение энергии (616). — **§ 289.** Простые гармонические колебания. Источники и диполи. Распространение энергии (620). — **§ 290.** Применение Гельмгольцем теоремы Грина. Потенциал скорости, выраженный через потенциалы источников, распределенных по поверхности. Формула Кирхгофа (623). — **§ 291.** Периодические возмущающие силы (627). — **§ 292.** Приложение сферических функций. Общее уравнение (629). — **§ 293.** Колебание воздуха в сферическом сосуде. Колебание сферического слоя (633). — **§ 294.** Распространение волн от сферической поверхности. Уменьшение амплитуды повторного движения (636). — **§ 295.** Влияние воздуха на колебания маятника, поправка на момент инерции шарика; затухания во времени (638). — **§ 296—298.** Рассеивание звуковых волн сферическим препятствием. Удары волн о подвижную сферу; случай синхроиности (640). — **§ 299, 300.** Диффракция длинных волн плоским диском, отверстием в плоском экране и препятствием произвольной формы (647). — **§ 301.** Решение уравнения звука в сферических функциях. Условия на фронте волны (654). — **§ 302.** Звуковые волны в двух измерениях. Эффект перемещающегося источника; сравнение с одномерным и трехмерным случаем (657). — **§ 303, 304.** Простые гармонические колебания; решение в функциях Бесселя. Колебание цилиндра. Рассеиванне волн цилиндрическим препятствием (660). — **§ 305.** Приближенная теория диффракции длинных волн в двух измерениях. Диффракция острой кромкой и щелью в тонком экране (665). — **§ 306, 307.** Отражение и передача звуковых волн решеткой (669). — **§ 308.** Диффракция полуплоскостью (674). — **§ 309, 310.** Вертикальное распространение волн в атмосфере; конвективный и изотермический закон (678) — **§ 311, 311a, 312.** Теории длинных атмосферных волн (685). — **§ 313.** Общее уравнение колебаний газа под действием постоянной силы (695). — **§ 314, 315.** Колебание атмосферы в невращающемся шаре (698). — **§ 316.** Атмосферные приливы во вращающемся шаре. Резонанс (699).

Глава XI

Вязкость

§ 317, 318. Теория диссипативных сил. Одна степень свободы; свободные и вынужденные колебания. Влияние трения на фазу колебаний (703). — **§ 319.** Приложение к приливам в экваториальном канале; запаздывание приливов и приливы, относящиеся к трению (707). — **§ 320.** Уравнения общей диссипативной системы; члены, зависящие от трения и вращения (710). — **§ 321.** Колебание диссипативной системы около положения абсолютного равновесия (711). — **§ 322.** Влияние гиростатических членов. Пример для двух степеней свободы; возмущающие силы длинного периода (713). — **§ 323—325.** Вязкость жидкости; особенность напряжений; формулы преобразований (716). — **§ 326, 327.** Напряжения как линейные функции скорости деформации. Коэфициент вязкости. Граничные условия; вопрос о скольжении (718). — **§ 328. 328a.** Динамические уравнения. Уравнения Гельмгольца; диффузия вихря (722). — **§ 329.** Рассеиванне энергии в вязкой жидкости (725). — **§ 330, 330a.** Течение жидкости между двумя

параллельными плоскостями. Эксперименты Хеле-Шоу. Теория смазки; пример (728). — **§ 331, 332.** Течение в трубе круглого сечения. Закон Пуазейля; вопрос скольжения. Другие формы сечений (732). — **§ 333, 334.** Случаи установившегося движения. Практические ограничения (736). — **§ 334a.** Примеры неустановившегося движения. Диффузия вихря. Влияние поверхностных сил на глубину воды (739). — **§ 335, 336.** Медленное установившееся движение; общее решение в сферических функциях; формулы для напряжений (744). — **§ 337.** Прямолинейное движение шара; сопротивление; ограничение скорости; линии тока. Случай жидкого шара и твердого со скольжением (748). — **§ 338.** Метод Стокса; решение для фуикции тока (755). — **§ 339.** Устаиовившееся движение эллипсоида (758). — **§ 340, 341.** Установившееся движение в поле постоянных сил (760). — **§ 342.** Установившееся движение сферы; критика Озина и решение уравнений (764). — **§ 343, 343a.** Установившиеся движения цилиндра; изучение методом Озина. Приложение к другим вопросам (772). — **§ 344.** Рассеивание энергии в установившемся движении. Теоремы Гельмгольца и Кортвега. Обобщение Рэлея. (776). — **§ 345—347.** Задачи периодического движения. Ламинарное движение; диффузия вихря. Колебания пластины. Периодические приливные силы; слабое влияние вязкости в быстром движении (779). — **§ 348—351.** Эффект вязкости на волны в воде. Создание волн ветром. Успокаивающее действие масла на волны (784). — **§ 352, 353.** Периодическое движение со сферическими границами; общее решение в сферических фуикциях (796). — **§ 354.** Приложения; ослабление движения в сферическом сосуде, крутильные колебания сферы, наполненной жидкостью (802). — **§ 355.** Влияние вязкости на колебания жидкого шара (805). — **§ 356.** Влияние на вращательные колебания сферы и на колебания маятника (808). — **§ 357.** Замечания к задачам в двух измерениях (811). — **§ 358.** Вязкость газов; диссипативная функция (813). — **§ 359, 360.** Уменьшенне плоских звуковых волн от вязкости; сочетание вязкости с теплопроводностью (815). — **§ 360a.** Волны постоянного вида, вызванные вязкостью (819). — **§ 360b.** Поглощение звука пористыми стенками (821). — **§ 361.** Эффект вязкости на расхождение волн (824). — **§ 362, 363.** Влияние на рассеивание волн сферической неподвижной или свободной поверхности (829). — **§ 364.** Затухание звуковых волн в сферическом сосуде (835). — **§ 365, 366.** Турбулентное движение. Эксперименты Рейнольдса; критическая скорость воды в трубе; закон сопротивления. Вывод из теории размерности (837). — **§ 366a.** Движение между двумя вращающимися цилиндрами (842). — **§ 366b.** Коэфициент турбулентности; завихренность или молярная вязкость (843). — **§ 366c.** Атмосферная турбулентиость; изменение ветра с высотой (845). — **§ 367, 368.** Теоретические исследования Рэлея и Кельвина (846). — **§ 369.** Статистический метод Рейнольдса (852). — **§ 370.** Сопротивление жидкости. Критика разрывных решений Кирхгофа и Рэлея (858). — **§ 370a.** Формула Кармана для сопротивления (859). — **§ 370b.** Поток с циркуляцией (861). — **§ 371.** Формулы размерности. Соотношения между моделью и натурой (862). — **§ 371a, b, c.** Пограничный слой. Замечания к теории крыла (864). — **§ 371d, e, f, g.** Влияние сжимаемости. Недостаточность линий тока в потоке с большими скоростями (873).

Глава XII

Вращающиеся массы жидкости

§ 372. Формы относительного равновесия. Общие теоремы (880). — **§ 373.** Формулы, относящиеся к притяжению эллипсоидами. Потенциальная энергия эллипсоидальных масс (884). — **§ 374.** Эллипсоид Маклорена. Соотношения между эксцентриситетом, угловой скоростью

и моментом количества движения; числовые таблицы (887). — **§ 375.** Эллипсоид Якоби. Вычисление формы эллипсоида равновесия с помощью рядов. Числовые результаты (890). — **§ 376.** Другие формы относительного равновесия. Вращающееся кольцо (893). — **§ 377.** Общая задача относительного равновесия; исследование Пуанкаре. Ряды, определяющие формы равновесия; предельные формы и разветвленные формы. Перемена устойчивости (897). — **§ 378—380.** Приложения к вращающимся системам. Вековая устойчивость эллипсоидов Маклорена и Якоби. Равновесие фигуры грушевидной формы (900). — **§ 381.** Малые колебания масс вращающихся эллипсоидов. Метод Пуанкаре. Ссылка (904). — **§ 382.** Исследование Дирихле, конечные гравитационные колебания жидкого эллипсоида при отсутствии вращения. Колебания вращающегося эллипсоида вращения (907). — **§ 383.** Эллипсоид Дедекинда. Невращающийся эллипсоид. Вращающийся эллиптический цилиндр (910). — **§ 384.** Свободные и вынужденные колебания вращающегося эллипсоида, наполненного жидкостью. Прецессия (913). — **§ 385.** Прецессия жидкого эллипсоида (918).

Именной указатель 922

Предметный указатель 925

ГЛАВА ПЕРВАЯ

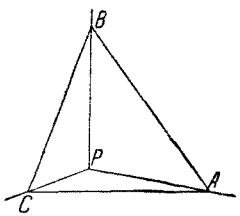
УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Все исследования этой книги основываются на предположении, что изучаемое вещество можно рассматривать практически непрерывным и однородным, т. е. что свойства наименьших частей, на которые мы можем мыслить вещество разделенным, являются такими же, как и свойства всей массы.

Основное свойство жидкости состоит в следующем: в напряженном состоянии жидкость не может быть в равновесии, если силы, действующие между двумя смежными частями жидкости, расположены наклонно к их общей поверхности. Гидростатика основывается на этом свойстве жидкости, и последнее подтверждается полным согласием между теорией и опытом. Однако непосредственное наблюдение показывает, что в движущихся жидкостях могут иметь место косо направленные напряжения. Пусть, например, сосуд, имеющий форму круглого цилиндра и содержащий воду (или другую жидкость), вращается около своей оси, направленной вертикально. Если угловая скорость сосуда постоянна, то мы очень скоро увидим, что жидкость с сосудом вращаются как одно твердое тело. Если затем привести сосуд в состояние покоя, то движение жидкости еще будет продолжаться некоторое время, становясь постепенно все более медленным, и, наконец, прекратится; мы увидим, что в течение этого процесса частицы жидкости, которые более удалены от оси, будут отставать от частиц, находящихся ближе к оси, и скорее потеряют свое движение. Это явление указывает на то, что между смежными частями жидкости возникают силы, одна из компонент которых направлена тангенциально к их общей поверхности. В самом деле, если бы силы взаимодействия между частицами жидкости были направлены нормально к их общей поверхности, то ясно, что момент количества движения относительно оси сосуда каждой части жидкости, ограниченной поверхностью вращения около этой оси, был бы постоянен. Далее мы заключаем, что тангенциальные силы отсутствуют, пока жидкость движется как твердое тело; они появляются только тогда, когда имеет место изменение формы частиц жидкости и эти силы направлены так, что они стремятся помешать изменению формы.

§ 2. Однако принято сначала совершенно опускать из рассмотрения тангенциальные напряжения. Их действие во многих практических случаях очень мало и, независимо от этого, целесообразно расчленить довольно значительные трудности нашей задачи путем рассмотрения сначала лишь действий одних нормальных напряжений. В соответствии с этим дальнейшие исследования тангенциальных напряжений мы откладываем до XI главы.

Если напряжение, приложенное к какому-нибудь элементу поверхности, проходящему через точку P жидкости, направлено нормально к этому элементу, то величина этого напряжения (на единицу площади) не зависит от направления этого элемента поверхности. Докажем эту теорему сейчас, чтобы потом иметь возможность на нее ссылаться. Проведем через точку P три взаимно перпендикулярные прямые PA, PB, PC; пусть плоскость, лежащая бесконечно близко к точке P и имеющая с указанными прямыми направляющие косинусы l, m, n, пересекает эти прямые в точках A, B, C. Пусть будут p, p_1, p_2, p_3 напряжения [1]) для граней ABC, PBC, PCA, PAB тетраедра $PABC$. Если мы обозначим площадь первого треугольника через Δ, то площади остальных треугольников будут соответственно равны $l\Delta$, $m\Delta$, $n\Delta$. Отсюда, составляя уравнение движения тетраедра параллельно PA, получим



Фиг. 1.

$$p_1 \cdot l\Delta = pl \cdot \Delta;$$

мы пренебрегли здесь как членами, представляющими изменение количества движения, так и компонентами внешних сил, так как эти величины пропорциональны массе тетраедра и потому являются бесконечно малыми третьего порядка, тогда как оставленные нами члены суть второго порядка малости. Отсюда следует, что $p = p_1$ и аналогично $p = p_2 = p_3$, что и доказывает нашу теорему.

§ 3. Уравнения движения жидкости можно представить в двух различных формах соответственно двум способам, которые можно предложить при исследовании движения жидкой массы под действием данных сил и при определенных граничных условиях. Именно, или мы можем сделать предметом нашего исследования определение для любого момента времени скорости, давления и плотности во всех точках пространства, наполненного жидкостью, или же мы можем стремиться определить историю каждой отдельной жидкой частицы. Уравнения, которые получаются этими двумя способами, называются

---

[1]) Напряжения считаются положительными в случае давления и отрицательными, если имеет место растяжение. Однако большинство жидкостей при обыкновенных условиях может испытывать только очень малое растяжение, так что p почти всегда положительно.

обыкновенно, в согласии с немецкими математиками, как эйлерова и лагранжева формы уравнений гидродинамики, хотя на самом деле обе формы принадлежат Эйлеру [1]).

Уравнения Эйлера

§ 4. Пусть будут u, v, w компоненты скорости в точке (x, y, z) в момент t, параллельные осям координат. Таким образом эти компоненты суть функции независимых переменных x, y, z, t. Для каждого частного значения t количества u, v, w определяют движение в этот момент для всех точек пространства, наполненного жидкостью; напротив, для определенных значений переменных x, y, z количества u, v, w дают историю того, что происходит в этом определенном месте.

В большинстве случаев мы будем предполагать, что не только u, v, w суть конечные непрерывные функции от x, y, z, но что и их производные по координатам первого порядка $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}\right.$ и т. д.$\left.\right)$ также всюду конечны [2]); мы будем понимать под непрерывным движением такое движение, которое подчинено этим ограничениям. Исключения, если они встретятся, потребуют особых исследований. При определенном таким образом непрерывном движении относительная скорость двух смежных частиц P и P' всегда бесконечно мала, так что отрезок PP' остается всегда величиной одного и того же порядка. Отсюда следует, что если мы предположим, что вокруг P расположена малая замкнутая поверхность, которая движется вместе с жидкостью, то эта поверхность будет содержать внутри себя постоянно одно и то же вещество, и всякая поверхность, которая движется вместе с жидкостью, разделяет всегда и полностью массу жидкости на две части, расположенные по обе стороны этой поверхности.

§ 5. Значения u, v, w для последовательных значений t дают некоторым образом картину отдельных состояний движения, но они, однако, не дают прямой возможности установить тождество каждой частицы.

Чтобы определить изменение какой-нибудь функции $F(x, y, z, t)$, обусловливаемое движением частиц, заметим, что частица, которая в

---

[1]) Euler, Principes généraux du mouvement des fluides, Hist. de l'Acad. de Berlin, 1755. De principiis motus fluidorum, Novi Comm. Acad. Petrop., XIV, 1 (1759). Лагранж опубликовал три сочинения об уравнениях движения; первое в связи с принципом наименьшего действия в Miscellanea Taurinensia, II (1760) [Oeuvres, Paris, 1867—1892, I]; второе — в своем Mémoire sur la Théorie du Mouvement des Fluides, Nouv. mém. de l'Acad. de Berlin, 1781 [Oeuvres IV; наконец, третье — в Mécanique Analytique. В этом последнем изложении он начинает со второй формы уравнений (§ 14 в настоящей книге), но переходит сейчас же к обозначениям Эйлера.

[2]) Полезно заметить, принимая во внимание дальнейшие исследования, приведенные под заглавием „Вихревое движение", что эти производные необязательно должны предполагаться непрерывными.

момент t была в положении (x, y, z), в момент $t+\delta t$ будет находиться в положении $(x+u\,\delta t,\ y+v\,\delta t,\ z+w\,\delta t)$, так что соответствующее значение F будет равно

$$F(x+u\,\delta t,\ y+v\,\delta t,\ z+w\,\delta t,\ t+\delta t) = \\ = F + u\,\delta t\frac{\partial F}{\partial x} + v\,\delta t\ \frac{\partial F}{\partial y} + w\,\delta t\ \frac{\partial F}{\partial z} + \delta t\ \frac{\partial F}{\partial t}\,.$$

Если, следуя Стоксу, мы введем символ $\frac{D}{Dt}$ для обозначения диференцирования, вытекающего из рассмотрения движения любой индивидуальной частицы жидкости, то новое значение F выразится через $F+\frac{DF}{Dt}\delta t$, где

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z}\,. \qquad (1)$$

§ 6. Чтобы получить уравнения движения, обозначим через p давление, через ϱ плотность, через X, Y, Z компоненты внешних сил, отнесенные к единице массы, для точки (x, y, z) в момент t. Рассмотрим элемент объема, имеющий центр в точке (x, y, z), ребра δx, δy, δz которого параллельны прямоугольным осям координат. Величина, на которую возрастает компонента по оси x количества движения этого элемента в единицу времени, равна $\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\frac{Du}{Dt}$; эта величина должна равняться проекции на ось x сил, действующих на этот элемент. Проекция на ось x внешних сил равна $\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,X$. Давление на грань, параллельную плоскости yz, лежащую ближе к началу координат, равно

$$\left(p - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\right)\delta y\,\delta z\,^{1}).$$

Давление же на противолежащую грань равно

$$\left(p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\right)\delta y\,\delta z.$$

Разность этих давлений равна результирующему давлению

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\,\delta y\,\delta z$$

в направлении положительной оси x. Давления же на остальные грани перпендикулярны к оси x. Таким образом мы имеем

$$\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\ \frac{Du}{Dt} = \varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,X - \frac{\partial p}{\partial x}\delta x\,\delta y\,\delta z.$$

---

[1]) Легко видеть, что, согласно теореме о среднем значении, среднее давление на какую-нибудь боковую грань элемента можно положить равным давлению в центре соответствующей грани.

Вставляя значение для $\frac{Du}{Dt}$ из выражения (1) и составляя аналогичные уравнения относительно остальных осей, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=X-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}&=Y-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=Z-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

§ 7. К этим динамическим уравнениям мы должны прежде всего присоединить определенное кинематическое соотношение между u, v, w, ϱ, которое получается следующим образом.

Обозначая через Q объем движущегося элемента жидкости, согласно закону сохранения массы, мы будем иметь

$$\frac{D(\varrho Q)}{Dt}=0,$$

или

$$\frac{1}{\varrho}\frac{D\varrho}{Dt}+\frac{1}{Q}\frac{DQ}{Dt}=0. \qquad (1)$$

Чтобы вычислить значение $\frac{1}{Q}\frac{DQ}{Dt}$, рассмотрим элемент, заполняющий в момент t параллелепипед $\delta x\,\delta y\,\delta z$, вершина P которого лежит в точке (x, y, z), а ребра PL, PM, PN параллельны координатным осям. В момент $t+\delta t$ рассматриваемый элемент образует косой параллелепипед, и так как скорости частицы L относительно частицы P равны

$$\frac{\partial u}{\partial x}\delta x,\quad \frac{\partial v}{\partial x}\delta x,\quad \frac{\partial w}{\partial x}\delta x,$$

то по прошествии времени δt проекции ребра PL на координатные оси будут равны

$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\delta t\right)\delta x,\quad \frac{\partial v}{\partial x}\delta t\,\delta x,\quad \frac{\partial w}{\partial x}\delta t\,\delta x.$$

Пренебрегая членами высшего порядка относительно δt, мы найдем, что длина этого ребра будет равна

$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\delta t\right)\delta x;$$

аналогично находим и остальные ребра. Так как углы параллелепипеда только бесконечно мало отличаются от прямых углов, то объем его, если мы пренебрежем членами высшего порядка относительно δt, выразится произведением трех ребер, т. е. мы получим

$$Q+\frac{DQ}{Dt}\delta t=\left\{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\delta t\right\}\delta x\,\delta y\,\delta z,$$

или

$$\frac{1}{Q}\frac{DQ}{Dt}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}. \qquad (2)$$

Следовательно, из (1) мы находим

$$\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \tag{3}$$

Это уравнение называется уравнением неразрывности.

Выражение

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{4}$$

которое, как мы видим, измеряет увеличение единицы объема жидкости в единицу времени в точке (x, y, z), обыкновенно называется объемным расширением в этой точке. С более общей точки зрения выражение (4) называется дивергенцией (расхождением) вектора $u, v, w)$; часто оно обозначается следующим образом:

$$\operatorname{div}(u, v, w).$$

Предыдущее рассуждение в существенном принадлежит Эйлеру [1]). Другой, теперь более употребительный метод вывода уравнения неразрывности состоит в том, что вместо того, чтобы следовать, как выше, за движением элемента жидкости, рассматривают элемент объема $\delta x\, \delta y\, \delta z$ и исследуют, как изменяется заключенная в нем масса вследствие протекания жидкости через поверхность этого элемента объема. Если центр элемента находится в точке (x, y, z), то масса, которая входит за единицу времени в рассматриваемый элемент через его грань, ближайшую к началу координат и параллельную плоскости yz, равна

$$\left(\varrho u - \frac{1}{2}\frac{\partial \varrho u}{\partial x}\delta x\right)\delta y\, \delta z,$$

а масса, которая выходит через противоположную грань, равна

$$\left(\varrho u + \frac{1}{2}\frac{\partial \varrho u}{\partial x}\delta x\right)\delta y\, \delta z.$$

Следовательно, при движении жидкости через обе эти грани, получается в единицу времени внутри элемента объема излишек жидкости, равный

$$-\frac{\partial \varrho u}{\partial x}\delta x\, \delta y\, \delta z.$$

Подсчитывая таким же образом результат протекания жидкости через остальные грани, мы получим для общего излишка массы в объеме $\delta x\, \delta y\, \delta z$ за единицу времени выражение

$$-\left(\frac{\partial \varrho u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v}{\partial y} + \frac{\partial \varrho w}{\partial z}\right)\delta x\, \delta y\, \delta z.$$

Так как изменение количества вещества в некоторой области может обусловливаться только протеканием вещества через границу области,

---

[1]) См. прим. на стр. 15.

то предыдущее выражение должно равняться

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z).$$

Отсюда получаем уравнение неразрывности в следующем виде:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\frac{\partial \varrho u}{\partial x}+\frac{\partial \varrho v}{\partial y}+\frac{\partial \varrho w}{\partial z}=0. \tag{5}$$

§ 8. Рассмотрим теперь некоторые физические свойства жидкости, поскольку они влияют на величины, входящие в наши уравнения.

Для несжимаемой, сохраняющей постоянный объем, или капельной, жидкости мы имеем $\frac{D\varrho}{Dt}=0$. В этом случае уравнение неразрывности принимает простой вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{1}$$

При этом не предполагается, что жидкость имеет однородную (всюду одинаковую) плотность, хотя это, конечно, в дальнейшем есть наиболее важный случай.

Если мы желаем принять во внимание малую сжимаемость действительных капельных жидкостей, то должны взять уравнение вида

$$p=\varkappa\frac{(\varrho-\varrho_0)}{\varrho_0}, \tag{2}$$

или

$$\frac{\varrho}{\varrho_0}=1+\frac{p}{\varkappa}, \tag{3}$$

где $\varkappa$ обозначает так называемую объемную упругость. В случае газа, температура которого постоянна в пространстве и времени, имеет место изотермическое соотношение

$$\frac{p}{p_0}=\frac{\varrho}{\varrho_0}, \tag{4}$$

где p_0, ϱ_0 есть некоторая пара соответствующих друг другу значений для рассматриваемой температуры.

Однако во многих случаях движения газа его температура не остается постоянной, но повышается или понижается для каждого элемента, смотря по тому, сжимается газ или расширяется. Если этот процесс происходит так быстро, что мы можем пренебречь излишком или потерей тепла, происходящими вследствие проводимости и излучения, то мы получаем адиабатическое соотношение

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\gamma}, \tag{5}$$

где p_0 и ϱ_0 есть некоторая пара соответственных значений для рассматриваемого элемента. Постоянная γ есть отношение обеих удельных теплоемкостей газа; для атмосферного воздуха и некоторых других газов ее значение равно 1,408.

§ 9. На пограничных поверхностях жидкости (если они имеются) уравнение неразрывности должно быть заменено специальным условием на поверхности. Так, на *неподвижной* пограничной поверхности проекция скорости на нормаль к поверхности должна равняться нулю, т. е. если l, m, n суть направляющие косинусы нормали к поверхности, то должно быть

$$lu + mv + nw = 0. \tag{1}$$

Напротив, на поверхности разрыва, т. е. на поверхности, на которой значения u, v, w меняются скачками при переходе с одной стороны поверхности на другую, мы должны иметь

$$l(u_1 - u_2) + m(v_1 - v_2) + n(w_1 - w_2) = 0, \tag{2}$$

причем индексы служат для отличия количеств на обеих сторонах поверхности. Такое же соотношение должно иметь место и на поверхности раздела между жидкостью и движущимся твердым телом.

Приведенные выше случаи суть частные случаи следующего общего условия на поверхности (граничного условия). Если $F(x, y, z, t) = 0$ есть уравнение граничной поверхности, то для всякой точки этой поверхности имеем

$$\frac{DF}{Dt} = 0. \tag{3}$$

В самом деле, относительная скорость каждой частицы, лежащей на поверхности, должна быть направлена в точности тангенциально к поверхности (или равна нулю); в противном случае через поверхность имел бы место конечный поток жидкости. Отсюда следует, что скорость изменения F в любой момент времени для всякой частицы поверхности должна равняться нулю.

Более полное доказательство, данное Кельвином [1]), состоит в следующем. Чтобы найти компоненту скорости ($\dot{\nu}$) поверхности $F(x, y, z, t) = 0$, нормальную к этой поверхности, рассмотрим уравнение

$$F(x + l\dot{\nu}\,\delta t,\ y + m\dot{\nu}\,\delta t,\ z + n\dot{\nu}\,\delta t,\ t + \delta t) = 0,$$

где l, m, n суть направляющие косинусы нормали в любой точке (x, y, z) к этой поверхности. Отсюда следует

$$\dot{\nu}\left(l\frac{\partial F}{\partial x} + m\frac{\partial F}{\partial y} + n\frac{\partial F}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Так как

$$l = \frac{\partial F}{\partial x} : R,\quad m = \frac{\partial F}{\partial y} : R,\quad n = \frac{\partial F}{\partial z} : R,$$

где

$$R = \left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

---

[1]) Thomson W., Notes on Hydrodynamics, Cambr. and Dub. Math. Journ., Febr. 1848 (Mathematical and Physical Papers. Cambridge, 1882. I, 83).

то мы имеем

$$\dot{\nu} = \frac{1}{R}\frac{\partial F}{\partial t}. \tag{4}$$

Так как во всякой точке поверхности должно быть

$$\dot{\nu} = lu + mv + nw,$$

то, подставляя сюда вышеприведенные значения для l, m, n, мы и получим уравнение (3).

Уравнение с частными производными (3) удовлетворяется на всякой поверхности, движущейся вместе с жидкостью. Это вытекает непосредственно из смысла оператора $\frac{D}{Dt}$. Возникает вопрос, существует ли обязательно обратная теорема, т. е. должна ли движущаяся поверхность, уравнение которой $F=0$ удовлетворяет условию (3), всегда состоять из тех же самых частиц. Рассмотрим такую поверхность и отметим некоторую частицу P, лежащую на ней в момент t. Из уравнения (3) следует, что скорость, с которой P удаляется от поверхности, в момент t равна нулю, и легко видеть, что при *непрерывном движении* (согласно определению в § 4) компонента скорости частицы, находящейся на бесконечно малом расстоянии ζ от поверхности, взятая по нормали к движущейся поверхности, будет порядка ζ, т. е. что она равна $G\zeta$, где G конечно. Поэтому уравнение движения частицы P относительно поверхности может быть представлено следующим образом:

$$\frac{D\zeta}{Dt} = G\zeta.$$

Отсюда следует, что $\ln\zeta$ растет с конечной скоростью ко времени, и так как он в начальный момент, когда $\zeta=0$, равен отрицательной бесконечности, то он остается таким всегда, т. е. ζ остается для частицы P постоянно равной нулю.

Этот же результат следует из свойства решения уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \tag{5}$$

рассматриваемого, как уравнение с частными производными для F *). Вспомогательная система обыкновенных диференциальных уравнений для уравнения (5) будет

$$dt = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}, \tag{6}$$

где x, y, z рассматриваются как функции независимого переменного t. Очевидно, что это суть уравнения, из которых определяются траектории частиц; интегралы уравнений (6) можно представить в виде

$$x = f_1(a, b, c, t); \quad y = f_2(a, b, c, t); \quad z = f_3(a, b, c, t), \tag{7}$$

причем произвольные постоянные a, b, c суть количества, определяющие частицу; например, эти постоянные могут изображать начальные координаты частицы. Общее решение (5) получается исключением a, b, c из (7) и

$$F = \psi(a, b, c), \tag{8}$$

где ψ обозначает произвольную функцию. Это показывает, что частица, которая лежала однажды на поверхности $F=0$, остается на ней постоянно в течение всего движения.

*) Lagrange, Oeuvres, IV, стр. 706.

Уравнение энергии

§ 10. В большинстве случаев, которые мы будем изучать, внешние силы имеют потенциал, т. е. будет

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ Y &= -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ Z &= -\frac{\partial \Omega}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Физический смысл Ω состоит в том, что функция Ω представляет потенциальную энергию единицы массы в точке (x, y, z) сил, действующих на расстоянии. Предварительно достаточно рассмотреть случай, когда поле внешних сил постоянно относительно времени, т. е. когда

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0.$$

Умножая уравнения (2) из § 6 соответственно на u, v, w и складывая, получим результат, который можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\varrho \frac{D}{Dt}(u^2+v^2+w^2)+\varrho \frac{D\Omega}{Dt} = -\left(u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\right).$$

Если мы умножим это уравнение на $\delta x\, \delta y\, \delta z$ и проинтегрируем по некоторой области, то найдем

$$\frac{D}{Dt}(T+V) = -\iiint \left(u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz, \tag{2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\iiint \varrho\,(u^2+v^2+w^2)\, dx\, dy\, dz, \\ V &= \iiint \Omega\varrho\, dx\, dy\, dz, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

т. е. T и V обозначают кинетическую энергию и происходящую от поля внешних сил потенциальную энергию для жидкости, которая в данный момент наполняет рассматриваемую область.

Трехкратный интеграл в правой части (2) можно преобразовать при помощи приема, к которому мы часто будем прибегать в наших исследованиях. Именно, интегрируя по частям, мы получим

$$\iiint u\frac{\partial p}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint [pu]\, dy\, dz - \iiint p\frac{\partial u}{\partial x}\, dx\, dy\, dz,$$

где $[pu]$ означает, что значения pu должны быть взяты, и притом с надлежащими знаками, в точках, в которых граница области пересекается прямой, параллельной оси x.

Обозначая через l, m, n направляющие косинусы *внутренней* нормали к элементу δS границы области, имеем

$$\delta y\, \delta z = \pm l\, \delta S,$$

причем знаки меняются в следующих друг за другом только что рассмотренных точках пересечения границы области с прямой, параллельной оси x. Мы находим отсюда

$$\iint [pu]\, dy\, dz = -\iint pu\, l\, dS,$$

где интегрирование надо распространить на всю ограничивающую поверхность. Если мы преобразуем остальные члены подобным же образом, то получим

$$\frac{D}{Dt}(T+V) = \iint p(lu+mv+nw)\, dS + \\ + \iiint p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz. \qquad (4)$$

В случае несжимаемой жидкости это уравнение принимает вид

$$\frac{D}{Dt}(T+V) = \iint (lu+mv+nw)\, p\, dS. \qquad (5)$$

Так как $lu+mv+nw$ обозначает скорость частицы жидкости в направлении нормали, то интеграл в правой части выражает работу, которую производит давление $p\,\delta S$, направленное снаружи на различные элементы δS ограничивающей поверхности. Поэтому общий прирост энергии как кинетической, так и потенциальной для какой-нибудь части жидкости равен работе, которую производит давление на поверхность, ограничивающую эту часть жидкости.

В частном случае, когда жидкость со всех сторон ограничена твердыми неподвижными стенками, мы имеем на границе

$$lu+mv+nw = 0,$$

и отсюда следует, что

$$T+V = \text{const}. \qquad (6)$$

Подобное истолкование можно дать и более общему уравнению (4), если мы примем, что p есть функция только от ϱ. Если мы положим

$$E = -\int p\, d\left(\frac{1}{\varrho}\right), \qquad (7)$$

то E определяет меру для работы, которую единица массы жидкости производит против внешнего давления, когда она при данном соотношении между p и ϱ переходит от рассматриваемого объема к определенному первоначальному объему. Если, например, единица массы заключена в цилиндре со скользящим поршнем, поверхность которого равна A, и поршень выдвинут на отрезок δx, то произведенная при этом работа будет равна $pA\,\delta x$, где множитель $A\,\delta x$ обозначает приращение объема, т. е. приращение ϱ^{-1}.

Для случая адиабатического изменения состояния мы получим:

$$E = \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{p}{\varrho}-\frac{p_0}{\varrho_0}\right). \qquad (8)$$

Количество E можно назвать внутренней энергией жидкости, приходящейся на единицу массы. Обращаясь к данному в § 7 истолкованию выражения

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz},$$

мы видим, что объемный интеграл в (4) измеряет потерю внутренней энергии, которую испытывают различные элементы при расширении [1]); следовательно, этот интеграл равен

$$-\frac{DW}{Dt},$$

где

$$W=\iiint E\varrho\,dx\,dy\,dz. \tag{9}$$

Следовательно, мы имеем

$$\frac{D}{Dt}(T+V+W)=\iint p(lu+mv+nw)\,dS, \tag{10}$$

т. е. полная энергия, которая слагается в этом случае частью из кинетической, частью из потенциальной по отношению к не зависящему от времени силовому полю, частью из внутренней энергии, изменяется со временем в той мере, в какой производится работа внешнего давления на ограничивающей поверхности.

При изотермическом законе мы имели бы

$$E=c^2\ln\frac{\varrho}{\varrho_0}, \tag{11}$$

где $c^2=\frac{p_0}{\varrho_0}$. Это выражение представляет свободную энергию единицы массы. При таком определении E мы получим уравнение в той же форме, что и уравнение (10), но только смысл его будет отличен.

Перенос количества движения

§ 10а. Пусть в момент времени t жидкость занимала некоторую область. Область, которую займет эта жидкость по прошествии времени δt, будет отличаться от первоначальной на поверхностный слой толщины (положительной или отрицательной)

$$(lu+mv+nw)\,\delta t,$$

где (l, m, n) — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности. Отсюда легко видеть, что мера возрастания количества движения выделенной части жидкости в момент t равна мере возрастания

---

[1]) Или иначе:

$$p\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z=-p\cdot\frac{1}{\varrho}\frac{D\varrho}{Dt}\cdot\delta x\,\delta y\,\delta z=$$
$$=p\,\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z=-\frac{DE}{Dt}\,\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z.$$

количества движения, содержащегося в неизменяемой области, сложенной с перенесенным количеством движения наружу через границу.

Рассматривая проекцию количества движения на ось x, мы будем иметь

$$\iiint \frac{Du}{Dt}\varrho\,dx\,dy\,dz = \iiint \varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz =$$
$$= \iiint \varrho\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dy\,dz + \iint \varrho u\,(lu+mv+nw)\,dS -$$
$$- \iiint u\left(\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz =$$
$$= \frac{d}{dt}\iiint \varrho u\,dx\,dy\,dz + \iint \varrho u\,(lu+mv+nw)\,dS\ldots, \qquad (1)$$

при этом мы использовали соотношение (5) § 7.

В случае установившегося движения (§ 21) первый член правой части (1) обращается в нуль, и поэтому *мера* возрастания количества движения какой-либо части жидкости равна перенесенному количеству движения наружу через ее границу.

Обратно, если мы применим данную теорему к жидкости, содержащейся в какой-либо момент в прямоугольном параллелепипеде $\delta x\,\delta y\,\delta z$, то мы можем воспроизвести уравнения движения § 6.

Мгновенно вызванное движение

§ 11. Если на жидкость в некоторый момент времени действуют мгновенные силы или если граничные условия внезапно изменяются, то может иметь место внезапное изменение движения. Последнее обстоятельство, может, например, наступить, если некоторое погруженное в жидкость тело внезапно привести в движение.

Пусть будут ϱ — плотность, u, v, w — компоненты скорости непосредственно перед ударом, u', v', w' — непосредственно после удара, X', Y', Z' — компоненты внешних импульсивных сил на единицу массы, ω — импульсивное давление в точке (x, y, z). Изменение количества движения, параллельного оси x, для элемента, определенного в § 6, равно

$$\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,(u'-u);$$

компонента внешних импульсивных сил, параллельная оси x, равна

$$\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,X',$$

и результирующее импульсивное давление в том же направлении равно

$$-\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial x}\,\delta x\,\delta y\,\delta z.$$

Так как удар можно рассматривать как бесконечно большую силу, действующую в течение бесконечно малого промежутка времени (например τ), то мы можем пренебречь действием всех конечных сил в течение этого промежутка времени.

Поэтому мы имеем

$$\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,(u'-u)=\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,X'-\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x}\,\delta x\,\delta y\,\delta z,$$

или

$$\left.\begin{aligned} u'-u&=X'-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x},\\ v'-v&=Y'-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial y},\\ w'-w&=Z'-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial z}. \end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

и аналогично:

Эти уравнения можно получить также из уравнений (2), данных в § 6, если мы умножим эти уравнения на δt, проинтегрируем их между пределами 0 и τ, сделаем подстановку

$$X'=\int_0^\tau X\,dt,\quad Y'=\int_0^\tau Y\,dt,\quad Z'=\int_0^\tau Z\,dt,\quad \widetilde{\omega}=\int_0^\tau p\,dt$$

и затем положим τ бесконечно малым.

В несжимаемой жидкости мгновенное изменение движения может быть вызвано одними импульсивными давлениями даже тогда, когда на жидкую массу не действуют внешние импульсивные силы. В этом случае мы имеем

$$X'=Y'=Z'=0,$$

так что

$$\left.\begin{aligned} u'-u&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x},\\ v'-v&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial y},\\ w'-w&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\omega}{\partial z}. \end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Если мы продиференцируем эти уравнения соответственно по x, y, z, затем сложим результаты и предположим далее, что плотность постоянна (относительно x, y, z), то найдем согласно § 8 (1), что

$$\frac{\partial^2\widetilde{\omega}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\widetilde{\omega}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\widetilde{\omega}}{\partial z^2}=0.$$

Отсюда ясно, что задача состоит в том, чтобы в каждом данном случае определить значение $\widetilde{\omega}$, удовлетворяющее этому уравнению, при специальных условиях на границе [1]); тогда внезапное изменение движения определится из уравнений (2).

---

[1]) В главе III мы увидим, что значение $\tilde{\omega}$ определится отсюда вплоть до аддитивной константы.

Уравнения, отнесенные к подвижной системе координат

§ 12. В некоторых задачах иногда бывает полезно пользоваться прямоугольной системой координат, которая сама находится в движении. Движение самой системы координат можно характеризовать при помощи компонент скорости начала координат **u**, **v**, **w** и компонент **p**, **q**, **r** вращения относительно мгновенного положения осей. Если u, v, w суть компоненты скорости частицы жидкости в точке (x, y, z), то скорость изменения ее координат относительно подвижной системы осей координат выражается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{Dx}{Dt} &= u - \mathbf{u} + \mathbf{r}y - \mathbf{q}z, \\ \frac{Dy}{Dt} &= v - \mathbf{v} + \mathbf{p}z - \mathbf{r}x, \\ \frac{Dz}{Dt} &= w - \mathbf{w} + \mathbf{q}x - \mathbf{p}y. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

По истечении времени δt компоненты скорости частицы, параллельные новым положениям осей координат, будут равны

$$u + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{Dx}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{Dy}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{Dz}{Dt}\right)\delta t \quad \text{и т. д.} \tag{2}$$

Чтобы найти компоненты ускорения, мы должны найти проекции скорости по истечении времени δt на направления, параллельные первоначальным направлениям осей координат, по приемам, изложенным в учебниках Динамики.

Отсюда мы получим следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \mathbf{r}v + \mathbf{q}w + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{Dx}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{Dy}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{Dz}{Dt}, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} - \mathbf{p}w + \mathbf{r}u + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{Dx}{Dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{Dy}{Dt} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{Dz}{Dt}, \\ &\frac{\partial w}{\partial t} - \mathbf{q}u + \mathbf{p}v + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{Dx}{Dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{Dy}{Dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{Dz}{Dt}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Чтобы получить искомые уравнения движения, надо заменить левые части формул (21) § 6 [1]) этими значениями.

Общее уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho\frac{Dx}{Dt}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho\frac{Dy}{Dt}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho\frac{Dz}{Dt}\right) = 0 \tag{4}$$

и приводится для несжимаемых жидкостей к прежнему виду

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

[1]) Greenhill, On the General Motion of a Liquid Ellipsoid. Proc. Camb. Soc., IV. 4 (1880).

Уравнения Лагранжа

§ 13. Пусть будут a, b, c начальные координаты некоторой частицы жидкости, x, y, z — ее координаты в момент t. Мы рассматриваем здесь x, y, z как функции независимых переменных a, b, c, t. Их значения как функций этих величин дают историю каждой частицы жидкости. В момент t компоненты скорости частицы (a, b, c), параллельные осям координат, суть

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial t},$$

и компоненты ускорения по тем же направлениям будут равны

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Пусть будут p давление и ϱ плотность в области этой частицы в момент t, X, Y, Z — компоненты внешних сил, действующих на единицу массы. Рассматривая движение жидкой массы, занимающей в момент t бесконечно малый элемент пространства $\delta x\, \delta y\, \delta z$, мы при помощи рассуждения, аналогичного рассуждению § 6, получим

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Эти уравнения содержат производные по x, y, z, тогда как независимые переменные суть a, b, c, t. Чтобы исключить эти производные, умножим сначала приведенные уравнения соответственно на $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial z}{\partial a}$ и сложим, затем умножим на $\frac{\partial x}{\partial b}$, $\frac{\partial y}{\partial b}$, $\frac{\partial z}{\partial b}$ и сложим и, наконец, умножим соответственно на $\frac{\partial x}{\partial c}$, $\frac{\partial y}{\partial c}$, $\frac{\partial z}{\partial c}$ и сложим. Тогда мы получим три уравнения:

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial b} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial b} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial c} = 0.$$

Эти уравнения представляют лагранжеву форму уравнений движения.

§ 14. Чтобы определить, какой вид примет уравнение неразрывности относительно наших теперешних переменных, рассмотрим элемент жидкости, который первоначально наполнял прямоугольный параллелепипед с центром в (a, b, c) и с ребрами δa, δb, δc, параллельными осям координат. В момент t этот самый элемент образует

косой параллелепипед. Его центр имеет теперь координаты x, y, z, и проекции его ребер на оси координат будут соответственно равны

$$\frac{\partial x}{\partial a}\delta a,\ \frac{\partial y}{\partial a}\delta a,\ \frac{\partial z}{\partial a}\delta a,$$
$$\frac{\partial x}{\partial b}\delta b,\ \frac{\partial y}{\partial b}\delta b,\ \frac{\partial z}{\partial b}\delta b,$$
$$\frac{\partial x}{\partial c}\delta c,\ \frac{\partial y}{\partial c}\delta c,\ \frac{\partial z}{\partial c}\delta c.$$

Отсюда находим для объема этого косого параллелепипеда выражение

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} \delta a\,\delta b\,\delta c,$$

или, согласно часто употребляемому обозначению:

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (a, b, c)}\delta a\,\delta b\,\delta c.$$

Так как масса элемента остается неизменной, то должно быть

$$\varrho\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (a, b, c)} = \varrho_0, \tag{1}$$

где ϱ_0 обозначает первоначальную плотность в точке (a, b, c).

В случае несжимаемой жидкости $\varrho = \varrho_0$ и (1) принимает вид

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (a, b, c)} = 1. \tag{2}$$

Преобразование Вебера

§ 15. Если, как указано в § 10, силы X, Y, Z имеют потенциал Ω, то уравнения движения § 13 можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{\partial \Omega}{\partial a} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a} \text{ и т. д.}$$

Проинтегрируем эти уравнения по t между пределами 0 и t. Заметим, что

$$\int_0^t \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial a}\,dt = \left[\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial a}\right]_0^t - \int_0^t \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t}\,dt =$$
$$= \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial a} - u_0 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}\int_0^t \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 dt,$$

где u_0 есть начальное значение компоненты скорости частицы (a, b, c)

в направлении оси x. Полагая

$$\chi = \int_0^t \left[\int \frac{dp}{\varrho} + \Omega - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}\right] dt, \tag{1}$$

имеем [1])

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial a} - u_0 &= -\frac{\partial \chi}{\partial a}, \\ \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial b} - v_0 &= -\frac{\partial \chi}{\partial b}, \\ \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial b} - w_0 &= -\frac{\partial \chi}{\partial c}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Эти три уравнения вместе с уравнением

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \int \frac{dp}{\varrho} + \Omega - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\} \tag{3}$$

и уравнением неразрывности суть уравнения с частными производными, которым должны удовлетворять пять неизвестных величин x, y, z, p, χ; при этом мы считаем, что ϱ уже исключено при помощи одного из соотношений § 8.

Начальные условия, которым надлежит удовлетворить, суть

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c, \quad \chi = 0.$$

§ 16. Необходимо отметить, что количества a, b, c не должны обязательно обозначать начальные координаты частицы; они могут обозначать какие-нибудь три количества, которые служат для определения частицы и меняются непрерывно от частицы к частице. Если мы обобщим таким образом смысл a, b, c, то форма уравнений движения в § 13 не изменится; чтобы найти форму, которую принимает уравнение неразрывности, обозначим через x_0, y_0, z_0 координаты начального положения частицы, которой соответствуют a, b, c. Начальный объем параллелепипеда, центр которого лежит в точке (x_0, y_0, z_0) и ребра которого соответствуют вариациям δa, δb, δc параметров a, b, c, равен

$$\frac{\partial(x_0, y_0, z_0)}{\partial(a, b, c)}\,\delta a\,\delta b\,\delta c,$$

так что мы имеем

$$\varrho\,\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \varrho_0\,\frac{\partial(x_0, y_0, z_0)}{\partial(a, b, c)}, \tag{1}$$

или — для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \frac{\partial(x_0, y_0, z_0)}{\partial(a, b, c)}. \tag{2}$$

---

[1]) Weber, H., Über eine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, Crelle, LXVIII (1868). В (1) предполагается, что плотность ϱ, если она непостоянна, есть функция только p.

Уравнения в полярных координатах

§ 16a. В предшествующих рассуждениях были использованы декартовы координаты, которые обычно более удобны при доказательствах общих теорем. Но при разрешении некоторых частных задач оказывается удобнее пользоваться полярными координатами. Поэтому мы, следуя плану Эйлера, здесь для справок приводим соответственные формулы.

В полярных координатах на плоскости мы можем через u и v обозначить соответственно радиальную и трансверсальную скорости в точке (r, θ) в момент t. Так как радиус-вектор частицы вращается со скоростью $\frac{v}{r}$, то согласно обычной теории вращения осей получим для компонент ускорения следующие выражения:

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{v}{r}v, \quad \frac{Dv}{Dt} + \frac{v}{r}u, \tag{1}$$

где, следуя методу § 5, принято

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r} + v\frac{\partial}{r\,\partial\theta}. \tag{2}$$

Расхождение (Δ) мы найдем, если подсчитаем количество жидкости, втекшей в квазипрямоугольный элемент, стороны которого суть δr и $r\,\delta\theta$, следовательно,

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\,\partial\theta}. \tag{3}$$

В сферических координатах мы обозначим радиальную скорость в точке (r, θ, φ) через u, скорость, перпендикулярную к r в плоскости изменения θ, через v и скорость, перпендикулярную к плоскости отсчета θ, через w. Из начала координат проведем три линии, параллельные указанным направлениям, именно так, чтобы они, как это обычно принимается, образовали правую систему координат. Изменения угловых координат частицы за время δt будут представляться в виде

$$r\,\delta\theta = v\,\delta t, \quad r\sin\theta\,\delta\varphi = w\,\delta t.$$

Эти изменения составят вращение указанной системы относительно ее мгновенного положения с компонентами:

$$\cos\theta\,\delta\varphi, \quad -\sin\theta\,\delta\varphi, \quad \delta\theta.$$

Отсюда, если мы через $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ обозначим компоненты мгновенной угловой скорости системы координат, получим

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{w}{r}\operatorname{ctg}\theta, \\ \mathbf{q} &= -\frac{w}{r}, \\ \mathbf{r} &= \frac{v}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Следовательно, компоненты требуемого ускорения частицы в точке (r, θ, φ) будут представляться в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - rv + qw &= \frac{Du}{Dt} - \frac{v^2+w^2}{r}, \\ \frac{Dv}{Dt} - pw + ru &= \frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} - \frac{w^2}{r}\operatorname{ctg}\theta, \\ \frac{Dw}{Dt} - qu + pv &= \frac{Dw}{Dt} + \frac{wu}{r} + \frac{vw}{r}\operatorname{ctg}\theta, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r} + v\frac{\partial}{r\,\partial\theta} + w\frac{\partial}{r\sin\theta\,\partial\varphi}. \tag{6}$$

Расхождение может быть найдено вычислением втекшего потока в квазипрямоугольный параллелепипед, ребра которого суть δr, $r\,\delta\theta$, $r\sin\theta\,\delta\varphi$; таким образом

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\,\partial\theta} + \frac{v}{r}\operatorname{ctg}\theta + \frac{\partial w}{r\sin\theta\,\partial\varphi}. \tag{7}$$

ГЛАВА ВТОРАЯ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ

§ 17. Существует обширный и важный класс случаев, когда компоненты скорости u, v, w могут быть выражены через однозначную функцию φ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ v &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ w &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$ *)

Эта функция φ называется *потенциалом скоростей* вследствие аналогии с потенциальной функцией теории тяготения, электростатики и т. д. Общая теория потенциала скоростей будет изложена в следующей главе, но уже здесь мы дадим доказательство следующей важной теоремы:

Если в некоторый момент времени для некоторой конечной части совершенной жидкости, двигающейся под действием сил, обладающих потенциалом, существует потенциал скоростей, причем плотность жидкости постоянна или есть функция только давления, то потенциал скоростей должен существовать для указанной части жид-

*) Теория „циклических" потенциалов скоростей будет разобрана впоследствии.

кости для всех предшествующих и для всех последующих моментов времени [1]).

Если в уравнениях § 15 мы возьмем момент времени в начале отсчета, для которого существует потенциал скоростей φ, то мы должны иметь

$$u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc = -d\varphi_0$$

во всей рассматриваемой части жидкой массы. Умножая уравнения (2) § 15 соответственно на da, db, dc и складывая их, получим

$$\frac{\partial x}{\partial t}\,dx + \frac{\partial y}{\partial t}\,dy + \frac{\partial z}{\partial t}\,dz - (u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc) = -d\chi,$$

или в обозначениях Эйлера

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = -d(\varphi_0 + \chi) = -d\varphi,$$

где $\varphi_0 + \chi$ обозначено через φ. Так как верхняя граница в (1) § 15 может быть как положительной, так и отрицательной, то наше предложение тем самым доказано.

Необходимо особенно отметить, что существование потенциала скоростей относится не к частям пространства, а к частям жидкости. Часть жидкости, для которой существует потенциал скоростей, движется дальше и несет с собой это свойство, в то время как часть пространства, которую жидкость первоначально занимала, с течением времени может быть занята жидкостью, которая сначала не обладала этим свойством и поэтому не сможет его приобрести.

Класс случаев, в которых существует однозначный потенциал скоростей, охватывает все те движения, которые возникают из состояния покоя под действием сил рассмотренного здесь типа. В самом деле, мы имеем в начале движения

$$u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc = 0,$$

т. е.

$$\varphi_0 = \text{const}.$$

Ограничения, при которых доказана рассмотренная выше теорема, ни в коем случае не следует упускать из виду. Было не только допущено, что внешние, отнесенные к единице массы, силы X, Y, Z обладают потенциалом, но также, что плотность или постоянна, или есть функция, зависящая только от p. Это последнее условие, например, не выполняется при конвекционных течениях, которые возникают от неравномерного нагревания жидкости, а также при волно-

---

[1]) Lagrange, Mémoire sur la Théorie du Mouvement des Fluides, Nouv. mém. de l'Acad. de Berlin, 1781 (Oeuvres, IV, 714). Доказательство воспроизводится в Mécanique Analitique. Теорема, высказанная Лангранжем, и ее доказательство были не вполне строгие; первое строгое доказательство было дано Коши в Mémoire sur la Théorie des Ondes, Mém. de l'Acad. roy. des Sciences, I (1827) (Oeuvres Complètes, Paris, 1882, I-я серия, I, 38); мемуар датирован 1815 годом. Другое доказательство дано Стоксом, Camb. Trans., VIII (1845) (Смотреть также Math. and Phys. Papers, Cambridge, 1880, I, 106, 158, и II, 36 стр.); там же дано прекрасное историческое и критическое изложение всего вопроса.

вом движении неоднородной, но несжимаемой жидкости, которая первоначально располагалась в горизонтальных слоях одинаковой плотности. Другой исключительный случай образуют „электромагнитные" вращения; см. § 29.

§ 18. Сравнение формул (1) с уравнениями (2) § 11 приводит к простому физическому истолкованию функции φ.

Всякое действительное состояние движения жидкости, для которого существует однозначный потенциал скоростей, может быть мгновенно получено из состояния покоя приложением подходяще выбранной системы импульсивных давлений. Это предложение получается из указанных уравнений, из которых, кроме того, следует, что

$$\varphi = \frac{\widetilde{\omega}}{\varrho} + \text{const},$$

так что

$$\widetilde{\omega} = \varrho\varphi + C$$

дает искомую систему импульсивных давлений. Точно так же

$$\widetilde{\omega} = -\varrho\varphi + C$$

представляет систему импульсивных давлений, мгновенно приводящих движение вполне к состоянию покоя [1]). Появление произвольной постоянной в этих выражениях показывает только, что всюду одинаковое давление, действующее во всей жидкой массе, не может оказать влияния на движение.

В случае газа φ может быть истолковано как потенциал тех внешних импульсивных сил, благодаря которым действительное движение в некоторый момент могло бы произойти мгновенно из состояния покоя.

Состояние движения, для которого не существует потенциала скоростей, не может ни возникнуть, ни уничтожиться под действием импульсивных давлений или внешних сил, обладающих потенциалом.

§ 19. Существование потенциала скоростей обусловливает, кроме того, еще определенные *кинематические* свойства движения.

Будем называть *линией тока* такую линию, направление касательной в каждой точке которой совпадает с направлением движения жидкости. Диференциальные уравнения системы этих линий будут

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}. \qquad (2)$$

Соотношение (1) показывает, что если существует потенциал скоростей, то линии тока всюду перпендикулярны к системе поверхностей $\varphi = \text{const}$, которые называются *поверхностями равного потенциала*.

---

[1]) Это истолкование дано Коши (см. прим. на стр. 33) и Пуассоном, Poisson, Mém. de l'Acad. roy. des Sciences, I (1816).

Проведем из точки (x, y, z) линейный элемент δs в направлении (l, m, n); тогда компонента скорости в этом направлении будет равна $lu+mv+nw$, или

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds};$$

последнее выражение равно $-\frac{\partial\varphi}{\partial s}$. Следовательно, скорость в любом направлении равна производной с обратным знаком, взятой в этом направлении, от функции φ.

Проведем поверхности равного потенциала, соответствующие определенным значениям φ, отличающимся одно от другого на бесконечно малое количество. Если мы возьмем элемент δs, нормальный к какой-нибудь поверхности $\varphi=\text{const}$, то получим, что скорость в любой точке рассматриваемой поверхности обратно пропорциональна взаимному расстоянию в области этой точки двух соседних поверхностей равного потенциала. Поэтому, если какая-нибудь поверхность равного потенциала пересекает самое себя, то скорость жидкости для линии пересечения равна нулю. Пересечение же двух *различных* поверхностей равного потенциала указывает на бесконечно большую скорость.

§ 20. При условиях, допущенных в § 17, можно непосредственно интегрировать уравнения движения для той части жидкости, где существует потенциал скоростей, в случаях если ϱ постоянно или есть определенная функция от p. В самом деле, в силу соотношений

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x},$$

вытекающих из соотношений (1), уравнения § 6 можно представить в виде

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\partial\Omega}{\partial x}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\text{ и т. д.}\qquad(3)$$

Эти уравнения имеют интеграл

$$\int\frac{dp}{\varrho}+\frac{1}{2}q^2+E+\Omega=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+F(t),\qquad(4)$$

где q обозначает результирующую скорость $(u^2+v^2+w^2)$, $F(t)$ есть произвольная функция только от t, а E определяется выражением (7) § 10 и может быть истолковано (в случае газа), как и выше.

В случае несжимаемой жидкости это уравнение принимает особенно простой вид; именно, в этом случае мы имеем

$$\frac{p}{\varrho}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\Omega-\frac{1}{2}q^2+F(t),\qquad(5)$$

к которому надо присоединить уравнение неразрывности

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0,\qquad(6)$$

эквивалентное уравнению (1) § 8. Если, как это будет во многих

случаях, которые мы будем изучать, граничные условия суть чисто кинематические, то процесс решения состоит в том, чтобы найти функцию, удовлетворяющую как уравнению (6), так и заданным условиям на граничной поверхности. Тогда давление определится из соотношения (5) с точностью до аддитивной функции от t. Его можно будет определить вполне только тогда, когда значение p в некоторой точке жидкости дано для всех значений t. Так как член $F(t)$ не влияет на *результирующую* давлений, то его часто опускают.

Предположим, например, что одно или несколько твердых тел движутся в ограниченной со всех сторон твердыми стенками жидкости, и пусть возможно, например, при помощи поршня произвести произвольное давление в определенной точке ее границы. Как бы мы ни меняли величину давления на поршень, движение жидкости и твердых тел при этом останется без всякого изменения, так как давление во всех точках жидкости будет при этом одновременно и одинаковым образом повышаться и падать. Физическое основание этого парадокса (а таковой здесь налицо) заключается в том, что жидкость рассматривается как абсолютно несжимаемая. В действительности же изменения давления в капельных жидкостях распространяются хотя и с очень большой, однако же не с бесконечно большой скоростью.

Если координатная система находится в движении, то формула для давления будет иметь вид

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Omega - \frac{1}{2} q^2 - \mathfrak{p}\left(y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \\ - \mathfrak{q}\left(z \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) - \mathfrak{r}\left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right), \qquad (7)$$

где

$$q^2 = (u - \mathfrak{u})^2 + (v - \mathfrak{v})^2 + (w - \mathfrak{w})^2. \qquad (8)$$

Это легко получить из данных в § 12 формул (3) для ускорения.

Установившееся движение

§ 21. Если в каждой точке скорость постоянна по величине и направлению, т. е. если

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \qquad (1)$$

то движение называется *установившимся*.

При установившемся движении линии тока совпадают с траекториями частиц. В самом деле, если P, Q суть две бесконечно близкие точки линии тока, то частица, которая в некоторый момент времени находилась в P, будет двигаться в направлении касательной в точке P и потому по истечении бесконечно малого промежутка времени попадет в точку Q. Так как движение установившееся, то линии тока остаются неизменными; поэтому направление движения частицы в точке Q совпадет с касательной к той же самой линии тока, т. е. частица описывает и дальше эту линию тока, которая совпадает таким образом с траекторией.

Линии тока, проведенные через бесконечно малую замкнутую кривую, образуют трубку, которая называется *трубкой тока*.

При установившемся движении из уравнения (4) предыдущего параграфа мы получим

$$\int \frac{dp}{\varrho} = -\Omega - \frac{1}{2} q^2 + \text{const.} \tag{2}$$

Однако в этом случае закон изменения давления *вдоль линии тока* можно найти и без допущения существования потенциала скоростей. В самом деле, если δs обозначает элемент линии тока, то ускорение в направлении движения равно $q \frac{\partial q}{\partial s}$, и мы имеем

$$q \frac{\partial q}{\partial s} = -\frac{\partial \Omega}{\partial s} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial s}. \tag{3}$$

Отсюда, интегрируя вдоль линии тока, получим

$$\int \frac{dp}{\varrho} = -\Omega - \frac{1}{2} q^2 + C. \tag{4}$$

Это уравнение формально очень похоже на уравнение (2) но оно более общо, поскольку оно не предполагает существования потенциала скоростей. Необходимо, однако, заметить, что const уравнения (2) и C уравнения (4) имеют различные значения; первое есть абсолютное постоянное, в то время как последнее постоянно только вдоль определенной линии тока, но может меняться при переходе от одной линии тока к другой.

§ 22. Уравнение (4) находится в тесной связи с принципом энергии. Если существование последнего допустить независимо, то формулу (4) можно вывести следующим образом [1]). Возьмем сначала частный случай капельной жидкости и рассмотрим линию тока, которая в некоторый момент времени занимает положение AB трубки тока, причем движение происходит в направлении от A к B. Пусть p есть давление, q — скорость, Ω — потенциал внешних сил, σ — площадь поперечного сечения в A; соответствующие количества в B отметим значками. Через короткий промежуток времени нить тока принимает положение A_1B_1; пусть m есть масса, заключенная между сечениями A и A_1 или B и B_1. Так как движение установившееся, то приращение энергии при движении жидкости будет равно

$$m\left(\frac{1}{2} q'^2 + \Omega'\right) - m\left(\frac{1}{2} q^2 + \Omega\right).$$

Далее, произведенная работа равна

$$p \frac{m}{\varrho} - p' \frac{m}{\varrho}.$$

Приравняв приращение энергии произведенной работе, мы будем иметь

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega = \frac{p'}{\varrho} + \frac{1}{2} q'^2 + \Omega',$$

[1]) По существу это есть не что иное, как обращение метода Даниила Бернулли, Bernoulli, Hydrodynamica, Argentorati, 1738.

или, употребляя C в том же смысле, как выше, мы получим

$$\frac{p}{\varrho} = -\Omega - \frac{1}{2} q^2 + C; \tag{5}$$

а это и есть уравнение (4) § 21 при постоянном ϱ.

Чтобы вывести соответствующую формулу для сжимаемых жидкостей, заметим, что жидкость в каком-нибудь сечении обладает в этом случае, кроме кинетической и потенциальной энергии, еще *внутренней* или свободной энергией на единицу массы, равной

$$-\int p d\left(\frac{1}{\varrho}\right), \quad \text{или} \quad -\frac{p}{\varrho} + \int \frac{dp}{\varrho}.$$

Прибавляя это выражение к (5), получим уравнение (4).

В случае газа, подчиненного адиабатическому закону, мы имеем

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\gamma}, \tag{6}$$

и уравнение (4) принимает вид

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\varrho} = -\Omega - \frac{1}{2} q^2 + C. \tag{7}$$

§ 23. Из предыдущих уравнений видно, что при установившемся движении давление для точек вдоль линии тока [1]), при прочих равных условиях, будет наибольшее там, где скорость наименьшая, и обратно. Это предложение само собой будет понятно, если мы заметим, что движение точки должно ускоряться, если она переходит от места с более высоким давлением к месту с более низким давлением, и обратно [2]).

В тех случаях, когда имеют место уравнения предыдущего параграфа, из них вытекает существование предела, который скорость не может превзойти [3]). Вообразим, например, жидкость, вытекающую из резервуара, в котором мы можем пренебречь скоростью и внешними силами и где давление равно p_0. Поэтому в формуле (5) мы должны положить $C = \frac{p_0}{\varrho}$; следовательно, мы имеем

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \varrho q^2. \tag{8}$$

Хотя и найдено, что жидкость, из которой удалены все следы воздуха или других растворенных газов, может выдерживать отрицательное давление, или растяжение, заметной величины [4]), все же, од-

---

[1]) Мы в дальнейшем покажем, что это ограничение отпадает, когда существует потенциал скоростей.

[2]) Некоторые интересные практические разъяснения этого принципа были даны Фрудом (Froude) в Nature, XIII (1875).

[3]) Ср. Helmholtz, Über discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen, Berl. Monatsberichte, April, 1868; Phil. Mag. Nov., 1868 (Wissenschaftliche Abhandlungen, Leipzig, 1882—1883, I. 146).

[4]) Reynolds O., Manch. Mem., VI (1877) (Scientific Papers, Cambridge, 1900, I, 231).

нако, это не имеет места для жидкостей при нормальных условиях. Таким образом из уравнения (8) следует, что практически q не может превосходить значения $\left(\frac{2p_0}{\varrho}\right)^{1/2}$. Эта предельная скорость есть та самая скорость, с которой жидкость вытекала бы из резервуара в пустоту. В случае воды, находящейся под атмосферным давлением, она равна скорости, которая соответствует высоте водяного столба в барометре и равна приблизительно 14 *м/сек*.

Если в каком-нибудь случае движения жидкости, аналитическое выражение которого нам удалось установить, мы предположим, что движение постепенно ускоряется, до тех пор пока скорость в некотором месте, наконец, достигает указанного здесь предела, то в этом месте образуется разрыв и, следовательно, условия задачи должны быть в той или иной степени изменены.

В следующей главе (§ 44) будет показано, что при безвихревом движении капельной жидкости, будет ли оно установившимся или нет, место самого низшего давления находится всегда в точке, лежащей на границе области; при этом предполагается, что внешние силы обладают потенциалом Ω, который удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}=0.$$

Сюда, конечно, относится и случай силы тяжести.

В общем случае жидкости, для которой p есть данная функция от ϱ, мы получим, полагая в уравнении (4) $\Omega=0$, $q_0=0$, выражение

$$q^2=2\int_p^{p_0}\frac{dp}{\varrho}. \tag{9}$$

Для газа, подчиненного адиабатическому закону, это дает

$$q^2=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\varrho_0}\left\{1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}, \tag{10}$$

или

$$q^2=\frac{2}{\gamma-1}(c_0^2-c^2), \tag{11}$$

где $c=\left(\frac{\gamma p}{\varrho}\right)^{1/2}=\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)^{1/2}$ означает скорость звука в рассматриваемом газе при давлении p и плотности ϱ, а c_0 есть скорость звука в газе при условиях, имеющих место в резервуаре (см. гл. X). Отсюда предельная скорость равна

$$\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2}c_0$$

или $2{,}214\,c_0$, если $\gamma=1{,}408$.

§ 24. Закончим эту главу некоторыми простыми применениями уравнений движения.

Истечение капельных жидкостей

Как первый пример мы возьмем истечение капельной жидкости из малого отверстия в стенке сосуда, который всегда остается наполненным до одинаковой высоты, так что движение можно рассматривать как установившееся.

Пусть начало координат лежит на свободной поверхности, ось z направлена вертикально вниз, так что $\Omega = -gz$. Если мы возьмем площадь свободной поверхности большой сравнительно с сечением отверстия, то скоростью находящихся на ней частиц можно пренебречь. Если значение C мы определим из § 21 (4) таким образом, что для $z = 0$ будет $p = P$ (равно атмосферному давлению), то получим [1])

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{P}{\varrho} + gz - \frac{1}{2}q^2. \tag{1}$$

На поверхности вытекающей струи мы имеем $p = P$, и поэтому

$$q^2 = 2gz; \tag{2}$$

это есть скорость при свободном падении с поверхности уровня. Этот факт известен, как теорема Торричелли [2]).

Мы не можем, однако, этот результат применить непосредственно к вычислению количества вытекающей жидкости по следующим двум основаниям. Во-первых, вытекающая жидкость должна рассматриваться как совокупность большого числа элементарных струй, которые со всех сторон сходятся к отверстию; поэтому их движение не во всех точках будет перпендикулярно к сечению отверстия, но будет тем более наклонно, чем дальше мы удаляемся от центра к краю. Во-вторых, сходящееся движение элементарных струй обусловливает повышение давления в отверстии внутри струи по сравнению с поверхностью струи, где давление равно атмосферному. Поэтому скорость внутри струи несколько меньшая, чем дает уравнение (2).

Однако опыты показывают, что только что рассмотренное движение перестает быть сходящимся на незначительном расстоянии от отверстия, и в случае круглого отверстия струя делается почти цилиндрической. Отношение площади сечения S' в самом сжатом месте к площади S отверстия называется *коэфициентом сжатия*. Если отверстие есть просто дыра в тонкой стене, то для этого коэфициента найдено экспериментально значение, приблизительно равное 0,62.

Так как траектории частиц в сжатом сечении струи приблизительно прямолинейны, то при переходе от оси струи к ее поверхности давление или вовсе не изменяется или изменяется очень мало. Поэтому мы можем считать здесь скорость постоянной на всем поперечном сечении и принять ее равной значению, данному формулой (2), где z есть глубина сжатого сечения относительно свобод-

[1]) Этим результатом мы обязаны Д. Бернулли, см. стр. 37.
[2]) Torricelli, De motu gravium naturaliter accelerato. Firenze, 1643.

ной поверхности жидкости в сосуде. Поэтому количество жидкости, вытекающее в единицу времени, будет равно

$$(2gz)^{1/2}\,\varrho S'. \tag{3}$$

Определение формы вытекающей струи представляет трудности, которые могли быть преодолены только в немногих идеальных случаях плоского движения жидкости (см. гл. IV)[1]. Можно, однако, показать, что коэфициент сжатия должен заключаться между $^1/_2$ и 1. Чтобы дать доказательство в простейшей форме, предположим сначала, что жидкость вытекает из сосуда, в котором давление в некотором отдалении от отверстия превосходит давление вне сосуда на величину P, причем силой тяжести мы пренебрегаем. Когда отверстие закрыто пластинкой, то результирующая всех действующих на сосуд давлений равна, конечно, нулю. Если теперь мы удалим пластинку и предположим на мгновение, что давление на стенки сосуда остается равным P, то на сосуд будет действовать неуравновешенное давление PS в направлении, противоположном направлению вытекающей струи, которое стремится подвинуть сосуд назад. Одинаковая, но направленная в противоположную сторону реакция на жидкость дает в единицу времени массе $\varrho qS'$, протекающей через сжатое сечение, скорость q. Следовательно, мы имеем

$$PS = \varrho q^2 S'. \tag{4}$$

Принцип энергии § 22 дает

$$P = \frac{1}{2}\,\varrho q^2; \tag{5}$$

сравнивая между собой (4) и (5), мы находим, что $S' = {}^1/_2 S$. Формула (1) показывает, что давление на стенки, особенно вблизи отверстия, на самом деле падает немного ниже статического давления P, так что левая часть (4) при подстановке значения P из (5) будет значительно преуменьшена. Следовательно, отношение S'/S будет, вообще, больше $^1/_2$.

В частном случае, именно если приставить к отверстию изнутри короткую цилиндрическую трубку, вышеуказанное допущение будет достаточно точно, и получающееся для коэфициента значение $^1/_2$ совпадает с опытом.

Можно легко видоизменить рассуждение с тем, чтобы учесть также силу тяжести (или другие консервативные силы). Мы должны только взять для P разность статического давления на уровне отверстия и внешнего давления. Разностью уровней между отверстием и сжатым сечением струи при этом пренебрегаем[2].

---

[1]) В настоящее время удалось решить и некоторые задачи для случая осевой симметрии (Vasilesco). *Прим. ред.*

[2]) Вышеизложенной теорией мы обязаны Borda (Mém. de l'Acad. des Sciences, 1766), который производил также опыты со специального вида насадками (мундштуками), описанными здесь, и нашел $\frac{S}{S'} = 1{,}942$. Вопрос был

Другое важное применение теоремы Бернулли заключается в измерении скорости течения при помощи трубки Пито. Этот прибор состоит из тонкой трубки, открытый конец которой направлен против потока, в то время как другой конец связан с манометром. Вдоль линии тока, которая совпадает с осью трубки, скорость быстро падает от q до 0, так что манометр показывает значение $p+{}^1/_2\varrho q^2$. Статическое давление p определяет второй манометр, связанный с трубкой, вставленной в малое отверстие стенки, вдоль которой скользит поток. Так как плотность ϱ известна, то сравнение отсчетов манометров дает значение q. Оба приспособления часто соединяются в один прибор. Особенно этот метод находит применение в аэродинамике, так как найдено, что сжимаемость воздуха вплоть до скоростей порядка 60 *м/сек* не имеет значения.

Истечение газов

§ 24а. Установившееся течение газа, подчиненного адиабатическому закону, представляет некоторые интересные свойства.

Обозначим через σ поперечное сечение в некоторой точке трубки тока и через δs — элемент длины в направлении течения. Пренебрегая внешними силами, мы получим вместо уравнения (10) § 23

$$q^2-q_0^2=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\varrho_0}\left\{1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}, \tag{1}$$

причем индекс 0 относится к какому-нибудь определенному сечению трубки. Если обозначить через c скорость звука для значений p и ϱ в рассматриваемом месте, то уравнение (1) можно представить в виде

$$q^2+\frac{2}{\gamma-1}c^2=q_0^2+\frac{2}{\gamma-1}c_0^2. \tag{2}$$

Так как масса жидкости, протекающей в единицу времени через различные сечения, всегда одна и та же, то мы имеем

$$\varrho q\sigma=\varrho_0 q_0\sigma_0. \tag{3}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{ds}=-\frac{1}{q}\frac{dq}{ds}-\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dp}\frac{dp}{ds}=-\frac{1}{q}\frac{dq}{ds}\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right). \tag{4}$$

Из формул (2) и (4) следует, что в сужающейся трубке q будет расти, а c уменьшаться, или обратно, смотря по тому, будет ли q меньше или больше, чем c. Для расширяющейся трубки имеет место противоположное заключение. Резюмируя, можно утверждать, что

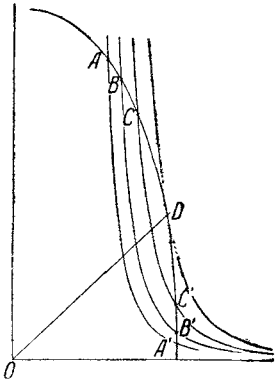
вновь изучен Hanlon, Proc. Lond. Math. Soc., III, 4 (1869); далее он был разработан в заметке, прибавленной Максвеллом к этой статье. См. также Froude и J. Thomson, Proc. Glasgow. Phil. Soc., X (1876). Различными авторами было замечено, что в случае насадки, представляющей по направлению внутрь расходящийся конус, поперечное сечение в сжатом месте может быть меньше, чем половина площади *внутреннего* отверстия.

в сужающейся трубке скорость течения и местная скорость звука постоянно приближаются друг к другу, в то время как в расширяющейся трубке они все более удаляются друг от друга.

Эти результаты следуют также из графического представления уравнений (2) и (3). Так как c^2 пропорционально $\varrho^{\gamma-1}$, то формулу (3) можно представить в виде

$$c^{\frac{2}{\gamma-1}} q\sigma = c_0^{\frac{2}{\gamma-1}} q_0\sigma_0. \tag{5}$$

Если мы возьмем абсциссы пропорциональными c и ординаты пропорциональными q, то уравнение (2) представляет неподвижный эллипс, проходящий через точку (c_0, q_0). Для каждого определенного значения $\frac{\sigma}{\sigma_0}$ уравнению (5) соответствует некоторый вид гиперболической кривой. При некотором значении σ' для σ эта кривая будет касаться эллипса и для этой точки мы получим $q = c$.



Фиг. 2.

Кривые AA', BB', CC' на представленной фигуре соответствуют отношениям

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = 8,\ 4,\ 2,$$

причем точка D соответствует наименьшему сечению σ'. Для еще меньших значений σ точки пересечения с эллипсом будут мнимые, и установившееся адиабатическое течение окажется невозможным. Из диаграммы следует, что для сечения, площадь которого больше чем σ', существуют две возможные пары значений q и c, как это заметили Осборн Рейнольдс и другие.

Если q меньше c, то соответствующая точка эллипса лежит ниже OD. В суживающейся трубке она занимает последовательно положения A', B', C', причем скорость течения возрастает, а скорость звука уменьшается, пока не будет достигнуто критическое сечение σ'. Если, с другой стороны, q больше c, то соответствующие точки лежат над OD. В суживающейся трубке мы имеем последовательные положения точек A, B, C, при которых скорость течения уменьшается, а скорость звука возрастает.

§ 25. Изучим теперь особо случай, когда газ вытекает через малое отверстие из сосуда, в котором давление равно p_0 и плотность равна ϱ_0, в пространство, в котором давление равно p_1.

До тех пор пока отношение $\frac{p_0}{p_1}$ давления внутри сосуда к давлению вне сосуда не превосходит определенного предела, который мы сейчас укажем, истечение будет происходить так же, как и в случае капельных жидкостей, и мы найдем количество вытекшей массы, если положим в формуле (10) § 23, что $p = p_1$, и полученное значение для q умножим на площадь σ_1 сжатого сечения. Отсюда для количества вытекающей в единицу времени массы мы получим [1])

$$q_1\varrho_1\sigma_1 = \left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2} c_0\varrho_0 \left\{ \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right\}^{1/2} \sigma_1. \tag{6}$$

[1]) Результат эквивалентен результату, данному Saint Venant и Wantzel, Journal de l'École Polyt., XVI, 92 (1839) и исследованному Stokes, Brit. Ass. Reports, 1846 (Papers, I, 176).

Ясно, однако, что применимость этого результата должна быть ограничена, так как иначе мы пришли бы к парадоксальному заключению, что для $p_1 = 0$, т. е. при истечении в пустоту, вытекающее количество газа должно быть равно нулю. Разъяснением этого положения мы обязаны Осборну Рейнольдсу [1]). Можно показать, что ϱq есть максимум, т. е. что площадь поперечного сечения элементарной струи есть минимум, когда, как то следует из формулы (4), скорость течения равна скорости звука в газе при данном давлении и данной плотности. Из формулы (11) § 23 мы имеем при адиабатической гипотезе

$$\frac{c}{c_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/2}, \tag{7}$$

и поэтому

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varrho}{\varrho_0} &= \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \\ \frac{p}{p_0} &= \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

или, если $\gamma = 1{,}408$, то

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= 0{,}634\varrho_0, \\ p &= 0{,}527p_0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Если p_1 меньше этого значения, то поток после того, как он перешел за рассматриваемую точку, вновь расширяется, пока на некотором расстоянии благодаря внутреннему трению не образуются вихри. Минимальные сечения элементарных струек должны лежать вблизи отверстия, из которого происходит истечение, и сумму этих сечений S можно принять за действующую площадь отверстия. Скорость истечения, вычисленная по формуле (2), будет равна

$$q = 0{,}911c_0.$$

Следовательно, количество жидкости, вытекшей в единицу времени, равно $q\varrho S$, где q и ϱ имеют только что найденные значения, и оно поэтому почти не зависит от внешнего давления p_1, пока последнее остается меньшим $0{,}527p_0$. Физическое основание этого состоит в том, как утверждает Рейнольдс, что до тех пор, пока скорость в какой-либо точке превосходит при допущенных условиях скорость звука, из этой точки не может распространяться назад никакое измененне давления, которое могло бы сообщить движение, противоположное течению [2]).

Новейшие опыты Стантона [3]) подтверждают в общем точку зрения Рейнольдса и разъясняют некоторые кажущиеся противоречия.

При аналогичных соотношениях для давления, скорости истечения различных газов, поскольку можно допустить, что γ для каждого из них имеет то же самое значение, пропорциональны соответствующим скоростям звука. Поэтому, как мы увидим в главе X, скорость истечения будет меняться обратно, а вытекающее в единицу времени количество жидкости прямо пропорционально квадратному корню из плотности [4]).

---

[1]) Reynolds, On the Flow of Gases, Proc. Manch. Lit. and Phil. Soc., Nov. 17 (1885); Phil. Mag., March., 1886 (Papers, II, 311). Аналогичное разъяснение дано Hugoniot, Comptes Rendus, June 28, July 26, Decembre 13, 1886.

[2]) Дальнейшие обсуждения и литературные указания см. Rayleigh, On the Discharge of Gases under High Pressures, Phil. Mag. (6), XXXII, 177 (1916) (Scientific Papers, Cambridge, 1899—1920, VI, 407).

[3]) Stanton, Proc. Roy. Soc. A, CXI, 306 (1926).

[4]) Ср. Graham, Phil. Trans, 1846.

Вращение капельной жидкости

§ 26. Рассмотрим сначала случай, когда масса жидкости равномерно вращается с постоянной угловой скоростью ω около направленной вверх оси z и находится только под действием силы тяжести.

Согласно предположению мы имеем

$$u = -\omega y, \quad v = \omega x, \quad w = 0,$$
$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g.$$

Уравнение неразрывности выполняется тождественно, и уравнения движения, очевидно, имеют вид

$$-\omega^2 x = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad -\omega^2 y = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad 0 = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} - g. \tag{1}$$

Эти уравнения имеют общий интеграл

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2) - gz + \text{const}. \tag{2}$$

Поэтому свободная поверхность $p = \text{const}$ есть параболоид вращения около оси z, который обращен кверху вогнутостью и имеет параметр $\frac{2g}{\omega^2}$.

Так как

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega,$$

то потенциала скоростей здесь существовать не может. В „совершенной жидкости, т. е. в такой, в которой невозможны тангенциальные напряжения, движение такого рода при помощи консервативной системы сил вызвано быть не может.

§ 27. Вместо того чтобы предполагать угловую скорость ω всюду одинаковой, примем ее за функцию расстояния r от оси и найдем, какой вид должна иметь эта функция, чтобы для движения существовал потенциал скоростей. Мы имеем в этом случае

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega + r\frac{d\omega}{dr};$$

чтобы правая часть обращалась в нуль, должно быть $\omega r^2 = \mu$, где μ постоянное. В этом случае скорость в любой точке равна $\frac{\mu}{r}$, так что из уравнения (2) § 21, при отсутствии внешних сил, мы имеем

$$\frac{p}{\varrho} = \text{const} - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{r^2}. \tag{1}$$

Применяя полярные координаты, мы получим для определения φ уравнения

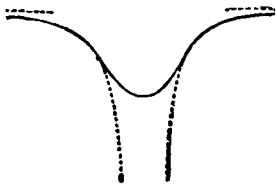
$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{r\,\partial \theta} = -\frac{\mu}{r},$$

следовательно,

$$\varphi = -\mu\theta + \text{const} = -\mu \operatorname{arctg} y/x + \text{const}. \tag{2}$$

Мы имеем здесь пример *циклической* функции. Функция называется *однозначной* в некоторой области, если каждой точке этой области соответствует одно и только одно определенное значение функции таким образом, что эти значения образуют непрерывную систему. Это невозможно для функции (2), так как значение φ меняется на $-2\pi\mu$ всякий раз, когда соответствующая точка описывает замкнутую линию около начала координат. Общая теория циклических потенциалов скоростей будет дана в следующей главе.

Если действует сила тяжести, и мы примем ось z направленной вертикально вверх, то мы должны к правой части уравнения (1) прибавить еще член $-gz$. В этом случае свободная поверхность жидкости есть поверхность, образованная вращением гиперболической кривой $x^2z = \text{const}$ вокруг оси z.



Фиг. 3.

Соединяя надлежащим образом оба вышеизложенных решения, мы получаем случай „комбинированного вихря" Ранкина. При этом движение происходит всюду по соосным кругам; предположим, что скорость равна ωr при r, заключенном между $r=0$ и $r=a$, и равна $\frac{\omega a^2}{r}$ при $r > a$. Соответствующие виды свободной (фиг. 3) поверхности представлены уравнениями

$$z=\frac{\omega^2}{2g}(r^2-a^2)+C \quad \text{и} \quad z=\frac{\omega^2}{2g}\left(a^2-\frac{a^4}{r^2}\right)+C$$

и переходят при $r=a$ непрерывно друг в друга. Отсюда глубина понижения в центре относительно общего уровня свободной поверхности равна $\frac{\omega^2a^2}{g}$.

§ 28. В качестве примера, противоположного предыдущему, рассмотрим случай внешних сил, которые не имеют потенциала. Предположим, что жидкая масса, заполняющая прямой круглый цилиндр, начинает двигаться из положения покоя под действием сил

$$X=Ax+By, \quad Y=B'x+Cy, \quad Z=0,$$

причем ось z совпадает с осью цилиндра.

Если мы положим $u=-\omega y$, $v=\omega x$, $w=0$, где ω есть функция только от t, то эти выражения удовлетворяют уравнению неразрывности и граничным условиям. Очевидно, что уравнения движения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} -y\frac{d\omega}{dt}-\omega^2x&=Ax+By-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ x\frac{d\omega}{dt}-\omega^2y&=B'x+Cy-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Если мы продифференцируем первое из этих уравнений по y, второе по x и вычтем, то исключим p и получим

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{1}{2}(B'-B). \tag{2}$$

Мы видим, что жидкость вращается, как твердое тело, с равномерно ускоренной угловой скоростью вокруг оси z, за исключением частного слу-

чая, когда $B=B'$. Чтобы найти p, подставим найденное для $\frac{d\omega}{dt}$ значение в уравнения (1) и проинтегрируем их; мы получим

$$\frac{p}{\varrho}=\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(Ax^2+2\beta xy+Cy^2)+\text{const.},$$

где

$$2\beta=B+B'.$$

§ 29. В качестве последнего рассмотрим пример, связанный с теорией „электромагнитных вращений".

Если в равномерном магнитном поле через проводящую жидкость к металлическим стенкам цилиндрического сосуда течет по радиусам электрический ток от проводника, служащего осью, то внешние силы должны иметь следующий вид [1]:

$$X=-\frac{\mu y}{r^2},\quad Y=\frac{\mu x}{r^2},\quad Z=0.$$

Полагая $u=-\omega y$, $v=\omega x$, $w=0$, где ω есть функция только от r и t, имеем

$$\left.\begin{aligned}-y\frac{\partial\omega}{\partial t}-\omega^2 x&=-\frac{\mu y}{r^3}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ x\frac{\partial\omega}{\partial t}-\omega^2 y&=\frac{\mu x}{r^2}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Исключая p, получим

$$2\frac{\partial\omega}{\partial t}+r\frac{\partial^2\omega}{\partial r\,\partial t}=0.$$

Решение этого уравнения есть

$$\omega=\frac{F(t)}{r^2}+f(r),$$

где F и f обозначают произвольные функции. Если ω обращается в нуль одновременно с t, то должно быть

$$\frac{F(0)}{r^2}+f(r)=0;$$

поэтому

$$\omega=\frac{F(t)-F(0)}{r^2}=\frac{\lambda}{r^2},\qquad(2)$$

где λ есть функция от t, которая при $t=0$ обращается в нуль. Вставляя это выражение в уравнения (1) и интегрируя, мы получим

$$\frac{p}{\varrho}=\left(\mu-\frac{d\lambda}{dt}\right)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\omega^2r^2+\chi(t).$$

Так как p обязательно есть однозначная функция, то должно быть $\frac{d\lambda}{dt}=\mu$ или $\lambda=\mu t$. Поэтому жидкость вращается с угловой скоростью, которая обратно пропорциональна квадрату расстояния от оси и прямо пропорциональна времени.

[1]) Если через C обозначить полное количество электричества на единицу длины оси, текущее наружу, и γ — компоненту магнитных сил, параллельную оси, то мы имеем $\mu=\frac{\gamma C}{2\pi\varrho}$. Выше разобранный случай особенно прост, так как силы X, Y, Z имеют потенциал, хотя и *„циклический"* ($\Omega=-\mu\operatorname{arctg} y/x$). Вообще, как правило, механические силы X, Y, Z при электромагнитных вращениях потенциала не имеют.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

БЕЗВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 30. Настоящая глава посвящена главным образом изложению некоторых общих теорем, относящихся к тому роду движения, о котором мы говорили еще в § 17—20, т. е. движения, для которого в определенной части жидкой массы выражение

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

есть полный диференциал. Начнем со следующего, принадлежащего Стоксу [1]), анализа движения элемента жидкости в самом общем случае.

Пусть компоненты скорости в точке (x, y, z) будут u, v, w; тогда компоненты относительной скорости в бесконечно близкой точке $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ будут

$$\left.\begin{aligned} \delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z, \\ \delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\delta z, \\ \delta w &= \frac{\partial w}{\partial x}\delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\delta z. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Если мы положим

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ f &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad g = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad h = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \xi &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

то уравнение (1) можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} \delta u &= a\,\delta x + \tfrac{1}{2}h\,\delta y + \tfrac{1}{2}g\,\delta z + \tfrac{1}{2}(\eta\,\delta z - \zeta\,\delta y), \\ \delta v &= \tfrac{1}{2}h\,\delta x + b\,\delta y + \tfrac{1}{2}f\,\delta z + \tfrac{1}{2}(\zeta\,\delta x - \xi\,\delta z), \\ \delta w &= \tfrac{1}{2}g\,\delta x + \tfrac{1}{2}f\,\delta y + c\,\delta z + \tfrac{1}{2}(\xi\,\delta y - \eta\,\delta x). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

---

[1]) Stokes, On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion etc. Cambr. Phil. Trans., VIII (1845) (Papers, I, 80).

Здесь мы отклоняемся от традиционного обозначения. Более часто символы ξ, η, ζ (Гельмгольц) или ω', ω'', ω''' (Стокс) применялись для обозначения компонент вихря

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

элемента жидкости. Основная кинематическая теорема — это как раз теорема, данная в § 32 (3), а употребляемое здесь в тексте определение ξ, η, ζ в этих формулах и в целом ряде последующих, относящихся к вихревому движению, избавляет от введения ненужного множителя 2 (или $^1/_2$, смотря по смыслу). Оно оказывается также удобным и при рассмотрении в § 148 электромагнитной аналогии.

Таким образом движение малого элемента с центром (x, y, z) можно мыслить состоящим из трех частей.

Первая часть, компоненты которой суть u, v, w, есть поступательное движение элемента, взятого как целое.

Вторая часть, выражаемая первыми тремя членами правой части уравнений (3), представляет движение, при котором каждая точка, если δx, δy, δz рассматривать как текущие координаты, движется в направлении той нормали к поверхности второго порядка

$$a(\delta x)^2 + b(\delta y)^2 + c(\delta z)^2 + f\,\delta y\,\delta z + g\,\delta z\,\delta x + h\,\delta x\,\delta y = \text{const}, \quad (4)$$

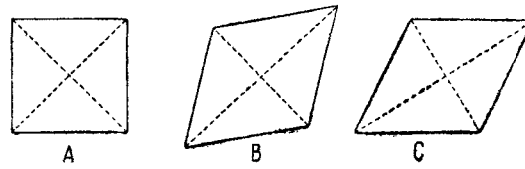
на которой она лежит. Если мы отнесем эту поверхность второго порядка к ее главным осям, то соответствующие части компонент скорости, параллельных этим осям, будут

$$\delta u' = a'\,\delta x', \quad \delta v' = b'\,\delta y', \quad \delta w' = c'\,\delta z', \quad (5)$$

а уравнение (4) после преобразования будет иметь вид

$$a'(\delta x')^2 + b'(\delta y')^2 + c'(\delta z')^2 = \text{const}.$$

Формулы (5) выражают то, что длина всякого отрезка элемента, параллельного x', удлиняется на (положительную или отрицательную) величину, пропорциональную a', в то время как отрезки, параллельные y' и z', соответственно удлиняются пропорционально b' и c'. Такое движение называется *чистым растяжением*, а главные оси поверхностей второго порядка (4) называются осями растяжения.



Фиг. 4.

Последние два члена в правой части уравнений (3) означают вращение элемента как целого около мгновенной оси. Компоненты угловой скорости этого вращения суть $\frac{1}{2}\xi$, $\frac{1}{2}\eta$, $\frac{1}{2}\zeta$[1]).

Вектор, компоненты которого суть ξ, η, ζ, обыкновенно называют *вихрем среды* в точке (x, y, z).

Эти исследования могут быть иллюстрированы при помощи так называемого *ламинарного* движения жидкости. Именно, если

$$u = \mu y, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

то

$$a = b = c = f = g = \xi = \eta = 0, \quad h = \mu, \quad \zeta = -\mu.$$

Если A (фиг. 4) представляет элементарный жидкий параллелепипед, ограниченный плоскостями, параллельными координатным плоскостям, то B

[1]) Величины, которые соответствуют количествам $\frac{1}{2}\xi$; $\frac{1}{3}\eta$, $\frac{1}{2}\zeta$, в теории бесконечно малых перемещений непрерывной среды были истолкованы Коши как выражение „среднего вращения“ элемента. Cauchy, Exercices d'Analyse et de Physique, II, 302 (Paris, 1841).

показывает изменение этого элемента, происшедшее в короткое время вследствие только растяжения, а C выражает изменение, произведенное растяжением совместно с вращением.

Легко убедиться, что указанное выше разложение движения является единственным. В самом деле, если мы предположим, что движение относительно точки (x, y, z) может быть составлено из растяжения и из вращения так, что оси и коэфициенты растяжения, а также ось и угловая скорость вращения произвольны, то тогда, вычисляя компоненты относительной скорости δu, δv, δw, мы получим такие же выражения, как и в правой части (3), но с произвольными значениями a, b, c, f, g, h, ξ, η, ζ. Сравнивая коэфициенты при δx, δy, δz, мы найдем, однако, что a, b, c и т. д. должны иметь те же значения, что и прежде. Отсюда следует, что направления осей растяжения, величины растяжения или сжатия вдоль них, а также ось и величина завихрения в какой-либо точке зависят только от состояния относительного движения в этой точке, но не от выбора координатных осей.

Если в конечной части жидкости все три компоненты ξ, η, ζ равны нулю, то относительное движение для всякого элемента этой части состоит только из чистого растяжения и называется *безвихревым*.

§ 31. Значение интеграла

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$$

или

$$\int \left(u\frac{dx}{ds} + v\frac{dy}{ds} + w\frac{dz}{ds}\right) ds,$$

взятого вдоль произвольной линии $ABCD$, называется *потоком* жидкости вдоль этой линии от A к D[1]). Мы обозначим его для краткости через $J(ABCD)$.

Если A и D совпадают, так что линия $ABCD$ образует замкнутую кривую (или контур), то значение интеграла называют *циркуляцией* вдоль этой замкнутой кривой; будем обозначать ее через $J(ABCA)$. Если мы изменим направление интегрирования в каждом из этих случаев, то знаки величин $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ изменятся на противоположные, и мы будем иметь

$$J(AD) = -J(DA) \quad \text{и} \quad J(ABCA) = -J(ACBA).$$

Также ясно, что

$$J(ABCD) = J(AB) + J(BC) + J(CD).$$

Всякая поверхность может быть разбита на бесконечно малые элементы при помощи двух семейств лежащих на ней линий (фиг. 5). Общая сумма циркуляций вдоль границ элементов, взятых в одном и том

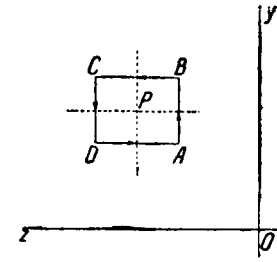
---

[1]) Thomson W., On Vortex Motion, Edin. Trans., XXV (1869) (Papers, IV, 13).

же направлении, равна циркуляции вдоль первоначальной границы поверхности. Если предположить на мгновение, что граница поверхности состоит из одной единственной замкнутой кривой, тогда в рассматриваемой сумме поток вдоль каждой общей пограничной линии двух элементов встречается дважды, по одному разу для каждого элемента, но с противоположными знаками, и поэтому при суммировании он выпадает из общего результата. В результате сохраняются только потоки вдоль тех сторон, которые являются частями первоначального контура; этим и доказывается выше формулированная теорема.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Отсюда, из соображений непрерывности, следует, что циркуляция вдоль границы элемента поверхности δS, данного по положению и направлению, в основном пропорциональна площади элемента.

Если элементом будет прямоугольник $\delta y\,\delta z$ (фиг. 6) с центром в точке (x, y, z), то, вычисляя циркуляцию вокруг него в направлении, указанном стрелкой на фигуре, получим

$$J(AB) = \left\{v - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z}\delta z\right\}\delta y,$$

$$J(BC) = \left\{w + \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\delta y\right\}\delta z,$$

$$J(CD) = -\left\{v + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z}\delta z\right\}\delta y,$$

$$J(DA) = -\left\{w - \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\delta y\right\}\delta z,$$

и поэтому

$$J(ABCDA) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\delta y\,\delta z.$$

Таким путем мы заключаем, что циркуляция вокруг каждой бесконечно малой площадки $\delta S_1\ \delta S_2\ \delta S_3$ в плоскостях, параллельных координатным плоскостям, равна

$$\xi\,\delta S_1,\ \eta\,\delta S_2,\ \zeta\,\delta S_3. \tag{1}$$

Если мы далее воспользуемся фигурой (1) и обозначениями § 2, то будем иметь

$$J(ABCA) = J(PBCP) + J(PCAP) + J(PABP) = \\ = \xi\, l\Delta + \eta\, m\Delta + \zeta\, n\Delta,$$

откуда мы заключаем, что циркуляция вдоль границы *всякой* беско-

нечно малой площадки δS равна

$$(l\xi + m\eta + n\zeta)\,\delta S. \qquad (2)$$

Этим самым мы даем независимое доказательство того, что определенные в (2) § 30 величины ξ, η, ζ могут быть рассматриваемы как компоненты вектора.

Заметим, что необходимо условиться относительно связи между направлением, в котором взята циркуляция вокруг контура элемента δS, и направлением нормали (l, m, n). Для определенности будем принимать в этой книге, что оси координат образуют правую систему; так что если оси x и y соответственно указывают на восток и на север, то ось z будет направлена вертикально вверх [1]). Направление, в котором взята циркуляция, данная формулой (2), находится к направлению нормали (l, m, n) в отношении, характеризуемом правым винтом [2]).

§ 32. Выражая теперь то положение, что циркуляция по контуру конечной площади равна сумме циркуляций по контурам бесконечно малых элементов, на которые может быть разбита площадь, мы согласно (2) § 31 будем иметь

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \int\int (l\xi + m\eta + n\zeta)\,dS, \qquad (3)$$

или, вставляя для ξ, η, ζ их значения из § 30,

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz = \\ = \int\int \left\{ l\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + m\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + n\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \right\} dS, \qquad (4)$$

где простой интеграл берется вдоль пограничной кривой, а двойной интеграл — по поверхности [3]). В этой формуле величины l, m, n обозначают направляющие косинусы нормали, восставленной всегда с одной и той же стороны поверхности; мы будем называть эту сторону поверхности положительной стороной. Направление интегрирования в интеграле, находящемся в левой части формулы (4), будет тогда такое, по какому надо итти на положительной стороне поверхности вблизи контура, чтобы иметь площадь всегда с левой стороны.

Формула (3) или (4) может быть распространена, очевидно, на поверхность, граница которой состоит из двух или многих замкнутых кривых, при условии, что интегрирование в левой части формулы (4) проводится в надлежащем смысле, т. е. согласно установ-

---

[1]) Maxwell, Proc. Lond. Math. Soc., III, 279, 280. В помещенной выше фигуре ось x принимается направленной на читателя.

[2]) См. Maxwell, Electricity and Magnetism, Oxford, 1873, § 23.

[3]) Эта теорема принадлежит Стоксу (Smith's Prize Examination Papers, 1854). Первое опубликованное доказательство дал Hankel, Zur allgem. Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten, Göttingen, 1861. Вышеизложенное доказательство принадлежит Кельвину, см. выше стр. 50; см. также Thomson and Tait, Natural Philosophy, § 190 (j) и Maxwell, Electricity and Magnetism, § 24.

ленному выше правилу. Таким образом, если интеграл по поверхности в формуле (4) распространен по заштрихованной части фиг. 7, то направления, по которым надо брать циркуляции, в различных частях ограничивающей кривой, указаны стрелками, причем положительная сторона поверхности та, которая обращена к читателю.

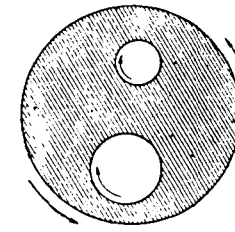
Значение поверхностного интеграла, взятого по *замкнутой* поверхности, равно нулю.

Отметим, что (4) представляет чисто математическую теорему и имеет место для любых функций u, v, w от x, y, z, предполагая только, что они во всех точках поверхности непрерывны и дифференцируемы [1]).

§ 33. Конец этой главы посвящается изучению кинематических свойств общего безвихревого движения, которое определяется равенствами

$$\xi = \eta = \zeta = 0, \tag{1}$$

т. е. мы предполагаем, что циркуляция по всякой *бесконечно малой* замкнутой кривой равна нулю. Существование потенциала скоростей и его свойства в различных встречающихся случаях будут являться следствиями этого определения.



Фиг. 7.

Физическое значение этих исследований состоит именно в том, что движение части жидкой массы при известных, очень общих условиях остается все время безвихревым, если оно было безвихревым в некоторый момент. Это положение в действительности уже установлено, как мы увидим, при помощи доказанной в § 17 теоремы Лагранжа, однако ввиду важности вопроса позволительно повторить доказательство в обозначениях Эйлера в форме, данной Кельвином [2]).

Рассмотрим сначала некоторую проведенную в жидкости конечную линию AB и предположим, что каждая точка этой линии движется с той же скоростью, какую имеет жидкость в этой точке. Вычислим затем величину, на которую возрастает в единицу времени поток вдоль этой линии, считая от A к B. Если обозначить через δx, δy, δz проекции элемента линии на оси координат, то имеем

$$\frac{D}{Dt}(u\,\delta x) = \frac{Du}{Dt}\,\delta x + u\,\frac{D\,\delta x}{Dt}.$$

Но $\frac{D\,\delta x}{Dt}$, скорость, с которой растет δx вследствие движения жидкости, равна разности компонент скорости, параллельных оси x, на обоих концах элемента, т. е. равна δu, а значение $\frac{Du}{Dt}$ дано в § 5.

---

[1]) При этом нет необходимости, чтобы производные были непрерывны.
[2]) См. выше стр. 50.

Отсюда и из аналогичных вычислений получим, что если ϱ есть функция только p и внешние силы X, Y, Z имеют потенциал Ω, то

$$\frac{D}{Dt}(u\,\delta x+v\,\delta y+w\,\delta z)=-\frac{\delta p}{\varrho}-\delta\Omega+u\,\delta u+v\,\delta v+w\,\delta w.$$

Интегрируя по линии от A до B, получим

$$\frac{D}{Dt}\int_A^B(u\,dx+v\,dy+w\,dz)=\left[-\int\frac{dp}{\varrho}-\Omega+\frac{1}{2}q^2\right]_A^B, \qquad (2)$$

или: скорость возрастания потока вдоль линии от A к B равна разности значений выражения $-\int\frac{dp}{\varrho}-\Omega+\frac{1}{2}q^2$ в точках B и A. Эта теорема включает в себе всю динамику совершенной жидкости. Например, отсюда могут быть получены уравнения (2) § 15, если в качестве линии AB взять бесконечно малый линейный элемент, проекции которого были первоначально δa, δb, δc, и затем коэфициенты этих бесконечно малых величин положить в отдельности равными нулю.

Если Ω однозначно, то выражение в скобках в правой части уравнения (2) есть однозначная функция от x, y, z. Поэтому, распространяя интегрирование в левой части по замкнутой кривой, когда B совпадает с A, мы получим

$$\frac{D}{Dt}\int(u\,dx+v\,dy+w\,dz)=0, \qquad (3)$$

т. е. циркуляция по замкнутой кривой, двигающейся с жидкостью, со временем не меняется.

Отсюда следует, что если движение части жидкости было сначала безвихревым, то оно сохраняет это свойство и в дальнейшем; ибо в противном случае циркуляция по всякой бесконечно малой замкнутой кривой согласно уравнению (3) § 32 не равнялась бы постоянно нулю, как это имело место вначале.

§ 34. Рассмотрим какую-нибудь область, которая наполнена жидкостью, имеющей безвихревое движение. Согласно (3) § 32, в этом случае циркуляция равна нулю для всякой замкнутой кривой, через которую можно провести непрерывную, целиком находящуюся в нашей области поверхность или, другими словами, для всякой замкнутой кривой, которую, не выходя из области, можно стянуть в одну точку. Такая замкнутая кривая называется *приводимой*.

Рассмотрим, далее, два пути ACB, ADB, которые соединяют две точки области A и B и каждый из которых может быть непрерывным изменением переведен в другой, не выходя за пределы области. Такие пути называют *взаимно переводимыми*. Так как замкнутая кривая $ACBDA$ приводима, то

$$J(ACBDA)=0$$

или, так как

$$J(BDA) = -J(ADB),$$

то

$$J(ACB) = J(ADB),$$

т. е. поток для двух взаимно переводимых кривых имеет одно и то же значение.

Область, в которой *все* пути, соединяющие одну и ту же пару точек области, взаимно переводимы, называется *односвязной*. Такова область, ограниченная сферой или двумя концентрическими сферами. В дальнейшем вплоть до § 46 мы будем рассматривать только односвязные области.

§ 35. Безвихревое движение жидкости в односвязной области характеризуется существованием однозначного потенциала скоростей. Если обозначить через $-\varphi$ поток от фиксированной точки A к переменной точке P, то будем иметь

$$\varphi = -\int_A^P (u\,dx + v\,dy + w\,dz). \tag{1}$$

Мы показали, что значение φ не зависит от пути интегрирования, если этот путь лежит всецело внутри области. Поэтому φ есть однозначная функция положения точки P; при этом предполагаем, что это положение дано значениями координат (x, y, z) точки P. Перемещая P последовательно на бесконечно малые отрезки параллельно каждой из осей координат, мы найдем

$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{2}$$

а это значит, что φ согласно определению, данному в § 17, есть потенциал скоростей.

Если за нижний предел интеграла в (1) вместо A взять другую точку B, то к значению φ прибавляется только произвольная постоянная, представляющая значение потока от A к B. Первоначальное определение φ в § 17 и физическая интерпретация в § 18 определяют эту функцию также только вплоть до аддитивной произвольной постоянной.

Если следовать по линии тока, то φ монотонно убывает, поэтому в односвязной области линии тока не могут образовать замкнутых кривых.

§ 36. Функция φ, с которой мы имеем здесь дело, и ее первые производные естественно являются конечными, непрерывными и однозначными функциями для всех точек рассматриваемой области. Для несжимаемых жидкостей, к более подробному рассмотрению которых мы теперь приступаем, φ должно удовлетворять также уравнению неразрывности (5) § 20 или, как мы в будущем будем писать для краткости, для каждой точки области должно быть

$$\Delta\varphi = 0. \tag{1}$$

Следовательно, φ подчиняется теперь тем же математическим условиям, что и потенциал масс, притягивающихся или отталкивающихся по закону обратной пропорциональности квадрату расстояния, для всех точек вне указанных масс. Поэтому многие из результатов, доказанных в теории притяжения, электростатике, теории магнетизма и в теории стационарного течения тепла, имеют также и гидродинамическое применение. Мы теперь приступаем к рассмотрению тех из них, которые наиболее важны с последней точки зрения.

При произвольном движении несжимаемой жидкости поверхностный интеграл от нормальной компоненты скорости, распространенный по какой-либо незамкнутой или замкнутой поверхности, вообще называется *потоком* через эту поверхность. Он равен, конечно, объему массы жидкости, протекающей через поверхность в единицу времени.

Если движение не вихревое, то поток определяется интегралом

$$-\iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS,$$

где δS есть элемент поверхности, а δn — элемент восстановленной к ней в соответственном направлении нормали. Во всякой области, наполненной целиком жидкостью, полный поток через границу равен нулю, т. е.

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS = 0, \tag{2}$$

причем элемент δn нормали проводится всегда в одинаковую сторону (именно внутрь), а интегрирование распространяется по всей границе. Уравнение (2) можно рассматривать как обобщенную форму уравнения неразрывности (1).

Линии тока, проведенные через точки бесконечно малой замкнутой кривой, определяют трубку, которая называется трубкой тока. Произведение из скорости q на площадь поперечного сечения (назовем ее через σ) постоянно для всех сечений такой трубки.

Мы можем, если угодно, все пространство, наполненное жидкостью, воображать составленным из трубок тока и допустить, что форма трубок такова, что для каждой из них произведение $q\sigma$ будет иметь одно и то же значение. В таком случае поток через поверхность пропорционален числу пересекающих ее трубок тока. Если поверхность замкнута, то уравнение (2) выражает тот факт, что через поверхность столько же трубок тока входит, сколько выходит. Поэтому линия тока не может ни начинаться, ни кончаться во внутренней точке жидкости.

§ 37. Функция φ не может иметь максимум или минимум ни в какой точке, лежащей внутри жидкости; ибо если бы это имело место, то $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ должно было бы быть на малой замкнутой поверхности вокруг рассматриваемой точки или всюду положительно, или всюду

отрицательно. Каждый из этих случаев несовместим, однако, с уравнением (2).

Далее, квадрат скорости ни в какой точке, лежащей внутри жидкости, не может иметь максимума; для доказательства возьмем ось x параллельно направлению скорости в произвольной точке P. Уравнение (1) и поэтому также уравнение (2) удовлетворяется, если мы напишем $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ вместо φ. Вышеизложенное рассуждение показывает тогда, что $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ в P не может иметь ни максимума, ни минимума. Поэтому в непосредственной близости с P должны существовать точки, в которых $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2$ и, следовательно, тем более

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2$$

больше, чем квадрат скорости в P *).

С другой стороны, квадрат скорости в какой-нибудь точке жидкости может иметь минимум. Простейший такой случай есть тот, когда скорость равна *нулю*; смотри, например, фигуру § 69.

§ 38. Применим теперь уравнение (2) к конечной части жидкости, содержащейся внутри поверхности шара. Пусть r обозначает расстояние какой-либо точки от центра, а $\delta\tilde{\omega}$ есть телесный угол, под которым виден из центра элемент δS поверхности; тогда имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-\frac{\partial\varphi}{\partial r} \quad \text{и} \quad \delta S=r^2\,\delta\tilde{\omega}.$$

Если отбросить множитель r^2, то уравнение (2) представится в виде

$$\int\int\frac{\partial\varphi}{\partial r}d\tilde{\omega}=0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial r}\int\int\varphi\,d\tilde{\omega}=0. \tag{3}$$

Так как

$$\frac{1}{4\pi}\int\int\varphi\,d\tilde{\omega}, \text{ или } \frac{1}{4\pi r^2}\int\int\varphi\,dS$$

дает среднее значение φ на поверхности шара, то уравнение (3) показывает, что это среднее значение не зависит от радиуса. Среднее значение φ поэтому одно и то же для всякого шара, который концентричен данному и может быть переведен в него постепенным изменением радиуса, не выходя из области, наполненной жидкостью с безвихревым движением. Таким образом мы можем рассматривать

*) Эта теорема была высказана в другой связи Кельвином. Lord Kelvin, Phil. Mag., Oct., 1850 (Reprint of Papers on Electrostatics, etc., London, 1872 Art. 665). Вышеизложенное доказательство принадлежит Кирхгофу. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik, Leipzig, 1876. Другое доказательство см. § 44.

шар стянутым в одну точку, а тогда получаем простое доказательство теоремы, данной впервые Гауссом в его трактате [1]) по теории притяжения, что среднее значение φ на произвольной шаровой поверхности, внутри которой имеет место уравнение (1), всегда равно значению φ в центре. Доказанная в § 37 теорема, что φ ни в одной точке, лежащей внутри жидкости, не может иметь максимума или минимума, есть, очевидно, следствие вышеизложенной теоремы.

Данное здесь доказательство принадлежит в существенном Фросту [2]). Другое доказательство, несколько отличающееся по форме, дано Рэлеем [3]). Так как уравнение (1) линейно, то оно удовлетворяется средним арифметическим некоторого числа отдельных решений φ_1, φ_2, φ_3,... Предположим, что вокруг точки P, как начала координат, проведено бесконечное множество прямоугольных систем координат, и пусть φ_1, φ_2, φ_3, ... означают потенциалы скоростей того движения, которое относительно этих отдельных систем равно первоначальному, определяемому через φ, движению относительно системы x, y, z. В этом случае среднее арифметическое (назовем его через $\bar{\varphi}$) функций φ_1, φ_2, φ_3, ... есть функция только от r — расстояния точки P. Если мы хотим теперь выразить, что при движении, характеризуемом потенциалом скоростей $\bar{\varphi}$ (если только такое существует), поток через шаровую поверхность, которая, не выходя из области, наполненной жидкостью, может быть стянута в одну точку, равняется нулю, то мы должны положить

$$4\pi r^2 \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} = 0 \text{ или } \bar{\varphi} = \text{const}.$$

§ 39. Предположим, что область, наполненная жидкостью с безвихревым движением, перифрактическая [4]), т. е. что она изнутри ограничена одной или многими замкнутыми поверхностями. Применим теперь уравнение (2) к области, которая заключена между одной или многими из этих внутренних поверхностей и сферической поверхностью, причем последняя охватывает внутренние поверхности и целиком лежит внутри жидкости. Если M обозначает полный поток, входящий через внутренние границы в указанную область, то, применяя те же обозначения, что и раньше, мы найдем

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial r}\, dS = -M,$$

где поверхностный интеграл распространяется только по поверхности

---

[1]) Gauss, Allgemeine Lehrsätze..., Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, 1839 (Werke, Göttingen, 1870—1880, V, 199).

[2]) Frost, Quarterly, Journal of Mathematics, XII (1873).

[3]) Rayleigh, Messenger of Mathematics, VII, 69 (1878 (Papers, I, 347).

[4]) См. Maxwell, Electricity and Magnetism, Arts, 18, 22. Область называется аперифрактической, если всякая построенная в ней замкнутая поверхность может быть стянута в одну точку, не выходя из области.

сферы. Это можно также представить в виде

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\int\int \varphi\, d\tilde{\omega} = -\frac{M}{4\pi r^2},$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{4\pi}\int\int \varphi\, d\tilde{\omega} = \frac{1}{4\pi r^2}\int\int \varphi\, dS = \frac{M}{4\pi r} + C. \tag{4}$$

Это значит, что среднее значение φ на всякой сферической поверхности, взятой при указанных выше условиях, равно $\frac{M}{4\pi r} + C$, где r есть радиус, M — абсолютное постоянное и C — не зависящая от r величина, которая, однако, может зависеть от положения центра [1]).

Если, однако, первоначальная область безвихревого движения является снаружи неограниченной и если первые (а следовательно, и все высшие) производные от φ в бесконечности равны нулю, то C имеет одно и то же значение для *всех* сферических поверхностей, которые окружают все внутренние поверхности. В самом деле, если переместить такую сферическую поверхность, не изменяя ее вида, параллельно оси x [2]), то изменение C вследствие такого перемещения равно, согласно формуле (4), среднему значению $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ на поверхности. Так как $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ в бесконечности равно нулю, то мы можем, выбирая сферу достаточно большой, это среднее значение сделать как угодно малым. Следовательно, C не будет меняться от перемещения центра сферы параллельно оси x. Подобным же образом мы можем убедиться, что C не будет также меняться и при перемещении параллельно оси y или z; а это значит, что C есть абсолютная постоянная.

Если внутренние граничные поверхности области таковы, что полный поток через них равен нулю, например, если они представляют поверхности твердых тел или частей несжимаемой завихренной жидкости, то тогда будет $M = 0$, и, следовательно, φ на *всякой* сферической поверхности, заключающей все внутренние границы, имеет одно и то же среднее значение.

§ 40. (α) Если потенциал скоростей φ постоянен на границе односвязной области, наполненной жидкостью с безвихревым движением, то он имеет то же постоянное значение также и внутри области. Ибо, если бы функция φ не была постоянной, то она имела бы непременно максимум или минимум в какой-нибудь точке области.

Иначе: в § 35 и § 36 мы видели, что линии тока не могут начинаться или кончаться ни в какой точке области и что они не могут образовать замкнутые кривые, лежащие целиком внутри области. Они должны, следовательно, так проходить через область, чтобы начинаться и кончаться на границе. В нашем случае, однако, это

[1]) Следует помнить, что сферические поверхности, к которым относятся эти теоремы, переводимы друг в друга в том смысле, о котором шла речь в § 34.

[2]) Kirchhoff, Mechanik, стр. 191.

невозможно, так как такая линия должна переходить всегда от точек, где φ больше, к таким точкам, где φ меньше. Следовательно, здесь движение не может иметь места, т. е.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,$$

и поэтому φ постоянно и равно своему значению на границе.

(β). Если $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ равно нулю для всякой точки на границе такой области, о которой речь шла выше, то φ должно быть постоянной всюду внутри области. В самом деле, условие $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$ указывает, что ни одна из линий тока не может войти в область или выйти из нее, но что все они находятся внутри области. Это, однако, как мы видели, несовместимо с теми условиями, которым подчинены линии тока. Поэтому, как и выше, здесь никакое движение не может иметь места, и φ постоянна.

Эта теорема иначе может быть выражена следующим образом. В односвязной области, полностью ограниченной неподвижными твердыми стенками, не может иметь места непрерывное безвихревое движение жидкости.

(γ). Пусть граница рассматриваемой области состоит частично из поверхностей S, на которых φ имеет постоянное значение, и частично из поверхностей Σ, на которых $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$. Согласно вышеизложенным рассуждениям, никакая линия тока не может итти от одной точки S к другой точке S, и никакая из этих линий не может пересекать Σ. А следовательно, вообще не могут существовать такие линии; функция φ поэтому, как и выше, постоянна и равна своему значению на S.

Из этих теорем следует, что безвихревое движение несжимаемой жидкости в односвязной области вполне определено, когда даны для всех точек границы или значения φ, или значения компоненты скорости $-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, направленной по внутренней нормали, или, наконец, когда даны значения φ для одной части поверхности и значения $-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ для другой. В самом деле, если φ_1, φ_2 означают потенциалы скоростей двух движений, из которых каждое удовлетворяет заданным граничным условиям в одном из этих случаев, то функция $\varphi_1-\varphi_2$ удовлетворяет условию (α), или (β), или (γ) этого параграфа и должна поэтому быть постоянной во всей области.

§ 41. Имеется ряд очень важных случаев, которые не вполне охватываются совокупностью вышеизложенных теорем, именно те случаи, в которых область, наполненная несжимаемой жидкостью с безвихревым движением, простирается в бесконечность, а изнутри ограничена одной или несколькими замкнутыми поверхностями. Мы предположим пока, что эта область односвязна, и φ, следовательно, однозначна.

Если φ на внутренних границах области постоянна и на бесконечном расстоянии от них всюду стремится к тому же самому постоянному значению, то она постоянна во всей области. Ибо иначе в некоторой точке внутри области функция φ имела бы максимум или минимум.

Совершенно так же, как и в § 40, мы заключаем, что значение φ всюду вполне определено, если эта функция задана произвольно на внутренних границах и имеет постоянное значение в бесконечности.

Большее значение в рассматриваемых нами исследованиях имеет теорема, что, если компонента скорости по нормали для каждой точки внутренней границы равна нулю и жидкость в бесконечности находится в покое, то функция φ всюду постоянна. Мы не можем, однако, сделать такое заключение прямо из доказательства соответствующей теоремы в § 40. Действительно, мы можем предположить область ограниченной снаружи бесконечно большой поверхностью, в каждой точке которой $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ как угодно мало; но это не исключает того, что сам интеграл $\int\int \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS$, распространенный по некоторой части этой поверхности, может быть все еще конечным, вследствие чего указанная ссылка была бы несостоятельной. Мы поступим поэтому следующим образом.

Так как скорость на бесконечном расстоянии от внутренних границ (назовем их через S) стремится к пределу нуль, то можно провести замкнутую поверхность Σ, полностью заключающую S, вне которой скорость всегда меньше, чем наперед заданное значение ε; если Σ взять достаточно большой, то ε можно сделать как угодно малым. Возьмем теперь некоторую точку P в произвольном направлении по отношению S, но вне Σ и на таком расстоянии от нее, что телесный угол, под которым Σ видно из P, бесконечно мал; около P, как центра, опишем теперь две сферы, из которых одна как раз охватывает S, а другая, наоборот, ее исключает. Мы покажем теперь, что средние значения φ вдоль каждой из этих двух сферических поверхностей могут отличаться друг от друга только на бесконечно малую величину. В самом деле, пусть Q, Q' — точки на этих сферических поверхностях, лежащие на общем радиусе PQQ'; если Q и Q' попадают внутрь Σ, то соответствующие значения для φ могут отличаться на конечную величину; но так как часть каждой из сферических поверхностей, заключенная внутри Σ, составляет только бесконечно малую часть всей сферы, то для разности средних значений не может получиться конечное число. Если, напротив, Q и Q' лежат вне Σ, то соответствующие значения φ не могут отличаться более чем на $\varepsilon \cdot QQ'$, так как ε, согласно определению, дает верхнюю границу для величины изменения φ вне Σ. Поэтому средние значения φ на этих обеих сферических поверхностях могут отличаться только меньше, чем на $\varepsilon \cdot QQ'$. Так как QQ' конечно, а ε, выбирая Σ достаточно большой, можно сделать как угодно малым, то разность

средних значений, если взять P достаточно далеко, может быть сделана бесконечно малой.

Из § 38 и 39 мы знаем, что среднее значение φ на внутренней сферической поверхности равно значению φ в центре P и что среднее значение на внешней сферической поверхности (так как $M=0$) равно постоянной величине C. Отсюда следует, наконец, что значение φ в бесконечности всюду стремится к постоянному значению C.

Тот же самый результат имеет место и тогда, когда компонента скорости по нормали на внутренней границе не равна нулю. Ибо в теореме § 39 M делится на r, который в нашем случае бесконечен.

Следовательно, если для всех точек внутренней границы будет $\frac{d\varphi}{dn}=0$ и жидкость в бесконечности находится в покое, то она должна всюду быть в покое. В самом деле, на внутренних границах никакая линия тока не может ни начинаться, ни кончаться; поэтому такие линии должны, если они существуют, приходить из бесконечности, пересекать область, занятую жидкостью, и снова возвращаться в бесконечность, т. е. они должны образовать бесконечно длинные пути между местами, в которых значения φ с точностью до бесконечно малой величины имеют одно и то же значение C, что невозможно.

Теорема о том, что для покоящейся в бесконечности жидкости движение вполне определено, как только будет дано значение $-\frac{d\varphi}{dn}$ на всей внутренней границе, выводится при помощи такого же рассуждения, как в § 40.

Теорема Грина

§ 42. В учебниках электростатики и др. многие важные свойства потенциала доказываются обыкновенно с помощью одной теоремы, которой мы обязаны Грину. Свойства, наиболее важные для наших целей, мы уже получили; но так как эта теорема, между прочим, приводит к употребительному выражению для кинетической энергии в случае общего безвихревого движения, то ее надлежит здесь изложить.

Пусть имеем U, V, W три любые функции, которые конечны, однозначны и диференцируемы для всех точек связной области, целиком ограниченной одной или несколькими замкнутыми поверхностями S. Пусть δS — элемент одной из этих поверхностей и l, m, n — направляющие косинусы его нормали, направленной внутрь.

Мы докажем сначала, что

$$\iint (lU+mV+nW)dS=-\iiint\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz, \quad (1)$$

где тройной интеграл распространяется по всей области, а двойной интеграл — по ограничивающим ее поверхностям.

Если мы проведем ряд поверхностей так, что они разобьют область на некоторое число отдельных частей, то интеграл

$$\iint (lU + mV + nW)\, dS, \tag{2}$$

взятый по первоначальной граничной поверхности, равен сумме подобных интегралов, из которых каждый распространен по поверхности, ограничивающей одну из этих частей. В самом деле, для всякого элемента $\delta\sigma$ разделяющей поверхности в интегралы, которые соответствуют областям, лежащим по обе стороны этой поверхности, входят элементы

$$(lU + mV + nW)\,\delta\sigma$$

и

$$(l'U + m'V + n'W)\,\delta\sigma.$$

Но так как нормали, к которым относятся значения l, m, n и l', m', n', направлены всегда внутрь, то должно быть

$$l' = -l,\ m' = -m,\ n' = -n,$$

поэтому при составлении суммы названных интегралов элементы, соответствующие разделяющей поверхности, сократятся, и останутся только те, которые относятся к первоначальной ограничивающей поверхности.

Предположим, что разделяющие поверхности состоят из трех систем плоскостей, которые проведены параллельно координатным плоскостям на бесконечно малых расстояниях друг от друга. Если назовем через x, y, z координаты центра какого-либо выделенного таким образом параллелепипеда и через δx, δy, δz — длины его ребер, то значение интеграла (2), взятое по грани, параллельной плоскости yz и лежащей ближе к началу, равно

$$\left(U - \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}\,\delta x\right)\delta y\,\delta z,$$

а значение интеграла, отнесенного к противоположной грани, равно

$$-\left(U + \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}\,\delta x\right)\delta y\,\delta z.$$

Сумма этих значений равна

$$-\frac{\partial U}{\partial x}\,\delta x\,\delta y\,\delta z.$$

Вычислив подобным же образом значения интегралов, которые относятся к другим парам граней, мы получим конечный результат в виде

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z.$$

Таким образом формула (1) просто выражает тот факт, что поверхностный интеграл (2), распространенный по границе области, равен сумме соответствующих интегралов, распространенных по поверхностям пространственных элементов, из которых может быть составлена рассматриваемая область.

Из формулы (1) следует или это может быть доказано непосредственно с помощью преобразования координат, что если U, V, W рассматриваются как компоненты вектора, то выражение

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}$$

представляет скалярную величину, т. е. что значение его при всяком таком преобразовании остается неизменным. Это выражение называют обыкновенно *дивергенцией* векторного поля в точке (x, y, z).

Интерпретация формулы (1) в случае, когда (U, V, W) представляют компоненты скорости непрерывной среды, вполне очевидна. В частном случае безвихревого движения мы получим

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\,dS=-\iiint \Delta\varphi\,dx\,dy\,dz, \tag{3}$$

где ∂n есть элемент направленной внутрь нормали к поверхности S.

Если, далее, положить

$$U=\varrho u,\ V=\varrho v,\ W=\varrho w,$$

то мы воспроизведем в основном второе исследование § 7.

Другой важный результат получится, если положить

$$U=u\varphi,\ V=v\varphi,\ W=w\varphi,$$

где u, v, w удовлетворяют внутри области соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

а на границе

$$lu+mv+nw=0.$$

Мы получим тогда, что

$$\iiint\left(u\frac{\partial \varphi}{\partial x}+v\frac{\partial \varphi}{\partial y}+w\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=0. \tag{4}$$

Функция φ подчинена здесь только тому ограничению, что она во всей области остается конечной, однозначной и непрерывной и обладает конечными первыми производными.

§ 43. Обозначим через φ, φ' две произвольные функции, которые вместе с их первыми и вторыми производными конечны и однозначны в рассматриваемой области. Положим

$$U=\varphi\frac{\partial \varphi'}{\partial x},\ V=\varphi\frac{\partial \varphi'}{\partial y},\ W=\varphi\frac{\partial \varphi'}{\partial z},$$

так что

$$lU+mV+nW=\varphi\frac{\partial \varphi'}{\partial n}.$$

Вставляя это в уравнение (1), найдем

$$\iint \varphi\frac{\partial \varphi'}{\partial n}\,dS=-\iiint\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi'}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \varphi'}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \varphi'}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz-$$
$$-\iiint \varphi\,\Delta\varphi'\,dx\,dy\,dz. \tag{5}$$

Переставляя φ и φ', получим

$$\iint \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS = -\iiint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \varphi'}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \varphi'}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz - \iiint \varphi' \Delta\varphi\, dx\, dy\, dz. \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) вместе и выражают теорему Грина [1]).

§ 44. Пусть φ и φ' представляют потенциалы скоростей двух различных безвихревых движений жидкости. Так как

$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\varphi' = 0, \quad (1)$$

то мы получим

$$\iint \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\, dS = \iint \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS. \quad (2)$$

Вспоминая данное в § 18 физическое истолкование потенциала скоростей и предполагая движение полученным мгновенно из состояния равновесия, мы усматриваем в этом уравнении частный случай динамической теоремы

$$\sum p_r \dot{q}_r' = \sum p_r' \dot{q}_r',$$

где p_r, $\dot{q}_r$ и p_r', $\dot{q}_r'$ суть обобщенные компоненты импульса и скорости для двух произвольных возможных движений системы [2]).

Если положить в формуле (6) § 43

$$\varphi' = \varphi$$

и допустить, что φ есть потенциал скоростей несжимаемой жидкости, то мы получим

$$\iiint \left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} dx\, dy\, dz = -\iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS. \quad (3)$$

Чтобы истолковать это уравнение, умножим обе части его на $\frac{1}{2}\varrho$. Тогда $-\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ в правой части обозначает направленную внутрь нормальную компоненту скорости жидкости, а $\varrho\varphi$, согласно § 18, есть необходимое для образования движения импульсивное давление. Существует теорема динамики [3]), которая утверждает, что произведенная импульсивной силой работа измеряется произведением импульса на полусумму компонент, взятых по направлению импульса, начальной и конечной скорости точки, на которую подействовал импульс. Поэтому правая сторона формулы (3), умноженная на $\frac{1}{2}\varrho$, выражает работу, произведенную теми импульсивными давлениями, которые, будучи распределены по поверхности S, могут вызвать рассматри-

---

[1]) Green G., Essay on Electricity and Magnetism, Nottingham, 1828, § 3 (Mathematical Papers (ed. Ferrers), Cambridge, 1871, стр. 3).

[2]) Thomson and Tait, Natural Philosophy, § 313, уравнение (11).

[3]) Thomson and Tait, Natural Philosophy, § 308.

ваемое движение; левая сторона, напротив, дает кинетическую энергию этого движения. Сама же формула указывает на равенство обеих этих величин. Отсюда, если T обозначает общую кинетическую энергию жидкости, следует очень важная формула

$$2T = -\varrho \int\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS. \tag{4}$$

Если в формулу (3) подставить $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ вместо φ, которая, конечно, удовлетворяет уравнению

$$\Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

и применить получающуюся формулу к области, которая ограничена сферической поверхностью, описанной радиусом r около произвольного центра (x, y, z), то мы будем иметь в обозначениях § 39

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \int\int u^2 d\widetilde{\omega} = \int\int u \frac{\partial u}{\partial r}\, dS = -\int\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dS =$$
$$= \int\int\int \left\{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z}\right)^2\right\} dx\, dy\, dz.$$

Полагая $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$, получим

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \int\int q^2 d\widetilde{\omega} = \int\int\int \left\{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial z}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right\} dx\, dy\, dz. \tag{5}$$

Так как правая часть этого уравнения существенно положительна, то среднее значение q^2 на сферической поверхности, описанной около произвольного центра, возрастает вместе с радиусом сферы. Поэтому q^2 ни в какой точке жидкости не может иметь максимума, что уже доказано другим путем в § 37.

Если мы теперь вспомним формулу для давления в общем случае безвихревого движения жидкости:

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Omega - \frac{1}{2} q^2 + F(t), \tag{6}$$

то, предполагая, что потенциал Ω внешних сил удовлетворяет условию

$$\Delta \Omega = 0, \tag{7}$$

заключаем, что среднее значение p на сферической поверхности, описанной около произвольного центра, лежащего внутри жидкости, уменьшается при возрастании радиуса. Область с наименьшим давлением будет находиться поэтому где-нибудь на границе жидкости. Это обстоятельство имеет отношение к вопросу, рассматриваемому в 23.

§ 45. В связи с этим обратим внимание на замечательную теорему, открытую Кельвином [1]) и впоследствии им обобщенную настолько, что она представляет теперь общее свойство динамических систем, которые мгновенно приводятся в движение из состояния покоя при заданных условиях для скоростей [2]):

---

[1]) Thomson W., On the Vis-viva of a Liquid in Motion, Camb. and Dub. Math. Journ., 1849 (Papers, I, 107).

[2]) Thomson and Tait, 312.

Безвихревое движение капельной жидкости в односвязной области **обладает** меньшей кинетической энергией, чем всякое другое движение с одинаковой нормальной компонентой скорости на границе.

Пусть T есть кинетическая энергия безвихревого движения, которой соответствует потенциал скоростей φ, и T_1 — кинетическая энергия другого движения, заданного выражениями

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_0, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + v_0, \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + w_0, \tag{8}$$

причем вследствие уравнения неразрывности внутри области должно быть

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0,$$

а в силу заданных условий на границе

$$lu_0 + mv_0 + nw_0 = 0.$$

Полагая далее

$$T_0 = \frac{1}{2}\varrho \iiint (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)\, dx\, dy\, dz, \tag{9}$$

мы найдем, что

$$T_1 = T + T_0 - \varrho \iiint \left(u_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz.$$

Так как этот последний интеграл вследствие (4) § 42 обращается в нуль, то будем иметь

$$T_1 = T + T_0, \tag{10}$$

что и доказывает нашу теорему [1]).

§ 46. Для дальнейшего необходимо знать, каким будет выражение (4) для кинетической энергии, если жидкость простирается в бесконечность, находится там в покое и изнутри ограничена одной или несколькими замкнутыми поверхностями S. Проведем большую замкнутую поверхность Σ так, чтобы она заключала в себе совокупность поверхностей S. Энергия заключенной между S и Σ жидкости равна

$$-\frac{1}{2}\varrho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS - \frac{1}{2}\varrho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\Sigma, \tag{11}$$

где интегрирование в первом члене проводится по S, а во втором по Σ. Так как вследствие уравнения неразрывности

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS + \iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\Sigma = 0,$$

то выражение (11) может быть представлено в виде

$$-\frac{1}{2}\varrho \iint (\varphi - C) \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS - \frac{1}{2}\varrho \iint (\varphi - C) \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\Sigma, \tag{12}$$

---

[1]) Некоторые обобщения этого результата даны Leathem, Cambridge Tracts № 1, 2 изд. (1913). Они дают дальнейшие интересные иллюстрации общего динамического принципа Кельвина.

где C может быть некоторой произвольной постоянной; здесь же мы допускаем, что она имеет то постоянное значение, к которому, согласно § 39, стремится φ на бесконечном расстоянии от S. Представим теперь всю наполненную жидкостью область составленною из трубок тока, каждая из которых или должна итти от одной точки внутренней границы к другой точке ее или же от внутренней границы простираться в бесконечность. Поэтому значение интеграла

$$\int\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma,$$

взятого по некоторой незамкнутой или замкнутой, конечной или бесконечной поверхности, лежащей внутри области, должно быть конечно. А тогда, если взять Σ бесконечно большой и всюду бесконечно удаленной от S, второй член (12) должен в конечном счете исчезнуть, и мы будем иметь

$$2T = -\varrho \int\int (\varphi - C) \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \tag{13}$$

где интеграл берется только по внутренней границе.

Если полный поток через внутреннюю границу равен нулю, то

$$\int\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0,$$

и формулу (13) можно представить просто в виде

$$2T = -\varrho \int\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \tag{14}$$

О многосвязных областях

§ 47. Прежде чем рассматривать свойства безвихревого движения в многосвязных областях, мы должны ближе изучить свойства и классификацию таких областей. В нижеследующем обозрении этой ветви геометрии (топология) мы ради полноты повторим одно или два уже ранее данных определения.

Рассмотрим некоторую связную область пространства, заключенного внутри какой-то границы. Область называют связной, если возможно от некоторой произвольной точки ее перейти к другой произвольной ее точке вдоль бесконечно большого числа путей, каждый из которых лежит всецело внутри области.

Такие два произвольные пути или две какие-нибудь замкнутые кривые, которые непрерывным изменением, не выходя из области, можно совместить, называются *взаимно переводимыми*. Всякая замкнутая кривая, которая, оставаясь внутри области, может быть стянута в точку, называется *приводимой*. Два взаимно переводимые пути образуют вместе приводимую замкнутую кривую. Если два пути или две замкнутые кривые взаимно переводимы, то возможно натянуть на них непрерывную, целиком расположенную внутри области поверхность, для которой эти кривые образуют полную границу, и на-

оборот. Далее целесообразно делать различие между просто и кратно неприводимыми контурами. Неприводимый контур называется кратно неприводимым, если его можно перевести с помощью непрерывного изменения всецело или частично в другой несколько раз пробегаемый неприводимый контур. Простой неприводимый контур есть такой, для которого это невозможно.

Перегородкой или диафрагмой называется проведенная через область поверхность, граница которой образована линией или линиями, по которым эта поверхность пересекает границу области. Поэтому перегородка необходимо должна быть связной поверхностью и не может состоять из двух или нескольких отдельных частей.

Область называется односвязной, если все пути, проведенные между какими-нибудь ее точками, взаимно переводимы или все взятые в ней замкнутые кривые приводимы.

Область называется двусвязной, если между двумя ее точками A и B могут быть проведены два и только два пути взаимно непереводимые; всякий другой путь между A и B переводим в один из этих обоих или в комбинацию их, в которой каждый может входить несколько раз. Другими словами: область такова, что в ней может быть проведен один и только один неприводимый простой контур; все другие контуры переводимы или в этот (или возможно в кривую, образованную из него через повторение) или же они приводимы. Как пример двусвязной области мы можем взять область, заключенную внутри кольца (тора), или область вне кольца, простирающуюся в бесконечность.

Вообще область называется n-связной, если в ней могут быть проведены между двумя точками n и только n взаимно непереводимых путей или если могут быть проведены $n-1$ и не больше (простых) неприводимых и взаимно непереводимых замкнутых кривых.

Заштрихованная часть фиг. 6 есть двухмерная трехсвязная область.

Можно показать, что вышеизложенное определение n-связной области непротиворечиво. В простых случаях, когда $n=2$, $n=3$, это ясно без доказательства.

§ 48. Предположим, что мы имеем n-связную область с $n-1$ независимыми просто неприводимыми замкнутыми кривыми. В этом случае можно провести перегородку, которая одну из этих замкнутых кривых пересечет в одной только точке, а остальные $n-2$ замкнутых кривых совсем не пересечет. Такая перегородка не нарушит связности области, так как пересеченная ею замкнутая кривая останется как путь от одной стороны перегородки до другой. Однако порядок связности области понижается на *единицу*; ибо всякая замкнутая кривая в измененной области должна быть переводима в одну или несколько из $n-2$ не пересеченных нашей перегородкой замкнутых кривых.

Вторая подобным образом проведенная перегородка понизит порядок связности опять на единицу, и т. д.; таким образом, проводя $n-1$ перегородок, мы можем привести область к односвязной.

Односвязная область разбивается перегородкой на две отдельные части; ибо иначе можно бы было перейти от точки на одной стороне перегородки к соседней точке на второй стороне ее вдоль лежащего целиком внутри области пути, который в первоначальной области представлял бы неприводимую замкнутую кривую.

Таким образом в n-связной области, не нарушая связности ее, можно провести $n-1$, но не больше, перегородок. Этим свойством пользуются иногда для определения n-связной области.

Безвихревое движение в многосвязных областях

§ 49. В области, наполненной жидкостью с безвихревым движением, циркуляция по двум взаимно переводимым замкнутым кривым $ABCA$ и $A'B'C'A'$ имеет одно и то же значение. В самом деле, две замкнутые кривые могут быть связаны друг с другом при помощи непрерывной, целиком лежащей внутри области, поверхности; если мы применим теорему § 32 к этой поверхности, то, принимая во внимание правило относительно направления интегрирования, получим

$$J(ABCA)+J(A'C'B'A')=0,$$

или

$$J(ABCA)=J(A'B'C'A').$$

Если замкнутая кривая $ABCA$ переводима в комбинацию двух или нескольких замкнутых кривых $A'B'C'A'$, $A''B''C''A''$ и т. д., то мы можем все эти замкнутые кривые связать непрерывной поверхностью, которая лежит всецело внутри области и для которой эти контуры составляют полную границу. Поэтому будем иметь

$$J(ABCA)+J(A'C'B'A')+J(A''C''B''A'')+\ldots=0,$$

или

$$J(ABCA)=J(A'B'C'A')+J(A''B''C''A'')+\ldots,$$

т. е. циркуляция по произвольной замкнутой кривой равна сумме циркуляций по отдельным кривым той совокупности замкнутых кривых, в которые переводима первоначальная кривая.

Пусть порядок связности области будет $n+1$, так что в ней можно провести n независимых просто неприводимых замкнутых кривых $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Пусть циркуляции по этим замкнутым кривым будут соответственно $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$. Знак каждого $\varkappa$ будет зависеть, естественно, от направления интегрирования вдоль соответствующей замкнутой кривой; мы назовем направление, по которому взято $\varkappa$, положительным направлением замкнутой кривой. Значение циркуляции по другой произвольной замкнутой кривой можно сразу определить. В самом деле, данная замкнутая кривая должна быть переводимой в какую-либо комбинацию кривых $a_1, a_2, \ldots, a_n$; a_1 может при этом проходиться p_1 раз, a_2 — p_2 раз и т. д., причем p_1, естественно, будет отрицательным, если соответствующая замкнутая кривая про-

ходится в отрицательном направлении. Искомая циркуляция тогда равна

$$p_1\varkappa_1 + p_2\varkappa_2 + \ldots + p_n\varkappa_n. \tag{1}$$

Так как два произвольные пути, которые соединяют две точки A и B области, вместе образуют замкнутую кривую, то отсюда следует, что значения потока по обоим путям могут отличаться только на величины вида (1), причем, конечно, в частных случаях некоторые или все p могут равняться нулю.

§ 50. Обозначим через $-\varphi$ поток от фиксированной точки A к переменной точке P, т. е.

$$\varphi = -\int_A^P (u\,dx + v\,dy + w\,dz). \tag{2}$$

До тех пор, пока путь интегрирования от A до P не установлен, значение φ будет определяться с точностью до величины вида (1).

Если, однако, провести n перегородок по способу, указанному в § 48, для того чтобы привести область к односвязной и ограничить путь интегрирования в выражении (2) так, чтобы он лежал внутри преобразованной таким образом области (т. е. он не должен пересекать ни одну из перегородок), то φ будет однозначной функцией, как и в § 35. Далее, φ будет непрерывной функцией в преобразованной области, но ее значения в двух соседних точках на различных сторонах перегородки отличаются на $\pm\varkappa$. Чтобы получить значение φ для случая, когда интегрирование взято вдоль произвольного пути внутри непреобразованной области, мы должны *вычесть* величину вида (1), где какое-то p указывает, сколько раз этот путь пересекает соответствующую перегородку. При этом пересечение перегородки в положительном направлении той замкнутой кривой, для которой проведена перегородка, будет считаться положительным, а пересечение в противоположном направлении будет отрицательным.

Перемещая P на бесконечно малый отрезок параллельно каждой координатной оси, мы найдем, что

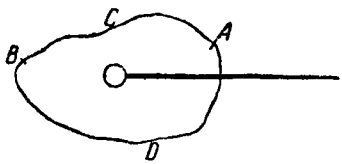
$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Функция φ удовлетворяет, таким образом, определению потенциала скоростей (§ 17). Однако, она будет теперь многозначной или циклической, т. е. нельзя будет каждой точке первоначальной области поставить в соответствие единственное определенное значение φ таким образом, чтобы эти значения образовали непрерывную систему. Напротив, когда P будет описывать неприводимую замкнутую кривую, то φ, вообще говоря, не будет возвращаться к своему первоначальному значению, но будет отличаться от него на величину вида (1).

Количества $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$, представляющие величины, на которые уменьшается φ, когда P проходит различные независимые замкнутые кривые области, мы назовем *циклическими* постоянными функции φ.

В качестве непосредственного следствия теоремы о циркуляции § 33, при допускаемых там условиях, будет следовать, что эти циклические постоянные не зависят от времени. Насколько необходимы эти условия, будет выяснено на примере § 29, где потенциал внешних сил сам есть циклическая функция.

Вышеизложенная теория может быть иллюстрирована случаем (2) § 27; область там двусвязная (так как она изнутри ограничена малым кругом около начала координат, где формула дает бесконечно большое значение для скорости); поэтому две произвольные точки A и B (фиг. 8) области могут быть соединены при помощи двух взаимно непереводимых путей, которые расположены по обе стороны оси z, например, ACB и ADB на приложенной фигуре. Ту часть плоскости xz, для которой x положительно, мы можем взять в качестве перегородки и этим самым превратить область в односвязную. Циркуляция по произвольной замкнутой кривой, которая пересекает эту перегородку только один раз как, например, $ACBDA$, равна



Фиг. 8.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mu}{r} r\, d\theta, \quad \text{или} \quad 2\pi\mu.$$

Циркуляция же по замкнутой кривой, не пересекающей перегородки, равна нулю. В преобразованной области можно положить φ равной однозначной функции, например $-\mu\theta$. Однако ее значение на положительной стороне перегородки равно нулю, в то время как в соседней точке на отрицательной стороне равно $-2\pi\mu$.

Более сложные примеры безвихревого движения в многосвязных двухмерных областях встретятся в следующей главе.

§ 51. Прежде чем перейти к дальнейшему, мы дадим вкратце несколько другой метод изложения этой теории.

Исходя из существования потенциала скоростей как основной характеристики того класса движений, который мы намереваемся изучать, и принимая второе данное в § 48 определение $n+1$-связной области, мы замечаем, что в односвязной области всякая поверхность уровня (поверхность равного потенциала) или должна быть замкнутой поверхностью, или должна представлять перегородку, разбивающую область на две отдельные части. Отсюда, предполагая, что проведена целая система таких поверхностей, мы видим, что всякая замкнутая кривая, которая пересекает однажды произвольную из заданных эквипотенциальных поверхностей, должна пересечь ее вторично, но в противоположном направлении. Поэтому каждому элементу этой кривой, заключенному между двумя последовательными эквипотенциальными поверхностями, соответствует второй элемент кривой, такой, что поток вдоль второго, будучи равным разности соответствующих значений φ, равен и противоположен потоку вдоль первого. Поэтому величина циркуляции вдоль всей замкнутой кривой равна нулю.

Если, однако, область многосвязная, то эквипотенциальная поверхность может образовать перегородку, не разбивая области на две отдельные части. Проведем теперь столько таких поверхностей, сколько возможно, чтобы не разрушить связности области. Их число не может по определению быть больше, чем n. Всякая другая незамкнутая эквипотенциальная поверхность должна, очевидно, быть переводимой в одну или больше из этих перегородок. Если провести кривую с одной стороны перегородки к другой ее стороне, притом не пересекая какой-нибудь другой перегородки, то всякая эквипотенциальная поверхность, переводимая в первую перегородку, пересекается этой кривой нечетное число раз, а всякая другая эквипотенциальная поверхность — четное число раз. Поэтому циркуляция по образованной таким образом замкнутой кривой не равна нулю, и φ будет циклической функцией.

В методе, развитом выше, мы обосновали всю теорию на уравнениях

$$\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}=0,\quad \frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}=0,\quad \frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}=0 \tag{3}$$

и вывели из них, как необходимые следствия, существование и свойства потенциала скоростей в различных случаях. Действительно, содержание § 34, 35 и 49, 50 может рассматриваться, как исследование о свойствах решений этой системы диференциальных уравнений в зависимости от характера области, для которой они имеют место.

Интегрирование уравнений (3) для случая, когда мы с правой стороны вместо нуля будем иметь известные функции от x, y, z, будет разобрано в главе VII.

§ 52. Переходя теперь, как в § 36, к частному случаю несжимаемой жидкости, мы заметим, что, все равно, будет ли φ циклической или нет, ее первые производные $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, а следовательно, и все производные высшего порядка, суть существенно однозначные функции, и при этом φ всегда будет удовлетворять уравнению неразрывности

$$\Delta\varphi=0, \tag{1}$$

или эквивалентному уравнению

$$\int\int\frac{d\varphi}{dn}\,dS=0, \tag{2}$$

где поверхностный интеграл распространяется по всей границе произвольной части жидкости.

Теорема (α) § 40 о том, что функция φ должна внутри всякой области, для точек которой имеет место уравнение (1), быть постоянной, если она постоянна на границе ее, имеет место также и тогда, когда область многосвязна. Ибо φ должна быть обязательно однозначна, если она постоянна на всей границе.

Другие теоремы § 40, которые опираются на допущение, что линии тока не могут образовать замкнутые кривые, потребуют не-

которых изменений. Именно мы должны присоединить еще условие, что циркуляция по всякой замкнутой кривой области должна равняться нулю.

Если мы отбросим это ограничение, то будем иметь следующую теорему: безвихревое движение несжимаемой жидкости в n-связной области вполне определено, если даны как нормальная компонента скорости для всякой точки границы, так и значение циркуляции для всякой из n независимых неприводимых замкнутых кривых, которые можно провести в данной области. В самом деле, если φ_1, φ_2 суть (циклические) потенциалы скоростей двух движений, удовлетворяющих вышеизложенным условиям, то

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

есть однозначная функция, которая для всякой точки области удовлетворяет уравнению (1), а для всякой точки границы удовлетворяет условию $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$. Поэтому φ согласно § 40 постоянна, и движения, определяемые с помощью φ_1 и φ_2, тождественны.

Теория многосвязности развита, повидимому, впервые Риманом [1]) для двухмерных областей в связи с его исследованиями по теории функции комплексного переменного. Там встречаются также циклические функции, которые удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

в многосвязных областях.

Значение этой теории для гидродинамики и существование многозначных потенциалов скоростей в некоторых случаях впервые отмечено Гельмгольцем [2]). Вопрос о циклическом безвихревом движении в многосвязных областях был впоследствии опять поднят Кельвином и вполне исследован в его уже цитированной работе о вихревом движении [3]).

Обобщение Кельвина для теоремы Грина

§ 53. При доказательстве теоремы Грина предполагалось, что как φ, так и φ' суть однозначные функции. Формулировка теоремы должна быть изменена, если одна из двух функций циклична, что может случиться, когда область, по которой производится интегрирование в § 43, будет многосвязной. Предположим, например, что φ циклична; поверхностный интеграл на левой стороне и второй тройной интеграл на правой стороне уравнения (5) § 43 будут тогда по своему значению неопределенны, так как φ само неопределенно. Чтобы устранить эту неопределенность, проведем указанные в § 48 перегородки, которые превратят область в односвязную. В преобразован-

---

[1]) Riemann, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse, Göttingen, 1851 (Mathematische Werke, Leipzig, 1876, p. 3) и Lehrsätze aus der Analysis Situs, Crelle, LIV (1857) (Werke, p. 84).

[2]) Helmholtz, Crelle, LV (1858).

[3]) См. также Kirchhoff, Über die Kräfte, welche zwei unendlich dünne starre Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können, Crelle, LXXI (1869) (Ges. Abh., p. 404).

ной таким образом области мы можем φ принять непрерывной и однозначной; указанное только что уравнение сохранит свое значение, если предположить, что обе стороны каждой перегородки будут рассматриваться как части поверхности, ограничивающей область, и будут приняты во внимание в поверхностном интеграле на левой стороне. Обозначим через $\delta\sigma_1$ элемент перегородки, через $\varkappa_1$ — циклическую постоянную для этой перегородки, через $\frac{\partial\varphi'}{\partial n}$ — первую производную от φ' по положительному направлению нормали к $\delta\sigma_1$. Так как в частях поверхностного интеграла, относящихся к противоположным сторонам элемента $\delta\sigma_1$, величина $\frac{\partial\varphi'}{\partial n}$ должна быть взята с противоположными знаками, в то время как значение φ на положительной стороне превышает значение φ на отрицательной стороне на $\varkappa_1$, то для элемента интеграла, отнесенного к $\delta\sigma_1$, мы получим значение

$$\varkappa_1 \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,\delta\sigma_1.$$

Благодаря этим изменениям условий, уравнение (5) § 43 переходит в следующее:

$$\iint \varphi \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,dS + \varkappa_1 \int\int \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,d\sigma_1 + \varkappa_2 \int\int \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,d\sigma_2 + \ldots =$$
$$= -\iiint \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz -$$
$$- \iiint \varphi\,\Delta\varphi'\,dx\,dy\,dz, \qquad (1)$$

где первый из поверхностных интегралов на левой стороне распространяется только по первоначальной границе области, а остальные — по различным перегородкам области. Множитель при каждом $\varkappa$ представляет, очевидно, взятый со знаком *минус* полный расход через соответствующую перегородку при движении с потенциалом скоростей φ'. Значения φ в первом и последнем членах уравнения определяются по методу, данному в § 50.

Если φ' будет также циклической функцией с циклическими постоянными $\varkappa_1', \varkappa_2', \ldots$, то уравнение (6) § 43 с помощью тех же самых рассуждений примет вид

$$\iint \varphi' \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS + \varkappa_1' \int\int \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma_1 + \varkappa_2' \int\int \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma_2 + \ldots =$$
$$= -\iiint \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz -$$
$$- \iiint \varphi'\,\Delta\varphi\,dx\,dy\,dz. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) вместе и составляют то обобщение теоремы Грина, которое предложено Кельвином.

§ 54. Если обе функции φ и φ' будут представлять потенциалы скоростей несжимаемой жидкости, то

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0,\\ \Delta\varphi' &= 0\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и поэтому

$$\int\int_s \varphi \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,dS + \varkappa_1\int\int \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,d\sigma_1 + \varkappa\int\int \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,d\sigma_2 + \ldots =$$
$$= \int\int \varphi' \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS + \varkappa_1'\int\int \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma_1 + \varkappa_2'\int\int \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma_2 + \ldots \tag{4}$$

Чтобы получить физическое истолкование этой теоремы, необходимо сначала изложить предложенный Кельвином способ, при помощи которого можно получить любое циклическое безвихревое движение капельной жидкости в многосвязной области.

Предположим, что жидкость заключена в совершенно гладкую и изгибаемую оболочку, форма которой совпадает с формой ограничивающей поверхности. Для того чтобы превратить область в односвязную, проведем n перегородок, как в § 48; допустим, далее, что эти перегородки представляют такие же бесконечно тонкие и невесомые пленки.

В начальный момент жидкость находится в покое, затем пусть каждый элемент выше названной оболочки внезапно начинает двигаться внутрь с данной (положительной или отрицательной) нормальной компонентой скорости $-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$; одновременно к отрицательным сторонам перегородок пусть будут приложены импульсивные давления $\varkappa_1\varrho, \varkappa_2\varrho, \ldots, \varkappa_n\varrho$. Вызванное таким способом движение будет характеризоваться следующими свойствами. Оно будет безвихревым, так как образовалось из состояния покоя; нормальная компонента скорости для всякой точки первоначальной границы будет иметь заданное значение; значения же импульсивных давлений в двух соседних точках на разных сторонах перегородки будут отличаться на соответствующие значения $\varkappa\varrho$, а значения потенциала скоростей тем самым будут отличаться на соответствующее значение $\varkappa$; наконец, движения на обеих сторонах перегородки переходят непрерывно друг в друга. Чтобы доказать это последнее положение, заметим сначала, что компоненты скорости, перпендикулярные к перегородке в двух соседних точках на разных ее сторонах, равны между собой, так как обе равны нормальной компоненте скорости соответствующей частицы пленки. Пусть далее P, Q суть две рядом лежащие точки перегородки, φ_P, φ_Q — соответствующие значения φ на положительной стороне, φ'_P, φ'_Q — на отрицательной стороне этой перегородки, тогда будем иметь

$$\varphi_P - \varphi'_P = \varkappa = \varphi_Q - \varphi'_Q$$

и поэтому

$$\varphi_Q - \varphi_P = \varphi'_Q - \varphi'_P,$$

т. е., если

$$PQ = \delta s,$$

то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi'}{\partial s}.$$

Следовательно, тангенциальные компоненты скорости двух соседних точек на различных сторонах перегородки также равны. Если мы теперь вообразим, что сейчас же после толчка пленки перегородок стали жидкими, то мы и будем иметь искомое безвихревое движение.

Физическое истолкование уравнения (4) после умножения на $-\varrho$ будет таким же, как в § 44. Величины $\varrho\varkappa$ будут представлять дополнительные компоненты импульса, а значения

$$-\iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma,$$

т. е. количества жидкости, прошедшей через различные отверстия области, будут являться соответствующими обобщенными скоростями.

§ 55. Если мы в формуле (2) положим $\varphi' = \varphi$ и допустим, что φ есть потенциал скоростей несжимаемой жидкости, то получим

$$2T = \varrho \iiint \left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} dx\, dy\, dz =$$

$$= -\varrho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS - \varrho\varkappa_1 \iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma_1 - \varrho\varkappa_2 \iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma_2 - \ldots \qquad (5)$$

Последняя часть этой формулы получает простое истолкование с помощью только что изложенного сейчас искусственного способа образования циклического безвихревого движения. Первый член, как мы уже видели, есть удвоенная работа, которую совершает действующее на все части первоначальной границы жидкости импульсивное давление $\varrho\varphi$.. Далее, $\varrho\varkappa_1$ есть импульсивное давление, которое действует в положительном направлении на бесконечно тонкую невесомую пленку, которую мы вообразили на месте первой перегородки. А тогда выражение

$$-\frac{1}{2}\iint \varrho\varkappa_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma_1$$

будет обозначать работу, произведенную действующими на пленку импульсивными силами; то же самое относится к остальным перегородкам. Поэтому формула (5) выражает тот факт, что энергия движения равна работе, производимой всей системой импульсивных сил, которая, как мы допустили, способна образовать данное движение.

Применяя (5) к случаю, когда жидкость простирается в бесконечность и там находится в покое, мы можем первый член третьей части заменить через

$$-\varrho \iint (\varphi - C) \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS, \qquad (6)$$

где интегрирование распространяется только на внутренние границы.

Доказательство этого такое же, как и в § 46. Если полный поток через границу равен нулю, то выражение (6) сводится к

$$-\varrho \int\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \tag{7}$$

Данная в § 45 теорема Кельвина о минимуме может быть теперь обобщена следующим образом:

Безвихревое движение несжимаемой жидкости в многосвязной области обладает меньшей кинетической энергией, чем всякое другое движение с теми же самыми нормальными компонентами скорости на границе и одинаковыми значениями полного расхода через каждый из различных независимых каналов области.

Провести доказательство предоставляем читателю.

Источники и стоки. Дублеты

§ 56. Аналогия с теорией электростатики, теплопроводности и т. д. может простираться еще далее, если ввести понятия источника и стока.

Простой источник есть точка, из которой мы воображаем жидкость вытекающей равномерно во все стороны. Если полный поток наружу через малую замкнутую поверхность, окружающую точку, равен m, то величина m называется мощностью источника. Отрицательный источник называется стоком. Существование источника или стока предполагает, конечно, непрерывное образование или уничтожение жидкости в рассматриваемой точке.

Для простого источника в жидкости, покоящейся в бесконечности, потенциал скоростей в некоторой точке P равен

$$\varphi = \frac{m}{4\pi r}, \tag{1}$$

где r означает расстояние точки P от источника. В самом деле, этот потенциал скоростей дает течение в радиальном направлении от этой точки и, если

$$\delta S = r^2 \delta \widetilde{\omega}$$

есть элемент сферической поверхности с центром в источнике, то

$$-\int\int \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = m,$$

где m — постоянное; таким образом уравнение неразрывности удовлетворяется, и поток наружу равен мощности источника.

Совокупность источника и стока мощности $+m'$ и $-m'$ с взаимным расстоянием δs, причем в пределе δs берется бесконечно малым, а m' бесконечно большим, но так, что произведение $m' \delta s$ остается конечным и равным, скажем, μ, называется *диполем*, или *дублетом* мощности μ. Проведенная в направлении от $-m'$ к $+m'$ прямая, на которой лежит δs, называется *осью дублета*.

Чтобы найти потенциал скоростей в точке (x, y, z) жидкости при наличии в ней в точке (x', y', z') дублета мощности μ с направлением оси (l, m, n), заметим, что имеет место равенство

$$f(x'+l\delta s,\ y'+m\delta s,\ z'+n\delta s)-f(x', y', z')=$$
$$=\left(l\frac{\partial}{\partial x'}+m\frac{\partial}{\partial y'}+n\frac{\partial}{\partial z'}\right)f(x', y', z')\,\delta s,$$

если f есть любая непрерывная функция. Полагая

$$f(x', y', z')=\frac{m'}{4\pi r},$$

где

$$r=\left\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right\}^{1/2},$$

мы найдем

$$\varphi=\frac{\mu}{4\pi}\left(l\frac{\partial}{\partial x'}+m\frac{\partial}{\partial y'}+n\frac{\partial}{\partial z'}\right)\frac{1}{r}= \tag{2}$$
$$=-\frac{\mu}{4\pi}\left(l\frac{\partial}{\partial x}+m\frac{\partial}{\partial y}+n\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}= \tag{3}$$
$$=\frac{\mu}{4\pi}\frac{\cos\vartheta}{r^2}, \tag{4}$$

где ϑ есть угол между проведенной из точки (x', y', z') в (x, y, z) прямой r и осью (l, m, n).

Продолжая таким же образом (см. § 82), мы можем образовать источники более высокого порядка; но сказанного уже достаточно для нашей непосредственной цели.

Наконец, мы можем вообразить, что простые источники или дублеты встречаются не в изолированных точках, а распределены непрерывно вдоль линии, поверхности или объема.

§ 57. Теперь мы можем доказать, что всякое непрерывное, ациклическое безвихревое движение жидкости может быть вызвано действием простых и двойных источников, распределенных по границе области.

Это утверждение основывается на доказанной в § 44 теореме, выраженной уравнением

$$\int\int\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,dS=\int\int\varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS, \tag{5}$$

где φ и φ' суть две любые однозначные функции, для которых удовлетворяются уравнения $\Delta\varphi=0$ и $\Delta\varphi'=0$ во всей рассматриваемой области, причем интегрирование производится по всей границе. Для данного случая мы должны φ взять в качестве потенциала скоростей рассматриваемого движения и φ' положить равным обратному значению расстояния любой точки жидкости от неподвижной точки P, т. е.

$$\varphi'=\frac{1}{r}.$$

Мы будем сначала предполагать, что P лежит внутри области, занятой жидкостью. Так как в этом случае функция φ' в точке P равна бесконечности, то необходимо эту точку исключить из области, к которой применяется формула (5). Это можно сделать, описав малую сферическую поверхность Σ около P, как центра. Если мы предположим теперь, что $\delta\Sigma$ есть элемент этой сферической поверхности, а δS — элемент первоначальной границы, то указанная формула дает

$$\int\int \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\Sigma + \int\int \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \\ = \int\int \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\Sigma + \int\int \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS. \qquad (6)$$

На поверхности Σ имеем

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}.$$

А тогда, если мы положим $\delta\Sigma = r^2 d\tilde{\omega}$ и затем будем приближать r к нулю, то первый интеграл в левой части (6) будет равняться $-4\pi\varphi_P$, где φ_P есть значение φ в точке P; первый же интеграл в правой части обратится в нуль; следовательно, мы получим

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS + \frac{1}{4\pi}\int\int \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS. \qquad (7)$$

Эта формула дает значение φ в любой точке жидкости, выраженное через значения φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ на границе. Сравнивая с формулами (1) и (2), мы видим, что первый член формулы (7) есть потенциал скоростей для простых источников, распределенных по границе с плотностью, равной $-\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ на единицу площади; второй член есть потенциал скоростей для дублетов, распределенных по границе, с плотностью φ на единицу площади, причем направление оси дублетов совпадает с направлением нормали к ограничивающей поверхности. Ниже из уравнения (10) будет следовать, что это есть только одно из бесконечно большого числа возможных распределений источников на поверхности, которые все дают одно и то же значение φ для внутренней части области.

Если жидкость простирается по всем направлениям в бесконечность и там находится в покое, то мы можем с некоторой предосторожностью рассматривать интегралы в формуле (7) как интегралы, распространенные только по внутренним границам. Чтобы в этом убедиться, возьмем в качестве внешней пограничной поверхности бесконечно большую шаровую поверхность с центром в точке P. Соответствующая часть первого интеграла в формуле (7) обращается в нуль, в то время как во втором интеграле она равна C, т. е. равна постоянному значению, к которому, как мы видели в § 41, стремится φ в бесконечности. Теперь для упрощения форму-

лировки нашей теоремы удобно положить $C=0$; это вполне законно, так как мы имеем право всегда прибавить к φ произвольное постоянное.

Если точка P лежит вне пограничной поверхности, то тогда φ' будет конечной во всей первоначальной области, и формула (5) дает тотчас

$$0=-\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS+\frac{1}{4\pi}\int\int\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS, \tag{8}$$

причем опять, в том случае, когда жидкость простирается в бесконечность и там находится в покое, можно опустить члены, относящиеся к бесконечно далекой части пограничной поверхности.

§ 58. Выраженное формулой (7) распределение источников, далее, может быть заменено через распределение либо только простых источников, либо только дублетов.

Пусть φ есть потенциал скоростей жидкости, которая занимает определенную область, а φ' обозначает потенциал скоростей любого возможного ациклического безвихревого движения в остальной части неограниченного пространства, при условии, что φ или φ', в зависимости от случая, в бесконечности обращается в нуль. Тогда, если точка P лежит внутри вышеуказанной определенной области и, следовательно, вне остальной части пространства, то мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\varphi_P&=-\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS+\frac{1}{4\pi}\int\int\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS,\\ 0&=-\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi'}{\partial n'}\,dS+\frac{1}{4\pi}\int\int\varphi'\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}\right)dS,\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где δn, $\delta n'$ суть элементы нормали к dS, направленной внутрь (соответственно в первую и вторую области), так что

$$\frac{\partial}{\partial n'}=-\frac{\partial}{\partial n}.$$

Складывая, мы получим

$$\varphi_P=-\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{\partial\varphi'}{\partial n'}\right)dS+\frac{1}{4\pi}\int\int(\varphi-\varphi')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS. \tag{10}$$

Функция φ' определяется в свою очередь через значения φ' и $\frac{\partial\varphi'}{\partial n'}$ на пограничной поверхности области, которые еще находятся в нашем распоряжении.

Положим сначала, что на границе

$$\varphi'=\varphi;$$

тогда тангенциальные компоненты скорости на обеих сторонах границы непрерывны, нормальные же компоненты, наоборот, разрывны. Чтобы легче такой случай представить, вообразим, что все бесконечное пространство, наполненное капельной жидкостью, разделено на две части бесконечно тонкой двуслойной поверхностью; в промежутке между слоями можно вдоль поверхности распределить такое импуль-

сивное давление, которое могло бы породить данное движение из состояния покоя. В этом случае последний член формулы (10) обращается в нуль, так что

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{\partial\varphi'}{\partial n'}\right) dS, \qquad (11)$$

т. е. движение жидкости (по обе стороны) обусловливается простыми источниками, распределенными по границе с поверхностной плотностью

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{\partial\varphi'}{\partial n'}\right)^{1}).$$

Далее, мы можем предположить на границе

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n};$$

тогда будем иметь непрерывные нормальные компоненты скорости и, наоборот, разрывные тангенциальные компоненты на первоначальной границе. В этом случае можно вообразить движение происходящим вследствие того, что каждой точке бесконечно тонкой оболочки, которая занимает положение границы, мы сообщаем заданную нормальную компоненту скорости $-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$. Теперь первый член формулы (10) обращается в нуль, и мы получим

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi}\iint (\varphi-\varphi')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS. \qquad (12)$$

Эта формула показывает, что движение по обе стороны оболочки может быть представлено, как вызванное при помощи дублетов, которые распределены по границе с поверхностной плотностью

$$\varphi - \varphi'.$$

Можно показать, что это представление φ либо только через простые источники, либо только через двойные источники будет единственным, в то время как представление, данное в § 57, является неопределенным [2]).

Ясно, что *циклическое*, безвихревое движение несжимаемой жидкости не может быть вызвано через распределение только простых источников. Однако легко видеть, оно может быть представлено через некоторое распределение двойных источников по границе вместе с равномерным распределением двойных источников по каждой перегородке, которые превращают область, наполненную жидкостью, в односвязную область. В самом деле, в обозначениях § 53 мы будем иметь

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi}\iint (\varphi-\varphi')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS + \frac{\varkappa_1}{4\pi}\iint\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_1 + \\ + \frac{\varkappa_2}{4\pi}\iint\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_2 + \ldots, \qquad (13)$$

---

[1]) Это исследование дано впервые Грином при рассмотрении соответствующих вопросов электростатики, см. прим. на стр. 65.

[2]) Larmor C., On the Mathematical Expression of the Principle of Huyghens, Proc. Lond. Math. Soc. (2), ч. I (1903) (Math. and Phys. Papers, Cambridge, 1929, II, 240)

где φ есть однозначный потенциал скоростей, который мы получаем в измененной области, а φ' обозначает потенциал скоростей ациклического движения, которое образуется во внешнем пространстве, когда каждому элементу δS оболочки, совпадающей по положению с первоначальной границей, мы сообщим надлежащую нормальную компоненту скорости $-\frac{\partial \varphi}{\partial n}$

Другой способ представления безвихревого движения, безразлично, будет ли оно циклическим или нет, будет описан в главе о вихревом движении.

На этом мы заканчиваем изучение теории безвихревого движения. Математически образованный читатель, без сомнения, заметит отсутствие некоторых важных звеньев в цепи наших заключений. Например, не было дано независимого от физических рассуждений доказательства существования функции φ, которая удовлетворяет уравнениям § 36 внутри произвольно данной односвязной области и принимает заданные значения на границе. В данном руководстве мы не приводим строгого доказательства соответствующих „теорем существования". Чтобы получить обозрение литературы по этой части вопроса, читатель может обратиться к цитированным ниже авторам [1]).

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

§ 59. Если компоненты скорости u, v суть функции только от x, y, в то время как w равно нулю, то движение происходит в плоскостях, параллельных плоскости xy, и оно одинаково во всех таких плоскостях. Исследование движения жидкости при этих предположениях характеризуется определенными аналитическими особенностями, и многие очень интересные проблемы могут быть решены при этом достаточно просто.

Так как все движение будет известно, если мы знаем его в плоскости $z=0$, то мы можем ограничить наше внимание только этой плоскостью. Точки и линии в этой плоскости могут всегда рассматриваться, соответственно, как следы прямых, параллельных оси z, или как следы цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными оси z.

Под потоком (расходом) через некоторую кривую мы будем понимать объем жидкости, протекающей в единицу времени через ту часть цилиндрической поверхности, которая заключена между плоскостями

$$z=0, \quad z=1$$

и следом которой является указанная кривая.

---

[1]) Burkhardt H. und W. F. Meyer, Potentialtheorie, и Sommerfeld A., Randwerthaufgaben in der Theorie d. part. Diff.-Gleichungen, Encycl. d. math. Wiss., 2 (1900).

Пусть A, P будут какие-то две точки в плоскости xy. Поток через две произвольные кривые, соединяющие A, P, будет иметь всегда одно и то же значение, если обе кривые могут быть переводимы друг в друга, не выходя из области, наполненной движущейся жидкостью; ибо в противном случае в области, заключенной между двумя кривыми, создавалась бы или терялась некоторая масса. Если при этом точка A будет неподвижна, а P подвижна, то поток через произвольную кривую AP будет функцией положения точки P. Обозначим эту функцию через ψ; выражаясь точнее, ψ будет обозначать поток через AP *справа налево* для наблюдателя, находящегося на кривой, который смотрит в направлении от A к P. Выражаясь математически, если l, m означают направляющие косинусы (направленной налево) нормали произвольного элемента δs кривой, то

$$\psi = \int_A^P (lu + mv)\, ds. \tag{1}$$

Если область, наполненная жидкостью, аперифрактична (см. § 39), то ψ должна быть непременно однозначной функцией; но в перифрактических областях значение ψ может зависеть от выбора пути AP. Однако для двухмерного пространства понятия „перифрактичности“ и „многосвязности“ означают одно и то же, так что свойства функции ψ для случая, когда она в пространстве, занятом движущейся жидкостью, многозначна, могут быть заимствованы из § 50, где мы обсуждали тот же самый вопрос в отношении функции φ. Когда области перифрактичны, тогда циклические постоянные функции ψ суть значения потока через те замкнутые кривые, которые образуют различные части внутренней границы.

Если переместить точку, от которой отсчитываем ψ, например, от A к B, то это скажется только в прибавлении постоянной к значению ψ, а именно значения потока через линию BA; следовательно, ψ определяется только с точностью до аддитивной постоянной.

Если точка P движется таким образом, что значение ψ остается неизменным, то она описывает такую кривую, которая нигде не пересекается жидкостью, т. е. линию тока. Поэтому кривые $\psi = \text{const}$ суть линии тока, и ψ называется *функцией тока*.

Если переместить P параллельно оси y на бесконечно малый отрезок $PQ = \delta y$, то приращение ψ будет представлять поток справа налево через PQ, т. е.

$$\delta\psi = -u\, PQ,$$

или

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}. \tag{2}$$

Также, если переместить P параллельно оси x, получим

$$v = \frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{3}$$

Существование такой функции ψ, которая связана с u, v соотношениями (2) и (3), следует также из особой формы уравнения непрерывности в нашем случае, именно — из

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0; \tag{4}$$

последнее есть аналитическое условие того, что $u\,dy - v\,dx$ есть полный дифференциал [1]).

Вышеизложенные рассуждения имеют место как при вихревом, так и при безвихревом движении. Данные в § 30 формулы для компонент вихря имеют в этом случае вид

$$\xi=0,\quad \eta=0,\quad \zeta=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\ ; \tag{5}$$

следовательно, в случае безвихревого движения будем иметь

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0. \tag{6}$$

§ 60. В дальнейшем мы ограничимся случаем безвихревого движения, которое, как мы видели, характеризуется тем, что существует потенциал скоростей φ, связанный с u, v соотношениями

$$u=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\ ; \tag{1}$$

так как мы рассматриваем только движение несжимаемой жидкости, то φ должно удовлетворять уравнению неразрывности в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \tag{2}$$

Теория функции φ, а также связь между ее свойствами и свойствами двухмерной области, в которой имеет место безвихревое движение, может быть просто заимствована из соответствующих теорем прошлой главы для трехмерного пространства. Необходимые при этом изменения формулировок теорем или их доказательств будут большей частью иметь чисто формальный характер.

Например, и здесь мы будем иметь теорему, что среднее значение φ вдоль окружности круга будет равно ее значению в центре при условии, что круг может быть стянут в точку, оставаясь все время внутри области, занятой жидкостью.

Кроме того, если эта область простирается до бесконечности, будучи ограниченной изнутри одной или несколькими замкнутыми кривыми, и если скорость стремится к нулю в бесконечности, то значение φ будет стремиться там к некоторому постоянному при условии, что полный расход через внутренние границы равен нулю. Последняя оговорка здесь является существенной.

---

[1]) Функция ψ введена таким способом. Lagrange, Nouv. Mém. de l'Acad de Berlin, 1781 (Oeuvres, IV, 720). Кинематическое истолкование дано Rankine, On Plane Water-Lines in Two Dimensions, Phil. Trans., 1864 (Miscellaneous Scientific Papers, London, 1881, p. 495).

Уравнение (2) имеет фундаментальное решение в виде $\varphi = C \ln r$, где r обозначает расстояние от некоторой фиксированной точки. Это решение представляет источник на плоскости, ибо, если мы возьмем

$$\varphi = -\frac{m}{2\pi} \ln r, \tag{3}$$

то поток наружу через окружность, охватывающую данную точку, будет

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} 2\pi r = m. \tag{4}$$

Постоянное m, таким образом, представляет мощность, или напряжение источника. Мы в основном придем к тому же результату, если представим, что точечные источники, о которых была речь в § 56, распределены равномерно с линейной плотностью m вдоль оси z. Скорость в этом случае будет направлена по r и равна $\frac{m}{2\pi r}$, что согласуется с (3). Мы будем иметь здесь так называемый линейный источник (в трехмерном пространстве).

Для двойного источника или, как его иногда называют, дублета мы будем иметь

$$\varphi = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} (\ln r), \tag{5}$$

где символ $\frac{\partial}{\partial s}$ означает пространственное диференцирование в направлении оси дублета. Если ϑ будет представлять угол между направлением возрастания r и этой осью, то имеем $\delta r = -\delta s \cos \vartheta$ и, следовательно,

$$\varphi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \vartheta}{r}. \tag{6}$$

Кроме того, мы можем установить ряд формул, аналогичных формулам § 58. В частности, соответственно формуле (12) § 58 мы будем иметь

$$\varphi_P = -\frac{1}{2\pi} \int (\varphi - \varphi') \frac{\partial}{\partial n} (\ln r)\, ds, \tag{7}$$

которая дает значение φ в какой-то области, выраженное через распределение дублетов вдоль границы. Эту формулу можно будет применять и к случаю, когда жидкость с внешней стороны неограничена при условии, что скорость стремится к нулю в бесконечности и что полный поток наружу равен нулю. Как и в § 58, функция φ' относится к области внутри внутренней границы и подчинена тому условию, что $\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ на этой границе. Следствия из этой формулы будут вскоре указаны (§ 72а).

§ 60а. Рассмотренные выше кинематические соотношения имеют свою полную аналогию и в теории электропроводности. В случае

равномерного плоского проводящего слоя мы имеем

$$\sigma f = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \sigma g = -\frac{\partial V}{\partial y} \tag{1}$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

где (f, g) есть плотность тока, V — электрический потенциал, а σ есть удельное сопротивление материала. Если мы теперь положим

$$u = \sigma f, \quad v = \sigma g, \quad \varphi = V, \tag{3}$$

то написанные выше соотношения будут совпадать с соответствующими соотношениями гидродинамики. Это обстоятельство подсказывает практический метод решения плоских гидрокинетических задач. Проводящий слой может быть взят в виде тонкого слоя слабо проводящей жидкости (H_2SO_4), содержащейся в прямоугольном лотке, две противоположные стороны которого являются металлическими и сохраняют постоянную разность потенциалов, другие же стороны (и дно) представляют изоляторы. Эквипотенциальные линии, к которым ортогональны линии тока, электрически легко могут быть обнаружены. Этим способом могут быть получены практические решения задач об обтекании потоком какого-либо препятствия (представляемого в электрическом эксперименте в виде непроводящего диска), которые нелегко могут быть изучены аналитически [1]).

Помимо этого, мы можем вместо (3) положить

$$u = -\sigma g, \quad v = \sigma f, \quad \psi = -V. \tag{4}$$

При этом гидродинамические соотношения будут выполняться, но линии тока теперь будут соответствовать линиям равного электрического потенциала и, следовательно, могут быть найдены непосредственно. Обтекаемый контур в этом случае должен представляться в виде диска, проводимость которого настолько значительно превышает проводимость окружающего слоя, что может считаться практически абсолютной. Эта аналогия допускает и дальнейшее приспособление, с помощью которого можно также представить циркуляцию. В самом деле, если (l, m) будут направляющие косинусы направленной наружу нормали к контуру препятствия, то циркуляция будет равна

$$\int (lv - mu)\, ds = \sigma \int (lf + mg)\, ds \tag{5}$$

и, следовательно, пропорциональна в электрической аналогии полному потоку электричества наружу. С этой целью диск соединяется

[1]) За подробностями эксперимента можно отослать к статье E. F. Relf, Phil. Mag. (6), XLVIII (1924). В качестве критерия пригодности метода может служить то, что фиг. 18 воспроизведена с исключительной точностью. Таким способом была определена циркуляция вокруг пластинки и сравнена с теорией.

с одной клеммой соответствующей батареи, а вторая клемма должна быть соединена с одной из проводящих стенок лотка.

§ 61. Пусть часть жидкости ограничена цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси z, и двумя перпендикулярными к оси z плоскостями, расстояние между которыми равно единице. Кинетическая энергия T этой части жидкости тогда напишется

$$2T=\varrho\iint\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy=-\varrho\int\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds, \qquad (1)$$

где поверхностный интеграл распространяется по той части плоскости xy, которая вырезана цилиндрической поверхностью, а криволинейный интеграл распространяется по контуру этой части. Так как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-\frac{\partial\psi}{\partial s},$$

то формула (1) может быть написана следующим образом:

$$2T=\varrho\int\varphi\,d\psi, \qquad (2)$$

где интегрирование ведется по контуру.

Если мы подобным же образом как в § 46, подсчитаем энергию для области, простирающейся в бесконечность, то мы найдем, что ее значение будет бесконечно, за исключением случая, когда полный поток M во внешнее пространство равен нулю. В самом деле, если провести окружность большого радиуса r в качестве внешней границы рассматриваемой части плоскости xy, то увидим, что соответствующая часть интеграла на правой стороне формулы (1) растет безграничнo вместе с r. Единственное исключение образует случай $M=0$, и здесь мы можем считать, что линейный интеграл в формуле (1) распространен только по внутреннему контуру.

Если цилиндрическая часть ограничивающей поверхности состоит из двух или многих отдельных частей, из которых одна заключает все остальные, то область будет многосвязной, и уравнение (1) потребует тогда исправления, которое может быть проведено в точности, как в § 55.

Конформные преобразования.

§ 62. Функции φ и ψ связаны соотношениями

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (1)$$

Эти условия будут выполняться, если положить

$$\varphi+i\psi,$$

где i обозначает, как обычно, $\sqrt{-1}$, равным некоторой аналитической функции от $x+iy$:

$$\varphi+i\psi=f(x+iy). \qquad (2)$$

В самом деле, тогда имеем

$$\frac{\partial}{\partial y}(\varphi+i\psi)=if'(x+iy)=i\,\frac{\partial}{\partial x}(\varphi+i\psi). \qquad (3)$$

Если мы теперь приравняем здесь в отдельности действительные и мнимые части, то увидим, что уравнения (1) удовлетворяются.

Таким образом при произвольном предположении относительно вида функции (2) мы будем иметь возможный случай безвихревого движения. Кривые $\varphi = \text{const}$ суть эквипотенциальные кривые, а кривые $\psi = \text{const}$ представляют линии тока. Так как согласно (1) мы имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0,$$

то кривые этих обеих систем пересекаются под прямыми углами, что уже было ранее доказано. Так как уравнения (1) остаются неизменными, если мы напишем $-\psi$ вместо φ и φ вместо ψ, то мы можем, если пожелаем, кривые $\psi = \text{const}$ рассматривать как эквипотенциальные кривые, а кривые $\varphi = \text{const}$ как линии тока; следовательно, всякое предположение относительно вида функции (2) дает *два* возможных случая безвихревого движения.

Ради краткости мы будем в этой главе пользоваться обозначениями, употребляемыми в теории функций, и будем писать

$$z = x + iy, \tag{4}$$

$$w = \varphi + i\psi. \tag{5}$$

С современной точки зрения, основное свойство аналитической функции комплексного переменного состоит в том, что она обладает определенной производной по этой переменной [1]). Если φ, ψ суть две любые функции от x и y, то каждому значению $x + iy$ должно соответствовать одно или несколько определенных значений $\varphi + i\psi$; отношение диференциала этой функции к диференциалу от $x + iy$

$$\frac{\delta\varphi + i\,\delta\psi}{\delta x + i\,\delta y} \quad \text{или} \quad \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\,\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\delta y}{\delta x + i\,\delta y}$$

зависит вообще от отношения $\delta x : \delta y$. Условие того, что первое отношение для всех значений последнего будет одно и то же, представится в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\,\frac{\partial\psi}{\partial y} = i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right), \tag{6}$$

что эквивалентно с формулами (1). Это свойство принималось Риманом в качестве определения аналитической функции комплексного переменного; это значит, что такая функция должна иметь для каждого данного значения переменного не только одно или несколько определенных значений, но также для каждого из этих значений и определенную производную. Преимущество этого определения состоит в том, что оно совершенно не зависит от существования аналитического выражения для функции.

---

[1]) См., например, Forsyth, Theory of Functions, изд. 3-е, Cambridge, 1918, гл. I, 2.

Если представлять комплексные величины z и w геометрически, следуя методу Аргана и Гаусса, то производную $\frac{dw}{dz}$ можно рассматривать как оператор, который преобразует бесконечно малый вектор δz в соответствующий вектор δw. И тогда из указанного выше свойства следует, что это отображение подобно в бесконечно малых частях.

Возьмем, например, две системы прямых линий в плоскости w:

$$\varphi = \text{const}, \quad \psi = \text{const};$$

пусть при этом каждая из постоянных пробегает значения некоторой арифметической прогрессии, причем обе прогрессии имеют одну и ту же бесконечно малую разность. Прямые этих обеих систем пересекают друг друга под прямыми углами и разбивают плоскость на бесконечно малые квадраты. Тогда в плоскости xy две соответствующие системы кривых

$$\varphi = \text{const}, \quad \psi = \text{const},$$

где постоянные имеют те же значения, что и раньше, пересекаются также под прямыми углами (что уже было доказано другим путем) и разбивают плоскость на бесконечно малые квадраты.

Обратно, если φ, ψ суть две любые функции от x, y такие, что обе системы кривых

$$\varphi = m\varepsilon, \quad \psi = n\varepsilon$$

где ε — бесконечно малая, а m, n — произвольно целые числа, разбивают плоскость на элементарные квадраты то из геометрических соображений следует

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \pm \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = \mp \frac{\partial y}{\partial \varphi}.$$

Если взять верхние знаки, то эти уравнения суть условия того, что $x + iy$ есть функция от $\varphi + i\psi$. Случай нижнего знака приводится к тому же случаю изменением знака у ψ. Уравнение (2) составляет, таким образом, *полное* решение задачи конформного отображения двух плоскостей друг на друга [1]).

Подобие соответствующих бесконечно малых частей плоскости w и плоскости z не имеет места в точках, в которых производная $\frac{dw}{dz}$ равна нулю или бесконечности. Так как

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{7}$$

то в применении к гидродинамике соответствующие значения скорости в этом случае равны нулю или бесконечности.

Во всех физических применениях w должна быть однозначной функцией или, по крайней мере, циклической функцией z в смысле

---

[1]) Lagrange, Sur la construction des cartes géographiques, Nouv. Mém. de l'Académie de Berlin, 1779 (Oeuvres, IV, 636).

Относительно дальнейшей истории проблемы см. Forsyth, Theory of Functions, гл. XIX.

§ 50 в рассматриваемой области. Поэтому в случае многозначной функции область должна сводиться к части одного листа соответствующей римановой поверхности, внутри которой не должны встречаться точки разветвления.

§ 63. Мы можем теперь перейти к некоторым применениям вышеизложенного метода.

Сначала возьмем

$$w = Az^n,$$

где A действительно. Введя полярные координаты r, θ, получим

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= Ar^n \cos n\theta, \\ \psi &= Ar^n \sin n\theta. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Рассмотрим, в частности, следующие случаи.

1. Для $n = 1$ линии тока образуют систему прямых, параллельных оси x, а эквипотенциальные кривые представляют подобную же систему прямых, параллельных оси y. В этом случае любые две соответствующие фигуры в плоскости w и в плоскости z подобны — безразлично, будут ли фигуры бесконечно малыми или конечными.

2. Для $n = 2$ кривые $\varphi = \text{const}$ образуют систему равнобочных гипербол, для которых главными осями служат оси координат, а кривые $\psi = \text{const}$ представляют подобную же систему гипербол, для которых координатные оси являются асимптотами. Линии

$$\theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

суть части одной и той же линии тока $\psi = 0$; мы можем, следовательно, взять положительные части координатных осей x, y в качестве твердых границ и будем, таким образом, иметь случай, когда жидкость движется внутри угла, между двумя перпендикулярными друг другу стенками.

3. При $n = -1$ мы получаем две системы окружностей, которые касаются координатных осей в начале. Так как при этом

$$\varphi = \frac{A}{r} \cos\theta,$$

то скорость в начале обращается в бесконечность; мы должны поэтому предположить, что область, к которой мы применяем наши формулы, ограничена внутри замкнутой кривой.

4. Для $n = -2$ каждая из систем кривых состоит из двойной системы лемнискат Оси обеих систем $\varphi = \text{const}$ совпадают с осями координат, а оси систем $\psi = \text{const}$ совпадают с биссектрисами координатных углов.

5. Выбирая соответственным образом значения n, можно получить случай безвихревого движения, при котором граница состоит из двух твердых наклонных под произвольным углом α стенок. Так как уравнение линий тока есть

$$r^n \sin n\theta = \text{const}, \tag{2}$$

то мы видим, что линии $\theta=0$, $\theta=\frac{\pi}{n}$ суть части одной и той же линии тока. Если, следовательно, мы положим $n=\frac{\pi}{\alpha}$, то получим искомое решение

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= Ar^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi\theta}{\alpha},\\ \psi &= Ar^{\frac{\pi}{\alpha}}\sin\frac{\pi\theta}{\alpha}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Компоненты скорости в направлении r и в перпендикулярном к нему направлении будут

$$\left.\begin{aligned}&-A\frac{\pi}{\alpha}r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\cos\frac{\pi\theta}{\alpha},\\ &A\frac{\pi}{\alpha}r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\sin\frac{\pi\theta}{\alpha}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

и, следовательно, будут нулями, конечными или бесконечными в начале, смотря по тому, будет ли α меньше, равно или больше, чем π.

§ 64. Рассмотрим теперь некоторые случаи циклических функций.

1. Допущение, что

$$w=-\mu\ln z, \tag{1}$$

где μ, действительно, дает

$$\varphi=-\mu\ln r,\quad \psi=-\mu\theta. \tag{2}$$

Скорость на расстоянии r от начала будет равна $\frac{\mu}{r}$; начало должно быть исключено с помощью описанной вокруг него замкнутой кривой.

Если мы возьмем лучи $\theta=\text{const}$ в качестве линий тока, то мы получим случай источника (двухмерного) мощности $2\pi\mu$ в начале координат (см. § 60).

Если взять окружности $r=\text{const}$ в качестве линий тока, то мы будем иметь случай § 27; движение будет теперь циклическим; циркуляция по всякой кривой, заключающей начало, равна $2\pi\mu$.

2. Примем теперь

$$w=-\mu\ln\frac{z-a}{z+a}. \tag{3}$$

Если мы обозначим через r_1, r_2 длины отрезков, соединяющих некоторую точку плоскости xy с точками $(\pm a, 0)$, и через θ_1, θ_2 углы, которые эти отрезки составляют с положительным направлением оси x, то будем иметь

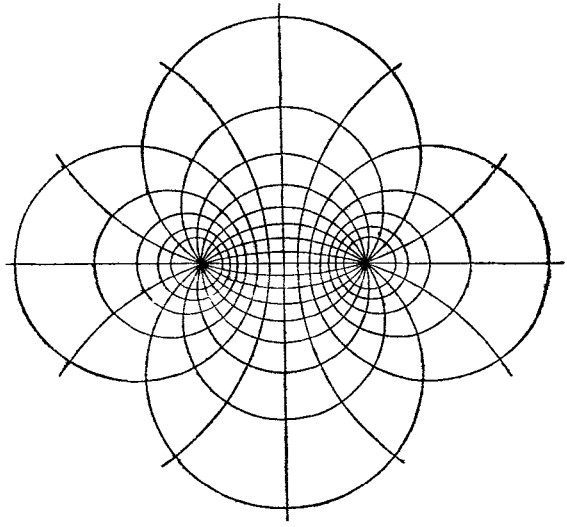
$$z-a=r_1e^{i\theta_1},\quad z+a=r_2e^{i\theta_2};$$

отсюда следует

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= -\mu \ln \frac{r_1}{r_2}, \\ \psi &= -\mu(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Кривые (фиг. 9) $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$ образуют два пучка ортогональных друг к другу соосных окружностей [1]).

Кривые каждой из этих систем могут быть взяты в качестве эквипотенциальных кривых; кривые другой системы тогда будут представлять линии тока. В каждом из обоих случаев скорость в точках $(\pm a, 0)$ будет бесконечно большой. Если, следовательно, исключить эти точки с помощью замкнутых кривых вокруг них, то оставшаяся часть плоскости xy образует трехсвязную область.



Фиг. 9.

Если взять окружности $\theta_1 - \theta_2 = \text{const}$ в качестве линий тока, то мы будем иметь случай одного источника и одного стока равной мощности в точках $(\pm a, 0)$. Если a стремится к нулю, в то время как μa остается конечным, то этим реализуется допущение для формулы (5) § 65; последнее соответствует, следовательно, случаю линейного дублета в начале координат. Линии тока показаны (частью) на фиг. 13.

Если мы, с другой стороны, возьмем окружности

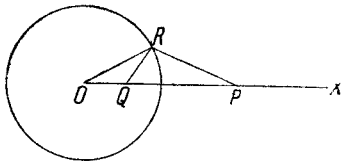
$$\frac{r_1}{r_2} = \text{const}$$

в качестве линий тока, то мы будем иметь случай циклического движения; циркуляция по замкнутой кривой, которая заключает только первую из указанных выше точек, равна $2\pi\mu$, циркуляция же по замкнутой кривой около второй точки равна $-2\pi\mu$; циркуляция же по замкнутой кривой, заключающей обе точки, равна нулю. Этот пример будет для нас представлять дополнительный интерес, когда в главе VII мы перейдем к изучению прямолинейного вихря.

[1]) В смысле совпадения для одного семейства окружностей горизонтальных диаметров, а для другого — вертикальных диаметров. (*Прим. ред.*)

3. С помощью простой комбинации источников мы можем представить течение около круглого цилиндра, обусловленное существованием источника в заданной внешней точке P.

Пусть Q есть инверсия точки P по отношению к окружности, и вообразим в точках P и Q одинаковые источники с мощностью μ, а в центре O сток $-\mu$. Тогда, обращаясь к примеру (2), получим для функции φ в точке R на окружности (фиг. 10) значение



Фиг. 10.

$$\varphi = -\mu\,(\angle RPx + \angle RQx - \angle ROx) =$$
$$= -\mu\,(\angle RPx + \angle ORQ) =$$
$$= -\mu\,(\angle RPx + \angle RPQ) = -\pi\mu,$$

т. е. φ равно постоянному вдоль окружности [1]).

4. Потенциальная функция и функция тока, которые соответствуют ряду источников одинаковой мощности и находящихся на равном расстоянии в точках $(0, 0)$, $(0, \pm a)$, $(0, \pm 2a)$, ..., представляются следующими формулами:

$$w \sim \ln z + \ln(z - ia) + \ln(z + ia) + \ln(z - 2ia) + \ln(z + 2ia) + \dots, \tag{5}$$

или

$$w = C \ln \operatorname{sh} \frac{\pi z}{a}, \tag{6}$$

где C есть действительная величина. Это дает

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} C \ln \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{2\pi x}{a} - \cos\frac{2\pi y}{a}\right), \\ \psi &= C \operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{a}}{\operatorname{th}\frac{\pi x}{a}}\right], \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

что согласуется с результатом, данным Максвеллом [2]). Формулы эти имеют место также и для случая, когда источник находится в середине между двумя твердыми параллельными стенками, $y = \pm\frac{1}{2}a$.

Случай ряда *двойных* источников с осями, параллельными оси x, мы получим, если продифференцируем (6) по z. Опуская множитель, мы получим

$$w = C \operatorname{cth} \frac{\pi z}{a}, \tag{8}$$

или

$$\varphi = \frac{C \operatorname{sh}\frac{2\pi x}{a}}{\operatorname{ch}\frac{2\pi x}{a} - \cos\frac{2\pi y}{a}}, \quad \psi = -\frac{C \sin\frac{2\pi y}{a}}{\operatorname{ch}\frac{2\pi x}{a} - \cos\frac{2\pi y}{a}}. \tag{9}$$

Если наложить на это равномерное движение, параллельное отрицательной оси x, то будем иметь

$$w = z + C \operatorname{cth} \frac{\pi z}{a}, \tag{10}$$

или

$$\varphi = x + \frac{C \operatorname{sh}\frac{2\pi x}{a}}{\operatorname{ch}\frac{2\pi x}{a} - \cos\frac{2\pi y}{a}}, \quad \psi = y - \frac{C \sin\frac{2\pi y}{a}}{\operatorname{ch}\frac{2\pi x}{a} - \cos\frac{2\pi y}{a}}. \tag{11}$$

[1]) Kirchhoff, Pogg. Ann. LXIV (1845) (Ges. Abh. 1)
[2]) Maxwell, Electricity and Magnetism, § 203.

Линия тока $\psi=0$ состоит здесь частично из прямой $y=0$, частично же из овальной кривой, полуоси которой в направлении координатных осей даны уравнениями

$$\operatorname{sh}^2\frac{\pi x}{a}=\frac{\pi C}{a},\quad y\operatorname{tg}\frac{\pi y}{a}=C. \tag{12}$$

Если положить

$$C=\frac{\pi b^2}{a}, \tag{13}$$

где b мало по сравнению с a [1]), то обе эти полуоси приближенно равны b. Мы получаем таким образом потенциальную функцию и функцию тока для жидкости, которая протекает через решетку, составленную из параллельных стержней с малым круглым сечением. Действительно, второе из уравнений (11) получает для малых значений x, y вид

$$\psi=y\left(1-\frac{b^2}{x^2+y^2}\right), \tag{14}$$

§ 65. Если w есть функция от z, то из определения § 62 сейчас же следует, что z есть функция от w. Эта формулировка иногда бывает аналитически более удобной, чем первая.

Соотношения (1) § 62 заменяются тогда через

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=\frac{\partial y}{\partial\psi},\quad \frac{\partial x}{\partial\psi}=-\frac{\partial y}{\partial\varphi}. \tag{1}$$

Так как

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=-u+iv,$$

то

$$-\frac{dz}{dw}=\frac{1}{u-iv}=\frac{1}{q}\left(\frac{u}{q}+i\frac{v}{q}\right),$$

где q есть результирующая скорость в (x, y). Если мы напишем

$$\zeta=-\frac{dz}{dw} \tag{2}$$

и будем представлять свойства функции ζ графически по способу, ранее разъясненному, то вектор, проведенный из начала координат к произвольной точке плоскости ζ, будет совпадать по направлению со скоростью в соответствующей точке плоскости z, а его абсолютная величина будет обратно пропорциональной значению этой скорости.

---

[1]) Приближенно круговая форма сохраняется, однако, для достаточно большой области значений C. Так, из (12) мы находим, если положить $C=\frac{1}{4}a$:

$$\frac{x}{a}=0{,}254,\quad \frac{y}{a}=0{,}250.$$

Оба диаметра приблизительно равны, хотя ширина овала равна половине интервала между линиями тока $y=\pm\frac{1}{2}a$.

Далее, так как $\frac{1}{q}$ есть абсолютное значение величины $\frac{dz}{dw}$, т. е. $\frac{\partial x}{\partial \varphi} + i\frac{\partial y}{\partial \varphi}$, то будем иметь

$$\frac{1}{q^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2. \tag{3}$$

Это можно, согласно (1), представить и в такой форме:

$$\frac{1}{q^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 =$$
$$= \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial y}{\partial \varphi}. \tag{4}$$

Эта последняя формула

$$\frac{1}{q^2} = \frac{\partial (x, y)}{\partial (\varphi, \psi)} \tag{5}$$

выражает тот факт, что соответствующие элементарные площадки в плоскостях z и w относятся как квадрат абсолютной величины $\frac{dz}{dw}$ к единице.

§ 66. Важное значение имеют следующие примеры такого способа представления функций:

1) Возьмем

$$z = c \operatorname{ch} w, \tag{1}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} \varphi \cos \psi, \\ y &= c \operatorname{sh} \varphi \sin \psi. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Кривые $\varphi = \text{const}$ будут представлять эллипсы

$$\frac{x^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 \varphi} + \frac{y^2}{c^2 \operatorname{sh}^2 \varphi} = 1, \tag{3}$$

а кривыми $\psi = \text{const}$ будут гиперболы

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \psi} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \psi} = 1; \tag{4}$$

эти конические сечения имеют общие фокусы $(\pm c, 0)$. Обе системы таких кривых представлены на фиг. 11.

Так как в фокусах

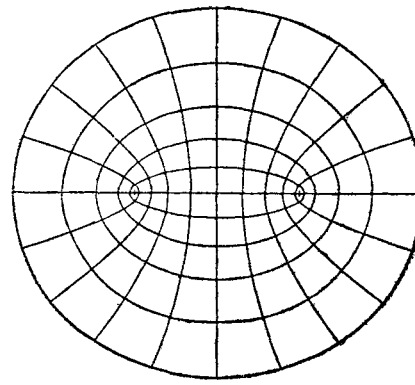
$$\varphi = 0, \quad \psi = n\pi,$$

где n обозначает некоторое целое число, то мы видим согласно уравнению (2) предыдущего параграфа, что скорость там будет бесконечной. Если взять гиперболы в качестве линий тока, то часть оси x, которая лежит вне точек $(\pm c, 0)$, можно рассматривать как твердую стенку. Это соответствует течению несжимаемой жидкости

с одной стороны тонкой плоской разделяющей стенки на другую ее сторону через отверстие ширины $2c$; при этом скорость на ребрах будет бесконечно большой.

Если же взять эллипсы в качестве линий тока, то получим случай жидкости, циркулирующей вокруг эллиптического цилиндра или в пределе вокруг твердой пластинки, сечение которой есть отрезок, соединяющий фокусы $(\pm c, 0)$.

На бесконечно большом расстоянии от начала φ будет бесконечно велико, порядка $\ln r$, где r есть радиус-вектор; скорость же будет там бесконечно малой, порядка $\frac{1}{r}$.



Фиг. 11.

2) Пусть

$$z = w + e^w, \tag{5}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi + e^{\varphi}\cos\psi, \\ y &= \psi + e^{\varphi}\sin\psi. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Линия тока $\psi = 0$ совпадает с осью x. Часть прямой $y = \pi$, лежащая между $x = \infty$ и $x = -1$, рассматриваемая как линия, возвращающаяся в самое себя[1]), образует линию тока $\psi = \pi$, т. е. когда φ уменьшается от $+\infty$ через 0 до $-\infty$, то x растет от $-\infty$ до -1 и затем убывает опять до $-\infty$. Аналогичное имеет место и для линии тока $\psi = -\pi$.

Так как

$$\zeta = -\frac{dz}{dw} = -1 - e^{\varphi}\cos\psi - ie^{\varphi}\sin\psi,$$

то оказывается, что для больших отрицательных значений φ скорость направлена в сторону отрицательной оси x и равна единице, в то время как для больших положительных значений φ она будет равна нулю.

Вышеуказанные формулы представляют, таким образом, движение жидкости, втекающей из открытого пространства в канал, ограниченный двумя тонкими параллельными стенками. На краях стенок

$$\varphi = 0, \quad \psi = \pm\pi,$$

и, следовательно, $\zeta = 0$, т. е. скорость здесь будет бесконечно большой.

---

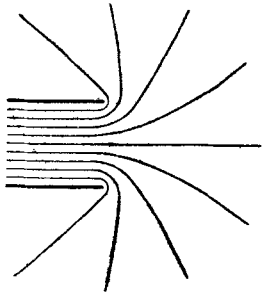
[1]) То-есть проходящаяся дважды, туда и обратно. *Прим. ред.*

Фиг. 12 показывает вид линий тока, проведенных, как во всех случаях этой главы, для равноотстоящих значений ψ [1]).

Когда стенки не параллельны, а образуют угол $\pm\beta$, то соответствующая формула имеет вид

$$z=\frac{1-n}{n}(1-e^{-nw})+e^{(1-n)w}, \tag{7}$$

где $n=\frac{\beta}{\pi}$. Линии тока $\psi=\pm\pi$ идут по направлению стенок [2]). Когда n обращается в нуль, то уравнение (7) совпадает с (5), в то время как для $n=\frac{1}{2}$ мы будем фактически иметь случай 1, показанный на фиг. 11.



Фиг. 12.

Если изменить знак w в (5), то направление движения станет обратным. Если мы далее наложим на это движение равномерное течение в отрицательном направлении оси x тем, что напишем $w-z$ вместо w, то мы получим [3])

$$w=e^{z-w}, \quad \text{или} \quad z=w+\ln w. \tag{8}$$

Скорость между стенками на большом расстоянии влево будет теперь равна нулю, и мы будем иметь, следовательно, идеализированное представление трубки Пито (§ 24). Линии тока можно получить из уравнений

$$x=\varphi+\frac{1}{2}\ln(\varphi^2+\psi^2), \quad y=\psi+\operatorname{arctg}\frac{\psi}{\varphi}. \tag{9}$$

§ 67. Как известно, всякая конечная, непрерывная и однозначная функция $f(z)$, первая производная которой конечна для всех точек области между двумя концентрическими окружностями, описанными около начала, может быть разложена в следующий ряд:

$$f(z)=A_0+A_1z+A_2z^2+\ldots+B_1z^{-1}+B_2z^{-2}+\ldots \tag{1}$$

Если же вышеизложенные условия выполнены для всех точек внутри круга с центром в начале, то в формуле (1) сохраняется только ряд по возрастающим степеням z; если они выполнены для всех точек вне такого круга, то для представления функции достаточно ряда по убывающим степеням z со свободным членом, наконец, когда условия соблюдены для всех точек плоскости xy без исключения, тогда функция $f(z)$ не может быть ничем иным, кроме как постоянной A_0.

---

[1]) Этот пример указан Helmholtz, Berl. Monatsber., 23 апреля 1868 (Phil. Mag., ноябрь 1868; Wiss. Abh., 1, 154).

[2]) Harris R. A., On Two-Dimensional Fluid Motion through Spouts composed of two Plane Walls., Ann. of Math. (2), II (1901). Там рассмотрен случай $\beta=\frac{1}{4}\pi$.

[3]) Rayleigh, Proc. Roy. Soc. A, XCI, 503 (1915) (Papers, VI, 329), где начерчено несколько линий тока.

Полагая

$$f(z) = \varphi + i\psi,$$

вводя полярные координаты и представляя, далее, комплексные постоянные A_n, B_n в виде $P_n + iQ_n$, $R_n + iS_n$, соответственно получим

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= P_0 + \sum_1^\infty r^n (P_n \cos n\theta - Q_n \sin n\theta) + \\ &\quad + \sum_1^\infty r^{-n} (R_n \cos n\theta + S_n \sin n\theta), \\ \psi &= Q_0 + \sum_1^\infty r^n (Q_n \cos n\theta + P_n \sin n\theta) + \\ &\quad + \sum_1^\infty r^{-n} (S_n \cos n\theta - R_n \sin n\theta). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Эти формулы удобны в тех задачах, когда значение φ или $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ задано на концентрических окружностях. Это заданное значение может быть разложено для всякого контура по теореме Фурье в ряд по синусам и косинусам кратного θ. Найденные таким образом ряды должны быть эквивалентны рядам, получающимся из формулы (2); тогда, приравнивая в отдельности коэфициенты при $\sin n\theta$ и при $\cos n\theta$, мы получим уравнения для определения P_n, Q_n, R_n, S_n.

§ 68. В качестве простого примера возьмем следующий случай: бесконечно длинный круглый цилиндр радиуса a движется со скоростью U перпендикулярно к своей оси в неограниченной жидкости, которая в бесконечности находится в покое.

Возьмем начало координат на оси цилиндра, а оси x и y в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра, при этом пусть ось x совпадает с направлением скорости U. Так как мы мыслим движение образовавшимся из состояния покоя, то оно должно быть безвихревым и φ однозначной. Так как $\int \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds$, распространенный по контуру сечения цилиндра, равен нулю, то ψ также однозначна (§ 59), и, следовательно, формулы (2) имеют место. Более того, задача, согласно § 41, вполне определенна, так как жидкость покоится в бесконечности и $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ для всякой точки внутренней границы жидкости задано с помощью формулы

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r} = U\cos\theta \qquad (3)$$

для $r = a$. Эти условия дают $P_n = 0$, $Q_n = 0$ и

$$U\cos\theta = \sum_1^\infty n a^{-n-1} (R_n \cos n\theta + S_n \sin n\theta).$$

Последнее уравнение может быть удовлетворено только тогда, когда $R_1 = Ua^2$, а все остальные коэфициенты равны нулю. Полное решение поэтому будет

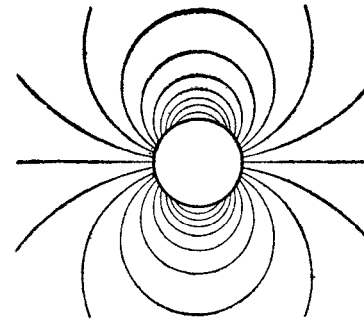
$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{Ua^2}{r}\cos\theta, \\ \psi &= -\frac{Ua^2}{r}\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Линии тока $\psi = \text{const.}$ суть окружности, показанные на фиг. 13. Сравнивая с формулой (6) § 60, мы видим, что эффект здесь тот же, что и от дублета в начале координат.

Кинетическая энергия жидкости подсчитывается по формуле (2) § 61

$$2T = \varrho \int \varphi \, d\psi = \varrho U^2 a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = M' U^2, \tag{5}$$

где $M' = \pi a^2 \varrho$ есть масса жидкости, вытесняемой единицей длины цилиндра. Этот результат показывает, что весь эффект от присутствия жидкости может быть представлен прибавлением величины M' к массе цилиндра, отнесенной к единице его длины.



Фиг. 13.

Следовательно, если при прямолинейном движении цилиндра на него действует внешняя сила X, отнесенная к единице длины, то уравнение энергии будет

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}MU^2 + \frac{1}{2}M'U^2\right) = XU,$$

или

$$(M + M')\frac{dU}{dt} = X, \tag{6}$$

где M обозначает собственную массу цилиндра. Если мы напишем это в виде

$$M\frac{dU}{dt} = X - M'\frac{dU}{dt},$$

то увидим, что давление жидкости равно силе $-M'\frac{dU}{dt}$ на единицу длины в направлении движения. Оно исчезает, когда U постоянно.

Этот результат можно проверить непосредственно вычислением. Согласно (6) § 20 давление определяется по формуле

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}q^2 + F(t), \tag{7}$$

где q есть скорость жидкости относительно оси движущегося цилиндра. При этом внешние силы, действующие на цилиндр, не принимаются во внимание.

Действие их может быть подсчитано по законам гидростатики. Для $r=a$ имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=a\frac{dU}{dt}\cos\theta,\quad q^2=4U^2\sin^2\theta; \tag{8}$$

отсюда следует

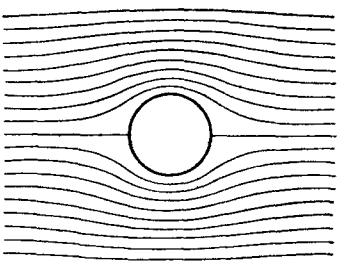
$$p=\varrho\left[a\frac{dU}{dt}\cos\theta-2U^2\sin^2\theta+F(t)\right]. \tag{9}$$

Ясно, что направление результирующей силы параллельно начальному направлению $\theta=0$; чтобы найти ее абсолютное значение для единицы длины цилиндра, умножим уравнение (9) на $-a\,d\theta\cos\theta$ и проинтегрируем по θ между пределами 0 и 2π; результат будет равен $-M'\dfrac{dU}{dt}$, как и выше.

Если в рассмотренном выше примере сообщить жидкости и цилиндру скорость $-U$, то мы будем иметь случай обтекания потоком со скоростью U на бесконечности неподвижного цилиндра. Прибавляя $Ur\cos\theta$ к φ и соответственно $Ur\sin\theta$ к ψ, получим

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=U\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta,\\ \psi&=U\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\sin\theta.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Линии тока показаны на фиг. 14. Если никакие внешние силы не действуют и скорость U постоянна, то результирующая сила, действующая на цилиндр, будет равна нулю, ср. § 92.



Фиг. 14.

§ 69. Чтобы ряд (1) § 67 мог представлять любой случай непрерывного безвихревого движения между двумя концентрическими окружностями, к нему необходимо прибавить еще член

$$A\ln z. \tag{1}$$

Если $A=P+iQ$, то соответствующие выражения для φ и ψ будут

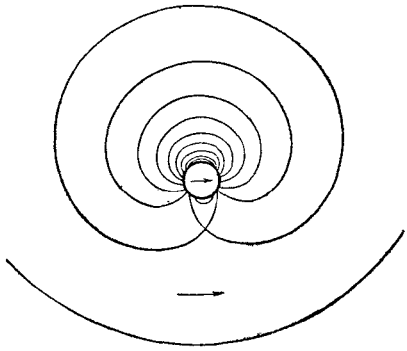
$$P\ln r-Q\theta\quad\text{и}\quad P\theta+Q\ln r. \tag{2}$$

Смысл этих выражений очевиден: $2\pi P$ (циклическая константа ψ) означает поток через внутреннюю или внешнюю окружность, а $2\pi Q$ (циклическая константа φ) — циркуляцию по некоторой замкнутой кривой, заключающей начало.

Вернемся, например, к задаче прошлого параграфа и предположим, что имеет место — наряду с движением, вызванным цилиндром, — еще циркуляция вокруг цилиндра с циклической постоянной $\varkappa$. Граничные условия будут удовлетворены, если предположить, что

$$\varphi=U\frac{a^2}{r}\cos\theta-\frac{\varkappa}{2\pi}\theta. \tag{3}$$

Под влиянием циркуляции, наложенной на движение, вызванное цилиндром, скорость на одной стороне его увеличивается, а на другой уменьшается (возможно также наоборот). Следовательно, если цилиндр движется прямолинейно с постоянной скоростью, то на одной стороне произойдет уменьшение, а на другой увеличение давления, и для поддержания движения необходимо приложить силу перпендикулярно к направлению движения.



Фиг. 15.

Фиг. 15 показывает линии тока. На некотором малом расстоянии от начала они приближаются по виду к концентрическим кругам, так как движение, вызванное цилиндром, здесь мало в сравнении с циклическим движением. Если, как в представленном случае,

$$U > \frac{\varkappa}{2\pi a},$$

то точка, для которой скорость равна нулю, находится в жидкости. Система линий тока имеет во всех случаях одну и ту же конфигурацию; единственно, на что влияет изменение значения U, есть изменение масштаба чертежа по отношению к диаметру цилиндра.

Если, как в § 68, задача будет сведена к задаче установившегося движения, то вместо (3) мы будем иметь

$$\varphi = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta - \frac{\varkappa}{2\pi}\theta, \tag{4}$$

откуда для $r = a$

$$\frac{p}{\varrho} = \text{const.} - \frac{1}{2}q^2 = \text{const.} - \frac{1}{2}\left(2U\sin\theta + \frac{\varkappa}{2\pi a}\right)^2. \tag{5}$$

Результирующее давление на цилиндр, поэтому, равно

$$-\int_0^{2\pi} p\sin\theta\, a\, d\theta = +\varkappa\varrho U, \tag{6}$$

а его направление перпендикулярно к общему направлению потока. Этот результат независим от радиуса цилиндра. В дальнейшем мы покажем, что он имеет место для сечения любой формы [1]).

Чтобы вычислить давление жидкости на цилиндр для случая, когда цилиндр движется произвольным образом, необходимо взять подвижную систему координат, начало которой лежит в центре цилиндра и ось x которой совпадает с направлением скорости U. Если обозначить через χ угол между этим и некоторым неподвижным направлением, то получим уравнение (7) § 20 в виде

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}q^2 - \frac{d\chi}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}; \tag{7}$$

[1]) Этой важной теоремой мы обязаны Кутта и Жуковскому; см. Kutta, Sitzb. d. k. bayr. Akad. d. Wiss. (1910). Доказательство будет дано позднее (§ 72b).

q здесь означает скорость жидкости относительно движущейся координатной системы и вычисляется при помощи относительного потенциала скоростей $\varphi + Ur\cos\theta$, где φ дано формулой (3). Для $r = a$ находим

$$\frac{p}{\varrho} = a\frac{dU}{dt}\cos\theta - \frac{1}{2}\left(2U\sin\theta + \frac{\varkappa}{2\pi a}\right)^2 + aU\frac{d\chi}{dt}\sin\theta + \frac{\varkappa}{2\pi}\frac{d\chi}{dt}. \quad (8)$$

Компоненты результирующего давления, параллельные соответственно осям x и y, будут, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} -\int_0^{2\pi} p\cos\theta\, a\, d\theta &= -M'\frac{dU}{dt}, \\ -\int_0^{2\pi} p\sin\theta\, a\, d\theta &= \varkappa\varrho U - M'U\frac{d\chi}{dt}, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

причем, как и раньше, $M' = \pi\varrho a^2$.

Если P и Q обозначают компоненты внешней силы, действующей на цилиндр, соответственно в направлении касательной и нормали к траектории, то уравнения движения цилиндра напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} (M + M')\frac{dU}{dt} &= P, \\ (M + M')U\frac{d\chi}{dt} &= \varkappa\varrho U + Q. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Если внешние силы отсутствуют, то U постоянно; полагая при этом

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{U}{R},$$

где R есть радиус кривизны траектории, мы найдем

$$R = (M + M')\frac{U}{\varkappa\varrho}. \quad (11)$$

Траектория есть, следовательно, окружность, описываемая в направлении циклического движения [1]).

Если обозначим через ξ, η декартовы координаты точки на оси цилиндра относительно неподвижной системы координат, то уравнения (10) равнозначны со следующими:

$$\left.\begin{aligned} (M + M')\ddot{\xi} &= -\varkappa\varrho\dot{\eta} + X, \\ (M + M')\ddot{\eta} &= \varkappa\varrho\dot{\xi} + Y, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

где X, Y суть компоненты внешних сил. Чтобы найти действие постоянной силы, мы можем положить

$$\left.\begin{aligned} X &= (M + M')g', \\ Y &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

---

[1]) Rayleigh, On the Irregular Flight of a Tennis Ball, Mess. of Math. VII (1878) (Papers, I, 344); Greenhill, Mess. of Math., IX, 113 (1880).

Решение тогда будет

$$\left.\begin{aligned}\zeta &= a + c\cos(nt+\varepsilon),\\ \eta &= \beta + \frac{g'}{n}t + c\sin(nt+\varepsilon),\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где α, β, c, ε суть произвольные постоянные, а

$$n = \frac{\varkappa\varrho}{M+M'}. \tag{15}$$

Это показывает, что траектория есть трохоида, которая описывается со средней скоростью $\frac{g'}{n}$ перпендикулярно к оси x[1]). Следует отметить, что цилиндр вообще не совершает никакого поступательного движения в направлении внешней силы. В частном случае $c=0$ траектория есть прямая линия, перпендикулярная к силе. Эта задача будет служить иллюстрацией к теории „гиростатических систем", о которой мы будем говорить в главе VI.

§ 70. Формула (1) § 67, исправленная прибавлением члена $A\ln z$, может быть легко обобщена так, что она будет пригодной и для всякого случая безвихревого движения, когда область имеет границами окружности, из которых одна заключает все другие. В самом деле, мы имеем для всякой отдельной внутренней границы ряд вида

$$A\ln(z-c)+\frac{A_1}{z-c}+\frac{A_2}{(z-c)^2}+\ldots, \tag{1}$$

где $c=a+ib$ представляет центр окружности, а коэфициенты A, A_1, A_2, ..., вообще говоря, суть комплексные величины. Однако возникающая трудность определения коэфициентов таким образом, чтобы они удовлетворяли наперед заданным граничным условиям, настолько велика, что применимость этого метода очень ограничена.

На деле определение безвихревого движения жидкости при данных граничных условиях представляет задачу, точное решение которой прямым путем удается только в очень ограниченном числе случаев. Когда границы состоят из твердых прямых стенок, тогда для решения достаточно метода преобразования, данного Шварцем[2]) и Кристофелем[3]), который мы изложим в § 73. Большинство случаев, решения которых теперь известны, были получены обратным методом. А именно, берем какой-нибудь известный вид функции φ или ψ и исследуем, каким граничным условиям она может удовлетворить. Некоторые

---

[1]) Greenhill см. стр. 103.

[2]) Schwarz, Ueber einige Abbildungsaufgaben, Crelle, LXX (Gesammelte Abhandlungen, Berlin, 1890, II, 65).

[3]) Christoffel, Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie, Ann. di Mat. (2), I, 89. См. также Kirchhoff, Zur Theorie des Kondensators, Berl. Monatsber., 1877 (Ges. Abh., 101). Многие из решений, которые могут быть получены таким образом, имеют интересные применения в электростатике, теплопроводности и т. д. См., например, Thomson J. J., Recent Researches in Electricity and Magnetism, Oxford, 1893. Проблема криволинейных границ была исследована Leathem, Phil. Trans. A, CCXV, 439 (1915).

простые примеры такого способа решения были уже разобраны в § 63 и 64.

Если мы возьмем задачу об обтекании некоторой заданной неподвижной границы, решение которой известно, например

$$w = f(z),$$

и применим к ней конформное отображение

$$z = \chi(z'),$$

то преобразованные границы в плоскости z' будут опять являться линиями тока, и мы таким путем получим решение новой задачи. Иногда бывает целесообразно разложить преобразование на два или несколько отдельных последовательных преобразований.

Задача, которая этим путем привела к интересным преобразованиям, есть задача об обтекании круглого неподвижного цилиндра. Легко видеть из § 68 и 69, что общее решение такой задачи есть

$$w = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) - iV\left(z - \frac{a^2}{z}\right) + \frac{i\varkappa}{2\pi} \ln \frac{z}{a}, \tag{2}$$

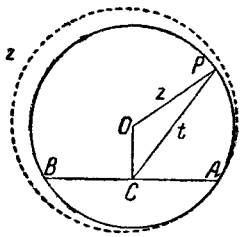
где $-U$, $-V$ суть компоненты скорости в бесконечности, а $\varkappa$ обозначает циркуляцию. Следуя указанному методу, положим

$$z = t + c, \tag{3}$$

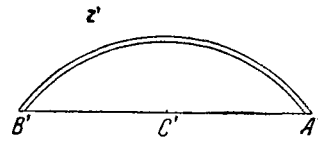
где t есть новая комплексная перемеиная и $|c| < a$, и затем

$$z' = t + \frac{b^2}{t}. \tag{4}$$

Ясно, что бесконечно удаленные части плоскости z и плоскости z' тождественны, и поэтому общее направление течения в обоих случаях, а также величиниы циркуляции одинаковы. Постоянные c и b выбираются так, что точки $t = \pm b$ в плоскости t соответствуют двум произвольно выбранным точкам A и B в плоскости z.



а



б

Фиг. 16.

Пусть, например, AB есть хорда круга радиуса $r = a$, параллельная оси Ox. Пусть центральиый угол, стягиваемый этой хордой в O, будет 2β. Из фиг. 16 мы найдем, что

$$c = -ia\cos\beta, \quad b = a\sin\beta. \tag{5}$$

Если P есть какая-то другая точка в плоскости z, то имеем

$$z = \overline{OP}; \quad t = \overline{CP}. \tag{6}$$

Из (4) следует, что

$$\frac{z'-2b}{z'+2b}=\left(\frac{t-b}{t+b}\right)^2. \tag{7}$$

Если мы теперь положим на один момент

$$t-b=r_1e^{i\theta_1},\quad t+b=r_2e^{i\theta_2},\quad z'-2b=r_1'e^{i\theta_1'},\quad z'+2b=r_2'e^{i\theta_2'}, \tag{8}$$

то будем иметь

$$\theta_1'-\theta_2'=2(\theta_1-\theta_2). \tag{9}$$

Пусть теперь P пробегает окружность в плоскости z в положительном направлении, считая от A. Соответствующая точка P' в плоскости z', согласно (9), будет двигаться таким образом, что угол $A'P'B'$ будет постоянен и равен 2β; траекторией ее будет, следовательно, дуга круга. Когда P проходит через точку B, θ_2 возрастает на π; следовательно, для того чтобы уравнение (9) имело место, θ_2' должно возрасти на 2π. Когда таким образом P пройдет свой круг, то P' будет двигаться обратно вдоль дуги $B'A'$. Мы получаем таким образом случай, когда поток в произвольном направлении и с произвольной циркуляцией обтекает цилиндрическую пластинку, сечение которой есть дуга круга.

Так как

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\overline{\frac{dw}{dz}}}{1-\frac{b^2}{t^2}}, \tag{10}$$

то скорость в угловых точках A', B' будет обращаться в бесконечность. Ее можно, однако, сделать конечной в одной точке, например B, выбирая соответственное значение циркуляции, а именно

$$\varkappa=4\pi a(U\cos\beta-V\sin\beta). \tag{11}$$

Течение в точке B' будет тогда даваться формулой

$$u-iv=(U\sin\beta+V\cos\beta)\sin\beta e^{2i\beta} \tag{12}$$

и будет направлено по касательной к дуге.

Если общая скорость потока равна W и составляет с направлением $B'A'$ угол α, то будем иметь

$$U=-W\cos\alpha,\quad V=-W\sin\alpha. \tag{13}$$

Тогда, если R есть радиус дуги,

$$a\sin\beta=R\sin 2\beta. \tag{14}$$

Подъемная сила, следовательно, будучи направленной под прямым углом к направлению потока, как будет показано в § 72b, равна

$$4\pi\varrho W^2R\frac{\sin 2\beta}{\sin\beta}\cos(\alpha+\beta). \tag{15}$$

Вместо круга с радиусом $r=a$ мы можем взять теперь окружность, касающуюся первой в точке A и охватывающую точку B (как показано на фиг. 16), и ее отображать. Таким путем мы получим профиль крыла Жуковского, для которого дуга круга будет служить скелетом [1]). Он будет иметь

---

[1]) О дальнейшем развитии и видоизменении метода можно отослать к книге Глауэрт Г., Основы теории крыльев и винта (перев. с англ.), ГНТИ, 1931.

заострение в точке, соответствующей точке A, и, следовательно, давать бесконечную скорость только в этой точке. Этой особенности мы можем избежать, выбирая соответственное значение для $\varkappa$.

В следующих параграфах мы дадим простой метод получения решения в двух важных случаях плоского движения.

§ 71. Случай 1. Граница жидкости состоит из твердой цилиндрической поверхности, движущейся со скоростью U перпендикулярно к направлению ее длины.

Возьмем ось x в направлении скорости U; обозначим через δs элемент кривой сечения поверхности плоскостью xy. Тогда для всех точек этой кривой сечения скорость жидкости в направлении нормали, которую мы обозначим через $\frac{\partial \psi}{\partial s}$, должна быть равна проекции скорости контура на эту нормаль, т. е. $-U\frac{dy}{ds}$. Интегрируя вдоль сечения, мы получим

$$\psi = -Uy + \text{const.} \tag{1}$$

Если мы сделаем какое-либо предположение относительно вида ψ, то это уравнение будет определять систему кривых, из которых каждая при ее движении, параллельном оси x, дает допустимую форму линии тока $\psi = \text{const.}$[1]). Дадим несколько примеров.

1. Если возьмем ψ в форме $-Uy$, то условие (1) будет выполняться для всякого вида контура. Поэтому жидкость, заключенная в цилиндр произвольного вида, имеющий только поступательное движение, движется, как твердое тело. Если, кроме того, цилиндрическая область, занятая жидкостью, будет односвязной, то это движение будет представлять единственный возможный вид безвихревого движения в этом случае. Это следует также из § 40; ибо движение жидкости и твердого тела, как одной массы, удовлетворяет, очевидно, всем условиям и представляет, следовательно, единственное решение, которое допускает задача.

2. Пусть $\psi = \frac{A\sin\theta}{r}$; тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{A}{r}\sin\theta = -Ur\sin\theta + \text{const.} \tag{2}$$

В этой системе кривых содержится также и окружность радиуса a при условии, что $\frac{A}{a} = -Ua$.

Следовательно,

$$\psi = -\frac{Ua^2}{r}\sin\theta \tag{3}$$

изображает течение, которое образуется от движения круглого цилиндра в безграничной жидкости со скоростью U перпендикулярно к своей оси; это совпадает с § 68.

---

[1]) Ср. Rankine, см. сноску на стр. 85, там применяется метод получения кривых, подобных поперечному сечению кораблей.

3. Введем эллиптические координаты ξ, η, которые связаны с x, y соотношением

$$x+iy=c\operatorname{ch}(\xi_0+i\eta), \tag{4}$$

или

$$x=c\operatorname{ch}\xi\cos\eta, \quad y=c\operatorname{sh}\xi\sin\eta, \tag{5}$$

(ср. § 66), причем предполагается, что ξ изменяется от 0 до ∞, а η — от 0 до 2π. Если мы теперь положим

$$\varphi+i\psi=Ce^{-(\xi+i\eta)}, \tag{6}$$

где C есть некоторая действительная постоянная, то будем иметь

$$\psi=-Ce^{-\xi}\sin\eta, \tag{7}$$

и уравнение (1) примет вид

$$Ce^{-\xi}\sin\eta=Uc\operatorname{sh}\xi\sin\eta+\text{const}.$$

В этой системе кривых содержится эллипс, параметр которого ξ_0 определяется из уравнения

$$Ce^{-\xi_0}=Uc\operatorname{sh}\xi_0.$$

Если a, b суть полуоси эллипса, то

$$a=c\operatorname{ch}\xi_0, \quad b=c\operatorname{sh}\xi_0$$

и

$$C=\frac{Ubc}{a-b}=Ub\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, формула

$$\psi=-Ub\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\xi}\sin\eta \tag{8}$$

дает течение, которое образуется в безграничной жидкости, когда эллиптический цилиндр с полуосями a, b движется в ней параллельно своей большой оси со скоростью U.

Что действительно написанные выше формулы дают в бесконечности для скорости значение нуль, можно вывести из следующего рассуждения: для больших значений ξ величины δx и δy будут того же порядка, как $e^{\xi}\delta\xi$ или $e^{\xi}\delta\eta$, так что $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ — того же порядка, как $e^{-2\xi}$, или, наконец, как $\frac{1}{r^2}$, где r обозначает расстояние какой-либо точки от оси цилиндра. В бесконечности ψ стремится к нулю как выражение $\frac{A\sin\theta}{r}$, так же, как и в случае дублета.

Если движение эллиптического цилиндра параллельно малой оси, то будем иметь следующую формулу:

$$\psi = Va\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\xi}\cos\eta. \tag{9}$$

Линии тока в каждом из этих случаев будут одинаковыми для всех софокусных эллиптических форм цилиндра, так что формулы будут иметь место и тогда, когда сечение сводится к отрезку, соединяющему оба фокуса. В этом случае формула (9) примет вид

$$\psi = Vce^{-\xi}\cos\eta. \tag{10}$$

Это дает течение, которое вызывает бесконечно длинная пластинка ширины $2c$ в безграничной жидкости, при движении в ней в направлении, перпендикулярном к ее плоскости. Так как на острых краях пластинки скорость становится бесконечно большой, то это решение подлежит практически ограничению, указанному ранее в нескольких примерах [1]).

Кинетическую энергию жидкости получим из формулы

$$2T = \varrho\int \varphi\, d\psi = \varrho C^2 e^{-2\xi_0}\int_0^{2\pi}\cos^2\eta\, d\eta = \pi\varrho b^2U^2, \tag{11}$$

где b есть половина ширины цилиндра, измеренной перпендикулярно к направлению движения.

Если вокруг цилиндра имеет место циркуляция $\varkappa$, то мы должны к указанным выше значениям ψ прибавить еще член $\frac{\varkappa\xi}{2\pi}$. В случае пластинки можно так подобрать значение $\varkappa$, что скорость на одном ребре — но не на обоих — будет конечной.

Если подобрать соответственно единицы длины и времени, то мы можем вместо (4) и (6) написать

$$x+iy = \operatorname{ch}(\xi+i\eta), \quad \varphi+i\psi = e^{-(\xi+i\eta)};$$

отсюда следует

$$x = \varphi\left(1+\frac{1}{\varphi^2+\psi^2}\right), \quad y = \psi\left(1-\frac{1}{\varphi^2+\psi^2}\right).$$

Эти формулы удобно применить для вычерчивания кривых $\varphi = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$, которые представлены на фиг. 17.

Соединяя вместе результаты формул (8) и (9), мы получим случай эллиптического цилиндра, имеющего поступательную скорость с компонентами U и V,

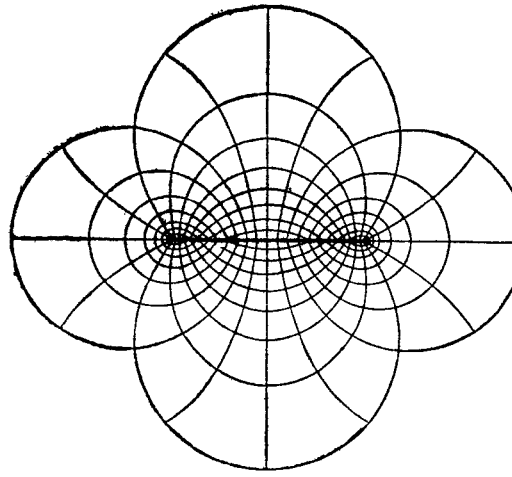
$$\psi = -\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\xi}(Ub\sin\eta - Va\cos\eta). \tag{12}$$

[1]) Это исследование дано Lamb, Quart. Journ. of Math., XIV (1875). Результаты, эквивалентные (8) и (9), были получены другим путем Beltrami, Sui principii fondamentali dell'idrodinamica razionale, Mem. dell'Accad. delle Scienze di Bologna, 1873, стр. 394 (Opere matematiche, Milano, 1904, II, 202).

Чтобы найти движение отиосительно этого цилиндра, мы должны к этому выражению для ψ прибавить еще

$$Uy - Vx = C\,(U \operatorname{sh} \xi \sin \eta - V \operatorname{ch} \xi \cos \eta). \tag{13}$$

Например, функция тока при обтекании плоской пластинки, поставленной



Фиг. 17.

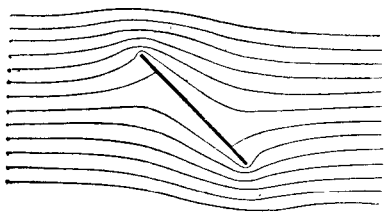
под углом в 45° к потоку, ребра которой лежат иа $x = \pm c$, будет иметь вид

$$\psi = -\frac{1}{\sqrt{2}} q_0 c \operatorname{sh} \xi\,(\cos \eta - \sin \eta), \tag{14}$$

где q_0 обозначает скорость в бесконечиости. Это можно непосредственно проверить, так как оио дает $\psi = 0$ для $\xi = 0$ и

$$\psi = -\frac{q_0}{\sqrt{2}}(x - y)$$

для $\xi = \infty$. Линии тока для этого случая показаны на фиг. 18 (для удобства повернутой на 45°). Они нам будут полезны для иллюстрации результатов главы VI.



Фиг. 18.

Если следовать по лиини тока $\psi = 0$ от $\varphi = +\infty$ до $\varphi = -\infty$, то мы увидим, что она состоит в начале из гиперболической дуги $\eta = \frac{1}{4}\pi$, которая упирается в пластинку под прямым углом, затем она разделяется на две ветви, которые идут по поверхности пластинки и, наконец, соединяясь, они образуют при продолжеиии дугу гиперболы $\eta = \frac{5}{4}\pi$. В точках, в которых дуги гиперболы упираются в пластинку, скорость равна нулю, и давлеиие

следовательно, достигает максимума [1]). Ясно, что давление жидкости на пластинку сводится к паре сил, которая стремится поставить пластинку широкой стороной перпендикулярно к направлению потока; легко найти, что момент этой пары сил, отнесенной к единице длины, равен $\frac{1}{2}\pi\varrho q_0^2 c^2$ [2]); ср. § 124.

§ 72. Случай II. Граница жидкости состоит из твердой цилиндрической поверхности, которая вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, параллельной образующей цилиндра.

Если мы возьмем начало на оси вращения, а оси x и y в плоскости, перпендикулярной к ней, то при тех же обозначениях, что и раньше, $\frac{\partial\psi}{\partial s}$ будет равно нормальной компоненте скорости границы, или

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = \omega r \frac{dr}{ds},$$

где r обозначает расстояние от начала. Интегрируя, мы находим для всех точек границы

$$\psi = \frac{1}{2}\omega r^2 + \text{const.} \tag{1}$$

Если мы возьмем для ψ какое-нибудь возможное выражение, то формула (1) даст нам уравнение ряда кривых, из которых каждая при вращении около начала создаст систему линий тока, определяемых через ψ.

Мы рассмотрим следующие примеры:

1. Возьмем

$$\psi = Ar^2 \cos 2\theta = A(x^2 - y^2), \tag{2}$$

тогда уравнение (1) принимает вид

$$\left(\frac{1}{2}\omega - A\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}\omega + A\right)y^2 = C;$$

это дает для всякого данного значения A систему подобных конических сечений. Чтобы эта система содержала эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

необходимо

$$\left(\frac{1}{2}\omega - A\right)a^2 = \left(\frac{1}{2}\omega + A\right)b^2,$$

или

$$A = \frac{1}{2}\omega\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

---

[1]) Проф. Hele Shaw сделал несколько прекрасных экспериментальных проверок форм линий тока для некоторых случаев стационарного безвихревого плоского движения, включая и те, которые представлены на фиг. 11 и 15. См. Trans. Inst. Nav. Arch. XL (1898). Теория его метода найдет место в гл. XI.

[2]) Если общее направление потока составляет с пластинкой угол α, то момент пары будет равен $\frac{1}{2}\pi\varrho q_0^2 c^2 \sin 2\alpha$. Cisotti, Ann. di Mat. (3), XIX,

Следовательно, формула

$$\psi = \frac{1}{2}\omega\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}(x^2-y^2) \tag{3}$$

дает течение жидкости в полом цилиндре, сечение которого есть эллипс с полуосями a, b, в случае, когда цилиндр вращается с угловой скоростью ω вокруг своей продольной оси. Расположение линий тока $\psi = \text{const}$. показывает фиг. 19.

Соответствующая формула для φ будет

$$\varphi = -\omega\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}xy. \tag{4}$$

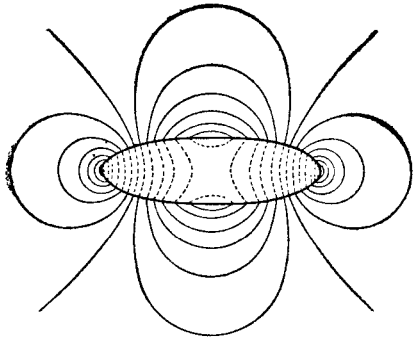
Кинетическая энергия жидкости, отнесенная к единице длины цилиндра, дается формулой

$$2T = \varrho\iint\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy = \frac{1}{4}\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}\omega^2\pi\varrho ab. \tag{5}$$

Это значение меньше, чем то, которое получится, если вращать жидкость вместе с ограничивающей ее поверхностью, как твердую массу; при этом первое значение относится ко второму как

$$\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2$$

к единице. Мы имеем здесь пример к доказанной в § 45 теорем о минимуме Кельвина.



Фиг. 19.

2. Вводя эллиптические координаты так же, как в § 71, (3) мы положим

$$\varphi + i\psi = Cie^{-2(\xi+i\eta)}. \tag{6}$$

Так как при этом будет иметь место равенство

$$x^2+y^2 = \frac{1}{2}c^2(\operatorname{ch}2\xi+\cos 2\eta),$$

то уравнение (1) принимает вид

$$Ce^{-2\xi}\cos 2\eta - \frac{1}{4}\omega c^2(\operatorname{ch}2\xi+\cos 2\eta) = \text{const}.$$

Эта система кривых содержит эллипс с параметром ξ_0, когда

$$Ce^{-2\xi_0} - \frac{1}{4}\omega c^2 = 0,$$

или, если ввести данные ранее значения a, b, когда

$$C = \frac{1}{4}\omega(a+b)^2,$$

так что

$$\left.\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{4}\omega(a+b)^2 e^{-2\xi}\cos 2\eta,\\ \varphi &= \frac{1}{4}\omega(a+b)^2 e^{-2\xi}\sin 2\eta.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

На большом расстоянии от начала скорость здесь будет величиной порядка $\frac{1}{r^3}$.

Вышенаписанные формулы дают, таким образом, течение безграничной жидкости, которая, будучи первоначально в покое, приведена в движение вращением эллиптического цилиндра вокруг его оси с угловой скоростью ω[1]). Фиг. 16 показывает линии тока как внутри, так и вне твердого цилиндрического сосуда, вращающегося около своей оси.

Кинетическая энергия внешней части жидкости равна

$$2T = \frac{1}{8}\pi\varrho c^4\omega^2. \tag{8}$$

Замечательно, что для всех цилиндров, сечения которых представляют софокусные эллипсы, она одинакова.

Комбинируя эти результаты с результатами § 60 и 71, найдем следующее: если, во-первых, эллиптический цилиндр движется поступательно, причем его компоненты скорости, параллельные главным осям его сечения, будут U и V, если, во-вторых, он вращается с угловой скоростью ω и если, далее, жидкость, свободная от вихрей, циркулирует вокруг цилиндра, при этом циклическая постоянная есть $\varkappa$, то функция тока относительно названных осей будет выражаться в виде

$$\psi = -\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\,e^{-\xi}(Ub\sin\eta - Va\cos\eta) + \\ + \frac{1}{4}\omega(a+b)^2 e^{-2\xi}\cos 2\eta + \frac{\varkappa}{2\pi}\xi. \tag{9}$$

Траектории, описываемые частицами жидкости, которые, конечно, имеют вид, отличный от линий тока, для нескольких разобранных случаев были изучены Мортоном[2]), и они очень интересны. Частный случай круглого цилиндра исследован Максвеллом (§ 68)[3]).

3. Предположим, что

$$\psi = Ar^3\cos 3\theta = A(x^3 - 3xy^2).$$

Уравнение (1) для точек контура границы тогда будет

$$A(x^3 - 3xy^2) - \frac{1}{2}\omega(x^2+y^2) = C. \tag{10}$$

---

[1]) Lamb, Quart. Journ. Math., XIV (1875); см. также Beltrami, см. сноску на стр. 109.

[2]) Morton W. B., Proc. Roy. Soc., A, LXXXIX, 106 (1913).

[3]) Maxwell, Proc. Lond. Math. Soc., III (1870) (Papers, II, 208).

Мы можем выбрать постоянные таким образом, что прямая $x=a$ составит часть контура. Условия для этого таковы:

$$Aa^3-\frac{1}{2}\omega a^2=C,\quad 3Aa+\frac{1}{2}\omega=0.$$

Подставляя в (10) найденные отсюда значения A, C, мы получим

$$x^3-a^3-3xy^2+3a(x^2-a^2+y^2)=0.$$

Разделив это уравнение на $x-a$, будем иметь

$$x^2+4ax+4a^2=3y^2,$$

или

$$x+2a=\pm\sqrt{3}\,y.$$

Остальная часть контура состоит, таким образом, из двух прямых линий, которые проходят через точку $(-2a,\ 0)$ и составляют с осью x угол в 30°.

Уравнение (10) представляет, следовательно, течение жидкости, содержащейся в сосуде в форме равносторонней призмы, которая вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, параллельной ее образующей и проходящей через центр ее сечения; мы будем иметь здесь

$$\psi=-\frac{1}{6}\frac{\omega}{a}r^3\cos 3\theta,\quad \varphi=\frac{1}{6}\frac{\omega}{a}r^3\sin 3\theta, \tag{11}$$

где $2\sqrt{3}\,a$ есть длина одиого ребра основания призмы [1]).

4. Для случая, когда жидкость заключена во вращающийся цилиндр, сечение которого есть сектор круга радиуса a с углом 2α, а ось вращения проходит через центр круга, мы можем принять

$$\psi=\frac{1}{2}\omega r^2\frac{\cos 2\theta}{\cos 2\alpha}+\sum A_{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{(2n+1)\frac{\pi}{2\alpha}}\cos(2n+1)\frac{\pi\theta}{2\alpha}, \tag{12}$$

причем отсчет угла производится от биссектрисы угла сектора. В самом деле, это выражение нам дает

$$\psi=\frac{1}{2}\omega r^2$$

для $\theta=\pm\alpha$, а постоянные A_{2n+1} могут быть определены по методу Фурье, так что для $r=a$ будет

$$\psi=\frac{1}{2}\omega a^2.$$

Мы найдем этим способом

$$A_{2n+1}=(-1)^{n+1}\omega a^2\left\{\frac{1}{(2n+1)\pi-4\alpha}-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{(2n+1)\pi}+\frac{1}{(2n+1)\pi+4\alpha}\right\}. \tag{13}$$

---

[1]) Задача движения жидкости во вращающемся цилиндрическом сосуде до известной степени математически тождественна с задачей о кручении призмы постоянного сечения. Примеры 1 и 3 суть только применение двух решений этой задачи, предложенных Сеи-Венаном; см. Thomson and Tait' § 704 и далее.

Соответствующее выражение для φ будет

$$\varphi = -\frac{1}{2}\omega r^2 \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\alpha} - \sum A_{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{(2n+1)\frac{\pi}{2\alpha}} \sin(2n+1)\frac{\pi\theta}{2\alpha}. \quad (14)$$

Кинетическая энергия подсчитывается по формуле

$$2T = -\varrho \int \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, ds = -2\varrho\omega \int_0^a \varphi_a r\, dr, \quad (15)$$

где φ_a есть значение φ для $\theta = \alpha$; значение $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ на круглой части контура равно нулю [1]).

Случай полукруга $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ будет иметь значение для нас впоследствии. Для этого случая будем иметь

$$A_{2n+1} = (-1)^{n+1}\frac{\omega a^2}{\pi}\left\{\frac{1}{2n-1} - \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{2n+3}\right\} \quad (16)$$

и, следовательно,

$$\int_0^a \varphi_a r\, dr = \frac{\omega a^4}{\pi}\sum \frac{1}{2n+3}\left\{\frac{1}{2n-1} - \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{2n+3}\right\} = -\frac{\omega a^4}{\pi}\left(2 - \frac{\pi^2}{8}\right).$$

Отсюда следует [2])

$$2T = \frac{1}{2}\pi\varrho\omega^2 a^4\left(\frac{8}{\pi^3} - \frac{1}{2}\right) = 0{,}3106a^2 \cdot \frac{1}{2}\pi\varrho\omega^2 a^2. \quad (17)$$

Эта величина меньше, чем соответствующая величина живой силы для случая, если бы жидкость затвердела; она относится к последней, как 0,6212 к единице; ср. § 45.

§ 72a. Мы видели в нескольких случаях, что когда цилиндр имеет поступательное движение в безграничной жидкости, то он на большом расстоянии создает тот же эффект, что и дублет. Общая формула, выражающая это обстоятельство, может быть выражена через некоторые постоянные, которые входят в выражение кинетической энергии жидкости [3]).

Положим

$$\varphi = U\varphi_1 + V\varphi_2, \quad (1)$$

где (U, V) есть скорость цилиндра, функции φ_1 и φ_2 определяются из тех условий, что всюду во внешней части области они удовлетворяют уравне-

[1]) Эта задача решена впервые Stokes, On the Critical Values of the Sums of Periodic Series, Cambr. Trans., VIII (1874) (Papers, I, 305); см. также Hicks, Mess. of Math., VIII, 42 (1878); Greenhill, *ibid.*, VIII, 89; X, 83.

[2]) Greenhill, см. сноску [1]).

[3]) См. Proc. Roy. Soc. A, CXI, 14 (1926) и ниже § 300.

ниям $\nabla^2\varphi_1=0$, $\nabla^2\varphi_2=0$, в бесконечности их частные производные обращаются в нуль, а на контуре цилиндра они удовлетворяют условиям

$$-\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=l, \quad -\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=m, \tag{2}$$

где (l, m) суть направляющие косинусы внешней нормали. В таком случае энергия жидкости будет подсчитываться в виде

$$\frac{2T}{\varrho}=-\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds=AU^2+2HUV+BV^2, \tag{3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A&=-\int\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\,ds=\int l\varphi_1\,ds,\\ B&=-\int\varphi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\,ds=\int m\varphi_2\,ds,\\ H&=-\int\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\,ds=-\int\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\,ds=\int m\varphi_1\,ds=\int l\varphi_2\,ds. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Два выражения H равны между собой в силу теоремы Грина для плоскости. Сравнить с § 121, где будет рассматриваться общий случай в трехмерном пространстве.

Обращаясь к формуле (7) § 60, допустим, что цилиндр с произвольной формой сечения движется с единичной скоростью параллельно оси x. Беря начало внутри контура и записывая

$$r^2=(x_0-x)^2+(y_0-y)^2=r_0^2-2(xx_0+yy_0)+\ldots, \tag{5}$$

где (x_0, y_0) представляет удаленную точку, в которой требуется определить φ, а (x, y) — точку контура, тогда мы будем иметь

$$\ln r=\ln r_0-\frac{xx_0+yy_0}{r_0^2}+\ldots \tag{6}$$

и приближенно

$$\frac{\partial}{\partial n}(\ln r)=-\frac{lx_0+my_0}{r_0^2}.$$

Полагая в указанной формуле (7) § 60

$$\varphi=\varphi_1, \quad \varphi'=-x, \tag{7}$$

мы получим

$$2\pi\varphi_P=\frac{(A+Q)x_0+Hy_0}{r_0^2}, \tag{8}$$

где A и H определяются формулами (4), а

$$Q=\int lx\,ds, \tag{9}$$

т. е. Q обозначает площадь сечения цилиндра.

Течение на большом расстоянии, следовательно, есть такое, которое создается дублетом, но только ось дублета, вообще говоря, не совпадает с направлением движения цилиндра.

Вполне очевидно и обобщение формулы (8). Если цилиндр имеет скорость (U, V), то получим

$$2\pi r_0^2\varphi_P=\{(A+Q)U+HV\}x_0+\{HU+(B+Q)V\}y_0. \tag{10}$$

Через комплексные переменные w и z мы можем представить это в виде

$$w=\frac{\alpha+i\beta}{z_0}, \tag{11}$$

при условии, что

$$2\pi\alpha=(A+Q)U+HV, \quad 2\pi\beta=HU+(B+Q)V. \tag{12}$$

Например, для эллиптического сечения, сравнивая формулу (3) с (11) § 71, мы имеем $A=\pi b^2$, $B=\pi a^2$, $Q=\pi ab$. Следовательно, будем иметь

$$\varphi_P=\frac{(a+b)(bUx_0+aVy_0)}{2r_0^2}. \tag{13}$$

§ 72b. Гидродинамические силы на неподвижный цилиндр, вызываемые стационарным безвихревым движением окружающей жидкости, были ранее вычислены в одном или двух случаях. Общий метод, пригодный всякий раз, когда известен вид функции $w=\varphi+i\psi$ для движения жидкости, был указан Блазиусом [1]).

Давления на контур вообще могут быть приведены к силе (X, Y), приложенной в начале, и паре с моментом N. Если θ есть угол, который образует скорость q с осью x, то мы имеем

$$Y+iX=-\frac{1}{2}\varrho\int q^2(\cos\theta-i\sin\theta)\,ds, \tag{1}$$

где интеграл распространяется по контуру цилиндра. Эта формула может быть представлена в виде

$$Y+iX=-\frac{1}{2}\varrho\int(qe^{-i\theta})^2e^{i\theta}\,ds=-\frac{1}{2}\varrho\int\left(\frac{dw}{dz}\right)^2dz, \tag{2}$$

откуда можно определить X и Y.

Кроме того, если ϑ будет представлять угол, который образует элемент δs контура с радиусом-вектором, то будем иметь

$$N=\int pr\cos\vartheta\,ds=\int pr\,dr=-\frac{1}{2}\varrho\int(u^2+v^2)(x\,dx+y\,dy). \tag{3}$$

Но вдоль линии тока мы имеем $v\,dx=u\,dy$, следовательно,

$$(u-iv)^2(dx+i\,dy)=(u^2+v^2)(dx-i\,dy),$$

и

$$(u-iv)^2(x+iy)(dx+i\,dy)=(u^2+v^2)\{x\,dx+y\,dy+i(y\,dx-x\,dy)\}.$$

Таким образом N может быть представлено в виде действительной части от интеграла

$$-\frac{\varrho}{2}\int\left(\frac{dw}{dz}\right)^2z\,dz. \tag{4}$$

---

[1]) Blasius, Funktiontheoretishe Methoden in der Hydrodynamik, Zeitschr. f. Math. u. Phys., LVIII (1c0).

Независимо от Блазиуса этот общий метод был указан Чаплыгиным С. А. в том же году в Матем. сб., т. XXVIII. *Прим. ред.*

В случае какого-нибудь цилиндра, погруженного в равномерный поток с циркуляцией, значение функции w на большом расстоянии стремится к виду

$$w = A + Bz + C \ln z. \tag{5}$$

Так как в области, занятой жидкостью, подинтегральное выражение в формуле (2) особенностей не имеет, то сам интеграл может быть заменен через интеграл по бесконечно большому контуру, по отношению к которому бесконечно удаленная точка будет внутренней точкой. В таком случае будем иметь

$$\int \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = \int \left(B^2 + \frac{2BC}{z} + \frac{C^2}{z^2}\right) dz = 2BC \int \frac{dz}{z} = 4\pi i BC. \tag{6}$$

Если поток в бесконечности имеет скорость (U, V), и $\varkappa$ означает циркуляцию, то получим

$$B = -(U - iV), \quad C = -\frac{i\varkappa}{2\pi}. \tag{7}$$

А тогда имеем формулы

$$X = \varkappa\varrho V, \quad Y = -\varkappa\varrho U, \tag{8}$$

которые обобщают результат, полученный в § 69 для частного случая кругового сечения.

Для вычисления момента N выражение (5) должно быть продолжено еще на одну степень. Представляя w в виде

$$w = A + Bz + C \ln z + \frac{D}{z}, \tag{9}$$

мы будем иметь

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = B^2 + \frac{2BC}{z} + \frac{C^2 - 2BD}{z^2} + \ldots \tag{10}$$

Опуская все члены, которые будут обращаться в нуль в случае бесконечно большого контура, получим

$$\int \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z\, dz = 2\pi i (C^2 - 2BD). \tag{11}$$

Подставляя значения B и C из (7), полагая $D = \alpha + i\beta$ и беря только действительную часть, мы найдем, что

$$N = 2\pi\varrho (\beta U - \alpha V). \tag{12}$$

Если наложением на поток общей скорости $(-U, -V)$ мы приведем жидкость в бесконечности к покою, то слагаемое $\frac{D}{z}$ в формуле (9) как раз обусловлено перемещением цилиндра с этой скоростью. В таком случае значения α и β уже нами вычислены в § 72, только знак будет обратным. Следовательно, формула (12) даст

$$N = \varrho \{(A - B) UV - H(U^2 - V^2)\}. \tag{13}$$

Так, для эллиптического сечения, отнесенного к его главным осям,

$$N = -\pi\varrho\,(a^2-b^2)\,VU. \tag{14}$$

В качестве дальнейшего применения формулы Блазиуса мы можем подсчитать силу на неподвижный цилиндр, вызываемую внешним источником. Положим

$$w = -\mu \ln(z-c) + f(z), \tag{15}$$

где первое слагаемое представляет источник в точке $z=c$, а $f(z)$ — его зеркальное изображение в цилиндре, причем $f(z)$ прибавлена из-за необходимости обратить в нуль нормальную скорость на контуре, обусловленную источником. Тогда имеем

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{\mu}{z-c} + f'(z). \tag{16}$$

Контурный интеграл в формуле (2) будет теперь равен интегралу по бесконечно большому коитуру минус интеграл (в положительном направлении) вокруг особой точки $z=c$. Интеграл по бесконечному контуру дает в результате иуль. Вблизи же особой точки должна быть приията во вниманне только та часть $\left(\frac{dw}{dz}\right)^2$, которая содержит первую степень $z-c$ в знаменателе, т. е.

$$-\frac{2\mu f'(c)}{z-c}.$$

Тогда

$$Y + iX = -2\pi i\mu\varrho f'(c). \tag{17}$$

Вид фуикции $f(z)$ для случая круглого цилиндра уже известен из п. 3, § 64. Предполагая, что источник находится на оси x, так что c будет действительной, мы будем иметь

$$f(z) = -\mu \ln\left(z - \frac{a^2}{c}\right) + \mu \ln z, \tag{18}$$

$$f'(c) = -\frac{\mu a^2}{c\,(c^2-a^2)}, \tag{19}$$

$$X = \frac{2\pi\mu^2 a^2}{c\,(c^2-a^2)}, \quad Y = 0^*). \tag{20}$$

В общем случае мы можем прибегнуть приближенно к асимптотической форме, которую принимает $f(z)$, когда расстояние источника велико в сравнении с размерами поперечного сечения. Тогда мы допускаем, что эта функция $f(z)$ представляет эффект, производимый поступательным движением цилиндра со скоростью, равной, но противоположиой по знаку той скорости, которую вызвал бы источник вблизи, если бы цилиндр отсутствовал. В таком случае, предполагая все еще источник находящимся на оси x, мы из § 72а будем иметь

$$f(z) = \frac{(A+Q+iH)\,U}{2\pi z}, \tag{21}$$

где $U = \frac{\mu}{c}$. Отсюда

$$f'(c) = -\frac{(A+Q+iH)\,\mu}{2\pi c^3}, \tag{22}$$

и, следовательно, будем иметь

$$X = \frac{(A+Q)\,\mu^2\varrho}{c^3}, \quad Y = -\frac{H\mu^2\varrho}{c^3}. \tag{23}$$

*) Результат принадлежит профессору Тэйлору.

Если f (равное $\frac{\mu^2}{c^2}$) будет представлять ускорение в положении начала в невозмущенном потоке, то указанные результаты можно представить в виде

$$X = \varrho (A + Q) f, \quad Y = -\varrho H f. \tag{24}$$

Для круглого сечения $A = \pi a^2$, $H = 0$, $Q = \pi a^2$; формула (20) будет иметь место, если только пренебречь членами порядка $\frac{a^2}{c^2}$.

Некоторые изящные применения метода Блазиуса, относящиеся к взаимному действию круглых цилиндров при наличии циркуляции, были даны Чизотти [1]). Один из его результатов можно здесь указать. Цилиндр, радиуса b, помещен эксцентрично внутри второго цилиндра, радиуса a, промежуточное пространство заполнено жидкостью, имеющей циркуляцию $\varkappa$. Тогда результирующая сила на цилиндр будет направлена к ближайшей точке стенок внешнего цилиндра и имеет значение

$$\frac{\varkappa^2 d^2}{2\pi \sqrt{(a+b+d)(a+b-d)(a-b+d)(a-b-d)}},$$

где d есть расстояние между осями.

Свободные линии тока.

§ 73. Первое решение задачи плоского движения, при котором жидкость ограничена частью твердыми плоскими стенками, а частью поверхностями постоянного давления, было дано Гельмгольцем [2]). Кирхгоф [3]) и другие разработали затем общие методы для решения этих вопросов. Если рассматривать поверхность постоянного давления как свободную поверхность, то мы будем иметь перед собой теорию жидких струй, которая дает некоторые интересные результаты в дополнение к § 24. Далее, так как пространство по ту сторону свободной поверхности может быть заполнено покоящейся жидкостью, что не меняет условий задачи, то мы получаем таким образом несколько случаев разрывного движения, которые для идеальной жидкости математически допустимы, но не всегда имеют практическое значение. К этому вопросу мы вернемся впоследствии (гл. XI); поверхности постоянного давления мы будем обозначать, как „свободные" поверхности. Так как мы пренебрегаем внешними силами, как, например, силой тяжести, то скорость вдоль такой поверхности согласно (2) § 21 должна быть постоянна.

Рассматриваемый метод основывается на свойствах введенной в § 65 функции ζ. Мы предполагаем, что движущаяся жидкость ограничена линиями тока $\psi = \text{const.}$, которые состоят частично из прямых стенок и частично из линий, вдоль которых скорость (q) по величине постоянна. Ради простоты мы выберем единицу длины и единицу времени таким образом, чтобы постоянная скорость равнялась еди-

[1]) Cisotti, Rend. d. r. Accad. d. Lincei (6), I (1925—1926).

[2]) Helmholtz, см. сноску на стр. 98.

[3]) Kirchhoff, Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen, Crelle, LXX (1869) (Ges. Abh., стр. 416); см. также его Mechanik, гл. XXI, XXII.

нице. Тогда в плоскости функции ζ линии, вдоль которых $q=1$, будут представлены дугами окружности с радиусом, равным единице, и с центром в начале координат, а прямолинейные стенки (так как направление течения вдоль каждой из них постоянно) — через радиальные прямые, идущие от окружности во внешнюю часть плоскости. Точки, в которых эти прямые пересекают окружность, соответствуют точкам, где граничные линии тока из одного вида переходят в другой.

Рассмотрим сначала функцию $\ln\zeta$. В плоскости этой функции дуги окружности $q=1$ отображаются на части мнимой оси, а радиальные прямые отображаются на прямые, параллельные действительной оси, так как

$$\ln\zeta=\ln\frac{1}{q}+i\theta, \tag{1}$$

если $\zeta=q^{-1}e^{i\theta}$. Остается определить соотношение вида [1])

$$\ln\zeta=f(w), \tag{2}$$

где, как обычно, $w=\varphi+i\psi$, и именно таким образом, чтобы прямолинейные границы в плоскости $\ln\zeta$ соответствовали прямым $\psi=\text{const}$ в плоскости w. При этом, чтобы сделать задачу определенной, достаточно потребовать, чтобы двум точкам одной области, из которых одна лежит внутри, а другая на границе, соответствовали в другой области две подобные же точки.

Когда установлено соответствие плоскостей ζ и w, тогда соотношение между z и w находится интегрированием уравнения

$$\frac{dz}{dw}=-\zeta. \tag{3}$$

Произвольная постоянная, входящая в результат, определяется заданием произвольного положения нулевой точки в плоскости z.

Задача таким образом сводится к конформному отображению двух областей, ограниченных прямыми линиями [2]). Задача этого отображения решается с помощью ранее изложенного [3]) метода Шварца и Кристофеля, при котором обе области отображаются одна после другой на одну и ту же полуплоскость. Пусть $Z(=X+iY)$ и t — две комплексные величины, связанные соотношением

$$\frac{dZ}{dt}=A(a-t)^{-\frac{\alpha}{\pi}}(b-t)^{-\frac{\beta}{\pi}}(c-t)^{-\frac{\gamma}{\pi}}\ldots, \tag{4}$$

где a, b, c, ... суть действительные величины, из которых каждая больше предыдущей, в то время как α, β, γ, ... — углы (не обязательно положительные), удовлетворяющие соотношению

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots=2\pi. \tag{5}$$

---

[1]) Применение $\ln\zeta$ вместо ζ исходит от Planck, Wied. Ann., XXI (1884).

[2]) См. Forsyth, Theory of Functions, гл. XX.

[3]) См. прим. 2 и 3 на стр. 104.

Рассмотрим теперь линию, которая состоит из частей действительной оси t и малых полукруглых вырезов (на верхней стороне) вокруг точек $a, b, c, \ldots$ Если точка пробегает эту линию от $t=-\infty$ до $t=+\infty$, то только одна абсолютная величина выражения (4) будет изменяться, когда точка проходит прямолинейный отрезок, тогда как обход малых полуокружностей в направлении часовой стрелки скажется в появлении множителей $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, \ldots$ один за другим. Рассматривая $\frac{dZ}{dt}$ как оператор, который переводит δt в δZ, мы видим, что верхняя половина плоскости t отображается конформно на площадь замкнутого многоугольника с внешними углами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ с помощью формулы

$$Z=A\int (a-t)^{-\frac{\alpha}{\pi}}(b-t)^{-\frac{\beta}{\pi}}(c-t)^{-\frac{\gamma}{\pi}}\ldots dt+B, \qquad (6)$$

при условии, что путь интегрирования в плоскости t лежит полностью внутри ограниченной, как указано выше, области. Если $a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ даны, то многоугольник вполне определен по своей форме; комплексные постоянные A и B влияют только на его масштаб и его ориентировку и соответственно на его положение.

Как уже сказано, нас особенно должно интересовать конформное отображение *прямоугольных* площадей. Если $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\frac{\pi}{2}$, то формула (6) примет вид

$$Z=A\int \frac{dt}{\sqrt{(a-t)(b-t)(c-t)(d-t)}}+B. \qquad (7)$$

Легко видеть, что прямоугольник будет конечен во всех своих измерениях, если по крайней мере две из точек a, b, c, d не лежат в бесконечности. Этот исключительный случай для нас как раз особенно важен; мы можем при этом точки, лежащие в конечной части плоскости, принять для простоты находящимися в $t=\pm 1$, так что

$$Z=A\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}+B=A\operatorname{arc\,ch} t+B. \qquad (8)$$

В частности, функция

$$t=\operatorname{ch}\frac{Z}{k}, \qquad (9)$$

где k действительно, преобразует пространство, ограниченное положительными полупрямыми

$$Y=0, \quad Y=k\pi$$

и расположенным между ними отрезком оси Y, в верхнюю половину плоскости t; ср. § 66, 1.

Далее, если обе конечные точки совпадают, например, в нулевой точке, то мы будем иметь

$$Z=A\int \frac{dt}{t}+B=A\ln t+B. \qquad (10)$$

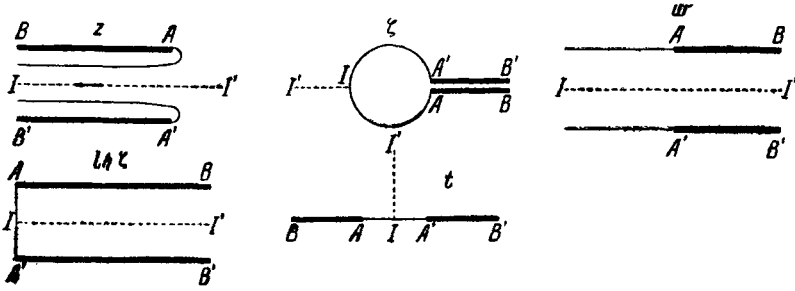
Эта функция преобразует верхнюю половину плоскости t в полосу, ограниченную двумя параллельными прямыми в плоскости Z. Если, например,

$$t = e^{\frac{z}{k}}, \tag{11}$$

где k действительно, то этими прямыми будут линии

$$Y = 0, \quad Y = k\pi.$$

§ 74. В качестве первого примера применения нашего метода рассмотрим случай истечения жидкости из большого сосуда через прямолинейный канал, который вдается внутрь сосуда [1]). Это будет представлять плоскую форму насадки Борда, о которой говорилось в § 24.



Фиг. 20.

Границы соответствующих площадей в плоскостях ζ, $\ln\zeta$ и w легко нарисовать; они представлены на фиг. 20 [2]). Мы должны теперь площади в плоскостях $\ln\zeta$ и w связать с верхней полуплоскостью переменного t. Из уравнений (8) и (10) предыдущего параграфа следует, что это может быть сделано с помощью подстановок

$$\left.\begin{aligned} \ln\zeta &= A \operatorname{arc\,ch} t + B, \\ w &= C \ln t + D. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Вершины углов A и A' в плоскости $\ln\zeta$ мы сопоставим точкам $t = \pm 1$; далее предположим, что $t = 0$ соответствует точке $w = -\infty$, как это явствует из фигуры. Чтобы иметь дело с определенным значением циклических функций $\operatorname{arc\,ch} t$ и $\ln t$, предположим, что обе они обращаются в нуль для $t = 1$ и что их значения для других точек положительной полуплоскости определяются соображениями непрерывности. Отсюда получается, что для $t = -1$ значение каждой

[1]) Эта задача была сначала решена Гельмгольцем, см. прим. на стр. 98.

[2]) Жирно нарисованные линии соответствуют твердым границам, а тонко начерченные линии — свободным поверхностям. Соответствующие точки в различных фигурах обозначены одинаковыми буквами.

из обеих функций равно $i\pi$. В точках A', A плоскости $\ln\zeta$ проще всего положить соответственно

$$\ln\zeta = 0 \quad \text{и} \quad \ln\zeta = 2i\pi;$$

тогда, обращаясь для определения постоянных к уравнению (1), мы получим

$$0 = B, \quad 2i\pi = i\pi A + B,$$

следовательно,

$$\ln\zeta = 2 \operatorname{arc\,ch} t. \tag{2}$$

Далее, возьмем в плоскости w прямую JJ' за линию $\psi = 0$. Если ширина выходящей струи достаточно далеко от выхода будет равна $2b$, то граничные линии тока будут $\psi = \pm b$. Затем мы можем принять, что $\varphi = 0$ есть эквипотенциальная кривая, проходящая через A, A'. Тогда из уравнения (1) следует

$$ib = i\pi C + D, \quad -ib = D,$$

и поэтому

$$w = \frac{2b}{\pi} \ln t - ib. \tag{3}$$

Легко исключить t из уравнений (2) и (3) и затем установить с помощью интегрирования соотношения между z и w, но формулы в данном здесь виде, пожалуй, более удобны.

Теперь легко проследить ход каждой свободной линии тока, например $A'J$ от ее начальной точки A'. Для точек этой линии t действительно и изменяется от 1 до 0; кроме того, уравнение (2) дает

$$i\theta = 2 \operatorname{arc\,ch} t, \quad \text{или} \quad t = \cos\frac{1}{2}\theta.$$

Поэтому согласно уравнению (3) получим

$$\varphi = \frac{2b}{\pi} \ln\cos\frac{1}{2}\theta. \tag{4}$$

Так как вдоль этой линии

$$\frac{d\varphi}{ds} = -q = -1,$$

то мы можем положить

$$\varphi = -s,$$

где s есть дуга, отмеряемая от A'. Естественное уравнение кривой, таким образом, будет

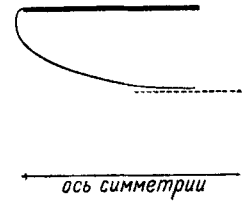
$$s = \frac{2b}{\pi} \ln\sec\frac{1}{2}\theta. \tag{5}$$

Если начальная точка находится в A', то можно отсюда вывести обычным путем формулы

$$x = \frac{2b}{\pi}\left(\sin^2\frac{1}{2}\theta - \ln\sec\frac{1}{2}\theta\right),$$

$$y = \frac{b}{\pi}(\theta - \sin\theta). \tag{6}$$

Давая θ ряд значений от 0 до π, можно легко начертить эту кривую (фиг. 21). Так как верхней границей y будет b, то оказывается, что расстояние между твердыми стенками должно быть $4b$. Коэфициент сжатия, таким образом, равен $^1/_2$, в согласии с теорией Борда.



Фиг. 21.

§ 75. Для случая, когда жидкость вытекает из большого сосуда через отверстие в плоской стенке, решение аналитически получается совершенно таким же образом. Главное различие состоит в том, что значения $\ln\zeta$ в точках A, A' на фиг. 22 должны быть взяты теперь соответственно равными нулю и $-i\pi$; это дает для определения постоянных A, B из формулы (1) следующие уравнения:

$$0 = i\pi A + B, \quad -i\pi = B,$$

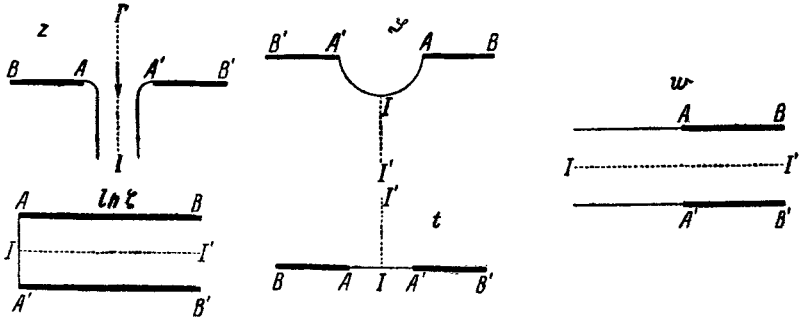
так что будет

$$\ln\zeta = \operatorname{arc\,ch} t - i\pi. \tag{7}$$

Соотношение между w и t будет совершенно таким же, как выше:

$$w = \frac{2b}{\pi}\ln t - ib, \tag{8}$$

причем $2b$ есть окончательная ширина потока между свободными границами.



Фиг. 22.

Для линии тока AI t будет действительно и изменяется оно от -1 до 0. Так как

$$i\theta = \operatorname{arc\,ch} t - i\pi,$$

то мы можем положить

$$t = \cos(\theta + \pi),$$

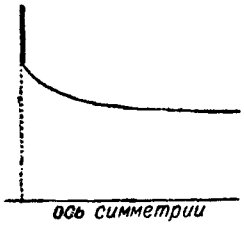
где θ изменяется от 0 до $-\frac{1}{2}\pi$. Таким образом из формулы (8) и из $\varphi = -s$ получается естественное уравнение линии тока в виде

$$s = \frac{2b}{\pi}\ln(-\sec\theta). \tag{9}$$

Отсюда, если точка A на первой из фиг. 22 берется в качестве начала[1]), находим

$$x=\frac{4b}{\pi}\sin^2\frac{1}{2}\theta,\quad y=\frac{2b}{\pi}\left\{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\theta\right)-\sin\theta\right\}. \qquad (10)$$

Кривая (в измененном положении) изображена на фиг. 23.

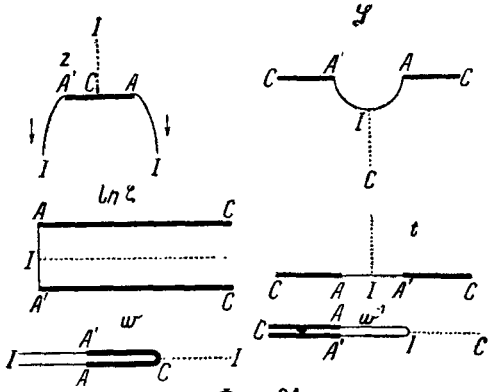


Фиг. 23.

Асимптотическое значение x, соответствующее значению $\theta=-\frac{\pi}{2}$, равно $\frac{2b}{\pi}$; половина ширины отверстия поэтому будет $(\pi+2)\frac{b}{\pi}$, и коэфициент сжатия тогда равен

$$\frac{\pi}{(\pi+2)}=0{,}611.$$

§ 76. В следующем примере мы предположим, что поток неограниченной ширины натекает на плоскую пластинку и после этого разделяется на две части, ограниченные с внутренней стороны свободными поверхностями.



Фиг. 24.

Средняя линия тока после встречи с пластинкой под прямым углом разделяется на две ветви, которые следуют вдоль пластинки до ее ребер и затем образуют свободные поверхности. Пусть эта линия тока будет $\psi=0$ и пусть в точке разветвления $\varphi=0$. Вид границ в различных плоскостях показан на фиг. 24. Область, наполненная жидкостью, соответствует теперь *всей* плоскости w, которую, однако, мы теперь должны мыслить ограниченной изнутри двумя сторонами прямой $\psi=0$, $\varphi<0$.

При тех же обозначениях, как в начале § 75, мы будем иметь

$$\ln\zeta=\operatorname{arc\,ch}t-i\pi, \qquad (1)$$

или

$$t=-\operatorname{ch}(\ln\zeta)=-\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right). \qquad (2)$$

Соответствие между плоскостями w и t лучше всего установить, если мы сначала рассмотрим границы в плоскости w^{-1}. Применим

[1]) Этот пример дан Кирхгофом, см. примечание на стр. 120 и подробнее исследован Rayleigh, Notes on Hydrodynamics, Phil. Mag., Dec. 1876 (Papers, I, 297.)

здесь метод Шварца и Кристофеля. Если мы в формуле (4) § 73 положим

$$\alpha = -\pi, \quad \beta = \gamma = \ldots = 0,$$

то получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{dw^{-1}}{dt} &= At, \\ w^{-1} &= \frac{1}{2} At^2 + B. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

В точке I имеем $t=0$, $w^{-1}=0$, так что $B=0$, или

$$w = -\frac{C}{t^2}. \tag{4}$$

Чтобы связать C (которое, очевидно, действительно) с шириной l пластинки, заметим, что вдоль CA $\zeta = q^{-1}$ и, следовательно, согласно уравнению (2),

$$t = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q} + q\right), \quad q = -t - \sqrt{t^2-1}, \tag{5}$$

причем знак корня взят так, чтобы иметь $q=0$ при $t=-\infty$. Далее, имеем

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{1}{q}.$$

Если мы проинтегрируем это вдоль CA на первом рисуике фиг. 24, то получим

$$l = 2\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\,dt = -4C\int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{qt^2} = -4C\int_{-\infty}^{-1} \left\{-t + \sqrt{t^2-1}\right\}\frac{dt}{t^3}; \tag{6}$$

отсюда будем иметь

$$C = \frac{l}{\pi+4}. \tag{7}$$

Вдоль свободной границы AI мы имеем $\ln\zeta = it$ и, следовательно, согласно формулам (2) и (4),

$$t = -\cos\theta, \quad \varphi = -C\sec^2\theta. \tag{8}$$

Естественное уравнение кривой, следовательно, таково:

$$s = \frac{l}{\pi+4}\sec^2\theta, \tag{9}$$

причем θ меняется от 0 до $-\frac{1}{2}\pi$. Отсюда получаем

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2l}{\pi+4}\left(\sec\theta+\frac{1}{4}\pi\right), \\ y &= \frac{l}{\pi+4}\left\{\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta-\ln\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\theta\right)\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

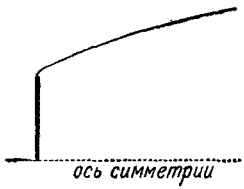
причем нулевая точка лежит в центре пластинки фиг. 25.

Избыток давления на передней стороне пластинки согласно формуле (8) § 23 равен $\frac{1}{2}\varrho(1-q^2)$. Следовательно, результирующая сила на пластинку будет равна

$$\varrho\int_{-\infty}^{-1}(1-q)\frac{dx}{dt}\,dt =$$

$$= -2\varrho C\int_{-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{q}-q\right)\frac{dt}{t^3} = -4\varrho C\int_{-\infty}^{-1}\sqrt{t^2-1}\,\frac{dt}{t^3} = \pi\varrho C. \tag{11}$$

Из уравнения (8) § 23 и вследствие очевидного геометрического сходства движения во всех рассмотренных случаях ясно, что результирующее давление P_0 будет пропорционально квадрату общей скорости потока. Мы найдем таким образом для произвольной скорости q_0 [1])



Фиг. 25.

$$P_0 = \frac{\pi}{\pi+4}\varrho q_0^2 l = 0{,}440\,\varrho q_0^2 l. \tag{12}$$

§ 77. Если поток встречает пластинку под углом, образуя с ее плоскостью угол α, то задача изменяется так, как показано на фиг. 23.

Уравнения (1) и (2) предыдущего параграфа продолжают иметь место, но в точке I мы будем иметь теперь $\zeta = e^{-i(\pi-\alpha)}$, и поэтому $t = \cos\alpha$. Следовательно, вместо уравнения (4) [2]) будем иметь

$$w = \frac{-C}{(t-\cos\alpha)^2}. \tag{13}$$

Так как $q^{-1} = |\zeta|$, то в точках передней грани пластинки имеем

$$\frac{1}{q} = \pm t+\sqrt{t^2-1}, \quad q = \pm t-\sqrt{t^2-1}, \tag{14}$$

[1]) Kirchhoff, см. примечание на стр. 120. Rayleigh, On the Resistance of Fluids, Phil. Mag., Dec. 1876 (Papers, I, 287.)

[2]) Решение до этого места дано Кирхгофом (Crelle, см. прим. на стр. 120); данное в тексте исследование с небольшими изменениями вычислительного характера заимствовано из работы Рэлея.

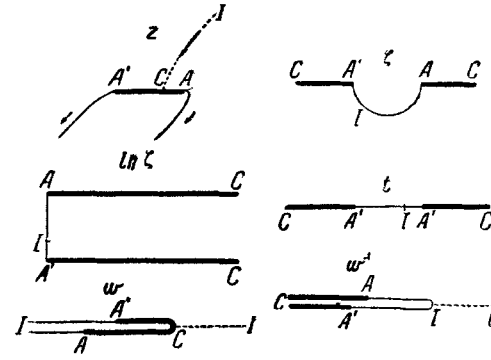
причем необходимо взять верхний или нижний знак, смотря по тому, $t \gtrless 0$, т. е. смотря по тому, лежит ли рассматриваемая точка налево или направо от C на первом рисунке фиг. 26.

Таким образом будем иметь

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{1}{q}\frac{d\varphi}{dt} = \\ = \frac{2C}{(t-\cos\alpha)^3}(t \pm \sqrt{t^2-1}). \quad (15)$$

t между A' и C изменяется от 1 до ∞, в то время как между A и C оно пробегает интервал от $-\infty$ до -1. Если положить

$$t = \frac{1-\cos\alpha\cos\omega}{\cos\alpha-\cos\omega}$$



Фиг. 26.

то соответствующие значения ω пробегают интервал соответственно от π до α и от α до 0; мы найдем, следовательно,

$$\frac{dt}{(t-\cos\alpha)^3} = -\frac{\cos\alpha-\cos\omega}{\sin^4\alpha}\sin\omega\,d\omega,$$

$$\pm\sqrt{t^2-1} = \frac{\sin\alpha\sin\omega}{\cos\alpha-\cos\omega}.$$

Отсюда получается

$$\frac{dx}{d\omega} = -\frac{2C}{\sin^4\alpha}(1-\cos\alpha\cos\omega+\sin\alpha\sin\omega)\sin\omega \quad (16)$$

и, следовательно,

$$x = \frac{C}{\sin^4\alpha}\left\{2\cos\omega+\cos\alpha\sin^2\omega+\right. \\ \left.+\sin\alpha\sin\omega\cos\omega+\left(\frac{1}{2}\pi-\omega\right)\sin\alpha\right\}. \quad (17)$$

причем центр пластинки выбирается за начало, так что x будет иметь соответственно одинаковые по абсолютной величине и противоположные по знаку значения для $\omega=0$ и $\omega=\pi$. Таким образом вся ширина, выраженная через C, будет равна

$$l = \frac{4+\pi\sin\alpha}{\sin^4\alpha}C. \quad (18)$$

Расстояние точки разветвления ($\omega=\alpha$) от центра равно

$$x = \frac{2\cos\alpha(1+\sin^2\alpha)+\left(\frac{1}{2}\pi-\alpha\right)\sin\alpha}{4+\pi\sin\alpha}l. \quad (19)$$

Интегрируя выражение

$$\frac{1}{2}\varrho(1-q^2)\,dx = \pm\frac{1}{2}\varrho\left(\frac{1}{q}-q\right)\frac{d\varphi}{dt}\,dt = \\ = \pm 2\varrho C\sqrt{t^2-1}\,\frac{dt}{(t-\cos\alpha)^3} = -\frac{2\varrho C}{\sin^3\alpha}\sin^2\omega\,d\omega \quad (20)$$

в пределах от π до 0, получим полное давление на переднюю грань:

$$\pi\varrho\frac{C}{\sin^3\alpha}.$$

Введя l и произвольную скорость потока q_0, мы найдем

$$P_0=\frac{\pi\sin\alpha}{4+\pi\sin\alpha}\cdot\varrho q_0^2\cdot l. \qquad (1$$

Чтобы найти центр давления, составим момент сил относительно центра пластинки. Мы получим тогда

$$\frac{1}{2}\varrho\int(1-q^2)\,x\,dx=-\frac{2\varrho C}{\sin^3\alpha}\int_{\pi}^{0}x\sin^2\omega\,d\omega=\frac{\pi\varrho C}{\sin^3\alpha}\cdot\frac{3}{4}\frac{C\cos\alpha}{\sin^4\alpha}, \qquad (22)$$

где значение x взято из уравнения (17). Первый множитель представляет полное давление; абсцисса $\bar{x}$ центра давления будет дана тогда вторым множителем или, если мы выразим ее через ширину, то получим

$$\bar{x}=\frac{3}{4}\frac{\cos\alpha}{4+\pi\sin\alpha}l. \qquad (23)$$

α	I	II	III
90°	1,000	0,000	0,0 0
70°	0,965	0,037	0,232
50°	0,854	0,075	0 402
30°	0,641	0,117	0,483
20°	0,481	0,139	0,496
10°	0,273	0,163	0,500

В приведенной рядом таблице, заимствованной из работы Рэлея, столбец I дает излишек давления на передней грани, отнесенный к его значению, для $\alpha=90°$, в то время как столбцы II и III дают расстояния центра давления и точки разветвления струи от центра пластинки, выраженные в долях общей ширины [1]).

§ 78. Интересное видоизменение задачи § 76 было дано Бобылевым [2]). Предположим, что струя набегает симметрично на согнутую пластинку, сечение которой состоит из двух отрезков одинаковой величины, образующих между собой некоторый угол.

Если обозначить через 2α величину угла, обращенного в сторону течения, то границы плоскости ζ могут быть преобразованы так, что они будут иметь тот же самый вид, как и в § 76. Это будет достигнуто, если положить

$$\zeta=A\zeta'^n,$$

где A и n должны быть определены таким образом, что

$$\zeta'=1 \text{ при } \zeta=e^{-i\left(\frac{1}{2}\pi-\alpha\right)} \text{ и } \zeta'=e^{-i\pi} \text{ при } \zeta=e^{-i\left(\frac{1}{2}\pi+\alpha\right)}.$$

[1]) Для сравнения с экспериментальными результатами см. Rayleigh, примечание на стр. 128 и Nature, XLV (1891) (Papers, III, 491).

[2]) Журнал Русского физико-химического о-ва, XIII (1881) (Beiblätter zu Wiedemanns Annalen, VI, 163). Кажется, однако, что эта задача еще раньше трактовалась подобным же образом M. Réthy (Klausenburger Berichte (1879)). Она была обобщена Bryan и Jones, Proc. Roy. Soc. A, XCI.

Отсюда получим

$$A = e^{-i\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)}, \quad n = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

На правой половине пластинки t, так же как и раньше, будет отрицательным и, так как $q^{-1} = |\zeta|$, то будем иметь

$$\frac{1}{q} = (-t + \sqrt{t^2-1})^n, \quad q = (-t - \sqrt{t^2-1})^n. \tag{24}$$

Отсюда следует

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{q}\frac{d\varphi}{dt}\,dt = 2C\int_{-\infty}^{-1}(-t+\sqrt{t^2-1})^n \frac{dt}{t^3} =$$

$$= -C - nC\int_{-\infty}^{-1}(-t+\sqrt{t^2-1})^n \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-1}},$$

$$\int_{-\infty}^{-1} q\frac{d\varphi}{dt}\,dt = 2C\int_{-\infty}^{-1}(-t-\sqrt{t^2-1})^n \frac{dt}{t^3} =$$

$$= -C + nC\int_{-\infty}^{-1}(-t-\sqrt{t^2-1})^n \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-1}}.$$

Эти выражения посредством подстановки

$$t = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}} + \sqrt{\omega}\right),$$

где ω изменяется от 0 до 1, могут быть сведены к известному виду. Таким образом мы найдем

$$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{q}\frac{d\varphi}{dt}\,dt = -1 - 2n\int_0^1 \frac{\omega^{-\frac{1}{2}n}}{(1+\omega)^2}\,d\omega = -1 - n - n^2\int_0^1 \frac{\omega^{-\frac{1}{2}n}}{1+\omega}\,d\omega, \tag{25}$$

$$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{-1} c\frac{d\varphi}{dt}\,t = -1 + 2n\int_0^1 \frac{\omega^{\frac{1}{2}n}}{(1+\omega)^2}\,d\omega = -1 - n + n^2\int_0^1 \frac{\omega^{\frac{1}{2}n-1}}{1+\omega}\,d\omega. \tag{26}$$

Мы при этом использовали следующие формулы:

$$\int_0^1 \frac{\omega^{-k}}{(1+\omega)^2}\,d\omega = \frac{1}{2} + k\int_0^1 \frac{\omega^{-k}}{1+\omega}\,d\omega,$$

$$\int_0^1 \frac{\omega^{k}}{(1+\omega)^2}\,d\omega = -\frac{1}{2} + k\int_0^1 \frac{\omega^{k-1}}{1+\omega}\,d\omega,$$

где $1 > k > 0$.

Так как вдоль линии тока

$$\frac{ds}{d\varphi} = -\frac{1}{q},$$

то согласно (25) будем иметь, если b обозначает половину ширины пластинки

$$b = C\left\{1 + \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{4\alpha^2}{\pi^2}\int_0^1 \frac{\omega^{-\frac{\alpha}{\pi}}}{1+\omega}\,d\omega\right\}. \tag{27}$$

Определенный интеграл, который встречается в этом выражении, может быть вычислен с помощью формулы

$$\int_0^1 \frac{\omega^{-k}}{1+\omega}\,d\omega = \frac{1}{(1-k)(2-k)} + \frac{1}{2}\Psi\left(1-\frac{1}{2}k\right) - \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k\right), \tag{28}$$

где $\Psi(m) = \frac{d}{dm}\ln\Pi(m)$; эта функция была введена и табулирована Гауссом [1]).

Нормальную компоненту давления на каждую из половинок можно найти методом § 76; она будет равна

$$-\frac{1}{2}\varrho\int_{-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{q}-q\right)\frac{d\varphi}{dt}\,dt = \frac{1}{2}n^2C\varrho\int_0^\infty \frac{\omega^{-\frac{1}{2}n}}{1+\omega}\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2}n^2C\varrho\frac{\pi}{\sin\frac{n\pi}{2}} = \varrho C\,\frac{2\alpha^2}{\pi\sin\alpha}. \tag{29}$$

Результирующее давление в направлении потока, следовательно, равно

$$\frac{4\alpha^2}{\pi}\varrho C. \tag{30}$$

А тогда для произвольной скорости потока q_0 результирующее давление будет выражаться в виде

$$P = \frac{4\alpha^2}{\pi L}\varrho q_0^2 b, \tag{31}$$

где L есть числовой множитель, заключенный в скобках в (27).

Для $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ мы получаем $L = 2 + \frac{1}{2}\pi$, что приводит к результату (12) § 76.

---

[1]) Gauss, Disquisitiones generales circa seriem infinitam..., Werke, Göttingen, 1870, III, 161.

В следующей таблице, которая (с незначительным изменением) заимствована из работы Бобылева, второй столбец дает отношение $\frac{P}{P_0}$, т. е. отношение результирующего давления к тому, которое испытывает плоская пластинка с той же самой площадью. Это отношение будет максимальным для α, равного приблизительно 100°; клин будет обращен тогда к потоку вогнутой стороной. Третий столбец дает отношение P к произведению расстояния ($2b \sin \alpha$) между ребрами клина на $\frac{1}{2}\varrho q_0^2$. Для значений α, которые лежат вблизи 180°, это отношение приближается к единице, как и следовало ожидать, так как жидкость внутри острого угла будет находиться тогда почти в покое, и избыток давления поэтому практически будет равен $\frac{1}{2}\varrho q_0^2$. Последний столбец дает отношение результирующего давления к тому, которое испытывает пластинка шириной $2b \sin \alpha$, вычисленное на основании формулы (12).

α	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P}{\varrho q_0^2 b \sin \alpha}$	$\frac{P}{P_0 \sin \alpha}$
10°	0,039	0,199	0,227
20°	0,140	0,359	0,409
30°	0,278	0,489	0,555
40°	0,433	0,593	0,674
45°	0,512	0,637	0,724
50°	0,589	0,677	0,769
60°	0,733	0,745	0,846
70°	0,854	0,800	0,909
80°	0,945	0,844	0,959
90°	1,000	0,879	1,000
100°	1,016	0,907	1,031
110°	0,995	0,931	1,059
120°	0,935	0,950	1,079
130°	0,840	0,964	1,096
135°	0,780	0,970	1,103
140°	0,713	0,975	1,109
150°	0,559	0,984	1,119
160°	0,385	0,990	1,126
170°	0,197	0,996	1,132

Разрывные движения.

§ 79. Достаточно было дать несколько важнейших примеров установившегося движения со свободной поверхностью, изученных, быть может, более систематическим методом. Значительные дополнения по этому вопросу были внесены Митчеллем [1]), Ляв [2]) и другими авторами [3]). Остается только сказать еще несколько слов относительно

[1]) Michell, On the Theory of Free Stream-lines, Phil. Trans. A, CLXXXI (1890).

[2]) Love, On the Theory of Discontinuous Fluid Motions in two Dimensions, Proc. Camb. Phil. Soc., VII (1891).

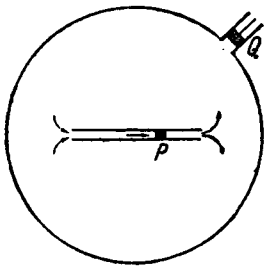
[3]) Литературные указания см. у Love, Encycl. d. Math. Wiss., IV (3), 97. Очень обстоятельное изложение наиболее важных известных решений с новыми добавлениями и расширениями даны Greenhill, Report on the Theory of a Stream-line past a Plane Barrier, опубликовано Advisory Committee for Aeronautics, 1910. Распространение на случай искривленных твердых границ дано в общем виде в различных работах Levi-Civita и Cisotti. Они помещены в Rend. d. Circolo Mat. di Palermo; XXIII, XXV, XXVI, XXVIII и Rend. d. r. Accad. d. Lincei, XX и XXI; изучение частных случаев представляет естественно большие трудности. Позднее данным вопросом занимался Leathem, Phil. Trans. A, CCXX, 439 (1915) и H. Levy, Proc. Roy. Soc. A, XCII, 107 (1915). Теория соударяющихся струй была подробно исследована Cisotti, Vene confluenti, Ann. di mat. (3), XXIII, 285 (1914). Из работ русских авторов следует назвать в первую очередь работу Н. Е. Жуковского (1890 г.) „Видоизменение метода Кирхгоффа". Полное собрание соч. т., III, изд. ОНТИ, 1936 г.

физических соображений, которые первоначально привели к исследованию такого рода задач.

На предыдущих страницах мы имели дело с несколькими примерами течения несжимаемой жидкости около острого выдающегося вперед ребра, и в каждом случае получалось, что скорость на ребре равнялась бесконечности. На самом деле это является необходимым следствием предположения, что движение является безвихревым, причем безразлично, сжимаема или несжимаема жидкость, как это можно установить, рассматривая непосредственно близкие эквипотенциальные поверхности (которые упираются в границу под прямым углом).

Появления бесконечно большой скорости можно избежать, делая ребро немного закругленным, однако и тогда скорость вблизи ребра значительно превзойдет то значение, которое она принимает на некотором расстоянии от него, большом сравнительно с радиусом кривизны.

Чтобы движение жидкости находилось в согласии с этими условиями, необходимо, чтобы давление на некотором расстоянии от ребра значительно превышало давление на ребре. Этот излишек давления обусловливается *инерцией* жидкости; жидкость может обтекать острое ребро преодолевая центробежную силу, только при таком распределении давления, когда оно очень быстро возрастает с удалением от ребра.



Фиг. 27.

Таким образом, если давление на расстоянии не очень велико, то возможность рассматриваемого движения требует отрицательного давления вблизи ребра, которое, однако, жидкость при обычных условиях выдержать не может.

Для большей определенности вопроса представим себе следующий случай. Прямая трубка (фиг. 27), длина которой велика по сравнению с ее диаметром, помещена в середине большого замкнутого сосуда, который наполнен несжимаемой жидкостью, лишенной трения. Внутри этой трубки на некотором расстоянии от концов помещается скользящий поршень P, который произвольным образом может двигаться под действием внешних сил. Толщина стенок трубки предполагается малой по сравнению с диаметром, а края ее обоих концов закругленными, так что острые углы отсутствуют. Кроме того, мы предполагаем, что к стенке сосуда в некотором месте приделана боковая трубка с поршнем Q, посредством которого можно по желанию регулировать давление внутри сосуда.

Пусть вначале вся система находится в покое. Сообщим поршню P постепенно возрастающую скорость, однако таким образом, чтобы (для простоты) движение в каждый момент времени можно было рассматривать приближенно, как установившееся. Вначале, предполагая, что на Q действует достаточно большая сила, образуется непрерывное движение вроде изображенного на фиг. 12, так как, действительно, только один этот вид движения совместим с усло-

виями задачи. По мере того как ускорение поршня возрастает, давление на Q может даже при очень умеренных скоростях P сделаться необычайно большим, и если Q может переместиться, то образуется кольцевая пустота на каждом конце трубки.

С теоретической точки зрения нелегко изучить дальнейший ход движения в подобном случае, даже тогда, когда мы имеем дело с идеальной жидкостью. В действительных же жидкостях задача видоизменяется благодаря вязкости, которая препятствует всякому скольжению жидкости в непосредственном соприкосновении с трубкой и также оказывает значительное влияние на резкие разности скоростей, которые здесь будут иметь место.

Наблюдение показывает, что движение жидкостей при тех условиях, которые предполагаются в отдельных случаях, часто совершенно отличается от типов, представленных на фиг. 11, 12, 17, 18. В случае, который мы только что описывали, жидкость, вытекающая из отверстия трубки, не будет тотчас же распространяться по всем направлениям; она образует по крайней мере до некоторого расстояния более или менее компактный поток, ограниченный со всех сторон покоящейся вблизи жидкостью. Известным примером является поток газа, смешанного с дымом, выходящий из дымовой трубы. Однако, во всех случаях подобного рода замечено, что движение непосредственно вблизи границ потока является далеко не упорядоченным [1]).

Стремление построить примеры установившихся плоских движений жидкостей без трения, приближающихся к наблюдаемым случаям, и привело Гельмгольца [2]) и Кирхгофа [2]) к исследованию теории свободных линий тока. Ясно, что мы можем мыслить, если пожелаем, пространство по ту сторону свободной границы наполненным покоящейся жидкостью постоянной плотности, так как при этом не изменится условие постоянства давления вдоль линии тока. В таком случае задачи § 76 и 77 будут давать теорию давления, оказываемого на пластинку потоком, ее обтекающим, или (что сводится к тому же) теорию сопротивления, которое испытывает пластинка, движущаяся с постоянной скоростью внутри жидкости, находящейся, наоборот, в покое.

К вопросу практического применения этой теории мы вернемся впоследствии в связи с некоторыми родственными задачами (гл. XI).

Течение в криволинейном слое.

§ 80. Теорию, развитую в § 59, 60, можно легко распространить на двухмерное движение *криволинейного* слоя жидкости, толщина которого мала по сравнению с радиусом кривизны. Эта задача была

---

[1]) Некоторые опыты показывают, что образование струй может произойти до того, как будет достигнута гельмгольцева „предельная скорость", и что внутреннее трение при этом процессе играет существенную роль. Smoluchowski, Sur la formation des veines d'efflux dans les liquides, Bull. de l'Acad de Cracovie, 1904.

[2]) См. сноску [1]) на стр. 98 и сноску [3]) на стр. 120.

исследована с точки зрения электропроводности Больцманом [1]), Кирхгофом [2]), Тёплером [3]) и др.

Как и в § 59, возьмем неподвижную точку A и переменную точку P на поверхности, которой определяется форма слоя, и обозначим через ψ поток через какую-нибудь кривую AP на этой поверхности. Тогда ψ есть функция положения точки P и, если P переместить в произвольном направлении на малый отрезок δs, то найдем, что поток через элемент δs будет равен $\frac{\partial \psi}{\partial s}\,\delta s$. Компонента скорости перпендикулярная к δs, будет тогда равна $\frac{\delta \psi}{h\,\delta s}$, где h обозначает толщину слоя, при этом мы еще не предполагаем, что эта толщина всюду одинакова.

Если движение безвихревое, то существует потенциал скоростей φ; эквипотенциальные кривые $\varphi = \text{const.}$ пересекают линию тока $\psi = \text{const.}$ под прямыми углами.

В случае постоянной толщины, к которому мы теперь переходим, удобнее написать ψ вместо $\frac{\psi}{h}$, так что компонента скорости, перпендикулярная к δs, будет выражаться одинаковым образом через $\frac{\partial \psi}{\partial s}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, где δn обозначает элемент, который проведен перпендикулярно к δs в надлежащую сторону.

Дальнейшие соотношения будут совершенно такими же, как и в плоской задаче; в частности, кривые

$$\varphi = \text{const.}, \quad \psi = \text{const.}$$

разбивают поверхность на элементарные квадраты, если каждая „const." пробегает значения всех членов арифметической прогрессии с бесконечно малой разностью, являющейся в обоих случаях одинаковой. В самом деле, в силу свойства ортогональности наши элементарные площадки суть прямоугольники; если сторонами этих прямоугольников будут δs_1, δs_2, то они же соответственно будут означать элементы линий тока и эквипотенциальных линий, и так как

$$\frac{\partial \psi}{\partial s_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial s_1},$$

то отсюда следует, что $\delta s_1 = \delta s_2$, ибо согласно построению $\delta \psi = \delta \varphi$.

Таким образом, всякая задача безвихревого движения в криволинейном слое (постоянной толщины) преобразуется с помощью конформного отображения в соответствующую плоскую задачу. Для сферической поверхности мы можем, например, наряду с бесчисленным множеством других методов, применить метод стереографической проекции. В качестве простого примера возьмем, например, случай, когда слой постоянной толщины покрывает всю поверхность шара за исключением двух круговых островов (величина и взаимное положение которых могут быть произвольные). Очевидно, единственное (плоское) безвихревое движение, которое возможно в наполненном жидкостью двусвязном пространстве, это такое, при котором жидкость циркулирует вокруг обоих островов в противоположных направлениях, причем циклические постоянные для обеих циркуляций должны быть одинаковыми. Так как окружности при проектировании переходят в окружности, то соответствующая плоская задача есть та самая, которая решена в § 64, п. 2,

---

[1]) Boltzmann, Wiener Sitzungsberichte, LII, 214 (1865). (Wissenschaft. Abh. Leipzig, 1909, I.)

[2]) Kirchhoff, Berl. Monatsber., 19 Juli, 1875 (Gesam. Abhand., I (56)).

[3]) Töpler, Pogg. Ann., CLX, 375 (1877).

т. е. линии тока будут образовывать семейство соосных окружностей с действительными пограничными точками (скажем A, B), а эквипотенциальные кривые будут составлять ортогональную систему кривых, проходящих через точки A, B. Если мы вернемся обратно к шару, то из хорошо известных теорем стереографической проекции будет следовать, что линии тока, включая контуры обоих островов, суть те окружности, плоскости которых проходят через неподвижную прямую, именно через линию пересечения касательных плоскостей в точках, соответствующих A и B; эквипотенциальные кривые будут окружности, плоскости которых проходят через эти точки [1]).

При всяком виде преобразования с помощью конформного отображения, безразлично, будет ли движение безвихревым или нет, скорость $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ преобразуется в обратном отношении к линейному элементу, и поэтому кинетические энергии тех частей жидкости, которые заполняют соответствующие поверхности, равны между собой (предполагая, конечно, что плотность и толщина в обоих случаях одинаковы). Теми же рассуждениями найдем, что циркуляция

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, ds$$

по замкнутой кривой не меняется при проектировании.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

БЕЗВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ. ТРЕХМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ.

§ 81. Среди методов решения уравнения

$$\Delta \varphi = 0 \qquad (1)$$

для трехмерного случая метод сферических функций является наиболее важным. Он особенно целесообразен в том случае, когда граничные условия отнесены к сферическим или близким к сферическим поверхностям.

За исчерпывающими исследованиями по этому методу мы должны отослать к специальным руководствам [2]). Эта теория очень обширна

---

[1]) Этот пример дан Кирхгофом в электрической интерпретации; там задача состоит в распределении потока на равномерно проводящем сферическом слое, когда электроды помещены в каких-либо двух точках A и B поверхности.

[2]) Todhunter, Functions of Laplace, Lamé and Bessel. Cambridge, 1875 г. Ferrers, Spherical Harmonics, Cambridge, 1877. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, 2-е изд., Berlin, 1878. Thomson and Tait, Natural Philosophy, 2-е изд., Cambridge, 1879, I, 171—218. Byerly, Fourier's Series and Spherical, Cylindrical and Ellipsoidal Harmonics, Boston, U. S. A., 1893. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, ч. II. ГТТИ, 1934.

Историю этой теории можно найти у Todhunter, Hystory of the Theories of Attraction etc., Cambridge, 1873, II. Также см. Wangerin, Theories der Kugelfunctionen, U. S. W. Encycl. der Math. Wiss., II (I), 1904

и рассматривается с разнообразных точек зрения, но мы здесь дадим лишь краткий очерк тех ее частей, которые наиболее важны для наших целей, не приводя формальных доказательств или ограничиваясь только их наметкой.

Легко видеть, что вследствие однородности оператора Δ относительно x, y, z каждое слагаемое функции φ, которое представляет однородный алгебраический многочлен, должно в отдельности удовлетворять уравнению (1). Каждое такое однородное решение уравнения (1) называется ***объемной сферической*** функцией соответствующей степени. Если φ_n есть объемная сферическая функция степени n и если положить

$$\varphi_n = r^n S_n, \tag{2}$$

то S_n будет функцией только направления, на котором точка (x, y, z) расположена по отношению к началу; другими словами, она будет функцией положения той точки, в которой радиус-вектор пересекает сферическую поверхность радиуса единица, описанную около начала координат. Эту функцию называют ***поверхностной сферической*** функцией степени n [1]).

Всякой объемной сферической функции φ_n степени n соответствует другая функция степени $-n-1$, получаемая делением первой на r^{2n+1}, т. е. $\varphi = r^{-2n-1}\varphi_n$ есть также решение уравнения (1). Таким образом каждой поверхностной сферической функции S_n соответствуют две объемные сферические функции $r^n S_n$ и $r^{-n-1}S_n$.

§ 82. Важнейший случай — это тот, когда n есть целое число и когда, кроме того, поверхностная сферическая функция конечна на всей сфере радиуса единица. В той форме, в которой представлена теория (для этого случая) Томсоном и Тэтом, а также и Максвеллом [2]), наиболее простое решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi_{-1} = \frac{A}{r}. \tag{3}$$

Оно представляет, как мы видели в § 56, потенциал скоростей для точечного источника в начале координат.

Так как уравнение (1) удовлетворяется и тогда, когда φ дифференцируется по x, y или z, то мы тем самым получаем новое решение

$$\varphi_{-2} = A\left(l\frac{\partial}{\partial x} + m\frac{\partial}{\partial y} + n\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\frac{1}{r}. \tag{4}$$

Это есть потенциал скоростей для диполя в начале координат, ось которого имеет направление (l, m, n); см. (3) § 56. Этот процесс

---

[1]) Симметрическое представление пространственных сферических функций с помощью декартовых координат было введено в одной очень мало оцененной работе Clebsch, Crelle, LXXI, 195 (1863). Независимо от него этот способ был принят Томсоном и Тэтом в качестве основания для своих исследований.

[2]) Maxwell, Electricity and Magnetism, гл. IX.

может быть продолжен; общий вид объемной сферической функции полученной этим путем, будет

$$\varphi_{-n-1} = A \frac{\partial^n}{\partial h_1 \, \partial h_2 \ldots \partial h_n} \frac{1}{r}, \tag{5}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial h_s} = l_s \frac{\partial}{\partial x} + m_s \frac{\partial}{\partial y} + n_s \frac{\partial}{\partial z},$$

а l_s, m_s, n_s суть произвольные направляющие косинусы.

Функцию φ_{-n-1} можно рассматривать как потенциал скоростей определенной конфигурации простых источников, расположенных вокруг начала, причем размеры этой системы малы сравнительно с r. Чтобы построить эту систему, допустим, что из всякой данной системы источников можно вывести систему высшего порядка, переместив данную систему сначала на отрезок $\frac{1}{2} h_s$ в направлении (l_s, m_s, n_s) и затем накладывая на нее ей *обратную* систему, смещенную из своего первоначального положения на $\frac{1}{2} h_s$ в противоположном направлении. Таким образом, если исходить из того, что в начале координат имеется простой источник O, то первое применение описанного процесса дает нам два источника O_+, O_- на равном расстоянии, но в противоположных направлениях от начала. Тот же прием, примененный к системе O_+, O_-, дает нам уже четыре источника O_{++}, O_{-+}, O_{+-}, O_{--} в вершинах параллелограма. Следующий шаг дает нам восемь источников в вершинах параллелепипеда и т. д. Если m' есть мощность первоначального источника O, то потенциал скоростей, соответствующий конфигурации 2^n источников, полученных таким образом, на большом расстоянии от этой системы, будет даваться уравнением (5), если

$$4\pi A = m' h_1 h_2 \ldots h_n.$$

Эта формула становится верной для всех расстояний r, если $h_1, h_2, \ldots, h_n$ неограниченно убывают, а m' неограниченно возрастает, но так, что A остается конечным.

Поверхностная сферическая функция, соответствующая объемной сферической функции (5), выражается формулой

$$S_n = A r^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \ldots \partial h_n} \frac{1}{r}, \tag{6}$$

а дополнительная объемная сферическая функция будет тогда иметь вид

$$\varphi_n = r^n S_n = r^{2n+1} \varphi_{-n-1}. \tag{7}$$

Если применить метод инверсии [1]) к указанной выше конфигурации источников, то можно показать, что объемная сферическая фуикция

[1]) Изложенный Thomson and Tait, Natural Phylosophy, § 515.

вида (7) положительной степени n может быть рассматриваема как потенциал скоростей для соответственной конфигурации 2^n простых источников, находящихся в бесконечности.

Прямые, проведенные из начала по различным направлениям (l_s, m_s, n_s), называются *осями* объемных сферических функций (5) или (7), а точки, в которых эти прямые пересекают сферу радиуса единица, называются *полюсами* поверхностной сферической функции S_n. Формула (5) содержит $2n+1$ произвольных постоянных, именно: полярные координаты n полюсов (две для каждого) и множитель A. Можно показать, что это выражение представляет самую общую поверхностную сферическую функцию, которая имеет порядком целое число n и остается конечной на сфере радиуса единица [1]).

§ 83. В оригинальной работе Лапласа [2]) уравнение

$$\Delta\varphi = 0$$

выражается сначала через сферические координаты r, θ, ω, причем

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta\cos\omega, \\ z &= r\sin\theta\sin\omega. \end{aligned}$$

Простейший путь для выполнения этого преобразования состоит в применении теоремы (2) § 36 к поверхности элемента объема $r\,\delta\theta\, r\sin\theta\,\delta\omega\,\delta r$. В этом случае разность потоков через обе перпендикулярные к r площадки будет

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\, r\,\delta\theta\, r\sin\theta\,\delta\omega\right)\delta r.$$

Аналогичным способом мы найдем для обеих перпендикулярных к меридиану ($\omega = \text{const.}$) граней

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\varphi}{r\,\partial\theta}\, r\sin\theta\,\delta\omega\,\delta r\right)\delta\theta$$

и для обеих граней, перпендикулярных к кругу широты ($\theta = \text{const.}$):

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{r\sin\theta\,\partial\omega}\, r\,\delta\theta\,\delta r\right)\delta\omega.$$

Складывая, получим

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}=0. \qquad (1)$$

Этот результат мог быть, конечно, получен из уравнения (1) § 81 обыкновенным способом замены независимых переменных.

---

[1]) Sylvester, Phil. Mag. (5), II, 291 (1876) (Mathematical Papers, Cambridge, 1904, III, 37)

[2]) Laplace, Théorie de l'attraction des sphéroides et de la figure des planètes, Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences, 1782 (Oeuvres complètes, Paris, 1878, X, 341); Mécanique Céleste, 2, гл. II.

Если мы теперь предположим, что φ представляет однородную функцию степени n и положим

$$\varphi = r^n S_n,$$

то получим из (1)

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S_n}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S_n}{\partial\omega^2}+n(n+1)S_n=0. \qquad (2)$$

Это есть общее диференциальное уравнение поверхностных сферических функций. Так как произведение $n(n+1)$ не изменяется, если заменить n через $-n-1$, то и

$$\varphi = r^{-n-1}S_n$$

также есть решение уравнения (1), что было уже установлено в § 81.

§ 84. В случае, когда имеет место симметрия относительно оси x, выражение $\frac{\partial^2 S_n}{\partial\omega^2}$ обращается в нуль. Положив $\cos\theta=\mu$, мы получим тогда

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{dS_n}{d\mu}\right\}+n(n+1)S_n=0; \qquad (1)$$

это есть диференциальное уравнение *зональных* сферических функций [1]). Так как это уравнение содержит члены только двух различных степеней μ, то его удобно интегрировать с помощью рядов. Мы получим

$$S_n = A\left\{1-\frac{n(n+1)}{1\cdot2}\mu^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\mu^4-\ldots\right\}+$$
$$+B\left\{\mu-\frac{(n-1)(n+2)}{1\cdot2\cdot3}\mu^3+\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\mu^5-\ldots\right\}. \qquad (2)$$

Встречающиеся здесь ряды принадлежат к *гипергеометрическим* рядам; если мы вместе с Гауссом [2]) напишем

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)}x^2+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots, \qquad (3)$$

то мы будем иметь

$$S_n = AF\left(-\frac{1}{2}n,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}n,\ \frac{1}{2},\ \mu^2\right)+$$
$$+B\mu F\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n,\ 1+\frac{1}{2}n,\ \frac{3}{2},\ \mu^2\right). \qquad (4)$$

Ряд (3) сходится, очевидно, абсолютно, когда x лежит между 0 и 1; когда же $x=1$, ряд будет сходиться тогда и только тогда, когда

$$\gamma-\alpha-\beta>0.$$

---

[1]) Это название было введено Томсоном и Тэтом, так как узловые линии ($S_n=0$) разбивают сферу радиуса единица на параллельные зоны.

[2]) См. примечание на стр. 132.

В этом случае мы имеем

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}, \tag{5}$$

где $\Pi(m)$ есть функция Эйлера $\Gamma(m+1)$ в обозначении Гаусса.

Поведение функции, представленной рядом (3), в том случае, когда

$$\gamma-\alpha-\beta<0$$

и когда x приближается к значению 1, может быть выяснено с помощью формулы [1])

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x). \tag{6}$$

Так как ряд в правой части последнего соотношения сходится, когда $x=1$, то мы видим, что $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ обращается в бесконечность вместе с выражением $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$ или, выражаясь точнее: для значений x, бесконечно близких к единице, будем иметь в конце концов

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}. \tag{7}$$

Для промежуточного случая

$$\gamma-\alpha-\beta=0$$

мы можем воспользоваться формулой

$$\frac{d}{dx} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x). \tag{8}$$

Эта формула вместе с уравнением (6) в нашем случае дает

$$\frac{d}{dx} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} (1-x)^{-1} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1, x) =$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\gamma} (1-x)^{-1} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1, x). \tag{9}$$

Ряд, представляемый последним множителем, сходится при $x=1$, так что $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ обращается в бесконечность как $\ln(1-x)$. Выражаясь точнее, мы будем иметь для значений x, близких к этому пределу (т. е. близких к единице)

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta, x) = \frac{\Pi(\alpha+\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)} \ln \frac{1}{1-x}. \tag{10}$$

§ 85. Что касается обоих рядов, которые входят в общее выражение (2) § 84 для зональной сферической функции, то оказывается, что первый ряд обрывается, когда n четное, а второй ряд — когда n нечетное целое число. Для других значений n оба ряда сходятся абсолютно, когда μ заключено между -1 и $+1$, на границах же при $\mu=\pm 1$ они расходятся, так как в каждом случае имеет место равенство $\gamma-\alpha-\beta=0$, и обращаются в бесконечность как $\ln(1-\mu^2)$.

Отсюда следует, что конечные ряды, соответствующие целым значениям n, суть единственные зональные сферические функции, которые остаются конечными на сфере радиуса единица. Если мы напишем члены ряда в обратном порядке, то найдем, что оба случая:

---

[1]) Forsyth, Differential Equations, 3-е изд., London, 1903, гл. VI.

для n четного и n нечётного, могут быть выражены одной и той же формулой [1])

$$P_n(\mu)=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{1\cdot2\cdot3\ldots n}\left\{\mu^n-\frac{n\cdot(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4}-\ldots\right\}, \quad (1)$$

причем постоянный множитель так подобран, чтобы при $\mu=1$ иметь $P_n(\mu)=1$ *). Эту формулу можно представить также в виде:

$$P_n(\mu)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n. \quad (2)$$

Ряд (1) может быть получен другим путем из формулы (6) § 82, которая в случае зональной сферической функции должна иметь вид

$$S_n=Ar^{n+1}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{1}{r}. \quad (3)$$

В качестве частных случаев из формулы (2) мы будем иметь

$$P_0(\mu)=1, \qquad P_1(\mu)=\mu,$$
$$P_2(\mu)=\frac{1}{2}(3\mu^2-1), \quad P_3(\mu)=\frac{1}{2}(5\mu^3-3\mu).$$

Различные авторы выражали P_n через другие функции, в которых за независимое переменное принималось не μ, а θ. Например, имеем

$$P_n(\cos\theta)=1-\frac{n(n+1)}{1^2}\sin^2\frac{1}{2}\theta+$$
$$+\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1^2\cdot2^2}\sin^4\frac{1}{2}\theta-\ldots \quad (4)$$

Это выражение может быть выведено из формулы (2) [2]) или же

---

[1]) Для четного n это соответствует случаю

$$A=(-1)^{\frac{1}{2}n}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(n-1)}{2\cdot4\ldots n}, \quad B=0,$$

в то время как для нечетного n мы имеем

$$A=0, \quad B=(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{3\cdot5\ldots n}{2\cdot4\ldots(n-1)}.$$

См. прим. на стр. 137, Heine, I, 12, 147.

*) Функции $P_1, P_2, \ldots, P_7$ табулированы Glaisher для значений μ с интервалами 0,01, Brit. Ass. Report. 1879, и таблицы напечатаны в работе Dale, Five-Figure Tables..., London, 1903. Одна таблица этих функций для каждого градуса квадранта вычислена под руководством проф. Perry и опубликована в Phil. Mag., Dec., 1891 г.

Обе таблицы перепечатаны в книге Byerlys, также в Jahnke und Emde, Functionentafeln, Leipzig, 1909. Значения первых 20 зональных сферических функций с интервалами в 5° вычислены проф. A. Lodge, Phil. Trans. A, CCIII (1904).

[2]) Murphy, Elementary Principles of the Theories of Electricity..., Cambridge, 1833, стр. 7 (Thomson and Tait, § 782).

его можно получить независимо от последней, если в уравнении (1) § 84 положить $\mu = 1-2z$ и интегрировать его при помощи рядов.

Функция $P_n(\mu)$ была впервые введена в анализ Лежандром [1] как коэфициент при h^n в разложении выражения

$$(1-2\mu h+h^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Связь такого представления с нашей теперешней точкой зрения заключается в следующем: если φ есть потенциал скоростей источника на оси x на расстоянии c от начала, то мы будем иметь, согласно определению Лежандра, для значений r, меньших чем c,

$$4\pi\varphi = (c^2-2\mu cr+r^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{c}+P_1\frac{r}{c^2}+P_2\frac{r^2}{c^3}+\dots \qquad (5)$$

Каждый член этого разложения должен в отдельности удовлетворять уравнению $\Delta\varphi = 0$, и поэтому коэфициент P_n должен быть решением уравнения (1) § 84. Так как P_n, определенное таким образом, очевидно, для каждого значения μ конечно и для $\mu = 1$ равно единице, то оно должно совпадать с выражением (1).

Для значений r, больших c, соответствующее разложение будет

$$4\pi\varphi = \frac{1}{r}+P_1\frac{c}{r^2}+P_2\frac{c^2}{r^3}+\dots \qquad (6)$$

Мы можем отсюда вывести выражения, которые впоследствии (§ 98) будут нам полезны, именно, выражения для потенциала скоростей, соответствующего диполю с напряжением единица, который лежит на оси x на расстоянии c от начала и ось которого совпадает с этой осью. Этот потенциал скоростей, очевидно, равен $\frac{\partial\varphi}{\partial c}$, где φ имеет одно из двух указанных выше выражений; таким образом искомый потенциал для $r<c$ равен

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{c^2}+2P_1\frac{r}{c^3}+3P_2\frac{r_2}{c^4}+\dots\right), \qquad (7)$$

а для $r>c$

$$\frac{1}{4\pi}\left(P_1\frac{1}{r^2}+2P_2\frac{c}{r^3}+\dots\right). \qquad (8)$$

Второе независимое решение уравнения (1) § 84, когда n есть целое число, может быть выражено в наиболее компактной форме [2]

$$Q_n(\mu) = \frac{1}{2}P_n(\mu)\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}-Z_n, \qquad (9)$$

---

[1] Legendre, Sur l'attraction des sphéroides homogènes, Mémoires des Savans Étrangers, X (1785).

[2] Это эквивалентно формуле (4) § 84 для четного n, если

$$A=0, \quad B=(-1)^{\frac{1}{2}n}\frac{2\cdot4\dots n}{1\cdot4\dots(n-1)};$$

для нечетного n, если

$$A=(-1)^{\frac{1}{2}(n+1)}\frac{2\cdot4\dots n-1}{3\cdot5\dots n}, \quad B=0.$$

См. Heine, I, 141, 147.

где

$$Z_n = \frac{2n-1}{1\cdot n} P_{n-1} + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3} + \ldots \qquad (10)$$

Эта функция $Q_n(\mu)$ иногда называется зональной сферической функцией *второго рода.*

Таким образом имеем

$$Q_0(\mu) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\mu}{1-\mu},$$

$$Q_1(\mu) = \frac{1}{2} \mu \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} - 1,$$

$$Q_2(\mu) = \frac{1}{4} (3\mu^2 - 1) \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} - \frac{3}{2} \mu,$$

$$Q_3(\mu) = \frac{1}{4} (5\mu^2 - 3\mu) \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} - \frac{5}{2} \mu^2 + \frac{2}{3}.$$

§ 86. Если отбросить ограничение, что относительно оси x имеет место симметрия, то можно функцию S_n, если только она есть конечная и однозначная функция от ω, разложить в ряд членов, соответственно содержащих $\cos s\omega$ и $\sin s\omega$. Если это разложение имеет место для всей сферы (т. е. от $\omega = 0$ до $\omega = 2\pi$), то мы можем (согласно теореме Фурье) допустить, что значения s суть целые числа. Диференциальное уравнение, которому удовлетворяет каждый такой член, есть

$$\frac{d}{d\mu} \left\{(1-\mu^2) \frac{dS_n}{d\mu}\right\} + \left\{n(n+1) - \frac{s^2}{1-\mu^2}\right\} S_n = 0. \qquad (1)$$

Если положить

$$S_n = (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s} v,$$

то уравнение (1) примет вид

$$(1-\mu^2) \frac{d^2v}{d\mu^2} - 2(s+1)\mu \frac{dv}{d\mu} + (n-s)(n+s+1) v = 0,$$

который более удобен для интегрирования рядами. Мы получим

$$S_n = A (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s} \left\{1 - \frac{(n-s)(n+s+1)}{1\cdot 2} \mu^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-s-2)(n-s)(n+s+1)(n+s+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \mu^4 - \ldots \right\} +$$
$$+ B(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s} \left\{\mu - \frac{(n-s-1)(n+s+2)}{1\cdot 2\cdot 3} \mu^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-s-3)(n-s-1)(n+s+2)(n+s+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \mu^5 - \ldots \right\}, \qquad (2)$$

причем множитель $\cos s\omega$ или $\sin s\omega$ временно опущен. Пользуясь

символом гипергеометрической функции, выражение (2) можно записать так:

$$S_n = (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s}\left\{AF\left(\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}n,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}n,\ \frac{1}{2},\ \mu^2\right)+\right.$$
$$\left.+\ B\mu F\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}n,\ 1+\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}n,\ \frac{3}{2},\ \mu^2\right)\right\}. \quad (3)$$

Эти выражения сходятся при $\mu^2<1$, но так как в каждом случае имеем

$$\gamma-\alpha-\beta=-s,$$

то ряды на границах $\mu=\pm 1$ становятся бесконечными как $(1-\mu^2)^{-s}$, если только они не обрываются [1]). Первый ряд будет конечным, когда $n-s$ есть целое четное число, а второй ряд — когда $n-s$ — нечетное целое число. Перестановкой членов этих рядов мы можем оба эти конечные решения выразить общей формулой [2])

$$P_n^s(\mu)=\frac{(2n)!}{2^n(n-s)!\,n!}(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s}\left\{\mu^{n-s}-\frac{(n-s)(n-s-1)}{2\cdot(2n-1)}\mu^{n-s-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-s)(n-s-1)(n-s-2)(n-s-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-s-4}-\ldots\right\}. \quad (4)$$

Сравнивая с (1) § 85, мы находим, что

$$P_n^s(\mu)=(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s}\frac{d^sP_n(\mu)}{d\mu^s}. \quad (5)$$

Что это есть решение уравнения (1), легко может быть проверено непосредственно.

Выражая через степени от $\sin\frac{1}{2}\theta$, мы будем иметь

$$P_n^s(\cos\theta)=\frac{(n+s)!}{2^s(n-s)!\,s!}\sin^s\theta\left\{1-\frac{(n-s)(n+s+1)}{1\cdot(s+1)}\sin^2\frac{1}{2}\theta+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-s-1)(n-s)(n+s+1)(n+s+2)}{1\cdot2\cdot(s+1)(s+2)}\sin^4\frac{1}{2}\theta-\ldots\right\}. \quad (6)$$

Это выражение соответствует формуле (4) § 85 и легко может быть выведено из нее.

Если мы произведем сводку наших результатов, то увидим, что сферическая поверхностная функция, конечная на всей сфере радиуса единица, необходимо должна быть порядка целого числа и, кроме

---

[1]) Rayleigh, Theory of Sound, London, 1877, § 338.

[2]) Существует большое разнообразие в способах обозначения этих „присоединенных функций", как их называют. Обозначение, принятое в тексте, предложено F. Neumann и принято Уиттекером и Ватсоном, стр. 119.

того, она, если обозначить через n ее порядок, может быть представлена в следующей форме:

$$S_n = A_0 P n(\mu) + \sum_{s=1}^{n} (A_s \cos s\omega + B_s \sin s\omega)\ P_n^s(\mu), \tag{7}$$

куда входят $2n+1$ произвольных постоянных. Члены формулы (7), содержащие ω, называются *тессеральными гармоническими функциями*, за исключением двух последних, которые даются формулой

$$(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}n} (A_n \cos n\omega + B_n \sin n\omega)$$

и называются *секториальными гармоническими функциями* [1]). Названия происходят от вида тех частей, на которые разделяется сфера радиуса единица узловыми линиями $S_n = 0$.

Формулу для тессеральной функции ранга s можно также вывести иным путем из общего выражения (6) § 82, заставляя совпасть из n полюсов сферической функции $n-s$ полюсов в точке сферы $\theta = 0$ и распределяя остальные s полюсов равномерно по экватору $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

Второе независимое решение уравнения (1), когда n есть целое число, может быть приведено к виду

$$S_n = (A_s \cos s\omega + B_s \sin s\omega)\, Q_n^s(\mu), \tag{8}$$

где [2])

$$Q_n^s(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s} \frac{d^s Q_n(\mu)}{d\mu^s}. \tag{9}$$

Эту функцию называют часто *тессеральной функцией второго рода*.

§ 87. Две поверхностные сферические функции S и S' называются сопряженными или ортогональными, если

$$\int\int SS'\, d\omega = 0, \tag{1}$$

где $\delta\omega$ есть элемент поверхности сферы радиуса единица, а интегрирование распространяется по всей сфере.

Можно показать, что две произвольные поверхностные сферические функции различного порядка, которые являются конечными на единичной сфере, ортогональны друг к другу, а также и то, что $2n+1$ гармонических функций произвольного порядка n зонального, тессерального и секториального типа, определенные в § 85, 86, все взаимно ортогональны. В дальнейшем мы увидим, что свойство

---

[1]) Прилагательное „сферическая" подразумевается; его часто опускают ради краткости.

[2]) Таблицы функции $Q_n(\mu)$, $Q_n^s(\mu)$ для различных значений n и s даны Bryan, Proc. Camb. Phil. Soc., VI, 297.

ортогональности имеет большое значение для практического применения этой теории.

Так как

$$\delta\widetilde{\omega} = \sin\theta\,\delta\theta\,\delta\omega = -\delta\mu\,\delta\omega,$$

то мы получаем, как частный случай вышеуказанной теоремы:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\mu)\,d\mu = 0, \tag{2}$$

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\mu)\,P_n(\mu)\,d\mu = 0, \tag{3}$$

$$\int_{-1}^{+1} P_m^s(\mu)\,P_n^s(\mu)\,d\mu = 0 \tag{4}$$

при условии, что m и n не равны.

Для $m = n$ можно показать [1]), что

$$\int_{-1}^{+1} \{P_n(\mu)\}^2\,d\mu = \frac{2}{2n+1}, \tag{5}$$

$$\int_{-1}^{+1} \{P_n^s(\mu)\}^2\,d\mu = \frac{(n+s)!}{(n-s)!}\,\frac{2}{2n+1}. \tag{6}$$

§ 88. Мы можем теперь сослаться на теорему, что всякая произвольная функция $f(\mu, \omega)$ положения точки на единичной сфере может быть разложена в ряд сферических поверхностных функций, получаемых из (7) § 86, если n будет принимать все целые значения от 0 до ∞. При вычислении коэфициентов этого разложения применяются формулы (5) и (6).

Если имеет место симметрия относительно оси, то это разложение принимает следующий вид:

$$f(\mu) = C_0 + C_1P_1(\mu) + C_2P_2(\mu) + \ldots + C_nP_n(\mu) + \ldots \tag{7}$$

Умножая обе части этого уравнения на $P_n(\mu)\,d\mu$ и интегрируя в пределах между -1 и $+1$, мы найдем

$$C_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(\mu)\,d\mu \tag{8}$$

и, вообще,

$$C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(\mu)\,P_n(\mu)\,d\mu. \tag{9}$$

---

[1]) Ferrers, стр. 86; Уиттекер и Ватсон, стр. 94, 120.

Математическое доказательство сформулированной выше теоремы можно найти в специальных учебниках [1]); физические основания для допущения возможности такого рода и других подобных разложений будут указываться попутно в связи с различными задачами.

§ 89. Решение уравнения $\Delta\varphi = 0$ можно получить также помощью обычных методов решения линейных уравнений с постоянными коэфициентами [2]). Таким способом мы можем убедиться, что уравнению удовлетворяет функция

$$\varphi = e^{\alpha x+\beta y+\gamma z},$$

или в более общей форме

$$\varphi = f(\alpha x+\beta y+\gamma z), \tag{1}$$

при условии, что

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 0. \tag{2}$$

Например, мы можем положить

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 1,\\ \beta &= i\cos\tau,\\ \gamma &= i\sin\tau, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

или также

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 1,\\ \beta &= i\operatorname{ch} u,\\ \gamma &= \operatorname{sh} u. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Можно показать [3]), что самое общее решение может быть получено сложением решений вида (1).

Используя предположение (3) и вводя цилиндрические координаты x, $\tilde{\omega}$, ω, причем

$$y = \tilde{\omega}\cos\omega, \quad z = \tilde{\omega}\sin\omega, \tag{5}$$

мы можем составить решение, симметричное относительно оси x, если положим

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\{x+i\tilde{\omega}\cos(\vartheta-\omega)\}\,d\vartheta.$$

Где помещается начало отсчета угла ϑ — безразлично, так как интегрирование распространяется на всю окружность; поэтому формула может быть написана следующим образом [4]):

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+i\tilde{\omega}\cos\vartheta)\,d\vartheta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+i\tilde{\omega}\cos\vartheta)\,d\vartheta. \tag{6}$$

---

[1]) Относительно новых исследований по этому вопросу см. Wangerin, примечание на стр. 137.

[2]) Forsyth, Differential Equations, стр. 444.

[3]) Whittaker, Month. Not. R. Ast. Soc., LXII (1902).

[4]) Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, гл. 18.

Этот результат замечателен тем, что он выражает значения φ в симметричных точках относительно оси x через значения $f(x)$, которые φ принимает в точках на самой оси. С помощью теоремы § 38 можно показать, что вид φ в подобном случае вполне определяется значениями φ на некотором произвольном конечном отрезке оси x [1]).

Как частные случаи выражения (6) получаем функции

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+i\widetilde{\omega}\cos\vartheta)^n\,d\vartheta,\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+i\widetilde{\omega}\cos\vartheta)^{-n-1}\,d\vartheta,$$

где n есть целое число. Так как эти выражения суть объемные сферические функции, которые остаются конечными на шаре радиуса единица, и так как они для $\widetilde{\omega}=0$ сводятся к r^n и r^{-n-1}, то они должны быть тождественны с $P_n(\mu)r^n$ и соответственно с $P_n(\mu)r^{-n-1}$. Мы получаем таким образом формулы

$$P_n(\mu)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{\mu+i\sqrt{1-\mu^2}\cos\vartheta\}^n\,d\vartheta, \tag{7}$$

$$P_n(\mu)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\vartheta}{\{\mu+i\sqrt{1-\mu^2}\cos\vartheta\}^{n+1}}, \tag{8}$$

которые первоначально получены были Лапласом [2]) и Якоби [3]).

§ 90. Для первого применения изложенной выше теории предположим, что на поверхность шаровидной первоначально покоящейся жидкой массы действуют произвольно распределенные импульсивные давления. Это эквивалентно заданию произвольных значений φ на поверхности. Значение φ внутри тем самым вполне будет определено согласно § 40. Чтобы его найти, предположим, что данные на поверхности значения представлены согласно теореме, изложенной в § 88 в виде ряда по сферическим функциям

$$\varphi=S_0+S_1+S_2+\ldots+S_n+\ldots, \tag{1}$$

где порядок n есть целое число.

Искомое значение будет тогда иметь вид

$$\varphi=S_0+\frac{r}{a}S_1+\frac{r^2}{a^2}S_2+\ldots+\frac{r^n}{a^n}S_n+\ldots, \tag{2}$$

ибо это выражение удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi=0$ и принимает заданный вид (1), когда $r=a$, где a есть радиус шара.

---

[1]) Thomson and Tait, § 498.

[2]) Laplace, Mécanique céleste, кн. 11, гл. II.

[3]) Jacobi, Crelle, XXVI (1843) (Gesammelte Werke, Berlin, 1881, VI, 148).

Соответствующее решение для случая, когда значения φ заданы на поверхности сферической полости, находящейся в безграничной первоначально покоящейся жидкости, очевидно, будет

$$\varphi = \frac{a}{r} S_0 + \frac{a^2}{r^2} S_1 + \frac{a^3}{r^3} S_2 + \ldots + \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} S_n + \ldots \qquad (3)$$

Комбинируя оба эти результата, получим случай безграничной жидкой массы, связность которой нарушена бесконечно тонким двойным слоем сферической формы, внутри которого действует произвольное импульсивное давление. Значения (2) и (3) для функции φ на этом слое, очевидно, непрерывны. Но значения нормальных компонент скорости будут здесь разрывны; именно для внутренней жидкости мы будем иметь

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sum n \frac{S_n}{a},$$

а для внешней

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\sum (n+1) \frac{S_n}{a}.$$

Движение как внутри, так и вне сферического слоя может таким образом рассматриваться как образованное распределением по сфере простых источников с поверхностной плотностью

$$\sum (2n+1) \frac{S_n}{a}; \qquad (4)$$

см. § 58.

§ 91. Предположим, что вместо импульсивных давлений на поверхности шара заданы нормальные компоненты скорости; мы имеем, следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots, \qquad (1)$$

где обязательно отсутствует член нулевого порядка, так как вследствие постоянства объема заключенной массы имеет место равенство

$$\int\int \frac{\partial \varphi}{\partial r} \, d\tilde{\omega} = 0. \qquad (2)$$

Функция φ для внутренней задачи будет иметь вид

$$\varphi = A_1 r S_1 + A_2 r^2 S_2 + \ldots + A_n r^n S_n + \ldots, \qquad (3)$$

ибо это выражение конечно и непрерывно, удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = 0$, и постоянные могут быть определены таким образом, что $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ принимает заданные на поверхности значения (1), а именно, мы будем иметь

$$nA_n a^{n-1} = 1.$$

Искомое решение таким образом будет

$$\varphi = a \sum \frac{1}{n} \frac{r^n}{a^n} S_n. \tag{4}$$

Соответствующее решение для внешней задачи находится тем же самым путем, и оно будет иметь вид

$$\varphi = -a \sum \frac{1}{n+1} \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} S_n. \tag{5}$$

Оба решения, взятые вместе, дают движение, которое образуется в безграничной массе жидкости, разделенной на две части тонкой сферической оболочкой, если каждой точке оболочки сообщить заданную нормальную компоненту скорости, удовлетворяющую условию (2).

При переходе через оболочку значение φ делает скачок от $a \sum \frac{S_n}{n}$ к $-a \sum \frac{S_n}{n+1}$, так что *тангенциальная* компонента скорости здесь будет разрывной. Движение как внутреннее, так и внешнее обусловлено двойным слоем (слоем дублетов) с плотностью

$$-a \sum \frac{2n+1}{n(n+1)} S_n; \tag{6}$$

см. § 58.

Кинетическая энергия жидкости, находящейся внутри шара, подсчитанная по формуле (4) § 44, будет выражаться в виде

$$2T = \varrho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = \varrho a^3 \sum \frac{1}{n} \iint S_n^2 d\tilde{\omega}, \tag{7}$$

ибо интегралы, содержащие произведения сферических поверхностных функций различных порядков, вследствие ортогональности (§ 87) выпадают. Для жидкости вне шара будем иметь

$$2T = -\varrho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = \varrho a^3 \sum \frac{1}{n+1} \iint S_n^2 d\tilde{\omega}. \tag{8}$$

§ 91a. Сферические функции нулевого порядка прямо приводят к рассмотрению следующих двух задач, математически тесно связанных между собой: задачи сжатия сферического пузыря в воде и задачи расширения сферической полости, вызываемого давлением заключенного внутри нее газа, как это имеет место в случае подводных мин.

В первой задаче[1]) имеем, если R_0 — первоначальный радиус пузыря а R — радиус в момент t, то

$$\varphi = \frac{R^2 \dot{R}}{r}, \tag{1}$$

[1]) Besant, Hydrostatics and Hydrodynamics, Cambridge, 1859; Rayleigh, Phil. Mag., XXXIV, 94 (1917) (Papers, VI, 504).

так как это дает $-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\dot{R}$ для $r=R$. Если мы положим $\Omega=0$ в уравнении (5) § 22, то получим

$$\frac{p-p_0}{\varrho}=\frac{R^2\ddot{R}+2R\dot{R}^2}{r}-\frac{R^4\dot{R}^2}{2r^4}, \tag{2}$$

где p_0 обозначает давление для $r=\infty$. Отсюда, полагая $r=R$ и пренебрегая внутренним давлением, мы получим уравнение

$$R\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2=-\frac{p_0}{\varrho}, \tag{3}$$

интеграл которого есть

$$R^3\dot{R}^2=\frac{2}{3}\frac{p_0}{\varrho}(R_0^3-R^3). \tag{4}$$

Это уравнение нельзя дальше легко интегрировать, однако, можно найти момент (t) полного исчезновения пузыря. Именно, если мы положим $R=R_0x^{\frac{1}{3}}$, то получим

$$t_1=R_0\sqrt{\frac{\varrho}{6p_0}}\int_0^1 x^{-\frac{1}{6}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx=R_0\sqrt{\frac{\varrho}{6p_0}}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}=$$

$$=0{,}915\,R_0\sqrt{\frac{\varrho}{p_0}}. \tag{5}$$

Если $\varrho=1$, $R_0=1$ *см* и $p_0=10^6$ CGS (1 атмосфера), то будем иметь $t_1=0{,}000915$ секунды.

Кинетическая энергия в любой момент времени будет равна

$$2\pi\varrho R^3\dot{R}^2=\frac{4}{3}\pi p_0(R_0^3-R^3), \tag{6}$$

что в действительности легко определить, рассматривая работу, совершаемую достаточно большой частью жидкости против окружающей ее внешней части. При полном сжатии потерянная энергия или, лучше, энергия, превращенная в другие формы, будет равна $\frac{4}{3}\pi p_0R_0^3$. Для $R_0=1$ и $p_0=10^6$ это составляет $4{,}18\cdot10^6$ эргов или приблизительно 0,0426 *кгм*.

Уравнения (1) и (2) применимы также и в задаче расширения полости, но при этом давлением p_0 на большом расстоянии можно пренебречь. Если p_1 обозначает начальное давление в полости, когда $R=R_0$, а также $R=0$, то, если принимать адиабатический закон расширения, внутреннее давление в момент t будет даваться формулой

$$\frac{p}{p_1}=\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}. \tag{7}$$

Отсюда следует

$$R\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2=c_0^2\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}, \tag{8}$$

где

$$c_0=\sqrt{\frac{p_1}{\varrho}}. \tag{9}$$

Эта величина c_0 имеет размерность скорости и определяет быстроту, с которой совершается изменение. Интегралом уравнения (8) будет

$$\frac{\dot{R}^2}{c_0^2} = \frac{2}{3(\gamma-1)}\left\{\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}\right\}. \tag{10}$$

Из уравнения (8) видно, что начальное ускоренне ($\ddot{R}$) в направлении радиуса равно $\frac{c_0^2}{R_0}$ и при этом безразличио, по какому закону пронсходит расширенне.

Из (8) и (10) мы находим, что максимум $\dot{R}$ будет иметь место при

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^{3\gamma-3} = \gamma \tag{11}$$

и что его значение получается из

$$\frac{\dot{R}^2}{c_0^2} = \frac{2}{3\gamma^{\gamma/(\gamma-1)}}. \tag{12}$$

Решение нелегко доводится до конца, за исключением частиого случая $\gamma = \frac{4}{3}$. Положив

$$\frac{R}{R_0} = 1+z, \tag{13}$$

мы получим

$$(1+z)^2\frac{dz}{dt} = \frac{c_0}{R}\sqrt{2z}, \tag{14}$$

откуда следует

$$\frac{c_0 t}{R_0} = \sqrt{2z}\left(1+\frac{2}{3}z+\frac{1}{5}z^2\right). \tag{15}$$

В качестве конкретного примера предположим, что первоначальный диаметр полостн равен 1 метру н начальное давление $p_1 = 1000$ атмосферам, что дает $c_0 = 3{,}16 \cdot 10^4$ *см/сек*. Мы найдем тогда, что радиус полости удваивается в $^1/_{350}$ секунды и увеличивается в 5 раз приблизительно в $^1/_{30}$ секунды. Начальное ускорение раднуса равно $2{,}00 \cdot 10^7$ *см/сек*^{2}; это показывает, что пренебрежение силой тяжести на первых стадиях движения вполне оправдывается. Максимум $\dot{R}$ нмеет место при

$$\frac{R}{R_0} = \frac{4}{3}, \quad t = 0{,}0016 \text{ сек.}$$

и равен приблизительно 145 *м/сек* или приблизительно $^1/_{10}$ скорости звука в воде. При начальных давлениях порядка 10 000 атмосфер и больше мы получим скорости, сравнимые со скоростью звука, причем влиянием сжимаемости в дальнейшем не следует пренебрегать [1]).

§ 92. Сферическая функция первого порядка встречается в задаче о движении твердого шара в безграничной покоящейся в бесконечности жидкости. Если мы возьмем начало координат в центре шара, а ось x по направлению движения, то нормальная компонента ско-

[1]) Это рассуждение заимствовано из работы L a m b, The early stages of a submar ne explosion, Phil. Mag., XLV, 257 (1923).

рости на поверхности выразится так:

$$\frac{Ux}{r} = U\cos\theta,$$

где U есть скорость центра. Поэтому условия для определения φ будут следующие: 1) всюду должно быть $\Delta\varphi = 0$, 2) пространственные производные от φ должны в бесконечности обращаться в нуль, 3) на поверхности шара, т. е. для $r = a$, мы должны иметь

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r} = U\cos\theta. \tag{1}$$

Вид уравнения (1) как раз указывает на зональную сферическую функцию первого порядка; поэтому мы принимаем

$$\varphi = A\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = -A\frac{\cos\theta}{r^2}.$$

Из условия (1) получим

$$-\frac{2A}{a^3} = U,$$

и для искомого решения будем иметь [1])

$$\varphi = \frac{1}{2}U\frac{a^3}{r^2}\cos\theta. \tag{2}$$

Сравнивая с формулой (4) § 56, мы видим, что движение жидкости происходит таким образом, как если бы оно образовалось от дублета напряжения $2\pi U a^3$, находящегося в центре шара. Относительно вида линий тока см. фиг. 28.

Энергию движения жидкости мы получим из выражения

$$\begin{aligned} 2T &= -\varrho\iint\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,dS = \\ &= \frac{1}{2}\varrho a U^2\int_0^\pi \cos^2\theta\cdot 2\pi a\sin\theta\cdot a\,d\theta = \\ &= \frac{2}{3}\pi\varrho\, a^3U^2 = M'U^2, \end{aligned} \tag{3}$$

где $M' = \frac{2}{3}\pi\varrho\, a^3$. Мы получаем точно, как и в § 68, что эффект давлений жидкости эквивалентен только увеличению инертной массы твердого тела, причем это увеличение равно теперь *половине* массы вытесненной жидкости [2]).

---

[1]) Stokes, On some cases of Fluid Motion, Camb. Trans., VIII (1843) (Papers, I, 17); Dirichlet, Über die Bewegung eines festen Körpers in einem incompressibeln flüssigen Medium, Berl. Monatsber., 1852 (Werke, Berlin, 1889—1897, II, 115).

[2]) Stokes, см. сноску [1]). Этот результат был другим путем получен Грином при рассмотрении бесконечно малого движения. Green, On the Vibration of Pendulums in Fluid-Media, Edin. Trans, 1833 (Papers, стр. 315).

[Обычно это приращение инертной массы тела называют „присоединенной" массой. *Прим. ред.*].

Если шар движется прямолинейно и на жидкость не действуют никакие внешние силы, то результирующее давление равно, следовательно, силе

$$-M'\frac{dU}{dt} \tag{4}$$

в направлении движения; оно исчезает, когда U постоянна. Отсюда следует: если шару сообщить движение и затем предоставить самому себе, то он будет двигаться в дальнейшем прямолинейно и с постоянной скоростью.

Поведение твердого тела, движущегося в действительной жидкости, конечно, совершенно иное; чтобы сохранить движение, необходимо непрерывно прикладывать силу, в противном случае тело постепенно пришло бы к покою. Необходимо, однако, при таком сравнении помнить, что в идеальной жидкости не имеет места рассеяние энергии и что, кроме того, когда жидкость несжимаема, твердые тела не могут терять свою кинетическую энергию через передачу ее жидкости, ибо, как мы видели в гл. III, движение жидкости определяется вполне движением твердого тела и поэтому одновременно они и прекращаются.

Если мы хотим изложенный выше результат проверить непосредственным вычислением с помощью формулы

$$\frac{p}{\varrho}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2}q^2+F(t), \tag{5}$$

то должны вспомнить о том, что начало координат находится в движении и поэтому значения r и θ для определенной точки пространства растут соответственно со скоростью $-U\cos\theta$, $\frac{U\sin\theta}{r}$, или же мы должны воспользоваться (6) § 20. В том и другом случае мы найдем

$$\frac{p}{\varrho}=\frac{1}{2}a\frac{dU}{dt}\cos\theta+\frac{9}{16}U^2\cos 2\theta-\frac{1}{16}U^2+F(t). \tag{6}$$

Три последних члена правой части этого уравнеиия будут одинаковы для элементов поверхности в положении θ и $\pi-\theta$; поэтому при постоянном U давления на различные элементы передней полусферы уравновешиваются одинаковыми давлениями на соответствующие элементы задней полусферы. Если же движение шара ускоряется, тогда образуется излишек давления на передней и уменьшенне давления на задней полусфере. Обратное происходит, когда движение замедляется. Результирующее давление в направлении движения выражается, как и раньше, формулой

$$-\int_0^{\pi}2\pi a\sin\theta\cdot a\,d\theta\cdot p\cos\theta=-\frac{2}{3}\pi\varrho\,a^3\frac{dU}{dt}.$$

§ 93. Мы можем применить этот же метод, чтобы найти движение, образующееся в жидкости, заключенной между твердым шаром и концентрической сферической оболочкой, когда шар движется с данной скоростью U.

Взяв начало координат в центре шара, мы видим, что необходимо применить сферические функции как положительной, так и отрицательной степени, так как наполненное жидкостью пространство ограничено снаружи и изнутри; действительно, необходимо удовлетворить двум граничиым условиям:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=U\cos\theta \quad \text{для } r=a \ (a-\text{радиус шара})$$

и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0 \qquad \text{для } r=b \ (b-\text{радиус внешней оболочки}),$$

причем ось x совпадает, как и выше, с направлением движения.

Мы, следовательно, полагаем

$$\varphi=\left(Ar+\frac{B}{r^2}\right)\cos\theta. \tag{1}$$

Приведенные выше условня дают тогда

$$A-\frac{2B}{a^3}=-U, \quad A-\frac{2B}{b^3}=0,$$

а отсюда

$$A=\frac{a^3}{b^3-a^3}U, \quad B=\frac{1}{2}\frac{a^3b^3}{b^3-a^3}U. \tag{2}$$

Кинетическую энергию жидкости мы получим из

$$2T=-\varrho\iint\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,dS,$$

где интегрнрование распространяется по внутренней сферической поверхности, так как на внешней $\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0$. Мы найдем

$$2T=\frac{2}{3}\pi\frac{b^3+2a^3}{b^3-a^3}\varrho a^3U^2. \tag{3}$$

Оказывается, что эффективное приращение инертной массы равно теперь [1])

$$\frac{2}{3}\pi\frac{b^3+2a^3}{b^3-a^3}\varrho a^3. \tag{4}$$

Если b уменьшается от ∞ до a, то это выражение непрерывно возрастает от $\frac{2}{3}\pi\varrho a^3$ до ∞ в согласии с теоремой о миннмуме Кельвиина (§ 45). Другнми словами, введение в задачу § 92 твердой сферической разделяющей стенки действует для всякой данной скорости шара как вынужденное увеличение кинетической эиергии и, следовательно, по существу, как увеличение инерции системы.

§ 94. Во всех случаях, в которых движение жидкости имеет место в плоскостях, проходящих через общую прямую, и для всех плоскостей этого пучка одинаково, существует функция тока, которая в некотором отношении аналогична функции тока плоского движения, рассмотренной в прошлой главе. Если взять в некоторой плоскости пучка две точки A и P, из которых A неподвижна,

[1]) Stokes, см. сноску на стр. 155.

а P переменна, и затем рассматривать кольцевую поверхность, которая образуется отрезком AP при вращении его около оси симметрии, то поток через эту поверхность, очевидно, есть функция положения P. Обозначим эту функцию через $2\pi\psi$ и совместим ось x с осью симметрии, тогда мы можем сказать, что ψ есть функция от x и $\widetilde{\omega}$, где x есть абсцисса точки P, а $\widetilde{\omega}=(y^2+z^2)^{1/2}$ есть ее расстояние от оси x. Кривые $\psi=\text{const.}$ будут, очевидно, линиями тока на рассматриваемой плоскости.

Если P' есть точка, бесконечно близкая к P, лежащая в той же самой меридиональной плоскости, то из вышеизложенного определения следует, что компонента скорости, перпендикулярная к PP', будет равна

$$\frac{2\pi\delta\psi}{2\pi\widetilde{\omega}\cdot PP'};$$

отсюда следует, беря PP' сначала параллельно $\widetilde{\omega}$, а затем параллельно x,

$$u=-\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\widetilde{\omega}}, \qquad v=\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{1}$$

где u и v суть компоненты скорости жидкости соответственно в направлении x и $\widetilde{\omega}$ и где знак устанавливается так же, как и в § 59.

Эти кинематические соотношения можно также получить из формы, которую принимает уравнение неразрывности при рассматриваемых условиях. Если мы выразим, что полный поток через кольцеобразную область, образованную вращением прямоугольного элемента поверхности $\delta x\,\delta\widetilde{\omega}$ вокруг оси, равен нулю, то получим

$$\frac{\partial}{\partial x}(u\cdot 2\pi\widetilde{\omega}\,\delta\widetilde{\omega})\,\delta x+\frac{\partial}{\partial\widetilde{\omega}}(v\cdot 2\pi\widetilde{\omega}\,\delta x)\,\delta\widetilde{\omega}=0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}(\widetilde{\omega}u)+\frac{\partial}{\partial\widetilde{\omega}}(\widetilde{\omega}v)=0, \tag{2}$$

а это уравнение показывает, что

$$\widetilde{\omega}v\,dx-\widetilde{\omega}u\,d\widetilde{\omega}$$

есть полный диференциал. Обозначая его через $d\psi$, мы получим соотношения (1)[1]).

До сих пор мы не делали предположения, что движение свободно от вихрей; условие того, что движение невихревое, имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial\widetilde{\omega}}=0,$$

---

[1]) Функция тока в случае симметрии вокруг оси введена в этом виде Stokes, On the Steady Motion of Incompressible Fluids, Camb. Trans., VII (1842) (Papers, I, 1).

Математическая теория разработана очень обстоятельно Sampson, On Stokes'Current-Function, Phil. Trans. A, CLXXXII (1891).

а это приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\widetilde{\omega}^2}-\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\varphi}{\partial\widetilde{\omega}}=0. \tag{3}$$

Диференциальное уравнение для φ мы получим, положив в *уравнении* (2)

$$u=-\frac{\partial\varphi}{\partial x};\quad v=-\frac{\partial\varphi}{\partial\widetilde{\omega}};$$

оно будет иметь вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\widetilde{\omega}^2}+\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\varphi}{\partial\widetilde{\omega}}=0. \tag{4}$$

Отсюда видно, что функции φ и ψ нельзя переставлять (как это имело место в § 62); они даже имеют различные размерности.

Кинетическая энергия жидкости внутри области, ограниченной произвольной поверхностью вращения около оси, будет вычисляться по формуле

$$2T=-\varrho\iint\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS=\varrho\int\varphi\frac{\partial\psi}{\widetilde{\omega}\partial s}2\pi\widetilde{\omega}ds=2\pi\varrho\int\varphi\,d\psi, \tag{5}$$

где δs есть элемент того сечения, по которому меридиональная плоскость пересекается с ограничивающей поверхностью, и интегрирование проводится в соответствующих направлениях по различным частям этого сечения; ср. § 61 (2).

§ 95. В случае наличия точечного источника в начале координат, потенциал скоростей которого есть

$$\varphi=\frac{1}{r}, \tag{1}$$

поток через произвольную замкнутую кривую численно равен телесному углу, под которым кривая видна из начала координат. Для круга с осью Ox, радиус которого виден из O под углом θ, имеем, следовательно, принимая во внимание знак,

$$2\pi\psi=-2\pi(1-\cos\theta).$$

Если мы опустим постоянный член, то будем иметь

$$\psi=\frac{x}{r}=\frac{\partial r}{\partial x}. \tag{2}$$

Решения, соответствующие любому числу простых источников, помещенных в различных точках оси x, могут быть, очевидно, налагаемы друг на друга для двойного источника (дублета), когда

$$\varphi=-\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}=\frac{\cos\theta}{r^2}; \tag{3}$$

будем иметь, следовательно,

$$\psi=-\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=-\frac{\widetilde{\omega}^2}{r^3}=-\frac{\sin^2\theta}{r}. \tag{4}$$

И вообще: простой объемной сферической функции степени $-n-1$, т. е. функции

$$\varphi = A\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{1}{r}, \tag{5}$$

соответствует функция [1])

$$\psi = A\frac{\partial^{n+1} r}{\partial x^{n+1}}. \tag{6}$$

Более общая формула, применимая к сферическим функциям произвольной степени, безразлично целой или нет, получается следующим образом. Применяя полярные координаты r и θ и совмещая линейный элемент PP' § 94 сначала с $r\,\delta\theta$, а затем с δr, находим компоненты скорости в меридиональной плоскости вдоль r и перпендикулярно к r

$$-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{r\,\partial\theta}, \quad \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{7}$$

Таким образом, в случае безвихревого движения мы будем иметь

$$\frac{\partial\psi}{\sin\theta\,\partial\theta} = r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = -\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}. \tag{8}$$

Если

$$\varphi = r^n S_n, \tag{9}$$

где S_n есть зональная сферическая функция n-го порядка, то, положив $\mu = \cos\theta$, мы получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mu} = -nr^{n+1}S_n, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = r^n(1-\mu^2)\frac{dS_n}{d\mu}.$$

Из последнего уравнения получим функцию тока

$$\psi = \frac{1}{n+1}r^{n+1}(1-\mu^2)\frac{dS_n}{d\mu}, \tag{10}$$

которая необходимо должна удовлетворять и первому соотношению; это легко можно проверить с помощью (1) § 84.

Таким образом в случае зональной сферической функции P_n мы будем иметь соответствующие выражения:

$$\varphi = r^n P_n(\mu), \qquad \psi = \frac{1}{n+1}r^{n+1}(1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu} \tag{11}$$

и

$$\varphi = r^{-n-1}P_n(\mu), \quad \psi = -\frac{1}{n}r^{-n}(1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu}, \tag{12}$$

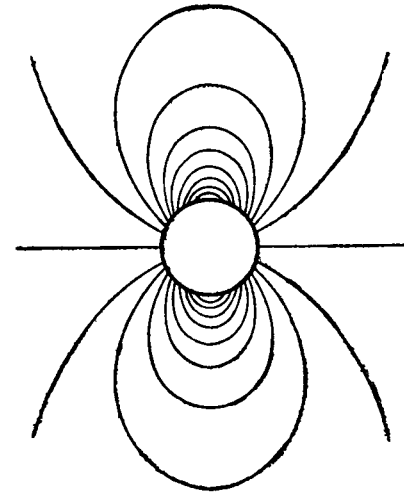
причем выражения (12) должны быть эквивалентны (5) и (6).

[1]) Stefan, Über die Kraftlinien eines um eine Axe symmetrischen Feldes, Wied. Ann., XVII (1882).

Те же самые соотношения, конечно, имеют место и для зональных сферических функций второго рода Q_n.

§ 96. В § 92 мы видели, что движение, вызываемое твердым шаром в неограниченной жидкости, можно рассматривать как образованное наличием дублета в центре шара. Сравнивая данные там формулы с (4) § 95, мы видим, что функция тока, соответствующая движению шара, будет равна

$$\psi = -\frac{1}{2} U \frac{a^3}{r} \sin^2\theta. \qquad (1)$$



Фиг. 28.

Вид линий тока, проведенных для нескольких равноотстоящих значений ψ, изображен на фиг. 28. Линии же тока по отношению к шару [1]) представлены в конце главы VII.

Функция тока, соответствующая двум дублетам, оси которых направлены вдоль оси x в противоположные стороны, имеет вид

$$\psi = \frac{A\omega^2}{r_1^3} - \frac{B\omega^2}{r_2^3}, \qquad (2)$$

где r_1 и r_2 означают расстояния произвольной точки от положений P_1, P_2 обоих дублетов. На поверхности тока $\psi = 0$ имеем

$$\frac{r_1}{r_2} = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/3},$$

т. е. эта поверхность есть сфера, для которой P_1 и P_2 суть обратные (инверсионные) точки. Если O есть центр этой сферы и a ее радиус, то находим

$$\frac{A}{B} = \frac{(OP_1)^3}{a^3} = \frac{a^3}{(OP_2)^3}. \qquad (3)$$

Эта сфера может быть принята за неподвижную границу жидкости с обеих сторон, и мы получаем таким образом движение, образованное дублетом (или движением бесконечно малой сферы вдоль Ox) при наличии твердой сферической границы. Возмущающее влияние этой сферы на линии тока таково, как если бы оно происходило от дублета противоположного знака, помещенного в точке инверсии положения первого дублета, причем отношение мощности обоих дублетов дано формулой (3) [2]). Этот воображаемый дублет можно назвать *зеркальным* изображением первоначального.

Существует также простой способ построения зеркального изображения точечного источника относительно неподвижной сферы. Изображение источника мощности m в точке P будет составляться из источника мощности $m\frac{OQ}{a}$, помещенного в точке инверсии Q, и стоков, непрерывно распределен-

[1]) То-есть линии тока относительного движения жидкости. *Прим. ред.*

[2]) Этот результат получен Stokes, On the Resistance of a Fluid to two Oscillating Spheres, Brit. Ass. Report, 1847 (Papers, I, 230).

ных с постоянной линейной плотностью $-\frac{m}{a}$ вдоль отрезка, соединяющего P с центром O [1]).

Это можно получить с помощью интеграции из предшествующего результата, но будет проще проверить это непосредственно. Из формулы (2) § 95 как раз получается, что функция тока, соответствующая линии источников с плотностью m, будет равна

$$\psi = m(r - r'), \tag{4}$$

где r, r' суть расстояния двух концов линии от рассматриваемой точки. А тогда указанное выше расположение источников в какой-либо точке R на самой сфере будет давать

$$\psi = -m\cos RPO - m\frac{OQ}{a}\cos OQR - \frac{m}{a}(OR - QR). \tag{5}$$

Так как

$$QR = OR\cos ORQ + OQ\cos OQR \text{ и } RPO = ORQ,$$

то это равенство приводится к $\psi = -m$, т. е. ψ будет постоянной на сфере.

Для вычисления силы, действующей на сферу, обратимся к зональным сферическим функциям. Если возьмем за начало центр O, то потенциал скоростей первоначального источника вблизи самой сферы представится в виде

$$\frac{\varphi}{m} = \frac{1}{c} + \frac{r\cos\theta}{c^2} + \frac{r^2(3\cos^2\theta - 1)}{2c^3} + \dots \tag{6}$$

Движение, обусловленное присутствием сферы, будет тогда даваться потенциалом скоростей вида

$$\frac{\varphi'}{m} = \frac{a^3\cos\theta}{2c^2r^2} + \frac{a^5(3\cos^2\theta - 1)}{3c^3r^3} + \dots, \tag{7}$$

так как это дает $\frac{\partial}{\partial r}(\varphi + \varphi') = 0$ для $r = a$. В таком случае скорость на поверхности будет

$$q = -\frac{\partial}{a\,\partial\theta}(\varphi + \varphi') = \frac{3m}{2c^2}\sin\theta + \frac{5ma}{3c^3}\sin\theta\cos\theta + \dots \tag{8}$$

Для получения приближенного результата мы можем в разложении (8) ограничиться выписанными членами. Тогда результирующая сила, направленная к P, будет равна

$$X = -\int_0^\pi p\cos\theta\, 2\pi a^2\sin\theta\, d\theta = \pi\rho a^2\int_0^\pi q^2\sin\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{4\pi\rho a^3 m^2}{c^5}; \tag{9}$$

Если f будет ускорением в O в случае, когда сфера удалена, то так как $f = \frac{2m^2}{c^5}$, будем иметь

$$X = 2\pi\rho a^3 f. \tag{10}$$ [2])

§ 97. Ранкин [3]) применяет метод, подобный методу § 71, для того, чтобы определить формы тел вращения, которые при движе-

---

[1]) Hicks, см. ниже сноску на стр. 168; см. фигуру 10 на стр. 94.

[2]) Проф. G. I. Taylor, Aeronautical Research Committee, R. M., 1166 (1928);

[3]) Rankine, On the Mathematical Theory of Stream Lines, especially those with Four Foci and upwards, Phil. Trans., 1871, стр. 267 (эта работа не содержится в собрании, указанном на стр. 85).

нии в направлении своей оси порождают в окружающей жидкости заданный вид симметричного относительно оси безвихревого движения.

Если обозначить через U скорость твердого тела, а через δs элемент его меридиана, то нормальная компонента скорости для произвольной точки поверхности будет равна $U\frac{\partial\widetilde{\omega}}{\partial s}$, а та же компонента скорости соприкасающейся частицы жидкости равна $\frac{\partial\psi}{\widetilde{\omega}\partial s}$. Приравнивая эти значения и интегрируя вдоль меридиана, получим

$$\psi = -\frac{1}{2}U\widetilde{\omega}^2 + \text{const.} \tag{1}$$

Вставляя в это уравнение значение ψ, соответствующее какому-нибудь распределению источников вдоль оси симметрии, мы получим уравнение семейства линий тока. Если сумма мощностей источников равна нулю, то одна из этих линий тока будет определять профиль конечного твердого тела вращения, обтекание которого и будет иметь место.

Этим путем мы легко можем проверить решение, полученное для шара; именно, полагая

$$\psi = \frac{A\widetilde{\omega}^2}{r^3}, \tag{2}$$

мы найдем, что выражение (1) для $r = a$ будет удовлетворяться при предположении, что

$$A = -\frac{1}{2}Ua^3, \tag{3}$$

что согласуется с выражением (1) § 96.

Оказывается, что с помощью непрерывного распределения источников и стоков вдоль оси можно получить такие формы, которые эмпирически признаны выгодными в качестве профилей дирижаблей. В таких случаях можно вычислить давление жидкости и результаты сравнить с опытом.

§ 98. Движение жидкости, ограниченной *двумя* сферическими поверхностями, в некоторых случаях можно найти с помощью метода последовательных приближений. Для случая двух шаров, движущихся в направлении их линий центров, решение задачи существенно облегчается благодаря результатам, приведенным в конце § 96 относительно „изображения“ дублета в сфере.

Пусть a, b суть радиусы, а c — расстояние между центрами A, B (фиг. 29) обоих шаров. Обозначим через U скорость A в направлении к B, а через U' скорость B в направлении к A. Далее, пусть для некоторой произвольной точки P

$$AP = r, \quad BP = r', \quad PAB = \theta, \quad PBA = \theta'.$$

Потенциал скоростей будет иметь следующий вид:

$$U\varphi + U'\varphi', \tag{1}$$

где функции φ и φ' определяются следующими условиями:

1) $$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\varphi' = 0 \tag{2}$$

во всей жидкости;

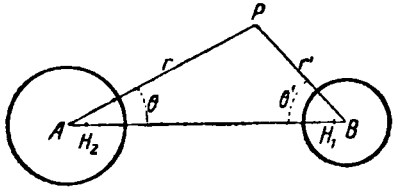
2) их производные по координатам обращаются в нуль в бесконечности;

3) $$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\cos\theta, \quad \frac{\partial\varphi'}{\partial r} = 0 \tag{3}$$

на поверхности шара A, в то время как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial\varphi'}{\partial r'} = -\cos\theta \tag{4}$$

на поверхности шара B. Легко усмотреть, что φ есть значение потенциала скоростей для случая, когда A движется со скоростью, равной единице, по направлению к B, в то время как B находится в покое; такой же смысл имеет и φ'.



Фиг. 29.

Чтобы найти φ, заметим, что при отсутствии B движение жидкости происходило бы таким образом, как если бы оно было обусловлено дублетом, помещенным в A, и ось которого имеет направление AB. Теорема § 96 показывает, что мы можем удовлетворить условию обращения в нуль скорости по нормали на поверхности шара B, если введем второй дублет, а именно „изображение" дублета в A относительно шара B. Это изображение лежит в H_1, точке, являющейся инверсией A по отношению к шару B; его ось имеет направление AB и мощность равна $-\mu_0 \frac{b^3}{c^3}$, где μ_0 есть мощность первоначального источника в A, именно

$$\mu_0 = 2\pi a^3.$$

Движение, происходящее от действия обоих дублетов A и H_1, будет, однако, нарушать условие, которое должно удовлетворяться на поверхности шара A; чтобы уничтожить на сфере B нормальные компоненты скорости, обусловленные дублетом H_1, мы должны взять в H_2 еще дублет, являющийся изображением H_1 относительно шара A. Благодаря этому на поверхности B получается нормальная компонента скорости, которая опять будет уничтожаться прибавлением изображения H_2 относительно B и т. д. Если обозначим через $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ мощности последовательных изображений дублетов, а через $f_1, f_2, f_3, \ldots$ их расстояния от A, то будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
&f_1 = c - \frac{b^2}{c}, \quad f_2 = \frac{a^2}{f_1}, \quad \frac{\mu_1}{\mu_0} = -\frac{b^3}{c^3}, \quad \frac{\mu_2}{\mu_1} = -\frac{a^3}{f_1^3},\\
&f_3 = c - \frac{b^2}{c - f_2}, \quad f_4 = \frac{a^2}{f_3}, \quad \frac{\mu_3}{\mu_2} = -\frac{b^3}{(c-f_2)^3}, \quad \frac{\mu_4}{\mu_3} = -\frac{a^3}{f_3^3},\\
&f_5 = c - \frac{b^2}{c - f_4}, \quad f_6 = \frac{a^2}{f_5}, \quad \frac{\mu_5}{\mu_4} = -\frac{b^3}{(c-f_4)^3}, \quad \frac{\mu_6}{\mu_5} = -\frac{a^3}{f_5^3},
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и т. д.; закон образования изображений очевиден. Интенсивность изображений дублетов все время уменьшается и притом очень быстро, если радиус каждого шара мал по сравнению с кратчайшим расстоянием между обеими поверхностями.

Формула для кинетической энергии будет теперь иметь вид

$$2T = -\varrho \iint (U\varphi + U'\varphi') \left(U\frac{\partial\varphi}{\partial n} + U'\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\right) dS = LU^2 + 2MUU' + NU'^2, \tag{6}$$

где

$$L=-\varrho\iint\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS_A,\quad M=-\varrho\iint\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n}dS_B=-\varrho\iint\varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS_A,$$

$$N=-\varrho\iint\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial n}dS_B, \tag{7}$$

а индексы указывают, по поверхности какого шара распространяется интегрирование. Равенство обоих выражений для M следует из теоремы Грина (§ 44).

Значение φ вблизи поверхности A можно получить из результатов (7) и (8) § 85; а именно, мы получим

$$4\pi\varphi=(\mu_0+\mu_2+\mu_4+\dots)\frac{\cos\theta}{r^2}-2\left(\frac{\mu_1}{f_1^3}+\frac{\mu^3}{f_2^3}+\dots\right)r\cos\theta+\dots, \tag{8}$$

причем мы опускаем остальные члены, содержащие зональные сферические функции высшего порядка, так как они при последующем интегрировании по поверхности обращаются в нуль вследствие свойства ортогональности (§ 87). Положив

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-\cos\theta,$$

мы найдем с помощью уравнений (5)

$$L=\frac{1}{3}\varrho(\mu_0+3\mu_2+3\mu_4+\dots)=$$
$$=\frac{2}{3}\pi\varrho a^3\left(1+3\frac{a^3b^3}{c^3f_1^3}+3\frac{a^6b^6}{c^3f_1^3(c-f_2)^3f_2^3}+\dots\right). \tag{9}$$

Получается, что во всех случаях присоединенная масса шара A возрастает от присутствия неподвижного шара B; ср. § 93.

Выражение для N может быть сразу написано из соображений симметрии; оно имеет следующий вид:

$$N=\frac{2}{3}\pi\varrho b^3\left(1+3\frac{a^3b^3}{c^3f_1'^3}+3\frac{a^6b^6}{c^3f_1'^3(c-f_2')^3f_2'^3}+\dots\right), \tag{10}$$

где

$$\left.\begin{aligned} f_1'&=c-\frac{a^2}{c}, & f_2'&=\frac{b^2}{f_1'},\\ f_3'&=c-\frac{a^2}{c-f_2'}, & f_4'&=\frac{b^2}{f_2'},\\ f_5'&=c-\frac{a^2}{c-f_4'}, & f_6'&=\frac{b^2}{f_5'} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и т. д.

Чтобы определить M, необходимо знать значение φ' вблизи поверхности A; этот потенциал обусловлен дублетами μ_0', μ_1', μ_2', μ_3', ..., удаленными от A на расстояниях c, $c-f_1'$, $c-f_2'$, $c-f_3'$, ..., причем $\mu_0'=-2\pi b^3$, и

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mu_1'}{\mu_0'}&=-\frac{a^3}{c^3}, & \frac{\mu_2'}{\mu_1'}&=-\frac{b^3}{f_1'^3},\\ \frac{\mu_3'}{\mu_2'}&=-\frac{a^3}{(c-f_2')^3}, & \frac{\mu_4'}{\mu_3'}&=-\frac{b^3}{f_3'^3},\\ \frac{\mu_5'}{\mu_4'}&=-\frac{a^3}{(c-f_4')^3}, & \frac{\mu_6'}{\mu_5'}&=-\frac{b^3}{f_5'^3} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

и т. д. Это дает для точек вблизи поверхности A

$$4\pi\varphi' = (\mu_1' + \mu_3' + \mu_5' + \dots)\frac{\cos\theta}{r^2} - \\ - 2\left(\frac{\mu_0'}{c^3} + \frac{\mu_2'}{(c-f_2')^3} + \frac{\mu_4'}{(c-f_4')^3} + \dots\right) r\cos\theta + \text{ и т. д.} \qquad (13)$$

Отсюда следует

$$M = -\varrho\iint \varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS_A = \varrho\,(\mu_1' + \mu_3' + \mu_5' + \dots) = \\ = 2\pi\varrho\,\frac{a^3b^3}{c^3}\left\{1 + \frac{a^3b^3}{f_1'^3\,(c-f_2')^3} + \frac{a^6b^6}{f_1'^3 f_3'^3\,(c-f_2')^3\,(c-f_4')^3} + \dots\right\}. \qquad (14)$$

Если отношения $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ оба малы, то будем иметь приближенно [1])

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{2}{3}\pi\varrho a^3\left(1 + 3\,\frac{a^3b^3}{c^6}\right), \quad M = 2\pi\varrho\,\frac{a^3b^3}{c^3}, \\ N &= \frac{2}{3}\pi\varrho b^3\left(1 + 3\,\frac{a^3b^3}{c^6}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Если в приведенных выше результатах положить $b = a$, $U' = U$, то плоскость, перпендикулярная к AB и делящая пополам отрезок AB, есть плоскость симметрии и поэтому может рассматриваться как твердая граница жидкости, находящейся по обеим ее сторонам. Если положить $c = 2h$, то мы найдем тогда для кинетической энергии жидкости, в которой движется шар на расстоянии h от твердой плоской границы перпендикулярно к ней, следующее выражение:

$$2T = \frac{2}{3}\pi\varrho a^3\left(1 + \frac{3}{8}\,\frac{a^3}{h^3} + \dots\right)U^2. \qquad (16)$$

Этот результат принадлежит Стоксу.

§ 99. Если шары движутся перпендикулярно к направлению линии их центров, то задача значительно усложняется; поэтому мы довольствуемся первыми приближениями и за более обстоятельным исследованием отошлем к сочинениям, приведенным на стр. 168.

Пусть шары двигаются со скоростями V и V' параллельно друг другу и перпендикулярно к AB; обозначим через r, θ, ω и r', θ', ω' две системы полярных координат, полюсы которых лежат в A и B, а полярные оси имеют направление скоростей V, V'. Потенциал скоростей будет иметь тогда вид

$$V\varphi + V'\varphi',$$

при соблюдении следующих условий на границах:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\cos\theta, \quad \frac{\partial\varphi'}{\partial r} = 0 \qquad \text{для } r = a \qquad (1)$$

и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r'} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi'}{\partial r'} = -\cos\theta' \text{ для } r' = b. \qquad (2)$$

---

[1]) Вплоть до этой степени приближения результаты могут быть найдены более простым способом, не вводя „изображений", а именно с помощью приема, подобного изложенному в следующем параграфе.

При отсутствии шара B потенциал скоростей, соответствующий движению шара A со скоростью, равной единице, равен

$$\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^2}\cos\theta.$$

Так как $r\cos\theta = r'\cos\theta'$, то вблизи B значение этого потенциала приближенно равно

$$\frac{1}{2}\frac{a^3}{c^3}r'\cos\theta'.$$

Этот потенциал скоростей на поверхности B создает нормальные компоненты скорости, которые могут быть погашены прибавлением к потенциалу выражения

$$\frac{1}{4}\frac{a^3b^3}{c^3}\frac{\cos\theta'}{r'^2},$$

которое вблизи A приближенно равно

$$\frac{1}{4}\frac{a^3b^3}{c^6}r\cos\theta.$$

Чтобы погасить появившиеся теперь нормальные компоненты скорости на поверхности A, мы должны еще прибавить член

$$\frac{1}{8}\frac{a^6b^3}{c^6}\frac{\cos\theta}{r^2}.$$

Если мы прервем здесь наш процесс и соберем наши результаты, то для поверхности шара A получим

$$\varphi = \frac{1}{2}a\left(1+\frac{3}{4}\frac{a^3b^3}{c^6}\right)\cos\theta, \tag{3}$$

а для поверхности B

$$\varphi = \frac{3}{4}b\frac{a^3}{c^3}\cos\theta'. \tag{4}$$

Обозначая через P, Q, R коэфициенты в выражении для кинетической энергии

$$2T = PV^2 + 2QVV' + RV'^2, \tag{5}$$

мы будем тогда иметь

$$\left.\begin{aligned} P &= -\varrho\int\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS_A = \frac{2}{3}\pi\varrho a^3\left(1+\frac{3}{4}\frac{a^3b^3}{c^6}\right),\\ Q &= -\varrho\int\int\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,dS_B = \pi\varrho\frac{a^3b^3}{c^3},\\ R &= -\varrho\int\int\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,dS_B = \frac{2}{3}\pi\varrho b^3\left(1+\frac{3}{4}\frac{a^3b^3}{c^6}\right). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Случай шара, который движется на расстоянии h параллельно неподвижной граничной плоскости, мы получим, если положим $b = a$, $V = V_1$

$c=2h$ и полученное значение T разделим пополам; тогда будем иметь

$$2T=\frac{2}{3}\pi\rho a^3\left(1+\frac{3}{16}\frac{a^3}{h^3}\right)V^2. \tag{7}$$

Этот результат, тоже данный Стоксом, можно сравнить с результатом (16) § 98 [1]).

Цилиндрические функции

§ 100. Если мы введем цилиндрические координаты x, $\widetilde{\omega}$, ω, то уравнение $\Delta\varphi=0$ принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\widetilde{\omega}^2}+\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\varphi}{\partial\widetilde{\omega}}+\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}=0. \tag{1}$$

Это уравнение можно получить непосредственным преобразованием координат или, еще проще, выражая по способу § 83, что полный поток через поверхность, ограничивающую элемент $\delta x\,\delta\widetilde{\omega}\,\widetilde{\omega}\,\delta\omega$, равен нулю.

В случае симметрии относительно оси x уравнение приводится к виду (4) § 94. Частное решение его тогда будет

$$\varphi=e^{\pm kx}\chi(\widetilde{\omega}),$$

где $\chi(\widetilde{\omega})$ удовлетворяет диференциальному уравнению

$$\chi''(\widetilde{\omega})+\frac{1}{\widetilde{\omega}}\chi'(\widetilde{\omega})+k^2\chi(\widetilde{\omega})=0. \tag{2}$$

Это есть диференциальное уравнение бесселевых функций нулевого порядка.

Общее решение этого диференциального уравнения состоит, конечно, из суммы двух определенных функций от $\widetilde{\omega}$, из которых каждая умножается на произвольную постоянную. Решение, конечное для $\widetilde{\omega}=0$, легко находится в виде степенного ряда с положительными показателями; оно обыкновенно обозначается через $CJ_0(k\widetilde{\omega})$, где

$$J_0(\zeta)=1-\frac{\zeta^2}{2^2}+\frac{\zeta^4}{2^4\cdot 4^2}-\ldots \tag{3}$$

---

[1]) Для более полного рассмотрения математической задачи движения двух шаров укажем на следующие работы: W. M. Hicks, On the Motion of two Spheres in a Fluid, Phil. Trans., 1880, стр. 455; R. A. Herman, On the Motion of two Spheres in Fluid, Quart. Journ. Math., XXII (1887); Basset, On the Motion of two Spheres in a Liquid, etc. Proc. Lond. Math. Soc., XVIII, 369 (1887); см. также Carl Neumann, Hydrodynamische Untersuchungen, Leipzig, 1883; Basset, Hydrodynamics, Cambridge, 1888. Взаимодействие „пульсирующих" шаров, т. е. шаров, которые периодически меняют свой объем, исследовано С. А. Бьеркнесом, и им дано механическое толкование с помощью электрических и других сил. Полное изложение этих исследований дано его сыном В. Бьеркнесом (V. Bjerknes, Vorlesungen über Hydrodynamische Fernkräfte, Leipzig 1900—1902). Задача была исследована также Hicks, Camb. Proc. III, 276 (1879); IV, 29 (1880) и Voigt, Gött. Nachrichten, 1891, стр. 37.

Решение уравнения $\Delta\varphi = 0$ имеет таким образом вид [1])

$$\varphi = e^{\pm kx} J_0(k\tilde{\omega}). \tag{4}$$

Из § 94 легко видеть, что соответствующее значение функции тока равно

$$\psi = \mp \tilde{\omega} e^{\pm kx} J_0'(k\tilde{\omega}). \tag{5}$$

Формулу (4) можно рассматривать как частный случай формулы (6) § 89; она эквивалентна формуле

$$\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\pm k(x+i\tilde{\omega}\cos\vartheta)}d\vartheta, \tag{6}$$

так как

$$J_0(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\zeta\cos\vartheta)d\vartheta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{i\zeta\cos\tau}\,d\vartheta, \tag{7}$$

что легко проверить, если косинус разложить в ряд и почленно проинтегрировать.

Кроме того, выражение (4) можно рассматривать как предельную форму, к которой стремится объемная зональная сферическая функция, когда порядок (n) и одновременно расстояние начала от рассматриваемой точки делается бесконечно большим, причем обе стремящиеся к бесконечности величины должны удовлетворять определенному соотношению [2]).

Итак, мы можем написать

$$\varphi = \frac{r^n}{a^n} P_n(\mu) = \left(1+\frac{x}{a}\right)^n \chi_n(\tilde{\omega}), \tag{8}$$

где мы временно заменили значения x и $\tilde{\omega}$, полагая

$$r = a + x, \quad \tilde{\omega} = 2a\sin\frac{1}{2}\theta,$$

в то время как

$$\chi_n(\tilde{\omega}) = 1 - \frac{n(n+1)}{2^2}\frac{\tilde{\omega}^2}{a^2} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2^2\cdot 4^2}\frac{\tilde{\omega}^4}{a^4} - \ldots \tag{9}$$

[см. уравнение (4) § 85]. Если мы положим теперь $k = \frac{n}{a}$ и предположим, что a и n делаются бесконечно большими, в то время как k остается конечным, то символы x и $\tilde{\omega}$ принимают опять их прежние значения, и мы опять получаем формулу (4) с верхним знаком в показателе; нижний знак получится, если исходить от выражения

$$\varphi = \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} P_n(\mu).$$

---

[1]) С другими обозначениями эти решения можно найти у Пуассона, см. примечание на стр. 34.

[2]) Этот прием был указан, не ограничиваясь случаем симметрии, Thomson and Tait, § 783 (1867).

Этот же прием позволяет выразить произвольную функцию от $\widetilde{\omega}$ через бесселевы функции нулевого порядка[1]). Согласно § 88 произвольную функцию угла широты на сферической поверхности можно разложить по зональным сферическим функциям в виде

$$F(\mu)=\sum\left(n+\frac{1}{2}\right)P_n(\mu)\int_{-1}^{+1}F(\mu')\,P_n(\mu')\,d\mu'. \tag{10}$$

Обозначив через $\widetilde{\omega}$ длину хорды, проведенной от полюса ($\theta=0$) сферы к переменной точке, получим

$$\widetilde{\omega}=2a\sin\frac{1}{2}\theta,\quad \widetilde{\omega}\,\delta\widetilde{\omega}=-a^2\,\delta\mu,$$

где a есть радиус; формулу (10) можно теперь написать так:

$$f(\widetilde{\omega})=\frac{1}{a^2}\sum\left(n+\frac{1}{2}\right)H_n(\widetilde{\omega})\int_0^{2a}f(\widetilde{\omega}')\,H_n(\widetilde{\omega}')\,\widetilde{\omega}'\,d\widetilde{\omega}'. \tag{11}$$

Если мы теперь положим

$$k=\frac{n}{a},\quad \delta k=\frac{1}{a}$$

и затем заставим a стремиться к бесконечности, то получим важную теорему[2])

$$f(\widetilde{\omega})=\int_0^{\infty}J_0(k\widetilde{\omega})\,k\,dk\int_0^{\infty}f(\widetilde{\omega}')\,J_0(k\widetilde{\omega}')\,\widetilde{\omega}'\,d\widetilde{\omega}'. \tag{12}$$

§ 101. Если предположить в (1) функцию φ разложенной в тригонометрический ряд, расположенный по $\cos s\omega$ и $\sin s\omega$, то коэфициент такого члена будет удовлетворять уравненню

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\widetilde{\omega}^2}+\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\varphi}{\partial\widetilde{\omega}}-\frac{s^2}{\widetilde{\omega}^2}\varphi=0. \tag{13}$$

Это уравнение удовлетворяется функцией

$$\varphi=e^{\pm kx}\chi(\widetilde{\omega}),$$

причем $\chi(\widetilde{\omega})$ удовлетворяет уравнению

$$\chi''(\widetilde{\omega})+\frac{1}{\widetilde{\omega}}\chi'(\widetilde{\omega})+\left(k^2-\frac{s^2}{\widetilde{\omega}^2}\right)\chi(\widetilde{\omega})=0. \tag{14}$$

Это уравнение есть диференциальное уравнение бесселевых функций порядка s[3]). Решение, конечное для $\widetilde{\omega}=0$, может быть написано

---

[1]) Этот прием принадлежит, повидимому, в существенных чертах К. Нейману (1862).

[2]) Более строгое доказательство и историю вопроса см. Ватсон.

[3]) Forsyth, § 100; Уиттекер и Ватсон, гл. XVII.

в форме

$$\chi(\tilde{\omega}) = CJ_s(k\tilde{\omega}),$$

где

$$J_s(\zeta) = \frac{\zeta^s}{2^s\Pi(s)}\left\{1 - \frac{\zeta^2}{2(2s+2)} + \frac{\zeta^4}{2\cdot 4(2s+2)(2s+4)} - \dots\right\}. \quad (15)$$

Общее решение уравнения (14) дополнительно содержит бесселеву функцию „второго рода", которой мы займемся в одном из следующих отделов нашего исследования [1]).

Итак, мы получили решения уравнения $\Delta\varphi = 0$ следующего вида:

$$\varphi = \left\{\begin{array}{l} e^{\pm hx} J_s(k\tilde{\omega}) \cos s\omega \\ e^{\pm hx} J_s(k\tilde{\omega}) \sin s\omega. \end{array}\right\} \quad (16)$$

Можно было бы также получить их, как предельные формы объемных сферических функций

$$\frac{r^n}{a^n} P_n^s(\mu) \begin{cases}\cos s\omega \\ \sin s\omega\end{cases}, \quad \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} P_n^s(\mu) \begin{cases}\cos s\omega \\ \sin s\omega\end{cases},$$

если применить разложение (6) § 86 [2]).

§ 102. Формула (12) § 100 позволяет нам, что иногда бывает целесообразно, выразить значение φ по одну сторону безграничной плоскости ($x = 0$) через значения φ или $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ в точках этой плоскости,

---

[1]) Относительно дальнейшей теории бесселевых функций обоих родов мы укажем на Gray and Mathews, Treatise on Bessel-Functions, изд. 2-е, London (1922) и на G. N. Watson, Theory of Bessel-Functions, Cambridge, (1923), где находятся также дальнейшие подробные литературные указания. Обстоятельное исследование по этому вопросу с физической точки зрения можно найти у Rayleigh, Theory of Sound, гл. IX, XVIII, где указаны также многие важные применения.

Числовые таблицы функции $J_s(\zeta)$ составлены Бесселем и Гансеном, а позднее Meissel (Berl. Abh. 1888). Эти последние перепечатаны у Грейя и Матеуса, а также с ценными дополнениями — в учебнике Ватсона. Сокращенные таблицы находятся в цитированных на стр. 114 сборниках Дале, Янке и Эмде.

[2]) Связь между поверхностными сферическими функциями и бесселевыми функциями была указана Mehler, Über die Vertheilung der statischen Elektricität in einem von zwei Kugelkalotten begrenzten Körper, Crelle, LXVIII (1868). Независимо это соотношение было исследовано Rayleigh, On the Relation between the Functions of Laplace and Bessell, Proc. Lond. Math. Soc. IX, 61 [Papers, 338]; см. также Theory of Sound, § 336—338. Существуют также методы представления бесселевых функций „второго рода" как предельные формы объемных сферических функций

$$Q_n(\mu), \quad Q_n^s(\mu) \begin{cases}\cos s\omega \\ \sin s\omega\end{cases},$$

см. об этом Heine, I, стр. 184, 232.

при условии, что имеет место симметрия относительно перпендикулярной к плоскости оси (ox)*). Итак, если имеем

$$\varphi = F(\widetilde{\omega}) \quad \text{для } x = 0, \tag{1}$$

то по ту сторону, для которой $x > 0$, будем иметь

$$\varphi = \int_0^\infty e^{-kx} J_0(k\widetilde{\omega})\, k\, dk \int_0^\infty F(\widetilde{\omega}')\, J_0(k\widetilde{\omega}')\, \widetilde{\omega}'\, d\widetilde{\omega}. \tag{2}$$

Далее, если имеем

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f(\widetilde{\omega}) \quad \text{для } x = 0, \tag{3}$$

то будем иметь

$$\varphi = \int_0^\infty e^{-kx} J_0(k\widetilde{\omega})\, dk \int_0^\infty f(\widetilde{\omega}')\, J_0(k\widetilde{\omega}')\, \widetilde{\omega}'\, d\omega'. \tag{4}$$

Показательные функции выбраны таким образом, чтобы они обращались в нуль для $x = \infty$.

Другое решение этой задачи дано уже в § 58; из уравнений (12) и (11) этого параграфа мы заключаем, что

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \iint \varphi \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) dS, \tag{5}$$

и соответственно

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dS}{r}, \tag{6}$$

где r обозначает расстояние точки, для которой вычисляется φ, от элемента δS плоскости.

Переходим теперь к некоторым применениям общих формул (2) и (4).

1) Если мы примем в уравнении (4), что функция $f(\widetilde{\omega})$ обращается в нуль для всех значений $\widetilde{\omega}$ за исключением бесконечно малых значений, для которых она становится бесконечно большой и именно таким образом, что

$$\int_0^\infty f(\widetilde{\omega})\, 2\pi\widetilde{\omega}\, d\widetilde{\omega} = \frac{1}{2},$$

то получим

$$4\pi\varphi = \int_0^\infty e^{-kx} J_0(k\widetilde{\omega})\, dk; \tag{7}$$

*) Метод можно распространить таким образом, что он будет свободен от этого ограничения.

отсюда, так как $J_0' = -J_1$, следует, согласно (5) § 100,

$$4\pi\varphi = -\widetilde{\omega}\int_0^\infty e^{-kx} J_1(k\widetilde{\omega})\,dk. \tag{8}$$

Сравнивая эти формулы с соответствующими элементарными выражениями для точечного источника в начале (§ 95), мы видим, что

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-kx} J_0(k\widetilde{\omega})\,dk &= \frac{1}{r},\\ \int_0^\infty e^{-kx} J_1(k\widetilde{\omega})\,dk &= \frac{\widetilde{\omega}}{r(r+x)},\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где $r = \sqrt{x^2+\omega^2}$; эти формулы представляют на самом деле известные результаты [1]).

2) Далее, предположим, что источники распределены с равномерной плотностью по части плоскости, заключенной внутри круга $\widetilde{\omega} = a$, $x = 0$. Если мы воспользуемся рядами для J_0 и J_1 или будем действовать как-нибудь иначе, то найдем

$$\int_0^a J_0(k\widetilde{\omega})\,\widetilde{\omega}\,d\widetilde{\omega} = \frac{a}{k} J_1(ka); \tag{10}$$

отсюда следует [2])

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{\pi a}\int_0^\infty e^{-kx} J_0(k\widetilde{\omega})\, J_1(ka)\,\frac{dk}{k},\\ \psi &= -\frac{\widetilde{\omega}}{\pi a}\int_0^\infty e^{-kx} J_1(k\widetilde{\omega})\, J_1(ka)\,\frac{dk}{k},\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

причем постоянный множитель выбран таким образом, что полный поток через круг равен единице.

3) Далее, если плотность источников внутри того же самого круга меняется как $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-\omega^2}}$, то приходим к интегралу [3])

$$\int_0^a J_0(k\widetilde{\omega})\,\frac{\widetilde{\omega}\,d\widetilde{\omega}}{\sqrt{a^2-\widetilde{\omega}^2}} = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(ka\sin\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{\sin ka}{k}. \tag{12}$$

---

[1]) Первый результат принадлежит Lipschitz, Crelle, LVI, 189 (1859); см. Watson, стр. 384. Последний результат получается диференцированием по $\widetilde{\omega}$ и интегрированием по x.

[2]) Ср. H. Weber, Crelle, LXXV, 88; Heine, II, 180.

[3]) Формула (12) дана различными авторами; см. Rayleigh, Papers III, 98; Hobson, Proc. Lond. Math. Soc., XXV, 71 (1893).

Для вычисления последнего интеграла заменяют J_0 его разложением в ряд и с каждым членом оперируют отдельно. Отсюда мы получаем

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2\pi a}\int_0^\infty e^{-kx} J_0(k\widetilde{\omega}) \sin ka \,\frac{dk}{k}, \\ \psi &= -\frac{\widetilde{\omega}}{2\pi a}\int_0^\infty e^{-kx} J_1(k\widetilde{\omega}) \sin ka \,\frac{dk}{k}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где постоянный множитель определяется тем же условием, как выше [1]).

Существует известная теорема электростатики, что при распределении плотности заряда, согласно вышепринятому закону, потенциал φ для площади круга постоянен. Независимо от этого можно показать, что

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty J_0(k\widetilde{\omega}) \sin ka \,\frac{dk}{k} = \frac{1}{2}\pi, \quad \text{или} \quad \arcsin\frac{a}{\widetilde{\omega}}, \\ &\int_0^\infty J_1(k\widetilde{\omega}) \sin ka \,\frac{dk}{k} = \frac{a-\sqrt{a^2-\widetilde{\omega}^2}}{\widetilde{\omega}}, \quad \text{или} \quad \frac{a}{\widetilde{\omega}}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

смотря по тому, будет ли $\widetilde{\omega} \lesseqgtr a$ [2]). Формулы (13) дают таким образом течение жидкости через круглое отверстие в тонкой плоской неподвижной стенке. Другое решение мы получим в § 108. Соответствующая двухмерная задача была решена в § 66, п. 1.

4) Предположим, что для $x=0$

$$\varphi = C\sqrt{a^2-\widetilde{\omega}^2}, \quad \text{когда} \quad \widetilde{\omega} < a,$$

и

$$\varphi = 0, \qquad \text{когда} \quad \widetilde{\omega} > a.$$

Тогда найдем

$$\int_0^a J_0(k\widetilde{\omega})\sqrt{a^2-\widetilde{\omega}^2}\,\widetilde{\omega}\,d\widetilde{\omega} = a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(ka\sin\vartheta)\sin\vartheta\cos^2\vartheta\,d\vartheta = a^2\psi_1(ka), \tag{15}$$

где

$$\psi_1(\zeta) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{\zeta^2}{2\cdot 5}+\frac{\zeta^4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7}-\dots\right) = -\frac{d}{\zeta\,d\zeta}\frac{\sin\zeta}{\zeta}. \tag{16}$$

Поэтому, согласно выражению (2), имеем

$$\varphi = -C\int_0^\infty e^{-kx} J_0(k\widetilde{\omega})\,\frac{d}{dk}\left(\frac{\sin ka}{k}\right)dk. \tag{17}$$

---

[1]) Weber H., Crelle, LXXV (1873); Heine, II, 192.

[2]) Weber H., Crelle, LXXV; Watson, стр. 405; см. также Proc. Lond. Math. Soc., XXXIV, 282.

Отсюда получаем для $x=0$ после интегрирования по частям

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 = C\int_0^\infty J_0(k\widetilde{\omega}_1)\sin ka\,\frac{dk}{k} + C\widetilde{\omega}\int_0^\infty J_0'(k\widetilde{\omega})\sin ka\,dk. \tag{18}$$

Значение первого интеграла дано в формулах (14), а что касается второго интеграла, то его значение может быть получено оттуда дифференцированием по $\widetilde{\omega}$. Мы получим

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{2}\pi C, \quad \text{или} \quad C\left(\arcsin\frac{a}{\widetilde{\omega}} - \frac{a}{\sqrt{\widetilde{\omega}^2-a^2}}\right), \tag{19}$$

смотря по тому, будет ли $\widetilde{\omega}\lesseqgtr a$. Если $C=\frac{2}{\pi}U$, то формула (17) представляет случай, когда тонкий круглый диск движется в неограниченной жидкости со скоростью U перпендикулярно к своей плоскости. Выражение для кинетической энергии имеет тогда вид

$$2T = -\varrho\iint\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS = \pi\varrho C^2\int_0^a\sqrt{a^2-\widetilde{\omega}^2}\,2\pi\widetilde{\omega}\,d\widetilde{\omega} = \frac{2}{3}\pi^2\varrho a^3C^2,$$

или

$$2T = \frac{8}{3}\varrho a^3U^2. \tag{20}$$

Кажущееся увеличение инертной массы диска равно, следовательно, произведению $\frac{2}{\pi}$ $(=0{,}6366)$ на массу сферической части жидкости радиуса, равного радиусу диска. Другое исследование этой задачи будет изложено в § 108.

Эллипсоидальные функции

§ 103. Метод сферических функций применим также для решения уравнения

$$\Delta\varphi = 0 \tag{1}$$

при граничных условиях, относящихся к эллипсоидам вращения [1]).

Начнем со случая удлиненного эллипсоида вращения и положим

$$\left.\begin{aligned} x &= k\cos\theta\operatorname{ch}\eta = k\mu\zeta,\\ y &= \widetilde{\omega}\cos\omega,\\ z &= \widetilde{\omega}\sin\omega, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где

$$\widetilde{\omega} = k\sin\theta\operatorname{sh}\eta = k(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2-1)^{1/2}.$$

[1]) Heine, Über einige Aufgaben, welche auf partielle Differentialgleichungen führen, Crelle, XXVI, 185 (1843) и Kugelfunktionen, II, § 38. См. также Ferrers, гл. VI.

Поверхности $\zeta = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$ представляют соответственно софокусные эллипсоиды и двухполостные гиперболоиды, общие фокусы которых лежат в точках $(\pm k, 0, 0)$. Значение ζ изменяется от 1 до ∞, в то время как μ лежит между -1 и $+1$. Координаты μ, ζ, ω образуют ортогональную систему, и линейные элементы δs_μ, δs_ζ, δs_ω, которые описывает точка (x, y, z) при изменении одной только из величин μ, ζ, ω, имеют следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} \delta s_\mu &= k\left(\frac{\zeta^2-\mu^2}{1-\mu^2}\right)^{1/2}\delta\mu, \quad \delta s_\zeta = k\left(\frac{\zeta^2-\mu^2}{\zeta^2-1}\right)^{1/2}\delta\zeta, \\ \delta s_\omega &= k(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2-1)^{1/2}\delta\omega. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Чтобы выразить уравнение (1) через наши новые переменные, мы должны полный поток через поверхность элемента объема $\delta s_\mu\, \delta s_\zeta\, \delta s_\omega$ положить равным нулю; мы получаем тогда

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s_\mu}\delta s_\zeta\,\delta s_\omega\right)\delta\mu + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s_\zeta}\delta s_\mu\,\delta s_\omega\right)\delta\zeta + \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s_\omega}\delta s_\mu\,\delta s_\zeta\right)\delta\omega = 0,$$

или, если подставить значения из (3),

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right\} + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{(\zeta^2-1)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right\} + \frac{\zeta^2-\mu^2}{(1-\mu^2)(\zeta^2-1)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} = 0.$$

Это может быть написано также в виде

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right\} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{(1-\zeta^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right\} + \frac{1}{1-\zeta^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}. \tag{4}$$

§ 104. Если φ есть конечная функция от μ и ω для значений от $\mu = -1$ до $\mu = +1$ и от $\omega = 0$ до $\omega = 2\pi$, то она может быть разложена в ряд поверхностных сферических функций целого порядка, которые имеют вид (7) § 86, причем коэфициенты суть функции ζ.

После подстановки в уравнение (4) мы увидим, что каждый член ряда в отдельности должен удовлетворять этому уравнению. Возьмем сначала случай зональной сферической функции и положим

$$\varphi = P_n(\mu)Z. \tag{5}$$

После подстановки находим, пользуясь уравнением (1) § 84,

$$\frac{d}{d\zeta}\left\{(1-\zeta^2)\frac{dZ}{d\zeta}\right\} + n(n+1)Z = 0, \tag{6}$$

а это уравнение имеет тот же самый вид, как и только что упомянутое.

Мы получаем, таким образом, решения в виде

$$\varphi = P_n(\mu)P_n(\zeta) \tag{7}$$

и

$$\varphi = P_n(\mu)Q_n(\zeta), \tag{8}$$

где

$$Q_n(\zeta) = P_n(\zeta)\int_{\zeta}^{\infty}\frac{d\zeta}{\{P_n(\zeta)\}^2(\zeta^2-1)} =$$

$$= \frac{1}{2}P_n(\zeta)\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - \frac{2n-1}{1\cdot n}P_{n-1}(\zeta) - \frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}(\zeta) - \ldots =$$

$$= \frac{n!}{1\cdot 3\ldots(2n+1)}\left\{\zeta^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\zeta^{-n-3} + \right.$$

$$\left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)}\zeta^{-n-5} + \ldots\right\}. \quad (9)^{1})$$

Решение (7) конечно, когда $\zeta = 1$, и поэтому оно годится для пространства *внутри* эллипсоида вращения; выражение (8), наоборот, бесконечно для $\zeta = 1$, но обращается в нуль для $\zeta = \infty$ и годится поэтому для внешней области. Отметим частные случаи формулы (9)

$$Q_0(\zeta) = \frac{1}{2}\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1},$$

$$Q_1(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - 1,$$

$$Q_2(\zeta) = \frac{1}{4}(3\zeta^2-1)\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - \frac{3}{2}\zeta.$$

Из интегрального представления Q_n мы получаем

$$P_n(\zeta)\frac{dQ_n(\zeta)}{d\zeta} - \frac{dP_n(\zeta)}{d\zeta}Q_n(\zeta) = -\frac{1}{\zeta^2-1}. \quad (10)$$

Легко найти выражения для функций тока, соответствующих потенциалам скоростей (7) и (8); именно, согласно определению § 94, имеем

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial s_\zeta} &= -\frac{1}{\omega}\frac{\partial\psi}{\partial s_\mu},\\ \frac{\partial\varphi}{\partial s_\mu} &= \frac{1}{\omega}\frac{\partial\psi}{\partial s_\zeta};\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

отсюда следует

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial\mu} &= -k(\zeta^2-1)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta},\\ \frac{\partial\psi}{\partial\zeta} &= k(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}.\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Таким образом в случае решения (7) получаем

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mu} = -k(\zeta^2-1)\frac{dP_n(\zeta)}{d\zeta}P_n(\mu) =$$

$$= \frac{k}{n(n+1)}(\zeta^2-1)\frac{dP_n(\zeta)}{d\zeta}\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}\right\}$$

---

[1]) Ferrers, глава V; Todhunter, гл. VI; Forsyth, § 96—99.

и отсюда

$$\psi = \frac{k}{n(n+1)}(1-\mu^2)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}(\zeta^2-1)\frac{dP_n(\zeta)}{d\zeta}. \qquad (13)$$

Тот же самый результат можно получить, конечно, также из второго уравнения (12).

Таким же образом для функции тока, соответствующей решению (8), находим

$$\psi = \frac{k}{n(n+1)}(1-\mu^2)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}(\zeta^2-1)\frac{dQ_n(\zeta)}{d\zeta}. \qquad (14)$$

§ 105. Вышеизложенное мы можем применить к случаю, когда удлиненный эллипсоид вращения движется параллельно своей оси в безграничной массе жидкости. Эллиптические координаты должны быть выбраны таким образом, чтобы этот эллипсоид принадлежал софокусному семейству; пусть он соответствует, например, значению $\zeta = \zeta_0$. Если произвести сравнение с уравнениями (2) § 103, то мы видим, что если a, c суть полярная и экваториальная полуоси, а e — эксцентриситет меридионального сечения, то мы должны иметь

$$k = ae, \quad \zeta_0 = \frac{1}{e}, \quad k(\zeta_0^2-1)^{1/2} = c.$$

Условие на поверхности дано уравнением (1) § 97; именно, должно быть

$$\psi = -\frac{1}{2}Uk^2(1-\mu^2)(\zeta^2-1) + \text{const}. \qquad (1)$$

для $\zeta = \zeta_0$. Отсюда, если мы положим $n=1$ в формуле (14) § 104 и введем произвольный множитель A, будем иметь

$$\psi = \frac{1}{2}Ak(1-\mu^2)(\zeta^2-1)\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - \frac{\zeta}{\zeta^2-1}\right\} \qquad (2)$$

с условием

$$A = \frac{Uk}{\frac{\zeta_0}{\zeta_0^2-1} - \frac{1}{2}\ln\frac{\zeta_0+1}{\zeta_0-1}} = \frac{Ua}{\frac{1}{1-e^2} - \frac{1}{2e}\ln\frac{1+e}{1-e}}. \qquad (3)$$

Соответствующая формула для потенциала скоростей будет

$$\varphi = A\mu\left\{\frac{1}{2}\zeta\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - 1\right\}. \qquad (4)$$

Кинетическая энергия, а также и коэфициент инерции [1]), обусловленный жидкостью, легко могут быть вычислены из формулы (5) § 94.

§ 106. Если мы отбросим случай симметрии, то решения $\Delta\varphi = 0$, когда φ есть тессеральная или секториальная сферическая функция

[1]) Присоединенная масса. *Прим. ред*

от μ и ω, могут быть определены подобным же способом; они имеют следующий вид

$$\varphi = P_n^s(\mu)\, P_n^s(\zeta) \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} s\omega, \tag{1}$$

$$\varphi = P_n^s(\mu)\, Q_n^s(\zeta) \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} s\omega, \tag{2}$$

где, как и в § 86,

$$P_n^s(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s} \frac{d^s P_n(\mu)}{d\mu^s}, \tag{3}$$

и во избежание мнимых величин полагаем

$$P_n^s(\zeta) = (\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}s} \frac{d^s P_n(\zeta)}{d\zeta^s}, \tag{4}$$

и

$$Q_n^s(\zeta) = (\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}s} \frac{d^s Q_n(\zeta)}{d\zeta^s}. \tag{5}$$

Можно показать, что

$$Q_n^s(\zeta) = (-1)^s \frac{(n+s)!}{(n-s)!} P_n^s(\zeta) \int_\zeta^\infty \frac{d\zeta}{\{P_n^s(\zeta)\}^2 (\zeta^2-1)}. \tag{6}$$

Отсюда имеем

$$P_n^s(\zeta) \frac{dQ_n^s(\zeta)}{d\zeta} - \frac{dP_n^s(\zeta)}{d\zeta} Q_n^s(\zeta) = (-1)^{s+1} \frac{(n+s)!}{(n-s)!} \frac{1}{\zeta^2-1}. \tag{7}$$

В качестве примеров мы рассмотрим удлиненный эллипсоид вращения, который движется параллельно одной из осей экватора, например, параллельно оси y, или вращается около этой оси.

1. В первом случае условие на поверхности будет

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = -V \frac{\partial y}{\partial\zeta}$$

для $\zeta = \zeta_0$, причем V есть скорость поступательного движения, или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = -V \frac{k\zeta_0}{(\zeta_0^2-1)^{1/2}} (1-\mu^2)^{1/2} \cos\omega. \tag{8}$$

Это уравнение удовлетворяется, если в выражении (2) положить $n=1$, $s=1$; мы получим тогда

$$\varphi = A(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2-1)^{1/2} \left\{\frac{1}{2}\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - \frac{\zeta}{\zeta^2-1}\right\} \cos\omega, \tag{9}$$

причем постоянная A дана уравнением

$$A\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{\zeta_0+1}{\zeta_0-1} - \frac{\zeta_0^2-2}{\zeta_0(\zeta_0^2-1)}\right\} = -kV. \tag{10}$$

2. В случае вращения около Oy мы имеем, если обозначить через Ω_y угловую скорость,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = -\Omega_y\left(z\frac{\partial x}{\partial\zeta} - x\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)$$

для $\zeta=\zeta_0$, или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = k^2\Omega_y\frac{1}{(\zeta_0^2-1)^{1/2}}\mu(1-\mu^2)^{1/2}\sin\omega. \tag{11}$$

Если мы теперь положим в выражении (2) $n=2$, $s=1$, то получим

$$\varphi = A\mu(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2-1)^{1/2}\left\{\frac{3}{2}\zeta\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - 3 - \frac{1}{\zeta^2-1}\right\}\sin\omega; \tag{12}$$

при этом постоянная A определяется из условия (11).

§ 107. Если эллипсоид сжатый или „планетовидный", то соответствующие координаты вводим таким образом:

$$\left.\begin{aligned} &x = k\cos\theta\,\mathrm{sh}\,\eta = k\mu\zeta, \quad y = \widetilde{\omega}\cos\omega, \quad z = \widetilde{\omega}\sin\omega, \\ &\text{где} \\ &\widetilde{\omega} = k\sin\theta\,\mathrm{ch}\,\eta = k(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2+1)^{1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

При этом ζ изменяется от 0 до ∞ (или в некоторых приложениях от $-\infty$ через 0 до $+\infty$), в то время как μ лежит между -1 и $+1$. Поверхности второго порядка

$$\zeta = \text{const.}, \quad \mu = \text{const.}$$

будут соответственно представлять сжатые эллипсоиды вращения и однополостные гиперболоиды вращения, которые имеют общую фокальную окружность $x=0$, $\widetilde{\omega}=k$.

В качестве предельных форм получаем: 1) эллипсоид $\zeta=0$, который совпадает с той частью плоскости $x=0$, для которой $\widetilde{\omega}<k$, 2) гиперболоид $\mu=0$, который совпадает с остальной частью этой плоскости.

Применяя те же обозначения, как и выше, мы находим

$$\left.\begin{aligned} \delta s_\mu &= k\left(\frac{\zeta^2+\mu^2}{1-\mu^2}\right)^{1/2}\delta\mu, \\ \delta s_\zeta &= k\left(\frac{\zeta^2+\mu^2}{\zeta^2+1}\right)^{1/2}\delta\zeta, \\ \delta s_\omega &= k(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2+1)^{1/2}\,\delta\omega; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

а уравнение неразрывности запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right\} + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{(\zeta^2+1)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right\} + \frac{\zeta^2+\mu^2}{(1-\mu^2)(\zeta^2+1)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right\} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} = -\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{(\zeta^2+1)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right\} + \frac{1}{\zeta^2+1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}. \tag{3}$$

Это уравнение имеет тот же самый вид, как и (4) § 103, только ζ заменено через $i\zeta$; подобное соответствие будет иметь место и в последующих формулах.

В случае симметрии относительно оси мы будем иметь следующие решения:

$$\varphi = P_n(\mu)\cdot p_n(\zeta) \tag{4}$$

и

$$\varphi = P_n(\mu)\cdot q_n(\zeta), \tag{5}$$

где

$$p_n(\zeta) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{n!}\left\{\zeta^n + \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\zeta^{n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\zeta^{n-4} + \ldots\right\} \tag{6}$$

и

$$q_n(\zeta) = p_n(\zeta)\int_{\zeta}^{\infty}\frac{d\zeta}{\{p_n(\zeta)\}^2(\zeta^2+1)} =$$
$$= (-1)^n\left\{p_n(\zeta)\operatorname{arcctg}\zeta - \frac{2n-1}{1\cdot n}p_{n-1}(\zeta) + \frac{2n-5}{3(n-1)}p_{n-3}(\zeta) - \ldots\right\} =$$
$$= \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}\left\{\zeta^{-n-1} - \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\zeta^{-n-3} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)}\zeta^{-n-5} - \ldots\right\}, \tag{7}$$

причем, однако, последнее разложение только тогда сходится, когда $\zeta > 1$ [1]). Как и выше, решение (4) годится для пространства, лежащего внутри некоторого эллипсоида семейства $\zeta = \text{const}$, а решение (5) — для внешнего пространства.

Заметим, что

$$p_n(\zeta)\frac{dq_n(\zeta)}{d\zeta} - \frac{dp_n(\zeta)}{d\zeta}q_n(\zeta) = -\frac{1}{\zeta^2+1}. \tag{8}$$

Как частный случай формулы (7) имеем

$$q_0(\zeta) = \operatorname{arcctg}\zeta, \quad q_1(\zeta) = 1 - \zeta\operatorname{arcctg}\zeta,$$
$$q_2(\zeta) = \frac{1}{2}(3\zeta^2+1)\operatorname{arcctg}\zeta - \frac{3}{2}\zeta.$$

Формулы для функции тока, соответствующие выражениям (4) и (5), представятся в виде

$$\psi = \frac{k}{n(n+1)}(1-\mu^2)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}(\zeta^2+1)\frac{dp_n(\zeta)}{d\zeta} \tag{9}$$

и

$$\psi = \frac{k}{n(n+1)}(1-\mu^2)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}(\zeta^2+1)\frac{dq_n(\zeta)}{d\zeta}. \tag{10}$$

[1]) Доказательства, приведенные в литературе § 104, читатель легко может применить к настоящему случаю.

§ 108. 1. Простейший случай (5) § 107 получим, если положим $n=0$; тогда будем иметь

$$\varphi = A \operatorname{arcctg} \zeta, \tag{1}$$

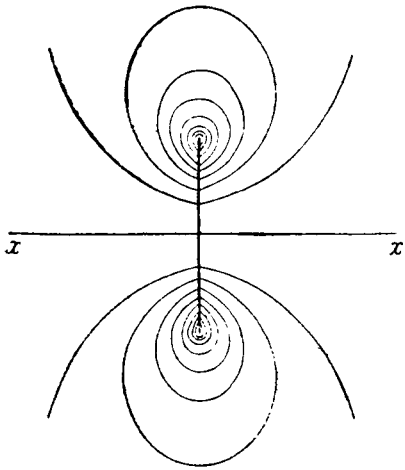
причем ζ может принимать все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Формула (10) предыдущего параграфа становится неопределенной, но, применяя метод § 104, мы найдем

$$\psi = Ak\mu, \tag{2}$$

где μ изменяется от 0 до 1. Это решение представляет течение жидкости через круглое отверстие в неограниченной плоской стене; отверстие есть как раз та часть плоскости yz, для которой $\widetilde{\omega} < k$. Скорость в произвольной точке отверстия ($\zeta = 0$) равна

$$u = -\frac{1}{\widetilde{\omega}} \frac{\partial \varphi}{\partial \widetilde{\omega}} = \frac{A}{(k^2 - \widetilde{\omega}^2)^{1/2}},$$

так как $k\mu = \sqrt{k^2 - \widetilde{\omega}^2}$ для $x = 0$. Скорость на краях отверстия, следовательно, становится бесконечно большой, ср. § 102, 3.



Фиг. 30.

2. Движение безграничной жидкости, обусловленное движением сжатого эллипсоида ($\zeta = \zeta_0$) со скоростью U параллельно своей оси, представляется формулами

$$\varphi = A\mu(1 - \zeta \operatorname{arcctg} \zeta),$$
$$\psi = \frac{1}{2} Ak(1-\mu^2)(\zeta^2+1)\left\{\frac{\zeta}{\zeta^2+1} - \operatorname{arcctg}\zeta\right\}, \tag{3}$$

где

$$A = \frac{-kU}{\frac{\zeta_0}{\zeta_0^2+1} - \operatorname{arcctg}\zeta_0}.$$

Если обозначим радиусы, направленные к полюсу и к экватору, через a и c, а эксцентриситет меридионального сечения — через e, то получим

$$a = k\zeta_0^2,$$
$$c = k(\zeta_0^2+1)^{1/2},$$
$$e = (\zeta_0^2+1)^{-1/2}.$$

Если мы выразим A через эти величины, то получим

$$A = \frac{-Uc}{(1-e^2)^{1/2} - \frac{1}{e}\arcsin e}. \tag{4}$$

Форма линий тока для равноотстоящих значений ψ показана на фиг. 30; ср. § 71, п. 3.

Наиболее интересен случай круглого диска, для которого $e=1$ и, следовательно, $A=\frac{2Uc}{\pi}$. Значение φ, данное уравнением (3), будет равно $\pm A\mu$ или $\pm A\left(1-\frac{\widetilde{\omega}^2}{c^2}\right)^{1/2}$ для обеих сторон диска, а нормальная компонента скорости равна $\pm U$. Формула (4) § 44 дает поэтому

$$2T=\frac{8}{3}\varrho c^3U^2, \tag{5}$$

как и в выражении (20) § 102.

§ 109. Решения уравнения (3) § 107 в тессеральных функциях напишутся

$$\varphi=P_n^s(\mu)\,p_n^s(\zeta)\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}s\omega \tag{1}$$

и

$$\varphi=P_n^s(\mu)\,q_n^s(\zeta)\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}s\omega, \tag{2}$$

где

$$p_n^s(\zeta)=(\zeta^2+1)^{\frac{s}{2}}\frac{d^sp_n(\zeta)}{d\zeta^s}, \tag{3}$$

и

$$q_n^s(\zeta)=(\zeta^2+1)^{\frac{s}{2}}\frac{d^sq_n(\zeta)}{d\zeta^s}=(-1)^s\frac{(n+s)!}{(n-s)!}p_n^s(\zeta)\int_\zeta^\infty\frac{d\zeta}{\left\{p_n^s(\zeta)\right\}^2(\zeta^2+1)}. \tag{4}$$

Эти функции обладают свойством

$$p_n^s(\zeta)\frac{dq_n^s(\zeta)}{d\zeta}-\frac{dp_n^s(\zeta)}{d\zeta}q_n^s(\zeta)=(-1)^{s+1}\frac{(n+s)!}{(n-s)!}\frac{1}{\zeta^2+1}. \tag{5}$$

Мы можем применить эти результаты таким же образом, как и в § 108.

1. Для движения сжатого эллипсоида ($\zeta=\zeta_0$) параллельно оси y полагаем $n=1$, $s=1$ и, следовательно,

$$\varphi=A(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2+1)^{1/2}\left\{\frac{\zeta}{\zeta^2+1}-\operatorname{arcctg}\zeta\right\}\cos\omega \tag{6}$$

с условием

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}=-V\frac{\partial y}{\partial\zeta}$$

для $\zeta=\zeta_0$, где V обозначает скорость твердого тела. Отсюда получаем

$$A\left\{\frac{\zeta_0^2+2}{\zeta_0(\zeta_0^2+1)}-\operatorname{arcctg}\zeta_0\right\}=-kV. \tag{7}$$

В случае диска ($\zeta_0=0$) имеем $A=0$, как и следовало ожидать.

2. Для сжатого эллипсоида, который вращается с угловой скоростью Ω_y около оси y, полагаем $n=2$, $s=1$, и тогда получаем

$$\varphi = A\mu(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2+1)^{1/2}\left\{3\zeta\,\mathrm{arcctg}\,\zeta - 3 + \frac{1}{\zeta^2+1}\right\}\sin\omega \qquad (8)$$

с условием на поверхности

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = -\Omega_y\left(z\frac{\partial x}{\partial\zeta} - x\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right) = -\frac{k^2\Omega_y}{(\zeta_0^2+1)^{1/2}}\mu(1-\mu^2)^{1/2}\sin\omega. \qquad (9)$$

Для круглого диска ($\zeta_0=0$) из последнего получим

$$\frac{3}{2}\pi A = -k^2\Omega_y. \qquad (10)$$

На обеих сторонах диска будем иметь

$$\varphi = \mp 2A\mu(1-\mu^2)^{1/2}\sin\omega,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \mp k\Omega_y(1-\mu^2)^{1/2}\sin\omega.$$

Если подставить эти значения в формулу

$$2T = -\varrho\int\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\widetilde{\omega}\,d\widetilde{\omega}\,d\omega,$$

то получим

$$2T = \frac{16}{45}\varrho c^5\Omega_y^2\ ^{1}). \qquad (11)$$

§ 110. В вопросах, относящихся к эллипсоидам с тремя неравными осями, мы можем применить более общий вид эллипсоидальных функций, известных под именем функций Ламэ [2]). Не вдаваясь в формальное изложение этих функций, мы изучим, имея в виду гидродинамические применения, некоторые решения уравнения

$$\Delta\varphi = 0 \qquad (1)$$

в эллиптических координатах, именно решения, которые аналогичны сферическим функциям первого и второго рода.

Желательно этому предпослать исследование о движении жидкости, находящейся в эллипсоидальном сосуде, которое впрочем может быть проведено в декартовых координатах.

---

[1]) Другие решения, представленные в этих координатах, смотреть Nicholson, Phil. Trans. A, CCXXIV, 49 (1924).

[2]) См., например, Ferrers, Spherical Harmonics, гл. VI; W. D. Niven, Phil. Trans. A, CLXXXII, 183 (1891) и Proceedings Royal Soc. A, LXXIX, 458 (1906); Poincaré, Figures d'Equilibre d'une Masse Fluide, Paris, 1902, VI, гл. VI; Darwin, Phil. Trans. A. CXCVII, 461 (1901) [Scientific Papers, Cambridge, 1907—1911, III, 186]; Уиттекер и Ватсон, гл. 23. Очерк теории дал Wangerin, см. сноску на стр. 137.

Когда сосуд движется параллельно оси x со скоростью U, то заключенная в нем жидкость движется, как твердое тело, и потенциал скоростей просто равен

$$\varphi = -Ux.$$

Предположим теперь, что сосуд вращается вокруг одной из главных осей (например, около оси x) с угловой скоростью Ω_x. Если написать уравнение поверхности сосуда в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{2}$$

то условие на поверхности будет

$$-\frac{x}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{y}{b^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{z}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{y}{b^2}\Omega_x z + \frac{z}{c^2}\Omega_x y.$$

Следовательно, можно положить

$$\varphi = Ayz,$$

что, очевидно, будет решением уравнения (1); определяя постоянное из условия на поверхности, получим

$$\varphi = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\Omega_x yz.$$

Следовательно, если центр движется со скоростью, компоненты которой суть U, V, W, и если угловые скорости около главных осей будут Ω_x, Ω_y, Ω_z, то мы получим путем наложения [1])

$$\varphi = -Ux - Vy - Wz - \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\Omega_x yz - \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2}\Omega_y zx - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\Omega_z xy. \tag{3}$$

Можно также рассмотреть случай, когда сосуд меняет к тому же и свою форму, оставаясь все время эллипсоидом. Если длины осей (только) меняются со скоростями $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$, то общее граничное условие (3) § 9 напишется в виде

$$\frac{x^2}{a^3}\dot{a} + \frac{y^2}{b^3}\dot{b} + \frac{z^2}{c^3}\dot{c} + \frac{x}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{y}{b^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{z}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Это условие удовлетворяется выражением [2])

$$\varphi = -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}x^2 + \frac{\dot{b}}{b}y^2 + \frac{\dot{c}}{c}z^2\right). \tag{5}$$

---

[1]) Повидимому Бельтрами, Бьеркнес и Максвелл в 1873 г. независимо друг от друга опубликовали этот результат. См. Hicks, Report on Recent Progress in Hydrodynamics, Brit. Ass. Rep., 1882 и Kelvin's Papers IV, 197.

[2]) C. A. Bjerknes, Verallgemeinerung des Problems von den Bewegungen, welche in einer ruhenden unelastischen Flüssigkeit die Bewegung eines Ellipsoids hervorbringt, Göttinger Nachrichten, 1873, стр. 448, 829.

Уравнение (1) требует при этом, чтобы

$$\frac{\dot a}{a}+\frac{\dot b}{b}+\frac{\dot c}{c}=0. \tag{6}$$

А это и есть в действительности условие того, что переменный эллипсоид заключает всегда тот же самый объем жидкости $\left(\frac{4}{3}\pi abc\right)$.

§ 111. Решения соответствующих задач для безграничной жидкости, ограниченной изнутри эллипсоидом, требуют применения особой системы ортогональных криволинейных координат.

Если x, y, z означают такого рода функции трех параметров λ, μ, ν, что поверхности

$$\lambda=\text{const.},\quad \mu=\text{const.},\quad \nu=\text{const.} \tag{1}$$

ортогональны друг к другу вдоль их линий пересечения, и если, кроме того,

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{h_1^2}&=\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2,\\ \frac{1}{h_2^2}&=\left(\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\mu}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\mu}\right)^2,\\ \frac{1}{h_3^2}&=\left(\frac{\partial x}{\partial\nu}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\nu}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\nu}\right)^2,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

то направляющие косинусы нормалей к трем поверхностям, проходящим через точку (x, y, z), будут соответственно

$$\left.\begin{aligned}&\left(h_1\frac{\partial x}{\partial\lambda},\ h_1\frac{\partial y}{\partial\lambda},\ h_1\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right),\quad \left(h_2\frac{\partial x}{\partial\mu},\ h_2\frac{\partial y}{\partial\mu},\ h_2\frac{\partial z}{\partial\mu}\right),\\ &\left(h_3\frac{\partial x}{\partial\nu},\ h_3\frac{\partial y}{\partial\nu},\ h_3\frac{\partial z}{\partial\nu}\right).\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Отсюда следует, что длины линейных элементов, проведенных по направлению этих нормалей, равны соответственно

$$\frac{\delta\lambda}{h_1},\quad \frac{\delta\mu}{h_2},\quad \frac{\delta\nu}{h_3}.$$

Таким образом, если φ есть потенциал скоростей некоторого движения жидкости, то полный поток через прямоугольный параллелепипед, заключенный между шестью поверхностями

$$\lambda\pm\frac{1}{2}\delta\lambda,\quad \mu\pm\frac{1}{2}\delta\mu,\quad \nu\pm\frac{1}{2}\delta\nu,$$

выражается в виде

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(h_1\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{\delta\mu}{h_2}\frac{\delta\nu}{h_3}\right)\delta\lambda+\frac{\partial}{\partial\mu}\left(h_2\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\frac{\delta\nu}{h_3}\frac{\delta\lambda}{h_1}\right)\delta\mu+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(h_3\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\frac{\delta\lambda}{h_1}\frac{\delta\mu}{h_2}\right)\delta\nu.$$

Из формулы (3) § 42 следует, что тот же самый поток выражается через $\Delta\varphi$, умноженное на объем параллелепипеда, т. е. на $\frac{\delta\lambda\,\delta\mu\,\delta\nu}{h_1h_2h_3}$.

Отсюда следует [1])

$$\Delta\varphi=h_1h_2h_3\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)+\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{h_2}{h_3h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)\right\}. \quad (4)$$

Полагая это выражение равным нулю, получим общее уравнение неразрывности в ортогональных криволинейных координатах, специальные случаи которого уже исследованы в § 83, 103, 107.

Теория триортогональных систем поверхностей математически очень привлекательна и богата интересными и изящными формулами. Мы заметим еще следующее: если рассматривать λ, μ, ν как функции от x, y, z, то направляющие косинусы трех выше рассмотренных линейных элементов могут быть выражены также в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial\lambda}{\partial x},\ \frac{1}{h_1}\frac{\partial\lambda}{\partial y},\ \frac{1}{h_1}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right),\\&\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial\mu}{\partial x},\ \frac{1}{h_2}\frac{\partial\mu}{\partial y},\ \frac{1}{h_2}\frac{\partial\mu}{\partial z}\right),\\&\left(\frac{1}{h_3}\frac{\partial\nu}{\partial x},\ \frac{1}{h_3}\frac{\partial\nu}{\partial y},\ \frac{1}{h_3}\frac{\partial\nu}{\partial z}\right).\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Отсюда и из выражений (3) могут быть получены многие интересные соотношения. Однако данные выше формулы вполне достаточны для наших целей.

§ 112. В приложениях, к которым мы теперь переходим, тройная ортогональная система поверхностей состоит из софокусных поверхностей второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}-1=0, \quad (1)$$

свойства которых излагаются в учебниках геометрии.

Через всякую произвольную данную точку (x, y, z) проходят три поверхности системы, соответственно трем корням θ уравнения (1), если рассматривать его как кубическое уравнение для θ. Если (как мы большей частью будем предполагать) $a>b>c$, то один из корней, скажем λ, будет лежать между ∞ и $-c^2$, второй μ—

[1]) Вышеизложенный метод был дан в работе W. Thomson, On the Equations of Motion of Heat referred to Curvilinear Coordinates, Cambridge Math. Journ., IV, 179, (1843) (Papers, 1, 25). Мы укажем также Jacobi, Über eine particuläre Lösung d. partiellen Differentialgleichung..., Crelle, XXXVI, 113 (1847) [Werke, II, 198]. Преобразование $\Delta\varphi$ к общим ортогональным координатам было впервые проведено Lamé, Sur les lois de l'équilibre du fluide éthéré, Journ. de l'Ecole Polyt., XIV, 191 (1834). См. также его Leçons sur les Coordonnées Curvilignes, Paris., 1859, стр. 22.

между $-c^2$ и $-b^2$ и третий ν — между $-b^2$ и $-a^2$. Поверхности λ, μ, ν, следовательно, будут представлять соответственно эллипсоиды, однополостные и двуполостные гиперболоиды.

Из этого определения λ, μ, ν непосредственно следует, что

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}-1=\frac{(\lambda-\theta)(\mu-\theta)(\nu-\theta)}{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)} \tag{2}$$

удовлетворяется тождественно для всех значений θ. Если (2) умножить на $a^2+\theta$ и положить затем $\theta=-a^2$, то получим первое из следующих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x^2&=\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\\ y^2&=\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},\\ z^2&=\frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Отсюда получается

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial\lambda}&=\frac{1}{2}\,\frac{x}{a^2+\lambda},\\ \frac{\partial y}{\partial\lambda}&=\frac{1}{2}\,\frac{y}{b^2+\lambda},\\ \frac{\partial z}{\partial\lambda}&=\frac{1}{2}\,\frac{z}{c^2+\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

А из этого следует в обозначениях (2) § 111

$$\frac{1}{h_1^2}=\frac{1}{4}\left\{\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right\}. \tag{5}$$

Если уравнение (2) мы продиференцируем по θ и положим затем $\theta=\lambda$, то получим первое из следующих трех уравнений:

$$\left.\begin{aligned} h_1^2&=4\,\frac{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)},\\ h_2^2&=4\,\frac{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)},\\ h_3^2&=4\,\frac{(a^2+\nu)(b^2+\nu)(c^2+\nu)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Остальные выражения систем (3) и (6) написаны из соображений симметрии [1]).

[1]) Отметим, что h_1, h_2, h_3 суть удвоенные перпендикуляры, опущенные из начала на касательные плоскости трех поверхностей λ, μ, ν.

Если вставить эти результаты в уравнение (4) § 111, то получим [1])

$$\Delta\varphi = -\frac{4}{(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)}\Big[(\mu-\nu)\Big\{(a^2+\lambda)^{1/2}(b^2+\lambda)^{1/2}(c^2+\lambda)^{1/2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big\}^2 + (\nu-\lambda)\Big\{(a^2+\mu)^{1/2}(b^2+\mu)^{1/2}(c^2+\mu)^{1/2}\frac{\partial}{\partial\mu}\Big\}^2 + (\lambda-\mu)\Big\{(a^2+\nu)^{1/2}(b^2+\nu)^{1/2}(c^2+\nu)^{1/2}\frac{\partial}{\partial\nu}\Big\}^2\Big]\varphi. \quad (7)$$

§ 113. Частные решения преобразованного уравнения $\Delta\varphi = 0$, которые мы сначала разберем, это — те, у которых φ есть функция одного (и только одного) из переменных λ, μ, ν. Так, например, φ может быть функцией только от λ, если

$$(a^2+\lambda)^{1/2}(b^2+\lambda)^{1/2}(c^2+\lambda)^{1/2}\frac{d\varphi}{d\lambda} = \text{const.};$$

отсюда следует

$$\varphi = C\int_{\lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{D}, \quad (1)$$

где

$$D = \{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)\}^{1/2}, \quad (2)$$

причем аддитивная постоянная, содержащаяся в φ, выбрана таким образом, что φ равна нулю для $\lambda = \infty$.

При этом решении, которое соответствует решению $\varphi = \frac{A}{r}$ в сферических функциях, эквипотенциальные поверхности суть софокусные эллипсоиды, и движение в пространстве вне одного из них (например того, для которого $\lambda = 0$) таково, как если бы оно происходило от некоторого распределения простых источников на его поверхности. Скорость в какой-либо точке дается формулой

$$-h_1\frac{d\varphi}{d\lambda} = C\frac{h_1}{D}. \quad (3)$$

На большом расстоянии от начала эллипсоиды λ приближаются к сфере радиуса $\lambda^{1/2}$, и скорость становится равной $\frac{2C}{r^2}$, где r означает расстояние от начала. На каждой отдельной поверхности уровня λ скорость меняется пропорционально длине перпендикуляра, опущенного из начала на касательную плоскость.

Чтобы найти на поверхности $\lambda = 0$ то распределение источников, которое производило бы указанное движение во внешнем пространстве, мы подставим вместо φ значение (1) в формулу (11) § 58

[1]) Ср. Lamé, Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température, Liouville, II, 147 (1837).

и вместо φ' (это относится к внутреннему пространству) — постоянное значение

$$\varphi' = C \int_0^\infty \frac{d\lambda}{D}. \tag{4}$$

Тогда эта формула дает на поверхности искомое значение распределения плотности

$$\frac{C}{abc} h_1. \tag{5}$$

Решение (1) может также рассматриваться как представляющее движение, обусловленное изменением размеров эллипсоида, при котором поверхность остается подобной себе самой, а главные оси сохраняют свое направление. Если мы положим

$$\frac{\dot a}{a} = \frac{\dot b}{b} = \frac{\dot c}{c} = k,$$

то условие на поверхности (4) § 110 представится в виде

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{2} k h_1,$$

которое будет тождественно с условием (3), если положить

$$C = \frac{1}{2} kabc.$$

Частным случаем (5) является распределение источников по *эллиптическому диску*, для которого $\lambda = -c^2$, и, следовательно, $z^2 = 0$. Этот случай важен для электростатики, а с гидродинамической точки зрения находит интересное применение для течения через *эллиптическое отверстие*. Если плоскость xy, кроме области, заключенной внутри эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0,$$

состоит из тонкой твердой стенки, то мы будем иметь, полагая в вышенаписанных формулах $c = 0$,

$$\varphi = \mp A \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{1/2} (b^2+\lambda)^{1/2} \lambda^{1/2}}, \tag{6}$$

где верхний предел есть положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{\lambda} = 1, \tag{7}$$

а отрицательный или положительный знак следует взять, смотря по тому, лежит ли точка, для которой мы ищем φ, на положительной или отрицательной стороне плоскости xy. Оба эти значения φ на

отверстии, где $\lambda=0$, непрерывно связаны между собой. Как и раньше, скорость на большом расстоянии приближенно равна $\frac{2A}{r^2}$, и полный поток через площадь $2\pi r^2$ будет равен тогда $4\pi A$. Полное изменение φ при изменении λ от $-\infty$ до $+\infty$ равно

$$2A\int_0^{\infty}\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{1/2}(b^2+\lambda)^{1/2}\lambda^{1/2}}=4A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}.$$

Следовательно „проводимость" отверстия (термин заимствуем из электричества) будет равна

$$\frac{\pi}{\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}}. \tag{8}$$

Для круглого отверстия это равно $2a$.

Для точек в отверстии скорость может быть определена прямо из уравнений (6) и (7); именно, мы можем, так как λ мало, положить приближенно

$$\delta z=\pm\lambda^{1/2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2},\quad \delta\varphi=\mp\frac{2A\lambda^{1/2}}{ab}.$$

Отсюда следует

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{2A}{ab}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Это выражение, как и следовало ожидать, обращается на краях отверстия в бесконечность. Частный случай *круглого* отверстия был уже изучен другим путем в § 102, 108.

§ 114. Мы переходим теперь к изучению решения уравнения $\Delta\varphi=0$, которое конечно в бесконечности и для пространства вне эллипсоида, а для внутреннего пространства соответствует решению $\varphi=x$. Следуя аналогии со сферическими функциями, мы можем положить в виде пробы

$$\varphi=x\chi, \tag{1}$$

что дает

$$\Delta\chi+\frac{2}{x}\frac{\partial\chi}{\partial x}=0. \tag{2}$$

Поставим теперь вопрос, нельзя ли удовлетворить этому уравнению (2) функцией χ, зависящей только от λ. При этом допущении согласно § 111 мы будем иметь

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}=h_1\frac{\partial\chi}{\partial\lambda}\,h_1\frac{\partial x}{\partial\lambda},$$

и, следовательно, по (4), (6) § 112

$$\frac{2}{x}\frac{\partial\chi}{\partial x} = 4\frac{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}\frac{d\chi}{d\lambda}.$$

Если выразить $\Delta\chi$ через λ, то уравнение (2) представится в виде

$$\left\{(a^2+\lambda)^{1/2}(b^2+\lambda)^{1/2}(c^2+\lambda)^{1/2}\frac{d}{d\lambda}\right\}^2\chi = -(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)\frac{d\chi}{d\lambda},$$

а это может быть написано так:

$$\frac{d}{d\lambda}\ln\left\{(a^2+\lambda)^{1/2}(b^2+\lambda)^{1/2}(c^2+\lambda)^{1/2}\frac{d\chi}{d\lambda}\right\} = -\frac{1}{a^2+\lambda}.$$

Отсюда следует

$$\chi = C\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{3/2}(b^2+\lambda)^{1/2}(c^2+\lambda)^{1/2}}, \tag{3}$$

причем произвольное постоянное, которое появляется при втором интегрировании, выбрано, как и раньше, так, чтобы χ обращалось в нуль в бесконечности.

Решение, содержащееся в выражениях (1) и (3), позволяет нам найти движение жидкости, покоящейся в бесконечности, вызванное движением в жидкости твердого эллипсоида параллельно одной из главных осей. Если мы употребим те же обозначения, как и выше, и предположим, что эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{4}$$

движется параллельно оси x со скоростью U, то условие на поверхности напишется

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = -U\frac{\partial x}{\partial\lambda} \quad \text{для } \lambda = 0. \tag{5}$$

Для краткости положим

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_0 &= abc\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)D},\\
\beta_0 &= abc\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)D},\\
\gamma_0 &= abc\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)D},
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где

$$D = \{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)\}^{1/2}. \tag{7}$$

Легко видеть, что величины α_0, β_0, γ_0 суть просто числа. Условиям нашей задачи удовлетворяет функция

$$\varphi = Cx \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\,D}, \tag{8}$$

если положить

$$C = \frac{abc}{2-\alpha_0} U. \tag{9}$$

Соответствующее решение для движения эллипсоида параллельно оси y или оси z может быть написано сразу из соображений симметрии. Сложение этих движений дает случаи любого поступательного движения эллипсоида [1]).

В большом удалении от начала формула (8) будет равнозначна с

$$\varphi = \frac{2}{3} C \frac{x}{r^3}, \tag{10}$$

а это есть потенциал скоростей дублета в начале мощности $\frac{8}{3}\pi C$ или

$$\frac{8}{3} \frac{\pi}{2-\alpha_0} abcU;$$

ср. § 92.

Кинетическая энергия жидкости выражается так:

$$2T = -\varrho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS = \frac{\alpha_0}{2-\alpha_0} \varrho U^2 \iint x l\, dS,$$

где l есть косинус угла между нормалью к поверхности и осью x. Так как второй интеграл равен объему эллипсоида, то получаем

$$2T = \frac{\alpha_0}{2-\alpha_0} \frac{4}{3} \pi abc \varrho U^2. \tag{11}$$

Коэфициент инерции равен, следовательно, дроби

$$k = \frac{\alpha_0}{2-\alpha_0} \tag{12}$$

от массы жидкости, вытесненной твердым телом. Для случая шара ($a=b=c$) мы находим $\alpha_0 = \frac{2}{3}$, $k = \frac{1}{2}$ в согласии с § 92. Если положить $a=b$, то получим случай эллипсоида вращения.

---

[1]) Эта задача была решена впервые Green, Researches on the Vibration of Pendulums in Fluid Media, Trans. R. S. Edin. 1883 (Papers, стр. 315). Решение будет более коротким, если принять во внимание заранее, исходя из теории притяжения, что функция (8) есть решение $\Delta\varphi = 0$, так как оно (с точностью до некоторого постоянного множителя) в действительности представляет компоненту по оси x притяжения, которое производит однородный эллипсоид на внешнюю точку.

Для вытянутого эллипсоида вращения ($b=c$, $a>b$) получаем

$$\alpha_0=\frac{2(1-e^2)}{e^3}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+e}{1-e}-e\right), \tag{13}$$

$$\beta_0=\gamma_0=\frac{1}{e^2}-\frac{1-e^2}{2e^3}\ln\frac{1+e}{1-e}, \tag{14}$$

где e есть эксцентриситет меридионального сечения. Соответствующие формулы для сплющенного эллипсоида даны в § 373. Значения k для вытянутого эллипсоида вращения, который движется вперед соответственно узкой или широкой стороной, равные

$$k_1=\frac{\alpha_0}{2-\alpha_0},\quad k_2=\frac{\beta_0}{2-\beta_0}, \tag{15}$$

приведены в таблице на стр. 196 для ряда значений отношения $\frac{a}{b}$.

Для эллиптического диска ($a\to 0$) формула (11) становится неверной, так как $\alpha_0\to 2$. Отдельное исследование, отправляясь от формул (1) и (3), приводит к результату

$$2T=\frac{4}{3}\pi\rho b^2c^2U^2\,\frac{1}{\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{b^2\sin^2\theta+c^2\cos^2\theta}\,d\theta}. \tag{16}$$

В случае $b=c$ эта формула воспроизводит результат (20) § 102.

§ 115. Мы исследуем теперь, может ли уравнение $\Delta\varphi=0$ удовлетвориться выражением

$$\varphi=yz\chi, \tag{1}$$

где χ есть функция только от λ. Это приводит к уравнению

$$\Delta\chi+\frac{2}{y}\frac{\partial\chi}{\partial y}+\frac{2}{z}\frac{\partial\chi}{\partial z}=0. \tag{2}$$

При этом из уравнений (4) и (6) § 112 следует

$$\frac{2}{y}\frac{\partial\chi}{\partial y}+\frac{2}{z}\frac{\partial\chi}{\partial z}=2h_1^2\left(\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial\lambda}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)\frac{d\chi}{d\lambda}=$$
$$=4\,\frac{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}\left(\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\chi}{d\lambda}.$$

Подставив это в уравнение (2), мы находим из уравнения (7) § 112

$$\frac{d}{d\lambda}\ln\left\{(a^2+\lambda)^{1/2}(b^2+\lambda)^{1/2}(c^2+\lambda)^{1/2}\frac{d\chi}{d\lambda}\right\}=-\frac{1}{b^2+\lambda}-\frac{1}{c^2+\lambda}.$$

Отсюда следует

$$\chi=C\int\limits_\lambda^\infty\frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)D}, \tag{3}$$

причем вторая постоянная интегрирования выбрана, как и выше.

Для твердого эллипсоида, вращающегося около оси x с угловой скоростью Ω_x, условием на поверхности будет

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = \Omega_x\left(z\,\frac{\partial y}{\partial\lambda} - y\,\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right) \tag{4}$$

при $\lambda = 0$. Если допустить, что [1])

$$\varphi = Cyz\int_{\lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)\,D}\,, \tag{5}$$

то мы найдем, что условие на поверхности (4) будет выполнено, когда

$$-\frac{C}{ab^3c^3} + \frac{1}{2}\,C\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\frac{\gamma_0-\beta_0}{abc\,(b^2-c^2)} = \frac{1}{2}\,\Omega_x\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right),$$

или

$$C = \frac{(b^2-c^2)^2}{2\,(b^2-c^2)+(b^2+c^2)\,(\beta_0-\gamma_0)}\,abc\Omega_x. \tag{6}$$

Формулы для случая вращения около оси y или оси z могут быть написаны сразу из соображений симметрии [2]).

Формула для кинетической энергии будет

$$2T = -\varrho\iint\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS =$$

$$= \varrho C\Omega_x^2\int_0^{\infty}\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{1/2}\,(b^2+\lambda)^{3/2}\,(c^2+\lambda)^{3/2}}\cdot\iint(ny-mz)\,yz\,dS,$$

причем (l, m, n) суть направляющие косинусы нормали эллипсоида. Последний интеграл равен

$$\iiint(y^2-z^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{5}\,(b^2-c^2)\,\frac{4}{3}\,\pi abc.$$

Отсюда мы находим

$$2T = \frac{1}{5}\,\frac{(b^2-c^2)^2\,(\gamma_0-\beta_0)}{2\,(b^2-c^2)+(b^2+c^2)\,(\beta_0-\gamma_0)}\cdot\frac{4}{3}\,\pi abc\varrho\Omega_x^2. \tag{7}$$

---

[1]) Выражение (5) отличается только множителем от

$$y\,\frac{\partial\Phi}{\partial z} - z\,\frac{\partial\Phi}{\partial y}\,,$$

где Φ — потенциал притяжения одиородного твердого эллипсоида для внешней точки (x, y, z). Так как $\Delta\Phi = 0$, то вышенаписанная функция, как легко показать, также удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = 0$.

[2]) Решение, содержащееся в (5) и (6), принадлежит C l e b s c h, Über die Bewegung eines Ellipsoides in einer tropfbaren Flüssigkeit, Crelle, LII, 103; LIII, 287 (1854—1856).

В случае вытянутого эллипсоида вращения, который вращается около экваториального диаметра, для отношения коэфициента инерции [1]) к моменту инерции вытесиенной массы жидкости относительно того же диаметра находим выражение

$$k' = \frac{e^4 (\beta_0 - \alpha_0)}{(2-e^2)\{2e^2 - (2-e^2)(\beta_0 - \alpha_0)\}}. \tag{8}$$

Значения k_1, k_2 (определенные в § 114) и k' дает следующая таблица:

$\frac{a}{b}$	k_1	k_2	k'	$\frac{a}{b}$	k_1	k_2	k'
1	0,5	0,5	0	6,01	0,015	0,918	0,764
1,50	0,305	0,621	0,094	6,97	0,036	0,933	0,805
2,00	0,209	0,702	0,240	8,01	0,029	0,945	0,840
2,51	0,156	0,763	0,367	9,02	0,024	0,954	0,865
2,99	0,122	0,803	0,465	9,97	0,021	0,960	0,883
3 99	0,082	0,860	0,608	∞	0	1	1
4,99	0,059	0,895	0,701				

Два другие вида эллипсоидных функцнй второго порядка, конечных в начале координат, даются выражеиием

$$\frac{x^2}{a^2+\theta} + \frac{y^2}{b^2+\theta} + \frac{z^2}{c^2+\theta} - 1, \tag{9}$$

где θ — один из трех корней уравнення

$$\frac{1}{a^2+\theta} + \frac{1}{b^2+\theta} + \frac{1}{c^2+\theta} = 0, \tag{10}$$

которое и есть условие того, что (9) будет удовлетворять уравнению $\Delta\varphi = 0$.

Метод для нахождения соответствующих решений для внешнего пространства разобран в книге Ферерса. Эти решения позволяют представить движение жидкости, окружающей эллипсоид, вызванное изменением длни его осей при условии, что эллипсоид сохраняет постоянный объем:

$$\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = 0. \tag{11}$$

В § 113 мы нашли уже решение для случая, когда эллипсоид расширяется (или стягивается) и при этом остается всегда себе подобным; таким же образом мы можем сложением получить случай внутренней границы, которая произвольно меняет свое положение и размеры и подчинена единственному ограничению — всегда оставаться эллипсоидом. Это расширение результатов, найденных Грином и Клебшем, дано было впервые Бьеркнесом [2]) в форме, несколько отличающейся от изложенной здесь.

§ 116. Исследования этой главы относились почти исключительно к случаю сферических или эллипсоидальных границ.

Само собой понятно, что решения уравнения $\Delta\varphi = 0$, относящиеся к другим видам границ, могут быть получены более или менее ана-

[1]) Здесь под коэфициентом инерции следует понимать присоединенный момент инерции. *Прим. ред.*

[2]) См. сноску на стр. 185.

логично. Поверхность, которую с точки зрения нашего предмета следует рассматривать далее в первую очередь, есть кольцо или тор; этот случай весьма искусно трактовался различными методами Хиксом и Дайсоном [1]). Мы можем еще указать на математически интересную задачу, связанную с движением оболочки, вырезанной из сферической поверхности, которая была исследована Бассе [2]).

ДОБАВЛЕНИЕ К ГЛАВЕ V

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, ОТНЕСЕННЫЕ К ОБЩИМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ

Сохраняя обозначения § 111, будем диференцирование x, y, z по независимым переменным λ, μ, ν соответственно обозначать индексами 1, 2, 3. Так, например, направляющие косинусы нормали к поверхности $\lambda = \text{const.}$ будут h_1x_1, h_1y_1, h_1z_1 и т. п.

Если u, v, w будут компоненты скорости по трем нормалям, то полный поток наружу через квазипрямоугольный параллелепипед, ребра которого суть $\frac{\delta\lambda}{h_1}$, $\frac{\delta\mu}{h_2}$, $\frac{\delta\nu}{h_3}$, будет равен

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{u\,\delta\mu\,\delta\nu}{h_2h_3}\right)\delta\lambda+\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{v\,\delta\nu\,\delta\lambda}{h_3h_1}\right)\delta\mu+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{w\,\delta\lambda\,\delta\mu}{h_1h_2}\right)\delta\nu;$$

отсюда получим выражение для коэфициента кубического расширения в виде

$$\Delta=h_1h_2h_3\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{u}{h_2h_3}\right)+\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{v}{h_3h_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{w}{h_1h_2}\right)\right\}; \qquad (1)$$

ср. (4) § 111.

Циркуляция по прямоугольному контуру на поверхности $\lambda = \text{const.}$, стороны которого суть $\frac{\delta\mu}{h_2}$, $\frac{\delta\nu}{h_3}$, будет выражаться в виде

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{w\,\delta\nu}{h_3}\right)\delta\mu-\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{v\,\delta\mu}{h_2}\right)\delta\nu. \qquad (2)$$

Разделяя полученное на площадь контура, получим первую из следующих формул для компонент вихря по трем нормалям:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=h_2h_3\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{w}{h_3}\right)-\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{v}{h_2}\right)\right\},\\ \eta&=h_3h_1\left\{\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u}{h_1}\right)-\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{w}{h_3}\right)\right\},\\ \zeta&=h_1h_2\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{v}{h_2}\right)-\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{u}{h_1}\right)\right\}.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

---

[1]) Hicks, On Toroidal Functions, Phil. Trans., CLXXII, 609, 1881; Dyson, On the Potential of on Anchor-Ring, Phil. Trans., CLXXXIV, 43, 1892; см. также C. Neumann, прим. на стр. 168.

[2]) Basset, On the of an Electrified Spherical Bowl etc., Proc. Lond. Math. Soc. (1), XVI, 286 (1885); Hydrodynamics, I, 149.

Чтобы найти выражения для компонент ускорения, мы заметим, что за время δt частица изменит свои параметры от (λ, μ, ν) до $(\lambda+\delta\lambda, \mu+\delta\mu, \nu+\delta\nu)$, где

$$\frac{\delta\lambda}{h_1} = u\,\delta t, \quad \frac{\delta\mu}{h_2} = v\,\delta t, \quad \frac{\delta\nu}{h_3} = w\,\delta t.$$

А тогда компоненты скорости становятся равными

$$u + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + h_1 u\,\frac{\partial u}{\partial\lambda} + h_2 v\,\frac{\partial u}{\partial\mu} + h_3 w\,\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\delta t \text{ и т. д.,} \tag{4}$$

но мы должны отнести их к первоначальным направлениям u, v, w. За промежуток времени δt направляющие косинусы нового направления v станут

$$h_2x_2 + \frac{\partial}{\partial\lambda}(h_2x_2)\,h_1u\,\delta t + \frac{\partial}{\partial\mu}(h_2x_2)\,h_2v\,\delta t + \frac{\partial}{\partial\nu}(h_2x_2)\,h_3w\,\delta t \quad \text{и т. д.}$$

причем в ненаписанных двух выражениях производные x заменяются соответственно через производные y и z. Отсюда косинус угла между новым направлением v и первоначальным направлением u, т. е. (h_1x_1, h_1y_1, h_1z_1), будет равен

$$\{(x_1x_{12}+y_1y_{12}+z_1z_{12})\,h_1u + (x_1x_{22}+y_1y_{22}+z_1z_{22})\,h_2v + \\ + (x_1x_{23}+y_1y_{23}+z_1z_{23})\,h_3w\}\,h_1h_2\,\delta t. \tag{5}$$

Некоторые члены из этого выражения опущены в силу соотношения

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0, \tag{6}$$

которое следует из условия ортогональности координат. Кроме того, диференцируя (6) по ν и сравнивая с подобными результатами [1]), мы заключаем, что

$$x_1x_{23} + y_1y_{23} + z_1z_{23} = 0. \tag{7}$$ [2])

Точно так же диференцируя тождество

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \frac{1}{h_1^2} \tag{8}$$

по μ, получим

$$x_1x_{12} + y_1y_{12} + z_1z_{12} = \frac{1}{h_1}\,\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{h_1}\right). \tag{9}$$

Далее,

$$x_1x_{22} + y_1y_{22} + z_1z_{22} = \frac{\partial}{\partial\mu}(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) - (x_2x_{12} + y_2y_{12} + z_2z_{12}) = \\ = -\frac{1}{h_2}\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{h_2}\right). \tag{10}$$

Таким образом выражение (5) приводится к виду

$$\left\{u\,\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{h_1}\right) - v\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{h_2}\right)\right\} h_1h_2\,\delta t. \tag{11}$$

Тем же способом можно показать, что косинус угла между новым направлением w и первоначальным направлением u есть

$$\left\{u\,\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{h_1}\right) - w\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{h_3}\right)\right\} h_1h_3\,\delta t. \tag{12}$$

---

[1]) Которые получаются при диференцировании по μ и λ других соотношений ортогональности. *Прим. ред.*

[2]) Forsyth, Differential Geometry, Cambridge, 1912, стр. 412.

Следовательно, ускорение в первоначальном направлении u оказывается равным

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+h_1u\frac{\partial u}{\partial\lambda}+h_2v\frac{\partial u}{\partial\mu}+h_3w\frac{\partial u}{\partial\nu}+\\&+h_1h_2v\left\{u\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{h_1}\right)-v\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{h_2}\right)\right\}+\\&+h_1h_3w\left\{u\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{h_1}\right)-w\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{h_3}\right)\right\},\end{aligned}\tag{13}$$ [1]

или, в более симметричном виде

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+h_1u\frac{\partial u}{\partial\lambda}+h_2v\frac{\partial u}{\partial\mu}+h_3w\frac{\partial u}{\partial\nu}+\\&+h_1u\left\{h_1u\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{h_1}\right)+h_2v\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{h_1}\right)+h_3w\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{h_1}\right)\right\}-\\&-h_1\left\{h_1u^2\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{h_1}\right)+h_2v^2\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{h_2}\right)+h_3w^2\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{h_3}\right)\right\}.\end{aligned}\tag{14}$$

Выражения для ускорений в направлении v и w можно написать из соображеиий симметрии. Например, в цилидрнческих координатах мы имеем

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z.$$

Полагая

$$\lambda=r,\quad \mu=\theta,\quad \nu=z,$$

иолучим

$$h_1=1,\quad h_2=\frac{1}{r},\quad h_3=1.$$

Коэфициент кубического расширения будет равен

$$\Delta=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial v}{r\,\partial\theta}+\frac{\partial w}{\partial z},\tag{15}$$

а компоненты вихря

$$\xi=\frac{\partial w}{r\,\partial\theta}-\frac{\partial v}{\partial z},\quad \eta=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial r},\quad \zeta=\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}-\frac{\partial u}{r\,\partial\theta}.\tag{16}$$

Компоненты же ускорения будут выражаться в виде

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+v\frac{\partial u}{r\,\partial\theta}-\frac{v^2}{r}+w\frac{\partial u}{\partial z},\\&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial r}+v\frac{\partial v}{r\,\partial\theta}+\frac{uv}{r}+w\frac{\partial v}{\partial z},\\&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial r}+v\frac{\partial w}{r\,\partial\theta}+w\frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

Если в этих формулах положить $w=0$, то получим результаты в полярных координатах на плоскости (§ 16а).

В сферических координатах имеем

$$x=r\sin\theta\cos\omega,\quad y=r\sin\theta\sin\omega,\quad z=r\cos\theta.$$

Полагая

$$\lambda=r,\quad \mu=\theta,\quad \nu=\omega,$$

---

[1] G. B. Jeffery, Phil. Mag. (6), XXIX, 445 (1915).

будем иметь

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{r}, \quad h_3 = \frac{1}{r \sin\theta}.$$

Отсюда

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial r} + 2\,\frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\,\partial\theta} + \frac{v}{r}\,\operatorname{ctg}\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial w}{\partial\omega}, \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\partial w}{r\,\partial\theta} - \frac{\partial v}{r\sin\theta\,\partial\omega} - \frac{w}{r}\,\operatorname{ctg}\theta, \\ \eta &= \frac{\partial u}{r\sin\theta\,\partial\omega} - \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}, \\ \zeta &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{\partial u}{r\,\partial\theta}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Компоненты ускорения будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial r} + v\,\frac{\partial u}{r\,\partial\theta} + w\,\frac{\partial u}{r\sin\theta\,\partial\omega} - \frac{v^2 + w^2}{r}, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial r} + v\,\frac{\partial v}{r\,\partial\theta} + w\,\frac{\partial v}{r\sin\theta\,\partial\omega} + \frac{uv}{r} - \frac{w^2}{r}\,\operatorname{ctg}\theta, \\ &\frac{\partial w}{\partial t} + u\,\frac{\partial w}{\partial r} + v\,\frac{\partial w}{r\,\partial\theta} + w\,\frac{\partial w}{r\sin\theta\,\partial\omega} + \frac{uw}{r} + \frac{vw}{r}\,\operatorname{ctg}\theta; \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

ср. § 16а.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В ЖИДКОСТИ; ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ.

§ 117. В этой главе мы предполагаем изучить интересную динамическую задачу о движении одного или нескольких твердых тел в жидкости, лишенной трения. Развитие этой теории обязано главным образом Томсону и Тэту [1]), а также и Кирхгофу [2]). Сущность методов этих авторов состоит в том, что твердые тела и жидкость рассматриваются вместе как *одна* динамическая система, благодаря чему становится излишним утомительное вычисление результирующей давления жидкости на поверхности тел.

Мы начнем со случая, когда только одно тело движется в неограниченной несжимаемой жидкости; предположим сначала, что движение жидкости обусловлено только движением твердого тела и есть, следовательно, безвихревое и ациклическое. Некоторые частные случаи этой задачи были уже попутно разобраны на предшествую-

---

[1]) Thomson and Tait, Natural Philosophy, § 320. Дальнейшие исследования Кельвина будут указаны позже.

[2]) Kirchhoff, Über die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit, Crelle, LXXI, 237 (1869). (Ges. Abh., стр. 376); Mechanik, 19-я лекция.

щих страницах, и мы видели, что полное воздействие жидкости на движение твердого тела может быть заменено увеличением инертной массы твердого тела. Мы увидим, что аналогичный результат имеет место вообще, если применить выражение „масса" в несколько расширенном смысле.

При принятых условиях движение жидкости характеризуется существованием однозначного потенциала скоростей φ, который удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\Delta\varphi = 0; \tag{1}$$

кроме того, должны выполняться еще следующие условия: 1) значение $-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, где δn обозначает по обыкновению элемент нормали в точке поверхности тела, проведенной по направлению к жидкости, должно равняться скорости соответственной точки поверхности по нормали; 2) частные производные $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ должны обращаться в нуль на бесконечности в любом направлении от твердого тела. Это второе условие следует признать необходимым по той причине, что конечная скорость в бесконечности дала бы бесконечно большую кинетическую энергию, которая не может быть получена с помощью конечных сил, действующих на тело в течение конечного промежутка времени. К этому условию мы придем также, если примем, что жидкость заключена в бесконечно большой сосуд, бесконечно удаленный со всех сторон от движущегося твердого тела. Действительно, при этом допущении можно рассматривать пространство, наполненное жидкостью, образованным как бы из трубок тока, которые начинаются и кончаются на поверхности тела, так что полный поток через всякую конечную или бесконечную поверхность, проведенную внутри жидкости, должен быть конечным, а это дает в бесконечности скорость, равную нулю.

В § 41 было показано, что при вышеизложенных условиях движение жидкости определяется однозначно.

§ 118. Для дальнейшего исследования задачи удобнее следовать методу, введенному в динамику твердого тела Эйлером, и взять систему прямоугольных осей Ox, Oy, Oz, неизменно связанных с телом. Если движение тела в произвольный момент времени определить через проекции мгновенной угловой скорости p, q, r и через проекции поступательной скорости u, v, w начала координат на подвижные оси [1]), то, следуя Кирхгофу, мы можем написать

$$\varphi = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\chi_1 + q\chi_2 + r\chi_3, \tag{2}$$

где, как это непосредственно можно усмотреть, φ_1, φ_2 φ_3, χ_1, χ_2, χ_3 суть некоторые функции от x, y, z, зависящие только от формы и

[1]) Мы употребляем теперь обозначения u, v, w, p, q, r не в их прежнем смысле.

положения поверхности тела по отношению к координатным осям. В самом деле, если l, m, n означают направляющие косинусы направленной в жидкость нормали в некоторой точке поверхности, то кинематическое условие на поверхности будет

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial n} = l(u+qz-ry)+m(v+rx-pz)+n(w+py-qx);$$

вставив вместо φ его значение (2), получим

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} &= l, & -\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} &= m, & -\frac{\partial\varphi_3}{\partial n} &= n,\\ -\frac{\partial\chi_1}{\partial n} &= ny-mz, & -\frac{\partial\chi_2}{\partial n} &= lz-nx, & -\frac{\partial\chi_3}{\partial n} &= mx-ly. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Так как эти функции должны удовлетворять также и уравнению (1) и их производные в бесконечности должны обращаться в нуль, то, согласно § 41, они вполне определены [1]).

§ 119. Каковым бы ни было в некоторый момент времени движение твердого тела и жидкости, оно может быть образовано мгновенно из положения равновесия при помощи подходящим образом выбранного импульсивного *динамического винта*, приложенного к твердому телу. Этот импульсивный винт есть тот, который необходим, чтобы уравновесить систему действующих на поверхность импульсивных давлений $\varrho\varphi$ и, кроме того, образовать действительное количество движения всех частиц тела. Он был назван Кельвином *импульсом* системы в рассматриваемый момент времени. Необходимо отметить, что определенный таким образом импульс не тождествен с полным количеством движения [2]) системы; это последнее в данном случае фактически неопределимо [3]). Мы сейчас же докажем, однако, что импульс вследствие внешних действующих на тело сил меняется точно таким же образом, как количество движения конечной динамической системы.

Рассмотрим сначала некоторое действительное движение твердого тела с момента t_0 до момента t_1 под действием произвольных сил, приложенных к этому телу, в *конечной* массе жидкости, заключенной в неподвижном сосуде произвольной формы. Вообразим, что движение перед моментом t_0 произошло из положения равновесия с помощью сил, действующих на твердое тело (безразлично, непрерывных или импульсивных), и после момента t_1 опять таким же образом прекращено при помощи сил, действующих на тело. Так как количество движения системы, как в начале, так и в конце

---

[1]) Для частного случая поверхности эллипсоида их значения могут быть получены сразу из результатов § 114, 115.

[2]) Следует иметь в виду, что здесь под полным количеством движения системы подразумевается главный вектор количеств движения вместе с главным моментом количеств движения. *Прим. ред.*

[3]) То-есть попытка его вычислить приводит к „несобственным" интегралам.

этого процесса равно нулю, то интегралы по времени от сил, действующих на тело, вместе с интегралом по времени от давлений, производимых сосудом на жидкость, должны образовать уравновешенную систему сил. Величины этих давлений вычисляются согласно § 20 по формуле

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} q^2 + F(t). \tag{1}$$

Давления, которые на всей поверхности сосуда имеют одни и те же значения, при суммировании дают результирующую, равную нулю; следовательно, так как, к тому же, φ в начале и в конце постоянно, то единственная эффективная часть интеграла давления $\int p\, dt$ будет дана только одним членом

$$-\frac{1}{2} \varrho \int q^2\, dt. \tag{2}$$

Возвратимся теперь к первоначальной формулировке нашей задачи и предположим, что окружающий сосуд бесконечно велик и в каждом направлении бесконечно удален от движущегося тела. Если рассматривать расположение трубок тока (§ 36), то легко видеть, что скорость q жидкости на большом расстоянии r от начала, лежащего вблизи твердого тела, в конечном счете есть величина самое большее порядка $\frac{1}{r^2}$ [1]); следовательно, подинтегральное выражение (2) будет величиной порядка $\frac{1}{r^4}$. Так как элементы поверхности сосуда суть величины порядка $r^2\, \delta\tilde{\omega}$, причем $\delta\tilde{\omega}$ есть элемент телесного угла, то результирующая и главный момент давлений обращаются в нуль. А тогда указанное выше заключение приводит к тому, что интеграл по времени от сил, действующих на тело, обращается в нуль.

Если мы вообразим, что движение произошло *мгновенно* из положения равновесия в момент t_0 и прекращено *мгновенно* в момент t_1, то результат, к которому мы пришли, можно выразить следующим образом:

„Импульс“ движения (в смысле Кельвина) в момент t_1 отличается от „импульса“ в момент t_0 на интеграл по времени от внешних сил, которые действовали на тело в течение промежутка времени $t_1 - t_0$ [2]).

Необходимо отметить, что вышеизложенное рассуждение остается в существенных чертах без изменения, если одно тело заменить *группой* тел, которые, кроме того, могут быть не твердыми, а упругими, и даже тогда, когда твердые тела заменены *жидкими массами*, находящимися в вихревом движении.

---

[1]) Она на самом деле будет порядка $\frac{1}{r^3}$ тогда, когда, как в рассматриваемом случае, полный поток наружу равен нулю.

[2]) W. Thomson, см. примечание на стр. 50. Вышеизложенный способ доказательства был любезно сообщен автору Ларморм (J. Larmor).

§ 120. Чтобы выразить аналитически изложенный выше результат, предположим, что ξ, η, ζ, λ, μ, ν суть компоненты сил и пар, которые вместе образуют импульс; равным образом X, Y, Z, L, M, N обозначают систему внешних сил. Полное изменение ξ, η, ζ, λ, μ, ν, происходящее отчасти от движения осей, к которым отнесены эти величины, и отчасти от внешних сил, представляется тогда следующими формулами [1]):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= r\eta - q\zeta + X, & \frac{d\lambda}{dt} &= w\eta - v\zeta + r\mu - q\nu + L, \\ \frac{d\eta}{dt} &= p\zeta - r\xi + Y, & \frac{d\mu}{dt} &= u\zeta - w\xi + p\nu - r\lambda + M, \\ \frac{d\zeta}{dt} &= q\xi - p\eta + Z, & \frac{d\nu}{dt} &= v\xi - u\eta + q\lambda - p\mu + N. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Действительно, в момент $t+\delta t$ подвижные оси образуют с их положениями в момент t углы, косинусы которых суть

$$(1,\ r\,\delta t,\ -q\,\delta t),\quad (-r\,\delta t,\ 1,\ p\,\delta t),\quad (q\,\delta t,\ -p\,\delta t,\ 1).$$

Поэтому для составляющей, параллельной новому положению оси x, будем иметь

$$\xi + \delta\xi = \xi + \eta\cdot r\,\delta t - \zeta\cdot q\,\delta t + X\,\delta t.$$

Если мы затем при составлении моментов относительно нового положения Ox примем во внимание, что O смещено на отрезки $u\,\delta t$, $v\,\delta t$, $w\,\delta t$, параллельные осям, то получим

$$\lambda + \delta\lambda = \lambda + \eta\cdot w\,\delta t - \zeta\cdot v\,\delta t + \mu\cdot r\,\delta t - v\cdot q\,\delta t + L\,\delta t.$$

Эти уравнения вместе с аналогичными, которые могут быть написаны сразу на основании симметрии, и представляют как раз уравнения (1).

Если внешние силы на тело не действуют, то легко получить для этих уравнений следующие интегралы:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \text{const.},\quad \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta = \text{const.}, \quad (2)$$

которые выражают то, что сила и момент пары, составляющие импульс [2]), будут постоянными по величине.

§ 121. Теперь мы должны еще выразить ξ, η, ζ, λ, μ, ν через u, v, w, p, q, r. Пусть $\mathbf{T}$ обозначает кинетическую энергию жидкости, так что

$$2\mathbf{T} = -\varrho \iint \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS, \quad (1)$$

---

[1]) Ср. H a y w a r d, On a Direct Method of Estimating Velocities, Accelerations, and all similar Quantities, with respect to Axes moveable in any manner in space, Cambr. Trans., X, 1 (1856).

[2]) То-есть составляющие импульсивный винт. *Прим. ред.*

где интегрирование распространяется по поверхности движущегося тела. Если подставить значение φ из уравнения (2) § 118, то мы получим

$$\left.\begin{aligned} 2T = {} & \mathbf{A}u^2 + \mathbf{B}v^2 + \mathbf{C}w^2 + 2\mathbf{A}'vw + 2\mathbf{B}'wu + 2\mathbf{C}'uv + \\ & + \mathbf{P}p^2 + \mathbf{Q}q^2 + \mathbf{R}r^2 + 2\mathbf{P}'qr + 2\mathbf{Q}'rp + 2\mathbf{R}'pq + \\ & + 2p(\mathbf{F}u + \mathbf{G}v + \mathbf{H}w) + 2q(\mathbf{F}'u + \mathbf{G}'v + \mathbf{H}'w) + \\ & + 2r(\mathbf{F}''u + \mathbf{G}''v + \mathbf{H}''w); \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

21 коэфициент **A**, **B**, **C** и т. д. суть некоторые постоянные, которые определяются видом и положением поверхности относительно координатных осей. Мы имеем, например,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\varrho \iint \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, dS = \varrho \iint \varphi_1 l\, dS, \\ \mathbf{A}' &= -\frac{1}{2}\varrho \iint \left(\varphi_2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} + \varphi_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right) dS = \\ &= -\varrho \iint \varphi_2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial n}\, dS = -\varrho \iint \varphi_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\, dS = \\ &= \varrho \iint \varphi_2 n\, dS = \varrho \iint \varphi_3 m\, dS, \\ \mathbf{P} &= -\varrho \iint \chi_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\, dS = \varrho \iint \chi_1 (ny - mz)\, dS, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

причем преобразования основываются на равенствах (3) § 118 и на частном случае теоремы Грина [§ 44 (2)]. Эти выражения для коэфициентов были даны Кирхгофом.

Фактические значения коэфициентов в выраженни для 2T были найдены в предшествующей главе для случая эллипсоида; именно, из § 114 и 115 получается

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\alpha_0}{2-\alpha_0}\,\frac{4}{3}\,\pi\varrho abc, \\ \mathbf{P} &= \frac{1}{5}\,\frac{(b^2-c^2)^2(\gamma_0-\beta_0)}{2(b^2-c^2)+(b^2+c^2)(\beta_0-\gamma_0)}\,\frac{4}{3}\,\pi\varrho abc, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

с аналогичными выражениями для **B**, **C**, **Q**, **R**. Все остальные коэфицненты в этом случае равны нулю, что легко показать. Мы заметим, что

$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = \frac{2(\alpha_0-\beta_0)}{(2-\alpha_0)(2-\beta_0)}\,\frac{4}{3}\,\pi\varrho abc, \quad (5)$$

так что $\mathbf{A}<\mathbf{B}<\mathbf{C}$, когда $a>b>c$, как и следовало ожидать.

Формулы для эллипсоида вращения получаются отсюда, если положить $b=c$; их можно получнть также независимо от этого по методу § 104—109. Так, например, для круглого днска ($a=0$, $b=c$) мы получаем

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{8}{3}\,\varrho c^3, & \mathbf{P} &= 0, \\ \mathbf{B} &= 0, & \mathbf{Q} &= \frac{16}{45}\,\varrho c^5, \\ \mathbf{C} &= 0, & \mathbf{R} &= \frac{16}{45}\,\varrho c^5. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

§ 121a. Когда движение тела состоит только из одного поступательного перемещения, то формула для кинетической энергии жидкости принимает следующий вид:

$$2T = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2A'vw + 2B'wu + 2C'uv. \tag{1}$$

Мы можем теперь показать, что на большом удалении от тела во всех случаях весь эффект сводится к эффекту, создаваемому соответственным дублетом, и что характер этого дублета целиком определяется коэфициентами формулы (1).

Для этого мы прибегнем к формуле (12) § 58

$$4\pi\varphi_P = \int\int (\varphi - \varphi') \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS. \tag{2}$$

Мы можем рассматривать границу тела как тонкую твердую оболочку, содержащую внутри себя жидкость. Допустим, что φ и φ' суть потенциалы скоростей, отнесенные соответственно к внешней и внутренней области. Пусть (x_1, y_1, z_1) будут координаты точки P, которая предполагается удаленной на расстояние, большое по сравнению с размерами тела, и (x, y, z) — координаты элемента поверхности δS. Тогда, полагая

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \qquad r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2},$$

приближенно будем иметь

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^3}, \quad \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} = \frac{lx_1 + my_1 + nz_1}{r_1^3}.$$

Предположим теперь, что оболочка движется с единичной скоростью параллельно оси x без вращения. Полагая

$$\varphi = \varphi_1, \quad \varphi' = -x, \tag{3}$$

получим

$$\int\int \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \frac{Ax_1 + C'y_1 + B'z_1}{\varrho r_1^3} \tag{4}$$

и

$$\int\int \varphi' \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = -\frac{Qx_1}{r_1^3}, \tag{5}$$

где Q обозначает объем тела. В самом деле, мы имеем

$$\int\int xl\, dS = Q, \quad \int\int xm\, dS = 0, \quad \int\int xn\, dS = 0. \tag{6}$$

Отсюда

$$4\pi\varphi_P = \frac{(A + \varrho Q)\, x_1 + C'y_1 + B'z_1}{\varrho r_1^3}. \tag{7}^{1)}$$

---

1) Из работы On Wave Resistance Proc. Roy. Soc., CXI, 15 (1926).

Таким образом, эффект на большом удалении совпадает с эффектом от дублета, но ось дублета не обязательно должна совпадать с направлением перемещения тела. Однако, если тело движется параллельно оси своего установившегося движения (§ 124), то коэфициенты $\mathbf{C}'$ и $\mathbf{B}'$ исчезают, и тогда

$$4\pi\varphi_P = \frac{(A+\varrho Q)\,x_1}{\varrho r_1^3}. \tag{8}$$

Например, в случае сферы мы имеем $\mathbf{A} = \frac{2}{3}\,\pi\varrho a^3$, $Q = \frac{4}{3}\,\pi a^3$ и

$$\varphi_P = \frac{a^3 x_1}{2r_1^3}, \tag{9}$$

как и в § 92.

В общем же случае, когда тело имеет скорость (u, v, w), формула (7) должна быть заменена следующей:

$$4\pi r_1^3\varrho\varphi_P = (\mathbf{A}u + \mathbf{C}'v + \mathbf{B}'w)\,x_1 + (\mathbf{C}'u + \mathbf{B}v + \mathbf{A}'w)\,y_1 + \\ + (\mathbf{B}'u + \mathbf{A}'v + \mathbf{C}w)\,z_1 + \varrho Q(ux_1 + vy_1 + wz_1). \tag{10}$$

Обратно, знание вида потенциала скоростей на бесконечности, обусловленного установившимся движением тела, приводит к знанию соответствующих коэфициентов инерции.

Например, в случае овалов Ранкина, на которые были ссылки в § 97, мы имеем непрерывное распределение источников вдоль оси x, подчиненное тому условию, что полное „напряженне" всех источников есть нуль. Если линейная плотность этого распределения есть m, то получаем

$$\varphi = \int \frac{m\,d\xi}{\sqrt{(x_1-\xi)^2 + y_1^2 + z_1^2}} = \int \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\xi x_1}{r_1^3} + \ldots\right) m\,d\xi,$$

или

$$\varphi = \frac{x_1}{r_1^3}\int m\xi\,d\xi + \ldots, \tag{11}$$

так как $\int m\,d\xi = 0$. Отсюда

$$\frac{\mathbf{A}}{\varrho} + Q = 4\pi\int m\xi\,d\xi. \tag{12}$$ [1]

§ 122. Кинетическая энергия только одного тела, обозначим ее через $\mathbf{T}_1$, выражается следующим образом:

$$2\mathbf{T}_1 = \mathbf{m}(u^2+v^2+w^2) + \mathbf{P}_1p^2 + \mathbf{Q}_1q^2 + \mathbf{R}_1r^2 + \\ + 2\mathbf{P}_1'qr + 2\mathbf{Q}_1'rp + 2\mathbf{R}_1'pq + \\ + 2\mathbf{m}\{\alpha(vr-wq) + \beta(wp-ur) + \gamma(uq-vp)\}, \tag{1}$$

[1] G. J. Taylor, Proc. Roy. Soc., CXX, 13 (1928).

Следовательно, полная энергия системы $\mathbf{T}+\mathbf{T}_1$, мы ее обозначим через T, будет представляться выражением того же общего вида, как и в § 121,

$$\begin{aligned}2T = {} & Au^2+Bv^2+Cw^2+2A'vw+2B'wu+2C'uv+\\ & +Pp^2+Qq^2+Rr^2+2P'qr+2Q'rp+2R'pq+\\ & +2p(Fu+Gv+Hw)+2q(F'u+G'v+H'w)+\\ & +2r(F''u+G''v+H''w),\end{aligned} \qquad (2)$$

где коэфициенты все обозначены единообразными буквами, хотя шесть из них имеют, конечно, те же самые значения, как в формуле (2) § 121.

Значения различных составляющих импульса, выраженные через скорости u, v, w, p, q, r, можно теперь найти при помощи известного метода динамики [1]). Допустим, что некоторая система бесконечно больших сил (X, Y, Z, L, M, N) действует на твердое тело в течение бесконечно малого промежутка времени τ, так что импульс изменяется от (ξ, η, ζ, λ, μ, ν) до ($\xi+\delta\xi$, $\eta+\delta\eta$, $\zeta+\delta\zeta$, $\lambda+\delta\lambda$, $\mu+\delta\mu$, $\nu+\delta\nu$). Работа, произведенная силой X,

$$\int_0^\tau Xu\,dt,$$

по своему значению лежит между

$$u_1\int_0^\tau X\,dt \quad \text{и} \quad u_2\int_0^\tau X\,dt,$$

причем u_1 и u_2 суть наибольшее и наименьшее значения u в течение промежутка τ, т. е. она лежит между $u_1\,\delta\xi$ и $u_2\,\delta\xi$. Если введем теперь допущение, что $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ бесконечно малы, то каждая из величин u_1 и u_2 равна u, и произведенная работа равна $u\,\delta\xi$. Подобным же образом мы можем вычислить работу, произведенную остальными силами и парами сил. Полный результат должен равняться приращению кинетической энергии; мы имеем, следовательно,

$$\begin{aligned}& u\,\delta\xi+v\,\delta\eta+w\,\delta\zeta+p\,\delta\lambda+q\,\delta\mu+r\,\delta\nu=\\ & =\delta T=\frac{\partial T}{\partial u}\delta u+\frac{\partial T}{\partial v}\delta v+\frac{\partial T}{\partial w}\delta w+\frac{\partial T}{\partial p}\delta p+\frac{\partial T}{\partial q}\delta q+\frac{\partial T}{\partial r}\delta r.\end{aligned} \qquad (3)$$

Если изменить теперь скорости в некотором данном отношении, то импульсы изменятся в том же отношении. Поэтому, полагая

$$\frac{\delta u}{u}=\frac{\delta v}{v}=\frac{\delta w}{w}=\frac{\delta p}{p}=\frac{\delta q}{q}=\frac{\delta r}{r}=k,$$

[1]) См. Thomson и Tait, § 313, или Maxwell, Electricity and Magnetism, часть IV, гл. 5.

будем иметь

$$\frac{\delta\xi}{\xi}=\frac{\delta\eta}{\eta}=\frac{\delta\zeta}{\zeta}=\frac{\delta\lambda}{\lambda}=\frac{\delta\mu}{\mu}=\frac{\delta\nu}{\nu}=k.$$

Подставляя эти отношения в формулу (1), получим

$$u\xi+v\eta+w\zeta+p\lambda+q\mu+r\nu=$$
$$=u\frac{\partial T}{\partial u}+v\frac{\partial T}{\partial v}+w\frac{\partial T}{\partial w}+p\frac{\partial T}{\partial p}+q\frac{\partial T}{\partial q}+r\frac{\partial T}{\partial r}=2T, \quad (4)$$

так как T есть однородная функция второй степени. Если взять теперь произвольную вариацию δ от обеих частей (4) и опустить члены, которые сокращаются согласно (3), то мы получим

$$\xi\,\delta u+\eta\,\delta v+\zeta\,\delta w+\lambda\,\delta p+\mu\,\delta q+\nu\,\delta r=\delta T.$$

Так как вариации δu, δv, δw, δp, δq, δr все независимы друг от друга, то мы получаем искомые формулы

$$\left.\begin{aligned} \xi&=\frac{\partial T}{\partial u}, & \lambda&=\frac{\partial T}{\partial p},\\ \eta&=\frac{\partial T}{\partial v}, & \mu&=\frac{\partial T}{\partial q},\\ \zeta&=\frac{\partial T}{\partial w}, & \nu&=\frac{\partial T}{\partial r}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Необходимо отметить следующее: так как ξ, η, ζ, ... — линейные функции от u, v, w, ..., то эти последние можно представить так же, как линейные функции первых, и T можно рассматривать так же, как однородную функцию второй степени от ξ, η, ζ, λ, μ, ν. Когда T представлено таким образом, мы его обозначим через T'. Уравнение (3) дает тогда сразу

$$u\,\delta\xi+v\,\delta\eta+w\,\delta\zeta+p\,\delta\lambda+q\,\delta\mu+r\,\delta\nu=$$
$$=\frac{\partial T'}{\partial\xi}\delta\xi+\frac{\partial T'}{\partial\eta}\delta\eta+\frac{\partial T'}{\partial\zeta}\delta\zeta+\frac{\partial T'}{\varrho\lambda}\delta\lambda+\frac{\partial T'}{\sigma\mu}\delta\mu+\frac{\partial T'}{\partial\nu}\delta\nu;$$

отсюда следует

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{\partial T'}{\partial\xi}, & p&=\frac{\partial T'}{\partial\lambda},\\ v&=\frac{\partial T'}{\partial\eta}, & q&=\frac{\partial T'}{\partial\mu},\\ w&=\frac{\partial T'}{\partial\zeta}, & r&=\frac{\partial T'}{\partial\nu}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Эти формулы в известном смысле взаимны с формулами (5).

Последние результаты мы можем использовать для того, чтобы в случае, когда не действуют внешние силы, кроме интегралов уравнений движения, найденных в § 120, найти еще новый интеграл. Именно имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial T'}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dt}+\ldots+\frac{\partial T'}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{dt}+\ldots=u\frac{d\xi}{dt}+\ldots+p\frac{d\lambda}{dt}+\ldots,$$

а это выражение тождественно обращается в нуль, согласно (1) § 120. Отсюда мы получаем уравнение энергии

$$T = \text{const.} \tag{7}$$

§ 123. В формуле (5) положим, согласно обозначениям § 121,

$$T = \mathbf{T} + \mathbf{T}_1.$$

Из динамики твердого тела известно, что члены, выраженные через $\mathbf{T}_1$, представляют количество движения и момент количеств движения самого тела. Следовательно, остальные, представленные через $\mathbf{T}$, члены должны представлять систему тех импульсивных давлений, которые испытывает жидкость со стороны поверхности тела, когда движение предполагается мгновенно вызванным из состояния покоя.

Это легко может быть проверено. Например, составляющая по оси x указанной выше системы импульсивных давлений, согласно § 118 и 121, равна

$$\iint \varrho\varphi l\, dS = -\varrho \iint \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, dS = \\ = \mathbf{A}u + \mathbf{C}'v + \mathbf{B}'w + \mathbf{F}p + \mathbf{F}'q + \mathbf{F}''r = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u}. \tag{8}$$

Аналогично момент импульсивных давлений относительно оси Ox равен

$$\iint \varrho\varphi(ny - mz)\, dS = -\varrho \iint \varphi \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\, dS = \\ = \mathbf{F}u + \mathbf{G}v + \mathbf{H}w + \mathbf{P}p + \mathbf{R}'q + \mathbf{Q}'r = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial p}. \tag{9}$$

§ 124. Уравнения движения могут быть теперь представлены в следующей форме [1]):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} &= r\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial w} + X, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} &= p\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial u} + Y, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} &= q\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial v} + Z, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= w\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r} + L, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= u\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p} + M, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= v\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q} + N.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

[1]) Kirchhoff, см. примечание на стр. 200; далее W. Thomson, Hydrokinetic Solutions and Observations, Phil. Mag. (5), XIII, 362 (1871) (перепечатано в Baltimore Lectures, Cambridge, 1904, стр. 584).

Если мы здесь положим

$$T = \mathbf{T} + \mathbf{T}_1$$

и выделим члены, относящиеся к $\mathbf{T}$, то получим выражения для воздействия давления окружающей жидкости на движущееся тело; так, составляющая результирующей давлений жидкости, параллельная оси x, назовем ее через X, будет равна

$$\mathbf{X} = -\frac{d}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{du} + r\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v} - q\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial w}, \tag{2}$$

и момент $\mathbf{L}$ этих давлений относительно оси x будет равен [1])

$$\mathbf{L} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial p} + w\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v} - v\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial w} + r\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial q} - q\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial r}. \tag{3}$$

Если, например, твердое тело вынуждено двигаться без вращения с постоянной скоростью (u, v, w), то имеем

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{Y} = \mathbf{Z} = 0, \\ \mathbf{L} &= w\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v} - v\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial w}, \\ \mathbf{M} &= u\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial w} - w\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u}, \\ \mathbf{N} &= v\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u} - u\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где

$$2\mathbf{T} = \mathbf{A}u^2 + \mathbf{B}v^2 + \mathbf{C}w^2 + 2\mathbf{A}'vw + 2\mathbf{B}'wu + 2\mathbf{C}'uv.$$

Давления жидкости приводятся таким образом к паре сил, которая только тогда обращается в нуль, когда имеем

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u} : u = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v} : v = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial w} : w,$$

т. е. когда скорость (u, v, w) совпадет с направлением одной из главных осей эллипсоида,

$$\mathbf{A}x^2 + \mathbf{B}y^2 + \mathbf{C}z^2 + 2\mathbf{A}'yz + 2\mathbf{B}'zx + 2\mathbf{C}'xy = \text{const}. \tag{5}$$

Таким образом, как впервые заметил Кирхгоф, для каждого твердого тела существуют три перпендикулярные друг к другу направления установившегося поступательного перемещения; это значит, что если телу дано движение параллельно одному из этих направлений без вращения и затем тело предоставлено самому себе, то оно будет и в дальнейшем сохранять это движение. Само собой понятно, что

---

[1]) Если только вид этих выраженнй нзвестен, то нетрудно проверить их прямым вычислением из уравнення давления (5) § 20. См. L a m b, On the Forces experienced by a Solid moving through a Liquid, Quart. Journ. Math., XIX, 66 (1883).

эти три направления определяются исключительно формой поверхности тела. Необходимо, однако, заметить, что импульс, необходимый для образования одного из этих установившихся поступательных движений, в общем случае не сводится к одной только силе. Если, например, для простоты, выбрать координатные оси параллельными трем названным направлениям, так что

$$A' = B' = C' = 0,$$

то мы будем иметь при движении, при котором только u отлично от нуля,

$$\begin{aligned} \xi &= Au, & \lambda &= Fu, \\ \eta &= 0, & \mu &= F'u, \\ \zeta &= 0; & \nu &= F''u; \end{aligned}$$

импульс состоит таким образом из винта с шагом $\frac{F}{A}$.

При указанном выборе координатных осей составляющие пары сил, эквивалентной давлениям жидкости на тело, в случае произвольного равномерного поступательного перемещения (u, v, w) будут равны

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{L} &= (\mathbf{B} - \mathbf{C})\, vw, \\ \mathbf{M} &= (\mathbf{C} - \mathbf{A})\, wu, \\ \mathbf{N} &= (\mathbf{A} - \mathbf{B})\, uv. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Если мы, следовательно, в эллипсоиде

$$\mathbf{A}x^2 + \mathbf{B}y^2 + \mathbf{C}z^2 = \text{const.} \tag{7}$$

проведем радиус-вектор в направлении скорости (u, v, w) и опустим из центра перпендикуляр h на касательную плоскость в конце r, то плоскость пары сил есть та плоскость, которая определена через h и r; величина момента пары сил пропорциональна $\frac{\sin(hr)}{h}$ и сама она стремится вращать тело в направлении от h к r. Таким образом, если направление (u, v, w) только немного отличается от направления оси x, то пара сил стремится уменьшить отклонение, если **A** есть наибольшая из трех величин **A**, **B**, **C**, и, наоборот, увеличить его, если **A** есть наименьшая из этих величин, в то время как для случая, когда **A** лежит между **B** и **C**, действие пары зависит от относительного положения r по отношению к круговым сечениям указанного эллипсоида. Тогда получается, что из трех стационарных поступательных перемещений только одно единственное вполне устойчиво, именно то, которое соответствует наибольшему из трех коэфициентов **A**, **B**, **C**. Например, единственное устойчивое направление поступательного перемещения эллипсоида есть направление наименьшей оси; см. § 121 [1]).

[1]) Физическая причина этой тенденции удлиненного тела становиться широкой стороной против относительного движения легко может быть усмотрена из фиг. 18, стр. 110. Некоторое число интересных практических примеров было дано Томсоном и Тэтом, § 325.

§ 125. Вышеописанные движения представляют собою хотя и самые простые, однако не единственные установившиеся движения, возможные для твердого тела, когда на него не действуют внешние силы. Мгновенное движение тела в некоторый произвольный момент, согласно хорошо известной теореме кинематики, представляет некоторое винтовое движение; для того, чтобы это движение было установившимся, необходимо, чтобы при движении не менялось положение импульса (которое неизменно в пространстве) относительно тела. Для этого необходимо, чтобы ось винтового движения совпадала с осью соответствующего импульсивного винта. Так как общие уравнения прямой линии содержат четыре независимых постоянных, то это условие приводится к четырем линейным соотношениям, которые должны удовлетворяться пятью отношениями $u : v : w : p : q : r$. При рассмотренных здесь обстоятельствах для всякого тела существует, таким образом, просто бесконечная система возможных установившихся движений.

Установившиеся движения, которые по важности наиболее близко подходят к трем установившимся поступательным перемещениям, суть те, для которых импульс приводится к *паре сил*. Уравнения (1) § 120 показывают, что $\xi = \eta = \zeta = 0$ и λ, μ, ν могут быть постоянны, при условии, что

$$\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q} = \frac{\nu}{r} = k. \tag{1}$$

Если координатные оси имеют специальные направления, принятые в предыдущем параграфе, то мы можем из условий

$$\xi = \eta = \zeta = 0$$

сразу выразить u, v, w через p, q, r; именно, имеем

$$u = -\frac{Fp + F'_q + F''_r}{A}, \quad v = -\frac{Gp + G'_q + G''_r}{B}, \quad w = -\frac{Hp + H'_q + H''_r}{C}. \tag{2}$$

Подставляя эти значения в выражения (5) § 122 для λ, μ, ν, мы получим

$$\lambda = \frac{\partial \Theta}{\partial p}, \quad \mu = \frac{\partial \Theta}{\partial q}, \quad \nu = \frac{\partial \Theta}{\partial r}, \tag{3}$$

где

$$2\Theta(p, q, r) = \mathfrak{P}p^2 + \mathfrak{Q}q^2 + \mathfrak{R}r^2 + 2\mathfrak{P}'qr + 2\mathfrak{Q}'rp + 2\mathfrak{R}'pq, \tag{4}$$

и коэфициенты этого выражения определяются формулами следующего вида:

$$\mathfrak{P} = P - \frac{F^2}{A} - \frac{G^2}{B} - \frac{H^2}{C}, \quad \mathfrak{P}' = P' - \frac{F'F''}{A} - \frac{G'G''}{B} - \frac{H'H''}{C}. \tag{5}$$

Эти формулы имеют место для всякого случая, в котором снла — составляющая импульса — обращается в нуль. Если использовать условие (1) стационарного движения, то отношения $p : q : r$ будут определяться из трех уравнений

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}p + \mathfrak{R}'q + \mathfrak{Q}'r &= kp, \\ \mathfrak{R}'p + \mathfrak{Q}q + \mathfrak{P}'r &= kq, \\ \mathfrak{Q}p + \mathfrak{P}'q + \mathfrak{R}r &= kr. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Вид этих уравнений показывает, что прямая, направление которой определяется отношениями $p : q : r$, должна быть параллельна одной из главных осей эллипсоида.

$$\Theta(x, y, z) = \text{const.} \tag{7}$$

Существует, следовательно, три таких стационарных винтовых движения, что соответствующий импульсивный винт приводится во всех случаях только к импульсивной паре. Оси этих трех винтов перпендикулярны друг другу. Однако вообще они не пересекают друг друга.

Можно теперь показать, что во всех случаях, когда импульс приводится только к импульсивной паре, движение может быть вполне определено. При этом удобнее, сохраняя те же направления осей, перенести начало координат. Перенесем начало координат в произвольную точку (x, y, z), причем вместо u, v, w пишем соответственно

$$\Theta + ry - qz, \quad v + pz - rx, \quad w + qx - py.$$

Коэфициент при $2vr$ в выражении для кинетической энергии (2) § 122 будет равен тогда $-Bx + G''$, коэфициент при $2wq$ равен $Cx + H'$ и т. д. Если принять

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(\frac{G''}{B} - \frac{H'}{C}\right), \\ y &= \frac{1}{2}\left(\frac{H}{C} - \frac{F''}{A}\right), \\ z &= \frac{1}{2}\left(\frac{F'}{A} - \frac{G}{B}\right), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

то коэфициенты в преобразованном выражении для $2T$ будут удовлетворять соотношениям

$$\frac{G''}{B} = \frac{H'}{C}, \quad \frac{H}{C} = \frac{F''}{A}, \quad \frac{F'}{A} = \frac{G}{B}. \tag{9}$$

Обозначая каждую из этих пар одинаковых величин через α, β, γ, можно переписать формулы (2) в следующем виде:

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial p}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial q}, \quad w = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}, \tag{10}$$

где

$$2\Psi(p, q, r) = \frac{F}{A}p^2 + \frac{G'}{B}q^2 + \frac{H''}{C}r^2 + 2\alpha qr + 2\beta rp + 2\gamma pq. \tag{11}$$

Движение тела во всякий момент времени можно вообразить состоящим из двух частей: поступательного движения, которое эквивалентно движению начала, и вращения около мгновенной оси, проходящей через начало. Так как $\xi = \eta = \zeta = 0$, то эта последняя часть определяется из уравнений

$$\frac{d\lambda}{dt} = r\mu - q\nu, \quad \frac{d\mu}{dt} = p\nu - r\lambda, \quad \frac{d\nu}{dt} = q\lambda - p\mu,$$

которые показывают, что вектор (λ, μ, ν) постоянен по величине и имеет неподвижное направление в пространстве. После подстановки λ, μ, ν из

уравнений (3) мы получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial p} &= r\frac{\partial\Theta}{\partial q} - q\frac{\partial\Theta}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial q} &= p\frac{\partial\Theta}{\partial r} - r\frac{\partial\Theta}{\partial p}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial r} &= q\frac{\partial\Theta}{\partial p} - p\frac{\partial\Theta}{\partial q}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Эти уравнения по виду тождественны с уравнениями движения твердого тела около неподвижной точки, так что можно применить хорошо известное решение этой задачи, данное Пуансо. Вращательное движение тела мы получим, если заставим эллипсоид (7), неподвижно связанный с телом, катиться по неподвижной в пространстве плоскости

$$\lambda x + \mu y + \nu z = \text{const.}$$

с угловой скоростью, пропорциональной длине OI радиуса-вектора, проведенного из начала в точку касания I. Представление действительного движения достигается тогда тем, что всей системе катящегося эллипсоида совместно с плоскостью дается поступательная скорость, компоненты которой даны формулами (10). Направление этой скорости совпадает с направлением нормали OM к касательной плоскости поверхности второго порядка

$$\Psi(x, y, z) = -\varepsilon^2 \tag{13}$$

в точке P, в которой OI пересекает поверхность; величина же скорости равна отношению

$$\frac{\varepsilon^2}{OP \cdot OM}, \text{ умноженному на угловую скорость тела.} \tag{14}$$

Если OI пересекает не поверхность (13), а сопряженную поверхность, которая получается, если изменить знак у ε, то поступательная скорость имеет противоположное направление [1]).

§ 126. Проблема интегрирования уравнений движений твердого тела в общем случае привлекала внимание различных математиков, однако, как и следовало ожидать при всей сложности этой проблемы, физическое значение результатов не легко усмотреть [2]).

В дальнейшем мы сначала исследуем, какие упрощения получаются в формуле для кинетической энергии, когда рассматриваются специальные классы твердых тел; затем мы перейдем к исследованию одного или двух особенно интересных частных случаев, которые могут быть изучены без математических трудностей.

Общее выражение для кинетической энергии содержит, как мы видели, двадцать один коэфициент, но при специальном выборе ко-

---

[1]) Содержание этого параграфа заимствовано из следующей работы: Lamb, On the Free Motion of a Solid through an Infinite Mass of Liquid, Proceed. London Math. Society., VIII (1877). Независимо от этого Graig получил аналогичные результаты, The Motion of a Solid in a Fluid, American Journ. of Math., II (1879).

[2]) Литературные указания см. Wien, Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig, 1900, стр. 164.

ординатных осей и их начала это число сводится к пятнадцати [1]) Напишем общее выражение кинетической энергии в наиболее симметрическом виде

$$\begin{aligned}2T = {} & Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2A'vw + 2B'wu + 2C'uv + \\ & + Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 + 2P'qr + 2Q'rp + 2R'pq + \\ & + 2Lup + 2Mvq + 2Nwr + \\ & + 2F(vr + wq) + 2G(wp + ur) + 2H(uq + vp) + \\ & + 2F'(vr - wq) + 2G'(wp - ur) + 2H'(uq - vp). \end{aligned} \tag{1}$$

Мы уже видели, что можно так выбрать направление осей, что

$$A' = B' = C' = 0,$$

и можно легко показать, что перемещением начала можно сделать также

$$F' = G' = H' = 0.$$

Мы примем отныне, что эти упрощения уже произведены.

1. Если тело имеет плоскость симметрии, то из возможного вида линий тока относительного движения заключаем, что поступательное перемещение, перпендикулярное к этой плоскости, должно быть одним из стационарных поступательных перемещений § 124. Если эту плоскость взять в качестве плоскости xy, то, очевидно, что энергия движения должна оставаться без изменения, если изменить знак при w, p, q. Это же требует, чтобы P', Q', L, M, N, H обращались в нуль. Три винтовых движения § 125 представляют теперь чистые вращения, но их оси вообще не пересекают друг друга.

2. Если тело имеет вторую плоскость симметрии, перпендикулярную к первой, то эту вторую плоскость мы можем принять за плоскость xz. Мы найдем, что в этом случае R' и G также обращаются в нуль, так что

$$2T = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 + 2F(vr + wq). \tag{2}$$

Ось x есть ось одного из установившихся вращений, а оси двух других стационарных вращений пересекают ее под прямым углом, но не обязательно в одной точке.

3. Если тело имеет третью плоскость симметрии, перпендикулярную к двум другим, например плоскость yz, то мы будем иметь

$$2T = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + Pp^2 + Qq^2 + Rr^2. \tag{3}$$

4. Возвращаясь к п. 2, заметим, что в случае тела *вращения* с осью Ox выражение для $2T$ должно остаться без изменения, если

[1]) Ср. Clebsch, Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit, Math. Ann., III, 238 (1870). Эта работа рассматривает „взаимную" форму уравнений движения, которая получается, если подставить (6) § 122 в (I) § 120.

написать v, q, $-w$, $-r$ вместо w, r, v, q соответственно, так как это равносильно повороту осей y и z на 90°; поэтому имеем

$$B=C, \quad Q=R, \quad F=0$$

и, следовательно,

$$2T=Au^2+B(v^2+w^2)+Pp^2+Q(q^2+r^2). \qquad (4)\ ^1)$$

Аналогичное приведение получается также в некоторых других случаях, например, в случае прямой призмы, поперечное сечение которой есть некоторый правильный многоугольник [2]). Это видно тотчас же, если принять во внимание, что когда ось x совпадает с осью призмы, то невозможно дать осям y и z какие-то направления, которые бы не были направлениями симметрии.

5. Если, наконец, форма тела находится в одинаковом отношении к каждой координатной плоскости (как, например, для шара или куба), то выражение (3) принимает следующий вид:

$$2T=A(u^2+v^2+w^2)+P(p^2+q^2+r^2). \qquad (5)$$

Этот результат по тем же основаниям распространяется также и на другие случаи, например, на случай правильного многогранника. Тело такого рода с гидродинамической точки зрения практически „изотропно", и его движение будет происходить в точности так же, как движение шара при тех же условиях.

6. Рассмотрим теперь другой класс случаев. Предположим, что тело имеет разновидность косой симметрии относительно определенной оси (например относительно оси x), т. е. оно может совпасть само с собой, если его повернуть на 180° вокруг этой оси, но оно, однако, не обладает обязательно плоскостью симметрии [3]). Выражение для $2T$ должно оставаться неизменяемым, если изменить знак перед v, w, q, r; поэтому должны обращаться в нуль коэфициенты Q', R', G, H. Мы имеем тогда

$$2T=Au^2+Bv^2+Cw^2+Pp^2+Qq^2+Rr^2+2P'qr+ \\ +2Lup+2Mvq+2Nwr+2F(vr+wq). \qquad (6)$$

Ось x есть одно из направлений установившегося поступательного движения; она есть также ось одного из трех винтовых движений § 125, причем шаг будет равен $-\frac{L}{A}$. Оси двух других винтовых движений пересекают эту ось под прямым углом, но вообще не в одной и той же точке.

---

[1]) Относительно решения уравнений движения в этом случае см. Greenhill, The Motion of a Solid in Infinite Liquid under no Forces, Americ. Journ. of Math., XX (1897).

[2]) См. Larmor, On Hydrokinetic Symmetry, Quart. Journ. Math., XX 261 (1885) (Papers, 1, 77).

[3]) (Пример такого тела есть двухлопастный корабельный винт.

7. Если тело приходит в совпадение с самим собой при повороте на 90° вокруг вышерассмотренной оси, то выражение (6) должно остаться без изменения, если написать v, q, $-w$, $-r$ вместо w, r, v, q соответственно. Это требует, чтобы

$$B=C, \quad Q=R, \quad P'=0, \quad M=N, \quad F=0.$$

Отсюда следует [1])

$$2T = Au^2 + B(v^2+w^2) + Pp^2 + Q(q^2+r^2) + \\ + 2Lup + 2M(vq+wr). \qquad (7)$$

Вид этого выражения остается без изменения, если повернуть ось y и ось z в их плоскости на некоторый произвольный угол. Говорят поэтому, что тело в этом случае обладает винтообразной симметрией относительно оси x.

8. Если тело обладает аналогичными свойствами косой симметрии еще относительно другой оси, которая пересекает первую под прямым углом, то, очевидно, будем иметь

$$2T = A(u^2+v^2+w^2) + P(p^2+q^2+r^2) + 2L(pu+qv+rw). \qquad (8)$$

Всякое произвольное направление есть теперь направление установившегося поступательного перемещения и всякая произвольная прямая, проходящая через начало, есть ось некоторого винтового движения вида, рассмотренного в § 125, с шагом $-\frac{L}{A}$. Форма выражения (8) остается без изменения при всяком изменении направления координатных осей. Поэтому тело называют в этом случае „винтообразно изотропным".

§ 127. Для случая тела вращения или другого какого-нибудь тела, для которого имеет место формула

$$2T = Au^2 + B(v^2+w^2) + Pp^2 + Q^2(q^2+r^2), \qquad (1)$$

Кирхгофом [2]) было проведено интегрирование уравнений движения с помощью эллиптических функций.

Частный случай, когда тело, не вращаясь около своей оси, движется таким образом, что эта ось всегда остается в той же самой плоскости, можно исследовать очень просто [3]), и при этом получаются очень интересные результаты.

---

[1]) Этот результат допускает аналогичное обобщение как и в формуле (4); например, он имеет место для некоторого тела, имеющего форму корабельного винта с *тремя* симметрично расположенными лопастями. Интегрирование уравнений движения было разобрано Greenhill, The Motion of a Solid in Infinite Liquid, Amer. Journ. of Math., XXVIII, 71 (1906).

[2]) См. примечание на стр. 200.

[3]) См. Thomson и Tait, § 332; Greenhill, On the Motion of a Cylinder through a Frictionless Liquid under no Forces, Mess. of Math., IX, 117 (1880).

Если указанную неподвижную плоскость принять за плоскость xy, то будем иметь

$$p = q = w = 0,$$

так что уравнения движения (1) § 124 приводятся к

$$A\frac{du}{dt} = rBv, \qquad B\frac{dv}{dt} = -rAu, \qquad Q\frac{dr}{dt} = (A-B)uv. \tag{2}$$

Обозначим через $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ координаты движущегося начала относительно неподвижных осей в плоскости (xy), в которой движется ось твердого тела, причем ось $\mathbf{x}$ должна совпадать с осью результирующего импульса движения, который назовем через I; через θ назовем угол, который прямая Ox (она связана неизменным образом с телом) образует с осью $\mathbf{x}$. Мы имеем тогда

$$Au = I\cos\theta, \quad Bv = -I\sin\theta, \quad r = \dot{\theta}.$$

Первые два уравнения (2) просто указывают на то, что направление импульса в пространстве неизменно; третье уравнение дает

$$Q\ddot{\theta} + \frac{A-B}{AB}I^2\sin\theta\cos\theta = 0. \tag{3}$$

Мы можем, не нарушая общности, принять $A > B$. Если положим $2\theta = \vartheta$, то уравнение (3) напишется

$$\ddot{\vartheta} + \frac{(A-B)I^2}{ABQ}\sin\vartheta = 0, \tag{4}$$

а это есть уравнение обыкновенного маятника. Поэтому вращательное движение тела совпадает с движением „квадрантного маятника", т. е. тела, движение которого относительно квадранта следует тому же закону, как и движение обыкновенного маятника относительно полуокружности. Когда θ будет определено из уравнения (3) и начальных условий, то $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ определятся из уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= u\cos\theta - v\sin\theta = \frac{I}{A}\cos^2\theta + \frac{I}{B}\sin^2\theta, \\ \dot{\mathbf{y}} &= u\sin\theta + v\cos\theta = \left(\frac{I}{A} - \frac{I}{B}\right)\sin\theta\cos\theta = \frac{Q}{I}\ddot{\theta}; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

второе уравнение дает

$$\mathbf{y} = \frac{Q}{I}\dot{\theta}. \tag{6}$$

Этот результат непосредственно очевиден, так как аддитивная постоянная равна нулю вследствие того, что ось $\mathbf{x}$ взята таким образом, что она не только параллельна направленню импульса I, но и совпадает с ним.

Предположим сначала, что тело совершает полные обороты; тогда первый интеграл уравнения (3) имеет вид

$$\dot{\theta}^2 = \omega^2(1 - k^2\sin^2\theta), \tag{7}$$

где

$$k^2 = \frac{A-B}{ABQ}\frac{I^2}{\omega^2}. \tag{8}$$

Отсюда следует, если отсчитывать t от значения $\theta = 0$, что

$$\omega t = \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} = F(k, \theta), \tag{9}$$

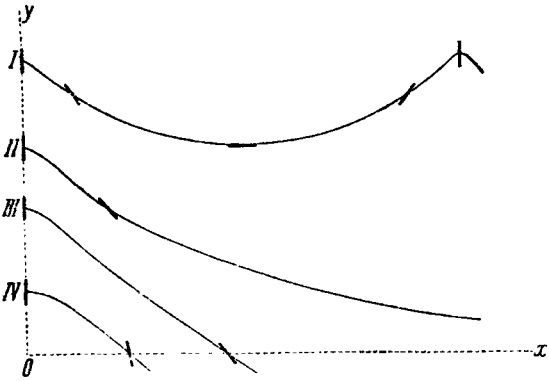
где для эллиптического интеграла принято обычное обозначение. Если исключить t из (5) и (7) и полученные таким образом уравнения интегрировать по θ, то будем иметь

$$\left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{I}{A\omega} + \frac{Q\omega}{I}\right) F(k, \theta) - \frac{Q\omega}{I} E(k, \theta), \\ y &= \frac{Q}{I}\ \dot{\theta} = \frac{Q\omega}{I} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

причем нулевое значение x выбрано таким образом, что оно соответствует положению $\theta = 0$. Траектория может быть тогда в каждом отдельном случае вычерчена с помощью таблиц Лежандра. См. отмеченную цифрой *I* кривую на фиг. 31.

Если, напротив, тело не совершает полного оборота, но колеблется с угловой амплитудой α около положения $\theta = 0$, то соответствующая форма первого интеграла от (3) напишется

$$\dot{\theta}^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \alpha}\right), \tag{11}$$



Фиг. 31.

где

$$\sin^2 \alpha = \frac{ABQ}{A - B} \frac{\omega^2}{I^2}. \tag{12}$$

Если положить

$$\sin \theta = \sin \alpha \sin \psi,$$

то это дает

$$\dot{\psi}^2 = \frac{\omega^2}{\sin^2 \alpha} (1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \psi)$$

отсюда следует

$$\frac{\omega t}{\sin \alpha} = F(\sin \alpha, \psi). \tag{13}$$

Рассматривая ψ в качестве независимого переменного в уравнении (5) и интегрируя, получим

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{I}{B\omega} \sin \alpha F(\sin \alpha, \psi) - \frac{Q\omega}{I} \operatorname{cosec} \alpha E(\sin \alpha, \psi), \\ y &= \frac{Q\omega}{I} \cos \psi. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Траектория точки O есть теперь синусоидальная кривая, пересекающая ось импульсов в промежутки времени, равные половине периода вращательного движения. Такое движение представлено кривыми *III* и *IV* фиг. 31.

Существует еще критический случай между двумя только что рассмотренными случаями, который будем иметь тогда, когда тело совершает как раз половину оборота, при этом θ имеет асимптотические предельные зна-

чения $\pm \frac{1}{2}\pi$. Этот случай можно получить, полагая $k=1$ в (7) или $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ (11); мы найдем тогда

$$\dot{\theta}=\omega\cos\theta, \tag{15}$$

$$\omega t=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{1}{5}\pi+\frac{1}{2}\theta\right), \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{I}{B\omega}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\theta\right)-\frac{Q\omega}{I}\sin\theta,\\ y&=\frac{Q\omega}{I}\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

См. кривую *II* на фиг. 31 [1]).

Мы обращаем внимание на то, что вышеизложенное исследование не ограничивается только случаем тела вращения; оно годится также и для тела с двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, которое движется параллельно одной из этих плоскостей, предполагая при этом, что начало выбрано надлежащим образом. Если упомянутая плоскость есть плоскость xy, то при перенесении начала в точку

$$\left(\frac{F}{B},\ 0,\ 0\right)$$

последний член в формуле (2) § 126 обращается в нуль и уравнения движения принимают указанный вид (2). Если же, с другой стороны, движение будет параллельно плоскости zx, то мы должны перенести начало в точку $\left(-\frac{F}{C},\ 0,\ 0\right)$.

Результаты этого параграфа, а также относящаяся к этому фигура служат для иллюстрации утверждений, высказанных в конце § 124. Так, кривая *IV* с преувеличенной амплитудой иллюстрирует случай слегка возмущенного *устойчивого* движения, параллельного одной из осей установившегося поступательного движения. Случай возмущенного неустойчивого стационарного движения представился бы кривой, которая, смотря по роду возмущения, находится с одной или с другой стороны в соседстве с кривой *II*.

§ 128. Если требуется исследовать только устойчивость движения тела, параллельного оси симметрии, то, конечно, можно проще достигнуть цели, пользуясь приближенными методами. Если, например, тело с тремя плоскостями симметрии, рассмотренное в § 126 п. 3,

---

[1]) Чтобы сделать наиболее отчетливыми характерные признаки движения, кривые нарисованы для несколько крайнего случая $A=5B$. В случае бесконечно тонкого диска, лишенного собственной инерции, мы имели бы $\frac{A}{B}=\infty$; кривые имели бы тогда *точки заострения*, в которых они пересекали бы ось y. Из уравнения (5) видно, что $\dot{x}$ всегда имеет тот же самый знак, так что ни в каком случае не могут появиться *петли*.

В различных случаях, представленных на фиг. 31, тело всегда приведено в движение с одним и тем же импульсом, но с различными степенями вращения. Для кривой *I* максимальная угловая скорость в $\sqrt{2}$ раз больше той, которая имеется в предельном случае *II*, в то время как кривые *III* и *IV* представляют колебания с амплитудами 45 и 18°.

слегка выведено из положения стационарного движения, параллельного оси x, то, полагая

$$u = u_0 + u'$$

и принимая u', v, w, p, q, r все очень малыми, мы получим

$$\left.\begin{aligned} A\frac{du'}{dt} &= 0, \quad B\frac{dv}{dt} = -Au_0 r, \qquad C\frac{dw}{dt} = Au_0 q, \\ P\frac{dp}{dt} &= 0, \quad Q\frac{dq}{dt} = (C-A)\,u_0 w, \quad R\frac{dr}{dt} = (A-B)\,u_0 v. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Отсюда получается

$$B\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{A(A-B)}{R}\,u_0^2 v = 0$$

и аналогичное уравнение для r, и

$$C\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{A(A-C)}{Q}\,u_0^2 w = 0 \tag{2}$$

и аналогичное уравнение для q. Движение, таким образом, только тогда будет устойчиво, когда A есть наибольшая из трех величин A, B, C.

Известно из обыкновенной динамики, что устойчивость тела, которое движется параллельно оси симметрии, увеличивается, а неустойчивость соответственно уменьшается, если сообщить ему вращение около этой оси. Этот вопрос был исследован Гренхиллем [1]).

Итак, если тело вращения получает малое возмущение своего состояния, при котором оно движется с постоянными u и p, в то время как остальные компоненты скорости равны нулю, то первое и четвертое из уравнений (1) § 124 дают, если пренебречь квадратами и произведениями малых величин,

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dp}{dt} = 0;$$

отсюда следует

$$u = u_0, \qquad p = p_0, \tag{3}$$

где u_0, p_0 суть некоторые постоянные. Остальные уравнения получают после подстановки из (3) § 126 следующий вид:

$$B\left(\frac{dv}{dt} - p_0 w\right) = -Au_0 r, \quad B\left(\frac{dw}{dt} + p_0 v\right) = Au_0 q, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} Q\frac{dq}{dt} + (P-Q)\,p_0 r &= -(A-B)\,u_0 w, \\ Q\frac{dr}{dt} - (P-Q)\,p_0 q &= (A-B)\,u_0 v. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Если мы предположим, что v, w, q, r пропорциональны $e^{i\sigma t}$, и исключим их отношения, то найдем

$$Q\sigma^2 \pm (P-2Q)\,p_0\sigma - \left\{(P-Q)\,p_0^2 + \frac{A}{B}(A-B)\,u_0^2\right\} = 0. \tag{6}$$

---

[1]) Greenhill, Fluid Motion between Confocal Elliptic Cylinders, etc. Quart. Journ. Math., XVI, 227 (1879).

Условие того, что корни этого уравнения будут действительны, состоит в том, что

$$P^2p_0^2+4\,\frac{A}{B}\,(A-B)\,Qu_0^2$$

должно быть положительно. Это получается всегда, когда $A>B$, а в случае $A<B$ может быть достигнуто, если дать p_0 достаточно большое значение.

Этот пример объясняет устойчивость полета, которую получает продолговатый снаряд благодаря винтовой нарезке.

§ 129. В исследованиях § 125 применялось выражение „установившееся", чтобы характеризовать движения, при которых кинематический винт сохраняет постоянное положение относительно движущегося тела. Однако в случае тела вращения мы будем применять это выражение в несколько расширенном смысле, именно мы распространим его на движения, при которых векторы поступательной и вращательной скорости имеют постоянную величину и составляют как с осью симметрии, так и между собой постоянные углы, хотя их положение относительно точек твердого тела, не лежащих на оси, может непрерывно меняться.

Условия, которые при этом должны быть выполнены, можно легко получить из уравнений движения § 124; эти последние после подстановки из (4) § 126 будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} A\frac{du}{dt}&=B(rv-qw), \quad P\frac{dp}{dt}=0,\\ B\frac{dv}{dt}&=Bpw-Aru, \quad Q\frac{dq}{dt}=-(A-B)\,uw-(P-Q)\,pr,\\ B\frac{dw}{dt}&=Aqu-Bpv, \quad Q\frac{dr}{dt}=\ (A-B)\,uv+(P-Q)\,pq. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Получается, что p во всех случаях постоянно и что q^2+r^2 также постоянно, если, например,

$$\frac{v}{q}=\frac{w}{r}=k. \tag{2}$$

Это дает

$$\frac{du}{dt}=0 \quad \text{и} \quad v^2+w^2=\text{const}.$$

Отсюда следует, что k также постоянно; необходимо только удовлетворить еще уравнениям

$$kB\frac{dq}{dt}=(kBp-Au)\,r,$$

$$Q\frac{dq}{dt}=-\{(A-B)\,ku+(P-Q)\,p\}\,r.$$

Эти уравнения будут совместны друг с другом, если

$$kB\{(A-B)\,ku+(P-Q)\,p\}+Q(kBp-Au)=0,$$

а это дает

$$\frac{u}{p}=\frac{kBP}{AQ-k^2B(A-B)}\,. \tag{3}$$

Изменяя k, мы получаем таким образом бесконечное множество случаев возможных стационарных движений указанного выше рода. В каждом из этих

случаев мгновенная ось вращения и направление поступательного движения начала лежат в одной плоскости с осью тела. Легко видеть, что начало описывает винтовую линию около оси импульса. Этими результатами мы обязаны Кирхгофу.

§ 130. Единственный случай винтообразного тела, в котором могут быть получены простые результаты, есть случай „изотропного винтового тела", о котором шла речь в пункте 8 § 126.

Пусть O есть центр тела; за координатные оси в произвольный момент мы возьмем следующие три прямые: прямую Ox, параллельную оси импульса, проведенную от оси импульса наружу, прямую Oy и прямую Oz, перпендикулярную к плоскости этих двух прямых. Если через I и K обозначить силу и момент пары, составляющие импульс, то получим

$$\left.\begin{aligned} &Au+Lp=\xi=I, \quad Av+Lq=\eta=0, \quad Aw+Lv=\zeta=0,\\ &Pp+Lu=\lambda=K, \quad Pp+Lv=\mu=0, \quad Pr+Lw=\nu=I\widetilde{\omega}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\widetilde{\omega}$ обозначает расстояние точки O от оси импульса.

Так как

$$AP-L^2\neq 0,$$

то второе и пятое из этих уравнений показывают, что

$$v=0, \quad q=0.$$

Поэтому $\widetilde{\omega}$ будет постоянно во время всего движения и остальные величины также постоянны; в частности, будем иметь

$$u=\frac{PI-LK}{AP-L^2}, \quad w=-\frac{LI\widetilde{\omega}}{AP-L^2}. \tag{2}$$

Начало O описывает, таким образом, винтовую линию около оси импульса с шагом, равным

$$\frac{K}{I}-\frac{P}{L}.$$

Этот пример принадлежит Кельвину [1]).

§ 131. Прежде чем оставить эту часть наших исследований, заметим еще, что только что рассмотренная теория с очень малыми изменениями годится также и для ациклического движения жидкости, заполняющей полость в движущемся теле. Если взять начало в центре

---

[1]) См. примечание на стр. 210. Там указано, что может быть построено твердое тело рассматриваемого вида при помощи прикрепления к шару лопастей в средних точках двенадцати четвертей сферических дуг, которые получаются при делении сферы на октанты. Лопасти должны быть перпендикулярны к поверхности, и их плоскости должны образовывать угол в 45° с соответствующими дугами. Лармор (см. примечание на стр. 217) дает другой пример: „... Если взять правильный тетраедр (или другое правильное тело) и отрезать углы косыми поверхностями, которые таковы, что если рассматривать их из какого-либо угла, они кажутся все наклоненными в том же самом направлении, то мы получим пример изотропного геликонда".

Относительно дальнейших исследований в связи с данным вопросом см. работу Miss Fawcett, On the Motion of Solids in a Liquid, Quart. Journ. Math., XXVI (1893).

массы жидкости, то формула для кинетической энергии движения жидкости будет иметь следующий вид:

$$2\mathbf{T} = \mathbf{m}(u^2 + v^2 + w^2) + \mathbf{P}p^2 + \mathbf{Q}q^2 + \mathbf{R}r^2 + 2\mathbf{P}'qr + 2\mathbf{Q}'rp + 2\mathbf{R}'pq. \quad (1)$$

В самом деле, кинетическая энергия будет равна кинетической энергии всей жидкой массы ($\mathbf{m}$), предполагая ее сосредоточенной в центре тяжести и движущейся вместе с этой точкой, плюс кинетическая энергия движения относительно центра тяжести. Методом § 118, 121 легко показать, что эта вторая часть энергии есть однородная квадратичная функция от p, q, r.

Следовательно, жидкость можно заменить твердым телом той же массы и с тем же центром тяжести, при условии, что его главные оси инерции и моменты инерции подобраны подходящим образом.

В случае эллипсоидальной полости значения коэфициентов в формуле (1) могут быть вычислены по § 110. Мы найдем этим путем, если оси координат совпадают с главными осями эллипсоида, что

$$\mathbf{P} = \frac{1}{5}\mathbf{m}\frac{(b^2-c^2)^2}{b^2+c^2},$$
$$\mathbf{Q} = \frac{1}{5}\mathbf{m}\frac{(c^2-a^2)^2}{c^2+a^2},$$
$$\mathbf{R} = \frac{1}{5}\mathbf{m}\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2},$$
$$\mathbf{P}' = \mathbf{Q}' = \mathbf{R}' = 0.$$

Случай тела с отверстием

§ 132. Когда движущееся тело имеет одно или несколько отверстий или пробоин, так что пространство, его окружающее, будет многосвязно, то жидкость может иметь самостоятельное движение, независимое от движения твердого тела, именно циклическое движение, при котором циркуляция по различным неприводимым замкнутым кривым, которые могут быть проведены через отверстия, могут иметь произвольно заданные постоянные значения. Мы покажем кратко, как вышеизложенные методы могут быть приложены к этому случаю.

Пусть $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... суть циркуляции по различным контурам и $\delta\sigma$, $\delta\sigma'$, $\delta\sigma''$, ...—элементы соответствующих перегородок, проведенных как указано в § 48. Далее, l, m, n суть направляющие косинусы нормалей, направленных в сторону жидкости, в некоторой точке поверхности твердого тела или нормалей в некоторой точке положительной стороны перегородки.

Тогда потенциал скоростей имеет вид

$$\varphi + \varphi_0,$$

где

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\chi_1 + q\chi_2 + r\chi_3, \\ \varphi_0 &= \varkappa\omega + \varkappa'\omega' + \varkappa''\omega'' + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Функции φ_1, φ_2, φ_3, χ_1, χ_2, χ_3 определяются теми же условиями, как в § 118. Для определения функции ω мы имеем следующие условия: 1) она должна для всех точек жидкости удовлетворять уравнению $\Delta\omega = 0$; 2) ее производные должны в бесконечности обращаться в нуль; 3) на поверхности тела должно быть $\frac{\partial\omega}{\partial n} = 0$; 4) ω должна быть циклическая функция, которая уменьшается на единицу, когда соответствующая точка описывает всю замкнутую кривую, пересекающую первую перегородку в положительном направлении один и только один раз, напротив, ω возвращается к первоначальному значению, когда соответствующая точка описывает замкнутую кривую, которая не встречает этой перегородки. Из § 52 следует, что эти условия определяют ω с точностью до аддитивной постоянной. Подобным же образом определяются и остальные функции ω', ω'', ...

Согласно формуле (5) § 55 удвоенная кинетическая энергия жидкости равна

$$-\varrho\iint(\varphi+\varphi_0)\frac{\partial}{\partial n}(\varphi+\varphi_0)\,dS - \\ -\varrho\varkappa\iint\frac{\partial}{\partial n}(\varphi+\varphi_0)\,d\sigma - \varrho\varkappa'\iint\frac{\partial}{\partial n}(\varphi+\varphi_0)\,d\sigma' - \ldots \qquad (2)$$

Так как циклические постоянные от φ равны нулю и так как $\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}$ на поверхности тела обращается в нуль, то согласно (4) § 54 м еем

$$\iint\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS + \varkappa\iint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma + \varkappa'\iint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma' + \ldots = \iint\varphi\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}\,dS = 0.$$

Поэтому формула (2) сводится к

$$-\varrho\iint\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS - \varrho\varkappa\iint\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}\,d\sigma - \varrho\varkappa'\iint\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}\,d\sigma' - \ldots \qquad (3)$$

Подставляя значения φ, φ_0 из уравнений (1), найдем, что энергия жидкости будет равна

$$\mathbf{T} + K, \qquad (4)$$

где $\mathbf{T}$ есть однородная квадратическая функция от u, v, w, p, q, r определенного в (2), (3) § 121 вида, и

$$2K = (\varkappa, \varkappa)\varkappa^2 + (\varkappa', \varkappa')\varkappa'^2 + \ldots + 2(\varkappa, \varkappa')\varkappa\varkappa' + \ldots \qquad (5)$$

Здесь, например, имеем

$$\left.\begin{aligned}(\varkappa, \varkappa) &= -\varrho\iint\frac{\partial\omega}{\partial n}\,d\sigma,\\ (\varkappa, \varkappa') &= -\frac{1}{2}\varrho\iint\frac{\partial\omega'}{\partial n}\,d\sigma - \frac{1}{2}\varrho\iint\frac{\partial\omega}{\partial n}\,d\sigma' = \\ &= -\varrho\iint\frac{\partial\omega'}{\partial n}\,d\sigma = -\varrho\iint\frac{\partial\omega}{\partial n}\,d\sigma'.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Тождественность различных форм $(\varkappa, \varkappa')$ следует из (4) § 54.

Таким образом полная энергия жидкости и твердого тела равняется

$$T = \mathfrak{T} + K, \tag{7}$$

где $\mathfrak{T}$ есть однородная квадратичная функция от u, v, w, p, q, r того же вида, как в (8) § 121, а K определяется вышенаписанными уравнениями (5) и (6).

§ 133. „Импульс" движения состоит теперь частью из импульсивных действующих на тело сил и частью из импульсивных давлений $\varrho\varkappa$, $\varrho\varkappa'$, $\varrho\varkappa''$, ..., которые действуют равномерно (как разъяснено в § 54) на различные мембраны, предполагаемые на мгновение помещенными на месте перегородок. Мы обозначим через ξ_1, η_1, ζ_1, λ_1, μ_1, ν_1 компоненты внешнего, действующего на тело импульса. Выражая то, что компонента по оси x количества движения твердого тела равна соответствующей компоненте полного импульса, действующего на тело, мы получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{T}_1}{\partial u} &= \xi_1 - \varrho \iint (\varphi + \varphi_0)\, l\, dS = \\ &= \xi_1 + \varrho \iint (u\varphi_1 + \ldots + p\chi_1 + \ldots + \varkappa\omega + \ldots) \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, dS = \\ &= \xi_1 - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} + \varrho\varkappa \iint \omega \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, dS + \varrho\varkappa' \iint \omega' \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, dS + \ldots,\end{aligned} \tag{1}$$

причем, как и выше, T_1 обозначает кинетическую энергию твердого тела, а T ту часть энергии жидкости, которая независима от циклического движения. Далее мы находим, если будем рассматривать момент количества движения твердого тела около оси x,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{T}_1}{\partial p} &= \lambda_1 - \varrho \iint (\varphi + \varphi_0)(ny - mz)\, dS = \\ &= \lambda_1 + \varrho \iint (u\varphi_1 + \ldots + p\chi_1 + \ldots + \varkappa\omega + \ldots) \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\, dS = \\ &= \lambda_1 - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} + \varrho\varkappa \iint \omega \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\, dS + \varrho\varkappa' \iint \omega' \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\, dS + \ldots\end{aligned} \tag{2}$$

Отсюда, так как

$$\mathfrak{T} = \mathrm{T} + \mathrm{T}_1,$$

будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u} - \varrho\varkappa \iint \omega \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, dS - \varrho\varkappa' \iint \omega' \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, dS - \ldots, \\ \lambda_1 &= \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p} - \varrho\varkappa \iint \omega \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\, dS - \varrho\varkappa' \iint \omega' \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\, dS - \ldots\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Согласно ранее разобранному обобщению Кельвина теоремы Грина уравнения (3) могут быть написаны также следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u} + \varrho\varkappa \iint \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, d\sigma + \varrho\varkappa' \iint \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, d\sigma' + \ldots, \\ \lambda_1 &= \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p} + \varrho\varkappa \iint \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\, d\sigma + \varrho\varkappa' \iint \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\, d\sigma' + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Если прибавить к этому члены, обусловленные импульсивными давлениями, действующими на перегородки, то мы получим в конечном счете для компонент полного импульса движения [1])

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u} + \xi_0, & \lambda &= \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p} + \lambda_0, \\ \eta &= \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial v} + \eta_0, & \mu &= \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q} + \mu_0, \\ \zeta &= \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial w} + \zeta_0, & \nu &= \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial r} + \nu_0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где, например,

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= \varrho\varkappa \iint \left(l + \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right) d\sigma + \varrho\varkappa' \iint \left(l + \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right) d\sigma' + \ldots, \\ \lambda_0 &= \varrho\varkappa \iint \left(ny - mz + \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\right) d\sigma + \\ &\qquad + \varrho\varkappa' \iint \left(ny - mz + \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\right) d\sigma' + \ldots. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Ясно, что постоянные ξ_0, η_0, ζ_0, λ_0, μ_0, ν_0 суть компоненты импульса того циклического движения жидкости, которое осталось бы, если тело привести в равновесие силами, действующими только на него.

Согласно рассуждениям § 119, полный импульс будет подчиняться тому же самому закону, как и количество движения конечной динамической системы. Таким образом, если значения (5) вставить в уравнения (1) § 120 [2]), то мы получим уравнения движения твердого тела.

§ 134. В качестве простого примера возьмем случай кольцеобразного тела вращения.

Если ось x совпадает с осью кольца, то мы можем в силу того же рассуждения, как в § 126 п. 4, написать

$$2T = Au^2 + B(v^2 + w^2) + Pp^2 + Q(q^2 + r^2) + (\varkappa, \varkappa)\varkappa^2, \tag{1}$$

[1]) Ср. W. Thomson, см. сноску на стр. 210.

[2]) Этот результат может быть получен из формулы давления § 20 прямым вычислением; см. Bryan, Hydrodynamical Proof of the Equations of Motion of a Perforated Solid. . . ., Phil. Mag., Mai, 1893.

предполагая, что положение начала координат и направление осей выбраны соответственным образом. Отсюда следует

$$\left.\begin{aligned} \xi &= Au+\xi_0, & \lambda &= Pp,\\ \eta &= Bv, & \mu &= Qq,\\ \zeta &= Bw, & \nu &= Qr. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Если эти значения подставить в уравнения § 120, то мы найдем

$$\frac{dp}{dt}=0, \text{ или } p=\text{const.},$$

что впрочем и непосредственно очевидно. Предположим, что движение кольца мало отличается от состояния, при котором v, w, p, q, r равны нулю, т. е. состояния установившегося движения, параллельного оси симметрии. В начале возмущенного движения v, w, p, q, r будут малыми величинами, произведениями которых можно пренебречь. Первое из указанных уравнений дает тогда

$$\frac{du}{dt}=0, \text{ или } u=\text{const.},$$

а остальные уравнения получают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} B\frac{dv}{dt} &= -(Au+\xi_0)\,r, & Q\frac{dq}{dt} &= -\{(A-B)\,u+\xi_0\}\,w,\\ B\frac{dw}{dt} &= (Au+\xi_0)\,q, & Q\frac{dr}{dt} &= \{(A-B)\,u+\xi_0\}\,v. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Исключая r, найдем

$$BQ\frac{d^2v}{dt^2}=-(Au+\xi_0)\{(A-B)\,u+\xi_0\}\,v. \tag{4}$$

Точно такому же уравнению удовлетворяет и w. Таким образом для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы коэфициент при v в правой части уравнения (4) был бы отрицательным; когда это условие удовлетворено, то период малого колебания [1]) будет равен

$$2\pi\left[\frac{BQ}{(Au+\xi_0)\{(A-B)u+\xi_0\}}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Мы укажем еще другой случай установившегося движения кольца, именно тот, при котором импульс приводится к паре сил относительно диаметра. Легко видеть, что уравнения движения удовлетворяются с помощью

$$\xi=\eta=\zeta=\lambda=\mu=0, \text{ и } \nu=\text{const.};$$

в этом случае имеем

$$u=-\frac{\xi_0}{A}, \quad r=\text{const.}$$

Кольцо вращается тогда около оси, которая лежит в плоскости yz, параллельна оси z и находится от нее на расстоянии $\frac{u}{r}$ [2]).

---

[1]) W. Thomson, см. сноску на стр. 210.

[2]) Что касается дальнейших исследований по этому вопросу, мы укажем на работы Basset, On the Motion of a Ring in an Infinite Liquid, Proc. Camb. Phil. Soc., VI (1887) и Miss Fawcett, см. сноску на стр. 224.

Силы, действующие на цилиндр в плоском потоке.

§ 134a. Плоская задача о движении цилиндрического тела, в частности, и тогда, когда имеет место циркуляция вокруг последнего, может быть сравнительно просто исследована непосредственным подсчетом давлений на поверхность [1]). Мы допускаем при этом по обыкновению, что жидкость на бесконечности находится в покое.

Выбирая оси, связанные с поперечным сечением, обозначим через $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ скорость начала, через $\mathbf{r}$ — угловую скорость. Символы u, v будут теперь иметь свой первоначальный смысл как компоненты скорости жидкости. В таком случае уравнение для давления представится в виде

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (\mathbf{u} - \mathbf{r}y)\frac{\partial \varphi}{\partial x} - (\mathbf{v} + \mathbf{r}x)\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{2}q^2 + \text{const.}, \qquad (1)$$

где

$$q^2 = u^2 + v^2.$$

Сила $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ и пара $(\mathbf{N})$, к которым приводятся давления на поверхности, будут

$$\mathbf{X} = -\int pl\,ds, \quad \mathbf{Y} = -\int pm\,ds, \quad \mathbf{N} = -\int p(mx - ly)\,ds, \qquad (2)$$

где l, m суть направляющие косинусы нормали, проведенной от элемента δs контура наружу, и интеграция совершается по всему периметру. В силу соотношений

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

будем иметь

$$\frac{1}{2}\int q^2 l\,ds = -\iint\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy = \int (lu + mv)\,u\,ds,$$
$$\frac{1}{2}\int q^2 m\,ds = -\iint\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy = \int (lu + mv)\,v\,ds. \qquad (3)$$

При этом мы здесь опустили различные криволинейные интегралы, взятые по бесконечно большому охватывающему контуру, так как на большом расстоянии r скорость будет по крайней мере порядка $\frac{1}{r}$, тогда как δs — порядка $r\,\delta\theta$. На поверхности же самого цилиндра имеем

$$lu + mv = l(\mathbf{u} - \mathbf{r}y) + m(\mathbf{v} + \mathbf{r}x). \qquad (4)$$

Подставляя из (1) в (2), мы найдем

$$\frac{\mathbf{X}}{\varrho} = -\int \frac{\partial \varphi}{\partial t} l\,ds + \int (mu - lv)(\mathbf{v} + \mathbf{r}x)\,ds =$$
$$= -\int \frac{\partial \varphi}{\partial t} l\,ds + \int (\mathbf{v} + \mathbf{r}x)\frac{\partial \varphi}{\partial s}\,ds \qquad (5)$$

---

[1]) Aeronautical Research Committee, R. and M., 1218 (1929). Относительно другого способа изучения см. Glauert, R. and M., 1215 (1929).

и аналогично

$$\frac{\mathbf{Y}}{\varrho} = -\int \frac{\partial\varphi}{\partial t}\, m\, ds - \int (\mathbf{u} - \mathbf{r}y)\, \frac{\partial\varphi}{\partial s}\, ds. \tag{6}$$

Кроме того, будем иметь

$$\frac{1}{2}\int q^2 (mx - ly)\, ds = \int (lu + mv)(xv - yu)\, ds. \tag{7}$$

Здесь криволинейный интеграл по бесконечно удаленной границе также опущен, так как мы можем допустить, что на этой границе $\frac{l}{x} = \frac{m}{y}$, а $lu + mv$ имеет порядок $\frac{1}{r^3}$. Формула (2) для $\mathbf{N}$ тогда представится в виде

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{N}}{\varrho} &= -\int \frac{\partial\varphi}{\partial t}(mx - ly)ds + \int (\mathbf{u}x + \mathbf{v}y)(lv - mu)\, ds = \\ &= -\int \frac{\partial\varphi}{\partial t}(mx - ly)\, ds - \int (\mathbf{u}x + \mathbf{v}y)\, \frac{\partial\varphi}{\partial s}\, ds.\end{aligned} \tag{8}$$

По аналогии с § 118, 132 мы теперь положим

$$\varphi = \mathbf{u}\varphi_1 + \mathbf{v}\varphi_2 + \mathbf{r}\chi + \varphi_0, \tag{9}$$

где функция φ_0 представляет циркуляционное движение, которое продолжало бы существовать и тогда, когда цилиндр был бы остановлен. Она, следовательно, есть циклическая функция с циклической постоянной, которую назовем через k. Сравнивая с выражением (4), на поверхности цилиндра будем иметь

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = -l,\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = -m,\ \frac{\partial\chi}{\partial n} = -(mx - ly),\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = 0. \tag{10}$$

При отсутствии циркуляции энергия жидкости была бы равна

$$\mathbf{T} = -\frac{1}{2}\varrho\int (\varphi - \varphi_0)\, \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, ds. \tag{11}$$

Подставляя из (9) и (10) в (11), получим

$$2\mathbf{T} = \mathbf{A}\mathbf{u}^2 + 2\mathbf{H}\mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{v}^2 + \mathbf{R}\mathbf{r}^2 + 2(\mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{M}\mathbf{v})\mathbf{r}, \tag{12}$$

где

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{A} = \varrho\int l\varphi_1\, ds,\quad \mathbf{H} = \varrho\int l\varphi_2\, ds = \varrho\int m\varphi_1\, ds,\\ &\mathbf{B} = \varrho\int m\varphi_2\, ds,\quad \mathbf{R} = \varrho\int (mx - ly)\chi\, ds,\end{aligned}\right\}$$
$$\mathbf{L} = \varrho\int l\chi\, ds = \varrho\int (mx - ly)\varphi_1\, ds,$$
$$\mathbf{M} = \varrho\int m\chi\, ds = \varrho\int (mx - ly)\varphi_2\, ds. \tag{13}$$

Первые члены в правых частях выражений (5), (6) и (8) теперь принимают вид

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d}{dt}(\mathbf{Au}+\mathbf{Hv}+\mathbf{Lr}) &= -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}}, \\ -\frac{d}{dt}(\mathbf{Hu}+\mathbf{Bv}+\mathbf{Mr}) &= -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{v}}, \\ -\frac{d}{dt}(\mathbf{Rr}+\mathbf{Lu}+\mathbf{Mv}) &= -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{r}}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Кроме того, мы будем иметь

$$\begin{aligned} \varrho\int x\frac{\partial(\varphi-\varphi_0)}{\partial s}\,ds &= \varrho\int m(\varphi-\varphi_0)\,ds = \mathbf{Hu}+\mathbf{Bv}+\mathbf{Mr} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{v}}, \\ \varrho\int y\frac{\partial(\varphi-\varphi_0)}{\partial s}\,ds &= -\varrho\int l(\varphi-\varphi_0)\,ds = \\ &= -(\mathbf{Au}+\mathbf{Hv}+\mathbf{Lr}) = -\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}}. \end{aligned} \tag{15}$$

Если мы положим

$$\int x\frac{\partial\varphi_0}{\partial s}\,ds = \alpha, \quad \int y\frac{\partial\varphi_0}{\partial s}\,ds = \beta, \tag{16}$$

то выражения для сил примут тогда вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X} &= -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}}+\mathbf{r}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{v}}-k\varrho\mathbf{v}+\varrho\alpha\mathbf{r}, \\ \mathbf{Y} &= -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{v}}-\mathbf{r}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}}+k\varrho\mathbf{u}+\varrho\beta\mathbf{r}, \\ \mathbf{N} &= -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{r}}+\mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}}-\mathbf{u}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{v}}-\varrho(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Поворачивая оси координат на соответствующий угол, коэфициент **H** можно обратить в нуль. А соответствующим выбором начала координат мы можем или обратить в нуль коэфициенты **L**, **M**, или сделать $\alpha=0$, $\beta=0$. Эти два предположения *вообще* несовместимы, и ни то, ни другое выбранное начало не может предполагаться совпадающим со средним центром площади сечения.

Наиболее интересен тот случай, однако, когда сечение будет симметричным относительно двух перпендикулярных осей. Если их выбрать за оси координат, то мы будем иметь

$$\mathbf{H}=0,\ \mathbf{L}=0,\ \mathbf{M}=0,\ \alpha=0,\ \beta=0, \tag{18}$$

и формулы (17) приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X} &= -\mathbf{A}\frac{d\mathbf{u}}{dt}+\mathbf{Brv}-k\varrho\mathbf{v}, \\ \mathbf{Y} &= -\mathbf{B}\frac{d\mathbf{v}}{dt}-\mathbf{Aru}+k\varrho\mathbf{u}, \\ \mathbf{N} &= -\mathbf{R}\frac{d\mathbf{r}}{dt}-(\mathbf{A}-\mathbf{B})\mathbf{uv}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Чтобы составить уравнения движения, в этом случае мы должны только видоизменить коэфициенты инерции, так же как в § 122. Если распределение масс будет также симметричным, то мы можем положить

$$A = \mathbf{A} + M, \quad B = \mathbf{B} + M, \quad R = \mathbf{R} + L, \tag{20}$$

где M представляет массу самого цилиндра, а L — его момент инерции. Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} A\frac{du}{dt} - B\mathfrak{r}v + k\varrho v &= X, \\ B\frac{dv}{dt} + A\mathfrak{r}u - k\varrho u &= Y, \\ L\frac{d\mathfrak{r}}{dt} - (A-B)\,uv &= N, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где X, Y, N представляют действие внешних сил. Когда последние отсутствуют и циркуляция равна нулю, решение уравнений проводится, как и в § 127.

В случае круглого сечения нет необходимости предполагать оси координат вращающимися. Полагая тогда $A = B$, $\mathfrak{r} = 0$, мы получим, как и в § 69,

$$A\frac{du}{dt} + k\varrho u = X, \quad A\frac{dv}{dt} - k\varrho u = Y. \tag{22}$$

Если сечение будет симметричным только относительно одной оси, например оси x, то мы будем иметь $\mathbf{H} = 0$, $\mathbf{L} = 0$, $B = 0$. Смещая начало вдоль оси симметрии, мы можем сделать $\mathbf{M} = 0$, но одновременно a вообще не может обратиться в нуль. В случае отсутствия циркуляции новое начало представляет „центр реакции", введенный Томсоном и Тэтом [1]).

Уравнения движения в обобщенных координатах

§ 135. Когда в жидкости движутся несколько тел или когда жидкость ограничена целиком или частично неподвижными стенками, то мы можем применить метод *обобщенных координат* Лагранжа. Этот метод к гидродинамическим задачам был впервые применен Томсоном и Тэтом [2]).

Системы, которые обыкновенно рассматриваются в аналитической динамике, имеют конечное число степеней свободы, т. е. положение каждой частицы вполне определено, если известны значения конечного числа независимых переменных или обобщенных координат q_1, $q_2, \ldots, q_n$. Кинетическая энергия T может быть представлена как квадратичная функция обобщенных компонент скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$.

Согласно методу Гамильтона действительное движение системы между моментами t_0 и t_1 сравнивается с виртуальным движением. Если

[1]) Natural Philosophy, § 321.

[2]) Thomson и Tait, Natural Philosophy (1-е изд.) Oxford (1867), § 331.

ξ, η, ζ означают декартовы координаты произвольной частицы m и X, Y, Z — компоненты полной силы, действующей на нее, то оказывается, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \{\Delta T + \sum (X\Delta\xi + Y\Delta\eta + Z\Delta\zeta)\}\, dt = 0, \tag{1}$$

при условии, что для сравниваемого движения имеем

$$\left[\sum m(\dot\xi\Delta\xi + \dot\eta\Delta\eta + \dot\zeta\Delta\zeta)\right]_{t_0}^{t_1} = 0. \tag{2}$$

Знак суммы $\sum$ распространяется на все частицы системы. Виртуальное движение обыкновенно выбирается таким образом, что начальное и конечное положения каждой частицы те же самые, что и при действительном движении. Величины $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ обращаются тогда в нуль при обоих пределах интегрирования, и условие (2) будет соблюдено.

Для консервативной системы, свободной от внешних сил, уравнение (1) принимает вид

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V)\, dt = 0. \tag{3}$$

Словами это выражается так: если сравнивать действительное движение системы между двумя произвольными ее положениями со всеми возможными движениями между теми же положениями ее, причем возможные движения (при приложении соответствующих сил) совершаются *в течение того же промежутка времени*, то получается, что интеграл по времени от *кинетического потенциала* [1]), именно $V - T$, будет иметь стационарное значение.

В обобщенных координатах уравнение (1) принимает вид

$$\int_{t_0}^{t_1} (\Delta T + Q_1\Delta q_1 + Q_2\Delta q_2 + \ldots + Q_n\Delta q_n)\, dt = 0, \tag{4}$$

отсюда можно получить известным способом уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r. \tag{5}$$

§ 136. Перейдем теперь к гидродинамической задаче. Пусть q_1, q_2, ..., q_n обозначают систему обобщенных координат, которая служит для определения положений твердых тел. Мы предположим пока, что движение жидкости зависит только от движения твердых тел и, следовательно, свободно от вихрей и ациклично.

---

[1]) Это название введено Гельмгольцем, Die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung, Crelle, 137, 213 (1886) (Wiss. Abh., III, 203).

В этом случае потенциал скоростей в произвольный момент будет иметь вид

$$\varphi = \dot{q}_1\varphi_1 + \dot{q}_2\varphi_2 + \ldots + \dot{q}_n\varphi_n, \tag{1}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ определяются аналогично тому, как это сделано в § 118. Формула для кинетической энергии жидкости представится тогда

$$2\mathbf{T} = -\varrho \int\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS = \mathbf{A}_{11}\dot{q}_1^2 + \mathbf{A}_{22}\dot{q}_2^2 + \ldots + 2\mathbf{A}_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \ldots, \tag{2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}_{rr} &= -\varrho \int\int \varphi_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial n}\, dS, \\ \mathbf{A}_{rs} &= -\varrho \int\int \varphi_r \frac{\partial \varphi_s}{\partial n}\, dS = -\varrho \int\int \varphi_s \frac{\partial \varphi_r}{\partial n}\, dS, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и интегрирования распространяются по мгновенному положению ограничивающих жидкость поверхностей. Тождественность обоих видов $\mathbf{A}_{rs}$ следует из теоремы Грина. Коэфициенты $\mathbf{A}_{rr}$, $\mathbf{A}_{rs}$ будут вообще функциями координат $q_1 q_2 \ldots q_n$.

Если мы к (2) прибавим удвоенную кинетическую энергию $\mathbf{T}_1$ самих тел, то получим выражение того же вида, но с измененными коэфициентами

$$2T = A_{11}\dot{q}_1^2 + A_{22}\dot{q}_2^2 + \ldots + 2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \ldots \tag{4}$$

Остается только еще показать, что хотя наша система и имеет бесконечное число степеней свободы, все же при предположенных условиях можно получить уравнения движения тел, подставляя это значение T в уравнения Лагранжа (5) § 135. Мы не имеем права это принять без дальнейшего исследования, так как положения различных частиц жидкости *не* определяются мгновенными значениями $q_1, q_2, \ldots, q_n$ координат тел. Когда, например, тела, после того как они совершили различные движения, все вернулись в свои первоначальные положения, тогда отдельные частицы жидкости окажутся смещенными, вообще говоря, на конечные расстояния [1]).

Вернемся теперь к общей формуле (1) § 135 и предположим, что для возможного сравнимого движения, к которому относится символ Δ, тела не испытывают изменений в размерах или формах и что, кроме того, жидкость остается несжимаемой и на ограничивающих поверхностях получает такое же перемещение в направлении нормалей, как

---

[1]) Как простой пример рассмотрим случай круглого диска, который движется без вращения таким образом, что его центр описывает прямоугольник, две стороны которого перпендикулярны к плоскости диска; исследуем теперь смещение частицы, которая первоначально находилась в центре диска.

и тело, с которым оно соприкасается. Известно,что при этих обстоятельствах члены суммы

$$\sum (X\Delta\xi + Y\Delta\eta + Z\Delta\zeta),$$

зависящие от внутренних реакций тел, исчезают.

Члены, зависящие от взаимных давлений элементов жидкости, равны

$$-\int\int\int \left(\frac{\partial p}{\partial x}\Delta\xi + \frac{\partial p}{\partial y}\Delta\eta + \frac{\partial p}{\partial z}\Delta\zeta\right) dx\,dy\,dz,$$

или

$$\int\int p(l\Delta\xi + m\Delta\eta + n\Delta\zeta)\,dS + \int\int\int p\left(\frac{\partial\Delta\xi}{\partial x} + \frac{\partial\Delta\eta}{\partial y} + \frac{\partial\Delta\zeta}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

где первый интеграл распространяется по ограничивающим поверхностям, а l, m, n означают направляющие косинусы нормалей, направленных в сторону жидкости. Объемный интеграл обращается в нуль вследствие условия несжимаемости

$$\frac{\partial\Delta\xi}{\partial x} + \frac{\partial\Delta\eta}{\partial y} + \frac{\partial\Delta\zeta}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

Интеграл по поверхности обращается в нуль на неподвижной границе, на которой имеем

$$l\Delta\xi + m\Delta\eta + n\Delta\zeta = 0,$$

а в случае движущихся тел он сокращается с теми членами, которые представляют результирующие давлений тел на жидкость. Таким образом можно предположить, что символы X, Y, Z относятся только к остальным силам, действующим на систему, и мы можем написать

$$\sum (X\Delta\xi + Y\Delta\eta + Z\Delta\zeta) = Q_1\Delta q_1 + Q_2\Delta q_2 + \ldots + Q_n\Delta q_n, \tag{6}$$

где $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ суть обобщенные компоненты внешних сил.

Сравниваемое движение жидкости имеет все еще большую степень общности. Мы ограничим ее теперь в дальнейшем следующим допущением. В то время когда твердые тела вынуждены совершать с помощью соответствующих сил произвольное движение, жидкость должна быть предоставлена самой себе и совершать то движение, которое вызывается движением твердых тел. Возможное движение жидкости можно, следовательно, предположить безвихревым, благодаря чему измененная кинетическая энергия системы $T + \Delta T$ будет той же самой функцией измененных координат $q_r + \Delta q_r$ и измененных скоростей $\dot{q}_r + \Delta\dot{q}_r$, какой функцией от q_r и $\dot{q}_r$ была первоначальная кинетическая энергия T.

Если же мы рассмотрим далее только частицы жидкости, то будем иметь при том же предположении

$$-\sum m(\dot{\xi}\Delta\xi+\dot{\eta}\Delta\eta+\dot{\zeta}\Delta\zeta)=-\varrho\int\int\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta x+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Delta z\right)dx\,dy\,dz=\varrho\int\int\varphi(l\Delta\xi+m\Delta\eta+n\Delta\zeta)\,dS,$$

причем опять использовано условие несжимаемости (5). Удовлетворяя кинематическим условиям на границах, будем иметь

$$l\Delta\xi+m\Delta\eta+n\Delta\zeta=-\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\Delta q_1-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Delta q_2-\ldots-\frac{\partial\varphi_n}{\partial n}\Delta q_n,$$

и, следовательно, применяя формулы (1), (2), (3), получим

$$\sum m(\dot{\xi}\Delta\xi+\dot{\eta}\Delta\eta+\dot{\zeta}\Delta\zeta)=$$
$$=\varrho\int\int\varphi\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\Delta q_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Delta q_2+\ldots+\frac{\partial\varphi_n}{\partial n}\Delta q_n\right)dS=$$
$$=(\mathbf{A}_{11}\dot{q}_1+\mathbf{A}_{12}\dot{q}_2+\ldots+\mathbf{A}_{1n}\dot{q}_n)\Delta q_1+$$
$$+(\mathbf{A}_{21}\dot{q}_1+\mathbf{A}_{22}\dot{q}_2+\ldots+\mathbf{A}_{2n}\dot{q}_n)\Delta q_2+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+(\mathbf{A}_{n1}\dot{q}_1+\mathbf{A}_{n2}\dot{q}_2+\ldots+\mathbf{A}_{nn}\dot{q}_n)\Delta q_n=$$
$$=\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\dot{q}_1}\Delta q_1+\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\dot{q}_2}\Delta q_2+\ldots+\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\dot{q}_n}\Delta q_n. \tag{7}$$

Если мы прибавим члены, зависящие от твердых тел, то найдем, что условие (2) § 135 все еще будет иметь место; вывод уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial T}{\partial q_r}=Q_r \tag{8}$$

проводится тогда обычным путем.

§ 137. В качестве первого применения изложенной теории рассмотрим пример, данный Томсоном и Тэтом [1]), где предполагается, что шар движется в жидкости, ограниченной только бесконечной плоской стенкой.

Возьмем для простоты случай, когда центр шара движется в плоскости, перпендикулярной к стенке, и будем определять его положение в этой плоскости в момент t прямоугольными координатами x и y, причем y обозначает расстояние от стенки. Мы имеем тогда

$$2T=A\dot{x}^2+B\dot{y}^2 \tag{1}$$

где A и B суть функции только от y; член $\dot{x}\dot{y}$ не может, очевидно, входить, так как энергия должна остаться без изменения, когда знак при $\dot{x}$ меняется

[1]) Thomson a. Tait, Natural Philosophy, § 321.

на обратный. Значения A и B могут быть получены из результатов § 98, 99; именно, если m обозначает массу шара, a — его радиус, то будем иметь приближенно

$$\left.\begin{aligned} A &= m+\frac{2}{3}\pi\varrho a^3\left(1+\frac{3}{16}\frac{a^3}{y^3}\right), \\ B &= m+\frac{2}{3}\pi\varrho a^3\left(1+\frac{3}{8}\frac{a^3}{y^3}\right), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

при условии, что y велико сравнительно с a.

Уравнения движения получаются

$$\frac{d}{dt}(A\dot{x})=X, \quad \frac{d}{dt}(B\dot{y})-\frac{1}{2}\left(\frac{dA}{dy}\dot{x}^2+\frac{dB}{dy}\dot{y}^2\right)=Y, \tag{3}$$

где X и Y суть компоненты внешней силы, относительно которой предполагаем, что ее линия действия проходит через центр шара.

Если внешняя сила отсутствует и скорость шара направлена перпендикулярно к стенке, то мы имеем $\dot{x}=0$ и

$$B\dot{y}^2=\text{const}. \tag{4}$$

Так как B убывает, когда y возрастает, то шар будет получать ускорение в направлении *от* стенки.

Если же, напротив, шар принужден двигаться параллельно стенке, тогда имеем $y=0$, и сила, необходимая для этого, будет равна

$$Y=-\frac{1}{2}\frac{dA}{dy}\dot{x}^2. \tag{5}$$

Так как $\frac{dA}{dy}$ отрицательна, то оказывается, что шар будет словно *притягиваться* стенкой. Причину этого легко усмотреть, если свести задачу к случаю стационарного движения. На той стороне шара, которая лежит ближе к стенке, скорость жидкости, очевидно, больше и давление, следовательно, меньше, чем на стороне, более удаленной от стенки; см. § 23.

Вышеизложенное исследование пригодно также и для случая, когда два шара движутся в безграничной массе жидкости таким образом, что плоскость $y=0$ во всех отношениях будет плоскостью симметрии.

§ 138. В качестве следующего случая мы рассмотрим тот, когда два шара движутся в направлении их линий центров.

Кинематическая часть этой задачи была рассмотрена в § 98. Если обозначим теперь через x, y расстояния центров A, B шаров от неподвижного начала O, лежащего на прямой, соединяющей эти точки, то мы будем иметь

$$2T=L\dot{x}^2-2M\dot{x}\dot{y}+N\dot{y}^2, \tag{1}$$

где коэфициенты L, M, N суть функции от $y-x$ или c, т. е. расстояния между центрами. Поэтому уравнения движения напишутся

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(L\dot{x}-M\dot{y})+\frac{1}{2}\left(\frac{dL}{dc}\dot{x}^2-2\frac{dM}{dc}\dot{x}\dot{y}+\frac{dN}{dc}\dot{y}^2\right)&=X, \\ \frac{d}{dt}(-M\dot{x}+N\dot{y})-\frac{1}{2}\left(\frac{dL}{dc}\dot{x}^2-2\frac{dM}{dc}\dot{x}\dot{y}+\frac{dN}{dc}\dot{y}^2\right)&=Y, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где X, Y суть силы, действующие на шары в направлении линии центров. Если радиусы a, b оба малы сравнительно с c и если принять во внимание

только важнейшие члены, то, согласно (15) § 98, мы будем иметь приближенно

$$\left.\begin{aligned} L &= m + \frac{2}{3}\pi\varrho a^3, \\ M &= 2\pi\varrho\,\frac{a^3b^3}{c^3}, \\ N &= m' + \frac{2}{3}\pi\varrho b^3, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где m и m' суть массы обоих шаров. С той же степенью приближения имеем, следовательно,

$$\begin{aligned} &\frac{dL}{dc} = 0, \\ &\frac{dM}{dc} = -6\pi\varrho\,\frac{a^3b^3}{c^4}, \\ &\frac{dN}{dc} = 0. \end{aligned}$$

Если каждый из обоих шаров принужден двигаться с постоянной скоростью, то сила, которая должна действовать на A, чтобы поддерживать движение, равна

$$X = -\frac{dM}{dc}\,\dot{y}\,(\dot{y} - \dot{x}) - \frac{dM}{dc}\,\ddot{x}y = 6\pi\varrho\,\frac{a^3b^3}{c^4}\,\dot{y}^2. \tag{4}$$

Эта сила направлена к B и зависит только от скорости B. Получается, таким образом, так, как если бы оба шара отталкивали друг друга; необходимо заметить, что кажущиеся силы вообще только тогда равны и противоположны, когда $\dot{x} = \pm\dot{y}$.

Если шары совершают малые периодические колебания одинакового периода около некоторого среднего положения, то средние значения первых членов в (2) обращаются в нуль; таким образом оказывается, что шары действуют друг на друга с силами, которые равны

$$6\pi\varrho\,\frac{a^3b^3}{c^4}\,[\ddot{x}y], \tag{5}$$

где $[\ddot{x}y]$ обозначает среднее значение от $\ddot{x}y$. Если разность фаз $\dot{x}$, $\dot{y}$ меньше четверти периода, то сила будет отталкивающей, а если больше четверти периода, то — притягивающей.

Пусть теперь B совершает малые периодические колебания, в то время как A остается в покое. Среднее значение силы, которая должна быть приложена к шару A, чтобы препятствовать его движению, будет равна

$$X = \frac{1}{2}\,\frac{dN}{dc}\,[\dot{y}^2], \tag{6}$$

где $[\dot{y}^2]$ обозначает среднее значение квадрата скорости B. При выше принятой степени точности $\frac{dN}{dc}$ равно нулю; принимая во внимание § 98, мы находим, что наиболее важный член здесь равен $-12\pi\varrho\,\frac{a^3b^3}{c^7}$, так что сила, действующая на A, притягивающая и равна

$$6\pi\varrho\,\frac{a^3b^3}{c^7}\,[\dot{y}^2]. \tag{7}$$

Этот результат можно получить из общего принципа, высказанного Кельвином. Если рассматривать два погруженных в жидкость тела, из которых одно (A) совершает малые колебания, в то время как другое (B) удерживается в покое, то скорость жидкости на поверхности B в общем будет больше на той стороне, которая обращена к A, чем на противоположной стороне. Поэтому среднее давление на первую сторону будет меньше, чем на вторую, так что B в общем будет испытывать притяжение к A. В качестве практических иллюстраций этой теоремы мы можем привести кажущееся притяжение подвешенной тонкой карточки в воздухе колеблющимся камертоном, а также другие подобные явления, исследованные экспериментально Гутрие [1]) и объясненные вышеуказанным способом Кельвином [2]).

Преобразование уравнений Лагранжа в случае циклического движения

§ 139. Мы возвратимся теперь к исследованиям в § 136 с целью применить их к случаю, когда жидкость независимо от движения, вызванного телами, совершает циклическое безвихревое движение через каналы, которые находятся в движущихся телах или в заключающем ее сосуде.

Предположим, что различные отверстия загорожены поверхностными перегородками. Мы допускаем, что у каналов, которые находятся в заключающем жидкость сосуде, эти воображаемые поверхности неподвижны в пространстве; напротив, у каналов, находящихся в движущемся теле, мы будем считать их неподвижно связанными с телом. Обозначим через $\dot{\chi}, \dot{\chi}', \dot{\chi}'', \ldots$ *относительные* расходы в момент t через отдельные перегородки; пусть $\chi, \chi', \chi'', \ldots$ будут интегралами по времени от этих расходов, считая от произвольного момента; эти величины определяют, следовательно, объемы жидкости, протекшей до момента t через соответствующие перегородки. Оказывается тогда, что аналогия с динамической системой с конечным числом степеней свободы все еще будет сохраняться, если только рассматривать величины χ, χ', χ'' в дополнение к величинам $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, которые определяют положения движущихся тел как обобщенные координаты системы. Заранее видно, что значения $\chi, \chi', \chi'', \ldots$ войдут не сами в выражение кинетической энергии, а только через скорости их изменений, т. е. их производные по времени.

Сначала покажем, что движение жидкости при всяком данном положении тел определяется однозначно мгновенными значениями $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{\chi}, \dot{\chi}', \dot{\chi}'', \ldots$ В самом деле, если два различных вида безвихревого движения были бы совместимы с этими значениями, тогда границы жидкости при том движении, которое есть *разность* этих двух движений, должны были бы оставаться в покое и расход

---

[1]) Guthrie, On Approach caused by Vibration, Phil. Mag. (4), XL (1870).

[2]) Kelvin, Reprint of Papers on Electrostatics etc., § 741. Литературные указания об экспериментальных и теоретических исследованиях Бьеркнеса и других относительно взаимного влияния колеблющихся в жидкости шаров, см. Hicks, Report on Recent Researches in Hydrodynamics, Brit. Ass. Rep., 1882, стр. 52; Love, Encycl. d. math. Wiss., IV (3), стр. 111, 112.

через каждую перегородку должен был бы равняться нулю. Формула (5) § 55 показывает, что при этих обстоятельствах кинетическая энергия должна была бы обращаться в нуль.

Потенциал скоростей может быть выражен, следовательно, в форме

$$\varphi = \dot{q}_1\varphi_1 + \dot{q}_2\varphi_2 + \ldots + \dot{q}_n\varphi_n + \dot{\chi}\Omega + \dot{\chi}'\Omega' + \ldots \qquad (1)$$

При этом φ_r есть потенциал скоростей того движения, при котором изменяется только q_r, и расход через каждую перегородку тем самым равен нулю. Далее, Ω есть потенциал скоростей движения, при котором твердые тела все находятся в покое, в то время как расход через первое отверстие равен единице, а через всякое другое отверстие равен нулю. Необходимо при этом принять во внимание, что φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$, Ω, $\Omega', \ldots$, вообще говоря, суть циклические функции, которые, однако, согласно принятым в § 50 ограничениям, могут рассматриваться как однозначные.

Кинетическая энергия жидкости определяется выражением

$$2\mathrm{T} = \varrho \iiint \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\,dy\,dz, \qquad (2)$$

где интеграл распространяется по области, которая в рассматриваемый момент наполнена жидкостью. Если вставить в (2) вместо φ значение из (1), то мы получим T в виде однородной квадратичной функции от $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, \ldots, \dot{\chi}, \dot{\chi}', \dot{\chi}''$ с коэфициентами, зависящими от мгновенного положения тел, и поэтому они представляют функции только от $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Кроме того, согласно (1) § 53, найдем

$$\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\dot{\chi}} = \varrho \iiint \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\Omega}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\Omega}{\partial z} \right\} dx\,dy\,dz =$$
$$= -\varrho \iint \varphi \frac{\partial\Omega}{\partial n}\,dS - \varrho\varkappa \iint \frac{\partial\Omega}{\partial n}\,d\sigma - \varrho\varkappa' \iint \frac{\partial\Omega}{\partial n}\,d\sigma' - \ldots,$$

где $\varkappa, \varkappa', \ldots$ означают циклические постоянные φ, первый поверхностный интеграл распространяется по поверхностям тел, а остальные — по различным перегородкам. При помощи условий, которыми определяется Ω, это выражение сводится к первому уравнению следующей системы:

$$\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\dot{\chi}} = \varrho\varkappa, \quad \frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\dot{\chi}'} = \varrho\varkappa', \ldots \qquad (3)$$

Эти уравнения показывают, что $\varrho\varkappa$, $\varrho\varkappa', \ldots$ могут рассматриваться в качестве тех обобщенных компонент импульса, которые соответствуют компонентам скорости $\dot{\chi}, \dot{\chi}', \ldots$

Воспользуемся общей формулой Гамильтона (1) § 135. Мы предположим, что сравниваемое движение твердых тел подчинено только условию, что начальные и конечные положения тел те же самые, как и при действительном движении; далее предполагается, что

начальное положение каждой частицы жидкости у обоих движений будет одним и тем же. Следовательно, выражение

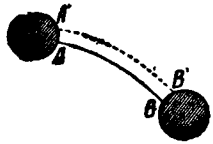
$$\sum m(\dot{\xi}\,\Delta\xi + \dot{\eta}\,\Delta\eta + \dot{\zeta}\,\Delta\zeta) \tag{4}$$

обращается в нуль в момент t_0, но, вообще говоря, не обращается в нуль в момент t_1, если нет налицо дальнейших ограничений.

Мы предположим теперь, что сравниваемое движение жидкости есть безвихревое; оно определяется тогда мгновенными значениями измененных обобщенных координат и скоростей. Если рассматривать частицы только жидкости, то будем иметь

$$\begin{aligned}
&\sum m(\dot{\xi}\,\Delta\xi + \dot{\eta}\,\Delta\eta + \dot{\zeta}\,\Delta\zeta) = \\
&\quad = -\varrho \iiint \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Delta\eta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Delta\zeta\right) dx\,dy\,dz = \\
&\quad = \varrho \iint \varphi\,(l\,\Delta\xi + m\,\Delta\eta + n\,\Delta\zeta)\,dS + \\
&\qquad + \varrho\varkappa \iint (l\,\Delta\xi + m\,\Delta\eta + n\,\Delta\zeta)\,d\sigma + \\
&\qquad + \varrho\varkappa' \iint (l\,\Delta\xi + m\,\Delta\eta + n\,\Delta\zeta)\,d\sigma' + \ldots,
\end{aligned} \tag{5}$$

где l, m, n обозначают направляющие косинусы нормали к некоторому элементу ограничивающей поверхности, направленной в сторону жидкости, или нормали элемента перегородки, проведенной в направлении, в котором взята соответствующая циркуляция.



Фиг. 32.

В момент t_1 мы будем иметь тогда

$$l\,\Delta\xi + m\,\Delta\eta + n\,\Delta\zeta = 0$$

как на поверхностях тел, так и на неподвижных границах. Если, далее, AB (фиг. 32) обозначает одну из перегородок в момент t_1, $A'B'$ изображает то место, которое занято в тот же самый момент теми частицами сравниваемого движения, которые при действительном движении занимают положение AB, тогда объем, заключенный между AB и $A'B'$, равен соответствующему значению $\Delta\chi$. Отсюда следует

$$\left.\begin{aligned}
&\iint (l\,\Delta\xi + m\,\Delta\eta + n\,\Delta\zeta)\,d\sigma = \Delta\chi, \\
&\iint (l\,\Delta\xi + m\,\Delta\eta + n\,\Delta\zeta)\,d\sigma' = \Delta\chi', \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Варьированные циркуляции для отдельных моментов находятся еще в нашем распоряжении. Мы можем допустить, что они выбраны таким образом, что $\Delta\chi$, $\Delta\chi'$, ... в момент t_1 обращаются в нуль.

При этом выражение (4) будет обращаться в нуль, и если мы еще дальше предположим, что при произвольных относительных перемещениях частиц жидкости внешние силы в их совокупности не совершают работы, когда граница жидкости находится в покое, то будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\Delta T+Q_1\Delta q_1+Q_2\Delta q_2+\ldots+Q_n\Delta q_n\right\}dt=0, \tag{7}$$

как и выше.

Интегрируя по частям и принимая во внимание, что при нашем допущении

$$\Delta q_1,\ \Delta q_2,\ \ldots,\ \Delta q_n,\ \Delta\chi,\ \Delta\chi',\ \ldots$$

при пределах t_0, t_1 обращаются в нуль, но в остальном независимы, мы получаем n уравнений вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_r}-\frac{\partial T}{\partial q_r}=Q_r \tag{8}$$

и затем уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\chi}=0,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\chi'}=0. \tag{9}$$

§ 140. Уравнения типа (8) и (9) встречаются в различных задачах обыкновенной динамики, например, когда вопрос касается гироскопов, где координаты χ, χ', абсолютные значения которых не влияют на кинетическую или потенциальную энергию системы, суть угловые координаты гироскопов относительно их рам. Общая теория таких систем была разобрана Раусом [1]), Томсоном и Тэтом [2]) и другими авторами.

Мы видели, что имеют место уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\chi}=\varrho\varkappa,\quad \frac{\partial T}{\partial\dot\chi'}=\varrho\varkappa',\ \ldots, \tag{10}$$

и интегрирование уравнений (9) показывает, что величины $\varkappa$, $\varkappa'$, ... постоянны по отношению ко времени, что уже известно было ранее (§ 50). Для дальнейшего полагаем

$$R=T-\varrho\varkappa\dot\chi-\varrho\varkappa'\dot\chi'\ldots \tag{11}$$

---

[1]) Routh, On the Stability of a Given State of Motion (Adams Prize Essay), London, 1877; Advanced Rigid Dynamics, 6-е изд., London, 1905.

[2]) Thomson a. Tait, Natural Philosophy, 2-е изд., § 319 (1879). См. также Helmholtz, Prinzipien der Statik Monozyklischen Systeme, Crelle, XCVII (1884) (Wiss. Abh., III, 179); Larmor, On the Direct Application of the Principle of Least Action to the Dynamics of Solid. and Fluid Sistems, Proc. Lond. Math. Soc. (2), XV (1884) (Papers, I, 31); Basset, Proc. Camb. Soc., VI, 117 (1889).

Уравнения (10) определяют, как сразу видно, если их написать полностью, $\dot{\chi}$, $\dot{\chi}'$, ... в виде линейных функций от $\varkappa$, $\varkappa'$, ... и $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_n$; вставляя в (11), мы можем представить R как однородную квадратичную функцию тех же величин с коэфициентами, которые, вообще говоря, содержат координаты q_1, q_2, ..., q_n. При этом предположении, если к обеим частям уравнения (11) применить произвольную вариацию δ и опустить члены, которые исчезают согласно (10), будем иметь

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1}\delta\dot{q}_1+\ldots+\frac{\partial R}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial R}{\partial \varkappa}\delta\varkappa+\ldots=$$
$$=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\delta\dot{q}_1+\ldots+\frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+-\varrho\dot{\chi}\,\delta\varkappa-\ldots, \qquad (12)$$

где для краткости написан только один член каждого вида. Мы получаем отсюда $2n$ уравнений типа

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}, \quad \frac{\partial R}{\partial q_r}=\frac{\partial T}{\partial q_r} \qquad (13)$$

вместе с

$$\frac{\partial R}{\partial \varkappa}=-\varrho\dot{\chi}, \quad \frac{\partial R}{\partial \varkappa'}=-\varrho\dot{\chi}'. \qquad (14)$$

Поэтому уравнения (8) могут быть написаны в следующей форме:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial R}{\partial q_r}=Q_r, \qquad (15)$$

где скорости $\dot{\chi}$, $\dot{\chi}'$, ..., которые соответствуют циклическим координатам χ, χ', ..., теперь исключены [1]).

§ 141. Чтобы показать более ясно, каким образом меняются динамические уравнения в случае циклических движений, мы поступим следующим образом.

Подставляя (14) в (11), мы получим

$$T=R-\left(\varkappa\frac{\partial R}{\partial \varkappa}+\varkappa'\frac{\partial R}{\partial \varkappa'}+\ldots\right). \qquad (16)$$

Если вспомнить о содержании R, то мы можем на мгновение написать

$$R=R_{2,0}+R_{1,1}+R_{0,2}, \qquad (17)$$

где $R_{2,0}$ есть однородная квадратичная функция от $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_n$; $R_{0,2}$ — однородная квадратичная функция от $\varkappa$, $\varkappa'$, ... и $R_{1,1}$ есть билинейная функция этих двух рядов переменных. Поэтому уравнение (16) принимает вид

$$T=R_{2,0}-R_{0,2}, \qquad (18)$$

---

[1]) Это исследование принадлежит Routh, см. сноску на стр. 243; ср. Уиттекер, Аналитическая динамика, § 38, ОНТИ, 1937.

или, как мы будем писать в дальнейшем,

$$T = \mathfrak{T} + K, \tag{19}$$

где $\mathfrak{T}$ и K суть однородные квадратичные функции от $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ и $\varkappa, \varkappa', \ldots$ соответственно. Из (17) следует тогда, что

$$R = \mathfrak{T} - K - \beta_1\dot{q}_1 - \beta_2\dot{q}_2 - \ldots - \beta_n\dot{q}_n, \tag{20}$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots$ суть линейные функции от $\varkappa, \varkappa', \ldots$

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= a_1\varkappa + a_1'\varkappa' + \ldots, \\ \beta_2 &= a_2\varkappa + a_2'\varkappa' + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_n &= a_n\varkappa + a_n'\varkappa' + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Значения коэфициентов a (для гидродинамической задачи) находим из (14) и (20).

$$\left.\begin{aligned} \varrho\dot{\chi} &= \frac{\partial K}{\partial \varkappa} + a_1\dot{q}_1 + a_2\dot{q}_2 + \ldots + a_n\dot{q}_n, \\ \varrho\dot{\chi}' &= \frac{\partial K}{\partial \varkappa'} + a_1'\dot{q}_1 + a_2'\dot{q}_2 + \ldots + a_n'\dot{q}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Эти уравнения показывают, что a_r есть та часть потока массы через первую перегородку, которая приходится на единицу скорости изменения координаты q_r, и т. д.

Если подставить теперь значение (20) в уравнения (15), то получим общие уравнения „гиростатической системы" в форме[1])

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q_1} + (1,2)\dot{q}_2 + (1,3)\dot{q}_3 + \ldots + (1,n)\dot{q}_n + \frac{\partial K}{\partial q_1} = Q_1, \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q_2} + (2,1)\dot{q}_1 + (2,3)\dot{q}_3 + \ldots + (2,n)\dot{q}_n + \frac{\partial K}{\partial q_2} = Q_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q_n} + (n,1)\dot{q}_1 + (n,2)\dot{q}_2 + (n,3)\dot{q}_3 + \ldots + \frac{\partial K}{\partial q_n} = Q_n, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

где

$$(r, s) = \frac{\partial \beta_s}{\partial q_r} - \frac{\partial \beta_r}{\partial q_s}. \tag{24}$$

Важно заметить, что

$$(r, s) = -(s, r) \quad \text{и} \quad (r, r) = 0.$$

---

[1]) Эти уравнения появились впервые в работе В. Томсона, On the Motion of Rigid Solids in a Liquid circulating irrotationally through perforations in them or in a Fixed Solid, Phil. Mag. (4), XLV, 332 (873) (Papers, IV, 101). См. также C. Neumann, Hydrodynamische Untersuchungen (1883).

Если в уравнениях движения вполне определенной системы с конечным числом степеней свободы (4) § 135 изменить знак элемента времени δt, то уравнения остаются без изменения. Движение, таким образом, обратимо, т. е. если при прохождении системы через некоторое определенное положение скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ все будут обращены, то система (если силы в одинаковых положениях будут всегда одинаковы) пройдет свой первоначальный путь в противоположном направлении. Важно заметить, что сказанное не всегда имеет место для гиростатической системы; именно, те члены в (23), которые линейны относительно $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, меняют свой знак одновременно с δt, в то время как другие члены не делают этого. Следовательно, в рассматриваемом нами случае движение тел будет необратимо, если только мы не предположим, что циркуляции $\varkappa, \varkappa', \ldots$ также меняют свой знак одновременно со скоростями $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$[1]).

Если мы умножим уравнения (23) соответственно на $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ и затем их сложим, то мы найдем при помощи небольшого изменения обычного приема

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{T}+K)=Q_1\dot{q}_1+Q_2\dot{q}_2+\ldots+Q_n\dot{q}_n, \tag{25}$$

или, если система будет консервативной,

$$\mathfrak{T}+K+V=\text{const.} \tag{26}$$

§ 142. Результаты § 141 могут быть применены к установлению условий равновесия системы тел, окруженных жидкостью, находящейся в циклическом движении. Эта задача „кинетостатики", как ее можно назвать, однако, может быть рассмотрена с помощью более простого приема.

Выражение для φ при настоящих условиях может быть написано в двух видах

$$\varphi=\dot{\chi}\Omega+\dot{\chi}'\Omega'+\ldots, \tag{1}$$

$$\varphi=\varkappa\omega+\varkappa'\omega'+\ldots, \tag{2}$$

и кинетическая энергия получается как однородная квадратичная форма либо от $\dot{\chi}, \dot{\chi}', \ldots$, либо от $\varkappa, \varkappa', \ldots$ с коэфициентами, которые в обоих случаях суть функции координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$, определяющих положения твердых тел. Эти два выражения для энергии мы будем различать с помощью двух символов T_0 и K. Далее, согласно (5) § 55 мы имеем еще третью формулу для T, именно

$$2T=\varrho\varkappa\dot{\chi}+\varrho\varkappa'\dot{\chi}'+\ldots \tag{3}$$

---

[1]) Совершенно так же, как нельзя переменнть движение осн волчка на обратное, если не изменить направления вращения.

Если воспользоваться исследованием в начале § 139, учитывая при этом, что теперь члены, содержащие $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, исчезают, то замечаем, что

$$\varrho\varkappa = \frac{\partial T_0}{\partial \dot{\chi}}, \quad \varrho\varkappa' = \frac{\partial T_0}{\partial \dot{\chi}'}, \ldots \tag{4}$$

Далее, формула в явном виде для K будет

$$2K = -\varrho\varkappa \iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma - \varrho\varkappa' \iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma' - \ldots =$$
$$= (\varkappa, \varkappa)\varkappa^2 + (\varkappa', \varkappa')\varkappa'^2 + \ldots + 2(\varkappa, \varkappa')\varkappa\varkappa' + \ldots, \tag{5}$$

где

$$(\varkappa, \varkappa) = -\varrho \iint \frac{\partial\omega}{\partial n}\, d\sigma,$$
$$(\varkappa, \varkappa') = -\varrho \iint \frac{\partial\omega'}{\partial n}\, d\sigma = -\varrho \iint \frac{\partial\omega}{\partial n}\, d\sigma' \tag{6}$$

и т. д. Отсюда следует

$$\frac{\partial K}{\partial \varkappa} = (\varkappa, \varkappa)\varkappa + (\varkappa, \varkappa')\varkappa' + \ldots = -\varrho \iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma.$$

Мы получаем таким образом

$$\varrho\dot{\chi} = \frac{\partial K}{\partial \varkappa}, \quad \varrho\dot{\chi}' = \frac{\partial K}{\partial \varkappa'}, \ldots \tag{7}$$

Если, далее, напишем $T_0 + K$ вместо $2T$ в уравнении (3) и применим к обеим частям полученного таким образом тождества полную вариацию δ, то найдем, если опустить члены, которые уничтожаются согласно (4) и (7)[1]),

$$\frac{\partial T_0}{\partial q_r} + \frac{\partial K}{\partial q_r} = 0. \tag{8}$$

Это уравнение содержит ряд необходимых аналитических формул[2]).

Предположим теперь, что тела из состояния покоя в положении $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ переведены в другое соседнее состояние покоя, в положение

$$(q_1 + \Delta q_1, q_2 + \Delta q_2, \ldots, q_n + \Delta q_n);$$

тогда необходимая для этого работа будет равна

$$Q_1 \Delta q_1 + Q_2 \Delta q_2 + \ldots + Q_n \Delta q_n,$$

где $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ означают компоненты тех внешних сил, которые должны быть приложены, чтобы нейтрализовать давления жидкости на тела. Эта работа должна равняться приращению ΔK кинетической

[1]) Достаточно взять либо (4), либо (7); рассматриваемый способ приводит тогда к независимому доказательству другого ряда формул.

[2]) Заметим, что функция R § 140 приводится теперь к $-K$.

энергии, которое вычисляется при допущении, что циркуляции $\varkappa, \varkappa', \ldots$ будут постоянны. Отсюда следует

$$Q_r' = \frac{\partial K}{\partial q_r}. \tag{9}$$

Силы, эквивалентные давлениям жидкости на тела (когда последние находятся в покое), получаются изменением знака; они имеют вид

$$Q_r' = -\frac{\partial K}{\partial q_r}; \tag{10}$$

Следовательно, тела стремятся двигаться таким образом, что кинетическая энергия циклического движения убывает.

Вследствие (8) будем иметь также

$$Q_r' = \frac{\partial T_0}{\partial q_r}. \tag{11}$$

§ 143. Формула (19) § 141 может быть использована для определения приближенного выражения для сил воздействия на тело, погруженное в неравномерный поток [1]).

Предположим, что мы имеем тело, удерживаемое в состоянии покоя в циклической области, в которой жидкость находится в циркуляционном безвихревом движении. Пусть K есть энергия жидкости, которая изменяется с изменением положения тела. Мы будем предполагать, что размеры тела настолько малы по сравнению с расстоянием от стенок области, что его положение может быть определено заданными координатами точки (x, y, z). Тогда для компонент сил воздействия на него давлений жидкости мы будем иметь

$$\mathbf{X} = -\frac{\partial K}{\partial x}, \quad \mathbf{Y} = -\frac{\partial K}{\partial y}, \quad \mathbf{Z} = -\frac{\partial K}{\partial z}. \tag{1}$$

Остается найти приближенно вид функции K от x, y, z. Пусть (u, v, w) будет скорость, которую имела бы жидкость в точке (x, y, z), если бы тело отсутствовало. Если тело было бы вынуждено двигаться с этой скоростью и если бы оно имело плотность, совпадающую с плотностью окружающей жидкости, то энергия была бы приближенно той же самой, как если бы все пространство было заполнено жидкостью. Из формулы (19) § 141 следует, что в этом случае энергия жидкости была бы $\mathfrak{T} + K$, где согласно § 124

$$2\mathfrak{T} = \mathbf{A}u^2 + \mathbf{B}v^2 + \mathbf{C}w^2 + 2\mathbf{A}'vw + 2\mathbf{B}'wu + 2\mathbf{C}'uv, \tag{2}$$

а энергия тела была бы равна

$$\frac{1}{2}\varrho Q(u^2 + v^2 + w^2), \tag{3}$$

---

[1]) G. I. Taylor, The Forces on a Body placed in a Curved or Converging Stream of Fluid, Proc. Roy. Soc., CXX, 260 (1928).

где Q есть вытесненный объем. Выражение

$$\mathfrak{T}+\frac{1}{2}\varrho Q(u^2+v^2+w^2)+K \tag{4}$$

имеет, таким образом, постоянное значение, так как оно представляет энергию жидкости, заполняющей область и имеющей заданную циркуляцию. Это выражение определяет вид K.

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{X}&=\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial x}+\frac{1}{2}\varrho Q\frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2+w^2),\\ \mathbf{Y}&=\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial y}+\frac{1}{2}\varrho Q\frac{\partial}{\partial y}(u^2+v^2+w^2),\\ \mathbf{Z}&=\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial z}+\frac{1}{2}\varrho Q\frac{\partial}{\partial z}(u^2+v^2+w^2).\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Так как силы воздействия на тело должны зависеть только от движения жидкости в непосредственной близости к нему, то эти выражения будут общими и независимыми от тех частных предположений, которые принимаются в отношении вывода этих уравнений.

Если направление невозмущенного потока вблизи тела будет принято за направление оси x, то результаты упрощаются. Полагая $v=0$, $w=0$, мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{X}&=\left\{(\mathbf{A}+\varrho Q)\frac{\partial u}{\partial x}+\mathbf{B}'\frac{\partial w}{\partial x}+\mathbf{C}'\frac{\partial v}{\partial x}\right\}u,\\ \mathbf{Y}&=\left\{(\mathbf{A}+\varrho Q)\frac{\partial u}{\partial y}+\mathbf{B}'\frac{\partial w}{\partial y}+\mathbf{C}'\frac{\partial v}{\partial y}\right\}u,\\ \mathbf{Z}&=\left\{(\mathbf{A}+\varrho Q)\frac{\partial u}{\partial z}+\mathbf{B}'\frac{\partial w}{\partial z}+\mathbf{C}'\frac{\partial v}{\partial z}\right\}u.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Если к тому же поток будет симметричен относительно плоскостей $y=0$, $z=0$, то мы будем иметь $\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $\frac{\partial u}{\partial z}=0$, а в силу допущения о безвихревом характере движения будет также $\frac{\partial v}{\partial x}=0$, $\frac{\partial w}{\partial x}=0$. Симметрия также требует, чтобы $\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z}=0$. Отсюда

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{X}&=(\mathbf{A}+\varrho Q)u\frac{\partial u}{\partial x},\\ \mathbf{Y}&=\mathbf{C}'u\frac{\partial v}{\partial y},\\ \mathbf{Z}&=\mathbf{B}'u\frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Вначале предположим, что одна из осей установившегося поступательного движения (§ 124) совпадает с направлением потока. Тогда $\mathbf{C}'=0$, $\mathbf{B}'=0$ и

$$\mathbf{X}=(\mathbf{A}+\varrho Q)f,\quad \mathbf{Y}=0,\quad \mathbf{Z}=0, \tag{8}$$

где f есть ускорение в невозмущенном потоке. Таким образом, если тело представляет шар, то $\mathbf{A}=\frac{2}{3}\pi\varrho a^3$, $Q=\frac{4}{3}\pi a^3$, $\mathbf{X}=2\pi\varrho a^3 f$. Для круглого цилиндра, относя все величины к единице длины его, получим

$$\mathbf{A}=\pi\varrho a^2,\quad Q=\pi\varrho a^2,\quad \mathbf{X}=2\pi\varrho a^2 f.$$

Теперь предположим, что только две оси установившегося поступательного движения лежат в одиой плоскости с направлением потока. Если данная плоскость принята за плоскость xy, то мы будем иметь $\mathbf{A}'=0$, $\mathbf{B}'=0$. Если поток будет симметричным относительно оси x, то будем иметь

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x},$$

и силы приводятся к

$$\mathbf{X}=(\mathbf{A}+\varrho Q)f,\quad \mathbf{Y}=\frac{1}{2}\mathbf{C}'f,\quad \mathbf{Z}=0. \tag{9}$$

В случае круглого диска

$$\mathbf{A}=\frac{8}{3}\varrho a^3\cos^2\alpha,\quad \mathbf{C}'=-\frac{8}{3}\varrho a^3\sin\alpha\cos\alpha,\quad Q=0,$$

где α есть угол, который составляет направление потока с осью симметрии.

В случае плоского движения эллиптического цилиндра

$$\mathbf{A}=\pi\varrho\,(b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha),\quad \mathbf{C}'=\pi\varrho\,(a^2-b^2)\sin\alpha\cos\alpha,\quad Q=\pi ab,$$

где α есть угол наклона направления потока к большой оси [1]).

Приведенная теория имеет интерес в связи с „перепадом давления" в аэродинамической трубе, которая используется для измерения лобового сопротивления моделей аэропланов. Поток воздуха немного суживается по направлению к вентилятору иа заднем конце трубы, а возрастание скорости предполагает падение давления. Мы тогда имеем

$$\varrho f=-\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{10}$$

Предыдущие формулы показывают, что было бы неправильно вычислять значение $\mathbf{X}$ на основании только измеренных градиентов давлеиия, как если бы это была статическая задача, когда мы имели бы просто $X=\varrho Qf$ *).

Некоторые дальнейшие интересные примеры кинетостатики (невоспроизводимые в настоящем издании) были исследованы Томсоном [2]), Кирхгофом [3]) и Больцманом [4]).

---

[1]) Эти частные случаи были подтверждены непосредственным вычислением воздействия давлений жидкости: Aeronautical Research Committee, R. and M. 1164 (1928).

*) Taylor G. I. см. сноску на стр. 248.

[2]) Thomson W., On the Forces experienced by Solids immersed in a Moving Liquid, Proc. R. S. Edin., 1870 (Reprint, § XLI).

[3]) См. сноску на стр. 74.

[4]) Boltzman, Über die Druckkräfte, welche auf Ringe wirksam sind die in bewegte Flüssigkeit tauchen, Crelle, LXXIII (1871) (Wiss. Abh. I, 200).

§ 144. Теперь мы оставляем эту область нашего исследования. Чтобы избежать, насколько это возможно, сомнений в ненадежности, которые иногда возникают при употреблении „обобщенных координат", мы старались в этой главе поставить дело на возможно прочное основание, не считаясь даже с некоторой многословностью в толковании методов.

Некоторым авторам[1]) вопрос представлялся сам по себе как один из наиболее простых. Задачи приводились в один прием к обыкновенным формулам динамики мысленным введением неограниченного числа „скрытых координат", которые должны были бы определять положения различных частиц жидкости. Соответствующие компоненты импульса все предполагались обращающимися в нуль, за исключением (в случае циклической области) тех, которые представлены циркуляциями через различные отверстия.

С физической точки зрения затруднительно будет не согласиться с подобного рода обобщением, в особенности тогда, когда оно образует исходную точку для всего развития этой ветви гидродинамики; хотя оно и будет по меньшей мере законным, все же с гидродинамической точки зрения желательно, чтобы оно было оправдано a posteriori независимыми, хотя и громоздкими методами.

Какой бы прием мы ни применяли, в результате имеем следующее: системы, рассмотренные в этой главе, ведут себя как обыкновенные системы с конечным числом степеней свободы (поскольку принимаются во внимание явные координаты q_1, q_2, ..., q_n). Дальнейшее развитие общей теории принадлежит аналитической динамике, и поэтому его надо искать в соответствующих учебниках и специальных статьях, посвященных этому вопросу. Необходимо, однако, еще отметить, что гидродинамические системы доставляют в высшей степени интересные и прекрасные применения принципа наименьшего действия, теорем взаимности Гельмгольца и других общих теорем динамики.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 145. Наши исследования до сих пор ограничивались почти исключительно случаем безвихревого движения. Мы переходим теперь к изучению вихревого движения. Эта область была впервые исследована Гельмгольцем[2]); другие, более простые доказательства некоторых его теорем были даны впоследствии Кельвином в работе о вихревом движении, цитированной уже в главе III.

---

[1]) См. Thomson a. Tait, также Larmor, см. выше, стр. 243.

[2]) Helmholtz, Über Integrale der hydrodynamischen Gleichung. n, welche den Wirbelbewegungen entsprechen, Crelle, LV, 1858 [Wiss. Abh., 1. 101]. Переиздано в Ostwalds Klassiker d. exakten Wissenschaften, Bd. 79.

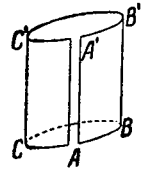
В этой главе, так же как в главе III, для обозначения компонентов вектора вихря мы применили символы ξ, η, ζ; это значит

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},\\ \eta &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},\\ \zeta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Линию, направление которой совпадает всюду с мгновенной осью вращения частиц жидкости, называют вихревой линией. Дифференциальные уравнения системы вихревых линий будут

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}. \tag{2}$$

Если через каждую точку малой замкнутой кривой провести соответствующую вихревую линию, то получим трубку, которая называется вихревой трубкой. Жидкость внутри такой трубки образует вихревую нить или просто вихрь.



Фиг. 33.

Пусть ABC и $A'B'C'$ (фиг. 33) — две произвольные, проведенные на поверхности вихревой трубки замкнутые кривые, которые окружают вихревую трубку, и AA' пусть будет произвольная соединяющая их линия, которая также лежит на поверхности. Мы применим теперь к замкнутой кривой $ABCAA'C'B'A'A$ и к ограниченной ею части поверхности вихревой трубки теорему § 32. Так как для каждой точки этой поверхности имеем

$$l\xi + m\eta + n\zeta = 0,$$

то криволинейный интеграл, распространенный по замкнутой кривой:

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz),$$

должен обращаться в нуль, т. е. в обозначениях § 31

$$J(ABCA) + J(AA') + J(A'C'B'A') + J(A'A) = 0,$$

а это сводится к

$$J(ABCA) = J(A'B'C'A').$$

Следовательно, циркуляция по всем замкнутым кривым вокруг одной и той же вихревой трубки имеет одинаковое значение.

Далее из § 31 следует, что циркуляция вдоль контура произвольного сечения трубки, перпендикулярного к трубке, равна $\omega\sigma$, где

$$\omega = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}$$

означает модуль вихря, а σ — бесконечно малую величину площади сечения.

Сопоставляя эти результаты, мы заключаем, что произведение абсолютного значения вихря на поперечное сечение вихревой трубки имеет одинаковое значение для всех точек вихря. Это произведение удобно взять как меру *напряжения* вихря[1]).

Данное здесь доказательство принадлежит Кельвину; сама теорема была впервые дана Гельмгольцем как следствие соотношения

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}=0, \tag{3}$$

которое непосредственно следует из данных в выражениях (1) значений для ξ, η, ζ. На самом деле, если вставить ξ, η, ζ вместо U, V, W в (1) § 42, то получим

$$\iint (l\xi+m\eta+n\zeta)\,dS=0, \tag{4}$$

где интегрирование распространяется по любой лежащей целиком в жидкости замкнутой поверхности. Применив это к замкнутой поверхности, которая образована из двух сечений вихревой трубки и лежащей между ними части трубки, найдем

$$\omega_1\sigma_1=\omega_2\sigma_2,$$

где ω_1, ω_2 суть значения вихря в сечениях σ_1, σ_2.

Доказательство Кельвина показывает, что теорема имеет место и тогда, когда только u, v, w непрерывны, а ξ, η, ζ разрывны; в этом случае может быть в одной точке вихревой нити острый излом.

Важным следствием вышеизложенной теоремы является теорема о том, что вихревая линия во внутренней точке жидкости не может ни начинаться, ни оканчиваться. Все имеющиеся вихревые линии должны или образовать замкнутые кривые линии, или же, пронизывая жидкость, начинаться и кончаться на ее границах; ср. § 36.

Формула (3) § 32 может быть теперь сформулирована следующим образом: циркуляция по какой-либо замкнутой кривой равна сумме напряжений всех вихрей, охватываемых этой кривой.

§ 146. В § 33 было доказано, что в идеальной жидкости, находящейся под действием сил с однозначным потенциалом, плотность которой или постоянна во всем объеме, или есть функция только давления, циркуляция по любой движущейся с жидкостью замкнутой кривой постоянна во времени.

Применяя эту теорему к замкнутой кривой, которая охватывает вихревую трубку, мы найдем, что напряжение какой-либо вихревой трубки постоянно во времени.

Возьмем в произвольный момент времени поверхность, состоящую всецело из вихревых линий; согласно § 32 циркуляция по всякой

[1]) Циркуляция вокруг вихря есть действительно самая естественная мера его напряжения.

замкнутой кривой, проведенной на ней, равна нулю, так как для каждой точки поверхности имеет место равенство

$$l\xi + m\eta + n\zeta = 0.$$

Вообразим теперь, что поверхность движется с жидкостью, тогда (как было показано в предыдущем параграфе) циркуляция по всякой замкнутой кривой, лежащей на поверхности, всегда будет равна нулю, отсюда следует, что поверхность будет состоять всегда из вихревых линий. Если мы будем рассматривать две такие поверхности, то увидим, что их линия пересечения всегда должна быть вихревой линией, отсюда мы выводим теорему, что вихревые линии движутся вместе с жидкостью.

Эта замечательная теорема была сначала доказана Гельмгольцем для случая несжимаемых жидкостей; вышеизложенное, данное Кельвином доказательство показывает, что оно пригодно и для всякой жидкости, которая удовлетворяет приведенным выше условиям.

Теорема о том, что циркуляция по всякой движущейся с жидкостью замкнутой кривой остается неизменной, составляет единственную и достаточную связь с динамикой, которая необходима для проведения исследований этой главы.

Эта теорема основывается на допущении непрерывного распределения давлений, которое, обратно, опять вытекает из этой теоремы. В самом деле, если в какой-нибудь задаче мы найдем функции u, v, w от x, y, z, t, которые удовлетворяют кинематическим условиям, и если это решение возможно также *динамически*, то соотношение между давлениями жидкости в двух данных движущихся точках A, B должно быть задано с помощью формулы (2) § 33, именно

$$\left[\int \frac{dp}{\varrho} + \Omega - \frac{1}{2}q^2\right]_A^B = -\frac{D}{Dt}\int_A^B (u\,dx + v\,dy + w\,dz). \qquad (1)$$

Таким образом необходимо и достаточно, чтобы выражение в правой части равенства (1) оставалось одинаковым для всех путей интегрирования, которые соединяют A и B и движутся с жидкостью. Это бывает тогда и только тогда, когда принятые значения u, v, w таковы, что вихревые линии движутся с жидкостью и что интенсивность каждого вихря постоянна во времени.

Легко видеть, что это заключение ни в какой мере не нарушается, когда допущенные значения u, v, w таковы, что ξ, η, ζ делаются на некоторых поверхностях разрывными, при условии, что u, v, w сами всюду непрерывны.

Вследствие исторического интереса мы изложим кратко некоторые независимые друг от друга доказательства предыдущих теорем и выясним их взаимную связь.

Пожалуй, самое убедительное из этих доказательств основано на простом обобщении некоторых уравнений, которые первоначально были даны

Коши во введении к его классическому трактату о волнах [1]) и которые он применил для доказательства теоремы Лагранжа о потенциале скоростей.

Если исключить функцию χ с помощью перекрестного дифференцирования, то уравнения (2) § 15 дают

$$\frac{du}{db}\frac{dx}{dc}-\frac{du}{dc}\frac{dx}{db}+\frac{dv}{db}\frac{dy}{dc}-\frac{dv}{dc}\frac{dy}{db}+\frac{dw}{db}\frac{dz}{dc}-\frac{dw}{dc}\frac{dz}{db}=\frac{dw_0}{db}-\frac{dv_0}{dc}$$

(где u, v, w написаны вместо $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$) и два других аналогичных уравнения. Заменяя в этих уравнениях производные от u, v, w по a, b, c через их выражения как функции производных от u, v, w по x, y, z, получим

$$\left.\begin{aligned}
\xi\frac{\partial(y,z)}{\partial(b,c)}+\eta\frac{\partial(z,x)}{\partial(b,c)}+\zeta\frac{\partial(x,y)}{\partial(b,c)}&=\xi_0,\\
\xi\frac{\partial(y,z)}{\partial(c,a)}+\eta\frac{\partial(z,x)}{\partial(c,a)}+\zeta\frac{\partial(x,y)}{\partial(c,a)}&=\eta_0,\\
\xi\frac{\partial(y,z)}{\partial(a,b)}+\eta\frac{\partial(z,x)}{\partial(a,b)}+\zeta\frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)}&=\zeta_0.
\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Умножив теперь эти уравнения по порядку на $\frac{dx}{da}$, $\frac{dx}{db}$, $\frac{dx}{dc}$ и сложив их, мы получим, если принять во внимание уравнение неразрывности Лагранжа (1) § 14, первое уравнение следующей симметричной системы:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\xi}{\varrho}&=\frac{\xi_0}{\varrho_0}\frac{dx}{da}+\frac{\eta_0}{\varrho_0}\frac{dx}{db}+\frac{\zeta_0}{\varrho_0}\frac{dx}{dc},\\
\frac{\eta}{\varrho}&=\frac{\xi_0}{\varrho_0}\frac{dy}{da}+\frac{\eta_0}{\varrho_0}\frac{dy}{db}+\frac{\zeta_0}{\varrho_0}\frac{dy}{dc},\\
\frac{\zeta}{\varrho}&=\frac{\xi_0}{\varrho_0}\frac{dz}{da}+\frac{\eta_0}{\varrho_0}\frac{dz}{db}+\frac{\zeta_0}{\varrho_0}\frac{dz}{dc},
\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

В частном случае несжимаемой жидкости ($\varrho=\varrho_0$) эти уравнения отличаются только обозначением ξ, η, ζ от уравнений, данных Коши. Из них тотчас же следует, что значения ξ, η, ζ для частицы жидкости всегда будут равны нулю, если начальные значения ξ_0, η_0, ζ_0 компонент вихря для этой частицы обращаются в нуль. Это и составляет доказательство Коши теоремы Лагранжа.

Чтобы интерпретировать уравнения (3) для общего случая, рассмотрим линейный элемент, который для момента $t=0$ лежит на вихревой линии; тогда имеем

$$\delta a=\varepsilon\frac{\xi_0}{\varrho_0},$$
$$\delta b=\varepsilon\frac{\eta_0}{\varrho_0},$$
$$\delta c=\varepsilon\frac{\zeta_0}{\varrho_0},$$

где ε бесконечно мало. Если мы вообразим, что этот элемент движется с жидкостью, то согласно уравнениям (3) его проекции на координатные оси

[1]) См. сноску на стр. 33.

для некоторого другого момента будут

$$\delta x = \varepsilon \frac{\xi}{\varrho},$$

$$\delta y = \varepsilon \frac{\eta}{\varrho},$$

$$\delta z = \varepsilon \frac{\zeta}{\varrho};$$

это значит, что элемент будет все еще принадлежать вихревой линии и его длина, назовем ее через δs, будет пропорциональна $\frac{\omega}{\varrho}$, где ω — модуль вектора вихря. Обозначив через σ поперечное сечение вихревой нити, ось которой есть δs, мы видим, что произведение $\varrho\sigma\,\delta s$ постоянно во времени. Следовательно, напряжение $\omega\sigma$ вихря будет постоянно [1]).

Первоначально данное Гельмгольцем доказательство исходит из системы трех уравнений, которые могут быть так обобщены, что будут пригодны и для произвольной жидкости, для которой ϱ есть функция только от p: они тогда примут вид [2])

$$\left.\begin{aligned} \frac{D}{Dt}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right) &= \frac{\xi}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\zeta}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{D}{Dt}\left(\frac{\eta}{\varrho}\right) &= \frac{\xi}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\eta}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\zeta}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{D}{Dt}\left(\frac{\zeta}{\varrho}\right) &= \frac{\xi}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\eta}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\zeta}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Эти уравнения можно получить следующим образом. При существовании потенциала сил Ω динамические уравнения § 6 можно представить в такой форме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - v\zeta + w\eta &= -\frac{\partial \chi'}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - w\xi + u\zeta &= -\frac{\partial \chi'}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} - u\eta + v\xi &= -\frac{\partial \chi'}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где

$$\chi' = \int \frac{dp}{\varrho} + \frac{1}{2}q^2 + \Omega \tag{6}$$

и

$$q^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Из второго и третьего уравнений (5), исключая χ' при помощи перекрестного диференцирования, получим

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + v\frac{\partial \xi}{\partial y} + w\frac{\partial \xi}{\partial z} - u\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) = \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z} - \xi\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Принимая во внимание соотношение

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \tag{7}$$

---

[1]) См. Nanson, Mess. of Math., III, 120 (1874); Kirchhoff, Mechanik, 15-я лекция (1876); Stokes, Papers, II, 47 (1883).

[2]) Nanson, см. выше.

и уравнение иеразрывности

$$\frac{D\varrho}{Dt}+\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0, \tag{8}$$

мы легко получаем первое из уравнений (4).

Чтобы интерпретировать эти уравнения, рассмотрим элемент линии, проекции которого на координатные оси в момент t равны

$$\left.\begin{aligned}\delta x&=\varepsilon\frac{\xi}{\varrho},\\ \delta y&=\varepsilon\frac{\eta}{\varrho},\\ \delta z&=\varepsilon\frac{\zeta}{\varrho},\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где ε бесконечно мало. Если мы предположим, что этот элемент линии движется с жидкостью, то величина, на которую δx возрастает в единицу времени, равна разности значений u на обоих концах, откуда

$$\frac{D}{Dt}(\delta x)=\varepsilon\frac{\xi}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial x}+\varepsilon\frac{\eta}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial y}+\varepsilon\frac{\zeta}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Из уравнения (4) тогда следует

$$\left.\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\left(\delta x-\varepsilon\frac{\xi}{\varrho}\right)&=0,\\ \frac{D}{Dt}\left(\delta y-\varepsilon\frac{\eta}{\varrho}\right)&=0,\\ \frac{D}{Dt}\left(\delta z-\varepsilon\frac{\zeta}{\varrho}\right)&=0.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Гельмгольц заключает отсюда дальше: если соотношения (9) имеют место в момент t, то они сохраняются также и в момент $t+\delta t$ и т. д. Это заключение, однако, не является вполне строгим: оно может быть подвержено возражениям, которые и сделал Стокс [1]) против некоторых ошибочных доказательств теоремы Лагранжа о потенциале скоростей [2]).

Чтобы установить связь с исследованием Кельвина, заметим, что уравнения (2) выражают следующее: циркуляция по каждой из трех бесконечно малых замкнутых кривых, плоскости которых первоначально были перпендикулярны к трем координатным осям, постоянна. Если мы возьмем, например, замкнутую кривую, которая первоначально ограничивала прямоуголь-

---

[1]) См. примечание на стр. 33.

[2]) Необходимо упомянуть, что для случая несжимаемой жидкости Лагранж установил уравнения, которые довольно похожи на уравнения (4), Miscell, Taur., II (1760) [Oeuvres, I, 442]. Автор выражает благодарность за это указание и вышеизложенное замечание об исследованиях Гельмгольца профессору Лармору. Уравнения, эквивалентные уравнениям, данным Лагранжем, были независимо устаиовлены Стоксом (см. примечание выше) и положены в основание строгого доказательства теоремы о потенциале скоростей.

ник $\delta b\,\delta c$, и обозначим через A, B, C величины площадей его проекций на координатные плоскости в момент t, то получим

$$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(b,c)}\delta b\,\delta c,$$
$$B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(b,c)}\delta b\,\delta c,$$
$$C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(b,c)}\delta b\,\delta c;$$

тогда первое из уравнений (2) напишется [1])

$$\xi A+\eta B+\zeta C=\xi_0\,\delta b\,\delta c. \tag{11}$$

В качестве применения уравнений (4) рассмотрим движение жидкости, заключенной в эллипсоидальном сосуде, причем вектор вихря этого движения постоянен в пространстве [2]). Формулы

$$\left.\begin{aligned} u&=qz-ry,\\ v&=rx-pz,\\ w&=py-qx \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

представляют, очевидно, равномерное вращение жидкости как твердого тела внутри сферической границы. Преобразуя координаты и соответствующие скорости с помощью однородного растяжения, получим формулы

$$\left.\begin{aligned} \frac{u}{a}&=\frac{qz}{c}-\frac{ry}{b},\\ \frac{v}{b}&=\frac{rx}{a}-\frac{pz}{c},\\ \frac{w}{c}&=\frac{py}{b}-\frac{qx}{a}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

представляющие некоторое движение внутри неподвижной эллипсоидальной оболочки, уравнение которой есть

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{14}$$

Теперь будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \xi&=\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)p,\\ \eta&=\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)q,\\ \zeta&=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)r. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

---

[1]) Nanson, Mess. of Math., VII, 182 (1878). Подобная же интерпретация гельмгольцевых уравнений была дана автором этой книги Mess. of Math., VII, 41 (1877).

Наконец, необходимо еще вспомнить, что другое доказательство теоремы Лагранжа, которое основывается на элементарных динамических принципах, без ссылки на гидрокинетические уравнения, было намечено Стоксом. (Camb. Trans., VIII [Papers, I, 113]) и проведено Кельвином в его работе о движении вихрей.

[2]) Ср. Voigt, Beiträge zur Hydrodynamik. Gött. Nachr., 1891, стр. 71; Tedone, Nuovo Cimento, XXIII (1893). Прием, употребленный в тексте, взят из работы Poincaré, Sur la precession des corps déformables, Bull. Astr., 1910.

Подставляя в уравнение (4), мы получим уравнение

$$(b^2+c^2)\frac{dp}{dt}=(b^2-c^2)\,qr, \tag{6}$$

которое может быть представлено в форме

$$a^2(b^2+c^2)\frac{dp}{dt}=\{\,b^2(c^2+a^2)-c^2(a^2+b^2)\,\}\,qr. \tag{7}$$

Так же получим два других аналогичных уравнения. Таким образом полученные уравнения тождественны по форме с уравнениями Эйлера для свободного движения твердого тела около неподвижной точки.

Мы можем легко найти интегралы

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=\text{const.} \tag{18}$$

и

$$\frac{b^2c^2\xi^2}{b^2+c^2}+\frac{c^2a^2\eta^2}{c^2+a^2}+\frac{a^2b^2\zeta^2}{a^2+b^2}=\text{const.}; \tag{19}$$

первый из этих интегралов является подтверждением одной из теорем Гельмгольца, в то время как второй следует из постоянства энергии.

§ 147. Рассуждением, аналогичным рассуждению § 41, находим, что непрерывное безвихревое движение невозможно в несжимаемой жидкости, наполняющей неограниченное пространство и подверженной условию, что скорость в бесконечности обращается в нуль. Это тотчас же приводит к следующей теореме:

Движение жидкости, наполняющей неограниченное пространство и покоящейся в бесконечности, будет вполне определено, если мы знаем значения объемного расширения (θ) и компоненты вихря ξ, η, ζ для всех точек области.

В самом деле, предположим, что существуют две тройки значений u_1, v_1, w_1 и u_2, v_2, w_2 компонент скорости, из которых каждая тройка внутри неограниченного пространства удовлетворяет уравнениям

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=\theta, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}&=\xi,\\ \frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}&=\eta,\\ \frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}&=\zeta,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

а в бесконечности обращается в нуль. Величины

$$u'=u_1-u_2,$$
$$v'=v_1-v_2,$$
$$w'=w_1-w_2,$$

тогда будут удовлетворять уравнениям (1) и (2) и обращаться в нуль в бесконечности, кроме того,

$$\theta = \xi = \eta = \zeta = 0.$$

А тогда они должны, в силу ранее изложенных результатов, всюду обращаться в нуль; следовательно, существует только *одно* возможное движение, удовлетворяющее данным условиям.

Тем же способом можно показать, что движение жидкости, заключенной в произвольную, *ограниченную*, односвязную область, будет определено, если мы знаем значения объемного расширения и компонент вихря для всякой точки области, а также значения нормальных компонент скорости во всякой точке границы. В случае n-связной области необходимо к этим данным прибавить еще значения циркуляций по различным независимым контурам этой области.

§ 148. Если в случае неограниченного пространства величины θ, ξ, η, ζ все обращаются в нуль вне некоторой конечной области, то полное определение u, v, w через значения этих величин внутри области может быть достигнуто следующим образом[1]).

Компоненты скорости, обусловленные изменением плотности, можно сейчас же написать, согласно (1) § 56, так как объемное расширение θ' в элементе $\delta x'\,\delta y'\,\delta z'$, очевидно, эквивалентно простому источнику с напряжением $\theta'\,\delta x'\,\delta y'\,\delta z'$. Мы получаем, таким образом,

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ v &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ w &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\theta'}{r}\,dx'\,dy'\,dz', \tag{2}$$

а r обозначает расстояние между точкой (x', y', z'), в которой лежит элемент объема интеграла, и точкой (x, y, z), для которой ищутся значения u, v, w, т. е.

$$r = \{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}^{1/2}.$$

Интегрирование распространяется на все части пространства, для которых θ' отлично от нуля.

Чтобы найти компоненты скорости, обусловленные *вихрями*, примем во внимание следующее: при отсутствии расширения поток через две произвольные незамкнутые поверхности, ограниченные

[1]) Изложенное здесь исследование в основном дано Гельмгольцем. Соответствующая кинематическая задача была впервые решена в несколько другом роде Стоксом, On the Dynamical Theory of Diffraction, Camb. Trans., IX (1849) [Papers, II, 254 . . .].

одной и той же кривой по краям, имеет одно и то же значение и, следовательно, определяется только видом и положением этой кривой. Это указывает на то, что поток через произвольную поверхность, опирающуюся на замкнутую кривую, может быть выражен через криволинейный интеграл, распространенный по этой кривой, т. е. через

$$\int (F\,dx + G\,dy + H\,dz). \tag{3}$$

При этом допущении согласно методу § 31 будет

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Необходимо и, как мы видели, достаточно, чтобы функции F, G, H удовлетворяли уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) - \Delta F$$

и двум аналогичным. Эти три функции всякий раз будут определяться соответственно только с точностью до трех аддитивных функций вида

$$\frac{\partial \chi}{\partial x},\ \frac{\partial \chi}{\partial y},\ \frac{\partial \chi}{\partial z},$$

и мы можем, если пожелаем, подобрать χ таким образом, чтобы

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

В таком случае будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \Delta F &= -\xi, \\ \Delta G &= -\eta, \\ \Delta H &= -\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Частные решения этих уравнений получим, положив F, G, H равными потенциалам распределения масс с объемными плотностями $\frac{\xi}{4\pi}$, $\frac{\eta}{4\pi}$, $\frac{\zeta}{4\pi}$ соответственно; тогда

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{\xi'}{r}\,dx'\,dy'\,dz', \\ G &= \frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{\eta'}{r}\,dx'\,dy'\,dz', \\ H &= \frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{\zeta'}{r}\,dx'\,dy'\,dz', \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где штрихи при буквах ξ, η, ζ служат для обозначения этих величин в точке (x', y', z'). Интегрирования естественно необходимо распространить по всем местам, для которых ξ, η, ζ отличны от нуля. Мы должны теперь показать только, что значения F, G, H в действительности удовлетворяют уравнению (5). Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} r^{-1} = -\frac{\partial}{\partial x'} r^{-1},$$

то формулы (7) дают

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi} \iiint \left(\xi' \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r} + \eta' \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{r} + \zeta' \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{r} \right) dx' dy' dz'.$$

Выражение в правой части обращается в нуль согласно обобщению теоремы (4) § 42 [1]), так как всюду

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

в то время как

$$l\xi + m\eta + n\zeta = 0$$

на поверхности вихря (где ξ, η, ζ могут быть разрывны) и ξ, η, ζ в бесконечности обращаются в нуль.

Полное решение нашей задачи получается сложением решений (1) и (4), и оно будет

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ v &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ w &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где Φ, F, G, H имеют данные в формулах (2) и (7) значения.

Заметим еще, что ограничение, что θ, ξ, η, ζ вне некоторой области должны обращаться в нуль, несущественно. Достаточно предположить данные такими, что интегралы в (2) и (7), распространенные на бесконечные объемы, сходятся. Это будет наверное в том случае, когда θ, ξ, η, ζ для бесконечно возрастающего R имеют порядок R^{-n}, где R означает расстояние от начала, а $n > 3$ [2]). Если область, наполненная жидкостью полностью или частично ограничена поверхностями, на которых дана нормальная компонента скорости и (в случае n-связной области) заданы значения циркуляции для каждой из n независимых замкнутых кривых, то задачу можно аналогичным приемом свести к задаче одного безвихревого движения, именно к задаче типа, исследованного в главе III, одно-

[1]) С особенностью, встречающейся в точке $r = 0$, здесь и раньше следует поступать так же, как и в теории тяготения. Результат благодаря этому не изменяется.

[2]) Ср. Leathem, Camb. Tracts. № 1, 2-е изд., стр. 44.

значную определенность которой мы там показали. Мы предоставляем читателю провести это, используя следующее замечание. Если вихри пронизывают область и начинаются и кончаются на ее границе, то целесообразно считать их продолженными за или вдоль границы таким образом, чтобы они образовали замкнутые нити, и интегралы (7) отнести к полной системе полученных таким образом вихрей. При таком представлении условие (5) все еще будет выполняться.

Существует полная аналогия между только что изложенными аналитическими соотношениями и соотношениями, имеющими место в теории электромагнетизма. Если мы напишем в уравнениях (1) и (2) § 147

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \varrho,\ u,\ v,\ w,\ \varrho$$

вместо

$$u,\ v,\ w,\ \theta,\ \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \theta,$$

то получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z} &= \varrho,\\ \frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z} &= u,\\ \frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x} &= v,\\ \frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y} &= w, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

а это как раз и есть основное соотношение названной теории; α, β, γ означают тогда компоненты магнитной силы, u, v, w — компоненты электрического тока и ϱ есть плотность гипотетического магнитного вещества, с помощью которого может быть представлено всякое имеющееся в поле явление магнетизма [1]). Отсюда, вихревые нити соответствуют электрическим контурам, напряжение этого вихря — силам токов по этим контурам, источники и стоки — положительным и отрицательным магнитным полюсам и, наконец, скорость жидкости — магнитной силе [2]).

Аналогия простирается, конечно, на все результаты, выведенные из основных уравнений; так, Φ в уравнениях (8) соответствует магнитному потенциалу, а F, G, H компонентам „электромагнитного момента количества движения".

§ 149. Чтобы интерпретировать результат, содержащийся в уравнениях (8) § 148, вычислим значения u, v, w, обусловленные изолированной замкнутой вихревой нитью, находящейся в неограниченной несжимаемой жидкости, покоящейся в бесконечности.

Так как $\theta=0$, то $\Phi=0$. Чтобы вычислить значения F, G, H, мы можем заменить элемент объема $\delta x'\,\delta y'\,\delta z'$ через $\sigma'\,\delta s'$, где $\delta s'$

---

[1]) Ср. Maxwell, Electricity and Magnetism, § 607. Аналогия была улучшена применением рациональной системы электрических единиц, которую предложил Хэвисайд — Heaviside, Electrical Papers, London, 1892, I, 199.

[2]) На эту аналогию впервые указал Гельмгольц; она была широко использована Кельвином в его работе об электричестве и магнетизме.

есть элемент длины нити, а σ' — ее поперечное сечение. Далее имеем

$$\xi' = \omega' \frac{dx'}{ds'},$$
$$\eta' = \omega' \frac{dy'}{ds'},$$
$$\zeta' = \omega' \frac{dz'}{ds'},$$

где ω' означает длину вектора вихря. Формулы (7) § 148 дают тогда

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{\varkappa}{4\pi}\int \frac{dx'}{r}, \\ G &= \frac{\varkappa}{4\pi}\int \frac{dy'}{r}, \\ H &= \frac{\varkappa}{4\pi}\int \frac{dz'}{r}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\varkappa = \omega'\sigma'$ измеряет напряжение вихря и интегралы распространяются по всей длине нити.

Следовательно, согласно (4) § 148 будем иметь

$$u = \frac{\varkappa}{4\pi}\int \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{z}\,dz' - \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\,dy'\right)$$

и аналогичные выражения для v и w. Мы найдем таким образом [1])

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\varkappa}{4\pi}\int \left(\frac{dy'}{ds'}\frac{z-z'}{r} - \frac{dz'}{ds'}\frac{y-y'}{r}\right)\frac{ds'}{r^2}, \\ v &= \frac{\varkappa}{4\pi}\int \left(\frac{dz'}{ds'}\frac{x-x'}{r} - \frac{dx'}{ds'}\frac{z-z'}{r}\right)\frac{ds'}{r^2}, \\ w &= \frac{\varkappa}{4\pi}\int \left(\frac{dx'}{ds'}\frac{y-y'}{r} - \frac{dy'}{ds'}\frac{x-x'}{r}\right)\frac{ds'}{r^2}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Обозначив через δu, δv, δw части этих выражений, соответствующие элементу $\delta s'$ нити, увидим, что результирующая δu, δv, δw перпендикулярна к плоскости, определяемой вихревой линией в точке (x', y', z') и отрезком r, а направление ее совпадает с направлением, в котором двигалась бы точка (x, y, z), если вообразить жидкость отвердевшей и вращающейся вокруг элемента вихря в (x', y', z'). Величина результирующей будет равна

$$\{(\delta u)^2 + (\delta v)^2 + (\delta w)^2\}^{1/2} = \frac{\varkappa}{4\pi}\frac{\sin\chi\,\delta s'}{r^2}, \tag{3}$$

где χ есть угол между r и вихревой линией в (x', y', z').

[1]) Эти выражения эквивалентны формулам, полученным Стоксом, см. примечание на стр. 260.

При изменении значений символов в смысле, данном в предыдущем параграфе, этот результат тождествен с законом о действии электрического тока на магнитный полюс [1]).

Потенциал скоростей, обусловленный вихревой нитью

§ 150. В точках вне вихря существует потенциал скоростей, который можно найти следующим образом. Возьмем для простоты случай одной замкнутой вихревой нити, здесь мы будем иметь для несжимаемой жидкости согласно предыдущему параграфу

$$u=\frac{\varkappa}{4\pi}\int\left(\frac{\partial}{\partial z'}\frac{1}{r}\,dy'-\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{r}\,dz'\right). \tag{1}$$

Согласно теореме Стокса (4) § 32 мы можем заменить криволинейный интеграл, распространенный по замкнутой кривой, через поверхностный интеграл, распространенный по произвольной поверхности, которая ограничена этой замкнутой кривой. Таким образом при небольших изменениях обозначений мы имеем

$$\int(P\,dx'+Q\,dy'+R\,dz')=$$
$$=\int\int\left\{l\left(\frac{\partial R}{\partial y'}-\frac{\partial Q}{\partial z'}\right)+m\left(\frac{\partial P}{\partial z'}-\frac{\partial R}{\partial x'}\right)+n\left(\frac{\partial Q}{\partial x'}-\frac{\partial P}{\partial y'}\right)\right\}dS.$$

Положим

$$P=0,\quad Q=\frac{\partial}{\partial z'}\frac{1}{r},\quad R=-\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{r},$$

тогда

$$\frac{\partial R}{\partial y'}-\frac{\partial Q}{\partial z'}=\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\frac{1}{r},$$
$$\frac{\partial P}{\partial z'}-\frac{\partial R}{\partial x'}=\frac{\partial^2}{\partial x'\partial y'}\frac{1}{r},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x'}-\frac{\partial P}{\partial y'}=\frac{\partial^2}{\partial x'\partial z'}\frac{1}{r};$$

следовательно, выражение (1) примет вид

$$u=\frac{\varkappa}{4\pi}\int\int\left(l\frac{\partial}{\partial x'}+m\frac{\partial}{\partial y'}+n\frac{\partial}{\partial z'}\right)\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{r}\,dS'.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x'}(r^{-1})=-\frac{\partial}{\partial x}(r^{-1}),$$

---

[1]) Ampère, Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques, Paris, 1826.

то мы получаем отсюда первое из уравнений (2); два других получаются аналогичными рассуждениями,

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ w &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где

$$\varphi = \frac{\varkappa}{4\pi} \int\int \left(l \frac{\partial}{\partial x'} + m \frac{\partial}{\partial y'} + n \frac{\partial}{\partial z'} \right) \frac{1}{r}\, dS'. \tag{3}$$

Здесь l, m, n обозначают направляющие косинусы нормали к элементу δS поверхности, ограниченной вихревой нитью.

Формулу (3) можно написать иначе,

$$\varphi = \frac{\varkappa}{4\pi} \int\int \frac{\cos \vartheta}{r^2}\, dS', \tag{4}$$

где ϑ обозначает угол между r и нормалью (l, m, n). Так как $\cos\vartheta \frac{\delta S'}{r^2}$ измеряет элементарный телесный угол, под которым $\delta S'$ видна из точки (x, y, z), то получаем следующее: потенциал скоростей, обусловленный одной замкнутой вихревой нитью, имеет в любой точке значение, равное $\frac{\varkappa}{4\pi}$, умноженное на телесный угол, под которым из этой точки видна поверхность, ограниченная вихрем.

Так как телесный угол изменяется на 4π, когда рассматриваемая точка описывает замкнутую кривую, охватывающую вихревую нить, то мы снова убеждаемся в том, что значение φ, данное формулой (4), является цикличным с циклической постоянной $\varkappa$; ср. § 145.

Заметим, что выражение (4) равно расходу жидкости (взятому с отрицательным знаком) через промежуточное отверстие вихревой нити, обусловленному точечным источником с мощностью $\varkappa$ в точке (x, y, z).

Сравнивая выражение (4) с (4) § 56, видим, что вихревая нить в известном смысле эквивалентна равномерному распределению дублетов по ограниченной ею поверхности. Оси этих дублетов должны предполагаться всюду перпендикулярными к поверхности, а плотность распределения — равной напряжению вихря. Мы принимаем здесь, что положительное направление нормали и положительное направление оси вихревой нити образуют „правую систему“; см. § 31.

Обратно, можно показать, что всякое распределение дублетов по *замкнутой* поверхности, при котором оси имеют направление нормалей, может быть заменено системой замкнутых вихревых нитей [1]),

[1]) Ср. Maxwell, Electricity and Magnetism, § 485, 652.

лежащих на этой поверхности. То же заключение будет получено независимо от предыдущего из исследований следующего параграфа.

Вихревой слой

§ 151. До сих пор мы предполагали, что u, v, w непрерывны. Теперь покажем, каким образом случаи, в которых встречаются поверхности разрыва, могут быть включены в круг действия наших теорем.

Случай, когда разрывна только *нормальная* компонента скорости, был уже рассмотрен в § 58. Если u, v, w означают компоненты скорости на одной стороне, u', v', w' — на другой стороне, то, как было показано, этот случай может быть осуществлен распределением простых источников с поверхностной плотностью

$$l(u'-u)+m(v'-v)+n(w'-w),$$

где l, m, n означают направляющие косинусы нормалей, проведенных к той стороне поверхности, скорости на которой отмечены штрихом.

Теперь рассмотрим случай, когда будет разрывной только *тангенциальная* компонента скорости, так что

$$l(u'-u)+m(v'-v)+n(w'-w)=0. \tag{1}$$

Мы будем предполагать, что линии тока *относительного* движения, определяемые диференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{u'-u}=\frac{dy}{v'-v}=\frac{dz}{w'-w}, \tag{2}$$

а также система к ним ортогональных траекторий проведены на поверхности. Пусть PQ, $P'Q'$ будут элементы линий, которые проведены в непосредственной близости к поверхности с обеих ее сторон параллельно к некоторой линии системы (2), а PP', QQ' представляют элементы нормалей к поверхности, бесконечно малые сравнительно с PQ и $P'Q'$. Циркуляция по замкнутой кривой $P'Q'QP$ будет равна тогда

$$(q'-q)\,PQ,$$

где q и q' означают абсолютные значения скоростей на обеих сторонах. Здесь происходит совершенно так, как если бы на месте поверхности находился бесконечно тонкий слой вихрей; при этом вышеупомянутые ортогональные траектории служили бы вихревыми линиями, а модуль вихря ω и (переменная) толщина δn слоя были бы связаны соотношением

$$\omega\,\delta n=q'-q. \tag{3}$$

Тот же самый результат получается, если исследовать те разрывности, которые встречаются в значениях u, v, w, определяемых по формулам (4) и (7) § 148, когда последние применяются к случаю слоя плотности δn, внутри которого ξ, η, ζ становятся бесконечными, но так, что $\xi\,\delta n$, $\eta\,\delta n$, $\zeta\,\delta n$ остаются конечными [1]).

В § 147, 148 мы показали, что всякое непрерывное движение жидкости, наполняющей неограниченное пространство и покоящейся в бесконечности, можно рассматривать как вызванное соответствующим распределением источников и вихрей с конечной плотностью. Мы только что видели, как можно получить непрерывным переходом к пределу случай, когда источники и вихри распределены по поверхностям с бесконечной объемной плотностью, но конечной поверхностной плотностью. Мы можем, в частности, рассматривая случай, когда соответствующая неограниченная жидкость является несжимаемой, предполагать ее разделенной на две части замкнутой поверхностью, на которой нормальные компоненты скорости будут непрерывными, а тангенциальные компоненты скорости будут разрывными, как в (12) § 58. Этот случай эквивалентен вихревому слою; мы заключаем теперь следующее: всякое непрерывное, безвихревое циклическое или нециклическое движение несжимаемой жидкости, наполняющей произвольную область, может рассматриваться как вызванное некоторым распределением вихрей по ограничивающей поверхности, которая отделяет область от остального неограниченного пространства. В случае области, простирающейся в бесконечность, это распределение относится к *конечной* части ограничивающей поверхности при условии, что жидкость покоится в бесконечности.

Эта теорема представляет дополнение к полученным в § 58 результатам.

Только что приведенные заключения могут быть иллюстрированы результатами § 91. Именно, если задана нормальная компонента S_n скорости для всей сферической поверхности $r=a$, то значения потенциала скоростей для внутреннего и внешнего пространства были представлены формулами

$$\varphi=\frac{a}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n S_n \quad \text{и} \quad \varphi=-\frac{a}{n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} S_n.$$

Отсюда, если $\delta\varepsilon$ означает угол, под которым виден из центра элемент линии, проведенной на поверхности, то относительная скорость, взятая в направлении этого элемента, будет выражаться через

$$\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{\partial S_n}{\partial \varepsilon}.$$

Таким образом результирующая относительной скорости направлена тангенциально к поверхности и перпендикулярно к линиям уровня ($S_n=\text{const.}$) поверхностной сферической фуикции S_n; последние линии образуют, следовательно, вихревые линии.

---

[1]) Helmholtz, см. сноску на стр. 251.

Если, например, тонкая сферическая оболочка, наполненная жидкостью и окруженная жидкостью, движется подобно тому, как и в § 92, параллельно оси x, то движение жидкости как внутри, так снаружи таково, как если бы оно было вызвано системой вихрей, распределенных на сфере по параллельным кругам; при этом напряжение элементарного вихря пропорционально проекции ширины соответствующей сферической зоны на ось x [1]).

Импульс и энергия системы вихрей

§ 152. Последующие исследования относятся к случаю системы вихрей конечных размеров в жидкости, наполняющей неограниченное пространство и покоящейся в бесконечности.

Задача найти распределение импульсивных сил с компонентами X', Y', Z', отнесенных к единице массы, которое породило бы мгновенно из положения равновесия действительное движение с компонентами скорости u, v, w, является до известной степени неопределенной; однако решение, достаточное для наших целей, можно получить следующим образом. Предположим, что проведена односвязная поверхность S, заключающая все вихри. Мы обозначим через φ однозначный потенциал скоростей, который имеется вне S, и через φ_1 — то решение $\Delta\varphi = 0$, которое конечно всюду внутри S, а на поверхности связано непрерывно с φ. Другими словами, φ_1 есть потенциал скоростей того движения, которое возникает внутри S, когда на поверхности S приложены импульсивные давления $\varrho\varphi$. Если мы предположим теперь, что для внутренних точек имеют место равенства

$$X' = u + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \quad Y' = v + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}, \quad Z' = w + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \tag{1}$$

и для внешних точек

$$X' = 0, \quad Y' = 0, \quad Z' = 0, \tag{2}$$

то видим согласно § 11, что эти силы действительно вызвали бы мгновенное движение из состояния покоя; при этом распределение импульсивных давлений для внешних точек выражалось бы через $\varrho\varphi$, а для внутренних точек — через $\varrho\varphi_1$. Силы были бы разрывны на поверхности, но разрывность имеет место только для нормальных компонент, тангенциальные же компоненты обращаются в нуль как при подходе изнутри, так и снаружи, так как φ на поверхности переходит непрерывно в φ_1. Поэтому для точек, лежащих на внутренней стороне поверхности, будем иметь

$$mZ' - nY' = 0, \quad nX' - lZ' = 0, \quad lY' - mX' = 0, \tag{3}$$

где l, m, n означают направляющие косинусы нормалей, проведенных внутрь.

---

[1]) Те же самые заключения пригодны также и для эллиптической оболочки, которая движется параллельно главной оси; см. § 114.

Интегрируя по внутреннему объему, ограниченному поверхностью S, получим

$$\begin{aligned}\iiint (y\zeta - z\eta)\,dx\,dy\,dz &= \\ &= \iiint \left\{y\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) - z\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\} dx\,dy\,dz = \\ &= \iiint \left\{y\left(\frac{\partial Y'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial y}\right) - z\left(\frac{\partial X'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial x}\right)\right\} dx\,dy\,dz = \\ &= -\iint \{y(lY' - mX') - z(nX' - lZ')\}\,dS + \\ &\qquad + 2\iiint X'\,dx\,dy\,dz, \quad (4)\end{aligned}$$

где поверхностный интеграл обращается в нуль вследствие (3). Далее мы получим

$$\begin{aligned}-\iiint (y^2 + z^2)\,\xi\,dx\,dy\,dz &= \\ &= -\iiint (y^2 + z^2)\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \\ &= -\iiint (y^2 + z^2)\left(\frac{\partial Z'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \\ &= \iint (y^2 + z^2)\,(mZ' - nY')\,dS + \\ &\qquad + 2\iiint (yZ' - zY')\,dx\,dy\,dz, \quad (5)\end{aligned}$$

где опять поверхностный интеграл обращается в нуль.

Таким образом для силы и пары, составляющих полный импульс системы вихрей, мы имеем выражения

$$\left.\begin{aligned} P &= \tfrac{1}{2}\varrho \iiint (y\zeta - z\eta)\,dx\,dy\,dz, \\ Q &= \tfrac{1}{2}\varrho \iiint (z\xi - x\zeta)\,dx\,dy\,dz, \\ R &= \tfrac{1}{2}\varrho \iiint (x\eta - y\xi)\,dx\,dy\,dz, \\ L &= -\tfrac{1}{2}\varrho \iiint (y^2 + z^2)\,\xi\,dx\,dy\,dz, \\ M &= -\tfrac{1}{2}\varrho \iiint (z^2 + x^2)\,\eta\,dx\,dy\,dz, \\ N &= -\tfrac{1}{2}\varrho \iiint (x^2 + y^2)\,\zeta\,dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Чтобы эти выражения применить к случаю одной замкнутой вихревой нити с бесконечно малым сечением σ, заменим элемент объема через $\sigma\,\delta s$ и напишем

$$\xi = \omega\frac{dx}{ds}; \quad \eta = \omega\frac{dy}{ds}, \quad \zeta = \omega\frac{dz}{ds}; \tag{7}$$

тогда получим

$$P = \frac{1}{2}\varrho\omega\sigma\int(y\,dz - z\,dy) = \varkappa\varrho\iint l'\,dS', \tag{8}$$

$$L = -\frac{1}{2}\varrho\omega\sigma\int(y^2+z^2)\,dx = -\varkappa\varrho\iint(m'z - n'y)\,dS' \tag{9}$$

и дальнейшие аналогичные формулы. Криволинейный интеграл берется вдоль вихревой нити, поверхностный — по поверхности диафрагмы, ею стягиваемой, а l', m', n' суть направляющие косинусы, нормали к элементу $\delta S'$ диафрагмы. Тождество различных видов следует из теоремы Стокса. Мы писали $\varkappa$ вместо $\omega\sigma$, т. е. $\varkappa$ есть циркуляция по контуру, охватывающему вихревую нить [1]).

Все исследование относится, конечно, к мгновенному состоянию системы, но мы напоминаем, что импульс согласно доказательству § 119 будет постоянен во всех отношениях, если только внешние силы отсутствуют.

§ 153. Рассмотрим теперь *энергию* системы вихрей. Легко показать, что при предположенных условиях эта энергия постоянна, если не действуют внешние силы. В самом деле, если T есть энергия жидкости, ограниченной произвольной замкнутой поверхностью S, то, полагая в (5) § 10 $V = 0$, будем иметь

$$\frac{DT}{Dt} = \iint(lu + mv + nw)\,p\,dS. \tag{1}$$

Если поверхность S заключает все вихри, то мы можем положить

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}q^2 + F(t), \tag{2}$$

и из (4) § 150 следует непосредственно, что на большом расстоянии R от вихрей p будет конечным, а $lu + mv + nw$ будет порядка R^{-3}; в то время когда поверхность S расширяется до бесконечности, δS будет пропорциональна R^2. Поэтому в конечном счете правая часть (1) обращается в нуль, и мы имеем

$$T = \text{const}. \tag{3}$$

---

[1]) Выражения (8) и (9) найдены с помощью элементарных рассуждений J. J. Thomson, On the Motion of Vortex Rings (Adams Prize Essay), London, 1882, стр. 5, 6; формулы (6) были затем выведены из них, однако, с обратным знаком для L, M, N. Исправление принадлежит Welsh. Интересное подтверждение формул в том виде, как они здесь даны, доставляет случай шарообразной массы, вращающейся, как твердое тело, в покоящейся жидкости при условии, что принят во внимание сферический вихревой слой, обусловливающий разрыв скорости.

Перейдем теперь к изучению некоторых важных кинематических выражений для T, причем для простоты все еще будем ограничиваться случаем, когда несжимаемая жидкость простирается в бесконечность и там находится в покое, а все вихри находятся на конечном расстоянии от начала.

Первое из этих выражений указано электромагнитной аналогией, отмеченной в § 148. Так как $\theta = 0$ и, следовательно, $\Phi = 0$, то мы имеем по (4) § 148

$$2T = \varrho \iiint (u^2 + v^2 + w^2)\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \varrho \iiint \left\{ u \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right\} dx\, dy\, dz.$$

Правая часть этого выражения может быть представлена суммой поверхностного интеграла

$$\varrho \iint \{ F(mw - nv) + G(nu - lw) + H(w - mu) \}\, dS$$

и объемного интеграла

$$\varrho \iiint \left\{ F \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + G \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + H \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} dx\, dy\, dz.$$

Для бесконечно удаленных точек F, G, H в конечном счете порядка R^{-2}, а u, v, w порядка R^{-3}, так что поверхностный интеграл обращается в нуль, и мы имеем

$$T = \frac{1}{2} \varrho \iiint (F\xi + G\eta + H\zeta)\, dx\, dy\, dz, \tag{4}$$

или, вставляя значения F, G, H из (7) § 148,

$$T = \frac{\varrho}{8\pi} \iiint\!\!\iiint \frac{\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'}{r}\, dx\, dy\, dz\, dx'\, dy'\, dz', \tag{5}$$

причем каждое интегрирование по объему распространяется по всему пространству, наполненному вихрями.

Этому выражению можно дать несколько другой вид. Предположим, что система вихрей составлена из нитей, пусть δs, $\delta s'$ означают элементы длины двух произвольных нитей; σ, σ' — соответствующие поперечные сечения, а ω, ω' — соответствующие значения модуля вихря. За элементы объема мы возьмем $\sigma\, \delta s$ и $\sigma'\, \delta s'$, тогда выражение под знаком интеграла в (5) будет равно

$$\frac{\cos \varepsilon}{r} \cdot \omega\sigma\, \delta s \cdot \omega'\sigma'\, \delta s',$$

где ε означает угол между δs и $\delta s'$. Положив

$$\omega\sigma = \varkappa, \quad \omega'\sigma' = \varkappa',$$

будем иметь

$$T=\frac{\varrho}{4\pi}\sum\varkappa\varkappa'\int\int\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds', \tag{6}$$

причем двойной интеграл берется вдоль осей нитей, а суммирование $\sum$ включает все наличные пары нитей (и каждую только один раз).

Миожитель при ϱ в формуле (6) тождествен с выражением для энергии некоторой системы электрических токов, распространяющихся в проводниках, положения которых совпадают с положениями вихревых нитей, а их силы суть $\varkappa, \varkappa', \ldots$ [1]).

Вышеизложенное исследование в действительности есть только обращение употребительного в учебниках электромагнетизма приема рассуждения, которым доказывается равенство

$$\frac{1}{4\pi}\sum ii'\int\int\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds'=\frac{1}{2}\int\int\int(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,dx\,dy\,dz,$$

где i, i' означают силу тока в линейных проводниках, элементы которых обозначены через δs, $\delta s'$ и α, β, γ представляют компоненты магнитной силы в произвольной точке поля.

Рассматриваемая в этом параграфе теорема чисто кинематической природы и основывается только на предположении, что функции u, v, w внутри всего пространства удовлетворяют уравнению неразрывности

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0$$

и обращаются в нуль в бесконечности. Поэтому она с помощью простого обобщения распространяется на случай, рассмотренный в § 144; там мы принимали, что жидкость, лишенная вихрей, циркулирует через отверстия в неподвижных телах; теперь можно считать, что u, v, w во всех точках пространства, не занятого жидкостью, равны нулю. Исследование § 151 показывает, что полученное таким образом распределение скоростей может рассматриваться как происходящее от системы вихревых слоев, которые совпадают с граничными поверхностями. Энергия этой системы получается простым изменением формулы (6), и она, следовательно, пропорциональна энергии соответствующей системы электропроводящих поверхностей.

Этим самым высказанная перед этим в § 144 теорема доказана

При условиях, указанных в начале § 152, мы получаем еще другое употребительное выражение для T

$$T=\varrho\int\int\int\{u(y\zeta-z\eta)+v(z\xi-x\zeta)+w(x\eta-y\xi)\}\,dx\,dy\,dz\ ^{2}). \tag{7}$$

Чтобы проверить его, преобразуем правую часть уравнения с помощью уже часто применявшегося приема, причем поверхностные интегралы мы можем опустить, исходя из тех же соображений, как и в предыдущем параграфе. Первый из трех членов дает

$$\varrho\int\int\int u\left\{y\left(\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}\right)-z\left(\frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}\right)\right\}dx\,dy\,dz=$$
$$=-\varrho\int\int\int\left\{(vy+wz)\frac{du}{dx}-u^2\right\}dx\,dy\,dz.$$

---

[1]) При этом в основу кладется рациональная система электрических единиц; см. стр. 263

[2]) Lamb, Motion of fluids, § 136 (1879).

Если преобразовать таким же образом два других члена и затем сложить, то получим, используя уравнения неразрывности:

$$\varrho \iiint \left(u^2+v^2+w^2+xu\frac{\partial u}{\partial x}+yv\frac{\partial v}{\partial y}+zw\frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

или, наконец, если еще преобразовать последние три члена

$$\frac{1}{2}\varrho \iiint (u^2+v^2+w^2)\,dx\,dy\,dz.$$

В случае конечной области поверхностные интегралы должны сохраниться [1]). Поэтому мы должны к правой части (7) прибавить еще выражение

$$\varrho \iint \left\{(lu+mv+nw)(xu+yv+zw)-\frac{1}{2}(lx+my+nz)q^2\right\} dS, \quad (8)$$

где $q^2=u^2+v^2+w^2$. Это упрощается в случае *неподвижной* границы.

Значение выражения (7) должно оставаться без изменения при всяком переносе начала координат. Поэтому должны иметь место уравнения

$$\left.\begin{aligned} \iiint (v\zeta-w\eta)\,dx\,dy\,dz&=0,\\ \iiint (w\xi-u\zeta)\,dx\,dy\,dz&=0,\\ \iiint (u\eta-v\xi)\,dx\,dy\,dz&=0. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Эти уравнения, которые легко могут быть установлены интегрированием по частям, получаются также из того соображения, что при отсутствии внешних сил компоненты импульса, параллельные координатным осям, должны быть постоянны. Если взять сначала случай жидкости, заключенной в неподвижный сосуд конечной величины, то мы будем иметь в обозначениях § 152

$$P=\varrho \iiint u\,dx\,dy\,dz-\varrho \iint l\varphi\,dS; \quad (10)$$

при этом φ обозначает потенциал скоростей вблизи стенки сосуда, где движение безвихревое.

Поэтому согласно (5) § 146 имеем

$$\frac{dP}{dt}=\varrho \iiint \frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dy\,dz-\varrho \iint l\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,dS=$$
$$=-\varrho \iiint \frac{\partial \chi'}{\partial x}\,dx\,dy\,dz+\varrho \iiint (v\zeta-w\eta)\,dx\,dy\,dz-\varrho \iint l\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,dS. \quad (11)$$

Первый и третий члены последних выражений исчезают, так как согласно (4) § 20 и (6) § 146 на границе $\chi'=\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Поэтому для всякой системы замкнутых вихрей, которая заключена в неподвижный сосуд, будем иметь.

$$\frac{dP}{dt}=\varrho \iiint (v\zeta-w\eta)\,dx\,dy\,dz \quad (12)$$

---

[1]) J. J. Thomson, см. примечание на стр. 271.

и два аналогичных уравнения. В § 119 мы показали, что P будет постоянно, когда сосуд бесконечно велик и стенки его находятся на бесконечном расстоянии от вихрей. Это дает первое из трех уравнений (9).

Если мы уравнения (9) получили бы другим путем, то мы могли бы обратно заключить из них о постоянстве компонент импульса P, Q, R [1]).

Прямолинейные вихри

§ 154. Если движение происходит только в двух измерениях x, y, то $w=0$, а u, v будут функциями только от x, y. Поэтому

$$\xi=0, \quad \eta=0,$$

и вихревые линии суть прямые, параллельные оси z. Теория принимает тогда очень простой вид.

Формулы (8) § 148 переходят в следующие:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ v &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial x}; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

функции φ, ψ должны удовлетворять уравнениям

$$\Delta_1\varphi=-\theta, \quad \Delta_1\psi=\zeta, \tag{2}$$

где

$$\Delta_1=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

а также соответствующим граничным условиям.

В случае несжимаемой жидкости, которой мы теперь ограничимся,

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v=\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{3}$$

где ψ есть функция тока § 59. Известно из теории логарифмического потенциала, что решение уравнения

$$\Delta_1\psi=\zeta, \tag{4}$$

где ζ есть данная функция от x, y, есть

$$\psi=\frac{1}{2\pi}\iint\zeta'\ln r\,dx'\,dy'+\psi_0, \tag{5}$$

причем ζ' есть значение ζ в точке (x', y'), а

$$r=\{(x-x')^2+(y-y')^2\}^{1/2}.$$

„Добавочная функция“ ψ_0 есть какое-либо решение уравнения

$$\Delta_1\psi_0=0; \tag{6}$$

она позволяет нам удовлетворить граничным условиям.

---

[1]) J. J. Thomson, см. примечание на стр. 271.

В случае безграничной жидкости, которая покоится в бесконечности, ψ_0 сводится к постоянной. Формулы (3) и (5) тогда дают

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\pi}\iint \zeta' \frac{y-y'}{r^2}\,dx'\,dy', \\ v &= \frac{1}{2\pi}\iint \zeta' \frac{x-x'}{r^2}\,dx'\,dy'. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Вихревая нить с координатами x', y' и напряжением $\varkappa$ сообщает таким образом жидкости в точке (x, y) скорость, компоненты которой равны

$$-\frac{\varkappa}{2\pi}\frac{y-y'}{r^2} \quad \text{и} \quad \frac{\varkappa}{2\pi}\frac{x-x'}{r^2}.$$

Эта скорость перпендикулярна к прямой, соединяющей точки (x, y) и (x', y'), и ее величина равна $\frac{\varkappa}{2\pi r}$.

Вычислим теперь интегралы

$$\iint u\zeta\,dx\,dy \quad \text{и} \quad \iint v\zeta\,dx\,dy,$$

в которых интегрирование распространяется на все части плоскости xy, для которой ζ отлично от нуля. Мы имеем

$$\iint u\zeta\,dx\,dy = -\frac{1}{2\pi}\iiint\!\!\iint \zeta\zeta' \frac{y-y'}{r^2}\,dx\,dy\,dx'\,dy',$$

причем интегрирование по поверхности каждый раз распространяется по поперечным сечениям всех вихрей. Каждому члену

$$\zeta\zeta' \frac{y-y'}{r^2}\,dx\,dy\,dx'\,dy'$$

этого интеграла соответствует другой член

$$\zeta\zeta' \frac{y'-y}{r^2}\,dx\,dy\,dx'\,dy',$$

и они взаимно друг друга уничтожают. Отсюда получаем

$$\left.\begin{aligned} \iint u\zeta\,dx\,dy &= 0, \\ \iint v\zeta\,dx\,dy &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Обозначив, как выше, напряжение вихря через $\varkappa$, эти результаты можно написать так

$$\sum \varkappa u = 0, \quad \sum \varkappa v = 0. \tag{9}$$

Так как напряжение каждого вихря от времени не зависит, то уравнения (9) выражают, что точка с координатами

$$\bar{x}=\frac{\sum \varkappa x}{\sum \varkappa}, \quad \bar{y}=\frac{\sum \varkappa y}{\sum \varkappa} \tag{10}$$

в течение всего движения остается неподвижной.

Эта точка совпадает с центром инерции тонкого слоя вещества, распределенного на плоскости xy с поверхностной плотностью ζ, и мы можем назвать ее центром системы вихрей; прямую, параллельную оси z, проекцией которой служит эта точка, мы назовем осью системы. Если $\sum \varkappa = 0$, то центр лежит в бесконечности или он неопределенен.

§ 155. Некоторые интересные примеры можно получить в случаях, в которых имеется один или несколько изолированных вихрей с бесконечно малым сечением.

1) Предположим, что мы имеем только одну вихревую нить и что вектор вихря ζ имеет всюду внутри бесконечно малого сечения один и тот же знак. Центр вихря в только что определенном смысле лежит теперь или внутри нити или бесконечно близко к ней. Так как этот центр находится в покое, то и нить, как целое, будет сохраняться, хотя ее части могут совершать относительные движения и ее центр не обязательно должен всегда лежать в том же самом элементе жидкости.

Каждая частица на конечном расстоянии r от центра нити будет описывать окружность около нити, как оси, с постоянной скоростью $\frac{\varkappa}{2\pi r}$. Область вне вихря двусвязная, и циркуляция по всякой простой замкнутой кривой, заключающей вихрь, равна, конечно, $\varkappa$. Безвихревое движение окружающей жидкости то же самое, как и в (2) § 27.

2) Предположим, что мы имеем два вихря с напряжениями $\varkappa_1$, $\varkappa_2$; A и B означают их центры, O означает центр системы. Движение каждой из двух нитей, как целого, обусловлено вполне действием другой и поэтому всегда перпендикулярно к AB. Поэтому обе нити сохраняют всегда одинаковое расстояние друг от друга и вращаются с постоянной угловой скоростью около точки O, которая будет неподвижной. Эту угловую скорость легко найти; разделив скорость точки A, равную $\frac{\varkappa_2}{2\pi AB}$, на расстояние AO, где

$$AO=\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1+\varkappa_2}AB;$$

мы получим тогда

$$\frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{2\pi \cdot AB^2}.$$

Если $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ имеют одинаковый знак, т. е. направления вращения в обоих вихрях совпадают, то O лежит между A и B; если же оба

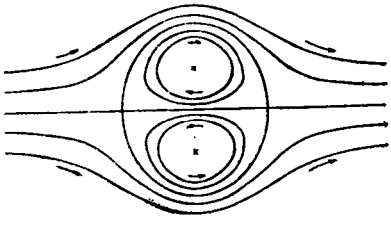
вращения имеют противоположные направления, то O лежит на продолжении AB и BA.

Если $\varkappa_1 = -\varkappa_2$, то O будет лежать в бесконечности, но легко видеть, что A и B движутся теперь с одинаковой скоростью $\frac{\varkappa_1}{2\pi \cdot AB}$ перпендикулярно к AB, в то время как AB само сохраняет свое направление. Подобного рода комбинация двух одинаковых, но противоположно направленных вихрей называется „парой вихрей". Она представляет двумерную аналогию к круглому вихревому кольцу (§ 160) и обладает многими свойствами последнего.

Линии тока вихревой пары образуют систему соосных окружностей, как показывает фиг. 9 (стр. 93); вихри находятся в обеих пограничных точках $(\pm a, 0)$. Чтобы найти *относительные* линии тока, мы сообщим этой системе общую скорость, которая равна и противоположна скорости вихря; получим таким образом в качестве функции тока относительного движения в обозначениях п. 2 § 64

$$\psi = \frac{\varkappa_1}{2\pi}\left(\frac{x}{2a} + \ln\frac{r_1}{r_2}\right). \qquad (1)$$

Фиг. 34, которая для удобства повернута на 90°, показывает некоторые из этих линий. Линия $\psi = 0$ состоит частично из оси y и частично из овала, окружающего оба вихря.



Фиг. 34.

Ясно, что заключенная в этом овале жидкость сопровождает вихревую пару в ее движении, в то время как движение вне овала в точности совпадает с движением, которое было бы вызвано твердым цилиндром с таким же контуром; ср. § 71.

Полуоси овала приблизительно имеют длину $2{,}09\,a$ и $1{,}73\,a$ [1]).

В этом примере и в аналогичном примере с вихревыми кольцами иногда трудно осознать, почему вихри не могут быть неподвижными. Если заменить на фиг. 9 (стр. 93) нити твердыми цилиндрами с малым круглым сечением, то цилиндры могут действительно оставаться в покое, при предположении, что они будут связаны независимой от движения жидкости жесткой связью; если же такое соединение отсутствует, то оба цилиндра в первый момент будут притягиваться, согласно принципу, рассмотренному в § 23. Это притяжение, однако, прекращается, если наложить общую скорость V соответствующей величины, направление которой противоположно тому циклическому движению, которое существует в середине между обоими цилиндрами. Чтобы найти величину V, заметим, что скорости жидкости в обеих точках $(a \pm c, 0)$, при малых значениях c, приблизительно будут

[1]) Ср. Thomson W., On Vortex Atoms, Phil. Mag. (4), XXXIV, 20 (1867) [Papers, IV, 1] и Riecke, Gött. Nachr., 1888, где нарисованы также траектории частиц жидкости.

равны по абсолютной величине при условии, если V выбрано таким образом, что

$$V+\frac{\varkappa}{2\pi c}-\frac{\varkappa}{4\pi a}=\frac{\varkappa}{2\pi c}+\frac{\varkappa}{4\pi a}-V,$$

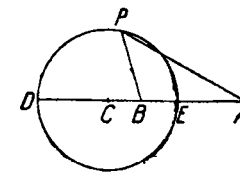
где $\varkappa$ означает циркуляцию. Поэтому имеем

$$V=\frac{\varkappa}{4\pi a},$$

а это есть в точности скорость поступательного движения вихревой пары в первоначальной форме задачи [1]).

Так как скорость жидкости во всех точках плоскости симметрии всюду к ней касательна, то мы можем предположить, что эта плоскость образует с обеих сторон твердую границу для жидкости; таким образом получаем случай одного прямолинейного вихря вблизи твердой плоской стенки, к которой он параллелен. Нить движется параллельно этой плоской стенке со скоростью $\frac{\varkappa}{4\pi h}$, где h означает расстояние от стенки.

Так как линии тока суть окружности, то мы можем получить также решение и для случая, когда единственная вихревая нить находится в пространстве, ограниченном изнутри или снаружи неподвижным круговым цилиндром.



Фиг. 35.

Пусть, например, EPD на фиг. 35 есть поперечное сечение цилиндра, A — положение вихря (он находится в этом случае во внешнем пространстве) и B будет „зеркальное изображение" A относительно окружности EPD, т. е.

$$CB\cdot CA=c^2,$$

где C есть центр круга, а c означает радиус круга. Если P есть произвольная точка окружности, то будем иметь

$$\frac{AP}{BP}=\frac{AE}{BE}=\frac{AD}{BD}=\text{const.},$$

так что окружность занимает положение одной из линий тока, обусловленных вихревой парой в A, B. Так как движение вихря A перпендикулярно к AB, то, очевидно, все условия задачи будут выполняться, если мы предположим, что A описывает окружность около оси цилиндра с постоянной скоростью

$$-\frac{\varkappa}{2\pi\cdot AB}=-\frac{\varkappa\cdot CA}{2\pi(CA^2-c^2)};$$

$\varkappa$ обозначает при этом напряжение вихря A.

---

[1]) Более точное исследование дал Hicks, On the Condition of Steady Motion of two Cylinders in a Fluid, Quart. Journ. Math., XVII, 194 (1881).

Точно так же вихрь напряжением $\varkappa$, который находится внутри неподвижного круглого цилиндра, например в B, будет описывать окружность с постоянной скоростью

$$\frac{\varkappa CB}{2\pi(c^2-CB^2)}.$$

Необходимо, однако, заметить [1]), что в случае внешнего вихря движение только тогда определяется вполне, когда, кроме напряжения $\varkappa$, задано также значение циркуляции по замкнутой кривой, окружающей цилиндр (но не вихрь).

При вышеизложенном решении эта циркуляция происходит от зеркального изображения вихря в B и равна $-\varkappa$. Эта циркуляция может быть уничтожена присоединением вихря напряжения $+\varkappa$ в C; мы будем иметь тогда для скорости вихря A

$$-\frac{\varkappa CA}{2\pi(CA^2-c^2)}+\frac{\varkappa}{2\pi CA}=-\frac{\varkappa c^2}{2\pi CA\,(CA^2-c^2)}.$$

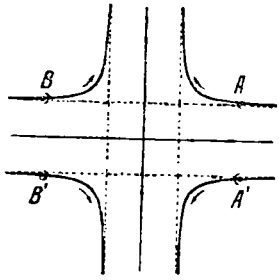
В случае заданной наперед циркуляции $\varkappa'$ мы должны прибавить еще к этому член $\frac{\varkappa'}{2\pi}CA$.

Фёппль [2]) применил метод изображений для исследования случая, когда цилиндр, сопровождаемый вихревой парой, расположенной симметрично относительно линии движения центра цилиндра, движется в жидкости со скоростью U. Оказывается, что вихри могут сохранить свое положение относительно цилиндра, когда они лежат на кривой

$$2ry=r^2-a^2,$$

и напряжения вихрей для данного положения на этой кривой равны

$$\pm 2Uy\left(1-\frac{a^4}{r^4}\right).$$



Фиг. 36.

Фёппль нашел, однако, что это положение будет неустойчиво при несимметричных возмущениях.

Некоторые траектории вихрей в потоке, обтекающем цилиндр (с циркуляцией), были построены Уайльтоном [3]). Траектория вихря в полукруговой области была исследована К. Де [4]) по методу Раута, на который будет ссылка на стр. 281.

3) Если мы имеем четыре параллельных прямолинейных вихря, центры которых образуют прямоугольник $ABB'A'$ и напряжения которых для вихрей A' и B равны $\varkappa$, а для вихрей A и B' равны $-\varkappa$, то непосредственно ясно, что центры будут всегда образовывать прямоугольник. Из рассмотрения направлений вращений, указанных на фиг. 36, видно, что действие пары AA' и BB' состоит в том,

---

[1]) Tarleton F. A., On a Problem in Vortex Motion, Proc. R. I. A., 12 дек. 1892.

[2]) Föppl L., Wirbelbewegung hinter einem Kreiszylinder. Sitzb. d. k. Bayr. Akad. d. Wiss., 1913.

[3]) Walton, Proc. R. I. Acad., XXXVIII, A (1928).

[4]) De K., Bull. of the Calcutta Math. Soc., XXI, 197 (1929).

чтобы удалить B и B' друг от друга и одновременно уменьшить их скорость, перпендикулярную к линии, их соединяющей. Плоскости, перпендикулярные и делящие пополам AB и AA', могут (или одна, или обе) быть взяты как неподвижные твердые границы; мы получаем, следовательно, случай движения вихревой пары с одинаковыми, но противоположными по знаку напряжениями по направлению к твердой плоской стенке (или от нее) или случай движения одного вихря в углу между двумя перпендикулярными друг к другу стенками.

Если x и y означают координаты вихря A относительно плоскости симметрии, то легко находим

$$\dot{x} = -\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{x^2}{yr^2}, \qquad \dot{y} = \frac{\varkappa}{4\pi}\frac{y^2}{xr^2}, \tag{2}$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

После деления мы получаем диференциальное уравнение траектории

$$\frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3} = 0,$$

откуда следует

$$a^2(x^2+y^2) = 4x^2y^2,$$

где a есть произвольная постоянная, или, введя полярные координаты,

$$r = \frac{a}{\sin 2\theta}. \tag{3}$$

Так как

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \frac{\varkappa}{4\pi},$$

то вихрь движется таким образом, как если бы он находился под действием отталкивающей центральной силы с центром в начале координат, действующей по закону обратной пропорциональности третьей степени расстояния [1]).

§ 156. Если положим, как в главе IV,

$$z = x + iy, \quad w = \varphi + i\psi, \tag{1}$$

то потенциальную функцию и функцию тока, представляющие ряд равноотстоящих вихрей, каждый из которых имеет напряжение $\varkappa$ и координаты которых соответственно равны

$$(0, 0), \quad (\pm a, 0), \quad (\pm 2a, 0), \ldots,$$

---

[1]) Greenhill, On Plane Vortex Motion, Quart. Journ. Math., XV (1887); Gröbli, Die Bewegung paralleler gerädliniger Wirbelfäden, Zürich, 1877. Эти работы содержат другие интересные примеры прямолинейных вихревых систем. Случай системы одинаковых и параллельных вихрей, точки пересечения которых с плоскостью образуют вершины правильного многоугольника, был рассмотрен J. J. Thomson, Motion of Vortex Rings, стр. 94. Он нашел, что такая конфигурация тогда и только тогда будет устойчива, когда число вихрей не превосходит шести. Дальнейшие литературные указания относительно специальных проблем см. Hicks, Brit. Ass. Rep., 1882, стр. 41 и т. д.; Love, см. примечание на стр. 240.

Остроумный метод преобразования плоских проблем вихревого движения принадлежит Routh, Some Applications of Conjugate Functions, Proc. Lond. Math. Soc., XII, 73 (1881).

получим из выражения

$$w = \frac{i\varkappa}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi z}{a}\ ; \tag{2}$$

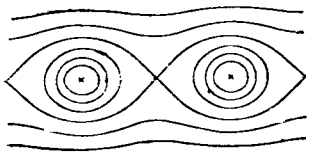
ср. § 64, п. 4. Это дает

$$u - iv = -\frac{dw}{dz} = -\frac{i\varkappa}{2a} \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{a} \tag{3}$$

и затем

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\varkappa}{2a} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{2\pi y}{a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{2\pi y}{a}\right) - \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}, \\ v &= \frac{\varkappa}{2a} \frac{\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{2\pi y}{a}\right) - \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Эти выражения для $y = \pm\infty$ дают $u = \mp \frac{1}{2} \frac{\varkappa}{a}$, $v = 0$; для отдаленных точек ряд вихрей действительно эквивалентен вихревому слою с равномерным напряжением $\frac{\varkappa}{a}$ (§ 151).

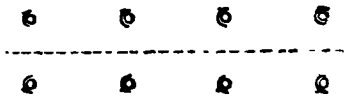


Фиг. 37.

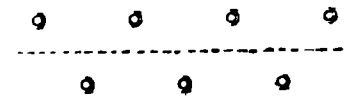
Фиг. 37 показывает расположение линий тока.

Легко теперь убедиться, что если мы имеем два параллельных ряда равноотстоящих вихрей, симметричных относительно плоскости $y = 0$, причем напряжение вихря для верхнего ряда обозначено через $\varkappa$, а для нижнего ряда через $-\varkappa$ (см. фиг. 38), то вся система как целое движется поступательно с постоянной скоростью, причем b есть расстояние между двумя рядами. Средняя скорость в

$$U = \frac{\varkappa}{2a} \operatorname{cth} \frac{\pi b}{a}; \tag{5}$$



Фиг. 38.



Фиг. 39.

плоскости симметрии равна $\frac{\varkappa}{a}$. Скорость с увеличением расстояния вне обоих рядов стремится к нулю.

Если расположение изменено таким образом, что каждый вихри одного ряда помещен против середины интервала между двумя соседними вихрями другого ряда, как показывает фиг. 39, то общая

поступательная скорость будет равна

$$V = \frac{\varkappa}{2a} \operatorname{th} \frac{\pi b}{a}. \tag{6}$$

Средняя скорость в срединной плоскости равна опять $\frac{\varkappa}{a}$.

Устойчивость этих различных расположений была исследована Карманом [1]). Возьмем сначала случай одного вихревого ряда и предположим, что вихрь, невозмущенные координаты которого суть $(ma, 0)$, смещен в точку $(ma+x_m, y_m)$. Формулы § 154 для начального движения вихря в начале координат дают

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= -\frac{\varkappa}{2\pi} \sum \frac{y_0 - y_m}{r_m^2}, \\ \frac{dy_0}{dt} &= \frac{\varkappa}{2\pi} \sum \frac{x_0 - x_m - ma}{r_m^2}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где

$$r_m^2 = (x_0 - x_m - ma)^2 + (y_0 - y_m)^2, \tag{8}$$

а m под знаком суммы пробегает все положительные и отрицательные целые значения за исключением нуля. Если пренебречь членами второго порядка относительно перемещений, то мы получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= -\frac{\varkappa}{2\pi a^2} \sum_m \frac{y_0 - y_m}{m^2}, \\ \frac{dy_0}{dt} &= -\frac{\varkappa}{2\pi a^2} \sum_m \frac{1}{m} - \frac{\varkappa}{2\pi a^2} \sum_m \frac{x_0 - x_m}{m^2}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Первый член в выражении для $\frac{dy_0}{dt}$ может быть опущен, так как он не зависит от возмущения [2]).

Рассмотрим теперь возмущение типа

$$x_m = \alpha e^{im\varphi}, \qquad y_m = \beta e^{im\varphi}, \tag{10}$$

где предполагается, что φ лежит между 0 и 2π. Если φ будет мало, то возмущение имеет характер волны с длиной $\frac{2\pi a}{\varphi}$. Мы получаем тогда

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\lambda\beta, \qquad \frac{d\beta}{dt} = -\lambda\alpha, \tag{11}$$

где

$$\lambda = \frac{\varkappa}{\pi a^2}\left(\frac{1-\cos\varphi}{1^2} + \frac{1-\cos 2\varphi}{2^2} + \frac{1-\cos 3\varphi}{3^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{\varkappa}{4\pi a^2}\varphi(2\pi - \varphi). \tag{12}$$

[1]) v. Kármán, Flüssigkeits- und Luftwiederstand, Phys. Zeitschr., XIII (1912); Gött. Nachr., стр. 547 (1912). Исследование в этих работах дано только в общих чертах. Я сделал различные дополнения.

[2]) При суммировании вихри должны быть взяты попарно равноотстоящими от начала, так как иначе результат был бы неопределенным. Исследование относится в сущности к средним частям очень длинного, но не бесконечно длинного ряда; тогда можно пренебречь упомянутым членом.

Расположенне это, следовательно, неустойчиво, так как возмущение в конце концов растет как $e^{\lambda t}$. Если длина волны велика по сравнению с a, то мы имеем приближенно

$$\lambda = \frac{1}{2}\,\frac{\varkappa\varphi}{a^2}; \tag{13}$$

ср. § 234.

Перейдем к случаю *симметричного* двойного ряда; положения вихрей в верхнем и нижнем ряду (фиг. 38) в момент t могут быть заданы соответственно через

$$\left(ma + Ut + x_m,\ \frac{1}{2}\,b + y_m\right),$$

$$\left(na + Ut + x_n',\ -\frac{1}{2}\,b + y_n'\right),$$

где U означает общую скорость поступательного движения системы и начало координат лежит в плоскости симметрии.

Компоненты скорости какого-нибудь вихря *верхнего* ряда, например, вихря, для которого $m=0$, зависящие от остальных вихрей самого этого ряда, даны, как выше, формулой (9), причем $\sum m^{-1}$ может быть отброшена Компоненты же, обусловленные вихрем n *нижнего* ряда, будут таковы:

$$\frac{\varkappa}{2\pi}\cdot\frac{b + y_0 - y_n'}{r_n^2},\qquad -\frac{\varkappa}{2\pi}\cdot\frac{x_0 - x_n' - na}{r_n^2},$$

где

$$r_n^2 = (x_0 - x_n' - na)^2 + (y_0 - y_n' + b)^2.$$

Если пренебречь членами второго порядка относительно возмущений, то мы находим после небольшого приведения

$$\frac{2\pi}{\varkappa}\left(\frac{dx_0}{dt} + U\right) = -\sum_m \frac{y_0 - y_m}{m^2a^2} + \sum_n \frac{b}{n^2a^2 + b^2} + \\ + \sum_n \frac{n^2a^2 - b^2}{(n^2a^2 + b^2)^2}(y_0 - y_n') + \sum_n \frac{2nab}{(n^2a^2 + b^2)^2}(x_0 - x_n'), \tag{14}$$

$$\frac{2\pi}{\varkappa}\,\frac{dy_0}{dt} = -\sum_m \frac{x_0 - x_m}{m^2a^2} + \sum_n \frac{n^2a^2 - b^2}{(n^2a^2 + b^2)^2}(x_0 - x_n') - \\ - \sum_n \frac{2nab}{(n^2a^2 + b^2)^2}(y_0 - y_n'), \tag{15}$$

где суммирование по n распространяется от $-\infty$ до $+\infty$, включая нуль. Те члены (14), которые независимы от возмущения, сокращаются, так как согласно (5)

$$U = \frac{\varkappa}{2a}\operatorname{cth}\frac{\pi b}{a} = \frac{\varkappa}{2\pi}\sum_n \frac{b}{n^2a^2 + b^2}.$$

Если положить теперь

$$\left.\begin{aligned} x_m &= \alpha e^{im\varphi}, & y_m &= \beta e^{im\varphi}, \\ x_n' &= \alpha' e^{in\varphi}, & y_n' &= \beta' e^{in\varphi}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где $0<\varphi<2\pi$, то уравнения (14), (15) принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\pi a^2}{\varkappa}\frac{d\alpha}{dt} &= -A\beta - B\alpha' - C\beta' \\ \frac{2\pi a^2}{\varkappa}\frac{d\beta}{dt} &= -A\alpha - C\alpha' + B\beta'. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Если положить для краткости

$$k=\frac{b}{a}, \tag{18}$$

то значения коэфициентов [1]) будут

$$A=\sum_m \frac{1-e^{im\varphi}}{m^2}-\sum_n \frac{n^2-k^2}{(n^2+k^2)^2}=\frac{1}{2}\,\varphi\,(2\pi-\varphi)+\frac{\pi^2}{\operatorname{sh}^2 k\pi}, \tag{19}$$

$$B=\sum_n \frac{2nke^{in\varphi}}{(n^2+k^2)^2}=i\left\{\frac{\pi\varphi\operatorname{ch}k(\pi-\varphi)}{\operatorname{sh}k\pi}-\frac{\pi^2\operatorname{sh}k\varphi}{\operatorname{sh}^2 k\pi}\right\}, \tag{20}$$

$$C=\sum_n \frac{(n^2-k^2)e^{in\varphi}}{(n^2+k^2)^2}=-\frac{\pi^2\operatorname{ch}k\varphi}{\operatorname{sh}^2 k\pi}-\frac{\pi\varphi\operatorname{sh}k(\pi-\varphi)}{\operatorname{sh}k\pi}. \tag{21}$$

Чтобы вывести теперь уравнение для *нижнего* ряда, мы должны только изменить знак $\varkappa$ и b и переставить буквы со штрихом и без него друг с другом.

Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\pi a^2}{\varkappa}\frac{d\alpha'}{dt} &= A\beta' - B\alpha + C\beta, \\ \frac{2\pi a^2}{\varkappa}\frac{d\beta'}{dt} &= A\alpha' + C\alpha + B\beta. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Формулы (17) и (22) представляют уравнения движения вихревой системы при нормальном — если можно его так назвать — ее возмущении.

Решения получаются двух типов. При первом типе мы имеем

$$\alpha=\alpha',\quad \beta=-\beta', \tag{23}$$

и поэтому

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\pi a^2}{\varkappa}\frac{d\alpha}{dt} &= -B\alpha-(A-C)\beta, \\ \frac{2\pi a^2}{\varkappa}\frac{d\beta}{dt} &= -(A+C)\,\alpha - B\beta. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Решение содержит в качестве множителя показательную функцию $e^{\lambda t}$, причем значения λ определяются из уравнения

$$\frac{2\pi a^2}{\varkappa}\lambda=-B\pm\sqrt{A^2-C^2}. \tag{25}$$

При втором типе имеем

$$\alpha=-\alpha',\quad \beta=\beta', \tag{26}$$

---

[1]) Значения сумм по n могут быть получены из ряда Фурье:

$$\frac{\operatorname{ch}k(\pi-\varphi)}{\operatorname{sh}k\pi}=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{k}+\frac{2k\cos\varphi}{1^2+k^2}+\frac{2k\cos 2\varphi}{2^2+k^2}+\ldots\right\}.$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned}\frac{2\pi a^2}{\varkappa}\,\frac{d\alpha}{dt} &= B\alpha-(A+C)\,\beta,\\ \frac{2\pi a^2}{\varkappa}\,\frac{d\beta}{dt} &= -(A-C)\alpha+B\beta.\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Соответствующие значения λ даны уравнением

$$\frac{2\pi a^2}{\varkappa}\,\lambda = B\pm\sqrt{A^2-C^2}. \tag{28}$$

Так как B является чисто мнимым, в то время как A и C действительны, то для устойчивости в каждом из обоих случаев необходимо, чтобы для допускаемых значений φ величина A^2 не была бы больше, чем C^2. Если $\varphi=\pi$, то получим

$$A+C=\frac{1}{2}\pi^2\,\mathrm{th}^2\,\frac{1}{2}\,k\pi, \qquad A-C=\frac{1}{2}\,\pi^2\,\mathrm{cth}^2\,\frac{1}{2}\,k\pi, \tag{29}$$

и A^2-C^2 будет положительно. Отсюда мы заключаем, что оба типа неустойчивы.

Переходим теперь к *несимметрическому* случаю; обозначим положения смещенных вихрей соответственно через

$$\left(ma+Vt+x_m,\quad \frac{1}{2}\,b+y_m\right),$$
$$\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)a+Vt+x_n',\quad -\frac{1}{2}\,b+y_n'\right],$$

где V дается формулой (6). Необходимые формулы мы получим, если в предыдущих результатах напишем $n+\frac{1}{2}$ вместо n.

Уравнения (17) и (22) будут таким образом иметь место, если [1]) мы положим

$$A=\sum_m\frac{1-e^{im\varphi}}{m^2}-\sum_n\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-k^2}{\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+k^2\right\}^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\,\varphi\,(2\pi-\varphi)-\frac{\pi^2}{\mathrm{ch}^2\,k\pi}, \tag{30}$$

$$B=\sum_n\frac{(2n+1)\,ke^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}}{\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+k^2\right\}^2}=$$
$$=i\left\{\frac{\pi\varphi\,\mathrm{sh}\,k\,(\pi-\varphi)}{\mathrm{ch}\,k\pi}+\frac{\pi^2\,\mathrm{sh}\,k\varphi}{\mathrm{ch}^2\,k\pi}\right\}, \tag{31}$$

$$C=\sum_n\frac{\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-k^2\right\}e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}}{\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+k^2\right\}^2}=$$
$$=\frac{\pi^2\,\mathrm{ch}\,k\varphi}{\mathrm{ch}^2\,k\pi}-\frac{\pi\varphi\,\mathrm{ch}\,k\,(\pi-\varphi)}{\mathrm{ch}\,k\pi}. \tag{32}$$

[1]) Значения сумм по n могут быть получены из ряда Фурье

$$\frac{\mathrm{sh}\,k\,(\pi-\varphi)}{\mathrm{ch}\,k\pi}=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{k\cos{}^1/_2\,\varphi}{(^1/_2)^2+k^2}+\frac{k\cos{}^3/_2\,\varphi}{(^3/_2)^2+k^2}+\ldots\right\}.$$

Эти значения для A, B, C должны быть подставлены в (25) и (28). Как и в предшествующем случае, для устойчивости необходимо, чтобы A^2 было не больше, чем C^2. Если теперь положить

$$\psi = \pi, \quad 'C = 0,$$

то A тоже должно обращаться в нуль или мы должны иметь

$$\operatorname{ch}^2 k\pi = 2, \qquad k\pi = 0{,}8814, \qquad \frac{b}{a} = k = 0{,}281. \tag{33}$$

Расположенне, таким образом, является неустойчивым, если только отношение расстояния между обоими рядами к расстоянию между двумя соседними вихрями не будет иметь в точности указанное значение.

Чтобы решить, будет ли это расположенне при указанных выше условиях на самом деле устойчивым для всех значений φ между 0 и 2π, положим на мгновение

$$k(\pi - \varphi) = x, \qquad k\pi = \mu,$$

так что

$$\left.\begin{aligned} k^2 A &= -\frac{1}{2}x^2, \\ k^2 C &= \frac{1}{2}(\mu x \operatorname{ch}\mu x \operatorname{ch} x - \mu^2 \operatorname{sh}\mu \operatorname{sh} x), \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

где x изменяется от $-\mu$ до $+\mu$. Так как A есть четная, а C — нечетная функция от x, то для сравнения абсолютных значений достаточно предположить x положительным. Отсюда, полагая

$$y = \mu \operatorname{ch}\mu \operatorname{ch} x - \mu^2 \operatorname{sh}\mu \frac{\operatorname{sh} x}{x} - x, \tag{35}$$

мы должны определить, будет ли это выражение положительно для $0 < x < \mu$ Так как

$$\mu = 0{,}8814, \qquad \operatorname{ch}\mu = \sqrt{2}, \qquad \operatorname{sh}\mu = 1,$$

то y будет положительным для $x = 0$ и обращается в нуль для $x = \mu$. Далее имеем

$$\frac{dy}{dx} = \mu \operatorname{ch}\mu \operatorname{sh} x + \mu^2 \operatorname{sh}\mu \frac{\operatorname{sh} x}{x^2} - \mu^2 \operatorname{sh}\mu \frac{\operatorname{ch} x}{x} - 1, \tag{36}$$

и это равно -1 для $x = 0$ и обращается в нуль для $x = \mu$. Наконец, имеем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mu \operatorname{ch}\mu \operatorname{ch} x - \mu^2 \operatorname{sh}\mu \frac{\operatorname{sh} x}{x} + 2\mu^2 \operatorname{sh}\mu \frac{\operatorname{ch} x}{x^2} - 2\mu^2 \operatorname{sh}\mu \frac{\operatorname{sh} x}{x^3}. \tag{37}$$

Легко определить, что это выражение для всех значений x будет положительным, так как $\frac{\operatorname{th} x}{x} < 1$. Если, таким образом, x возрастает от 0 до μ, то $\frac{dy}{dx}$ возрастает непрерывно от -1 до 0 и поэтому будет отрицательным Отсюда следует, что y убывает от своего первоначального положительного значения до нуля, т. е. оно будет положительным.

Мы заключаем отсюда, что данное расположение всегда будет устойчивым [1]), за исключением случаев, в которых

$$x=\pm\mu, \quad \text{а} \quad \varphi=0 \quad \text{или} \quad 2\pi;$$

в этих исключительных случаях $B=0$, согласно (31), и, следовательно, $\lambda=0$. Так как возмущенные частицы в этом случае все имеют одинаковую фазу, то причина того, почему период возмущения является бесконечным, легко может быть усмотрена.

Эти последние вихревые цепочки с несимметричным расположением вихрей представляют особый интерес потому, что они являются прообразом тех следов вихрей, которые часто наблюдают позади цилиндрического тела, перемещающегося в жидкости. Это обстоятельство и вызывает дальнейшие исследования.

То влияние, которое оказывают на устойчивость цепочек боковые твердые границы, равноотстоящие от средней линии, было исследовано Розенхидом [2]). Он нашел, что когда отношение $\frac{a}{h}$ интервала a между двумя соседними вихрями одного ряда к расстоянию h между стенками возрастает от 0 до 0,815, несимметричное расположение вихрей является устойчивым только для определенных значений отношения $\frac{b}{a}$, которое непрерывно уменьшается от 0,281 до 0,256. Но если $\frac{a}{h} > 0{,}815$, то устойчивость имеется для ряда значений $\frac{b}{a}$. А когда $\frac{a}{h} > 1{,}419$, то это расположение вихрей будет устойчивым для всех значений $\frac{b}{a}$.

Симметричное же расположение, с другой стороны, всегда будет неустойчивым.

§ 157. Если, как в случае вихревой пары или системы вихревых пар, алгебраическая сумма напряжений всех вихрей равна нулю, то мы можем разработать двухмерную теорию „импульса“ аналогично теории, данной в § 119, 152 для случаев конечной вихревой системы. Более подробный вывод предоставляем сделать читателю. Если P и Q обозначают компоненты импульса, соответственно параллельные оси x и оси y, и N обозначает момент импульса относительно оси Oz, причем все взято для слоя жидкости с толщиной по оси z, равной единице, то мы найдем, что

$$\left.\begin{aligned} P=\varrho\iint y\zeta\,dx\,dy, \qquad Q=-\varrho\iint x\zeta\,dx\,dy, \\ N=-\tfrac{1}{2}\varrho\iint (x^2+y^2)\,\zeta\,dx\,dy. \end{aligned}\right\} \qquad (1$$

Если, например, в случае одной вихревой пары напряжение вихрей будет равно $\pm\varkappa$, а их расстояние друг от друга равно c, то им-

[1]) Эта теорема была высказана Карманом без доказательства.

[2]) Rosenhead, Phil. Trans, CCVIII, 275 (1929), см. также Glauert, Proc. Roy. Soc. A, CXX, 34 (1928).

пульс будет равен $\varrho \varkappa c$ и направлен вдоль прямой, делящей под прямым углом отрезок c пополам.

Постоянство импульса дает

$$\sum \varkappa x = \text{const.}, \quad \sum \varkappa y = \text{const.}, \quad \sum \varkappa (x^2 + y^2) = \text{const.} \tag{2}$$

Можно также показать, что в рассматриваемом случае кинетическая энергия движения будет

$$T = -\frac{1}{2} \varrho \int \psi \zeta \, dx \, dy = -\frac{1}{2} \varrho \sum \varkappa \psi. \tag{3}$$

Если $\sum \varkappa$ не равна нулю, то тогда как энергия, так и момент импульса оба будут бесконечны, что легко можно проверить в случае одного прямолинейного вихря.

Теория системы изолированных прямолинейных вихрей была приведена в очень изящный вид Кирхгофом [1]).

Если обозначить положения центров соответствующих вихрей через (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., их напряжения через $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$, то согласно § 154 будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1 \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{\partial W}{\partial y_1}, & \varkappa_1 \frac{dy_1}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial x_1}, \\ \varkappa_2 \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{\partial W}{\partial y_2}, & \varkappa_2 \frac{dy_2}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial x_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где

$$W = \frac{1}{2\pi} \sum \varkappa_1 \varkappa_2 \ln r_{12} \tag{5}$$

и r_{12} обозначает расстояние между вихрями $\varkappa_1$, $\varkappa_2$.

Так как W зависит только от *относительного* положения вихрей, то оно не изменяет своего значения, если $x_1, x_2, \ldots$ будут увеличены на одну и ту же величину; отсюда следует, что

$$\sum \frac{\partial W}{\partial x_1} = 0,$$

а также

$$\sum \frac{\partial W}{\partial y_1} = 0.$$

Это дает первые два уравнения (2); однако доказательство теперь не ограничивается случаем $\sum \varkappa = 0$. Ход доказательства в основном такой же, как и в § 154. Далее из (4) получаем

$$\sum \varkappa \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) = -\sum \left(x \frac{\partial W}{\partial y} - y \frac{\partial W}{\partial x} \right),$$

или, после введения полярных координат (r_1, θ_1), (r_2, θ_2), ... для различных вихрей,

$$\sum \varkappa r \frac{dr}{dt} = -\sum \frac{\partial W}{\partial \theta}. \tag{6}$$

---

[1]) Kirchhoff, Mechanik, 20-я лекция.

Так как W остается без изменения, если вращать координатные оси в их плоскостях около начала, то имеем

$$\sum \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0;$$

отсюда следует

$$\sum \varkappa r^2 = \text{const.}, \tag{7}$$

а это уравнение совпадает с третьим уравнением (2), но оно свободно от предполагаемого там ограничения.

Дальнейший интеграл (4) получается следующим путем. Мы имеем

$$\sum \varkappa \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \sum \left(x \frac{\partial W}{\partial x} + y \frac{\partial W}{\partial y} \right),$$

или

$$\sum \varkappa r^2 \frac{d\theta}{dt} = \sum r \frac{\partial W}{\partial r}. \tag{8}$$

Если все r будут увеличены в отношении $1+\varepsilon$, где ε бесконечно мало, то приращение W будет равно

$$\sum \varepsilon r \frac{\partial W}{\partial r}.$$

Но так как новое расположение вихревой системы геометрически подобно первоначальному, то расстояния r_{12} меняются в том же самом отношении $1+\varepsilon$, и, следовательно, если принять во внимание (5), приращение W будет равно $\frac{\varepsilon}{2\pi} \sum \varkappa_1 \varkappa_2$. Следовательно, (8) может быть написано в форме

$$\sum \varkappa r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum \varkappa_1 \varkappa_2. \tag{9}$$

§ 158. Полученные результаты независимы от формы поперечных сечений вихря до тех пор, пока размеры сечений малы сравнительно со взаимным расстоянием вихрей. Простейший случай круглого сечения и представляет интерес для исследования, является ли эта форма устойчивой. Этот вопрос был исследован Кельвином [1]).

Когда возмущение происходит только в двух измерениях, вычисления делаются очень простыми. Предположим, как в § 27, что область внутри круга радиуса $r=a$ с центром в начале наполнена жидкостью с повсюду равным вектором вихря ω и что этот круг находится в жидкости с безвихревым движением. Если движение на границе круга будет непрерывно, то будем иметь для $r<a$

$$\psi = -\frac{1}{4} \omega (a^2 - r^2) \tag{1}$$

и для $r>a$

$$\psi = -\frac{1}{2} \omega a^2 \ln \frac{a}{r}. \tag{2}$$

Чтобы исследовать влияние небольшого безвихревого возмущения, предположим, что для $r<a$

$$\left.\begin{aligned} &\psi = -\frac{1}{4} \omega (a^2 - r^2) + A \frac{r^s}{a^s} \cos(s\theta - \sigma t) \\ &\text{и для } r>a \\ &\psi = -\frac{1}{2} \omega a^2 \lg \frac{a}{r} + A \frac{a^s}{r^s} \cos(s\theta - \sigma t), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

[1]) W. Thomson, On the Vibrations of a Columnar Vortex, Phil. Mag. (5), X, 155 (1880) [Papers, IV, 152].

где s обозначает целое число, а σ подлежит еще определению. Постоянное A должно иметь в обоих этих выражениях одно и то же значение, так как радиальная компонента $-\frac{\partial\psi}{r\,\partial\theta}$ скорости на контуре вихря, на котором приближенно $r=a$, должна быть непрерывна. Если в качестве уравнения контура мы возьмем

$$r=a+\alpha\cos(s\theta-\sigma t), \tag{4}$$

то мы должны только еще выразить то, что поперечная компонента $\frac{\partial\psi}{\partial r}$ скорости непрерывна. Это дает

$$\frac{1}{2}\omega r+s\frac{A}{a}\cos(s\theta-\sigma t)=\frac{\frac{1}{2}\omega a^2}{r}-\frac{sA}{a}\cos(s\theta-\sigma t).$$

Если мы из уравнения (4) подставим значение r и пренебрежем квадратом α, то получим

$$\omega a=-\frac{2sA}{a}. \tag{5}$$

До сих пор исследование было чисто кинематическим; динамическая теорема о том, что вихревые линии движутся вместе с жидкостью, показывает, что нормальная компоиента скорости для частицы на контуре должна быть равна нормальной компоненте скорости самого контура. Это условие дает

$$\frac{\partial r}{\partial t}=-\frac{\partial\psi}{r\,\partial\theta}-\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{r\,\partial\theta},$$

где r имеет значение (4), или в другом виде

$$\sigma\alpha=s\frac{A}{a}+\frac{1}{2}\omega\alpha\frac{s\alpha}{a}. \tag{6}$$

Если исключить отношение $\frac{A}{a}$ из уравнений (5) и (6), то найдем

$$\sigma=\frac{1}{2}(s-1)\,\omega. \tag{7}$$

Таким образом возмущение, представленное тригонометрическими функциями (3), представляет собой гофр, перемещающийся по окружности вихря с угловой скоростью

$$\frac{\sigma}{s}=\frac{(s-1)}{s}\frac{1}{2}\omega. \tag{8}$$

Это есть угловая скорость по отношению к пространству, которое мы считаем неподвижным; по отношению же к вращающейся жидкости угловая скорость будет равна

$$\frac{\sigma}{s}-\frac{1}{2}\omega=-\frac{1}{2}\frac{\omega}{s}, \tag{9}$$

и ее направление противоположно направлению вращения жидкости.

Для $s=2$ возмущенное поперечное сечение есть эллипс, который вращается с угловой скоростью $^1/_4\,\omega$ вокруг своего центра.

Поперечные и продольные колебания изолированного прямолинейного вихревого столба были также изучены Кельвином в цитированной работе. Прямолинейная форма оказывается устойчивой и для возмущений общего характера.

В недавней работе Розенхид [1]) исследовал вопрос об устойчивости несимметричной кармановской дорожки вихрей с конечным поперечным сечением. Оказывается, что такая дорожка будет устойчивой для строго двумерных возмущений и неустойчивой по отношению к синусоидальной продольной деформации, длина волны которой меньше некоторой доли диаметра.

§ 159. Частный случай эллиптического возмущения может быть решен точно следующим образом [2]).

Предположим, что пространство внутри эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

наполнено жидкостью с равномерной завихренностью ω, в то время как окружающая жидкость движется без вихрей. Оказывается, что все условия задачи будут удовлетворены, если мы предположим, что эллиптический контур без изменения вида вращается с угловой скоростью n, которая еще подлежит определению.

Формула для внешней области согласно (4) § 72 может быть написана сразу; мы будем иметь

$$\psi=\frac{1}{4}\,n(a+b)^2e^{-2\xi}\cos 2\eta+\frac{1}{2}\,\omega ab\xi, \tag{2}$$

где ξ, η обозначают теперь эллиптические координаты, рассмотренные в п. 3 § 71, а циклическая постоянная $\varkappa$ положена равной $\pi ab\omega$.

Значение ψ для внутренней области должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\omega \tag{3}$$

с граничным условием

$$\frac{ux}{a^2}+\frac{vy}{b^2}=-ny\frac{x}{a^2}+nx\frac{y}{b^2}. \tag{4}$$

Оба эти условия будут выполняться для функции

$$\psi=\frac{1}{2}\,\omega(Ax^2+By^2) \tag{5}$$

при условии, что

$$A+B=1,\quad Aa^2-Bb^2=\frac{n}{\omega}(a^2-b^2). \tag{6}$$

Мы должны теперь еще выразить, что на контуре вихря не имеет места тангенциальное скольжение, т. е. значения для $\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}$, полученные из (2) и (5), там совпадают. Если мы положим

$$x=c\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta,\quad y=c\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta,$$

где

$$c=\sqrt{a^2-b^2},$$

то получим после диференцирования, приравнивая коэфициенты при $\cos 2\eta$, дополнительное условие

$$-\frac{1}{2}\,n(a+b)^2e^{-2\xi}=\frac{1}{2}\,\omega c^2(A-B)\,\mathrm{ch}\,\xi\,\mathrm{sh}\,\xi,$$

---

[1]) Proc. Roy. Soc. A., CXXVII, 590 (1930).

[2]) Kirchhoff, Mechanik, 20-я лекция; Basset, Hydrodynamics, II, 41.

где ξ есть параметр эллипса (1). Это условие эквивалентно уравнению

$$A-B=-\frac{n}{\omega}\,\frac{a^2-b^2}{ab}, \tag{7}$$

так как для точек эллипса

$$\operatorname{ch}\xi=\frac{a}{c}, \quad \operatorname{sh}\xi=\frac{b}{c}.$$

В соединении с уравнением (6) это дает

$$Aa=Bb=\frac{ab}{a+b} \tag{8}$$

и

$$n=\frac{ab}{(a+b)^2}\,\omega. \tag{9}$$

Для $a=b$ это совпадает с нашим прежним приближенным результатом.

Компоненты скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$ частицы вихря по отношению к главным осям эллипса определяются формулами

$$\dot{x}=-\frac{\partial\psi}{\partial y}+ny, \quad \dot{y}=\frac{\partial\psi}{\partial x}-nx.$$

Отсюда получается

$$\frac{\dot{x}}{a}=-n\frac{y}{b}, \quad \frac{\dot{y}}{b}=n\frac{x}{a}. \tag{10}$$

Интегрируя, находим

$$\left.\begin{aligned} x&=ka\cos(nt+\varepsilon),\\ y&=kb\sin(nt+\varepsilon),\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где k и ε суть произвольные постоянные; *относительными* траекториями частиц будут эллипсы, которые подобны контуру вихря, и они описываются частицами по гармоническому закону.

Если x', y' обозначают координаты частицы по отношению к неизменной в пространстве системе координат, то мы получаем

$$\left.\begin{aligned} x'&=x\cos nt-y\sin nt=\frac{1}{2}k(a+b)\cos(2nt+\varepsilon)+\\ &\qquad+\frac{1}{2}k(a-b)\cos\varepsilon,\\ y'&=x\sin nt+y\cos nt=\frac{1}{2}k(a+b)\sin(2nt+\varepsilon)-\\ &\qquad-\frac{1}{2}k(a-b)\sin\varepsilon.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Абсолютные траектории, таким образом, будут окружности, которые описываются с угловой скоростью $2n$ [1]).

§ 159a. Движение твердого тела в жидкости, имеющей завихрение, является очень интересной проблемой, но, к сожалению, она трудна для изучения. Единственный доступный рассмотрению случай есть двумерное движение жидкости с равномерным завихрением.

[1]) Что касается дальнейших исследований в этом направлении, см. Hill, On the Motion of Fluid part of which is moving rotationally and part irrotationally, Phil. Trans., 1884; Love, On the Stability of certain Vortex Motions, Proc. Lond. Math. Soc. (1), **XXV**, 18 (1893).

Пусть x_0, y_0 обозначают координаты точки C (цилиндрического) тела относительно неподвижных осей; x, y — координаты произвольной точки жидкости относительно параллельных осей, проходящих через C, а (u, v) обозначают компоненты скорости относительно C. Тогда мы имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \ddot{x}_0 + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} - \zeta v &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \ddot{y}_0 + u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \zeta u &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ср. (3) § 12 и (5) § 146. Так как

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2}$$

и ζ постоянна, то оказывается, что $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial v}{\partial t}$ являются производными от некоторой функции от x, y, t соответственно по x и y. Если мы обозначим эту функцию через $-\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, то будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) &= -\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right), \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) &= -\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

а это есть условие того, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi + i\psi)$$

есть аналитическая функция комплексного переменного $x + iy$. Вследствие этого $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ будет вполне определено, если будет известен вид ψ [1]).

Уравнения (1) дают теперь

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (\ddot{x}_0 x + \ddot{y}_0 y) - \frac{1}{2} q^2 + \zeta\psi, \tag{4}$$

где

$$q^2 = u^2 + v^2. \tag{5}$$

Перейдем к применению этих результатов к некоторым случаям движения кругового цилиндра. Точку C естественно взять на оси.

Предположим сначала, что невозмущенное движение жидкости представляет равномерное вращение ω около начала, так что $\zeta = 2\omega$. Функция тока для движения относительно движущейся точки (x_0, y_0) будет равна тогда

$$\left.\begin{aligned} \psi_0 &= \frac{1}{2}\omega\{(x_0 + x)^2 + (y_0 + y)^2\} + \dot{x}_0 y - \dot{y}_0 x = \\ &= \frac{1}{2}\omega r^2 + \omega r(x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta) + \frac{1}{2}\omega(x_0^2 + y_0^2) + \\ &\qquad + r(\dot{x}_0 \sin\theta - \dot{y}_0 \cos\theta), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

[1]) Proudman, On the Motion of Solids in a Liquid possessing Vorticity, Proc. R. S., XCII, 408 (1916).

причем мы ввели полярные координаты с началом C. Относительная функция тока для возмущенного движения будет

$$\psi=\frac{1}{2}\,\omega r^2+\omega\left(r-\frac{a^2}{r}\right)(x_0\cos\theta+y_0\sin\theta)+$$
$$+\frac{1}{2}\,\omega\,(x_0^2+y_0^2)+\left(r-\frac{a^2}{r}\right)(\dot{x}_0\sin\theta-\dot{y}_0\cos\theta), \qquad (7)$$

так как она удовлетворяет уравнению $\Delta_1\psi=2\omega$ и дает $\psi=\text{const.}$ для $r=a$, а для $r=\infty$ совпадает с (6).

Отсюда следует

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\omega\left(r-\frac{a^2}{r}\right)(\dot{x}_0\cos\theta+\dot{y}_0\sin\theta)+\left(r-\frac{a^2}{r}\right)(\ddot{x}_0\sin\theta-\ddot{y}_0\cos\theta) \qquad (8)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\omega\left(r+\frac{a^2}{r}\right)(\dot{x}_0\sin\theta-\dot{y}_0\cos\theta)+\left(r+\frac{a^2}{r}\right)(\ddot{x}_0\cos\theta+\ddot{y}_0\sin\theta), \qquad (9)$$

при этом мы опустили члены, независимые от r и θ. Далее для $r=a$ имеем

$$\frac{\partial\psi}{r\partial\theta}=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial r}=\omega a+2\omega\,(x_0\cos\theta+y_0\sin\theta)+2\,(\dot{x}_0\sin\theta-\dot{y}_0\cos\theta)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2}\,q^2=2\omega^2 a\,(x_0\cos\theta+y_0\sin\theta)+2\omega a\,(\dot{x}_0\sin\theta-\dot{y}_0\cos\theta)+\ldots, \qquad (10)$$

где члены, не влияющие на результирующую силу давления на цилиндр, были опущены. Если мы теперь подставим это выражение в (4), то получим для $r=a$

$$\frac{p}{\varrho}=a\,(\ddot{x}_0\cos\theta+\ddot{y}_0\sin\theta)-4\omega\dot{a}\,(x_0\sin\theta-\dot{y}_0\cos\theta)-$$
$$-2\omega^2 a\,(x_0\cos\theta+y_0\sin\theta)+\ldots \qquad (11)$$

Компоненты силы, вызываемой давлениями жидкости на цилиндр, представляются тогда в следующем виде [1]):

$$\left.\begin{aligned}-\int_0^{2\pi}p\cos\theta\,a\,d\theta&=-M'(\ddot{x}_0+4\omega\dot{y}_0-2\omega^2 x_0);\\ -\int_0^{2\pi}p\sin\theta\,a\,d\theta&=-M'(\ddot{y}_0-4\omega\dot{x}_0-2\omega^2 y_0),\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

где $M'=\pi\varrho a^2$. Если M означает массу самого цилиндра на единицу длины то уравнения движения будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned}\mu\ddot{x}+4\omega\dot{y}-2\omega^2 x&=\frac{X}{M'},\\ \mu\ddot{y}-4\omega\dot{x}-2\omega^2 y&=\frac{Y}{M'},\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

---

[1]) Ср. G. I. Taylor, Motion of Solids in Fluids when the Flow is not Irrotational, Proc. R. S. A., XCIII, 99 (1916).

где $\mu = 1 + \frac{M}{M'}$ и индекс нуль опущен, так как он больше не нужен. Если мы положим

$$z = x + iy,$$

то уравнения (13) равнозначны с уравнением

$$\mu \ddot{z} - 4i\omega \dot{z} - 2\omega^2 z = \frac{X + iY}{M'}. \tag{14}$$

Чтобы найти свободное движение для случая, когда

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

возьмем z пропорциональным $e^{im\omega t}$; тогда получим

$$\mu m^2 - 4m + 2 = 0. \tag{15}$$

Когда $\mu < 2$, т. е. масса цилиндра меньше массы вытесненной жидкости, тогда m будет действительным и решение имеет вид

$$z = Ae^{im_1\omega t} + Be^{im_2\omega t} \tag{16}$$

где m_1 и m_2 положительны. Этим представлено движение по „прямому" эпициклу. В качестве частных случаев возможны круговые орбиты, и они будут устойчивыми. Если же $\mu > 2$, то для m получаются комплексные значения и решение будет иметь вид

$$z = (Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t})\, e^{i\beta t}; \tag{17}$$

орбита в таком случае с возрастанием t приближается к логарифмической спирали. Если $\mu = 2$, то $(m-1)^2 = 0$ и

$$z = (A + Bt)\, e^{i\omega t}. \tag{18}$$

Хотя и возможен случай, как мы должны были ожидать, что цилиндр, имеющий с жидкостью одинаковую среднюю плотность, движется вместе с жидкостью по круговому пути, однако это движение, как только что было показано, будет неустойчивым.

Если имеется налицо радиально действующая сила, направление которой поворачивается вместе с жидкостью и которая дана формулой

$$X + iY = Re^{i\omega t}, \tag{19}$$

то уравнение (14) для $\mu = 2$ удовлетворяется, полагая

$$z = re^{i\omega t}, \tag{20}$$

если только

$$\ddot{r} = \frac{1}{2}\frac{R}{M'}. \tag{21}$$

Цилиндр может, таким образом, двигаться по отношению к вращающейся жидкости вдоль радиуса [1]), но это движение должно быть опять классифицировано как неустойчивое [2]).

---

[1]) Ср. Taylor, см. сноску на стр. 295.

[2]) Некоторые случаи, в которых шар движется во вращающейся жидкости, были исследованы Прудманом, см. примечание выше; S. F. Grace, Proc R. S. A., CII, 89 (1922); Taylor, Proc. R. S. A., CII, 180 (1922).

Теперь предположим, что жидкость в невозмущенном состоянии находится в ламинарном движении, параллельном оси Ox с постоянным завихрением 2ω; функция тока выразится тогда так:

$$\psi_0 = \omega (y_0 + y)^2 = \frac{1}{2}\,\omega r^2 (1 - \cos 2\theta) + 2\omega y_0 r \sin\theta + \omega y_0^2. \tag{22}$$

При возмущенном движении относительно цилиндра будем иметь

$$\psi = \frac{1}{2}\,\omega r^2 - \frac{1}{2}\,\omega\left(r^2 - \frac{a^4}{r^2}\right)\cos 2\theta + 2\omega y_0 \left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta + \\ + \omega y_0^2 + \left(r - \frac{a^2}{r}\right)(\dot{x}_0 \sin\theta - \dot{y}_0 \cos\theta). \tag{23}$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = 2\omega\dot{y}_0 \left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta + \left(r - \frac{a^2}{r}\right)(\ddot{x}_0 \sin\theta - \ddot{y}_0 \cos\theta), \tag{24}$$

причем члены, которые не зависят от r и θ, опущены. Мы будем иметь, таким образом,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 2\omega\dot{y}_0 \left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta + \left(r + \frac{a^2}{r}\right)(\ddot{x}_0 \cos\theta + \ddot{y}_0 \sin\theta). \tag{25}$$

Для $r = a$ согласно формуле (23) имеем

$$\frac{\partial\psi}{r\,\partial\theta} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = -\omega a + 4\omega a \sin^2\theta + 4\omega y_0 \sin\theta + 2(\dot{x}_0 \sin\theta - \dot{y}_0 \cos\theta), \tag{26}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2}\,q^2 = -4\omega^2 a y_0 \sin\theta - 2\omega a\,(\dot{x}_0 \sin\theta - \dot{y}_0 \cos\theta) + \\ + 16\omega^2 a y_0 \sin^3\theta + 8\omega a y_0 (\dot{x}_0 \sin^2\theta - \dot{y}_0 \sin^2\theta \cos\theta) + \ldots, \tag{27}$$

при этом сохранены только те члены, которые входят в выражение результирующей силы давления на цилиндр. Подставляя это выражение в (4), для $r = a$ получим

$$\frac{p}{\varrho} = a(\ddot{x}_0 \cos\theta + \ddot{y}_0 \sin\theta) + 2\omega a\dot{x}_0 (\sin\theta - 4\sin^3\theta) + \\ + 2\omega a\dot{y}_0 (\cos\theta + 4\sin^2\theta \cos\theta) + 4\omega^2 a y_0 (\sin\theta - 4\sin^3\theta) + \ldots \tag{28}$$

Отсюда следует [1])

$$\left.\begin{aligned} -\int_0^{2\pi} p\cos\theta a\,d\theta &= -M'(\ddot{x}_0 + 4\omega\dot{y}_0), \\ -\int_0^{2\pi} p\sin\theta a\,d\theta &= -M'(\ddot{y}_0 - 4\omega\dot{x}_0 - 8\omega^2 y_0). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

[1]) Ср. Taylor, см. примечание на стр. 295.

Если мы опустим значки, то уравнения движения цилиндра будут

$$\left.\begin{aligned} \mu\ddot{x} + 4\omega\dot{y} &= \frac{X}{M'}, \\ \mu\ddot{y} - 4\omega\dot{x} - 8\omega^2 y &= \frac{Y}{M'}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Мы замечаем, что цилиндр может оставаться в относительном равновесии, если на него будет действовать сила

$$Y = -8\omega^2 M' y = 4\omega M' U = 2\varkappa\varrho U, \tag{31}$$

где $U = -2\omega y$ есть скорость невозмущенного течения на уровне центра и $\varkappa = 2\pi a\omega$ есть циркуляция непосредственно вокруг цилиндра. Этот результат может быть сопоставлен с выражением (6) § 69.

Из уравнений (30) легко найти, что траектория для $\mu < 2$, при отсутствии внешних сил, есть трохоида, общее поступательное перемещение которой параллельно течению.

§ 160. В § 80 было указано, что движение несжимаемой жидкости в кривом слое малой и одинаковой толщины вполне определяется функцией тока ψ, так что всякая кинематическая задача этого рода может быть проектированием преобразована в задачу плоского слоя. Если, далее, отображение будет „ортоморфным", то кинетические энергии соответствующих частиц жидкости и циркуляции по соответствующим замкнутым кривым для обоих движений будут равны. Из этого второго утверждения следует, что вихри преобразуются в вихри равного напряжения. Из § 145 следует сейчас же, что для случая *замкнутой* односвязной поверхности алгебраическая сумма напряжений всех наличных вихрей равна нулю.

Мы можем применить вышеизложенное к движению в сферическом слое. Простейший случай — это тот, когда пара изолированных вихрей находится в диаметрально противоположных точках; линии тока будут тогда малые параллельные круги, а скорость будет обратно пропорциональна радиусу круга. Для пары вихрей, которые находятся в двух произвольных точках A и B, линии тока будут окружности с общей осью, как и в § 80. Методом стереографической проекции легко найти, что скорость произвольной точки P есть результирующая из двух скоростей

$$\frac{\varkappa}{2\pi a}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta_1 \quad \text{и} \quad \frac{\varkappa}{2\pi a}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta_2$$

которые перпендикулярны соответственно к дугам большого круга AP и BP; θ_1 и θ_2 означают длины этих дуг, a — радиус круга и $\pm\varkappa$ — напряжения вихрей. Центр [1]) (см. § 154) каждого вихря движется со скоростью $\frac{\varkappa}{2\pi a}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\,AB$ перпендикулярно к AB. Оба вихря, таким образом, описывают параллельные и одинаковые малые круги, оставаясь всегда на постоянном расстоянии друг от друга.

---

[1]) Чтобы предупредить возможное непонимание, заметим, что центры соответствующих вихрей не обязательно должны быть в соответствующих точках. Траектории этих центров, вообще говоря, не являются проекциями друг друга.

Круговые вихри

§ 161. Рассмотрим теперь случай, когда все вихри, имеющиеся в жидкости (которую опять считаем безграничной), суть круговые и имеют ось x в качестве общей оси. Пусть $\widetilde{\omega}$ означает расстояние произвольной точки P от этой оси, v — скорость в направлении $\widetilde{\omega}$ и ω — результирующее завихрение в P. Очевидно тогда u, v, ω суть функции только от x и $\widetilde{\omega}$.

При этих условиях существует функция тока, определенная, как и в § 94; именно мы будем иметь

$$u = -\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\widetilde{\omega}}, \qquad v = \frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial x}; \tag{1}$$

отсюда

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial\widetilde{\omega}} = \frac{1}{\widetilde{\omega}}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\widetilde{\omega}^2} - \frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\widetilde{\omega}}\right). \tag{2}$$

Из выражения (7) § 148 легко видеть, что вектор (F, G, H) при настоящих условиях всегда перпендикулярен к оси x и радиусу $\widetilde{\omega}$. Если мы обозначим через S величину этого вектора, то поток его через круг $(x, \widetilde{\omega})$ будет равен $2\pi\widetilde{\omega}S$, отсюда следует, что

$$\psi = -\widetilde{\omega}S. \tag{3}$$

Значение ψ в точке $(x, \widetilde{\omega})$, которое обусловлено одной вихревой нитью с циркуляцией $\varkappa$ и координатами x', $\widetilde{\omega}'$ (заметим, что элемент вихревой нити имеет длину $\widetilde{\omega}'\,\delta\theta$, где θ означает угол элемента с направлением S), согласно (1) § 149 будет

$$\psi = -\widetilde{\omega}S = -\frac{\varkappa\widetilde{\omega}\widetilde{\omega}'}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{r}\,d\theta, \tag{4}$$

где

$$r = \left\{(x-x')^2 + \widetilde{\omega}^2 + \widetilde{\omega}'^2 - 2\widetilde{\omega}\widetilde{\omega}'\cos\theta\right\}^{1/2}. \tag{5}$$

Обозначив через r_1 и r_2 соответственно наименьшее и наибольшее расстояния точки P от точек вихря:

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= (x-x')^2 + (\widetilde{\omega}-\widetilde{\omega}')^2, \\ r_2^2 &= (x-x')^2 + (\widetilde{\omega}+\widetilde{\omega}')^2, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

будем иметь

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= r_1^2\cos^2\frac{1}{2}\theta + r_2^2\sin^2\frac{1}{2}\theta, \\ 4\widetilde{\omega}\widetilde{\omega}'\cos\theta &= r_1^2 + r_2^2 - 2r^2 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

и, следовательно,

$$\psi = -\frac{\varkappa}{8\pi}\left[(r_1^2+r_2^2)\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{r_1^2\cos^2\frac{1}{2}\theta+r_2^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}} - 2\int_0^{\pi}\sqrt{r_1^2\cos^2\frac{1}{2}\theta+r_2^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}\,d\theta\right]. \qquad (8)$$

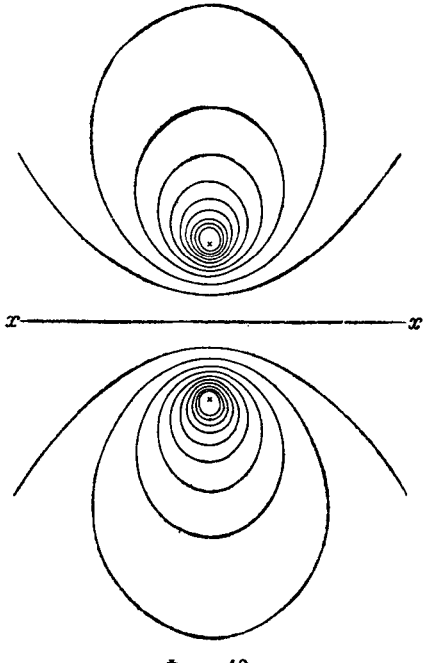
Интегралы принадлежат к типу, известному из теории „арифметически-геометрического среднего“ [1]). В обычном, недостаточно симметрическом способе обозначения полного эллиптического интеграла имеем

$$\psi = -\frac{\varkappa}{2\pi}(\widetilde{\omega}\,\widetilde{\omega}')^{1/2}\left\{\left(\frac{2}{k}-k\right)F_1(k)-\frac{2}{k}E_1(k)\right\}, \qquad (9)$$

где

$$k^2 = 1-\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{4\widetilde{\omega}\,\widetilde{\omega}'}{(x-x')^2+(\widetilde{\omega}+\widetilde{\omega}')^2}. \qquad (10)$$

Значение ψ в какой-нибудь данной точке можно, таким образом, вычислить с помощью лежандровых таблиц.



Фиг. 40.

Преобразование Ландена [2]) дает более изящное выражение для ψ

$$\psi = -\frac{\varkappa}{2\pi}(r_1+r_2)\times \{F_1(\lambda)-E_1(\lambda)\}, \qquad (11)$$

где

$$\lambda = \frac{r_2-r_1}{r_2+r_1}. \qquad (12)$$

Вид линий тока для равноотстоящих значений ψ показывает фнг. 40. Они нарисованы по методу, который, так же как и формула (11), принадлежит Максвеллу [3]).

Выражения для потенциала скоростей и функции тока могут быть также получены в виде определенных интегралов, содержащих бесселевы функции.

Если мы для этой цели предположим, что вихрь занимает положение окружности $x=0$, $\widetilde{\omega}=a$, то, очевидно, части положительной стороны плоскости $x=0$, лежащие вну-

[1]) См. Cayley, Elliptic Functions, Cambridge (1876), гл. XIII.
[2]) См. Cayley, см. сноску [1]).
[3]) Maxwell, Electricity and Magnetism, § 704, 705; см. также Minchin Phil. Mag. (5) (1893); Nagaoka, Phil. Mag. (6), VI (1903).

три и вне этого круга, образуют две различные эквипотенциальные поверхности.

Предполагая, что

$$\varphi = \frac{1}{2}\varkappa \quad \text{для} \quad x=0,\ \widetilde{\omega} < a,$$

$$\varphi = 0 \quad \text{для} \quad x=0,\ \widetilde{\omega} > a,$$

получим из (2) § 102

$$\varphi = \frac{1}{2}\varkappa a \int_0^\infty e^{-kx} J_0(k\widetilde{\omega})\, J_1(ka)\, dk, \tag{13}$$

и, следовательно, в согласии с уравнением (5) § 100

$$\psi = -\frac{1}{2}\varkappa a\widetilde{\omega} \int_0^\infty e^{-kx} J_1(k\widetilde{\omega})\, J_1(ka)\, dk. \tag{14}$$

Эти формулы относятся, конечно, к области $x > 0$ [1]).

В § 150 было показано, что значение φ таково, как если бы оно зависело от некоторой системы дублетов, распределенных с равномерной плотностью $\varkappa$ на внутренней части окружности. Значения φ и ψ при равномерном распределении *простых* источников по этой поверхности были даны в выражениях (11) § 102. Формулы (13) и (14) могут быть получены отсюда дифференцированием по x и подходящим выбором постоянного множителя [2]).

§ 162. Энергия произвольной системы круговых вихрей с осью x в качестве общей оси представляется после интегрирования по частям формулой

$$T = \pi\varrho \iint (u^2+v^2)\,\widetilde{\omega}\, dx\, d\widetilde{\omega} = \pi\varrho \iint \left(v\frac{\partial\psi}{\partial x} - u\frac{\partial\psi}{\partial\widetilde{\omega}}\right) dx\, d\widetilde{\omega} =$$

$$= -\pi\varrho \iint \psi\omega\, dx\, d\widetilde{\omega} = -\pi\varrho \sum \varkappa\psi, \tag{1}$$

так как члены, проинтегрированные по частям, на границах обращаются в нуль. Через $\varkappa$ мы обозначили здесь напряжение $\omega\,\delta x\,\delta\widetilde{\omega}$ элементарной вихревой нити.

Далее, формула (7) § 153 напишется теперь [3])

$$T = 2\pi\varrho \iint (\widetilde{\omega}u - xv)\,\widetilde{\omega}\omega\, dx\, dy = 2\pi\varrho \sum \varkappa\widetilde{\omega}\,(\omega u - xv) \tag{2}$$

---

[1]) Формула для ψ имеется у Basset, Hydrodynamics, II, 93, см. также Nagaoka, см. выше.

[2]) Другие выражения для φ и ψ могут быть получены с помощью сферической функции. Так, значение φ дано у Thomson и Tait, § 546, а значение ψ может быть выведено из формулы (11) и (12) § 95 нашей книги. Выражение в эллиптических интегралах, однако, наиболее пригодно для всякого рода интерпретаций.

[3]) В какой-либо точке плоскости $z=0$ имеем $y=\widetilde{\omega}$, $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=\frac{1}{2}\omega$, $v=\nu$; остальное следует из соображений симметрии.

Импульс системы сводится, очевидно, к силе, действующей вдоль Ox. Согласно формуле (6) § 152 имеем

$$P=\frac{1}{2}\varrho\iiint(y\zeta-z\eta)\,dx\,dy\,dz=\pi\varrho\iint\widetilde{\omega}^2\widetilde{\omega}\,dx\,d\widetilde{\omega}=$$
$$=\pi\varrho\sum\varkappa\widetilde{\omega}^2. \tag{3}$$

Если мы введем символы x_0 и $\widetilde{\omega}_0$, определяемые уравнениями

$$x_0=\frac{\sum\varkappa\widetilde{\omega}^2x}{\sum\varkappa\widetilde{\omega}^2},\quad \widetilde{\omega}_0^2=\frac{\sum\varkappa\widetilde{\omega}^2}{\sum\varkappa}, \tag{4}$$

то обе эти величины определяют окружность, положение которой, очевидно, зависит от напряжений и положений вихрей, но не от положения начала на оси симметрии. Эту окружность можно назвать „круговой“ осью всей системы вихревых колец.

Так как $\varkappa$ постоянна для каждого вихря, то из постоянства импульса согласно (3) и (4) следует, что круговая ось обладает постоянным радиусом. Чтобы найти ее движение параллельно оси x, мы воспользуемся уравнением

$$\sum\varkappa\widetilde{\omega}_0^2\frac{dx_0}{dt}=\sum\varkappa\widetilde{\omega}^2\frac{dx}{dt}+2\sum\varkappa\widetilde{\omega}x\frac{d\widetilde{\omega}}{dt}=\sum\varkappa\widetilde{\omega}(\widetilde{\omega}u+2xv), \tag{5}$$

которое следует из (4). С помощью формулы (2) мы можем теперь уравнение (5) привести к виду

$$\sum\varkappa\widetilde{\omega}_0^2\frac{dx_0}{dt}=\frac{T}{2\pi\varrho}+3\sum\varkappa(x-x_0)\widetilde{\omega}v; \tag{6}$$

здесь исчезают дополнительные члены, так как $\sum\varkappa\widetilde{\omega}v=0$ вследствие постоянства среднего радиуса $\widetilde{\omega}_0$.

§ 163. Рассмотрим, в частности, случай изолированного вихревого кольца, размеры поперечных сечений которого сравнительно с радиусом $\widetilde{\omega}_0$ очень малы. Было уже показано, что

$$\psi=-\frac{1}{\pi}\iint\left\{F_1\left(\frac{r_2-r_1}{r_2+r_1}\right)-E_1\left(\frac{r_2-r_1}{r_2+r_1}\right)\right\}(r_1+r_2)\,\omega'\,dx'\,d\widetilde{\omega}'; \tag{1}$$

входящие здесь величины r_1, r_2 определены формулами (6) § 161. Для точек $(x, \widetilde{\omega})$ в области вихря или вблизи него отношение r_1 к r_2 будет мало, и модуль λ эллиптического интеграла поэтому близок к единице. Мы имеем тогда приближенно [1])

$$\left.\begin{aligned}F_1(\lambda)&=\frac{1}{2}\ln\frac{16}{\lambda'^2},\\ E_1(\lambda)&=1,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

[1]) См. Cayley, Elliptik Funktions, § 72, 77; Maxwell, см. выше.

где λ' обозначает дополнительный модуль, т. е.

$$\lambda'^2 = 1 - \lambda^2 = \frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2}, \qquad (3)$$

или приближенно

$$\lambda'^2 = \frac{4r_1}{r_2}.$$

Для точек, лежащих внутри самого вихря, значение ψ, таким образом, будет порядка $\varkappa\widetilde{\omega}_0 \ln \frac{\widetilde{\omega}_0}{\varepsilon}$, где ε есть малая линейная величина порядка размера поперечного сечения. Компоненты скорости в таких точках зависят (см. § 94) от производных функции ψ и будут порядка $\frac{\varkappa}{\varepsilon}$.

Мы можем теперь оценить величину скорости поступательного движения $\frac{dx_0}{dt}$ вихревого кольца. Согласно (1) § 162 T есть величина порядка $\varrho\varkappa^2\widetilde{\omega}_0 \ln \frac{\widetilde{\omega}_0}{\varepsilon}$, v есть, как мы видели, порядка $\frac{\varkappa}{\varepsilon}$, в то время как $x - x_0$ — величина порядка ε. Поэтому второй член в правой части формулы (6) предыдущего параграфа в рассматриваемом случае мал сравнительно с первым членом, и скорость поступательного движения кольца будет порядка $\frac{\varkappa}{\widetilde{\omega}_0} \ln \frac{\widetilde{\omega}_0}{\varepsilon}$ и приблизительно постоянна.

Изолированное вихревое кольцо движется, таким образом без заметного изменения формы параллельно своей прямолинейной оси с приблизительно постоянной скоростью. Эта скорость мала по сравнению со скоростью жидкости в непосредственном соседстве с круговой осью, но она может быть больше или меньше чем $\frac{1}{2}\frac{\varkappa}{\widetilde{\omega}_0}$, т. е. скорости жидкости в центре кольца, с которой она совпадает по направлению.

Для случая *круглого* поперечного сечения более определенные результаты могут быть получены следующим образом. Если мы пренебрежем изменениями $\widetilde{\omega}$ и ω внутри поперечного сечения, то формулы (1) и (2) дадут

$$\psi = -\frac{\omega}{2\pi}\widetilde{\omega}_0 \iint \left(\ln \frac{8\widetilde{\omega}_0}{r_1} - 2\right) dx'\, d\widetilde{\omega}',$$

или, если введем полярные координаты (s, χ) в плоскости поперечного сечения, то

$$\psi = -\frac{\omega}{2\pi}\widetilde{\omega}_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} \left(\ln \frac{8\widetilde{\omega}_0}{r_1} - 2\right) s'\, ds'\, d\chi', \qquad (4)$$

где a есть радиус поперечного сечения. Теперь имеем

$$\int_0^{2\pi} \ln r_1\, d\chi' = \int_0^{2\pi} \ln \{ s^2 + s'^2 - 2ss' \cos(\chi - \chi') \}^{1/2} d\chi',$$

и этот определенный интеграл, как известно, равен $2\pi \ln s'$ или $2\pi \ln s$, смотря по тому, $s' \gtrless s$. Отсюда для точек внутри поперечного сечения будем иметь

$$\psi = -\omega\tilde{\omega}_0 \int_0^s \left(\ln \frac{8\tilde{\omega}_0}{s} - 2\right) s'\,ds' - \omega\tilde{\omega}_0 \int_s^a \left(\ln \frac{8\tilde{\omega}_0}{s'} - 2\right) s'\,ds' =$$

$$= -\frac{1}{2}\omega\tilde{\omega}_0 a^2 \left\{ \ln \frac{8\tilde{\omega}_0}{a} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{s^2}{a^2} \right\}. \qquad (5)$$

Единственный переменный член здесь есть $^1/_4\ \omega\tilde{\omega}_0 s^2$; это показывает, что при *нашей степени приближения* линии тока внутри поперечного сечения образуют концентрические окружности, причем скорость на расстоянии s от центра равна $^1/_2\ \omega s$.

Если мы подставим полученное выражение в формулу (1) § 62, то найдем

$$\frac{T}{2\pi\varrho} = -\frac{1}{2}\omega \int_0^a \int_0^{2\pi} \psi s\,ds\,d\chi = \frac{\varkappa^2\tilde{\omega}_0}{4\pi}\left\{ \ln \frac{8\tilde{\omega}_0}{a} - \frac{7}{4} \right\}. \qquad (6)$$

Последний член в формуле (6) § 162 равен

$$\frac{3}{2}\tilde{\omega}_0\omega \sum \varkappa (x - x_0)^2;$$

при принятом обозначении это равно $\frac{3}{8}\varkappa^2 \frac{\tilde{\omega}_0}{\pi}$, причем $\varkappa$ означает напряжение всего вихря. Таким образом формула для поступательной скорости вихря теперь напишется [1])

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{\varkappa}{4\pi\tilde{\omega}_0}\left\{ \ln \frac{8\tilde{\omega}_0}{a} - \frac{1}{4} \right\}. \qquad (7)$$

Вихревое кольцо влечет за собой в своем движении некоторое количество жидкости, двигающейся безвихревым образом; ср. § 155, п. 2. Согласно формуле (7) поступательная скорость вихря будет равна скорости жидкости в центре, если имеем приблизительно $\frac{\tilde{\omega}_0}{a} = 86$. Сопровождающая масса будет кольцеобразной или нет, смотря по тому, будет ли значение $\frac{\tilde{\omega}_0}{a}$ больше или меньше критического значения.

Отношение скорости жидкости на окружности вихря к скорости в центре кольца равно $\frac{2\omega a\tilde{\omega}_0}{\varkappa}$ или $\frac{\tilde{\omega}_0}{\pi a}$. Для $a = \frac{1}{100}\tilde{\omega}_0$ это число приблизительно равно 32.

Условия, при которых вихревое кольцо *конечного* поперечного сечения с равномерным завихрением может перемещаться не изменяясь, были исследованы Лихтенштейном [2]). Форма поперечного сечения, если оно мало, ока-

---

[1]) Этот результат был дан без доказательства Томсоном в прибавлении к переводу работы Гельмгольца, Phil. Mag. (4), XXXIII, 511 (1867) [Papers, IV, 67]. Он был подтвержден Hicks, Phil. Trans, A, CLXXVI, 756 (1885); см. также Gray, Notes on Hydrodynamics Phil. Mag. (6), XXVIII, 13 (1914).

[2]) Math. Zeitsch., XXIII, 89, 310 (1925); см. также его Grundlagen der Hydrodynamik, Berlin (1929).

зывается приближенно эллиптической с меньшей осью, совпадающей с направлением поступательного движения. Он также исследовал аналогичный вопрос и по отношению к вихревой паре (§ 155).

§ 164. Если мы имеем произвольное число круговых вихревых колец — безразлично соосных или нет, — то движение каждого из них может быть представлено как состоящее из двух частей, из которых одна зависит от рассматриваемого кольца, в то время как другая зависит от влияния других колец.

Только что приведенные соображения показывают, что вторая часть сравнительно с первой незначительна, за исключением случая, когда два или несколько колец подходят друг к другу очень близко. Всякое кольцо, таким образом, будет двигаться без заметного изменения вида и размеров с приблизительно постоянной скоростью в направлении своей прямолинейной оси, до тех пор пока оно не подойдет на близкое расстояние ко второму кольцу.

Общее представление относительно последствий встречи двух вихревых колец можно в частных случаях получить из результатов, данных в (3) § 149. Так, например, предположим, что мы имеем два круговых кольца с одной и той же осью. Если направление вращения в обоих случаях одно и то же, той оба кольца будут перемещаться, как целое, в том же самом направлении.

Действие их взаимного влияния состоит в том, что радиус вихря, идущего впереди, увеличивается, а следующего за ним уменьшается. Как только радиус впереди идущего кольца сделается больше радиуса следующего за ним, то движение впереди идущего кольца замедляется, а другого (идущего за ним) ускоряется. При благоприятных соотношениях между формой, а также и интенсивностью обоих колец может, таким образом, случиться, что второе кольцо нагонит первое и пройдет через него. Тогда оба кольца изменят свои роли; кольцо, которое сделалось теперь вторым, с своей стороны нагонит другое и пройдет через него; кольца таким образом попеременно постоянно будут проходить одно через другое [1]).

Если оба кольца имеют противоположные направления вращения, то они приближаются друг к другу, и их взаимное влияние состоит в том, что радиусы обоих возрастают. Если оба кольца имеют кроме того одинаковые напряжения и форму, то скорость приближения будет непрерывно уменьшаться. В этом случае движение во всех точках плоскости, которая параллельна обоим кольцам и делит пополам расстояние между ними, тангенциально к этой плоскости. Мы можем, если пожелаем, эту плоскость рассматривать как твердую границу для жидкости с одной из обеих ее сторон и получить тогда случай од-

---

[1]) Ср. Hicks, On the Mutual Threading of Vortex-Rings. Proc. Roy. Soc. A., CII, 111 (1922). Соответствующий двухмерный случай был исследован и проиллюстрирован графически Gröbli, см. примечание на стр. 281; см. также Love, On the Motion of Paired Vortices with a Common Axis, Proc. Lond. Math. Soc., XXV, 185 (1894) и Hicks, см. выше.

ного вихревого кольца, которое движется к неподвижной твердой стенке.

Только что сделанные замечания заимствованы из работы Гельмгольца. Он в заключение к этому еще указал, что взаимное влияние вихревых колец легко можно изучать экспериментально в случае приблизительно полукруглых колец, которые появляются, когда концом ковша быстро проводят по свободной поверхности жидкости на протяжении короткого расстояния, причем места, в которых вихревые нити встречают поверхность, оказываются отмеченными небольшими углублениями (ср. § 27). Метод демонстративных опытов с помощью дымовых колец [1]) слишком известен, чтобы описывать его здесь подробно.

Прекрасный вариант опыта состоит в образовании колец в воде, при этом завихренную жидкость подкрашивают [2]).

Движение вихревого кольца в жидкости, которая (внутри или снаружи) ограничена неподвижной сферической поверхностью для случая, когда прямолинейная ось кольца проходит через центр шара, было исследовано Леви [3]) с помощью метода зеркальных изображений. Следующее упрощенное доказательство принадлежит Лармору [4]). Вихревое кольцо эквивалентно (§ 150) сферическому слою дублетов с равномерно распределенной плотностью, который концентричен твердой сфере. Зеркальное изображение этого слоя согласно § 96 есть другой концентрический однородный двойной слой, который, с своей стороны, эквивалентен вихревому кольцу, соосному с первым. Из только что названных параграфов легко получается теперь, что напряжения $(\varkappa, \varkappa')$ и радиусы $(\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}')$ вихревого кольца и его изображения связаны соотношением

$$\varkappa\widetilde{\omega}^{1/2} + \varkappa'\widetilde{\omega}^{1/2} = 0. \tag{1}$$

Рассуждение, очевидно, годится также для случая замкнутого вихря произвольной формы, если только он лежит на сфере, концентрической к границе.

Интерес, который вызвала устойчивая конфигурация кармановской системы вихрей малого сечения (§ 156), побудил к исследованию аналогичных конфигураций в трехмерном пространстве.

Рассматривая сначала ряд равных вихревых колец бесконечно малого поперечного сечения, нанизанных на равных интервалах на общую ось, Леви и Форсдайк [5]) нашли, что конфигурация эта будет неустойчивой для того типа возмущений, когда радиусы и интервалы изменяются одновременно, причем кольца остаются строго плоскими и круговыми. С другой стороны, для случая, когда отношение интервала между двумя последовательными кольцами к общему радиусу превышает 1,20, становятся возможными периодические

---

[1]) Reusch, Über Ringbildung der Flüssigkeiten, Pgog. Ann., CX (1860); Tait, Recent Advances in Physical Science, London, 1876, гл. XII.

[2]) Reynolds, On the Resistance encountered by Vortex Rings etc., Brit. Ass. Rep., 1876; Nature, XIV, 477.

[3]) Lewis, On the Images of Vortices in a Spherical Vessel, Quart. Journ Math., XVI, 338 (1879).

[4]) Larmor, Electro-Magnetic and other Images in Spheres and Planes Quart. Journ. Math., XXIII, 94 (1889).

[5]) Levi and Forsdyke, Proc. Roy. Soc. A., CXIV, 594; A., CXVI 352 (1927).

отклонения от круговой формы, т. е. тот тип возмущений, который был исследован Томсоном и Дисоном для случая изолированного кольца [1]).

Далее, они изучали случай винтового вихря [2]). Будучи невозмущен, этот вихрь имеет определенную угловую скорость относительно своей оси и некоторую поступательную скорость. Они нашли, что устойчивость будет тогда и только тогда, когда шаг винта превышает 0,3.

Условия стационарного движения

§ 165. В случае стационарного движения, т. е. когда

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t}=0, \qquad \frac{\partial w}{\partial t}=0,$$

уравнения (2) § 6 могут быть представлены в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}-(v\zeta-w\eta)&=-\frac{\partial\Omega}{\partial x}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Если положить, как в § 146,

$$\chi'=\int\frac{dp}{\varrho}+\frac{1}{2}q^2+\Omega, \tag{2}$$

то будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\chi'}{\partial x}&=v\zeta-w\eta,\\ \frac{\partial\chi'}{\partial y}&=w\xi-u\zeta,\\ \frac{\partial\chi'}{\partial z}&=u\eta-v\xi.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Отсюда следует

$$u\frac{\partial\chi'}{\partial x}+v\frac{\partial\chi'}{\partial y}+w\frac{\partial\chi'}{\partial z}=0,$$
$$\xi\frac{\partial\chi'}{\partial x}+\eta\frac{\partial\chi'}{\partial y}+\zeta\frac{\partial\chi'}{\partial z}=0,$$

так что каждая из поверхностей $\chi'=\text{const}$. содержит как линии тока, так и вихревые линии. Если, далее, обозначить через δn элемент нормали в произвольной точке такой поверхности, то будем иметь

$$\frac{\partial\chi'}{\partial n}=q\omega\sin\beta, \tag{4}$$

где q есть скорость течения, ω — модуль вихря и β — угол между линией тока и вихревой линией в этой точке.

Таким образом условие того, что данное состояние движения жидкости могло бы быть возможным состоянием стационарного движения, состоит в следующем: должно быть возможным провести в жид-

[1]) См. ссылку на стр. 311.
[2]) Proc. Roy. Soc. A., CXX, 670 (1928).

кости бесконечную систему поверхностей, из которых каждая покрыта сеткой линий тока и вихревых линий, и произведение $q\omega \sin\beta\, \delta n$ на каждой из таких поверхностей должно быть постоянно, при этом δn означает длину отрезка нормали между соседними поверхностями системы [1]).

Эти условия получаются также из соображения, что при стационарном движении линии тока совпадают с действительными траекториями частиц, затем, что произведение угловой скорости на поперечное сечение для всех точек вихря имеет одинаковое значение и что это произведение для одного и того же вихря не зависит от времени.

Положение, что функция χ', определенная с помощью выражения (2), на всякой поверхности только что рассмотренного вида постоянна, представляет обобщение высказанной в § 21 теоремы о том, что χ' постоянно вдоль линии тока.

Вышеизложенные условия во всех случаях безвихревого движения выполняются тождественно, если только граничные условия совместимы со стационарным движением.

При движении жидкости в двух измерениях (xy) произведение $q\,\delta n$ постоянно вдоль линии тока, и вышеуказанные условия приводятся тогда к одному условию, что модуль вихря ζ должен быть постоянным вдоль каждой линии тока или, согласно (5) § 59, что должно иметь место уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=f(\psi), \tag{5}$$

где $f(\psi)$ есть произвольная функция от ψ [2]).

Это условие всякий раз выполняется, например, когда имеет место движение по концентрическим окружностям вокруг начала. Другое, очевидное решение уравнения (5) есть

$$\psi=\frac{1}{2}\,(Ax^2+2Bxy+Cy^2); \tag{6}$$

в этом случае линиями тока будут подобные и соосные конические сечения. Угловая скорость во всякой точке равна $^1/_2\,(A+C)$ и, следовательно, будет постоянна.

Если положить, далее,

$$f(\psi)=-k^2\psi,$$

где k есть постоянная, и если ввести полярные координаты r, θ, то мы получим

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+k^2\psi=0; \tag{7}$$

этому уравнению удовлетворяют функции (§ 101)

$$\left.\begin{aligned}\psi&=CJ_s(kr)\cos s\theta,\\ \psi&=CJ_s(kr)\sin s\theta.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

---

[1]) См. Lamb, On the Conditions for Steady Motion of Fluid, Proc. Lond. Math. Soc. (1), IX, 91 (1878).

[2]) Ср. Lagrange, Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin, 1781, [Oeuvres IV, 720]; далее Stokes, On the Steady Motion of Incompressible Fluids, Camb. Trans., VII (1842) [Papers, I, 15].

Эти функции представляют различные решения, которые совместимы с твердой круглой границей радиуса a, причем допустимые значения k определяются из уравнения

$$J_s(ka) = 0. \tag{9}$$

Предположим, напрнмер, что в безграничной массе жидкости функция тока внутри круга $r = a$ дана с помощью

$$\psi = CJ_1(kr)\sin\theta, \tag{10}$$

а вне этого круга с помощью

$$\psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta. \tag{11}$$

Эти оба значения ψ совпадают при $r = a$, если $J_1(ka) = 0$. Кроме того, таигенциальная компонента скорости непрерывна на этой окружности, если только оба значения $\frac{\partial\psi}{\partial r}$ между собой равны, т. е. когда

$$C = \frac{2U}{kJ_1'(ka)} = -\frac{2U}{kJ_0(ka)}. \tag{12}$$

Если мы теперь сообщим всей системе скорость U параллельно Ox, то получим как бы цилиндрический вихрь, который движется со скоростью U в жидкости, покоящейся в бесконечности. Наименьшее из возможных значе нний k дано равенством $\frac{ka}{\pi} = 1{,}2197$; относительные линии тока *внутри* вихря показаны на второй фиг. 45, при условии, что пунктирная окружность принята в качестве границы ($r = a$). Согласно (1) § 157 легко показать, что „импульс" вихря равен $2\pi\varrho a^2U$.

В случае симметричного движения вокруг оси (например, оси x) выражение $q \cdot 2\pi\tilde{\omega}\,\delta n$ постоянно вдоль линии тока, причем $\tilde{\omega}$, как в § 94, обозначает расстояние произвольной точки от оси симметрии. Условие стационарного движения состоит тогда в том, что отношение $\frac{\omega}{\tilde{\omega}}$ должно быть постоянно вдоль каждой линии тока. Таким образом, если ψ есть функция тока, то согласно (2) § 161 должно иметь место следующее соотношение:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\tilde{\omega}^2} - \frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{\omega}} = \tilde{\omega}^2 f(\psi), \tag{13}$$

где $f(\psi)$ обозначает произвольную функцию от ψ [1]).

Интересный пример представляет сферический вихрь Хилла [2]). Если мы предположим, что для всех точек внутри шара $r = a$ имеет место соотношение

$$\psi = \frac{1}{2}A\tilde{\omega}^2(a^2 - r^2), \tag{14}$$

---

[1]) Этот результат принадлежит Стоксу, см выше.

[2]) Hill, On a Spherical Vortex, Phil. Trans. A, CLXXXV, 1894.

где $r^2 = x^2 + \widetilde{\omega}^2$, то формула (2) § 161 дает

$$\omega = -\frac{5}{2} A\widetilde{\omega},$$

так что условие для стационарного движения будет выполнено. Далее, принимая во внимание § 96 и 97, ясно, что безвихревое течение вокруг неподвижной сферической поверхности $r = a$ с общей скоростью $-U$ параллельно оси x выражается формулой

$$\psi = \frac{1}{2} U\widetilde{\omega}^2\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right). \tag{15}$$

Оба значения ψ совпадают для $r = a$; благодаря этому нормальная компонента скорости на обеих сторонах равна нулю. Для того чтобы тангенциальная скорость была непрерывна, значения $\frac{\partial\psi}{\partial r}$ должны также совпадать. Если принять во внимание, что

$$\widetilde{\omega} = r\sin\theta,$$

то из условия непрерывности $\frac{\partial\psi}{\partial r}$ будем иметь

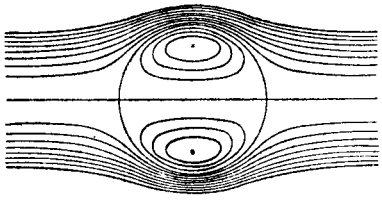
$$A = -\frac{3}{2}\frac{U}{a^2}$$

и, следовательно,

$$\omega = \frac{15}{2} U \frac{\widetilde{\omega}}{a^2}. \tag{16}$$

Сумма напряжений вихревых нитей, образующих сферический вихрь, равна $5Ua$.

Фиг. 41 показывает линии тока как внутри, так и вне вихря; они, как обычно, нарисованы для равноотстоящих значений ψ.



Фиг. 41.

Если мы всей системе сообщим скорость U параллельно оси x, то получим случай сферического вихря, который движется поступательно с постоянной скоростью U в жидкости, покоящейся в бесконечности.

С помощью формул § 162 мы легко найдем, что квадрат „среднего радиуса“ вихря равен $^2/_5\ a^2$, „импульс“ равен $2\pi\varrho a^3 U$, а энергия равна $^{10}/_7\ \pi\varrho a^3 U^2$.

Как уже было выяснено в § 146, совершенно не нужно вычислять формулы для давления, чтобы убедиться в его непрерывности на поверхности вихря. Непрерывность давления уже обеспечена непрерывностью скорости и постоянством циркуляции по всякой замкнутой движущейся кривой.

§ 166. Как было уже указано, теория вихревого движения была создана Гельмгольцем в 1858 г. Она привлекла еще больший интерес, когда в 1867 г. Кельвин предложил вихревую теорию атомов [1]). В качестве физической теории вихревая теория атомов уже давно

[1]) См. сноску на стр. 278.

оставлена, но она послужила поводом к ряду интересных исследований, на которые вкратце необходимо указать. Мы упомянем исследования, относящиеся к устойчивости и периодам колебаний прямолинейных [1]) и кольцеобразных [2]) вихрей, а также аналогичные исследования относительно полых вихрей (у которых вращающееся ядро заменено пустотой) [3]), и, наконец, вычисления формы пограничной поверхности для полого вихря, которая совместима со стационарным движением [4]). Сводка некоторых важнейших результатов дана Лявом [5]).

§ 166a. В данной главе все динамические теоремы имеют своей предпосылкой постоянство циркуляции по движущемуся контуру. Предполагалось (§ 146), что внешние силы суть консервативные, а также то, что жидкость либо однородна и несжимаема, либо подчинена определенному соотношению между давлением и плотностью.

Но, конечно, имеются многие естественные условия, в частности в метеорологии, когда эти предположения явно не выполняются. Если мы, следуя вычислениям § 33, не примем во внимание указанные допущения, то найдем, что скорость изменения циркуляции по движущемуся контуру будет

$$\frac{D}{Dt}\int (u\,dx+v\,dy+w\,dz)=-\int s\left(\frac{\partial p}{\partial x}\,dx+\frac{\partial p}{\partial y}\,dy+\frac{\partial p}{\partial z}\,dz\right), \qquad (1)$$

где $s=\frac{1}{\varrho}$ есть величина, обратная плотности жидкости, т. е. удельный объем. Криволинейный интеграл в правой части можно преобразовать по теореме Стокса в поверхностный интеграл — по какой-либо поверхности, опирающейся на контур; тогда получим

$$\frac{D}{Dt}\int (u\,dx+v\,dy+w\,dz)=\int (lP+mQ+nR)\,dS, \qquad (2)$$

где

$$P=\frac{\partial (p,s)}{\partial (y,z)}, \quad Q=\frac{\partial (p,s)}{\partial (z,x)}, \quad R=\frac{\partial (p,s)}{\partial (x,y)}. \qquad (3)$$

Теперь рассмотрим вектор, компоненты которого суть P, Q, R. Этот вектор является соленоидальным в силу соотношения

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0, \qquad (4)$$

---

[1]) W. Thomson, см. сноску на стр. 290.

[2]) J. J. Thomson, см. сноску на стр. 271, Dyson, Phil. Trans., A, CLXXXIV, 1041 (1893).

[3]) W. Thomson, см. выше; Hicks, On the Steady Motion and the Small Vibrations of a Hollow Vortex, Phil. Trans, 1884; Pocklington, The Complete System of the Periods of a Hollow Vortex-Ring, Phil. Trans. A, CLXXXVI, 603 (1895); Carslaw, The Fluted Vibrations of a circular Vortex-Ring with a Hollow Core, Proc. Lond. Math. Soc. XXVIII, 97 (1896).

[4]) Hicks, см. выше; Pocklington, Hollow Straight Vortices, Camb. Proc., VIII, 178 (1894).

[5]) Love, см. сноску на стр. 240.

и его направление определяется пересечением поверхностей $p = \text{const.}$, $s = \text{const.}$ Если мы теперь представим ряд поверхностей равного давления, проведенных для равных бесконечно малых интервалов δp, и аналогично ряд поверхностей равного удельного объема для бесконечно малых интервалов δs, то эти поверхности разделяют все поле на систему трубок, поперечное сечение которых суть бесконечно малые параллелограммы. Если $\delta\Sigma$ есть площадь одного из этих параллелограммов, то легко показать, что

$$\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\cdot\delta\Sigma = \delta p\,\delta s. \tag{5}$$

Отсюда следует, что произведение вектора (P, Q, R) на поперечное сечение не только постоянно вдоль какой-либо трубки, но и является одинаковым для всех трубок.

Уравнение (2) тогда показывает, что скорость изменения циркуляции по движущемуся контуру пропорциональна числу указанных трубок, им охватываемых [1]).

Преобразование Клебша

§ 167. Представляет некоторый интерес вопрос, о котором, однако, мы здесь можем только коротко сообщить: это вопрос о преобразовании Клебша [2]) гидродинамических уравнений.

Легко видеть, что компоненты скорости в произвольный момент могут быть выражены в форме

$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\mu}{\partial x},\quad v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\mu}{\partial y},\quad w = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\lambda\frac{\partial\mu}{\partial z}, \tag{1}$$

где φ, λ, μ суть функции от x, y, z при условии, что компоненты вихря могут быть представлены в форме

$$\xi = \frac{\partial(\lambda,\mu)}{\partial(y,z)},\quad \eta = \frac{\partial(\lambda,\mu)}{\partial(z,x)},\quad \zeta = \frac{\partial(\lambda,\mu)}{\partial(x,y)}. \tag{2}$$

Если мы предположим теперь, что дифференциальные уравнения вихревых линий

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} \tag{3}$$

---

[1]) V. Bjerknes, Vid.-Selsk. Skrifter, Kristiania, 1918. Независимое доказательство приписывается Зильберштейну (1896). Другая теорема с менее простым содержанием, указанная Бьеркнесом, относится к циркуляции количества движения

$$\int \varrho\,(u\,dx+v\,dy+w\,dz).$$

Некоторые применения этих теорем к метеорологическим и другим явлениям пояснены в Stockholm, Ak. Handl, XXXI (1898).

[2]) Clebsch, Über eine allgemeine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, Crelle, LIV (1857) и LVI (1859); см. также Hill, Quart. Journ. Math., XVII (1881) и Camb. Trans., XIV (1883).

проинтегрированы в форме

$$\alpha = \text{const.}, \quad \beta = \text{const.}, \tag{4}$$

где α, β означают функции от x, y, z, то мы должны иметь

$$\xi = P\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(y,z)}, \quad \eta = P\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(z,x)}, \quad \zeta = P\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(x,y)}, \tag{5}$$

где P есть определенная функция от x, y, z [1]). Подставляя выражения (5) в тождество

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0,$$

получим

$$\frac{\partial(P,\alpha,\beta)}{\partial(x,y,z)}=0, \tag{6}$$

которое показывает, что P имеет вид $f(\alpha,\beta)$. Если λ, μ будут обозначать две произвольные функции от α, β, то будем иметь

$$\frac{\partial(\lambda,\mu)}{\partial(y,z)}=\frac{\partial(\lambda,\mu)}{\partial(\alpha,\beta)}\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(y,z)} \quad \text{и т. д.;}$$

уравнения (5) будут сводиться тогда к виду (2), если только λ, μ выбраны таким образом, что удовлетворяется уравнение

$$\frac{\partial(\lambda,\mu)}{\partial(\alpha,\beta)}=f(\alpha,\beta). \tag{7}$$

Этот выбор может быть, очевидно, произведен бескоиечным числом способов.

Из формулы (2) тотчас же следует, что линии пересечения поверхностей

$$\lambda = \text{const.}, \quad \mu = \text{const.}$$

представляют собой вихревые линии. Это означает, что можно предположить относительно входящих в (1) функций λ, μ, что они меняются непрерывно в зависимости от t и именно так, что соответствующие поверхности движутся вместе с жидкостью [2]). Для этого факта были даны различные аналитические доказательства; простейшее, пожалуй, доказательство основывается на уравнениях (2) § 15; эти уравиения дают (как в § 17)

$$u\,dx+v\,dy+w\,dz=u_0\,da+v_0\,db+w_0\,dc-d\chi. \tag{8}$$

Было доказано, что мы сначала можем положить

$$u_0\,da+v_0\,db+w_0\,dc=-d\varphi_0+\lambda\,d\mu. \tag{9}$$

Отсюда следует, если мы примем во внимание изменение положения в момент t, что

$$u\,dx+v\,dy+w\,dz=-d\varphi+\lambda\,d\mu, \tag{10}$$

где $\varphi=\varphi_0+\chi$, а λ, μ имеют те же значения, как в (9), но только они выражены через x, y, z, t. Так как при лагранжевом методе независимые пространственные переменные связаны с индивидуальнымн частицами, то теорема этим самым доказана.

---

[1]) Ср. Forsyth, Differential Equations, § 174.

[2]) Не следует упускать из виду, что вследствие неполной определенности λ, μ эти функции могут непрерывно меняться с t, ие будучи связаны вместе с тем все время с одними и теми же частицами жидкости.

На основании этого соображения уравнения движения могут быть проинтегрированы тогда, когда внешние силы имеют потенциал и p есть функция только от ϱ. Мы имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2v\zeta + 2w\eta =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + \left(u\frac{\partial \lambda}{\partial x} + v\frac{\partial \lambda}{\partial y} + w\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial \mu}{\partial x} - \left(u\frac{\partial \mu}{\partial x} + v\frac{\partial \mu}{\partial y} + w\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \lambda\frac{\partial \mu}{\partial t}\right) + \frac{D\lambda}{Dt}\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{D\mu}{Dt}\frac{\partial \lambda}{\partial x}. \tag{11}$$

Отсюда следует, при сделанном предположении, что $\frac{D\lambda}{Dt} = 0$, $\frac{D\mu}{Dt} = 0$, и согласно (5), (6) § 146 получим

$$\int \frac{d\varrho}{\varrho} + \frac{1}{2}q^2 + \Omega = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \lambda. \tag{12}$$

Произвольная функция от t предполагается включенной в $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

Если на λ и μ не наложены вышеуказанные условия, то, полагая

$$H = \int \frac{dp}{\varrho} + \frac{1}{2}q^2 + \Omega - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \lambda\frac{\partial \mu}{\partial t}, \tag{13}$$

получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{D\lambda}{Dt}\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{D\mu}{Dt}\frac{\partial \lambda}{\partial x} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{D\lambda}{Dt}\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{D\mu}{Dt}\frac{\partial \lambda}{\partial y} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \\ \frac{D\lambda}{Dt}\frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{D\mu}{Dt}\frac{\partial \lambda}{\partial z} &= -\frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial (H, \lambda, \mu)}{\partial (x, y, z)} = 0, \tag{15}$$

а это показывает, что H есть выражение вида $f(\lambda, \mu, t)$ и

$$\frac{D\lambda}{Dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mu}, \quad \frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}\ ^{1}). \tag{16}$$

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ПРИЛИВНЫЕ ВОЛНЫ

§ 168. Одно из наиболее интересных и плодотворных применений гидродинамической теории представляют малые колебания, которые совершает жидкость со свободной поверхностью под действием тяжести. В некоторых случаях, которые с теоретической точки зрения представляют до некоторой степени частные случаи, но практически особенно важны, эти колебания могут в комбинации образовать прогрессивные волны, которые (в первом приближении), не меняя своего вида, движутся поступательно на поверхности.

[1]) Автору было сообщено, что эти уравнения были даны в диссертации F. Stuart (Dublin, 1900).

Выражение „приливные волны" применялось в различном смысле, но наиболее естественно ограничить его применение теми колебаниями, зависящими от тяжести, которые обладают характерными чертами морских приливов, происходящих под влиянием солнца и луны. Поэтому указанное выражение мы и выбрали в качестве заглавия настоящей главы, где будут рассматриваться волны, при которых движение жидкости происходит в основном горизонтально и, следовательно (как мы это увидим), для всех частиц, лежащих на одной и той же вертикали, практически будет одинаковым. Это последнее обстоятельство существенно упрощает теорию.

Необходимо напомнить сначала некоторые теоремы общей теории малых колебаний, которые в последующих исследованиях постоянно будут находить свое применение [1]). Теория относится главным образом к системе с конечным числом степеней свободы, но результаты сохраняют свое значение (если их соответственно истолковать) также и при отсутствии этого ограничения [2]).

Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ суть обобщенные координаты, определяющие положение динамической системы, и пусть они выбраны таким образом, что для положения равновесия они обращаются в нуль. Кинетическая энергия есть однородная квадратичная функция обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$:

$$2T = a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + \ldots + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \ldots, \qquad (1)$$

где коэфициенты в общем случае суть функции координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$, а в случае *малых* движений могут рассматриваться как постоянные, имеющие как раз те значения, которые соответствуют $q_1, q_2, \ldots, q_n = 0$. Далее, если система, как мы и будем считать, „консервативна", то потенциальная энергия V малого перемещения есть однородная квадратичная функция компонент перемещения $q_1, q_2, \ldots, q_n$

$$2V = c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2 + \ldots + 2c_{12}q_1q_2 + \ldots, \qquad (2)$$

причем коэфициенты в том же смысле, как и выше величины a_{ik}, могут рассматриваться как постоянные.

При помощи действительного [3]) линейного преобразования координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$ можно представить T и V одновременно как суммы квадратов; новые координаты, введенные таким образом, назы-

---

[1]) Более полное изложение теории можно найти у Thomsona. Tait, § 337, ..., Релей, Теория звука, т. I, гл. IV; Routh, Elementary Rigid Dynamics, 6-е изд., London, 1897 (по-немецки — Leipzig, 1898), гл. IX; Уиттекер, Аналитическая динамика, гл. VII, ОНТИ, 1937 г.; Г. Ламб, Теоретическая механика, том третий, Москва, 1936 г.

[2]) Путь, по которому возможен точный переход к случаю бесконечно большого числа степеней свободы, указан Hilbert, Gött. Nachr., 1904.

[3]) Алгебраическое доказательство этого основывается на предположении, что по крайней мере одна из функций T, V существенно положительна. В настоящем случае этому условию удовлетворяет, конечно, T.

ваются нормальными координатами системы. С помощью этих координат будем иметь

$$2T = a_1\dot{q}_1^2 + a_2\dot{q}_2^2 + \ldots + a_n\dot{q}_n^2, \tag{3}$$

$$2V = c_1q_1^2 + c_2q_2^2 + \ldots + c_nq_n^2. \tag{4}$$

Коэфициенты a_1, $a_2, \ldots$, a_n называются главными коэфициентами инерции; они обязательно положительны. Коэфициенты c_1, $c_2, \ldots$, c_n могут быть названы главными коэфициентами устойчивости; они все будут положительными, если только невозмущенная конфигурация устойчива.

Если на систему действуют заданные внешние силы, то работа их при произвольном малом перемещении δq_1, $\delta q_2, \ldots$, δq_n может быть выражена в таком виде:

$$Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2 + \ldots + Q_n\,\delta q_n. \tag{5}$$

Коэфициенты Q_1, $Q_2, \ldots$, Q_n называются тогда нормальными компонентами возмущающей силы.

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = -\frac{\partial V}{\partial q_r} + Q_r \quad [r = 1, 2, \ldots n] \tag{6}$$

для случая бесконечно малых движений принимают вид

$$a_{1r}\ddot{q}_1 + a_{2r}\ddot{q}_2 + \ldots c_{1r}q_1 + c_{2r}q_2 + \ldots = Q_r \tag{7}$$

или, после введения нормальных координат,

$$a_r\ddot{q}_r + c_rq_r = Q_r. \tag{8}$$

Отсюда видно, что нормальные координаты характеризуются динамически следующими свойствами:

1. Импульс, соответствующий какой-нибудь нормальной координате, вызывает начальное движение *только* относительно той же самой координаты.

2. Возмущающая непрерывно действующая сила, соответствующая некоторой нормальной координате, вызывает статическое перемещение *только* относительно этой же координаты.

Чтобы получить *свободные* колебания системы, полагаем $Q_r = 0$. Решая уравнение (8), находим

$$q_r = A_r\cos(\sigma_r t + \varepsilon_r), \tag{9}$$

где

$$\sigma_r = \left(\frac{c_r}{a_r}\right)^{1/2} \tag{10}$$

и A_r, ε_r суть произвольные постоянные[1]). Таким образом возможен тип свободных колебаний, при котором изменяется только одна какая-то нормальная координата q_r, и движение каждой частицы системы, в силу того, что оно линейно зависит от q_r, будет представлять простое гармоническое колебание с периодом $\frac{2\pi}{\sigma_r}$; более того, частицы, двигаясь с одинаковой фазой, одновременно проходят через положение равновесия. Различные типы движения, обладающие указанными признаками, называются нормальными колебаниями системы; их число равно числу степеней свободы, и любое свободное колебание системы может быть получено из них при помощи сложения при соответствующем выборе амплитуд (A_r) и фаз (ε_r). Из выражения (10) можно видеть, что при всяком нормальном колебании средние значения (относительно времени) кинетической и потенциальной энергии равны друг другу.

В некоторых случаях, именно, когда два или несколько свободных периодов $\frac{2\pi}{\sigma}$ системы равны между собой, нормальные координаты остаются до известной степени неопределенными, т. е. они могут быть выбраны бесконечно большим числом способов. Сложение соответствующих колебаний с произвольными амплитудами и фазами дает малое колебание, при котором движение каждой частицы есть результирующее простых гармонических колебаний различного направления и есть, следовательно, вообще эллиптическое колебание с тем же периодом. Примером этого является сферический маятник; важный пример из нашей рассматриваемой здесь области представляют прогрессивные волны в глубокой воде (IX гл.).

Если один из коэфициентов устойчивости (c_r) будет отрицательным, то значение σ_r будет чисто мнимым. Тригонометрическую функцию в выражении (9) можно заменить тогда через действительные показательные функции, и произвольное перемещение будет вообще возрастать, а тогда предположения, на которых основывается приближенное уравнение (8), сделаются несостоятельными. Невозмущенное положение следует в этом случае рассматривать как неустойчивое. Необходимое и достаточное условие для устойчивости (в этом смысле) состоит в том, что потенциальная энергия V в положении равновесия должна быть минимальна.

Чтобы найти действие периодических возмущающих сил, достаточно рассмотреть случай, когда Q_r есть простая тригонометрическая функция времени, например,

$$Q_r = C_r \cos(\sigma t + \varepsilon), \tag{11}$$

---

[1]) Отношение $\frac{\sigma}{2\pi}$ дает частоту колебаний. Для самой величины σ рекомендуется ввести отдельное название; Кельвин и Дарвин в своих исследованиях о приливах употребляли для этого выражение „быстрота" (Speed). Немцамилд я σ предложен термин „круговая частота" (Kreisfrequenz).

где значение σ задано. Этот случай не только наиболее интересен сам по себе, но, как мы знаем из теории рядов Фурье, как бы Q_r ни зависело от времени, оно может быть выражено рядом, члены которого имеют вид (11). Частный интеграл уравнения (8) имеет тогда вид

$$q_r = \frac{C_r}{c_r - \sigma^2 a_r} \cos(\sigma t + \varepsilon). \tag{12}$$

Это представляет вынужденное колебание, вызываемое периодической силой Q_r. При таком колебании движение каждой частицы есть периодическое с заданным периодом $\frac{2\pi}{\sigma}$, и наибольшие значения перемещений совпадают по времени с максимумом и минимумом силы.

Постоянная сила, равная мгновенному значению действующей силы (11), вызывает перемещение

$$\bar{q}_r = \frac{C_r}{c_r} \cos(\sigma t + \varepsilon), \tag{13}$$

т. е. то самое, конечно, которое имело бы место, если бы коэфициент инерции a_r равнялся нулю. Поэтому выражение (12) может быть представлено в форме

$$q_r = \frac{1}{1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_r^2}} \bar{q}_r, \tag{14}$$

где σ_r имеет значение, данное формулой (10). Это очень удобная формула; она позволяет выразить действие периодической силы, если мы знаем статическое действие силы того же самого типа. Необходимо заметить, что q_r и Q_r имеют одинаковые или противоположные фазы, смотря по тому $\sigma \lessgtr \sigma_r$, т. е. будет ли период возмущающей силы больше или меньше периода свободного колебания. Простой пример этого представляет простой маятник, на который действует периодическая горизонтальная сила. Другие важные примеры будут даны в теории приливов [1]).

Если σ очень велико по сравнению с σ_r, то из выражения (12) мы получаем

$$q_r = -\frac{C_r}{\sigma^2 a_r} \cos(\sigma t + \varepsilon); \tag{15}$$

перемещение имеет теперь постоянно противоположную фазу сравнительно с силой и зависит только от *инерции* системы.

Если период силы, действующей на систему, приблизительно равен периоду нормального колебания порядка r, то амплитуда вынужденного колебания согласно формуле (14) будет очень велика

[1]) Ср. T. Young, A Theorie of Tides, Nicholson's Journal, XXXV (1813) [Miscellaneous Works, London, 1854, II, 262].

сравнительно с $\overline{q}_r$. В случае полного равенства решение (12) не годится и должно быть заменено выражением

$$q_r = \frac{C_r t}{2\sigma a_r} \sin(\sigma t + \varepsilon). \tag{16}$$

Это выражение дает колебание с непрерывно возрастающей амплитудой и может поэтому служить только для представления начальных стадий возмущения.

Мы упомянем еще другое важное свойство нормальных колебаний. Пусть вследствие наложения связей без трения система вынуждена колебаться каким-то заранее заданным образом, так что ее положение во всякий момент может быть выражено при помощи одной переменной, которую мы обозначим через θ; в таком случае мы получаем

$$q_r = B_r \theta,$$

где величины B_r суть определенные постоянные. Отсюда получаем

$$2T = (B_1^2 a_1 + B_2^2 a_2 + \ldots + B_n^2 a_n)\,\theta^2, \tag{17}$$

$$2V = (B_1^2 c_1 + B_2^2 c_2 + \ldots + B_n^2 c_n)\,\theta^2. \tag{18}$$

Если θ пропорционально $\cos(\sigma t + \varepsilon)$, то постоянство энергии $(T + V)$ требует, чтобы

$$\sigma^2 = \frac{B_1^2 c_1 + B_2^2 c_2 + \ldots + B_n^2 c_n}{B_1^2 a_1 + B_2^2 a_2 + \ldots + B_n^2 a_n}; \tag{19}$$

σ^2 есть, таким образом, промежуточное значение между наибольшим и наименьшим значением величин $\frac{c_r}{a_r}$; другими словами, частота колебания с наложенными связями лежит между наибольшей и наименьшей частотами, соответствующими нормальным колебаниям системы. В частности, следует, что когда на систему накладывается связь, частота самого медленного свободного колебания *увеличивается*. Более того, если система со связью мало уклоняется в отношении нормальной координаты (r), то σ^2 отличается от $\frac{c_r}{a_r}$ на малую величину *второго порядка*. Это дает метод для приближенной оценки частоты в тех случаях, когда нормальные типы колебаний не могут быть точно определены [1]). Примеры этого можно будет найти в §§ 191, 259. Далее можно показать, что в случае наложения одной связи, которая только сводит число степеней свободы с n на $n-1$, периоды измененной системы заключаются между периодами первоначальной [2]).

Еще Лагранж [3]) заметил следующее: если в уравнениях типа (7), где координаты не обязательно нормальные, положить $Q_r = 0$ и принять

$$q_r = A_r \cos(\sigma t + \varepsilon), \tag{20}$$

---

[1]) Rayleigh, Some General Theorems relating to Vibrations, Proc. Lond. Math. Soc., IV, 357 (1874) [Papers, I, 170] и Theory of Sound, гл. IV. Метод был разработан Ritz, Journ. für Math., CXXXV, 1 (1908) и Ann. d. Physik, XXVIII (1909) [Gesammelte Werke, Paris, 1911, стр. 192, 265].

[2]) Routh, Elementary Rigid Dynamics, § 67; Rayleigh, Theory of Sound, 2-е изд., § 92a; Уиттекер, Аналитическая динамика, ОНТИ, 1937.

[3]) Лагранж, Аналитическая механика, т. I, ОНТИ, 1939. Mecanique Analytique (изд. Бертрана), I, 331 [Oeuvres, XI, 380].

то результирующие уравнения тождественны с теми, которые определяют стационарные значения, например, выражения

$$\sigma^2=\frac{c_{11}A_1^2+c_{22}A_2^2+\ldots+2c_{12}A_1A_2+\ldots}{a_{11}A_1^2+a_{22}A_2^2+\ldots+2a_{12}A_1A_2+\ldots}=\frac{V(A,A)}{T(A,A)}. \tag{21}$$

Так как $T(A, A)$ есть определенная положительная форма, то знаменатель не может обратиться в нуль, следовательно, это выражение должно иметь минимум. Более того, исходя из этого свойства, можно построить доказательство, что n значений σ^2 все будут действительными[1]). Они, очевидно, все будут положительными, когда V будет существенно положительной.

Теорема Рэлея, таким образом, родственна гамильтоновой формуле (3) § 135, что можно видеть, если принять

$$q_r=A_r\sin\sigma t \tag{22}$$

и положить $t_0=0$, $t_1=\frac{2\pi}{\sigma}$; ср. § 205з.

Изменения, вводимые в теорию малых колебаний при учете сил трения, будут рассмотрены в главе XI.

Длинные волны в каналах

§ 169. Переходя теперь к специальной задаче этой главы, начнем со случая волн, распространяющихся вдоль прямолинейного канала с горизонтальным руслом и параллельными вертикальными стенками.

Пусть ось x будет параллельна длине канала, а ось y направлена вертикально вверх; будем предполагать, что движение происходит в этих двух измерениях x, y. Ординату свободной поверхности, соответствующую в момент t абсциссе x, обозначим через $y_0+\eta$, где y_0 означает ординату в невозмущенном состоянии.

Как уже сказано, при всех исследованиях этой главы мы будем предполагать, что можно пренебречь вертикальным ускорением частиц жидкости или, выражаясь точнее, что давление в произвольной точке (x, y) практически будет равно статическому давлению, обусловленному глубиной под свободной поверхностью; следовательно, будет выполняться уравнение

$$p-p_0=g\varrho(y_0+\eta-y), \tag{1}$$

где p_0 есть постоянное давление на свободной поверхности. Отсюда имеем

$$\frac{\partial p}{\partial x}=g\varrho\frac{\partial\eta}{\partial x}. \tag{2}$$

Это уравнение не зависит от y, так что горизонтальное ускорение для всех частиц жидкости, расположенных в плоскости, перпендикулярной к оси x, имеет одно и то же значение. Отсюда следует, что все частицы, которые в некоторый момент времени лежат в ука-

[1]) См. Poincaré, Journal de Math. (5), II, 83 (1896); Ламб, Теоретическая механика, том III, § 92.

занной плоскости, и в дальнейшем будут лежать в такой же плоскости, другими словами, горизонтальная скорость u есть функция только от x и t.

В уравнении горизонтального движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

можно в случае бесконечно малых движений опустить член второго порядка $u\frac{\partial u}{\partial x}$; тогда мы получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}. \tag{3}$$

Пусть теперь

$$\xi = \int u\,dt,$$

т. е. ξ есть интеграл по времени от перемещения вдоль плоскости x за время t. В случае *малых движений* он будет равен, если пренебречь малыми величинами выше первого порядка, перемещению частиц, которые лежали первоначально в этой плоскости, или перемещению частиц, которые в момент t фактически в ней лежат. Уравнение (3) перейдет теперь в следующее:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}. \tag{4}$$

Уравнение неразрывности можно получить, вычисляя объем жидкости, который войдет в момент t в пространство между плоскостями x и $x+\delta x$; если h обозначает глубину и b ширину канала, то будем иметь

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\xi h b)\,\delta x = \eta b\,\delta x$$

или

$$\eta = -h\frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{5}$$

Тот же самый результат получается из обыкновенной формы уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

Из этого уравнения следует

$$v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = -y\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{7}$$

если начало перенести на момент на дно канала. Эта формула представляет интерес потому, что она показывает как следствие нашего первоначального допущения, что вертикальная скорость частицы пропорциональна первой степени ее высоты от дна. На свободной поверхности будем иметь

$$y = h + \eta, \quad v = \frac{\partial \eta}{\partial t};$$

отсюда следует, если пренебречь произведением малых величин,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -h \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \, \partial t}. \tag{8}$$

Интегрируя уравнение (8) по t, получим уравнение (5).

Исключив η из уравнений (4) и (5), получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{9}$$

Исключение же ξ дает уравнение того же вида, именно

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \tag{10}$$

Только что приведенное исследование можно непосредственно распространить на случай канала с произвольной, но постоянной по длине формой поперечного сечения [1]). Если поперечное сечение невозмущенной жидкости имеет площадь S, а ширина свободной поверхности есть b, то уравнение неразрывности будет

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\xi S)\, \delta x = \eta b \, \delta x; \tag{11}$$

отсюда следует, как и выше,

$$\eta = -h \frac{\partial \xi}{\partial x}, \tag{12}$$

предполагая, что $h = \frac{S}{b}$, т. е. h означает теперь *среднюю* глубину канала. Уравнение движения (4) остается, конечно, без изменения.

§ 170. Уравнение (9) имеет хорошо знакомый вид, который встречается при различных физических проблемах, например, при поперечных колебаниях струн и при движении звука в одном измерении.

Чтобы интегрировать это уравнение, напишем для краткости

$$c = \sqrt{gh} \tag{13}$$

и

$$x - ct = x_1, \quad x + ct = x_2.$$

Если ввести x_1 и x_2 в качестве независимых переменных, то уравнение (9) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1 \, \partial x_2} = 0.$$

Общее решение его будет

$$\xi = F(x - ct) + f(x + ct), \tag{14}$$

где F и f суть произвольные функции.

---

[1]) Kelland, Trans R. S. Edin., XIV (1839).

Соответствующие значения для скорости какой-либо частицы жидкости и для возвышения поверхности будут

$$\left.\begin{aligned}\frac{\xi}{c} &= -F'(x-ct)+f'(x+ct),\\ \frac{\eta}{h} &= -F'(x-ct)-f'(x+ct).\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Истолкование этого результата очень просто. Рассмотрим сначала движение, представленное только первым членом правой части уравнения (14). Так как $F(x-ct)$ не меняется, если t и x возрастают соответственно на τ и на $c\tau$, то, очевидно, возмущение, которое в момент t было в точке x, в момент $t+\tau$ переносится в точку $x+c\tau$. Возмущение перемещается таким образом, не изменяясь, с постоянной скоростью c вдоль канала. Другими словами, мы имеем здесь прогрессивную волну, которая перемещается со скоростью c вдоль положительного направления оси x. Точно так же второй член правой части (14) представляет прогрессивную волну, которая распространяется со скоростью c в отрицательном направлении оси x. Так как (14) есть *общее* решение (9), то всякое произвольное движение жидкости, которое удовлетворяет условиям предыдущего параграфа, может рассматриваться состоящим из двух аналогичных волн.

Скорость распространения c согласно (13) есть скорость, соответствующая свободному падению с высоты, равной половине глубины невозмущенной жидкости [1]).

Следующая таблица дает скорость распространения волн для различных глубин; она будет иметь интерес позднее в связи с теорией приливов.

h *м*	c *м/сек*	c *км/час*	$\frac{2\pi a}{c}$ (часы)
97,5	31	111	360
390	62	222	180
1560	123	444	90
3510 [2])	185	667	60
6240	247	889	45

Последний столбец дает время, которое потребовалось бы для волны, чтобы пройти расстояние, равное длине земного экватора ($2\pi a$). Чтобы „длинная" волна могла пройти это расстояние в 24 часа, глубина должна равняться приблизительно 22 *км*. Не следует забывать, что эти числовые результаты годятся только для волн, удовлетворяющих вышеизложенным условиям.

Значение этих условий более полно будет выяснено в § 172.

[1]) Lagrange, Nouv. mém. d. l'Acad. de Berlin, 1781 [Oeuvres, I, 747].

[2]) Это число, вероятно, сравнимо с порядком средней глубины океанов.

§ 171. Чтобы исследовать действие произвольного начального возмущения, предположим, что для $t=0$ имеем

$$\frac{\dot{\xi}}{c}=\varphi(x), \quad \frac{\eta}{h}=\psi(x). \tag{16}$$

Функции F' и f' выражения (15) будут тогда иметь вид

$$\left.\begin{aligned} F'(x)&=-\frac{1}{2}\{\varphi(x)+\psi(x)\},\\ f'(x)&=\frac{1}{2}\{\varphi(x)-\psi(x)\}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Следовательно, если провести кривые

$$y=\eta_1, \quad y=\eta_2,$$

где

$$\left.\begin{aligned} \eta_1&=\frac{1}{2}h\{\psi(x)+\varphi(x)\},\\ \eta_2&=\frac{1}{2}h\{\psi(x)-\varphi(x)\}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

то можно будет найти профиль волны во всякий следующий момент t. Для этого надо смещать эти кривые параллельно оси x на отрезки $\pm ct$ и складывать (алгебраически) соответствующие ординаты. Если, например, начальное возмущение было ограничено длиной l оси x, то оно по истечении времени, равного $\frac{l}{2c}$, будет переходить в две прогрессивные волны длины l, перемещающиеся в противоположных направлениях.

Для частного случая, когда в начальном состоянии $\xi=0$ и, следовательно, $\varphi(x)=0$, будем иметь $\eta_1=\eta_2$; возвышение в каждой из образовавшихся волн будет тогда равно в точности половине того возвышения, которое было в соответствующих точках при первоначальном возмущении.

Если первоначальное возмущение таково, что $\dot{\xi}=\pm\frac{\eta}{h}c$, то из уравнений (16) и (17) следует, что движение будет состоять из системы волн, распространяющихся только в одном направлении, так как одна из двух функций F' и f' будет тогда равна нулю.

Легко представить движение частицы поверхности в то время, когда прогрессивная волна одного из двух видов проходит мимо нее. Возьмем, например,

$$\xi=F(x-ct) \tag{19}$$

и, следовательно,

$$\dot{\xi}=c\frac{\eta}{h}. \tag{20}$$

Частица будет находиться в покое до тех пор, пока ее не достигла волна, а затем она будет двигаться вперед со скоростью, которая

во всякий момент времени пропорциональна возвышению над средним уровнем; скорость частицы при этом будет меньше скорости волны c, и их отношение равно отношению возвышения поверхности к глубине жидкости. Полное перемещение в некоторый произвольный момент будет равно

$$\xi = \frac{1}{h}\int \eta c\, dt.$$

Этот интеграл при ширине канала, равной единице, измеряет объем той части волны, которая к рассматриваемому моменту прошла через частицу. Когда, наконец, волна прошла, то частица приходит опять в положение равновесия, расстояние которого от первоначального положения будет равно полному объему поднятой воды, деленному на площадь поперечного сечения канала.

§ 172. Мы можем исследовать теперь, при каких условиях решение, данное формулой (14), будет совместимо с теми предварительными допущениями, которые были приняты в § 169.

Точное уравнение для вертикального движения

$$\varrho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} - g\varrho$$

после интегрирования по y дает

$$p - p_0 = g\varrho(y_0 + \eta - y) - \varrho \int_y^{y_0+\eta} \frac{Dv}{Dt}\, dy. \tag{21}$$

Если βh будет мало сравнительно с $g\eta$, то это уравнение можно заменить приближенным уравнением (1), причем β обозначает максимум вертикального ускорения. В самом деле, если расстояние между двумя последовательными узловыми точками прогрессивной волны (т. е. точками, в которых профиль волны встречает невозмущенный уровень) обозначить через λ, то время, которое требуется соответствующей части волны, чтобы пройти это расстояние, будет равно $\frac{\lambda}{c}$; следовательно, если предположить, что градиент $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ всюду мал, то вертикальная скорость будет величиной порядка $\frac{\eta c}{\lambda}$ [1]), а вертикальное ускорение — порядка $\frac{\eta c^2}{\lambda^2}$, где η обозначает максимум возвышения или впадины. Таким образом, действительно βh будет мало сравнительно с $g\eta$ при условии, что $\frac{h^2}{\lambda^2}$ есть малая величина.

Пологие волны, длина λ которых велика по сравнению с глубиной жидкости, называются длинными волнами.

[1]) Если сравнить с уравнением (20), то мы увидим, что отношение максимума вертикальной скорости к максимуму горизонтальной есть величина порядка $\frac{h}{\lambda}$.

Далее, ограничение бесконечно малыми движениями, сделанное в уравнении (3), состояло в пренебрежении $u\frac{\partial u}{\partial x}$ по сравнению с $\frac{\partial u}{\partial t}$. В прогрессивной волне мы имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \pm c\frac{\partial u}{\partial x};$$

u должно, следовательно, быть мало по сравнению с c, и поэтому согласно (20) η также должно быть мало сравнительно с h. Необходимо заметить, что это условие совершенно отлично от предыдущего, которое может быть справедливо и в тех случаях, когда движение нельзя рассматривать как бесконечно малое (см. § 187).

Предыдущие условия будут выполнены, конечно, в общем случае, представленном уравнением (14), если только они выполнены для каждой из двух прогрессивных волн, на которые можно разложить возмущение.

§ 173. Существует еще другой, хотя в общем и менее удобный метод для исследования движения длинных волн, в котором применяется метод Лагранжа, т. е. координаты относятся к отдельным частицам жидкости. Ради простоты мы рассмотрим только случай канала с прямоугольным поперечным сечением [1]). Основное допущение, что можно пренебречь вертикальным ускорением, обусловливает, как и раньше, что горизонтальное движение всех частиц в плоскости, перпендикулярной к длине канала, должно быть одно и то же. Мы обозначим поэтому через $x+\xi$ абсциссу в момент t той плоскости частиц, невозмущенная абсцисса которой была x. Если η означает возвышение свободной поверхности в этой плоскости, то уравнение движения для слоя с шириной, равной единице, и длины (в невозмущенном состоянии) δx будет

$$\varrho h\,\delta x\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}\delta x(h+\eta),$$

где множитель $\frac{\partial p}{\partial x}\delta x$ означает разность давлений для каких-то двух, друг против друга лежащих по обеим сторонам слоя частиц x и $x+\delta x$, а множитель $h+\eta$ представляет площадь слоя. Так как мы предполагаем, что давление на частицу зависит только от глубины под свободной поверхностью, то мы можем положить

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\varrho\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

так что наше динамическое уравнение выразится следующим образом:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -g\left(1+\frac{\eta}{h}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}. \qquad (1)$$

---

[1]) Airy, Encycl. Metrop., Tides and Waves, § 192 (1845); см. также Stokes, On Waves, Camb. and Dub. Math. Journ., IV (1849) [Papers, II, 222]. Случай канала с косыми стенками рассматривался Mc. Cowan, On the Theorie of Long Waves, Phil. Mag. (5), XXXV, 250 (1892).

Уравнение неразрывности получим, если приравняем друг другу объемы слоя, состоящего из тех же самых частиц в возмущенном и невозмущенном состоянии. Таким образом

$$\left(\delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x}\,\delta x\right)(h+\eta) = h\,\delta x,$$

или

$$1+\frac{\eta}{h} = \left(1+\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{-1}. \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) мы можем исключить η или ξ; результат, выраженный через ξ, будет проще, именно

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh\,\frac{\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}{\left(1+\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^3}. \tag{3}$$

Это есть общее уравнение длинных волн в канале с постоянным по длине сечением и вертикальными стенками [1]).

До сих пор при нашем исследовании мы делали только одно допущение, что при вычислении давления можно пренебречь вертикальным ускорением частиц. Примем теперь, кроме того, что $\frac{\eta}{h}$ есть малая величина; тогда уравнения (2) и (3) сведутся к уравнениям

$$\eta = -h\,\frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{4}$$

и

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{5}$$

Возвышение η удовлетворяет уравнению такого же вида:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \tag{6}$$

Эти уравнения согласуются с нашими прежними результатами; в самом деле, малость $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ обозначает, что относительное перемещение двух частиц всегда есть только малая дробь от расстояния между ними, следовательно, в первом приближении несущественно, относится ли x к неподвижной в пространстве плоскости или к плоскости, движущейся вместе с жидкостью.

§ 174. Потенциальная энергия волны или системы волн, зависящая от повышения или понижения жидкости над или под средним уровнем, выражается для единицы ширины интегралом

$$g\varrho \int\int y\,dx\,dy,$$

[1]) Airy, см. выше

где интегрирование по y необходимо взять между пределами 0 и η, а по x — по всей длине системы волн. Выполнив первое интегрирование, получим

$$\frac{1}{2} g\varrho \int \eta^2 dx. \tag{1}$$

Кинетическая же энергия будет равна

$$\frac{1}{2} \varrho h \int \dot{\xi}^2 dx. \tag{2}$$

При системе волн, распространяющихся только в одном направлении, мы имеем

$$\dot{\xi} = \pm \frac{c}{h} \eta,$$

и, следовательно, выражения (1) и (2) будут равны; это означает, что полная энергия есть наполовину потенциальная и наполовину кинетическая.

Этот результат может быть получен в более общем виде следующим образом [1]). Всякую прогрессивную волну можно представить возникающей благодаря распадению на две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях, некоторого начального возмущения, при котором скорость частиц всюду равна нулю, и, следовательно, полная энергия есть потенциальная энергия. Из § 171 следует, что обе волны, происшедшие таким образом, будут симметричны во всех отношениях, так что каждая из них должна содержать половину первоначального запаса энергии. Так как, однако, возвышение соответствующих точек обеих полученных волн в точности равно половине возвышения первоначального возмущения, то потенциальная энергия каждой волны согласно выражению (1) равна четверти первоначального запаса энергии. Остальная (кинетическая) часть энергии каждой полученной волны должна поэтому равняться также одной четверти первоначальной энергии.

§ 175. Если в каком-нибудь случае волны, распространяющейся только в одном направлении без изменения своей формы, мы сообщим всей массе жидкости скорость, равную и противоположную скорости распространения волн, то движение будет *установившимся* и в то же время силы, действующие на каждую частицу, остаются теми же, что и раньше. С помощью этого приема можно очень легко исследовать законы распространения волн [2]). Например в рассматриваемом случае согласно (5) § 22 будем иметь на свободной поверхности

$$\frac{p}{\varrho} = \text{const.} - g(h + \eta) - \frac{1}{2} q^2, \tag{1}$$

где q означает скорость. Если наклон профиля волны всюду незначителен и глубина h мала по сравнению с длиной волны, то можно

[1]) Rayleigh, On Waves, Phil. Mag. (5), I, 257 (1876) [Papers, I, 251].
[2]) Rayleigh, см. выше.

принять, что горизонтальная скорость на протяжении всей глубины одна и та же и приблизительно равна q. Уравнение неразрывности тогда будет

$$q(h+\eta)=ch, \tag{2}$$

где c обозначает скорость установившегося движения в тех местах, в которых глубина потока одна и та же и равна h. Подставляя в уравнение (1) это значение q, мы получим

$$\frac{p}{\varrho}=\text{const.}-gh\left(1+\frac{\eta}{h}\right)-\frac{1}{2}c^2\left(1+\frac{\eta}{h}\right)^{-2}. \tag{3}$$

Следовательно, если $\frac{\eta}{h}$ мало, то условие для свободной поверхности $p=\text{const.}$ будет выполняться приближенно, при условии, что

$$c^2=gh, \tag{4}$$

а это согласуется с нашим прежним результатом.

Этот метод позволяет также очень просто установить найденное уже в § 171 соотношение между скоростью частиц и возвышением поверхности. Согласно уравнению (2) приближенно будем иметь

$$q=c\left(1-\frac{\eta}{h}\right). \tag{5}$$

Следовательно, в волновом движении скорость частиц в направлении распространения волн по отношению к невозмущенной воде равна $\frac{c\eta}{h}$.

Если возвышение η, хотя и мало по сравнению с длиной волны, но, однако, не может рассматриваться как бесконечно малое, то можно будет получить лучшее приближенное значение для скорости волны, заменив в уравнении (4) h через $\eta+h$. Это дает для скорости волны относительно жидкости в непосредственной близости от нее приближенное выражение

$$c_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{\eta}{h}\right),$$

где $c_0=\sqrt{gh}$. Так как жидкость сама имеет скорость $c_0\frac{\eta}{h}$, то абсолютная скорость распространения волн приближенно будет равна

$$c_0\left(1+\frac{3}{2}\frac{\eta}{h}\right). \tag{6}$$

Этот результат в основном принадлежит Эри[1]). Отсюда следует, что волна рассмотренного здесь типа не может распространяться совершенно без изменения профиля, так как скорость изменяется с высотой. Другое доказательство формулы (6) мы дадим, как только перейдем к специальному рассмотрению волн с конечной амплитудой (§ 187).

[1]) Airy, Tides and Waves, § 208.

§ 176. Из линейности наших приближенных уравнений следует, что в случае достаточно пологих волн можно наложить друг на друга любое число независимых решений. Пусть, например, дана волна произвольной формы, которая движется в некотором направлении; если мы наложим на нее движущееся в противоположном направлении зеркальное изображение ее относительно плоскости $x=0$, то в результирующем движении, очевидно, горизонтальная скорость в начале координат обратится в нуль; это значит, что условия таковы, как будто в этой точке находится неподвижная стенка. Мы можем таким образом наблюдать отражение волны от стенки; возвышения и впадины отражаются при этом без изменения, в то время как направление горизонтальной скорости меняется на обратное. Тот же самый результат следует из формулы

$$\xi = F(ct-x) - F(ct+x), \tag{1}$$

которая дает, очевидно, самое общее значение ξ, удовлетворяющее условию $\xi=0$ для $x=0$.

Нетрудно исследовать частичное отражение волны в том месте, в котором происходит внезапное изменение поперечного сечения канала. Если перенести начало координат в эту точку, то мы можем положить для отрицательной стороны

$$\eta_1 = F\left(t-\frac{x}{c_1}\right) + f\left(t+\frac{x}{c_1}\right), \quad u_1 = \frac{g}{c_1}F\left(t-\frac{x}{c_1}\right) = -\frac{g}{c_1}f\left(t+\frac{x}{c_1}\right) \tag{2}$$

и для положительной стороны

$$\eta_2 = \varphi\left(t-\frac{x}{c_2}\right), \quad u_2 = \frac{g}{c_2}\varphi\left(t-\frac{x}{c_2}\right), \tag{3}$$

где функция F представляет первоначальную волну, а f и φ — соответственно отраженную и проходящую части. Постоянство массы требует, чтобы в точке $x=0$ было

$$b_1h_1u_1 = b_2h_2u_2,$$

где b_1, b_2 обозначают ширину на поверхности, а h_1, h_2 обозначают средние глубины. В той же самой точке вследствие непрерывности давления мы должны, следовательно, иметь $\eta_1=\eta_2$ [1]).

Эти условия дают

$$\frac{b_1h_1}{c_1}\{F(t)-f(t)\} = \frac{b_2h_2}{c_2}\varphi(t), \quad F(t)+f(t)=\varphi(t).$$

---

[1]) Понятно, что вследствие быстрого изменения характера движения вблизи точки разрыва задача допускает только приближенное решение. Характер приближения, лежащий в основе вышеизложенных допущений, становится более очевидным, если мы предположим, что индексы относятся к двум поперечным сечениям S_1 и S_2 по ту и другую сторону от начала O на таких расстояниях от него, которые очень малы по отношению к длине волны, но все еще являются небольшими кратными поперечных размеров канала. Движение жидкости в каждом из этих поперечных сечений будет практически равномерным и параллельным направлению длины. Допущение, указанное в тексте, сводится тогда к утверждению что между S_1 и S_2 не существует заметной разницы уровней.

Следовательно, отношения возвышений в соответствующих частях отраженной и падающей волны, а также проходящей и падающей волны, соответственно будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{f}{F} &= \frac{b_1c_1 - b_2c_2}{b_1c_1 + b_2c_2}, \\ \frac{\varphi}{F} &= \frac{2b_1c_1}{b_1c_1 + b_2c_2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Читатель может легко сам убедиться в том, что сумма энергий отраженной и проходящей волн равна энергии падающей волны.

§ 177. До сих пор наши исследования относились к случаю *свободных* волн. Когда на жидкость действуют, кроме силы тяжести, малые возмущающие силы X, Y, то уравнения движения получаются следующим образом.

Мы предположим, что в пределах расстояния, сравнимого с порядком глубины h, эти силы изменяются только на малую дробь их полного значения. При этом предположении мы будем иметь вместо уравнения (1) § 169

$$\frac{p - p_0}{\varrho} = (g - Y)(y_0 + \eta - y) \tag{1}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = (g - Y)\frac{\partial \eta}{\partial x} - (y_0 + \eta - y)\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Мы предполагаем далее, что Y мало сравнительно с g и что (исходя из указанных ранее оснований) $h\dfrac{\partial Y}{\partial x}$ будет мало по сравнению с X. Тогда уравнение горизонтального движения

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + X \tag{2}$$

приводится с достаточным приближением к виду

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} + X, \tag{3}$$

где X можно рассматривать как функцию только от x и t. Уравнение неразрывности, как и в § 169, будет

$$\eta = -h\frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{4}$$

Из уравнений (3) и (4) после исключения η получаем

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + X. \tag{5}$$

Таким образом имеет значение только одна *горизонтальная* компонента возмущающей силы.

Если возмущающее влияние обусловлено переменным давлением p_0 на свободной поверхности, то уравнение (3) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p_0}{\partial x}, \tag{6}$$

а уравнение (4) остается без изменения. В случае перемещающегося давления, например,

$$\frac{p_0}{\varrho} = f(Ut - x), \tag{7}$$

мы найдем

$$\frac{\eta}{h} = \frac{p_0}{\varrho (U^2 - gh)}. \tag{8}$$

Понижение поверхности будет происходить вместе с давлением в тех же фазах или в противоположных в зависимости от того, будет ли $U \lessgtr \sqrt{gh}$.

Если же возмущающее влияние обусловлено колебаниями дна, то в уравнении (2) мы будем иметь $X = 0$, а уравнение неразрывности представится в виде

$$\eta - \eta_0 = -h \frac{\partial \xi}{\partial x}, \tag{9}$$

где η_0 есть отклонение дна от некоторого среднего уровня. Так например, в случае сейсмической волны

$$\eta_0 = f(Ut - x) \tag{10}$$

мы получим

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{U^2}{U^2 - gh}. \tag{11}$$

§ 178. Колебания воды в канале постоянного сечения, закрытого с обоих концов, можно получить, как и в соответствующей акустической задаче, наложением прогрессивных волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Однако, учитывая последующие более трудные исследования, поучительно рассмотреть эту задачу как пример применения общей теории § 168.

Мы должны определить ξ таким образом, чтобы оно удовлетворяло уравнению

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + X \tag{1}$$

и одновременно граничным условиям $\xi = 0$ для $x = 0$ и $x = l$.

Чтобы найти свободные колебания, положим $X = 0$ и допустим что ξ пропорционально $\cos(\sigma t + \varepsilon)$, где σ должна быть определена Подставляя, получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\sigma^2}{c^2} \xi = 0; \tag{2}$$

отсюда, опуская множитель, зависящий от времени, будем иметь

$$\xi = A \sin \frac{\sigma x}{c} + B \cos \frac{\sigma x}{c}.$$

Граничные условия дают $B = 0$ и

$$\sigma \frac{l}{c} = r\pi, \tag{3}$$

где r есть целое число. Следовательно, нормальное колебание порядка r выражается в виде

$$\xi = A_r \sin \frac{r\pi x}{l} \cos\left(\frac{r\pi ct}{l} + \varepsilon_r\right), \tag{4}$$

где амплитуда A_r и фаза ε_r произвольны.

В случае самого медленного колебания ($r = 1$) вода колеблется взад и вперед и при этом приливает попеременно к обоим концам, а в середине $\left(x = \frac{1}{2} l\right)$ образуется узел. Период $\frac{2l}{c}$ равен времени, которое необходимо прогрессивной волне, чтобы дважды пробежать длину канала.

Периоды более высоких колебаний равны соответственно $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, ... от этого периода, однако мы должны помнить, что в этой задаче, как и в других подобных задачах, наша теория теряет свою применимость, как только длина $\frac{l}{r}$ полуволны станет величиной, сравнимой с глубиной h.

Сравнивая с общей теорией § 168, мы видим, что в рассматриваемом примере нормальные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ таковы, что при изменении только одной координаты, например q_r, перемещение системы выражается в виде

$$\xi = q_r \sin \frac{r\pi x}{l};$$

следовательно, самое общее перемещение системы при рассматриваемых условиях имеет вид

$$\xi = \sum q_r \sin \frac{r\pi x}{l}, \tag{5}$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_n$ произвольны, что, конечно, находится в согласии с теоремой Фурье.

Выражения для T и V, будучи представлены через нормальные скорости и нормальные координаты, должны привестись к суммам квадратов. В рассматриваемом случае это легко установить с помощью

формулы (5). Если S обозначает площадь поперечного сечения канала, то будем иметь

$$\left.\begin{aligned} 2T &= \varrho S \int_0^l \dot{\xi}^2\, dx = \sum a_r \dot{q}_r^2, \\ 2V &= g\varrho \frac{S}{h} \int_0^l r^2\, dx = \sum c_r q_r^2, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где

$$a_r = \frac{1}{2}\varrho S l, \qquad c_r = \frac{1}{2} r^2 \pi^2 g \varrho h \frac{S}{l}. \tag{7}$$

Из выражения (7) следует, что коэфициенты устойчивости c_r возрастают с глубиной.

Обратно, если, в согласии с теорией Фурье, мы примем, что формула (5) есть достаточно общее выражение для значения ξ в любой момент времени, то только что приведенное вычисление показывает, что коэфициенты q_r суть нормальные координаты; частоты могут быть тогда найдены с помощью общей формулы (10) § 168; именно в согласии с (3) будем иметь

$$\sigma_r = \left(\frac{c_r}{a_r}\right)^{1/2} = r\pi \frac{(gh)^{1/2}}{l}. \tag{8}$$

§ 179. В качестве примера вынужденных волн рассмотрим случай действия горизонтальной силы, зависящей только от времени

$$X = f \cos(\sigma t + \varepsilon). \tag{9}$$

Этот пример в известной мере может иллюстрировать происхождение приливов в озерах малых размеров.

Предположив, что ξ пропорционально $\cos(\sigma t + \varepsilon)$, и отбросив множитель, зависящий от времени, получим из уравнения (1)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\sigma^2}{c^2}\xi = -\frac{f}{c^2}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\xi = -\frac{f}{\sigma^2} + D \sin \frac{\sigma x}{c} + E \cos \frac{\sigma x}{c}. \tag{10}$$

Граничные условия дают

$$E = \frac{f}{\sigma^2}, \quad D \sin \frac{\sigma l}{c} = \left(1 - \cos \frac{\sigma l}{c}\right) \frac{f}{\sigma^2}. \tag{11}$$

Исключая случай $\frac{\sigma l}{c} = 0$, будем иметь

$$D = \frac{f}{\sigma^2} \operatorname{tg} \frac{\sigma l}{2c};$$

следовательно,

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \frac{2f}{\sigma^2 \cos\frac{1}{2}\frac{\sigma l}{c}} \sin\frac{\sigma x}{2c} \sin\frac{\sigma(l-x)}{2c} \cos(\sigma t+\varepsilon),\\ \eta &= \frac{hf}{\sigma c \cos\frac{1}{2}\frac{\sigma l}{c}} \sin\frac{\sigma\left(x-\frac{1}{2}l\right)}{c} \cos(\sigma t+\varepsilon).\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Если период возмущающей силы велик по сравнению с периодом самого медленного свободного колебания, то $\frac{\sigma l}{2c}$ будет мало и приближенная формула для возвышения может быть представлена в виде

$$\eta = \frac{f}{g}\left(x-\frac{1}{2}l\right)\cos(\sigma t+\varepsilon), \qquad (13)$$

точно так, как если бы вода не обладала инерцией. Горизонтальное перемещение воды будет находиться всегда в одинаковой фазе с силой, пока период последней больше, чем период самого медленного свободного колебания, т. е. пока $\frac{\sigma l}{c} < \pi$. Если период силы уменьшается и становится меньше указанного значения, то фазы силы и перемещения будут противоположны.

Когда период в точности будет равен периоду свободного колебания нечетного порядка ($r = 1, 3, 5, \ldots$), ξ и η становятся бесконечно большими, т. е. решение будет непригодным. Как было указано в § 168, этот случай можно объяснить тем, что при отсутствии сил трения амплитуда движения здесь становится такой большой, что наши основные допущения уже больше не оправдываются.

Если, с другой стороны, период возмущающей силы совпадает с периодом свободного колебания четного порядка ($r = 2, 4, 6, \ldots$), то

$$\sin\frac{\sigma l}{c} = 0, \quad \cos\frac{\sigma l}{c} = 1$$

и граничные условия выполняются независимо от значения D. Вынужденное движение может быть тогда представлено уравнением [1])

$$\xi = -\frac{2f}{\sigma^2} \sin^2\frac{\sigma x}{2c} \cos(\sigma t+\varepsilon). \qquad (14)$$

Этот пример иллюстрирует тот факт, что действие возмущающей силы иногда может быть легко вычислено без разложения силы на ее нормальные компоненты.

---

[1]) На языке общей теории это значит, что рассматриваемая здесь сила не имеет компоненты частного типа, с которой она синхронна, поэтому колебание этого типа вообще не может быть вызвано. Точно так же периодическое давление, приложенное к произвольной точке натянутой струны, не будет возбуждать того собственного колебания, которое имеет в этой точке узел, даже и тогда, когда оно синхронно с этим давлением.

Другой простой пример вынужденных колебаний, который с точки зрения теории приливов обладает известным интересом, есть пример канала, который с одного конца закрыт, а с другого конца сообщается с открытым морем, где происходят периодические колебания:

$$\eta = a\cos(\sigma t + \varepsilon). \tag{15}$$

Если мы поместим начало координат в закрытом конце, то решение, очевидно, представится в виде

$$\eta = a\frac{\cos\frac{\sigma x}{c}}{\cos\frac{\sigma l}{c}}\cos(\sigma t + \varepsilon), \tag{16}$$

где l обозначает длину. Когда $\frac{\sigma l}{c}$ мало, тогда приливная волна для всех точек канала имеет приблизительно одинаковую амплитуду. Для частных значений l (которые определяются из уравнения $\cos\frac{\sigma l}{c} = 0$) это решение не годится, так как амплитуда делается бесконечно большой.

Каналовая теория приливов

§ 180. Теория вынужденных колебаний в каналах или на открытых водных пространствах имеет значение главным образом вследствие ее прямого отношения к явлениям приливов. „Каналовая теория", в частности, была разработана весьма исчерпывающим образом Эри [1]). Мы рассмотрим несколько наиболее интересных задач.

Вычисление возмущающего действия, которое производит отдаленное тело на воду моря, изложено в прибавлении к концу этой главы. Получается, например, что возмущающее действие луны в некоторой точке P земной поверхности может быть представлено потенциалом Ω, приближенное значение которого равно

$$\Omega = \frac{3}{2}\frac{\gamma M a^2}{D^3}\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right), \tag{1}$$

где M означает массу Луны, D — ее расстояние от центра Земли, a — земной радиус, γ — „постоянную тяготения" и ϑ — зенитное расстояние Луны в точке P. Оно дает горизонтальное ускорение

$$\frac{\partial\Omega}{a\partial\vartheta} = f\sin 2\vartheta \tag{2}$$

в направлении к той точке земной поверхности, которая лежит вертикально под Луной, где

$$f = \frac{3}{2}\frac{\gamma M a}{D^3}. \tag{3}$$

[1]) Airy, Encycl. Metrop., Tides and Waves, отд. VI (1845). Некоторые основания теории были найдены с помощью очень простых методов уже Юнгом (Young) в 1813—1823 годах (Works, II, 262, 291).

Если E есть масса Земли, то мы можем положить

$$g=\gamma\frac{E}{a^2},$$

откуда следует

$$\frac{f}{g}=\frac{3}{2}\frac{M}{E}\left(\frac{a}{D}\right)^3.$$

Положив $\frac{M}{E}=\frac{1}{81}$, $\frac{a}{D}=\frac{1}{60}$, получаем $\frac{f}{g}=8{,}57\cdot10^{-8}$. Если возмущающее тело есть Солнце, то соответственно будет $\frac{f}{g}=3{,}78\cdot10^{-8}$.

Для некоторых целей удобно ввести линейную величину H, определяемую формулой

$$H=\frac{af}{g}. \tag{4}$$

Положив $a=64\cdot10^5$ *м*, мы для лунных приливов получим $H=0{,}55$ *м*, а для солнечных приливов

$$H=0{,}24\ м.$$

В прибавлении будет показано, что H измеряет наибольшую высоту прилива от наибольшего уровня до наименьшего уровня воды согласно статической теории.

§ 181. Рассмотрим случай канала постоянной ширины, который совпадает с земным экватором, и предположим для простоты, что Луна описывает круговую орбиту в этой же плоскости. Пусть ξ есть отнесенное к поверхности Земли перемещение частицы воды, среднее положение которой имеет угол долготы φ, считая на восток от некоторого определенного меридиана.

Если ω есть угловая скорость вращения Земли, то действительное перемещение частицы за время t будет равно $\xi+a\omega t$, так что тангенциальное ускорение будет равно $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$. Приняв, что центробежная сила, как обычно, включена в значение g, можно непосредственно применить рассуждения § 169, 177.

Если n обозначает угловую скорость Луны в направлении на запад, считая от определенного меридиана [1]), то мы можем в формуле (2) § 180 положить

$$\vartheta=nt+\varphi+\varepsilon,$$

так что уравнение движения будет представлено в виде

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\xi}{a^2\,\partial\varphi^2}-f\sin2(nt+\varphi+\varepsilon). \tag{1}$$

Свободные колебания будут определены, если принять во внимание, что ξ должна быть обязательно периодической функцией от φ,

[1]) Мы имеем $n=\omega-n_1$, где n_1 есть угловая скорость Луны на ее орбите.

значения которой повторяются при возрастании φ на 2π. Следовательно, согласно теореме Фурье ξ можно представить в виде

$$\xi = \sum_0^\infty (P_r \cos r\varphi + Q_r \sin r\varphi). \tag{2}$$

Подставив это выражение в уравнение (1) и отбросив последний член, мы найдем, что P_r и Q_r должны удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2P_r}{dt^2} + \frac{r^2c^2}{a^2} P_r = 0. \tag{3}$$

Для любого нормального колебания движение представляет таки образом простое гармоническое колебание с периодом $\frac{2\pi a}{rc}$.

Для *вынужденных* волн или приливов получим

$$\xi = -\frac{1}{4} \frac{fa^2}{c^2 - n^2a^2} \sin 2\,(nt + \varphi + \varepsilon); \tag{4}$$

отсюда следует

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{c^2H}{c^2 - n^2a^2} \cos 2\,(nt + \varphi + \varepsilon). \tag{5}$$

Таким образом здесь мы получим полусуточный прилив (причем подразумеваются, конечно, лунные сутки), который, кроме того, будет „прямым“ или „обращенным“, т. е. будет иметь место высокая вода или низкая вода под Луной, смотря по тому $c \lesseqgtr na$ или, другими словами, смотря по тому, будет ли отнесенная к земной поверхности скорость точки, находящейся всегда вертикально под Луной, меньше или больше скорости свободной волны. При условиях, действительно существующих на Земле, мы имеем

$$\frac{c^2}{n^2a^2} = \frac{g}{n^2a} \frac{h}{a} = 311 \frac{h}{a},$$

так что приливы суть „обращенные“; для противоположного случая глубина канала должна значительно превосходить действительную глубину моря.

Этот результат, который иногда рассматривается как парадокс, вытекает из общего принципа, изложенного в § 168. Он представляет следствие относительной медленности свободных колебаний в экваториальном канале средней глубины.

Из грубых цифр таблицы на стр. 323 видно, что даже при глубине в 3510 метров свободной волне необходимо приблизительно 30 часов, чтобы пробежать половину земной окружности, в то время как период возмущающей силы, производящей приливы, равен приблизительно только 12 часам.

Формула (5) в действительности есть частный случай формулы (14) § 168, так как она может быть представлена в виде

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}} \bar{\eta}, \tag{6}$$

где $\bar{\eta}$ есть данное статической теорией возвышение

$$\bar{\eta} = \frac{1}{2} H \cos 2(nt + \varphi + \varepsilon), \tag{7}$$

и

$$\sigma = 2n, \quad \sigma_0 = \frac{2c}{a}.$$

Для умеренных глубин, от 3000 метров и ниже, n^2a^2 велико сравнительно с gh; амплитуда горизонтального движения согласно уравнению (4) тогда приближенно будет равна $\frac{f}{4n^2}$ или $\frac{g}{4n^2a} H$ и будет почти независимой от глубины. Для лунных приливов эта амплитуда приблизительно равна $42^1/_2$ метрам. Максимум возвышения получается умножением на $\frac{2h}{a}$; это дает для глубины в 3000 метров высоту только 0,04 метра.

Для больших глубин приливы должны быть выше, но все еще обращенными до тех пор, пока будет достигнута критическая глубина $\frac{n^2a^2}{g}$, которая приблизительно равна 24 километрам. Для глубин, превышающих эту границу, приливы становятся прямыми и они все более приближаются к тому виду, который дается статической теорией [1]).

§ 182. Случай канала, совпадающего с земной параллелью, трактуется аналогичным образом. Предполагая, что орбита Луны лежит всегда в плоскости экватора, мы найдем с помощью сферической тригонометрии, что

$$\cos \vartheta = \sin \theta \cos(nt + \varphi + \varepsilon), \tag{1}$$

где θ есть угол, дополнительный к углу широты, а φ — долгота.

Возмущающая сила в направлении долготы будет

$$-\frac{\partial \Omega}{a \sin \theta \, \partial \varphi} = -f \sin \theta \sin 2(nt + \varphi + \varepsilon), \tag{2}$$

а это дает

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{c^2 H \sin^2 \theta}{c^2 - n^2a^2 \sin^2 \theta} \cos 2(nt + \varphi + \varepsilon); \tag{3}$$

следовательно, если $na > c$, то приливы будут прямыми или обращенными, смотря по тому, будет ли $\sin \theta \lesseqgtr \frac{c}{na}$. Если глубина так

[1]) Ср. Young, см. сноску на стр. 318

велика, что $c > na$, то приливы для всех значений θ будут прямыми.

Если Луна не лежит в плоскости экватора, а имеет угол склонения Δ, формулу (1) следует заменить через

$$\cos\vartheta = \cos\theta\cos\Delta + \sin\theta\sin\Delta\cos\alpha, \tag{4}$$

где α обозначает часовой угол Луны относительно меридиана точки P. Для простоты мы пренебрежем движением Луны по склонению сравнительно с угловой скоростью вращения Земли, т. е. мы полагаем

$$\alpha = nt + \varphi + \varepsilon$$

и рассматриваем Δ как постоянную. Составляющая возмущающей силы в направлении параллельного круга будет иметь вид

$$-\frac{\partial\Omega}{a\sin\theta\,\partial\varphi} = -f\cos\theta\sin 2\Delta\sin(nt+\varphi+\varepsilon) - \\ -f\sin\theta\sin^2\Delta\sin 2(nt+\varphi+\varepsilon). \tag{5}$$

Отсюда получается

$$\eta = \frac{1}{2}\,\frac{c^2H}{c^2-n^2a^2\sin^2\theta}\sin 2\theta\sin 2\Delta\cos(nt+\varphi+\varepsilon) + \\ + \frac{1}{2}\,\frac{c^2H}{c^2-n^2a^2\sin^2\theta}\sin^2\theta\sin^2\Delta\cos 2(nt+\varphi+\varepsilon). \tag{6}$$

Первый член дает суточный прилив с периодом $\frac{2\pi}{n}$; этот член обращается в нуль и меняет свой знак, когда Луна пересекает экватор, т. е. дважды в месяц. Второй член представляет полусуточный прилив с периодом $\frac{\pi}{n}$, амплитуда которого теперь меньше, чем прежде, в $\sin^2\Delta$ раз.

§ 183. Когда канал совпадает с меридианом, мы должны обратить внимание на то, что невозмущенная свободная поверхность образует фигуру относительного равновесия при одновременном действии тяготения и центробежной силы и поэтому не в точности является сферической. Мы будем впоследствии иметь случай обстоятельно рассмотреть вопрос о перемещениях по отношению к вращающемуся шару; предвосхищая результаты этого рассмотрения, мы на мгновение предположим, что в *узком канале* возмущения практически таковы, как если бы Земля покоилась, а возмущающее тело вращалось вокруг нее с соответствующей относительной скоростью.

Если принять, что Луна движется в плоскости экватора, и обозначить через $nt+\varepsilon$ часовой угол относительно меридиана канала и через θ — угловое расстояние от полюса точки P канала, то получим

$$\cos\vartheta = \sin\theta\cos(nt+\varepsilon). \tag{1}$$

Уравнение движения будет

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2\xi}{a^2\partial\theta^2} - \frac{\partial\Omega}{a\partial\theta} =$$

$$= c^2\,\frac{\partial^2\xi}{a^2\partial\theta^2} - \frac{1}{2}\,f\sin 2\theta\,\{1+\cos 2(nt+\varepsilon)\}. \qquad (2)$$

В качестве решения мы найдем

$$\eta = -\frac{1}{4}\,H\cos 2\theta - \frac{1}{4}\,\frac{c^2H}{c^2-n^2a^2}\cos 2\theta\cos 2(nt+\varepsilon). \qquad (3)$$

Первый член представляет постоянное изменение среднего уровня на величину

$$\eta = -\frac{1}{4}\,H\cos 2\theta. \qquad (4)$$

Колебания выше и ниже среднего возмущенного уровня даны вторым членом (3). Он представляет полусуточный прилив; мы видим, что для $c < na$, т. е. для действительных условий на Земле, когда Луна стоит в плоскости канала, уровень воды в широтах, бо́льших 45°, повышается, а в широтах, меньших 45°, понижается, и имеет место обратное явление, когда Луна удалена от канала на 90°. Соотношения будут как раз противоположными, когда $c > na$.

Если Луна находится не в плоскости экватора, а имеет известное склонение, то формула для среднего уровня, как это выражено членом, соответствующим формуле (4), имеет некоторый коэфициент, зависящий от склонения, и соответствующее изменение в нем дает четырнадцатидневный прилив, а в случае Солнца — полугодовой. Существует также суточный прилив, знак которого зависит от склонения.

Читателю будет нетрудно проверить эти результаты с помощью данного в прибавлении общего выражения для Ω.

§ 184. В случае канала постоянной ширины, окружающего земной шар (§ 181, 182), имеет место обязательно всюду точное совпадение (или точное противоположение) между фазами возвышения приливов и фазами сил, их производящих. Этого уже не будет, когда канал или море имеет ограниченные размеры.

Возьмем, например, случай экваториального канала конечной длины [1]). Если пренебречь склонением Луны, то мы получим при подходящем выборе начального момента времени

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2\xi}{a^2\partial\varphi^2} - f\sin 2(nt+\varphi) \qquad (1)$$

с условием, что $\xi = 0$ на концах, где, скажем, $\varphi = \pm\alpha$.

---

[1]) Lamb H. и Miss Swain, Phil. Mag. (6), XXIX, 736 (1915). Аналогичный результат при переменной глубине рассматривался Goldsbrough, Proc. Lond. Math. Soc. (2), XV, 64 (1915).

Если пренебречь инерцией воды, то член $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ отпадает, и мы получаем

$$\xi = \frac{1}{4}\frac{fa^2}{c^2}\left\{\sin 2nt\cos 2\alpha + \frac{\varphi}{\alpha}\cos 2nt\sin 2\alpha - \sin 2(nt+\varphi)\right\} \quad (2)$$

и

$$\eta = -\frac{h}{a}\frac{\partial\xi}{\partial\varphi} = \frac{1}{2}H\left\{\cos 2(nt+\varphi) - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\cos 2nt\right\}, \quad (3)$$

где $H = \frac{af}{g}$, как и в § 180. Это есть возвышение, получаемое согласно (исправленной) статической теории, о которой мы будем говорить в прибавлении к этой главе. В центре ($\varphi = 0$) канала имеем

$$\eta = \frac{1}{2}H\cos 2nt\left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right). \quad (4)$$

Если α мало, то возвышения в этой точке будут очень малыми, но все же там нет узла в собственном смысле этого слова. Моменты высокой воды совпадают с прохождением Луны и „противолуны“ [1]). На концах $\varphi = \pm\alpha$ будем иметь

$$\eta = \frac{1}{2}H\left\{\left(1 - \frac{\sin 4\alpha}{4\alpha}\right)\cos 2(nt\pm\alpha) \mp \frac{1-\cos 4\alpha}{4\alpha}\sin 2(nt\pm\alpha)\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}HR_0\cos 2(nt\pm\alpha\mp\varepsilon_0), \quad (5)$$

если

$$R_0\cos 2\varepsilon_0 = 1 - \frac{\sin 4\alpha}{4\alpha}, \quad R_0\sin 2\varepsilon_0 = -\frac{1-\cos 4\alpha}{4\alpha}. \quad (6)$$

Здесь ε_0 обозначает часовой угол Луны, считая от меридиана на запад, когда на восточном конце канала имеет место высокий уровень воды, и считая на восток, когда высокий уровень воды имеет место на западном конце. Если α мало, то приближенно будем иметь

$$R_0 = 2\alpha, \quad \varepsilon_0 = -\frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}\alpha. \quad (7)$$

Если учесть инерцию воды, то получим

$$\xi = \frac{1}{4}\frac{fa^2}{(m^2-1)c^2}\left[\sin 2(nt+\varphi) - \right.$$
$$- \frac{1}{\sin 4m\alpha}\{\sin 2(nt+\alpha)\sin 2m(\varphi+\alpha) -$$
$$\left. - \sin 2(nt-\alpha)\sin 2m(\varphi-\alpha)\}\right], \quad (8)$$

[1]) Это выражение будет объяснено в прибавлении к этой главе.

где $m = \frac{na}{c}$. Отсюда следует [1])

$$\eta = -\frac{1}{2}\frac{H}{m^2-1}\left[\cos 2(nt+\varphi) - \right.$$
$$-\frac{m}{\sin 4m\alpha}\{\sin 2(nt+\alpha)\cos 2m(\varphi+\alpha) -$$
$$\left. -\sin 2(nt-\alpha)\cos 2m(\varphi-\alpha)\}\right]. \qquad (9)$$

Заставив m стремиться к нулю, мы получим формулу (3) статической теории. Заметим, что эти выражения для $m \to 1$ не обращаются в бесконечность, как в случае бесконечного канала. Однако во всех случаях, в которых условия вообще сравнимы с морскими условиями, m значительно больше единицы.

В центре канала будем иметь

$$\eta = -\frac{1}{2}\frac{H}{m^2-1}\cos 2nt\left(1-\frac{m\sin 2\alpha}{\sin 2m\alpha}\right). \qquad (10)$$

Как и в статической теории, при малом α амплитуда очень мала, но при этом нет узла. Для концов мы находим

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{H}{m^2-1}\left\{\left(\frac{m\sin 4\alpha}{\sin 4m\alpha}-1\right)\cos 2(nt\pm\alpha)\pm\right.$$
$$\left.\pm\frac{m(\cos 4m\alpha-\cos 4\alpha)}{\sin 4m\alpha}\sin 2(nt\pm\alpha)\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}HR_1\cos 2(nt\pm\alpha\mp\varepsilon_1), \qquad (11)$$

причем

$$\left.\begin{aligned} R_1\cos 2\varepsilon_1 &= \frac{m\sin 4\alpha-\sin 4m\alpha}{(m^2-1)\sin 4m\alpha}, \\ R_1\sin 2\varepsilon_1 &= \frac{m(\cos 4m\alpha-\cos 4\alpha)}{(m^2-1)\sin 4m\alpha}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Если α будет малым, то имеем приближенно

$$R_1 = 2\alpha, \quad \varepsilon_1 = -\frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}\alpha, \qquad (13)$$

как и в случае статической теории.

Значение R_1 становится бесконечным, когда $\sin 4m\alpha = 0$. Это определяет критические длины канала, для которых существует свободный период, равный $\frac{\pi}{n}$, или половине лунных суток. Предельное значение ε дано в подобном случае формулами

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon_1 = -\operatorname{ctg} 2\alpha \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} 2\varepsilon_1 = \operatorname{tg} 2\alpha,$$

смотря по тому, является ли $4m\alpha$ нечетным или четным кратным π.

[1]) Ср. Airy, Tides and Waves, § 301.

2α (градусы)	$2a\alpha$ (км)	Исправленная статическая теория: Разность высот в центре	Исправленная статическая теория: Разность высот на концах	Исправленная статическая теория: ε_0 (градусы)	Динамическая теория: Разность высот в центре	Динамическая теория: Разность высот на концах	Динамическая теория: ε_1 (градусы)
0	0,0	0	0	−45	0	0	−45
9	1001,7	0,004	0,157	−42	0,004	0,165	−41,9
18	2003,4	0,016	0,311	−32	0,018	0,396	−38,5
27	3005,1	0,037	0,460	−36	0,044	0,941	−33,9
31,5	3505,95	0,050	0,531	−34,5	0,063	1,945	−30,9
36	4006,8	0,065	0,601	−33	0,089	∞	−27 +63
40,5	4508,5	0,081	0,668	−31,6	0,125	1,956	+68,2
45	5008,5	0,100	0,733	−30,1	0,174	0,987	+75,7
54	6010,2	0,142	0,853	−27,2	0,354	0,660	−83,5
63	7011,9	0,190	0,959	−24,4	0,918	1,141	−65,1
72	8013,6	0,243	1,051	−21,6	∞	∞	−54 +36
81	9015,3	0,301	1,127	−18,9	1,459	1,112	+44,5
90	10017,0	0,363	1,185	−16,2	0,864	0,513	+55,9

Таблица иллюстрирует случай $m=2{,}5$. Если $\frac{\pi}{n}$ равно 12 лунным часам, то это соответствует глубине в 3300 метров, которая является величиной порядка средней морской глубины. Соответствующая скорость волн равна приблизительно 667 километрам в час. Первая критическая длина равна 4000 километров ($\alpha={}^1/_{10}\,\pi$). Единица, которой измеряются максимальные разности высот, есть величина H, значение которой для лунного прилива равно приблизительно 0,549 метра. Часовые углы ε_0 и ε_1 выбраны таким образом, что они всегда лежат между $-90°$ и $+90°$; положительный знак указывает на запад от меридиана для восточного конца канала и на восток от меридиана для западного его конца.

Движение волн в канале с переменным поперечным сечением

§ 185. Когда поперечное сечение S канала не одинаково повсюду, а постепенно меняется от точки к точке, то уравнение неразрывности согласно (11) § 169 будет

$$\eta=-\frac{1}{b}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(S\xi), \tag{1}$$

где b обозначает ширину свободной поверхности. Если h есть средняя глубина при ширине b, то $S=bh$ и

$$\eta=-\frac{1}{b}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(hb\xi), \tag{2}$$

где h и b суть теперь функции от x.

Уравнение движения имеет тот же вид, что и раньше:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -g\,\frac{\partial\eta}{\partial x}\,. \tag{3}$$

Из (2) и (3) мы можем исключить либо η, либо ξ; уравнение для η будет

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \frac{g}{b}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(hb\,\frac{\partial\eta}{\partial x}\right). \tag{4}$$

Законы распространения волн в канале с непрерывно меняющимся прямоугольным сечением были изучены Грином [1]). Его результаты, свободные от ограничения специальной формой сечения, можно получить следующим образом.

Если мы введем определяемую уравнением

$$\frac{dx}{d\tau} = (gh)^{1/2} \tag{5}$$

переменную τ вместо x, то уравнение (4) перейдет в

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \eta'' + \left(\frac{b'}{b} + \frac{1}{2}\,\frac{h'}{h}\right)\eta'; \tag{6}$$

штрихи показывают здесь диференцирование по τ. Если бы b и h были постоянны, то уравнению (6) можно было бы удовлетворить, как в § 170, полагая

$$\eta = F(\tau - t);$$

в рассматриваемом же случае для пробы возьмем

$$\eta = \Theta \cdot F(\tau - t), \tag{7}$$

где Θ является функцией только одной τ. Подставив это выражение η в уравнение (6), получим

$$2\,\frac{\Theta'}{\Theta}\,\frac{F'}{F} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \left(\frac{b'}{b} + \frac{1}{2}\,\frac{h'}{h}\right)\left(\frac{F'}{F} + \frac{\Theta'}{\Theta}\right) = 0. \tag{8}$$

Члены этого уравнения, содержащие F, сокращаются, если

$$2\,\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{b'}{b} + \frac{1}{2}\,\frac{h'}{h} = 0,$$

или

$$\Theta = Cb^{-1/2}h^{-1/4}, \tag{9}$$

где C есть постоянная. Поэтому уравнение (4) будет удовлетворено, если предположить, что остальными членами (8) можно пренебречь.

Это приближение оправдывается, если мы можем пренебречь $\frac{\Theta''}{\Theta}$ и $\frac{\Theta'}{\Theta}$ по сравнению с $\frac{F'}{F}$. Что касается $\frac{\Theta'}{\Theta}$, то из (9) и (7) следует,

[1]) Green, On the Motion of Waves in a Variable Canal of small depth and width, Camb. Trans., VI (1837) [Papers, стр. 225]; см. также Airy, Tides and Waves, § 260.

что это равносильно пренебрежению величинами $b^{-1}\frac{db}{dx}$ и $h^{-1}\frac{dh}{dx}$ по сравнению с $\eta^{-1}\frac{\partial\eta}{\partial x}$. Если λ означает длину волны в общем смысле § 172, то $\frac{\partial\eta}{\partial x}$ есть величина такого же порядка, как и $\frac{\eta}{\lambda}$, и наше допущение обозначает, что $\lambda\frac{db}{dx}$ и $\lambda\frac{dh}{dx}$ соответственно малы по сравнению с b и h. Другими словами, мы предполагаем, что поперечные измерения канала изменяются в пределах длины волны только на малую часть своей величины. Подобным же образом легко усмотреть что пренебрежение $\frac{\theta''}{\theta'}$ по сравнению с $\frac{F'}{F}$ равносильно аналогичному ограничению относительно скорости изменений $\frac{db}{dx}$ и $\frac{dh}{dx}$.

Так как уравнение (4) не изменяется от перемены знака перед t, то полное решение при вышеуказанных ограничениях будет

$$\eta = b^{-1/2}h^{-1/4}\{F(\tau - t) + f(\tau + t)\}, \tag{10}$$

где F и f суть произвольные функции.

Первый член этого выражения для η представляет волну, распространяющуюся в направлении положительной оси x. Скорость распространения в произвольной точке мы найдем из того соображения, что всякая отдельная фаза повторяется, когда $\delta\tau$ и δt имеют одинаковые значения; таким образом она согласно (5) будет равна $\sqrt{gh}$, т. е. в точности тому же, что и в случае постоянного сечения. Таким же образом второй член выражения (10) представляет волну, распространяющуюся в направлении отрицательной оси x. В обоих случаях возвышение произвольной части волны изменяется при поступательном ее движении по закону $b^{-1/2}h^{-1/4}$.

Отражение прогрессивной волны в точке, где поперечное сечение канала внезапно меняется, было исследовано в § 176. Данные там формулы показывают, как и следовало ожидать, что амплитуда отраженной волны будет тем меньше, чем меньше изменение размеров сечения. Случай, когда переход от одного сечения к другому происходит не внезапно, а непрерывно, был изучен Рэлеем для частного закона изменения сечения [1]). Оказывается, что практически отражение будет отсутствовать, если расстояние, внутри которого имеет место переход, есть незначительное кратное от длины волны; в противоположном случае, наоборот, результаты совпадают с результатами § 176.

Если мы примем на основании этих результатов, что прогрессивная волна не испытывает никакого заметного распадения при отражении, в том случае, когда можно пренебречь изменением сечения внутри длины волны, то закон амплитуд следует тотчас же из прин-

[1]) Rayleigh, On Reflection of Vibration at the Confines of two Media between which the Transition is gradual, Proc. Lond. Math. Soc. XI, 51 (1880) [Papers I, 460]; Theory of Sound, 2-е изд., London, 1894, § 148b.

ципа энергии [1]). Из § 174 видно, что энергия волны пропорциональна длине, ширине и квадрату высоты; но легко показать, что длины волн в различных частях канала изменяются как соответствующие скорости распространения волн, т. е. как квадратные корни из средних глубин. Отсюда следует, в прежних обозначениях, что $\eta^2 b h^{1/2}$ будет постоянным или что η пропорционально $b^{-1/2}h^{-1/4}$, а это и есть указанный закон Грина.

§ 186. В случае простого гармонического колебания, при котором η пропорционально $\cos(\sigma t+\varepsilon)$, уравнение (4) предыдущего параграфа представится в виде

$$\frac{g}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left(hb\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\sigma^2\eta=0. \tag{1}$$

Некоторые наиболее интересные частные случаи могут быть легко разобраны.

1. Пусть в канале ширина будет пропорциональна расстоянию от конца $x=0$, а глубина везде будет одинаковой; предположим далее, что канал в своем устье $(x=a)$ соединен с открытым морем, в котором происходит приливное движение по закону

$$\eta=C\cos(\sigma t+\varepsilon). \tag{2}$$

Положив в уравнении (1) $h=\text{const.}$ и b пропорционально x, получим

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+k^2\eta=0, \tag{3}$$

где

$$k^2=\frac{\sigma^2}{gh}. \tag{4}$$

Отсюда следует

$$\eta=C\frac{J_0(kx)}{J_0(ka)}\cos(\sigma t+\varepsilon). \tag{5}$$

Кривая $y=J_0(x)$ изображена на фиг. 44, которая показывает, как увеличивается амплитуда вынужденного колебания в зависимости от расстояния от устья, в то время как длина волны остается почти постоянной.

2. Предположим теперь, что изменяется только глубина, равномерно возрастая от конца канала $x=0$ вплоть до устья, в то время как ширина остается постоянной. Положив в уравнении (1)

$$h=h_0\frac{x}{a}, \quad \varkappa=\frac{\sigma^2 a}{gh_0},$$

мы получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\varkappa\eta=0. \tag{6}$$

То решение этого уравнения, которое конечно для $x=0$, будет

$$\eta=A\left(1-\frac{\varkappa x}{1^2}+\frac{\varkappa^2x^2}{1^2 2^2}-\ldots\right), \tag{7}$$

или

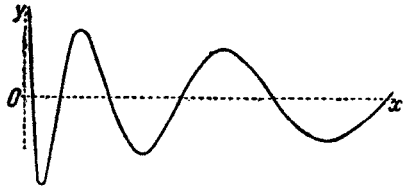
$$\eta=AJ_0(2\varkappa^{1/2}x^{1/2}), \tag{8}$$

[1]) Rayleigh, см. примечание на стр. 328.

или, наконец, введя опять временной множитель и определив постоянную, получим

$$\eta = C\,\frac{J_0\,(2\varkappa^{1/2}x^{1/2})}{J_0\,(2\varkappa^{1/2}a^{1/2})}\cos(\sigma t+\varepsilon). \tag{9}$$

Кривая $y = J_0(\sqrt{x})$ (фиг. 42) (для ясности масштаб для y взят в двести раз больше такового для x) показывает, как амплитуда непрерывно возрастает, а длина волны убывает, если итти вверх по каналу. Эти примеры могут служить для объяснения увеличения морских приливов, которые происходят в мелких морях и в лиманах.



Фиг. 42.

3. Если и ширина и глубина изменяются пропорционально расстоянию от конца $x=0$, то, положив $b = b_0\,\frac{x}{a}$, $h = h_0\,\frac{x}{a}$, получим

$$x\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+2\,\frac{\partial\eta}{\partial x}+\varkappa\eta = 0, \tag{10}$$

где, как и раньше, $\varkappa = \frac{\sigma^2 a}{gh_0}$. Отсюда следует

$$\eta = A\left(1-\frac{\varkappa x}{1\cdot 2}+\frac{\varkappa^2x^2}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 4}-\ldots\right)\cos(\sigma t+\varepsilon). \tag{11}$$

Этот ряд равен $\frac{I_1\,(2\varkappa^{1/2}x^{1/2})}{\varkappa^{1/2}x^{1/2}}$, а постоянная A определяется при сравнении с формулой (2). Этот случай находится в прекрасном соответствии с условиями в Бристольском канале (наблюдавшиеся там на различных станциях приливы хорошо согласуются с этой формулой) [1]).

Присоединим сюда еще некоторые простые задачи относительно свободных колебаний.

4. Рассмотрим канал постоянной ширины и длины $2a$, дно которого равномерно понижается от обоих концов к середине. Если взять начало на одном конце, то движение в первой половине канала определяется, как выше, формулой

$$\eta = AJ_0\,(2\varkappa^{1/2}x^{1/2}), \tag{12}$$

где $\varkappa = \frac{\sigma^2 a}{gh_0}$ и h_0 обозначает глубину в середине.

Очевидно, что нормальные колебания распадаются на два класса. В первом классе η в соответствующих точках обеих половин канала имеет противоположные значения, и поэтому в середине ($x=a$) будет обращаться в нуль. Значения σ при этом будут определяться с помощью формулы

$$J_0\,(2\varkappa^{1/2}a^{1/2}) = 0. \tag{13}$$

Это значит, что если $\varkappa$ есть произвольный корень этого уравнения, то

$$\sigma = \frac{(gh_0)^{1/2}}{a}\,(\varkappa a)^{1/2}. \tag{14}$$

[1]) Taylor G. J., Camb. Proc., XX, 320 (1921).

Во втором классе значения η будут симметричны относительно середины, так что в середине будем иметь $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$. Это дает

$$J_0'(2\varkappa^{1/2}a^{1/2}) = 0. \tag{15}$$

Легко найти, что самое медленное колебание принадлежит несимметричному классу и соответствует самому малому корню уравнения (13); этот наименьший корень равен $2\varkappa^{1/2}a^{1/2} = 0{,}7655\,\pi$; отсюда следует

$$\frac{2\pi}{\sigma} = 1{,}306\,\frac{4a}{(gh_0)^{1/2}}.$$

5. Предположим, что глубина канала изменяется по следующему закону:

$$h = h_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \tag{16}$$

где x обозначает расстояние от середины. Подставив h в уравнение (1) и положив $b = \text{const.}$, мы найдем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right\} + \frac{\sigma^2}{gh_0}\,\eta = 0. \tag{17}$$

Если положить

$$\sigma^2 = n(n+1)\,\frac{gh_0}{a^2}, \tag{18}$$

то (17) будет иметь такой же вид, как общее уравнение зональных сферических функций (1) § 84.

В настоящей задаче n определяется из условия, что η для $\frac{x}{a} = \pm 1$ должна быть конечной. Согласно § 85 это значит, что n есть целое число; нормальные колебания имеют, следовательно, тип

$$\eta = CP_n\left(\frac{x}{a}\right)\cos(\sigma t + \varepsilon), \tag{19}$$

где P_n есть зональная сферическая функция, а значение σ определяется из (18).

При наиболее медленном колебании ($n = 1$) профиль свободной поверхности есть прямая линия. Для канала постоянной глубины h_0 и той же самой длины $2a$ соответствующее значение σ равно $\frac{\pi c}{2a}$, где $c = (gh_0)^{1/2}$. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае частота будет меньше в отношении $2\sqrt{\pi}$, или 0,9003 [1]).

Вынужденные колебания, вызываемые возмущающей силой

$$X = f\cos(\sigma t + \varepsilon), \tag{20}$$

---

[1]) Что касается обобщений и применений к теории „сейшей" в бухтах, см. Chrystal Some Results in the Mathematical Theory of Seiches, Proc. R. S. Edin., XXV, 328 (1904), и Trans. R. S. Edin., XLI, 599 (1905). Новейшие исследования можно найти у Proudman, Proc. Lond. Math. Soc. (2), XIV, 240 (1914) и Doodson, Trans. R. S. Edin., LII, 629 (1920); Jeffreys, M. N. R. A. S., Geophys. Suppt. 1, 495 (1928).

могут быть получены согласно закону (14) § 168. Статическая форма свободной поверхности, очевидно, определяется так:

$$\overline{\eta} = \frac{f}{g} x \cos(\sigma t + \varepsilon), \tag{21}$$

и так как данная сила соответствует нормальному типу $n = 1$, то

$$\eta = \frac{f}{g\left(1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right)} x \cos(\sigma t + \varepsilon), \tag{22}$$

где

$$\sigma_0^2 = \frac{2gh_0}{a^2}.$$

Волны с конечной амплитудой

§ 187. Если возвышение волны сравнительно со средней глубиной не мало, то даже в канале постоянного прямоугольного сечения распространение волны совершается не без изменения ее формы. Эта задача была сначала разобрана Эри [1]) методом последовательных приближений. Он нашел, что в прогрессивной волне различные части движутся с различными скоростями, причем скорость волны, соответствующая возвышению η, приближенно дается формулой (6) § 175.

Более полное освещение вопроса можно получить методом, подобным тому, который применял Риман при изложении аналогичной акустической задачи (см. § 282).

Единственное допущение, которое мы теперь примем, состоит в том, что можно пренебречь вертикальным ускорением. Отсюда следует, как это было разъяснено в § 169, что горизонтальную скорость для всех точек сечения канала можно считать одинаковой. Уравнение движения будет, как раньше,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{1}$$

и уравнение неразрывности, как легко видеть, в случае прямоугольного сечения имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\{(h+\eta)u\} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}, \tag{2}$$

или

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = -(h+\eta)\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{3}$$

где h обозначает глубину.

---

[1]) См. сноску на стр. 329.

Если уравнение (3) умножить на $f'(\eta)$, где $f(\eta)$ подлежит еще определению, и сложить с (1), то получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)\{f(\eta)+u\}=-(h+\eta)f'(\eta)\frac{\partial u}{\partial x}-g\frac{\partial \eta}{\partial x}=$$
$$=-(h+\eta)f'(\eta)\frac{\partial}{\partial x}\{f(\eta)+u\}, \qquad (4)$$

если положить

$$(h+\eta)\{f'(\eta)\}^2=g.$$

Уравнение (4) удовлетворяется с помощью

$$f(\eta)=2c_0\left\{\left(1+\frac{\eta}{h}\right)^{1/2}-1\right\}, \qquad (5)$$

где $c_0=\sqrt{gh}$. Если положить

$$P=f(\eta)+u, \quad Q=f(\eta)-u, \qquad (6)$$

то будем иметь

$$\frac{\partial P}{\partial t}+(u+v)\frac{\partial P}{\partial x}=0. \qquad (7)$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+(u-v)\frac{\partial Q}{\partial x}=0, \qquad (8)$$

где

$$v=(h+\eta)f'(\eta)=c_0\left(1+\frac{\eta}{h}\right)^{1/2}. \qquad (9)$$

Отсюда следует, что P постоянно в (геометрической) точке, которая движется в направлении положительной оси x со скоростью

$$c_0\left(1+\frac{\eta}{h}\right)^{1/2}+u; \qquad (10)$$

Q, напротив, будет постоянной в точке, которая движется в направлении отрицательной оси x со скоростью

$$c_0\left(1+\frac{\eta}{h}\right)^{1/2}-u. \qquad (11)$$

Это значит, что всякое данное значение P передвигается вперед, а всякое данное значение Q передвигается назад со скоростями, данными формулами (10) и (11). Значения P и Q определяются с помощью значений η и u и обратно.

Возьмем в качестве примера начальное возмущение, ограниченное отрезком, для которого $a<x<b$, так что P и Q в начальный момент для $x<a$ и $x>b$ были равны нулю. Область, в которой P отлично от нуля, движется, следовательно, вперед, в то время как область, в которой Q отлично от нуля, движется назад; эти области после некоторого определенного промежутка времени разобщаются друг от друга и оставляют между собой пространство, в котором $P=0$ и $Q=0$, и жидкость, следовательно, находится в покое. Первона-

чальное возмущение распадается, таким образом, на две прогрессивные волны, которые распространяются в противоположных направлениях.

Для волны, распространяющейся в положительном направлении, имеем

$$Q=0,\ \frac{1}{2}P=u=2c_0\left\{\left(1+\frac{\eta}{h}\right)^{1/2}-1\right\}, \tag{12}$$

так что возвышение и скорость частиц будут связаны определенным соотношением (ср. § 171). Скорость волны дана формулами (10) и (12); в данном случае она будет равна

$$c_0\left\{3\left(1+\frac{\eta}{h}\right)^{1/2}-2\right\}. \tag{13}$$

Если отвлечься от членов высшего порядка $\frac{\eta}{h}$, то это совпадает с результатом Эри [(6) § 175].

Аналогичные заключения можно сделать относительно волны, распространяющейся в отрицательном направлении [1]).

Так как скорость волны растет вместе с возвышением, то оказывается, что в прогрессивной системе волн наклон на передней стороне делается все более крутым, а на задней стороне все более пологим, и здесь может быть достигнуто такое состояние, при котором мы более не вправе пренебрегать вертикальным ускорением. О том, что будет после этого момента, данная теория не может дать нам указаний; наблюдения, однако, показывают, что гребни стремятся в конце концов свернуться в завиток и затем распадаются.

Случай „высокого прилива", когда имеет место внезапный переход от одного постоянного уровня к другому, можно рассмотреть с помощью приема стационарного движения (§ 175). Обозначая через Q объем, который протекает в единицу времени через сечение, ширина которого равна единице имеем

$$u_1h_1=u_2h_2=Q, \tag{14}$$

где индексы относятся к двум неизменяемым состояниям, а h_1 и h_2 означают глубины. Если мы рассмотрим массу жидкости, которая в данный момент заключена между двумя сечениями с разных сторон порога, то мы увидим, что количество движения этой массы в единицу времени возрастает на $\varrho Q(u_2-u_1)$, причем второе сечение предполагается находящимся направо от первого. Так как средние давления по сечению равны соответственно $\frac{1}{2}g\varrho h_2$ и $\frac{1}{2}g\varrho h_1$, то будем иметь

$$Q(u_2-u_1)=\frac{1}{2}g(h_1^2-h_2^2). \tag{15}$$

Отсюда и из (14) следует

$$Q^2=\frac{1}{2}gh_1h_2(h_1+h_2). \tag{16}$$

---

[1]) Эти результаты получаются также из уравнения (3) § 173, именно методом, данным Earnshaw; см. § 283.

Сообщив всей массе скорость $-u_1$, мы получим волну, нахлынувшую на спокойную воду, скорость распространения которой в отрицательном направлении равна

$$u_1 = \sqrt{\frac{gh_2(h_1+h_2)}{2h_1}}. \tag{17}$$

Скорость частиц в волне, двигающейся вперед, будет равна $u_1 - u_2$ в направлении движения. Эта величина положительна или отрицательна, смотря по тому, будет ли $h_2 \gtrless h_1$, т. е. смотря по тому, имеем ли мы поднимающуюся волну или спадающую.

Уравнение энергии, однако, будет нарушено, за исключением случая, когда разность уровней бесконечно мала. При стационарном движении, если частица движется вдоль линии тока на поверхности, то потеря ее энергии при прохождении порога будет равна

$$\frac{1}{2}\varrho(u_1^2 - u_2^2) + g\varrho(h_1 - h_2) \tag{18}$$

на единицу объема. Вследствие уравнений (14) и (16) это выражение принимает вид

$$\frac{g\varrho(h_2-h_1)^3}{4h_1h_2}. \tag{19}$$

Отсюда следует в той мере, в какой наши исследования вообще имеют значение, что скачек возвышения ($h_2 > h_1$) может распространяться без изменения далее, если только допустить, что имеет место рассеяние энергии в соответствующем размере в месте порога. Если же, однако, $h_2 < h_1$, то выражение (19) будет отрицательным и поэтому необходима в этом случае *прибавка* энергии. А тогда выходит, что отрицательный скачек, т. е. скачек понижения ни в коем случае не может далее продолжаться без изменения [1]).

§ 188. При обстоятельном применении уравнений (1) и (3) к явлениям прилива пользуются обыкновенно методом последовательного приближения. В качестве примера мы рассмотрим канал, который одним концом ($x = 0$) соединяется с открытым морем, где возвышение дано формулой

$$\eta = a\cos\sigma t. \tag{20}$$

В первом приближении имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -h\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{21}$$

Решения этих уравнений, совместимые с (20), будут

$$\left.\begin{aligned} \eta &= a\cos\sigma\left(t - \frac{x}{c}\right), \\ u &= \frac{ga}{c}\cos\sigma\left(t - \frac{x}{c}\right). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

[1]) Rayleigh, On the Theory of Long Waves and Bores, Proc. Roy. Soc. A., XC, 324 (1914) [Papers, VI, 250].

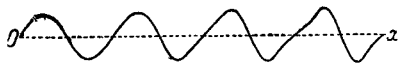
Чтобы получить второе приближение, мы эти значения η и u подставим в (1) и (3); тогда получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -g\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g^2\sigma a^2}{2c^3}\sin 2\sigma\left(t-\frac{x}{c}\right),\\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -h\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{g\sigma a^2}{c^2}\sin 2\sigma\left(t-\frac{x}{c}\right).\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Если проинтегрировать эти уравнения обыкновенными методами, то решение, совместимое с (20), будет

$$\left.\begin{aligned}\eta &= a\cos\sigma\left(t-\frac{x}{c}\right) - \frac{3}{4}\frac{g\sigma a^2}{c^3}x\sin 2\sigma\left(t-\frac{x}{c}\right),\\ u &= \frac{ga}{c}\cos\sigma\left(t-\frac{x}{c}\right) - \frac{1}{8}\frac{g^2a^2}{c^3}\cos 2\sigma\left(t-\frac{x}{c}\right) -\\ &\qquad - \frac{3}{4}\frac{g^2\sigma a^2}{c^4}x\sin 2\sigma\left(t-\frac{x}{c}\right).\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Прилагаемая фиг. 43 показывает, конечно, с преувеличенной амплитудой, профиль волны, вычисленный из первого из этих двух уравнений для некоторого частного случая. Необходимо отметить следующее: если зафиксируем внимание на какой-либо определенной точке канала, то заметим, что поднятие и падение воды происходят несимметрично, а именно падение требует более продолжительного времени, чем поднятие.



Фиг. 43.

Присутствие множителя x вне знака тригонометрической функции в (24) указывает на существование границы, вне которой приближение не годится. Условие для применения способа последовательных приближений состоит, очевидно, в том, что $\frac{g\sigma ax}{c^3}$ должно быть мало. Если мы положим

$$c^2 = gh, \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\sigma},$$

то эта дробь будет равна

$$2\pi\frac{a}{h}\frac{x}{\lambda}.$$

Отсюда следует, что как бы мало ни было отношение первоначального возвышения a к глубине, вышенаписанная дробь перестает быть малой, когда x есть достаточно большое кратное от длины волны (λ).

Необходимо отметить, что указанная сейчас граница в правой части фигуры уже превзойдена и что странные явления, которые начинают встречаться на заднем скате, происходят скорее от несовершенства наших методов вычисления, чем от действительных свойств волн. Если бы мы продолжили кривую, то нашли бы на заднем склоне вторичный максимум и минимум возвышения. Этим путем Эри пытался объяснить явление двойной высокой воды, которая наблюдается в некоторых реках; но на основании указанного выше соображения это заключение не может быть состоятельным [1]).

Но это затруднение не должно встретиться в канале, закрытом на некотором расстоянии от устья неподвижной стеной, или в случае вынужденных волн, образованных периодической силой, в канале, закрытом с обоих концов (§ 179). Для определения общего характера результатов, ожидавшихся в этих

[1]) Mc. Cowan, см. сноску на стр. 326.

случаях, однако, уже достаточно сказано, а что касается дальнейших частностей, то мы сошлемся на учебник Эри [1]).

Если разложить выражение для возвышения в какой-нибудь точке (x), например, формулы (24), на простые тригонометрические функции от времени, то оно будет состоять из двух членов, из которых второй представляет сверхприлив, или прилив второго порядка, так как он пропорционален a^2; частота этого прилива в два раза больше частоты начального приливного колебания, определяемого законом (20). Продолжая приближение, мы получим приливы еще большего порядка, частоты которых тогда в три, четыре и т. д. раза больше частот первоначального прилива.

Если вместо (20) возмущение в устье канала будет дано формулой

$$\zeta = a\cos\sigma t + a'\cos(\sigma' t + \varepsilon),$$

то легко определить, что при втором приближении получаются подобным образом приливы с периодами $\frac{2\pi}{\sigma+\sigma'}$ и $\frac{2\pi}{\sigma-\sigma'}$; они называются „комбинационными приливами и аналогичны комбинационным тонам" акустики которые были исследованы впервые Гельмгольцем [2]).

Распространение волн в двух измерениях

§ 189. Предположим сначала, что мы имеем плоский слой воды постоянной глубины h. Если пренебречь вертикальным ускорением, то горизонтальное движение для всех частиц одной и той же вертикали должно быть, как и раньше, одно и то же. Пусть оси x и y горизонтальны, u и v обозначают горизонтальные компоненты скорости в точке (x, y) и ζ есть соответствующее возвышение свободной поверхности над невозмущенным уровнем. Уравнение неразрывности получим, вычисляя поток жидкости в призматическом объеме, который имеет основанием элементарный прямоугольник $\delta x\,\delta y$; пренебрегая членами второго порядка, получим

$$\frac{\partial}{\partial x}(uh\,\delta y)\,\delta x + \frac{\partial}{\partial y}(vh\,\delta x)\,\delta y = -\frac{\partial}{\partial t}\{(\zeta + h)\,\delta x\,\delta y\};$$

откуда

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right). \tag{1}$$

При отсутствии возмущающих сил уравнения движения будут

$$\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \varrho\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y},$$

где мы можем положить

$$p - p_0 = g\varrho(z_0 + \zeta - z),$$

если z_0 будет обозначать ординату свободной поверхности в невозмущенном состоянии. Тогда получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial y}. \tag{2}$$

[1]) Airy, Tides and Waves, § 198, ... и 308; см. также G. H. Darwin, Tides, Encycl. Britann. (9-е изд.), XXIII, 362, 363 (1888).

[2]) Helmholtz, Über Kombinationstöne, Berl. Monatsber., 22 Mai 1856 [Wiss. Abh., I, 256]; и Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden, Crelle, LVII, 14 (1859) [Wiss. Abh., I, 318].

Исключив u и v, будем иметь

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right), \tag{3}$$

где, как и выше, $c^2 = gh$.

При применении к гармоническим колебаниям можно уравнения (2) и (3) упростить, вводя комплексный временной множитель $e^{i(\sigma t + \varepsilon)}$ и в конечном счете отбрасывая мнимые части наших выражений. Это будет законным до тех пор, пока мы имеем дело только с линейными уравнениями. Тогда согласно уравнениям (2)

$$u = \frac{ig}{\sigma}\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \quad v = \frac{ig}{\sigma}\frac{\partial\zeta}{\partial y}, \tag{4}$$

а уравнение (3) будет

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + k^2\zeta = 0, \tag{5}$$

где

$$k^2 = \frac{\sigma^2}{c^2}. \tag{6}$$

Условие, которое должно выполняться на вертикальной границе, получается как раз из формулы (4); оно имеет вид

$$\frac{\partial\zeta}{\partial n} = 0, \tag{7}$$

где ∂n обозначает элемент нормали к ограничивающей поверхности.

Если жидкость находится под действием малых возмущающих сил, колебаниями которых в пределах глубины можно пренебречь, то уравнения (2) заменяются через

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \tag{8}$$

где Ω есть потенциал этих сил.

Положив

$$\bar{\zeta} = -\frac{\Omega}{g}, \tag{9}$$

где $\bar{\zeta}$ обозначает статическое возвышение, соответствующее потенциалу Ω, можно уравнения (8) написать так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial}{\partial x}(\zeta - \bar{\zeta}), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial}{\partial y}(\zeta - \bar{\zeta}), \tag{10}$$

В случае простого гармонического колебания эти уравнения принимают вид

$$u = \frac{ig}{\sigma}\frac{\partial}{\partial x}(\zeta - \bar{\zeta}), \quad v = \frac{ig}{\sigma}\frac{\partial}{\partial y}(\zeta - \bar{\zeta}); \tag{11}$$

откуда, подставляя в уравнение неразрывности (1), мы получим

$$(\Delta_1 + k^2)\zeta = \Delta_1\bar{\zeta}, \tag{12}$$

где, как раньше,

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{13}$$

и $k^2 = \frac{\sigma^2}{gh}$. Условие, которое должно быть выполнено на вертикальной границе, будет теперь

$$\frac{\partial}{\partial n}(\zeta - \bar{\zeta}) = 0. \tag{14}$$

§ 190. Уравнение (3) § 189 по виду тождественно с уравнением, которое встречается в теории поперечных колебаний равномерно натянутой мембраны. Еще более глубокая связь имеется, если принять во внимание граничные условия, с теорией цилиндрических звуковых волн [1]). Действительно, многие результаты этой теории можно непосредственно перенести на плоские волны жидкости.

Чтобы получить свободные колебания слоя воды, ограниченного вертикальными стенками, мы должны найти решение уравнения

$$(\Delta_1 + k^2)\zeta = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0. \tag{2}$$

Подобным же образом, как и в § 178, находим, что такое решение возможно только для определенных значений k, через которые в конце концов определяются периоды $\frac{2\pi}{kc}$ различных нормальных колебаний.

В случае если контур есть *прямоугольник*, причем начало координат помещается в одной из вершин, а оси x и y направлены вдоль двух сторон, то граничные условия будут иметь вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \text{ для } x = 0 \text{ и } x = a$$

и

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \text{ для } y = 0 \text{ и } y = b,$$

где a и b суть длины сторон, параллельных осям x и y. Самое общее выражение для ζ, которое удовлетворяет этим условиям, дается двойным рядом Фурье

$$\zeta = \sum\sum A_{m,n} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}, \tag{3}$$

где суммирования распространяются на все целые значения m и n между 0 и ∞. Подставив это выражение в (1), мы найдем

$$k^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right). \tag{4}$$

[1]) Rayleigh, Theory of Sound, § 338.

Если $a>b$, то мы получим самое медленное колебание, если положим $m=1$, $n=0$, откуда следует $ka=\pi$. Движение тогда всюду параллельно более длинной стороне прямоугольника; ср. § 178.

§ 191. В случае *кругового* слоя воды удобно взять начало координат в центре и ввести полярные координаты

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta.$$

Уравнение (1) предыдущего параграфа будет тогда

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2}+k^2\zeta=0. \tag{1}$$

Это уравнение, конечно, можно найти также и непосредственно.

Чтобы выяснить зависимость от θ, мы разложим ζ по теореме Фурье в ряд косинусов и синусов, кратных θ. Мы получим ряд, члены которого имеют вид

$$f(r)\cos s\theta,\quad f(r)\sin s\theta. \tag{2}$$

Вставляя в уравнение (1), найдем, что каждый из этих членов в отдельности должен удовлетворять уравнению (1) и что имеет место уравнение

$$f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)+\left(k^2-\frac{s^2}{r^2}\right)f(r)=0. \tag{3}$$

Это уравнение (3) имеет тот же вид, как (14) § 101. Так как для $r=0$ ζ должно быть конечным, то различные нормальные колебания можно выразить через

$$\left.\begin{aligned}\zeta&=A_sJ_s(kr)\cos s\theta\cos(\sigma t+\varepsilon),\\ \zeta&=A_sJ_s(kr)\sin s\theta\cos(\sigma t+\varepsilon),\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где s может иметь любое из значений 0, 1, 2, 3, ..., а A_s есть произвольная постоянная. Возможные значения k определяются условием $\frac{\partial\zeta}{\partial r}=0$ на контуре $r=a$ и это дает

$$J_s'(ka)=0. \tag{5}$$

Соответствующие частоты (σ) колебаний будут тогда

$$\sigma=kc,$$

где $c=\sqrt{gh}$.

Для случая $s=0$ движение будет симметричным относительно начала, и гребни и впадины волн образуют окружности. Наименьшие корни уравнений

$$J_0'(ka)=0 \text{ или } J_1(ka)=0 \tag{6}$$

суть

$$\frac{ka}{\pi}=1{,}2197,\ 2{,}2330,\ 3{,}2383,\ \ldots \tag{7}$$

Эти значения стремятся к

$$\frac{ka}{\pi} = m + \frac{1}{4},$$

где m есть целое число [1]). Отсюда следует

$$\frac{\sigma a}{c} = 3{,}832,\ 7{,}016,\ 10{,}173,\ \ldots \tag{7a}$$

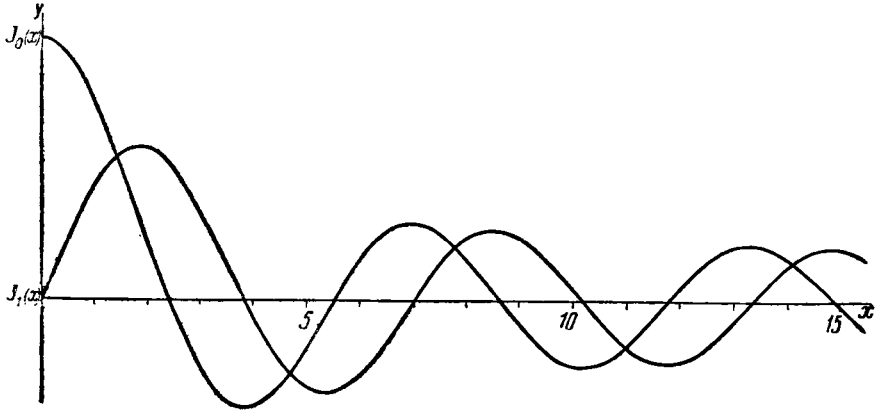
В m-м виде колебаний симметрического класса имеется m узловых окружностей, радиусы которых определяются из уравнения $\zeta = 0$ или

$$J_0(kr) = 0. \tag{8}$$

Корни этого уравнения (8) суть [2])

$$\frac{kr}{\pi} = 0{,}7655,\ 1{,}7571,\ 2{,}7546,\ \ldots \tag{9}$$

Например, в первом симметрическом виде колебаний имеем одну узловую окружность, радиус которой $r = 0{,}628\,a$. Форма сечения



Фиг. 44. Для ясности масштаб по оси ординат выбран в пять раз больше, чем по оси абсцисс.

свободной поверхности с плоскостью, проходящей через ось z, может быть усмотрена при любом из этих колебаний на основании вида кривой $y = J_0(x)$, начерченной на фиг. 44.

---

[1]) Stokes, On the Numerical Calculation of a Class of Definite Integrals and Infinite Series, Camb. Trans., IX (1850) [Papers, II, 355]. Необходимо отметить, что $\frac{ka}{\pi}$ равна $\frac{\tau_0}{\tau}$, где τ означает действительный период, а τ_0 время, которое требует прогрессивная волна, чтобы пройти со скоростью $\sqrt{gh}$ расстояние, равное диаметру $2a$.

[2]) Stokes, см. выше.

Если $s>0$, то кроме узловых окружностей, определяемых уравнением

$$J_s(kr)=0, \tag{10}$$

существует s равноотстоящих узловых диаметров.

Необходимо отметить, что вследствие равенства частот двух видов колебаний, представленных уравнениями (4), нормальные колебания теперь до известной степени будут неопределенными, т. е. мы можем подставить $\cos s(\theta-\alpha_s)$ вместо $\cos s\theta$ или $\sin s\theta$, причем α_s произвольно. Узловые диаметры определяются тогда из

$$\theta-\alpha_s=\frac{2m+1}{2s}\pi, \tag{11}$$

где $m=0, 1, 2, \ldots, s-1$. Неопределенность исчезает и частоты становятся неравными, когда контур хотя бы немного отклоняется от формы окружности.

В случае точно кругового контура наложением двух нормальных колебаний одинакового периода, но с различными фазами, получим решение

$$\zeta=C_sJ_s(kr)\cos(\sigma t\mp s\theta+\varepsilon). \tag{12}$$

Это решение представляет систему волн, которые двигаются без изменения вокруг начала с угловой скоростью $\frac{\sigma}{s}$ в положительном или отрицательном направлении θ. Из выражений (4) § 189 видно, что движение каждой отдельной частицы будет эллиптически-гармоническим, причем одна ось каждого эллипса совпадает с радиусом-вектором. Все это согласно с общей теорией, на которую было указано в § 168.

Интереснейшие виды колебаний несимметрического класса суть те, которые соответствуют значению $s=1$, например

$$\zeta=AJ_1(kr)\cos\theta\cos(\sigma t+\varepsilon), \tag{13}$$

где k определяется уравнением

$$J_1'(ka)=0. \tag{14}$$

Корни этого уравнения равны [1])

$$\frac{ka}{\pi}=0{,}586,\ 1{,}697,\ 2{,}717,\ \ldots; \tag{15}$$

отсюда

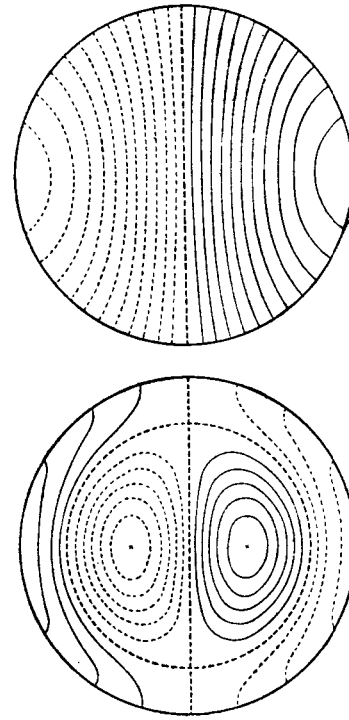
$$\frac{\sigma a}{c}=1{,}841,\ 5{,}332,\ 8{,}536,\ \ldots \tag{15a}$$

Мы имеем теперь узловой диаметр $\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$, положение которого,

[1]) См. учебник Рэлея, § 339. Общую формулу профессора Магона (J. Mc, Mahon) для вычисления корней уравнения $J_s'(ka)=0$ можно найти в специальных учебниках.

однако, будет неопределенным, так как начало отсчета θ произвольно. Для соответствующих видов колебаний при эллиптическом контуре эта узловая линия определяется однозначно; именно она совпадала бы либо с большой, либо с малой осью, и частоты были бы не равны.

Обе фиг. 45 показывают контурные линии свободной поверхности для первых двух видов колебаний рассматриваемого класса. Эти линии встречают границу под прямым углом в согласии с общим граничным условием [(2) § 190]. Простые гармонические колебания отдельных частиц совершаются по прямым линиям, которые согласно выражениям (4) § 189 перпендикулярны к контурным линиям. Форма сечений свободной поверхности с плоскостями, проходящими через ось z, видна из кривой $y = J_1(x)$ на фиг. 44.



Фиг. 45.

Первый из двух, нарисованных на фиг. 44 видов колебаний имеет из всех нормальных колебаний наиболее длинный период. В этом случае вода колеблется с одной стороны на другую примерно таким образом, как при самом медленном виде колебания в канале, закрытом с обоих концов (§ 178). При втором виде колебаний получается узловая линия в виде окружности, радиус которой дается наименьшим корнем уравнения $J_1(kr) = 0$; это дает $r = 0{,}719\ a$ [1]).

Сравнение этих исследований с общей теорией малых колебаний, о которой говорилось в § 168, приводит к различным важным свойствам бесселевых функций.

Прежде всего, так как общая масса воды остается без изменения, то

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \zeta r\, d\theta\, dr = 0, \tag{16}$$

[1]) Колебания жидкости в бассейне произвольной постоянной глубины были исследованы Poisson, Sur les petites oscillations de l'eau contenue dans un cylindre, Ann. de Gergonne, XIX, 225 (1829—1829); теория бесселевых функций была тогда еще не разработана, и результаты поэтому не могли быть интерпретированы. Полное решение проблемы вместе с числовыми результатами даны были Rayleigh, Phil. Mag. (5), I, 257 (1876) [Papers, I, 25].

Исследование в тексте, конечно, ограничивается случаем, когда глубина мала в сравнении с радиусом a. Решение Пуассона и Рэлея для случая произвольной глубины будет приведено в гл. IX.

где ζ имеет одну из форм (4). Для $s>0$ это уравнение выполняется вследствие присутствия тригонометрического множителя $\cos s\theta$ или $\sin s\theta$; в симметричном случае оно дает

$$\int_0^a J_0(kr)\, r\, dr = 0. \tag{17}$$

Далее, так как самое общее свободное движение системы можно получить наложением нормальных колебаний, из которых каждое имеет произвольную амплитуду и фазу, то всякое произвольное значение ζ, удовлетворяющее условию (16), может быть разложено в ряд вида

$$\zeta = \sum\sum (A_s \cos s\theta + B_s \sin s\theta)\, J_s(kr), \tag{18}$$

где суммирования распространяются на все целые значения, включая нуль, и для каждого значения s на все корни k уравнения (5). Если коэфициенты A_s, B_s рассматривать как функции от t, то уравнение (18) представляет возвышение поверхности в каждый произвольный момент времени. Величины A_s, B_s суть тогда нормальные координаты рассматриваемой системы (§ 168); выраженные через них формулы для кинетической и потенциальной энергии должны приводиться к суммам квадратов. Если рассматривать, например, потенциальную энергию

$$V = \frac{1}{2} g\varrho \iint \zeta^2\, dx\, dy, \tag{19}$$

то для этого необходимо, чтобы

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a w_1 w_2 r\, d\theta\, dr = 0, \tag{20}$$

где w_1, w_2 суть два какие-то члена разложения (18). Если w_1, w_2 содержат косинус или синус различных кратностей от θ, то это соотношение можно тотчас же проверить интегрированием по θ; если же

w_1 пропорционально $J_s(k_1 r)\cos s\theta$,

w_2 пропорционально $J_s(k_2 r)\cos s\theta$,

где k_1, k_2 обозначают два произвольных различных корня уравнения (5), то получаем

$$\int_0^a J_s(k_1 r)\, J_s(k_2 r)\, r\, dr = 0. \tag{21}$$

Общие результаты, частными случаями которых являются формулы (17) и (21), суть

$$\int_0^a J_0(kr)\, r\, dr = -\frac{a}{k} J_0'(ka) \tag{22}$$

[ср. (10) § 102] и

$$\int_0^a J_s(k_1 r)\, J_s(k_2 r)\, r\, dr = \frac{1}{k_1^2 - k_2^2}\{k_2 a\, J_s'(k_2 a)\, J_s(k_1 a) - k_1 a J_s'(k_1 a)\, J_s(k_2 a)\}. \tag{23}$$

Для $k_1 = k_2$ это последнее выражение становится неопределенным; вычисление с помощью обычных приемов дает

$$\int_0^a \{J_s(ka)\}^2 r\, dr = \frac{1}{2k^2}[k^2 a^2 \{J_s'(ka)\}^2 + (k^2 a^2 - s^2)\{J_s(ka)\}^2]. \tag{24}$$

Математическое доказательство этих формул находится в учебниках, указанных на стр. 147.

Малые колебания *кольцеобразного* слоя воды, который ограничен концентрическими окружностями, теоретически легко рассмотреть с помощью бесселевых функций второго рода. Единственный, однако, интересный случай — это тот, когда оба радиуса приблизительно равны; практически мы имеем тогда канал кольцевого вида, и решение получается проще согласно § 178.

Указанный метод применяется также к случаю *кругового сектора* с произвольным углом [1]) или к слою воды, ограниченному двумя концентрическими дугами окружности и двумя радиусами.

Соответствующая задача для *эллиптического* бассейна более трудна, но приближенное значение частоты самого медленного колебания, которое имеет ось в качестве узловой линии, можно получить согласно данному в § 168 методу Рэлея.

Пусть уравнение контура будет

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0. \tag{25}$$

За компоненты перемещения возьмем

$$\left.\begin{aligned}\xi &= A\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)+B\frac{y^2}{b^2},\\ \eta &= -B\frac{xy}{a^2},\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

где постоянные выбраны таким образом, что на границе контура (25)

$$\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}=0. \tag{27}$$

Понятно, что компоненты перемещения необходимо умножить еще на временной множитель $\cos\sigma t$. Соответствующее возвышение поверхности равно

$$\zeta=-h\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=\frac{h}{a^2}(2A+B)\,x. \tag{28}$$

Допущение (26), однако, для рассматриваемого случая слишком общо, так как оно включает также циркуляционные движения. Условие, чтобы вектор вихря равнялся нулю, требует

$$(2a^2+b^2)\,B=2a^2A. \tag{29}$$

Из (26) получаем

$$2T=\varrho h\iint(\dot\xi^2+\dot\eta^2)\,dx\,dy=$$
$$=2\pi\varrho abh\sigma^2\left\{\frac{1}{6}A^2+\frac{1}{12}AB+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{48}\frac{b^2}{a^2}\right)B^2\right\}\sin^2\sigma t, \tag{30}$$

$$2V=g\varrho\iint\zeta^2\,dx\,dy=2\pi abgh^2\frac{(2A+B)^2}{8a^2}\cos^2\sigma t. \tag{31}$$

[1]) См. Rayleigh, Theory of Sound, § 339.

Выразив, что среднее значение $T - V$ равно нулю и используя условие (29) мы найдем

$$\sigma^2 = \frac{18a^2 + 6b^2}{5a^2 + 2b^2} \cdot \frac{c^2}{a^2}, \tag{32}$$

где $c^2 = gh$.

При $b = a$ имеем $\frac{\sigma a}{c} = 1{,}852$, в то время как для круглого бассейна истинное значение $\frac{\sigma a}{c} = 1{,}841$. Приближенное значение хорошо согласуется с общим принципом (§ 168).

Не следует ожидать, что формула (32) для больших значений эксцентриситета даст еще хорошие результаты. Для $\frac{b}{a} = \infty$ она совершенно не годится.

Различные виды продольных колебаний в эллиптическом *канале* были исследованы Жефреем [1]) и Гольдштейном [2]) и совсем недавно Хидаком [3]) различными методами. Оказывается, что при наиболее важном виде колебаний $\frac{\sigma a}{c} = 1{,}8866$, если мы примем $\frac{b}{a} \to 0$, в формуле (32) получим $\frac{\sigma a}{c} = 1{,}8994$. Казалось, что формула эта дает хорошее приближение для значений $\frac{b}{a}$, меньших единицы.

§ 192. Рассмотрим пример *вынужденных* колебаний в круглом бассейне. Предположим, что возмущающие силы таковы, что возвышение согласно статической теории равно

$$\bar{\zeta} = C\left(\frac{r}{a}\right)^s \cos s\theta \cos(\sigma t + \varepsilon). \tag{33}$$

Это дает $\Delta_1 \bar{\zeta} = 0$, и уравнение (12) § 189 приводится к виду (1). Решение его есть

$$\zeta = AJ_s(kr) \cos s\theta \cos(\sigma t + \varepsilon), \tag{34}$$

где A обозначает произвольную постоянную. Граничное условие [(14) § 189] дает

$$Aka\, J_s'(ka) = sC;$$

отсюда следует, что

$$\zeta = C \frac{sJ_s(kr)}{ka\, J_s'(ka)} \cos s\theta \cos(\sigma t + \varepsilon). \tag{35}$$

Случай $s = 1$ представляет интерес, так как он соответствует *неизменяющейся* горизонтальной силе; получаемый здесь результат можно сравнить с результатом § 179.

---

[1]) Jeffreys, Proc. Lond. Math. Soc. (2), XXIII, 455 (1924).

[2]) Goldstein, там же, XXVIII, 91 (1927).

[3]) Hidaka, Mem. Imp. Mar. Obs. (Japan), IV, 99 (1931). Эта работа содержит исследования свободных колебаний в бассейнах с другой формой очертания границ и с различными законами изменения глубины.

Случай $s=2$ дает грубое представление полусуточных приливов для бассейна на полюсе Земли, ограниченного небольшим кругом широты, причем, однако, вращение Земли не учитывается.

Мы обращаем внимание на то, что выражение для амплитуды колебаний в случае $J_s'(ka)=0$ делается бесконечным. Это находится в согласии с общим положением, несколько примеров применения которого мы уже имели, именно: период возмущающей силы здесь равен периоду свободных нормальных колебаний, исследованных в предыдущем параграфе.

§ 193 [1]. Если слой воды имеет переменную глубину, то (см. § 189) уравнение неразрывности будет

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\frac{\partial(hu)}{\partial x}-\frac{\partial(hv)}{\partial y}. \tag{1}$$

Уравнения движения [(2) § 189] остаются, конечно, без изменения. После исключения ζ мы находим для свободных колебаний

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=g\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(h\,\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\,\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right\}. \tag{2}$$

Если временной множитель есть $e^{i(\sigma t+\varepsilon)}$, то мы получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\,\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\,\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)+\frac{\sigma^2}{g}\,\zeta=0. \tag{3}$$

Когда h зависит только от r — расстояния от начала, тогда уравнение (3) переходит в

$$h\Delta_1\zeta+\frac{dh}{dr}\,\frac{\partial\zeta}{\partial r}+\frac{\sigma^2}{g}\,\zeta=0. \tag{4}$$

В качестве простого примера рассмотрим круглый бассейн, глубина которого постепенно убывает от центра к краю по закону

$$h=h_0\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right). \tag{5}$$

Если ввести полярные координаты и принять, что ζ пропорционально $\cos s\theta$ или $\sin s\theta$, то уравнение (4) примет вид

$$\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial\zeta}{\partial r}-\frac{s^2}{r^2}\,\zeta\right)-\frac{2}{a^2}\,r\,\frac{\partial\zeta}{\partial r}+\frac{\sigma^2}{gh_0}\,\zeta=0. \tag{6}$$

Тот интеграл этого уравнения который конечен в начале, находится легко в виде степенного ряда с возрастающими положительными показателями. Положив

$$\zeta=\sum A_m\left(\frac{r}{a}\right)^m, \tag{7}$$

---

[1] Этот параграф представлял § 189 второго издания этого труда (1895). Подобное исследование дано Poincaré, Lecons de mécanique céleste, III (Paris, 1910).

где для краткости тригонометрические множители опущены, получим следующее соотношение между последовательными коэфициентами:

$$(m^2-s^2)\,A_m=\left\{m(m-2)-s^2-\frac{\sigma^2a^2}{gh_0}\right\}A_{m-2},$$

или, если положить

$$\frac{\sigma^2a^2}{gh_0}=n(n-2)-s^2, \tag{8}$$

где n — пока еще не обязательно целое число, то

$$(m^2-s^2)\,A_m=(m-n)(m+n-2)\,A_{m-2} \tag{9}$$

Уравнение (6) будет удовлетворяться рядом вида (7), который начинается членом $A_s\left(\frac{r}{a}\right)^s$, причем остальные коэфициенты получим, если в (9) положим $m=s+2,\ s+4,\ \ldots$ Таким образом, мы находим

$$\zeta=A_s\left(\frac{r}{a}\right)^s\left\{1-\frac{(n-s-2)(n+s)}{2(2s+2)}\frac{r^2}{a^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-s-4)(n-s-2)(n+s)(n+s+2)}{2\cdot4\cdot(2s+2)(2s+4)}\frac{r^4}{a^4}-\ldots\right\}, \tag{10}$$

или, пользуясь употребительным способом обозначений гипергеометрических рядов:

$$\zeta=A_s\frac{r^s}{a^s}F\left(\alpha,\beta,\gamma,\frac{r^2}{a^2}\right). \tag{11}$$

где

$$\alpha=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}s,$$
$$\beta=1+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}n,$$
$$\gamma=s+1.$$

Так как отсюда получаем $\gamma-\alpha-\beta=0$, то для $r=a$ ряд не сходится кроме того случая, когда он конечен. Это же имеет место только тогда когда n есть целое число вида $s+2j$. Соответствующие значения σ получим из (8).

Для симметрических видов колебаний ($s=0$) имеем

$$\zeta=A_0\left\{1-\frac{j(j-1)}{1^2}\frac{r^2}{a^2}+\frac{(j+1)j(j-1)(j-2)}{1^2\cdot2^2}\frac{r^4}{a^4}-\ldots\right\}, \tag{12}$$

где j может быть каким-нибудь целым числом, большим единицы [1]). Можно показать, что для $j-1$ значений r, лежащих между 0 и a, это выражение обращается в нуль, что указывает на существование $j-1$ круговых узловых линий. Значение σ определяется из

$$\sigma^2=4j(j-1)\frac{gh_0}{a^2}; \tag{13}$$

Отсюда следует $\frac{\sigma a}{\sqrt{gh_0}}=2{,}828,\ 4{,}899,\ 6{,}928,\ldots$ (13а)

---

[1]) Если мы положим $r/a=\sin{}^1/_2\,\chi$, то ряд будет тождественно совпадать с разложением $P_{j-1}(\cos\chi)$; см. § 85 (4).

Таким образом самый медленный симметрический вид колебаний ($j=2$) имеет круговую узловую линию с радиусом 0,707 a.

Из несимметрических видов колебаний для произвольного данного значения s самое медленное есть то, для которого $n=s+2$; в этом случае

$$\zeta = A_s \frac{r^s}{a^s} \cos s\theta \cos(\sigma t + \varepsilon),$$

где значение σ получается из формулы

$$\sigma^2 = 2s \frac{gh_0}{a^2}. \tag{14}$$

Для случая $s=1$ различные частоты получаются из выражения

$$\sigma^2 = (4j^2-2) \frac{gh_0}{a^2}; \tag{15}$$

отсюда следует

$$\frac{\sigma a}{\sqrt{gh_0}} = 1{,}414,\ 3{,}742,\ 5{,}831,\ \ldots \tag{16}$$

При самых медленных из этих видов колебаний, которые соответствуют значениям $s=1$, $n=3$, свободная поверхность есть всегда *плоскость*. Из (15а) § 191 следует, что частота в 0,768 раз больше, чем частота соответствующего вида колебаний в круглом бассейне с *постоянной* глубиной h_0 и тем же радиусом.

Как в § 192, мы могли бы написать сразу выражение для приливов, которые происходят от неизменяющейся горизонтальной периодической силы или вообще для случая, когда возмущающая сила имеет потенциал вида

$$\Omega \text{ пропорционально } r^s \cos s\theta \cos(\sigma t + \varepsilon).$$

§ 194. В заключение нашего изучения длинных волн на плоских водных поверхностях мы рассмотрим еще распространение возмущений, которые идут от центра в неограниченном слое постоянной глубины. Для простоты мы ограничимся случаем симметрии, при котором возвышение ζ есть функция расстояния r от начала возмущения. Это приведет нас к некоторым своеобразным и важным явлениям, которые встречаются при распространении волн в двух измерениях.

Исследование периодического возмущения требует применения бесселевой функции (нулевого порядка) второго рода, относительно которой мы сделаем некоторые предварительные замечания.

Чтобы решить уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d\varphi}{dz} + \varphi = 0 \tag{1}$$

при помощи определенных интегралов, мы возьмем[1])

$$\varphi = \int e^{-zt}\, T\, dt, \tag{2}$$

где T есть функция комплексного переменного t, а пределы интегрирования

[1]) Forsyth, Differential Equations, гл. VII. Систематическое применение этого метода к теории бесселевых функций принадлежит Hankel, Die Zylinderfunctionen erster und zweiter Art, Math. Ann., I, 467 (1869).

постоянны, но еще неопределенны. После интегрироваиия по частям будем иметь

$$z\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{d\varphi}{dz}+z\varphi=-[(1+t^2)e^{-zt}\cdot T]+\int\left(\frac{}{dt}\{(1+t^2)T\}-tT\right)e^{-zt}\,dt.$$

Уравнение (1) удовлетворяется, таким образом, если положить

$$\varphi=\int\frac{e^{-zt}\,dt}{\sqrt{1+t^2}} \tag{3}$$

при условии, что выражение

$$\sqrt{1+t^2}\,e^{-zt}$$

обращается в нуль при верхнем и нижнем пределах интегрирования. Следовательно, предполагая, что z действительно и положительно или что по крайней мере действительная часть z положительна, мы можем взять интеграл (3) вдоль пути, который соединяет две какие-то из точек i, $-i$, $+\infty$ в плоскости t; но два различные пути, соединяющие одну и ту же пару точек, не обязательно должны давать один и тот же результат, если они содержат между собой одну из точек разветвления ($t=\pm i$) функции, находящейся под знаком интеграла.

Таким образом, мы получаем, например, решение в виде

$$\varphi_1=\int_{-i}^{i}\frac{e^{-zt}\,dt}{\sqrt{1+t^2}},$$

где путь интегрирования есть та часть мнимой оси, которая лежит между пределами, и для квадратного корня берется то значение, которое для $t=0$ равно 1. Положив

$$t=\xi+i\eta,$$

получим

$$\varphi_1=i\int_{-1}^{+1}\frac{e^{-iz\eta}\,d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}=2i\int_0^{1/2\pi}\cos(z\cos\vartheta)\,d\vartheta=i\pi J_0(z), \tag{4}$$

а это есть уже известное решение (§ 100).

Взяв интеграл (3) вдоль оси η от точки $(0, i)$ до начала и затем вдоль оси ξ до точки $(\infty, 0)$, мы получим независимое от (4) решение, которое при одинаковом условии относительно квадратного корня равно

$$\varphi_2=\int_i^0\frac{e^{-iz\eta}\,d(i\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}+\int_0^\infty\frac{e^{-z\xi}\,d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}=\int_0^\infty\frac{e^{-z\xi}\,d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}-i\int_0^1\frac{e^{-iz\eta}\,d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}. \tag{5}$$

Если мы возьмем друг ие пары пределов нитегрирования и другие пути то мы можем получить другие выражения для φ, но все они должны быть эквивалентны либо φ_1, либо φ_2, либо их линейным комбинациям. В особенности важны некоторые другие выражения φ_2. Известно, что значение интеграла (3) равно нулю, если он берется по замкнутой кривой, вне которой лежат точки разветвления ($t=\pm i$). Возьмем сначала в качестве такой замкнутой кривой прямоугольник, две стороны которого совпадают с положительными частями осей ξ и η, за исключением малой полуокружности около точки $t=i$, в то время как другие две стороны прямоугольника лежат в бесконечности. Легко видеть, что части интеграла, которые зависят от бесконечно далеких сторон, обращаются в нуль или потому, что множитель $e^{-z\xi}\to 0$ для $\xi\to\infty$, или же вследствие бесконечно быстрого колеба-

ния функции $\frac{e^{-iz\eta}}{\eta}$, когда $\eta \to \infty$. Мы можем таким образом путь, которым мы пользовались при образовании решения (5), заменить путем, который идет вдоль оси η от точки $(0, i)$ к точке $(0, i, \infty)$, при условии, что сохраняется непрерывность квадратного корня. Так как переменная t пробегает малый полукруг в направлении, противоположном часовой стрелке, то квадратный корень изменяется непрерывно от $\sqrt{1-\eta^2}$ до $i\sqrt{\eta^2-1}$. Следовательно,

$$\varphi_2 = \int_i^{i\infty} \frac{e^{-iz\eta}\, d(i\eta)}{i\sqrt{\eta^2-1}} = \int_1^{\infty} \frac{e^{iz\eta}\, d\eta}{\sqrt{\eta^2-1}} = \int_0^{\infty} e^{-iz\,\mathrm{ch}\,u}\, du. \tag{6}$$

Мы покажем, что это решение особенно подходит для случая расходящихся волн. Другой метод для получения этого решения будет дан в главе X.

Приравняв друг другу мнимые части в выражениях (5) и (6), получим формулу

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(z\,\mathrm{ch}\,u)\, du, \tag{7}$$

которая принадлежит Меллеру [1]).

Вследствие физической важности решения (6) введем для него особое обозначение. Мы полагаем [2])

$$D_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-iz\,\mathrm{ch}\,u}\, du, \tag{8}$$

а это эквивалентно с

$$D_0(z) = -Y_0(z) - iJ_0(z), \tag{9}$$

где [3])

$$Y_0 = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(z\,\mathrm{ch}\,u)\, du. \tag{10}$$

Приравняв друг другу действительные части в выражениях (5) и (6) получим также

$$Y_0(z) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-z\,\mathrm{sh}\,u}\, du + \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \sin(z\cos\vartheta)\, d\vartheta. \tag{11}$$

На том же основании можно заменить путь интегрирования, использованный для φ_2, прямой линией, проведенной от точки $(0, i)$ параллельно

---

[1]) Mehler, Math. Ann., V (1872).

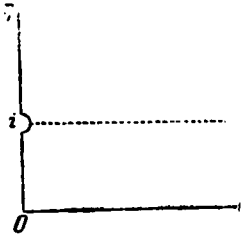
[2]) Применение простого обозначения для случая расходящихся волн можно считать оправданным. Наше $D_0(z)$ эквивалентно обозначению Нильсена $-iH_0^2(z)$ в форме, слегка измененной Ватсоном.

[3]) Это есть обозначение, рекомендуемое Ватсоном. Мы обращаем, однако, внимание читателя на то, что тот же самый символ другими авторами применяется в другом смысле. С чисто математической точки зрения выбор решения „второго рода" есть в сущности дело соглашения, так как дифференциальное уравнение (1) удовлетворяется также тогда, когда к решению прибавить постоянное, умноженное на $J_0(z)$. Таблицы функции $Y_0(z)$, определяемой (10), можно найти и в учебнике Ватсона.

оси ξ (см. пунктириую лннию фиг. 46). Чтобы обеспечить непрерывность $\sqrt{1+t^2}$, заметим, что значение этого корня изменяется от $\sqrt{1-\eta^2}$ приблизительно до $e^{\frac{1}{4}i\pi}\sqrt{2\xi}$, когда t пробегает нижний квадрант малого полукруга. Если положить $t=1+\xi$, то вдоль пунктириой линии будем иметь

$$\sqrt{1+t^2}=e^{\frac{1}{4}i\pi}\sqrt{2\xi-i\xi^2},$$

где иеобходимо выбрать то значение кория, которое действительно и положительно, когда ξ бесконечно мало. Следовательно, мы имеем



Фиг. 46.

$$\varphi_2=\int_i^{\infty+i}\frac{e^{-z(\xi+i)}\,d(\xi+i)}{e^{\frac{1}{4}i\pi}\sqrt{2\xi-i\xi^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\left(z+\frac{1}{4}\pi\right)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-z\xi}}{\xi^{1/2}}\left(1-\frac{1}{2}i\xi\right)^{1/2}d\xi. \quad (12)$$

Если разложить двучлен в биномиальный ряд и интегрировать почленно, то найдем

$$D_0(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}e^{-i(z+\frac{1}{4}\pi)}\left\{1+\frac{1^2}{1!}\left(\frac{i}{2z}\right)+\frac{1^2\cdot3^2}{2!}\left(\frac{i}{8z}\right)^2+\ldots\right\}, \quad (13)$$

причем используются формулы

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\infty}e^{-z\xi}\,\xi^{-1/2}\,d\xi&=\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{z^{1/2}}=\frac{\pi^{1/2}}{z^{1/2}},\\ \int_0^{\infty}e^{-z\xi}\,\xi^{m-1/2}\,d\xi&=\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{z^{m+1/2}}=\frac{1\cdot3\cdots(2m-1)}{2^m z^m}\cdot\frac{\pi^{1/2}}{z^{1/2}}.\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Если разделить действительные и мнимые части (13), то получим из сравиения с (9)

$$J_0(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\left\{R\sin\left(z+\frac{1}{4}\pi\right)-S\cos\left(z+\frac{1}{4}\pi\right)\right\}, \quad (15)$$

$$Y_0(z)=-\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\left\{R\cos\left(z+\frac{1}{4}\pi\right)+S\sin\left(z+\frac{1}{4}\pi\right)\right\}, \quad (16)$$

где

$$\left.\begin{aligned}R&=1-\frac{1^2\cdot3^2}{2!(8z)^2}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2}{4!(8z)^4}-\ldots,\\ S&=\frac{1^2}{1!(8z)}-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{3!(8z)^3}+\ldots\end{aligned}\right| \quad (17)$$

Ряды в формулах (13) и (17) принадлежат к „полусходящимся“ или асимптотическим рядам; это значит, что хотя для достаточно больших значений z следующие друг за другом члены некоторое время убывают, но затем, однако, они опять начинают расти; если же остановимся на некотором

малом члене, то мы получим приблизительно верный результат [1]). Это доказывается исследованием остаточного члена, стоящего после m-го члена разложения выражения (12).

Из (15) видно, что с возрастанием абсолютной величины корни уравнения $J_0(z)=0$ приближаются к корням уравнения

$$\sin\left(z+\frac{1}{4}\pi\right)=0. \tag{18}$$

Ряд (13) дает полное заключение относительно поведения функции $D_0(z)$ для больших значений z. Когда, напротив, z мало, то $D_0(z)$ согласно (8) очень велико. Приближенную формулу для этого случая можно получить следующим образом. Если мы обратимся к уравнению (11), то получим

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{sh}\,u}\,du &= \int_1^\infty e^{-1/2\,z\,(v-1/v)}\,\frac{dv}{v} = \\ &= \int_1^\infty \frac{e^{-1/2\,zv}}{v}\left\{1+\frac{z}{2v}+\frac{1}{2!}\left(\frac{z}{2v}\right)^2+\ldots\right\}dv = \\ &= \int_{1/2\,z}^\infty \frac{e^{-w}}{w}\left\{1+\frac{z^2}{4w}+\frac{1}{2!}\left(\frac{z^2}{4w}\right)^2+\ldots\right\}dw. \end{aligned}\tag{19}$$

Первый член дает [2])

$$\int_{1/2\,z}^\infty \frac{e^{-w}}{w}\,dw = -\gamma-\ln\frac{1}{2}\,z+\ldots, \tag{20}$$

а остальные члены по сравнению с этим малы. Таким образом из (9) и (11) получаем

$$D_0(z) = -\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{1}{2}\,z+\gamma+\frac{1}{2}\,i\pi+\ldots\right). \tag{21}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{z\to 0} z\,D_0'(z) = -\frac{2}{\pi}\ [3]). \tag{22}$$

---

[1]) Ср. Whittaker a. Watson, Modern Analysis, гл. VIII; Bromwich, Theory of Infinite series, London, 1908, гл. XI; Watson, гл. VII; Gray and Mathews, 2-е изд., гл. V. Асимптотическое разложение для J_0 получено Пуассоном, Journal de l'École Polyth., тетр. 19, стр. 349 (1823); строгое исследование этих и подобных разложений дано Стоксом, см. примечание на стр. 359. „Остаточный член" исследован Липшицем, Crelle, LVI, 189 (1859); ср. Hankel, см. примечание на стр. 367.

[2]) De Morgan, Differential and Integral Calculus, London, 1842, стр. 659.

[3]) Бесселевы функции второго рода впервые были обстоятельно изучены Стоксом и приведены к виду, аналитически употребительному для применения к физическим проблемам, в работе, опубликованной в Camb. Trans. С помощью современной теории функций методы были упрощены Липшицем и другими, а также (особенно с физической точки зрения) Рэлеем. Эти последние методы и применены в тексте

Формула (21) достаточна для наших целей, но полное выражение мы можем получить теперь также в форме ряда по возрастающим степеням сравнением с общим решением уравнения (1). Именно мы имеем [1])

$$\varphi = AJ_0(z) + B\left\{ J_0(z)\ln z + \frac{z^2}{2^2} - s_2\frac{z^4}{2^2\cdot 4^2} + s_3\frac{z^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} - \cdots \right\}, \quad (23)$$

где

$$s_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}.$$

Чтобы показать, что для малых значений z это выражение совпадает с (21), мы должны положить

$$B = -\frac{2}{\pi}, \quad A = -\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{1}{2}z + \gamma + \frac{1}{2}i\pi\right); \quad (24)$$

тогда будем иметь

$$D_0(z) = -\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{1}{2}z + \gamma + \frac{1}{2}i\pi\right)J_0(z) - \frac{2}{\pi}\left\{\frac{z^2}{2^2} - s_2\frac{z^4}{2^2\cdot 4^2} + s_3\frac{z^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} - \cdots\right\}. \quad (25)$$

§ 195. Мы можем теперь перейти к задаче, поставленной в начале § 194. Для определенности положим, что возмущение происходит благодаря переменному давлению p_0, которое действует на поверхность. Тогда уравнения движения § 189 переходят в

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p_0}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p_0}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

в то время как

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (2)$$

остается без изменения.

Если мы введем в (1) потенциал скоростей, то получим после интегрирования

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = g\zeta + \frac{p_0}{\varrho}. \quad (3)$$

Мы можем предположить, что p_0 обозначает *изменяющееся* давление и произвольная функция от t заключена в φ, которая выбрана так, что в областях, не затронутых возмущением, $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$. Исключив ζ с помощью (2), получим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = gh\Delta_1\varphi + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p_0}{\partial t}. \quad (4$$

После определения φ значение ζ найдем из уравнения (3).

[1]) Forsyth, Differential Equations, гл. VI, заметка I; Watson, Bessel Functions, стр. 59, 60.

Предположим теперь, что p_0 только внутри небольшой [1]) области около начала имеет заметную величину. Если умножить обе части уравнения (4) на $\delta x\,\delta y$ и интегрировать по этой области, то можно пренебречь, по сравнению с остальными, членом в левой части уравнения, и мы получим

$$-\int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\,ds = \frac{1}{g\varrho h}\frac{d}{dt}\iint p_0\,dx\,dy, \tag{5}$$

где δs есть элемент границы области, а δn — горизонтальная нормаль к δs, проведенная наружу. Начало можно, таким образом, рассматривать как двухмерный источник с мощностью

$$f(t) = \frac{1}{g\varrho h}\frac{dP_0}{dt}, \tag{6}$$

где P_0 обозначает полную результирующую возмущающую силу.

Если мы перейдем к полярным координатам и положим $gh = c^2$, то должны будем удовлетворить уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) \tag{7}$$

при условии

$$\lim_{r\to 0}\left(-2\pi r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = f(t), \tag{8}$$

где $f(t)$ обозначает мощность определенного только что источника.

В случае периодического источника мощности $e^{i\sigma t}$ уравнение (7) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + k^2\varphi = 0, \tag{9}$$

где $k = \frac{\sigma}{c}$. Решение этого уравнения есть

$$\varphi = \frac{1}{4}D_0(kr)\,e^{i\sigma t}; \tag{10}$$

здесь постоянный множитель определен, как и в формуле (22) § 194. Если взять действительную часть, то будем иметь решение

$$\varphi = \frac{1}{4}\left\{J_0(kr)\sin\sigma t - Y_0(kr)\cos\sigma t\right\}, \tag{11}$$

которое соответствует источнику мощности $f(t) = \cos\sigma t$.

Для больших значений kr формула (10) принимает вид

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{8\pi kr}}\,e^{i\sigma(t-r/c)-1/4\,i\pi}, \tag{12}$$

---

[1]) Это предположение обозначает, что измерения области малы в сравнении с длиной полученной волны, понимаемой в общем смысле § 172. С другой стороны, необходимо принять, что по отношению к h измерения велики.

Выражение $t - r/c$ показывает, что мы в самом деле получили решение, которое подходит для изображения расходящихся волн.

Следовательно, амплитуда кольцеобразных волн в конечном счете обратно пропорциональна квадратному корню расстояния от начала.

§ 196. Решение, которое мы получили для случая простого гармонического источника $e^{i\sigma t}$, можно выразить так

$$2\pi\varphi = \int_0^\infty e^{i\sigma\left(t-\frac{r}{c}\operatorname{ch} u\right)}\,du. \tag{13}$$

Эта форма допускает обобщение с помощью теоремы Фурье; формула

$$2\pi\varphi = \int_0^\infty f\left(t-\frac{r}{c}\operatorname{ch} u\right)du \tag{14}$$

должна представлять возмущение, происходящее от источника $f(t)$, лежащего в начале[1]). Конечно, $f(t)$ должна быть такой, чтобы интеграл сходился; это условие, понятно, будет всегда выполнено, когда источник был в действии только в течение конечного времени. Более полная формула, которая обнимает как сходящиеся, так и расходящиеся волны, будет

$$2\pi\varphi = \int_0^\infty f\left(t-\frac{r}{c}\operatorname{ch} u\right)du + \int_0^\infty F\left(t+\frac{r}{c}\operatorname{ch} u\right)du. \tag{15}$$

Решение (15) может быть проверено подстановкой в дифференциальное уравнение (7) и подчинением некоторым условиям. Если мы отдельно рассмотрим первый член (15), то найдем

$$2\pi\left\{c^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right\} =$$

$$= \int_0^\infty \left\{\operatorname{sh}^2 u\, f''\left(t-\frac{r}{c}\operatorname{ch} u\right)-\frac{c}{r}\operatorname{ch} u\, f'\left(t-\frac{r}{c}\operatorname{ch} u\right)\right\}du =$$

$$= \frac{c^2}{r^2}\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial u^2} f\left(t-\frac{r}{c}\operatorname{ch} u\right)du = -\frac{c}{r}\left[\operatorname{sh} u\, f'\left(t-\frac{r}{c}\operatorname{ch} u\right)\right]_{u=0}^{u=\infty}$$

Это выражение, очевидно, обращается в нуль, когда $f(t)=0$ для отрицательных значений t, превосходящих определенную границу[2]).

---

[1]) Содержание § 196, 197 заимствовано из работы автора «On Wave Propagation in Two Dimensions», Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXXV, 141 (1902). Результат, эквивалентный уравнению (14), был найден (другим путем) Levi-Civita, Nuovo Cimento (4), VI (1897).

[2]) Доказательство совершенно аналогично данному Леви-Чивита.

Далее при тех же самых условиях имеем

$$2\pi r\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{r}{c}\int_0^\infty \operatorname{ch}u\cdot f'\left(t-\frac{r}{c}\operatorname{ch}u\right)du=$$

$$=\frac{r}{c}\int_0^\infty(\operatorname{sh}u+e^{-u})f'\left(t-\frac{r}{c}\operatorname{ch}u\right)du=$$

$$=-\left[f\left(t-\frac{r}{c}\operatorname{ch}u\right)\right]_{u=0}^{u=\infty}+\frac{r}{c}\int_0^\infty e^{-u}f'\left(t-\frac{r}{c}\operatorname{ch}u\right)du=$$

$$=f\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{r}{c}\int_0^\infty e^{-u}f'\left(t-\frac{r}{c}\operatorname{ch}u\right)du.$$

Предел этого выражения для $r\to 0$ равен $f(t)$; высказанное выше утверждение относительно мощности источника в (14) таким образом проверено.

Подобный прием применим и ко второму члену (15), при условии, что $F(t)$ для положительных значений t, которые превосходят определенную границу, обращается в нуль.

§ 197. Мы можем теперь применить формулу (14), чтобы исследовать действие переменного источника, которое меняется согласно какому-нибудь простому закону.

Если мы предположим, что до момента $t=0$ все находится в покое, так что $f(t)$ для отрицательных значений t равно нулю, тогда из (14) или из равнозначного выражения

$$2\pi\varphi=\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{c}}\frac{f(\theta)\,d\theta}{\left\{(t-\theta)^2-\frac{r^2}{c^2}\right\}^{1/2}} \tag{16}$$

следует, что φ всюду остается равно нулю, пока $t<\frac{r}{c}$. Если, сверх того, источник действует только в течение конечного времени τ, так что $f(t)=0$ для $t>\tau$, то для $t>\tau+\frac{r}{c}$ имеет место

$$2\pi\varphi=\int_0^\tau\frac{f(\theta)\,d\theta}{\left\{(t-\theta)^2-\frac{r^2}{c^2}\right\}^{1/2}}. \tag{17}$$[1])

---

[1]) С аналитической точки зрения необходимо заметить, что для $p_0=0$ уравнение (4) может быть написано в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial(ict)^2}=0$$

и что (17) состоит из совокупности решений известного типа

$$\{x^2+y^2+(ict)^2\}^{-1/2}.$$

Это выражение обычно не обращается в нуль; волна, таким образом, с задней стороны не ограничена так резко, как с передней, а наоборот, имеет нечто вроде хвоста[1]), форма которого, когда $t - \frac{r}{c}$ велико по сравнению с τ, определяется уравнением

$$2\pi\varphi = \frac{1}{\left(t^2 - \frac{r^2}{c^2}\right)^{1/2}} \int_0^{\tau} f(\theta)\, d\theta. \tag{18}$$

Возвышение ζ в произвольной точке выражается с помощью (3) через

$$\zeta = \frac{1}{g}\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{19}$$

Отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta\, dt = 0, \tag{20}$$

если начальные и конечные значения φ обращаются в нуль. Можно показать, что это будет иметь место, когда $f(t)$ конечно и интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \tag{21}$$

сходится. Смысл этих условий можно усмотреть из уравнения (6). Отсюда следует, что даже тогда, когда $\frac{dP_0}{dt}$ все время будет положительно, так что поток в окрестности начала направлен целиком наружу, волна, которая подходит к произвольной точке, будет состоять не только (как в соответствующей проблеме одного измерения) из одного возвышения, но в простейшем случае из одного возвышения, сопровождаемого понижением.

Чтобы ближе исследовать распространение единичной волны в одном частном случае, возьмем

$$f(t) = \frac{\tau}{t^2 + \tau^2}; \tag{22}$$

это значит, что P_0 возрастает от одного постоянного значения к другому по закону

$$P_0 = A + B \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\tau}. \tag{23}$$

Момент, в который возмущающее давление начинается или прекращается, является теперь неопределенным, но промежуток времени, в котором оно становится ощутительным, можно сделать как угодно малым, уменьшая τ. Для проведения вычислений удобнее взять вместо (22)

$$f(t) = \frac{1}{t - i\tau} \tag{24}$$

[1]) Наличие хвоста в случае цилиндрических электрических волн было замечено Хивисайдом: Heaviside, Phil. Mag. (5), XXVI (1888) [Electrical Papers, II].

и в конце оставить только мнимую часть. Тогда будем иметь

$$2\pi\varphi = \int_0^\infty \frac{du}{t - \frac{r}{c}\operatorname{ch} u - i\tau} = 2\int_0^1 \frac{dz}{t - \frac{r}{c} - i\tau - \left(t + \frac{r}{c} - i\tau\right)z^2}, \tag{25}$$

где $z = \operatorname{th} {}^1/_2 u$.

Теперь положим

$$\left.\begin{aligned} t - \frac{r}{c} - i\tau &= a^2 e^{-2i\alpha}, \\ t + \frac{r}{c} - i\tau &= b^2 e^{-2i\beta}, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

где мы можем считать, что a, b положительны и углы α, β лежат между 0 и ${}^1/_2\pi$. Так как

$$\left.\begin{aligned} a^4 &= \left(t - \frac{r}{c}\right)^2 + \tau^2, \quad b^4 = \left(t + \frac{r}{c}\right)^2 + \tau^2, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{c\tau}{ct - r}, \qquad \operatorname{tg} 2\beta = \frac{c\tau}{ct + r}, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

то получается, что $a \gtrless b$, смотря по тому $t \gtrless 0$, и что всегда $\alpha > \beta$. При этих обозначениях мы находим

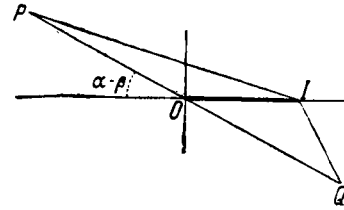
$$2\pi\varphi = 2\int_0^1 \frac{dz}{a^2 e^{-2i\alpha} - b^2 e^{-2i\beta} z^2} = \frac{e^{i(\alpha+\beta)}}{ab} \ln \frac{z + \frac{a}{b} e^{-i(\alpha-\beta)}}{z - \frac{a}{b} e^{-i(\alpha-\beta)}}. \tag{28}$$

Чтобы взять верное значение логарифма, рассмотрим в плоскости комплексной переменной z точки (фиг. 47)

$$I = +1,$$

$$P = -\frac{a}{b} e^{-i(\alpha-\beta)},$$

$$Q = \frac{a}{b} e^{-i(\alpha-\beta)}$$



Фиг. 47.

Так как интеграл в (28) надо взять вдоль пути OI, то соответственное значение правой части (28) будет равно

$$\frac{e^{i(\alpha+\beta)}}{ab}\left\{\left(\ln\frac{IP}{OP} + i\cdot OPI\right) - \left(\ln\frac{IQ}{OQ} - i\cdot OQI\right)\right\},$$

где мы предполагаем логарифмы действительными, а углы положительными. Таким образом получается, если сохранить только мнимую часть, решение, соответствующее источнику типа (22) в виде:

$$2\pi\varphi = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{ab} \ln\frac{IP}{IQ} + \frac{\cos(\alpha+\beta)}{ab}(\pi - PIQ). \tag{29}$$

При этом будем иметь

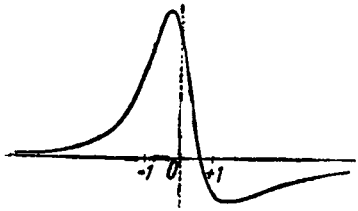
$$\frac{IP}{IQ}=\left(\frac{a^2+2ab\cos(\alpha+\beta)+b^2}{a^2-2ab\cos(\alpha-\beta)+b^2}\right)^{1/2},$$

$$\operatorname{tg} PIQ=\frac{2ab\sin(\alpha-\beta)}{b^2-a^2}, \tag{30}$$

причем значения a, b, α, β, выраженные через r и t, даны уравнениями (27).

Будет достаточно проследить главнейшую часть волны тогда, когда она проходит через точку, расстояние r которой от начала велико по сравнению с $c\tau$. Если мы ограничимся временем, в течение которого $t-\frac{r}{c}$ будет мало по сравнению с $\frac{r}{c}$, то a будет малым по сравнению с b, угол PIQ будет малым и $\frac{IP}{IQ}$ приблизительно будет равно 1. Если мы теперь положим

$$t=\frac{r}{c}+\tau\operatorname{tg}\eta, \tag{31}$$



Фиг. 48.

то получим приближенно

$$\left.\begin{aligned} &\alpha=\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\eta,\\ &a=\sqrt{\tau\sec\eta},\\ &\beta=\frac{1}{4}\frac{c\tau}{r},\\ &b=\left(2\cdot\frac{r}{c}\right)^{1/2}; \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

тогда формула (29) принимает следующий вид:

$$2\pi\varphi=\frac{\pi}{ab}\cos\alpha=\frac{\pi}{\tau\sqrt{2}}\left(\frac{c\tau}{r}\right)^{1/2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\eta\right)\sqrt{\cos\eta}. \tag{33}$$

Возвышение ζ в этом случае будет дано приближенно уравнением

$$2\pi g\zeta=2\pi g\frac{d\varphi}{d(\tau\operatorname{tg}\eta)}=\frac{1}{4\tau^2\sqrt{2}}\left(\frac{c\tau}{r}\right)^{1/2}\sin\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{3}{2}\eta\right)\cos^{3/2}\eta. \tag{34}$$

Фигура 48 показывает соотношение между ζ и t, получаемое по формуле (34)[1].

§ 198. Мы переходим теперь к исследованию случая сферического слоя воды или моря, которое покрывает шар. Предположим пока, что шар не вращается, а также пренебрежем пока взаимным притяжением частиц воды. Заданные математические условия тогда точно такие же, как и при акустической проблеме колебаний сферического воздушного слоя[2].

---

[1]) Точки, обозначенные на фигуре через -1, 0, $+1$, соответствуют временам $\frac{r}{c-\tau}$, $\frac{r}{c}$, $\frac{r}{c+\tau}$.

[2]) Рассмотренной в книге Rayleigh, Theory of Sound, гл. XVIII.

Пусть a есть радиус твердого шара, h — глубина жидкости; мы предполагаем, что глубина h мала по сравнению с a, но непостоянна. Пусть положение какой-нибудь точки слоя определяется угловыми координатами θ, φ. Компоненту скорости в этой точке вдоль меридиана, в направлении возрастания θ, назовем через u, компоненту же скорости вдоль круга широты в направлении возрастания φ — через v. Далее через ζ обозначим возвышение свободной поверхности над невозмущенным уровнем. На основании изложенных в § 172 соображений предположим, что горизонтальное движение для всех точек одной и той же вертикали одинаково; уравнение неразрывности будет тогда

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(uha\sin\theta\,\delta\varphi)\,\delta\theta+\frac{\partial}{\partial\varphi}(vha\,\delta\theta)\,\delta\varphi=-a\sin\theta\,\delta\varphi\,a\,\delta\theta\frac{\partial\zeta}{\partial t},$$

где левая часть представляет поток через призму, имеющую в основании элемент поверхности $a\sin\theta\,\delta\varphi\,a\,\delta\theta$, тогда как правая сторона представляет быстроту уменьшения объема жидкости вследствие понижения поверхности. Следовательно,

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\frac{1}{a\sin\theta}\left\{\frac{\partial(hu\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(hv)}{\partial\varphi}\right\}. \tag{1}$$

Если пренебречь членами второго порядка относительно u и v, то уравнения движения, полученные по методам § 169, 189, будут

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=-g\frac{\partial\zeta}{a\,\partial\theta}-\frac{\partial\Omega}{a\,\partial\theta},\\ \frac{\partial v}{\partial t}&=-g\frac{\partial\zeta}{a\sin\theta\,\partial\varphi}-\frac{\partial\Omega}{a\sin\theta\,\partial\varphi},\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где Ω обозначает потенциал внешних сил.

Если положить

$$\bar{\zeta}=-\frac{\Omega}{g}, \tag{3}$$

то уравнения движения могут быть написаны также в форме

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=-\frac{g}{a}\frac{\partial}{\partial\theta}(\zeta-\bar{\zeta}),\\ \frac{\partial v}{\partial t}&=-\frac{g}{a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\zeta-\bar{\zeta}).\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Мы можем исключить u и v из уравнений (1) и (4) и получить таким образом уравнение, содержащее только ζ.

В случае простого гармонического колебания временной множитель равен $e^{i(\sigma t+\varepsilon)}$, и уравнения принимают вид

$$\zeta=\frac{i}{\sigma a\sin\theta}\left\{\frac{\partial(hu\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(hv)}{\partial\varphi}\right\}, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}u&=i\frac{g}{\sigma a}\frac{\partial}{\partial\theta}(\zeta-\bar{\zeta}),\\ v&=i\frac{g}{\sigma a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\zeta-\bar{\zeta}).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

§ 199. Рассмотрим более подробно случай постоянной глубины. Чтобы найти свободные колебания, положим $\zeta = 0$; уравнения (5) и (6) предыдущего параграфа тогда дают

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2}+\frac{\sigma^2a^2}{gh}\zeta=0. \tag{1}$$

Это уравнение по виду тождественно с общим уравнением сферических поверхностных функций [§ 83 (2)]. Если мы, следовательно, положим

$$\frac{\sigma^2a^2}{gh}=n(n+1), \tag{2}$$

то

$$\zeta=S_n \tag{3}$$

будет решением уравнения (1), где S_n обозначает общую сферическую поверхностную функцию порядка n.

В § 86 было отмечено, что S_n только тогда может быть конечной на всей поверхности шара, когда n есть целое число. Для океана, который покрывает всю сферу, свободная поверхность, таким образом, при нормальном колебании в каждый момент времени имеет форму „гармонического сфероида"

$$r=a+h+S_n\cos(\sigma t+\varepsilon); \tag{4}$$

частота колебания будет равна

$$\sigma=\left\{n(n+1)\right\}^{1/2}\frac{(gh)^{1/2}}{a}, \tag{5}$$

где n есть целое число.

Характер различных нормальных колебаний лучше всего определить при помощи исследования узловых линий ($S_n=0$) свободной поверхности. В учебниках по сферическим функциям[1]) показывается, что зональная сферическая функция $P_n(\mu)$ обращается в нуль для n действительных и различных значений μ, лежащих между -1 и $+1$, так что в этом случае мы имеем в качестве узловых линий n кругов широты. Если n нечетно, то один из них совпадает с экватором. В случае тессеральных функций

$$(1-\mu^2)^{1/2s}\frac{d^sP_n(\mu)}{d\mu^s}\cos s\varphi,$$

$$(1-\mu^2)^{1/2s}\frac{d^sP_n(\mu)}{d\mu^s}\sin s\varphi$$

второй множитель обращается в нуль для $n-s$ значений μ, а тригонометрический множитель обращается в нуль для $2s$ равностоящих значений φ. Узловые линии состоят таким образом из $n-s$ парал-

[1]) См. литературные указания в сноске 1, стр. 137.

лелей и $2s$ меридианов. Подобным же образом секториальные гармонические функции

$$(1-\mu^2)^{1/2\,n}\cos n\varphi,$$

$$(1-\mu^2)^{1/2\,n}\sin n\varphi$$

имеют в качестве узловых линий $2n$ меридианов.

Однако рассматриваемые случаи суть только частные случаи; в самом деле, так как существуют $2n+1$ независимых сферических поверхностных функций какого-то целого порядка n и так как данная формулой (5) частота для каждой из них будет одной и той же, то будет иметь место неопределенность соответственного порядка и в составе нормальных колебаний и в распределении их узловых линий.

Наложением можно получить различные типы прогрессивных волн; если мы возьмем, например, секториальную гармоническую функцию, то получим решение, при котором

$$\zeta \text{ пропорционально } (1-\mu^2)^{1/2\,n}\cos(n\varphi-\sigma t+\varepsilon); \tag{6}$$

это дает целый ряд меридиональных гребней и борозд, которые движутся вокруг шара, причем скорость распространения, измеренная на экваторе, будет равна

$$\frac{\sigma a}{n}=\left(\frac{n+1}{n}gh\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Легко убедиться, что траектории частиц суть эллипсы, главные оси которых соответственно совпадают с направлениями меридианов и кругов широты. На экваторе эти эллипсы сводятся к прямым линиям.

Для случая $n=1$ сферическая функция будет зональной. Тогда гармонический сфериод (4) при нашей степени приближения будет представлять шар, эксцентричный твердому шару. Важно, однако, отметить, что этот случай, строго говоря, не может быть включен в наше динамическое исследование, если мы только не наложим некоторую связь на шар, чтобы удерживать его в покое, ибо рассматриваемая деформация свободной поверхности вызвала бы перемещение центра масс всего океана и вместе с этим вызвала бы соответственную реакцию связи на земной шар. Легко было бы построить в этом смысле исправленную теорию для случая свободного земного шара, но сам вопрос имеет мало значения, во-первых, потому, что для случая Земли инертная масса твердого шара несоизмеримо велика сравнительно с массой океана и, во-вторых, возмущающие силы, которые могли бы произвести подобного рода деформацию, в природе обыкновенно не встречаются. Оказывается, например, что первый член выражения для приливообразующего потенциала Солнца или Луны есть сферическая функция *второго* порядка (см. прибавление к этой главе).

Для $n=2$ свободная поверхность в некоторый момент представляет приближенно эллипсоид. Соответствующий период, который определяется из формулы (5), в 0,816 раза больше периода аналогичного колебания в канале на экваторе (§ 181).

Для больших значений n расстояние между двумя узловыми линиями мало сравнительно с радиусом земного шара, и колебания происходят тогда приблизительно таким же образом, как и на плоском слое воды. Например, скорость распространения секториальных волн, представленных формулой (6), на экваторе стремится с возрастающим n к значению $(gh)^{1/2}$ в согласии с § 170.

Сравнение этих исследований с общей теорией § 168 приводит по одним только физическим основаниям к заключению, что любое произвольное значение ζ можно разложить в ряд простых сферических функций, т. е. мы можем положить

$$\zeta=\sum_0^\infty S_n,$$

причем коэфициенты различных независимых сферических фуикций суть иормальиые координаты системы. Так как в выражении для кинетической и потенциальной энергий произведения этих коэфициеитов должны обращаться в нуль, то мы приходим к ортогональным свойствам сферических функций, как это было указано в § 87. Действительное вычисление энергий будет дано в следующей главе применительно к иному трактованию этой проблемы.

Действие простой гармонической возмущающей силы можно дать тотчас же, согласно формуле (14) § 168. Если значение Ω на поверхности можно привести к виду

$$\Omega=\sum\Omega_n, \tag{8}$$

где Ω_n есть сферическая поверхностная функция целого порядка n, то различные члены будут обозначать нормальные компоненты силы в обобщенном смысле § 135; значение ζ, согласно статической теории соответствующее какому-либо члену Ω_n, будет

$$\zeta_n=-\frac{\Omega_n}{g}. \tag{9}$$

Таким образом для вынужденного колебания, соответствующего этому члену, мы будем иметь

$$\zeta_n=-\frac{1}{1-\frac{\sigma^2}{\sigma_n^2}}\frac{\Omega_n}{g}, \tag{10}$$

где σ обозначает частоту возмущающей силы, а σ_n — частоту соответствующего свободного колебания, которое дано формулой (5). Можно, конечно, уравнение (10) вывести без труда прямо из уравнения предыдущего параграфа.

§ 200. До сих пор мы пренебрегали взаимным притяжением частиц жидкости. В случае океана, покрывающего земной шар, и при плотностях, имеющих место для действительной Земли и действительного океана, указанное притяжение не оказывает влияния. Чтобы исследовать его действие для случая свободных колебаний, мы должны только в последнюю формулу на место Ω_n подставить гравитационный потенциал вытесняемой воды. Если мы обозначим плотность воды через ϱ, а через ϱ_0 обозначим среднюю плотность земли и воды вместе, то будем иметь [1])

$$\Omega_n = -\frac{4\pi\gamma\varrho a}{2n+1}\zeta_n, \tag{11}$$

$$g = \frac{4}{3}\gamma\pi a\varrho_0, \tag{12}$$

где γ обозначает постоянную тяготения; отсюда следует

$$\Omega_n = -\frac{3}{2n+1}\frac{\varrho}{\varrho_0}g\zeta_n. \tag{13}$$

Подставляя в (10), получим

$$\frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2} = \left(1 - \frac{3}{2n+1}\frac{\varrho}{\varrho_0}\right), \tag{14}$$

где σ_n обозначает теперь действительную частоту колебания, а σ_n) — частоту, вычисленную на основании первой гипотезы, т. е. не принимая во внимание взаимного притяжения. Таким образом исправленная частота определится из формулы

$$\sigma_n^2 = n(n+1)\left(1 - \frac{3}{2n+1}\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\frac{gh}{a^2}. \tag{15}$$ [2])

Для эллипсоидального колебания ($n = 2$) и для $\frac{\varrho}{\varrho_0} = 0{,}18$ (как в случае Земли) из выражения (14) видно, что благодаря взаимному притяжению частота *уменьшается* в отношении 0,94 к 1.

Самое медленное колебание соответствовало бы значению $n = 1$, однако в этом случае, как было уже указано, мы должны были бы допустить существование наложенной на шар связи, удерживающей его в состоянии равновесия. При этом допущении из (15) следует, что значение σ_1^2 будет отрицательно, если $\varrho > \varrho_0$. Тригонометрическая функция от t заменяется тогда действительной показательной функцией, а это показывает, что конфигурация, при которой поверхность океана образует сферическую поверхность, концентрическую к поверхности

---

[1]) См. например, Routh, Analytical Statics 2-е изд., Cambridge, 1902, II, 146—7.

[2]) Этот результат дан Лапласом, Mécanique céleste, кн. 1, § 1 (1799). Свободные и вынужденные колебания типа $n = 2$ он исследовал уже ранее в своих Recherches sur quelques points du système du monde, Mém. de l'Acad. Roy. des sciences, 1775 (1778) [Oeuvres complètes, IX, 109].

земного шара, представляет неустойчивое положение равновесия. Так как введение связей только увеличивает инерцию системы, то мы заключаем, что для $\varrho > \varrho_0$ равновесие при свободном земном шаре также будет неустойчивым. В крайнем случае, когда мы предположили бы сам земной шар совершенно свободным от тяготения, вода, будучи возмущена под влиянием сил трения, стремилась бы, очевидно, в конце концов вытолкнуть ядро и собраться в виде шаровой массы.

Из § 168 следует, а также легко можно заметить независимо от этого, что вынужденные колебания, происходящие от периодической возмущающей силы при учете тяготения воды, будут даваться формулой (10) при условии, что Ω_n обозначает теперь потенциал только внешних сил и σ_n имеет значение, данное формулой (15).

§ 201. Колебания моря, ограниченного меридианами или параллельными кругами, или и теми и другими, могут быть исследованы тем же методом [1]). Однако получающиеся при этом сферические функции, как правило, уже теперь будут не целого порядка, а поэтому трудно получить численные результаты.

Для случая моря, ограниченного двумя параллельными кругами, мы полагаем

$$\zeta = \left\{ Ap(\mu) + Bq(\mu) \right\} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} sq, \tag{1}$$

где $\mu = \cos\theta$, а $p(\mu)$, $q(\mu)$ суть обе функции от μ, которые содержат $(1-\mu^2)^{1/2s}$ в качестве множителя и даны формулой (2) § 86. Необходимо заметить, что $p(\mu)$ есть *четная*, а $q(\mu)$ — *нечетная* функция от μ.

Если мы будем отличать ограничивающие параллельные круги индексами, то граничные условия будут

$$u = 0 \text{ для } \mu = \mu_1 \text{ и } \mu = \mu_2.$$

Для свободных колебаний будем иметь, согласно (6) § 193

$$Ap'(\mu_1) + Bq'(\mu_1) = 0, \quad Ap'(\mu_2) + Bq'(\mu_2) = 0; \tag{2}$$

откуда следует

$$\begin{vmatrix} p'(\mu_1) & q'(\mu_1) \\ p'(\mu_2) & q'(\mu_2) \end{vmatrix} = 0; \tag{3}$$

это уравнение определяет допустимые значения для порядка n сферических функций. Частоты σ, которые соответствуют различным корням, как и раньше, определяются формулой (5) § 199.

Если обе пограничные линии одинаково удалены от экватора, то имеем $\mu_2 = -\mu_1$. Вышенаписанные решения распадаются тогда на две группы; для одной имеем

$$B = 0, \quad p'(\mu_1) = 0, \tag{4}$$

а для другой

$$A = 0, \quad q'(\mu_1) = 0. \tag{5}$$

В первом случае ζ для двух точек, лежащих симметрично относительно экватора, имеет одинаковое значение, во втором случае значения ζ для подобных точек одинаковы по абсолютной величине, но различны по знаку.

[1]) Ср. Rayleigh, см. сноску на стр. 378.

Если мы предположим, что одна из ограничивающих линий стягивается к одной точке (например, $\mu_2 = 1$), то приходим к случаю круглого бассейна. Значения $p'(1)$ и $q'(1)$ бесконечны, но их отношение вычисляется с помощью формул, данных в § 84. Из них можно найти с помощью второго уравнения (2) отношение $A:B$; если мы подставим это в первое уравнение (2), то получим уравнение для определения n. Однако мы будем иметь более простой метод для этого случая, если будем исходить из решения, о котором мы знаем, что оно для каждого значения n в полюсе $\mu = 1$ конечно. Это требует введения новых переменных, при выборе которых оставляется до известной степени произвол. Например, мы можем взять выражение $P_n^s(\cos\theta)$ из формулы (6) § 86 и попытаться определить n из условия, которое для $\theta = \theta_1$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\theta} P_n^s(\cos\theta) = 0 \text{ [1]}. \tag{6}$$

Если радиус сферы сделается бесконечным, то мы приходим к плоской проблеме § 191 [2]). Отдельные шаги этого перехода можно усмотреть из § 100.

Если рассмотренный слой воды имеет в качестве границ два меридиана (и кроме того может иметь или не иметь параллельные круги), например $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$, то условие, что для них $v = 0$, налагает ограничение на множитель $\cos s\omega$, и мы получаем $s\alpha = m\pi$, где m есть целое число. Это последнее уравнение определяет допустимые значения s, которые, вообще говоря, не являются целыми числами [3]).

Суточные и полусуточные приливы в невращающемся океане с постоянной глубиной, ограниченном двумя меридианами, были изучены Прудманом и Додсоном и доведены до результатов для некоторых случаев и некоторых значений глубины [4]).

Приливы на вращающемся слое жидкости

§ 202. Теория приливов на открытом слое волн существенно усложняется благодаря вращению Земли. Если бы мы могли по крайней мере допустить, что периоды свободных колебаний и периоды возмущающих сил малы сравнительно с продолжительностью суток, то предыдущие исследования могли бы рассматриваться как первое приближение, но, однако, эти допущения далеко не соответствуют условиям, господствующим на Земле.

Затруднения, появляющиеся тогда, когда мы пытаемся учесть вращение, зависят от того, что частица, которая имеет движение в направлении изменения широты, стремится сохранить неизменным свой момент количества движения при вращении около земной оси и тем самым изменить свою скорость, перпендикулярную к направлению меридиана. Это обстоятельство, конечно, хорошо известно

---

[1]) Этот вопрос был решен Macdonald, Proc. Lond. Math. Soc., XXXI, 264 (1899).

[2]) Ср. Rayleigh, Theory of Sound, § 336, 338.

[3]) Читателю, который хочет изучать задачу в этом направлении дальше, мы указываем Thomson a. Tait, Natural Philosophy, 12-е изд., прибавление B, Spherical Harmonic Analysis.

[4]) Proudman a. Doodson, M. N. R. A. S., Geophy. Suppt., I, 468 (1927) и II, 209 (1929).

в связи с гадлеевой теорией пассатных ветров [1]). На его значение для теории приливов впервые, повидимому, указал Маклорен [2]).

Вследствие большой инерции твердой части земного шара сравнительно с инерцией океана периодическое изменение скорости вращения, имеющее место благодаря приливам, абсолютно незаметно. Мы можем, следовательно, эту скорость вращения рассматривать в дальнейшем как постоянную.

Теория малых колебаний динамической системы около положения относительного равновесия по отношению к реальной или воображаемой твердой системе отсчета, вращающейся с постоянной угловой скоростью около неподвижной оси, отличается в некоторых существенных чертах от теории малых колебаний около положения абсолютного равновесия, о которой мы говорили в § 168. Необходимо поэтому уделить некоторое внимание общей теории, прежде чем заняться исследованием специальных проблем. Система, которую мы исследуем, может быть совершенно свободна или может быть связана с вращающимся твердым телом. Во втором случае предполагается, что как реакции связи, так и внутренние силы системы являются консервативными.

§ 203. Уравнения движения частицы m относительно прямоугольных координатных осей Ox, Oy, Oz, которые вращаются с угловой скоростью ω около Oz, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} m(\ddot{x}-2\omega\dot{y}-\omega^2x) &= X,\\ m(\ddot{y}+2\omega\dot{x}-\omega^2y) &= Y,\\ m\ddot{z} &= Z, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где X, Y, Z означают компоненты действующих сил.

Предположим, что относительные координаты (x, y, z) каждой частицы выражены через определенное число независимых величин $q_1, q_2, \ldots, q_r$. Положим

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T} &= \frac{1}{2}\sum m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2),\\ T_0 &= \frac{1}{2}\omega^2\sum m(x^2+y^2). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Таким образом $\mathfrak{T}$ обозначает кинетическую энергию относительного движения; мы предполагаем, что она есть однородная квадратичная функция обобщенных скоростей $\dot{q}_r$, коэфициенты которой суть функции обобщенных координат q_r; T_0 обозначает кинетическую энергию системы, когда она вращается без относительного движения в положении $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Наконец, мы положим

$$\sum(X\,\delta x+Y\,\delta y+Z\,\delta z) = -\delta V+Q_1\,\delta q_1+Q_2\,\delta q_2+\ldots+Q_n\,\delta q_n, \tag{3}$$

[1]) Hadley, The Cause of the General Trade Winds, Phil. Trans., 1735.

[2]) Maclaurin, De Causâ Physicâ Fluxus ex Refluxus Maris, Prop. VII. Motus aquae turbatur ex inaequali velocitate quâ corpora circa axem Terrae motu diurno deferuntur (1740).

где V обозначает потенциальную энергию, а $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ суть обобщенные компоненты внешних сил.

Умножив три уравнения (1) соответственно на $\frac{\partial x}{\partial q_r}$, $\frac{\partial y}{\partial q_r}$, $\frac{\partial z}{\partial q_r}$ и сложив их, затем суммируя результат по всем частицам системы и поступая далее таким же образом, как и при „прямом" выводе уравнений Лагранжа, получим следующее типичное уравнение движения в обобщенных координатах [1])

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q_r} + \beta_{r1}\dot{q}_1 + \beta_{r2}\dot{q}_2 + \ldots + \beta_{rn}\dot{q}_n = -\frac{\partial}{\partial q_r}(V - T_0) + Q_r, \quad (4)$$

где

$$\beta_{rs} = 2\omega \sum m \frac{\partial (x, y)}{\partial (q_s, q_r)}. \quad (5)$$

Необходимо отметить, что

$$\beta_{rs} = -\beta_{sr}, \quad \beta_{rr} = 0. \quad (6)$$

Уравнение (4) можно вывести также из (23) § 141 с помощью (8) § 142, если вообразить вращающуюся систему свободной, но с бесконечно большим моментом инерции.

Условия относительного равновесия при отсутствии возмущающих сил можно получить, положив в уравнении (4) $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n = 0$; тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial q_r}(V - T_0) = 0; \quad (7)$$

это показывает, что значение $V - T_0$ для положения равновесия является „стационарным".

Далее из уравнений (1) мы будем иметь

$$\sum m(\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z}) - \omega^2 \sum m(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) = \sum (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}); \quad (8)$$

из этого уравнения и из уравнений (2) и (3) следует

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{T} + V - T_0) = Q_1\dot{q}_1 + Q_2\dot{q}_2 + \ldots + Q_n\dot{q}_n. \quad (9)$$

Этот результат можно также получить из (4) с помощью соотношений (6). Если возмущающие силы отсутствуют, то

$$\mathfrak{T} + V - T_0 = \text{const}. \quad (10)$$

[1]) Ср. Thomson a. Tait, Natural Philosophy, 2-е изд., I, 310; Lamb, Higher Mechanics, 2-е изд., § 84.

Стоит также отметить вид, который принимает теорема Гамильтона § 135. Полная кинетическая энергия нашей системы равна

$$T = \frac{1}{2}\sum xm\left\{(\dot{x}-\omega y)^2+(\dot{y}+\omega x)^2+\dot{z}^2\right\} = \mathfrak{T}+T_0+\omega M, \tag{11}$$

где

$$M = \sum m(x\dot{y}-y\dot{x}). \tag{12}$$

При отсутствии внешних сил будем иметь

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1}(T-V)\,dt = 0 \tag{13}$$

с обычными предельными условиями. Отсюда следует

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1}(\mathfrak{T}+T_0+\omega M-V)\,dt = 0 \tag{14}$$

при условии

$$\left[\sum m\left\{(\dot{x}-\omega y)\Delta x+(\dot{y}+\omega x)\Delta y+\dot{z}\Delta z\right\}\right]_{t_0}^{t_1} = 0. \tag{15}$$

Эту теорему можно вывести также непосредственно из формулы (1) с помощью обычного метода Гамильтона. Обратно эта теорема для случая свободного движения приводит к независимому доказательству формулы (4). Введение в эти исследования возмущающих сил не представляет никаких трудностей.

Условие (15) всегда выполняется в том случае, когда относительные начальное и конечное положения при виртуальном движении такие же, как и при действительном.

§ 204. Примем, что координаты q_r выбраны таким образом, что они обращаются в нуль для невозмущенного состояния. В случае *малого* возмущения можно написать

$$2\mathfrak{T} = a_{11}\dot{q}_1^2+a_{22}\dot{q}_2^2+\ldots+2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+\ldots, \tag{1}$$

$$2(V-T_0) = c_{11}q_1^2+c_{22}q_2^2+\ldots+2c_{12}q_1q_2+\ldots, \tag{2}$$

где коэфициенты можно рассматривать как постоянные. Члены первого порядка в выражении $V-T_0$ вследствие „стационарности" опущены.

Чтобы по возможности упростить уравнения (1) и (2), предположим, что они, как в § 168, приведены линейным преобразованием к сумме квадратов, т. е. что

$$2\mathfrak{T} = a_1\dot{q}_1^2+a_2\dot{q}_2^2+\ldots+a_n\dot{q}_n^2, \tag{3}$$

$$2(V-T_0) = c_1q_1^2+c_2q_2^2+\ldots+c_nq_n^2. \tag{4}$$

Величины $q_1, q_2, \ldots, q_n$ можно назвать „главными координатами" системы. Однако не следует предполагать, что их свойства так же просты, как при отсутствии вращения. Коэфициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ можно соответственно назвать „главными коэфициентами" инерции и устойчивости. Главные коэфициенты устойчивости

такие же, как и без учета вращения, но дополненные фиктивными центробежными силами ($m\omega^2 x$, $m\omega^2 y$, 0), которые действуют на каждую частицу в направлении от оси наружу.

Уравнения (4) предыдущего параграфа для случая бесконечно малых движений будут

$$\left.\begin{aligned} a_1\ddot{q}_1 + c_1 q_1 + \beta_{12}\dot{q}_2 + \beta_{13}\dot{q} + \ldots + \beta_{1n}\dot{q}_n &= Q_1, \\ a_2\ddot{q}_2 + c_2 q_2 + \beta_{21}\dot{q}_1 + \beta_{23}\dot{q}_3 + \ldots + \beta_{2n}\dot{q}_n &= Q_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n\ddot{q}_n + c_n q_n + \beta_{n1}\dot{q}_1 + \beta_{n2}\dot{q}_2 + \beta_{n3}\dot{q}_3 + \ldots &= Q_n, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где коэфициенты β_{rs} можно рассматривать как постоянные.

Если умножить уравнения (5) по порядку на $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ и сложить их, то мы найдем, принимая во внимание соотношение $\beta_{rs} = -\beta_{sr}$:

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{T} + V - T_0) = Q_1\dot{q}_1 + Q_2\dot{q}_2 + \ldots + Q_n\dot{q}_n, \tag{6}$$

что мы уже доказали, не прибегая к приближениям.

§ 205. Чтобы исследовать *свободные* движения системы, положим в уравнениях (5) $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n = 0$ и сделаем, как при обычном способе решения линейных уравнений, подстановку:

$$q_1 = A_1 e^{\lambda t},\ q_2 = A_2 e^{\lambda t}, \ldots,\ q_n = A_n e^{\lambda t}. \tag{7}$$

Подставляя, находим

$$\left.\begin{aligned} (a_1\lambda^2 + c_1)A_1 + \beta_{12}\lambda A_2 + \ldots + \beta_{1n}\lambda A_n &= 0, \\ \beta_2\lambda A_1 + (a_2\lambda^2 + c)A_2 + \ldots + \beta_{2n}\lambda A_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_n\lambda A_1 + \beta_{n2}\lambda A_2 + \ldots + (a_n\lambda^2 + c_n)A_n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Исключив отношения $A_1 : A_2 : \ldots : A_n$, мы получим уравнение

$$\begin{vmatrix} a_2\lambda^2 + c_1, & \beta_{12}\lambda, & \ldots \beta_{1n}\lambda, \\ \beta_{21}\lambda, & a_2\lambda^2 + c_2^2 & \ldots \beta_{2n}\lambda \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{n1}\lambda, & \beta_{n2}\lambda, & \ldots a_n\lambda^2 + c_n \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

или, как мы обычно будем писать для краткости,

$$D(\lambda) = 0. \tag{10}$$

Детерминант $D(\lambda)$ принадлежит в силу соотношений (6) § 203 к детерминантам, которые Кэли назвал косыми. Если изменить знак перед λ, то строки заменятся столбцами и наоборот, и значение детерминанта останется без изменения. Если представить левую часть уравнения (10) в развернутом виде, то она будет содержать только *четные* степени λ и корни будут состоять из пар вида

$$\lambda = \pm(\varrho + i\sigma).$$

Для того чтобы относительное равновесие было устойчиво, существенно, чтобы значения ϱ все были бы нулями, так как иначе в действительном выражении для произвольной координаты q_r встретились бы члены вида $e^{\pm\varrho t}\cos\sigma t$ и $e^{\pm\varrho t}\sin\sigma t$; это указывало бы на возможность колебания с постоянно возрастающей амплитудой.

В теории абсолютного равновесия, которая была набросана в § 168, необходимое и достаточное условие для устойчивости (в указанном смысле) состояло просто в том, что потенциальная энергия для положения равновесия должна иметь минимум. В рассматриваемом случае условия становятся более сложными [1]), но легко видеть, что если выражение для $V-T_0$ будет существенно положительным или, другими словами, если коэфициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$ в формуле (4) будут все положительными, то равновесие должно быть устойчивым. Это следует тотчас же из уравнения

$$\mathfrak{T}+(V-T_0)=\text{const.}, \tag{11}$$

выведенного в § 203, которое показывает, что при только что сделанном допущении ни $\mathfrak{T}$, ни $V-T_0$ не могут возрасти выше определенной границы, зависящей от начальных условий [2]). Необходимо отметить, что это заключение не основывается на применении приближенных уравнений.

Устойчивость, таким образом, будет обеспечена, когда $V-T_0$ в относительном положении равновесия есть минимум. Это условие, однако, не необходимо, и устойчивость может иметь место и тогда (с рассматриваемой точки зрения), когда $V-T_0$ есть максимум, как это мы покажем для частного случая двух степеней свободы. Необходимо, однако, заметить, что если система подвержена каким-нибудь, хотя бы незначительным силам трения, которые влияют на координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$, то равновесие только тогда перманентно или „вековым" образом устойчиво, когда $V-T_0$ есть минимум. Для таких сил характерно, что их работа, произведенная над системой, всегда является отрицательной. А в таком случае, согласно уравнению (6), выражение $\mathfrak{T}+(V-T_0)$ в алгебраическом смысле будет непрерывно уменьшаться, пока имеет место какое-нибудь относительное движение. Следовательно, если система перешла из относительного положения равновесия в такую конфигурацию, при которой $V-T_0$ будет отрицательным, то вышенаписанное выражение, а тем самым и его часть $V-T_0$ будут принимать непрерывно возрастающие отрицательные значения, что может случиться только тогда, когда система все более и более удаляется от своего положения равновесия.

---

[1]) Эти условия были исследованы Routh, см. сноску на стр. 243 см. также его Advanced Rigid Dynamics, гл. VI.

[2]) Это заключение было первоначально применено Дирихле к теории колебаний около абсолютного положения равновесия § 168, Über die Stabilität des Gleichgewichtes, Crelle, XXXII (1846) [Werke, Berlin, 1889–1897, II, 3] Алгебраическое доказательство приведено у Lamb, Higher Mechanics, 2 изд., § 99.

Это важное различие между „обыкновенной", или кинетической, и „вековой", или практической, устойчивостью было сделано впервые Томсоном и Тэтом [1]). Необходимо отметить, что вышеизложенное доказательство предполагает постоянную угловую скорость (ω), которая в случае необходимости должна поддерживаться соответствующим образом действующей для этой цели на вращающееся тело силой. Если твердое тело *свободно*, то условие для вековой устойчивости принимает несколько иную форму, о которой речь будет впоследствии (гл. XII). При практических применениях ограничимся только случаями, в которых $V - T_0$ есть минимум, и коэфициенты $c_1, c_2 \ldots, c_n$ формулы (4) § 204 будут таким образом положительными.

Чтобы исследовать характер свободного колебания для случая устойчивости, заметим следующее: если λ есть произвольный корень уравнения (10), то уравнения (8) дают

$$\frac{A_1}{\alpha} = \frac{A_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{A_n}{\alpha_n} = C, \tag{12}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ обозначают миноры какой-либо строки в детерминанте $D(\lambda)$, а C — произвольная постоянная. Эти миноры будут содержать, вообще говоря, как нечетные, так и четные степени от λ и поэтому примут неравные значения для обоих противоположных по знаку корней ($\pm\lambda$) некоторой произвольной пары. Если положить $\lambda = \pm i\sigma$, то соответствующие значения α_r будут иметь вид

$$\mu_r \pm i\nu_r,$$

где μ_r, ν_r действительны. Отсюда следует

$$q_r = C(\mu_r + i\nu_r)e^{i\sigma t} + C'(\mu_r - i\nu_r)e^{i\sigma t}.$$

Положив

$$C = \frac{1}{2}Ke^{i\varepsilon}, \quad C' = \frac{1}{2}Ke^{-i\varepsilon},$$

получим решение наших уравнений в действительной форме с двумя произвольными постоянными K и ε,

$$q_r = K\left\{\mu_r \cos(\sigma t + \varepsilon) - \nu_r \sin(\sigma t + \varepsilon)\right\}. \tag{13}$$

Эти формулы представляют движение, которое можно обозначить как „собственный вид колебаний" системы. Число возможных собственных видов колебаний равно, конечно, числу пар корней уравнения (9), т. е. равно числу степеней свободы системы. Необходимо

---

[1]) Thomson a. Tait, Natural Philosophy, 2-е изд., часть I, стр. 391; см. также Poincaré, Sur l'équilibre d'une masse fluide animee d'un mouvement de rotation, Acta Mathematica, VII (1885) и op. cit. ante, стр. 146. Некоторые простые механические иллюстрации в статье „On Kinetic Stability", Proc. Roy. Soc. A., LXXX, 168 (1909) и в работе автора Higher Mechanics, 2-е изд., стр. 253.

отметить, что вследствие вращения различные координаты недолго будут обладать одинаковыми фазами.

Если обозначить через ξ, η, ζ компоненты смещения произвольной частицы из ее положения равновесия, то мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \frac{\partial x}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q_2 + \cdots \quad \frac{\partial x}{\partial q_n} q_n,\\ \eta &= \frac{\partial y}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} q_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial q_n} q_n,\\ \zeta &= \frac{\partial z}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} q_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial q_n} q_n.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Подставляя из уравнений (13), получим результат в виде

$$\left.\begin{aligned}\xi &= P \cdot K\cos(\sigma t + \varepsilon) + P' \cdot K\sin(\sigma t + \varepsilon)\\ \eta &= Q \cdot K\cos(\sigma t + \varepsilon) + Q' \cdot K\sin(\sigma t + \varepsilon),\\ \zeta &= R \cdot K\cos(\sigma t + \varepsilon) + R' \cdot K\sin(\sigma t + \varepsilon),\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где P, P', Q, Q', R, R' обозначают определенные функции среднего положения частицы; в частности, эти функции содержат также и σ, а поэтому они различны для различных нормальных колебаний, но независимы, однако, от произвольных постоянных K и ε. Формулы (15) представляют эллиптическое колебание с периодом $\frac{2\pi}{\sigma}$, причем направления

$$\left.\begin{aligned}\frac{\xi}{P} &= \frac{\eta}{Q} = \frac{\zeta}{R}\\ \frac{\xi}{P'} &= \frac{\eta}{Q'} = \frac{\zeta}{R'}\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

и

представляют направления двух сопряженных полудиаметров эллиптической орбиты, длины которых соответственно равны

$$(P^2 + Q^2 + R^2)^{1/2} K$$

и

$$(P'^2 + Q'^2 + R'^2)^{1/2} K.$$

Положения, формы и относительные размеры эллиптических траекторий, а также относительные фазы частиц на них являются определенными таким образом для всякого нормального вида колебания, но абсолютные размеры и фазы будут произвольны.

§ 205a. Если угловая скорость ω будет малой, то вид нормальных колебаний, вообще говоря, будет мало отличаться от соответствующего вида при отсутствии вращения, и выражения для измененных видов колебаний и их частот можно найти следующим образом [1]). Так как детерминантное уравнение (9) § 205 не изменится, если мы переменим знаки на обратные у всех β, то частоты будут, как правило, содержать эти количества во *второй* степени. Следовательно, рассматривая для примера тот вид колебаний, в котором A_1

[1]) Rayleigh, Phil. Mag. (6), V, 293 (1903) [Papers, V, 89].

конечно, тогда как $A_2, A_3, \ldots, A_n$ будут сравнительно малыми, и полагая $\lambda = i\sigma_1$, получим r-е уравнение системы (8) в приближенном виде

$$\frac{A_r}{A_1} = \frac{i\beta_{r1}\sigma_1}{a_r(\sigma_1^2 - \sigma_r^2)}, \tag{17}$$

где $\sigma_r^2 = \frac{C_r}{a_r}$. Отсюда, подставляя в первое уравнение, мы получим исправленное выражение σ_1^2, так что

$$\sigma_1^2 = \frac{C_1}{a_1}\left\{1 + \sum_r \frac{\beta_{1r}^2}{a_1 a_r(\sigma_1^2 - \sigma_r^2)}\right\}. \tag{18}$$

Но эти приближения будут ошибочными, если какой-нибудь знаменатель в скобке обращается в нуль или является очень малым. Этот случай будет иметь место тогда, когда два или несколько видов нормальных колебаний при отсутствии вращения имеют одинаковые или почти одинаковые периоды. Предположим, например, что σ_1^2 и σ_2^2 почти равны. Тогда из формулы (8), считая $\lambda = i\sigma$, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}(C_1 - \sigma^2 a_1)A_1 + i\beta_{12}\sigma A_2 = 0,\\ i\beta_{21}A_1 + (C_2 - \sigma^2 a_2)A_2 = 0,\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

т. е. A_1 и A_2 будут сравнимыми. Исключая $\frac{A_1}{A_2}$, получим

$$(\sigma^2 - \sigma_1^2)(\sigma^2 - \sigma_2^2) = \frac{\beta_{12}^2}{a_1 a_2}\sigma^2. \tag{20}$$

В случае точного равенства частот это дает

$$\sigma^2 - \sigma_1^2 = \pm \frac{\beta_{12}}{\sqrt{a_1 a_2}}\sigma, \tag{21}$$

или приближенно

$$\sigma - \sigma_1 = \pm \frac{\beta_{12}}{2\sqrt{a_1 a_2}}. \tag{22}$$

Изменение частоты вследствие вращения теперь будет пропорционально ω вместо ω^2.

Выражения для $A_3, A_4, \ldots, A_n$ через A_1, A_2 могут быть найдены из оставшихся уравнений системы (8); ясно, что изменения в них могли произойти согласно указанному выше замечанию только благодаря прибавлению членов, содержащих ω^2.

§ 205b. Вследствие аналитических трудностей, которые встречаются при определении свободных колебаний, в особенности в случае непрерывных систем, надлежит искать приближенные методы для вычисления наиболее важных частот, подобные тем, которые применял Рэлей в случае невращающихся систем (§ 168).

Для этой цели обратимся к вариационной формуле (14) § 203. При применении к малым колебаниям целесообразно ввести в эту

формулу *отклонения* (ξ, η, ζ) частиц из их положения относительного равновесия. Если написать $x_0+\xi$, $y_0+\eta$, $z_0+\zeta$ вместо x, y, z, где x_0, y_0, z_0 относятся к положению относительного равновесия, то мы получим

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} M\,dt = \Delta \int_{t_0}^{t_1} M'\,dt + \Big[\sum m(x_0\Delta\eta - y_0\Delta\xi)\Big]_{t_0}^{t_1}, \tag{1}$$

где

$$M' = \sum m(\dot\xi\eta - \dot\eta\xi). \tag{2}$$

При подстановке выражения (1) в (14) § 203 при использовании граничного условия (15) § 203 указанная теорема будет представлена формулой

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathfrak{T} + \omega M' + T_0 - V)\,dt = 0, \tag{3}$$

если

$$\Big[\sum m\{(\dot\xi - \omega\eta)\Delta\xi + (\dot\eta + \omega\xi)\Delta\eta + \dot\zeta\,\Delta\zeta\}\Big]_{t_0}^{t_1} = 0. \tag{4}$$

Предположим теперь, что как действительное, так и виртуальное движения суть простые гармонические колебания, что оба обладают одинаковыми периодами $\frac{2\pi}{\sigma}$ и что пределы интегрирования отличаются друг от друга в точности на один период. Тогда члены в (4), относящиеся к обоим пределам, сокращаются, так что требуемое условие будет выполнено. Отсюда следует, что среднее значение (по отношению ко времени) выражения

$$\mathfrak{T} + \omega M' - (V - T_0) \tag{5}$$

будет стационарным для малых произвольных вариаций типа колебаний, причем период не варьируется. M', выраженное в обобщенных координатах (относительно которых мы предполагаем, что они обращаются в нуль при относительном равновесии), представляет билинейную функцию двух рядов переменных

$$q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_n$$

и

$$\dot q_1,\ \dot q_2,\ \dots,\ \dot q_n,$$

в то время как $\mathfrak{T}$ и $V - T_0$, согласно предположению, представляют соответственно однородные квадратичные функции скоростей координат. Отсюда следует, что (5) есть однородная квадратичная функция переменных q_r, $\dot q_r$.

Если положить

$$q_r = A_r \cos\sigma t + B_r \sin\sigma t \tag{6}$$

и обозначить среднее значение выражения (5) через J, то получим

$$J=\sigma^2P+\sigma Q-R, \tag{7}$$

где P, Q, R обозначают некоторые однородные квадратичные функции переменных A_r, B_r, точный вид которых в настоящий момент не нужен.

В силу свойства стационарности будем иметь

$$\sigma^2\Delta P+\sigma\Delta Q-\Delta R=0 \tag{8}$$

для всех бесконечно малых значений ΔA_r, ΔB_r. Если, в частности, положить $\Delta A_r=\varepsilon A_r$, $\Delta B_r=\varepsilon B_r$, где ε есть произвольно малая независимая от r постоянная, то будем иметь вследствие однородности

$$J=0. \tag{9}$$

То обстоятельство, что при свободных колебаниях среднее значение выражения (5) равно нулю, представляет обобщение высказанного уже для случая $\omega=0$ положения, что при колебаниях около положения абсолютного равновесия средние значения кинетической и потенциальной энергии равны между собой.

Данный результат может быть выражен еще в другой форме. Если временно рассматривать σ как функцию от A_r, B_r, где эти коэфициенты должны иметь какие-то значения, которые удовлетворяют уравнению

$$\sigma^2P+\sigma Q-R=0, \tag{10}$$

то будем иметь

$$(2\sigma P+Q)\Delta\sigma+(\sigma^2\Delta P+\sigma\Delta Q-\Delta R)=0. \tag{11}$$

Отсюда следует: если A_r, B_r имеют частные значения, соответствующие свободному колебанию, то имеем согласно (8)

$$\Delta\sigma=0. \tag{12}$$

Другими словами, значения σ, определяемые формулой (10), стационарны.

Отсюда следует, что если значения P, Q, R в (10) вычислены на основе предполагаемого типа колебаний, который очень мало отличается от истинного, то погрешность получающегося значения σ будет второго порядка.

Стационарные значения включают, что вообще более всего важно, и максимумы и минимумы σ (взятые по абсолютной величине).

Применения вышеизложенного принципа к частным случаям будут получены в § 212a и 216.

Общий вид функций P, Q, R в формуле (7) может быть установлен, хотя это и несущественно для доказательства. Принимая во внимание (3) и (4) § 204, мы тотчас же получаем

$$\left.\begin{aligned} P&=\tfrac{1}{4}S_ra_r(A_r^2+B_r^2),\\ R&=\tfrac{1}{4}S_rc_r(A_r^2+B_r^2),\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где S_r обозначает суммирование по членам указанного вида, а r пробегает значения 1, 2, ..., n. Далее из (2) следует

$$\omega M' = \omega \sum m \left(S_r \frac{\partial \xi}{\partial q_r} q_r \cdot S_s \frac{\partial \eta}{\partial q_s} \dot{q}_s - S_r \frac{\partial \eta}{\partial q_r} q_r \cdot S_s \frac{\partial \xi}{\partial q_s} \dot{q}_s \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\dot{q}_1 S_r \beta_{1r} q_r + \dot{q}_2 S_r \beta_{2r} q_r + \dots + \dot{q}_n S_r \beta_{nr} q_r \right), \tag{14}$$

где

$$\beta_{rs} = 2\omega \sum m \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(q_s, q_r)}. \tag{15}$$

Если сделать подстановку из формулы (6) и взять среднее значение, то получим

$$Q = \frac{1}{2} S_r S_s \beta_{rs} A_s B_r,$$

где при двойном суммировании всякая перестановка индексов берется *один раз*.

Это подтверждается следующим замечанием: если образовать с помощью этих значений P, Q, R уравнения (8), то мы найдем, что коэфициенты при ΔA_r, ΔB_r соответственно будут тождественны с коэфициентами при $\cos \sigma t$ и $\sin \sigma t$, если из (6) сделать подстановку в типичное уравнение движения (5) § 204.

§ 206. Символические выражения для *вынужденных* колебаний, под действием периодической возмущающей силы, легко могут быть написаны. Если предположить, что $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ все пропорциональны $e^{i\sigma t}$, где σ задана, то уравнения (5) § 204 дают, если опустить множители, зависящие от времени,

$$D(i\sigma) q_r = a_{r1} Q_1 + a_{r2} Q_2 + \dots + a_{rn} Q_n, \tag{1}$$

где коэфициенты в правой части обозначают миноры r-го m-й строки детерминанта $D(i\sigma)$.

Важнейшее отличие от теории „нормальных колебаний" при отсутствии вращения состоит в том, что отклонение, соответствующее какому-нибудь типу колебаний, не зависит единственно только от возмущающей силы того же самого типа. Вследствие этого движения отдельных частиц состоят, как легко видеть из (14) § 205, из общих эллиптических колебаний. Кроме того получаются вообще сдвиги фаз между отклонениями и силой, зависящие от частоты.

Как в § 168, отклонение будет очень велико, если $D(i\sigma)$ будет очень мало, т. е. когда частота σ возмущающей силы приближается к частоте собственного свободного колебания.

Если период возмущающих сил бесконечно велик, то отклонения стремятся к „статическим" значениям

$$q_1 = \frac{Q_1}{c_1}, \quad q_2 = \frac{Q_2}{c_2}, \dots, \quad q_n = \frac{Q_n}{c_n}, \tag{2}$$

как это непосредственно видно из уравнения (5) § 204. Это заключение должно быть, однако, изменено, если один или несколько коэфициентов устойчивости $c_1, c_2, \ldots, c_n$ будут равны нулю. Если, например, $c_1 = 0$, то как первая строка, так и первый столбец детерминанта $D(\lambda)$ делятся на λ, так что детерминантное уравнение (10) § 204 будет иметь пару корней, обращающихся в нуль. Другими словами, существует возможное свободное движение бесконечно длинного периода. Коэфициенты при $Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ на правой стороне формулы (1) становятся в этом случае неопределенными для $\sigma = 0$, и вычисленные значения не совпадают, вообще говоря, со значениями (2). Этот пункт важен, так как при некоторых гидродинамических применениях, как мы увидим, возможны установившиеся циркуляционные движения жидкости при постоянной деформации свободной поверхности даже без влияния внешних сил; далее как следствие получается, что вынужденные приливные волны длинного периода не обязательно будут приближаться к значениям, данным статической теорией приливов; ср. § 214, 217.

Чтобы пояснить вышеизложенные положения, рассмотрим более подробно случай двух степеней свободы. Уравнения движения тогда имеют вид

$$\left.\begin{aligned} a_1\ddot{q}_1 + c_1 q_1 + \beta\dot{q}_2 &= Q_1, \\ a_2\ddot{q}_2 + c_2 q_2 + \beta\dot{q}_1 &= Q_2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Уравнение, определяющее периоды свободных колебаний, будет

$$a_1 a_2 \lambda^4 + (a_1 c_2 + a_2 c_1 + \beta^2)\lambda^2 + c_1 c_2 = 0. \tag{4}$$

Для „обыкновенной" устойчивости достаточно, чтобы корни этого квадратного уравнения относительно λ^2 были действительны и отрицательны. Так как a_1, a_2 существенно положительны, то это условие, очевидно, всегда выполняется в том случае, если c_1, c_2 оба положительны, и выполняется также и тогда, когда c_1, c_2 оба отрицательны, если только β^2 достаточно велико. Позднее мы, однако, покажем, что в этом, втором случае равновесие, благодаря введению сил трения, будет неустойчиво; см. § 322.

Для определения вынужденных колебаний, когда Q_1, Q_2 пропорциональны $e^{i\sigma}$, мы имеем, опуская множитель, зависящий от времени:

$$\left.\begin{aligned} (c_1 - \sigma^2 a_1) q_1 + i\sigma\beta q_2 &= Q_1, \\ -i\sigma\beta q_1 + (c_2 - \sigma^2 a_2) q_2 &= Q_2; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

отсюда следует

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \frac{(c_2 - \sigma^2 a_2) Q_1 - i\sigma\beta Q_2}{(c_1 - \sigma^2 a_1)(c_2 - \sigma^2 a_2) - \sigma^2\beta^2}, \\ q_2 &= \frac{i\sigma\beta Q_1 + (c_1 - \sigma^2 a_1) Q_2}{(c_1 - \sigma^2 a_1)(c_2 - \sigma^2 a_2) - \sigma^2\beta^2}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Предположим, что $c_2 = 0$ или, другими словами, что отклонение q_2 не влияет на значение $V - T_0$. Далее предположим, что $Q_2 = 0$, т. е. что внешние силы при некотором отклонении типа q_2 не производят никакой работы. Вышенаписанные формулы дают тогда

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \frac{a_2}{a_2(c_1 - \sigma^2 a_1) + \beta^2} Q_1, \\ \dot{q}_2 &= \frac{\beta}{a_2(c_1 - \sigma^2 a_1) + \beta^2} Q_1. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

В случае возмущения длинного периода мы будем иметь приближенно $\sigma = 0$, а поэтому

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{c_1 + \dfrac{\beta^2}{a_2}}\, Q_1, \\ q_2 &= \frac{\beta}{a_2 c_1 + \beta^2}\, Q_1. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Отклонение q_1, таким образом, *меньше*, чем его статическое значение в отношении $1 : 1 + \dfrac{\beta^2}{a_2 c_1}$ и сопровождается движением типа q_2, хотя и нет налицо никакой внешней силы этого типа (ср. § 217). Мы, естественно, приходим снова к случаю абсолютного равновесия, исследованному в § 168, если положим $\beta = 0$ [1]).

Необходимо прибавить, что определение „главных координат" § 204 зависит от первоначального вида $\mathfrak{T}$ и $V - T_0$ и поэтому находится в зависимости от значения ω^2, которое входит как множитель в T_0. Система данных там уравнений не особенно подходит к разрешению вопроса о том, как зависят характер и частоты соответствующих нормальных колебаний от значения ω. Пункт, достойный быть отмеченным, который там был пропущен, заключается в том, что некоторые циркуляционные движения, которые при отсутствии вращения имели бы бесконечно длинные периоды, благодаря всякому хотя и малому вращению, превращаются в колебательные движения, периоды которых сравнимы с периодами вращения; ср. § 212, 223

Чтобы пояснить вопрос наиболее простым примером, возьмем опять случай двух степеней свободы. Если c_2 для $\omega = 0$ обращается в нуль и таким образом в общем случае содержит ω^2 в качестве множителя, то два корня уравнения (4) при ω^2 малом приближенно равны

$$\lambda^2 = -\frac{c_1}{a_1}, \quad \lambda^2 = -\frac{c_2}{a_2}.$$

Из второго из этих уравнений мы заключаем, что окончательно λ будет пропорциональна ω.

§ 207. Мы переходим теперь к гидродинамическим примерам и начнем со случая плоского горизонтального слоя жидкости, который в невозмущенном состоянии вращается равномерно около вертикальной оси [2]). Результаты будут применимы без существенных изменений и к случаю бассейна не очень больших размеров, который находится на полюсе или где-нибудь в другом месте вращающегося земного шара.

Примем ось вращения за ось z. Предположим, что оси x и y вращаются с наперед заданной угловой скоростью ω в их собственной плоскости, и обозначим через u, v, w скорости *относительно этих*

---

[1]) Вышеизложенная теория появилась во 2-м изд. этого труда (1895). Влияние трения принимается во внимание в § 322.

[2]) W. Thomson, On Gravitational Oscillations of Rotating Water, Proc. R. S. Edin., X, 92 (1879) [Papers, IV, 141].

осей в момент t той частицы, которая в этот момент занимает положение (x, y, z). Действительные скорости этой частицы, параллельные мгновенным положениям осей, будут таковы:

$$u - \omega y, \quad v + \omega x, \quad w,$$

а ускорения по этим направлениям:

$$\frac{Du}{Dt} - 2\omega v - \omega^2 x, \quad \frac{Dv}{Dt} + 2\omega u - \omega^2 y, \quad \frac{Dw}{Dt}.$$

В настоящем случае относительное движение принимается бесконечно малым, так что $\frac{D}{Dt}$ можно заменить через $\frac{\partial}{\partial t}$.

Обозначив через z_0 ординату свободной поверхности при относительном равновесии исключительно под действием силы тяжести, имеем, как в § 26,

$$z_0 = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}(x^2 + y^2) + \text{const.} \tag{1}$$

Примем для простоты, что наклон этой поверхности всюду мал, т. е. что $\frac{\omega^2 r}{g}$ будет мало, где r есть наибольшее расстояние произвольной части слоя от оси вращения.

Если $z_0 + \zeta$ обозначает ординату возмущенной поверхности, то при обычном предположении, что вертикальное ускорение воды мало сравнительно с g, давление в произвольной точке (x, y, z) определится из уравнения

$$p - p_0 = g\varrho(z_0 + \zeta - z), \tag{2}$$

откуда следует

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\omega^2 x - g\frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} = -\omega^2 y - g\frac{\partial \zeta}{\partial y}.$$

Уравнения горизонтального движения будут тогда иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v &= -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u &= -g\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где Ω обозначает потенциал возмущающих сил.

Если положить

$$\overline{\zeta} = -\frac{\Omega}{g}, \tag{4}$$

то уравнения (3) примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v &= -g\frac{\partial}{\partial x}(\zeta - \overline{\zeta}), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u &= -g\frac{\partial}{\partial y}(\zeta - \overline{\zeta}). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Уравнение неразрывности имеет тот же вид, как в § 193:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial (hu)}{\partial x} - \frac{\partial (hv)}{\partial y}, \tag{6}$$

где h обозначает глубину свободной поверхности, считая от уровня в невозмущенном состоянии. Эта глубина, конечно, не будет постоянной за исключением, когда дно следует профилю свободной поверхности, данному уравнением (1).

Дифференцируя первое уравнение (5) по y, а второе по x и вычитая затем из второго первое, найдем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + 2\omega\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \tag{7}$$

или, если положить

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

и проинтегрировать по t:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + 2\omega\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = \text{const}. \tag{8}$$

Это есть не что иное как выражение теоремы Гельмгольца о том, что произведение модуля вихря

$$2\omega + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

на поперечное сечение

$$\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \delta x \, \delta y$$

вихревой нити постоянно.

В случае простого гармонического возмущения с множителем $e^{i\sigma t}$ уравнения (5) и (6) соответственно перейдут в

$$\left.\begin{aligned} i\sigma u - 2\omega v &= -g\frac{\partial}{\partial x}(\zeta - \bar{\zeta}), \\ i\sigma v + 2\omega u &= -g\frac{\partial}{\partial y}(\zeta - \bar{\zeta}), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

и

$$i\sigma\zeta = -\frac{\partial (hu)}{\partial x} - \frac{\partial (hv)}{\partial y}. \tag{10}$$

Из (9) следует

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{g}{\sigma^2 - 4\omega^2}\left(i\sigma\frac{\partial}{\partial x} + 2\omega\frac{\partial}{\partial y}\right)(\zeta - \bar{\zeta}), \\ v &= \frac{g}{\sigma^2 - 4\omega^2}\left(i\sigma\frac{\partial}{\partial y} - 2\omega\frac{\partial}{\partial x}\right)(\zeta - \bar{\zeta}), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и если подставить эти значения в (10), то получим уравнение, содержащее только ζ.

В случае *постоянной* глубины результат принимает вид

$$\Delta_1\zeta + \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{gh}\zeta = \Delta_1\overline{\zeta}, \tag{12}$$

где, как и раньше,

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Если $\overline{\zeta} = 0$, то при некоторых условиях уравнения (5) и (6) могут быть удовлетворены *постоянными* значениями u, v, ζ. Мы должны тогда иметь

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{g}{2\omega}\frac{\partial\zeta}{\partial y}, \\ v &= \frac{g}{2\omega}\frac{\partial\zeta}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial(h, \zeta)}{\partial(x, y)} = 0. \tag{14}$$

Это последнее условие показывает, что линии контура свободной поверхности должны быть всюду параллельны линиям контура дна, но само значение ζ будет произвольным. Течение жидкости будет всюду параллельно линиям контура дна, и поэтому для возможности подобных стационарных движений необходимо далее, чтобы глубина вдоль боковой границы (которая предполагается в виде вертикальной стенки) была бы постоянной. Если глубина будет всюду одинаковой, то условие (14) тождественно выполняется; и единственное ограничение для значения ζ будет состоять только в том, что оно должно быть постоянно вдоль боковой границы.

§ 208. Уравнения предыдущего параграфа легко использовать в случае свободных волн в бесконечно длинном прямолинейном канале постоянного сечения [1]).

Если мы положим, что

$$\zeta = ae^{ik(ct-x)+my}, \quad v = 0, \tag{1}$$

где ось x параллельна длине канала, то уравнения (5) дают, опуская члены, заключающие $\overline{\zeta}$,

$$cu = g\zeta, \quad 2\omega u = -gm\zeta, \tag{2}$$

в то время как из уравнения неразрывности (6) следует

$$c\zeta = hu. \tag{3}$$

Отсюда мы получим

$$c^2 = gh, \quad m = -\frac{2\omega}{c}. \tag{4}$$

Первая из этих формул показывает, что скорость волн не зависит от вращения.

---

[1]) Thomson W., см. сноску на стр. 398

Выраженное в действительной форме значение ζ будет

$$\zeta = ae^{-\frac{2\omega y}{c}} \cos\{k(ct-x)+\varepsilon\}. \qquad (5)$$

Показательный множитель указывает, что высота волны возрастает при переходе от одной стороны канала к другой и что она будет на той стороне наименьшей, которая при вращении идет *впереди*. Если обратить внимание на направления движения частицы воды соответственно на гребне и во впадине, то увидим, что этот результат стоит в согласии с положением, указанным в § 202 [1]).

При изложенном выше решении от ширины канала требовалось только, чтобы она была всюду одинаковой, в остальном она ничем не ограничена.

Задачу определения свободных колебаний во вращающемся канале *конечной* длины, даже более простую задачу об отражении волны от поперечной стенки, нельзя решить просто наложением, как это было в § 176 и 177. В самом деле, для волны, распространяющейся в отрицательном направлении, получилось бы

$$\zeta = a'e^{\frac{2\omega y}{c}} \cos\{k(ct+x)+\varepsilon'\}, \qquad (6)$$

но это решение нельзя совместить с (5) таким образом, чтобы было $u=0$ на поперечной стенке для всех значений y [2]).

§ 209. Рассмотрим теперь случай слоя воды круговой формы, который вращается около своего центра [3]).

Если мы введем полярные координаты r, θ и обозначим перемещения соответственно вдоль радиуса-вектора и перпендикулярно к радиусу-вектору через ξ и η, тогда, так как

$$\dot{\xi} = i\sigma\xi, \quad \dot{\eta} = i\sigma\eta,$$

---

[1]) Применения к явлениям приливов можно найти у Thomson W., Nature, XIX, 154, 571 (1879) и у Taylor G. I., Tidal Friction in the Irish Sea, Phil. Trans. A. CCXX, I (1918).

[2]) Poincaré, Leçons de Méc. céleste, стр. 124. Намеченная здесь задача решена Taylor G. I., Proc. Lond. Math. Soc. (2), XX, 148 (1920). Он находит следующее: если длина волны $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$ достаточно велика сравнительно с шириной канала (b), то имеет место регулярное отражение (с изменением фазы) и именно таким образом, что в некотором отдалении от стенки практически наступает наложение (5) и (6) при $a'=a$ и при необходимом условии

$$k^2b^2 < \pi^2 + \frac{4\omega^2b^2}{c^2}.$$

Теория свободных колебаний во вращающемся прямоугольном бассейне также рассмотрена в указанной работе. Случай, когда угловая скорость вращения сравнительно мала, был исследован уже ранее Рэлеем, Phil. Mag. (6), V, 297 (1903) [Papers, V, 93] и Proc. R. S. A., LXXXII, 448 (1909) [Papers, V, 497].

[3]) Следующее исследование есть развитие некоторых наметок, которые Кельвин дал в работе, указанной на стр. 398.

уравнения (9) § 207 будут равнозначны с уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\sigma^2\xi+2i\omega\sigma\eta&=g\frac{\partial}{\partial r}(\zeta-\overline{\zeta}),\\ \sigma^2\eta-2i\omega\sigma\zeta&=g\frac{\partial}{r\,\partial\theta}(\zeta-\overline{\zeta}),\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

в то время как уравнение неразрывности (10) переходит в

$$\zeta=-\frac{\partial(h\xi r)}{r\,dr}-\frac{\partial(h\eta)}{r\,\partial\theta}.\tag{2}$$

Отсюда следует

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{g}{\sigma^2-4\omega^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{2i\omega}{\sigma}\,\frac{\partial}{r\,\partial\theta}\right)(\zeta-\overline{\zeta}),\\ \eta&=\frac{ig}{\sigma^2-4\omega^2}\left(\frac{2\omega}{\sigma}\,\frac{\partial}{\partial r}-i\,\frac{\partial}{r\,\partial\theta}\right)(\zeta-\overline{\zeta}),\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

и если теперь подставить в (2), то получим диференциальное уравнение для ζ.

Для случая постоянной глубины мы находим

$$(\Delta+\varkappa^2)\zeta=\Delta\overline{\zeta},\tag{4}$$

где

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\tag{5}$$

и

$$\varkappa^2=\frac{\sigma^2-4\omega^2}{gh}.\tag{6}$$

Этот результат можно было бы получить непосредственно из (12) § 207.

Условие, которое нужно выполнить на границе ($r=a$), будет $\xi=0$ или

$$\left(r\,\frac{\partial}{\partial r}-\frac{2i\omega}{\sigma}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(\zeta-\overline{\zeta})=0.\tag{7}$$

§ 210. В случае свободных колебаний будем иметь $\overline{\zeta}=0$. Тот способ, по которому мнимая единица i введена в вышенаписанных уравнениях, в соединении с теоремой Фурье заставляет допустить, что θ входит в виде множителя $e^{is\theta}$, где s есть целое число. Поэтому диференциальное уравнение (4) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial\zeta}{\partial r}+\left(\varkappa^2-\frac{s^2}{r^2}\right)\zeta=0,\tag{8}$$

а граничное условие (7) для $r=a$ даст

$$\frac{r\,\partial\zeta}{\partial r}+\frac{2s\omega}{\sigma}\zeta=0.\tag{9}$$

Уравнение (8) есть уравнение Бесселя, и решение, конечное для $r=0$, будет

$$\zeta=AJ_s(\varkappa r)\,e^{i(\sigma t+s\theta)}.\tag{10}$$

Необходимо, однако, отметить, что $\varkappa^2$ в настоящей задаче не обязательно будет положительно. Если $\varkappa^2$ отрицательно, то мы можем $J_s(\varkappa r)$ заменить через $I_s(\varkappa_1 r)$, причем $\varkappa_1$ есть положительный квадратный корень из $\frac{4\omega^2-\sigma^2}{gh}$ и

$$I_s(z)=\frac{z^s}{2^s\cdot s!}\left\{1+\frac{z^2}{2(2s+2)}+\frac{z^4}{2\cdot 4\cdot(2s+2)(2s+4)}+\ldots\right\}^{1)}. \quad (11)$$

Для случая симметрии около оси $s=0$ получаем в действительной форме

$$\zeta=AJ_0(\varkappa r)\cos(\sigma t+\varepsilon), \quad (12)$$

где $\varkappa$ определяется уравнением

$$J_0'(\varkappa a)=0. \quad (13)$$

Соответствующие значения σ будут даны тогда формулой (6). Свободная поверхность при различных собственных колебаниях имеет тот же вид, как и в § 191, но частоты теперь будут больше. Если мы положим

$$c^2=gh, \quad \beta=\frac{4\omega^2a^2}{c^2}, \quad (14)$$

то будем иметь

$$\frac{\sigma^2a^2}{c^2}=\varkappa^2a^2+\beta. \quad (15)$$

Кроме того легко установить, приняв во внимание уравнения (3), что относительные движения частиц жидкости уже не будут только радиальными; частицы в действительности описывают эллипсы, большие оси которых лежат в направлении радиуса-вектора.

Для $s>0$ будем иметь

$$\zeta=AJ_s(\varkappa r)\cos(\sigma t+s\theta+\varepsilon), \quad (16)$$

где допустимые значения $\varkappa$ и, следовательно, также σ определяются уравнением (9), которое дает

$$\varkappa aJ_s'(\varkappa a)+\frac{2s\omega}{\sigma}J_s(\varkappa a)=0. \quad (17)$$

Формула (16) представляет волну, которая вращается по отношению к воде с угловой скоростью $\frac{\sigma}{s}$, причем вращение волны происходит в одинаковом или противоположном направлении к вращению воды, смотря по тому, будет ли $\frac{\sigma}{\omega}$ отрицательным или положительным.

---

[1]) Функции $I_s(z)$ табулированы проф. Lodge A., Brit. Ass. Rep., 1889. Таблицы были перепечатаны Dale и Jahnke und Emde. Обстоятельные таблицы функций $e^{-z}I_0(z)$, $e^{-z}I_1(z)$ находятся в учебнике Watson.

Если $\varkappa a$ есть какой то действительный или чисто мнимый корень уравнения (17), то соответствующее значение σ будет даваться уравнением (15).

Графическое построение дает некоторое заключение о значениях σ. Если положить

$$\varkappa^2 a^2 = x,$$

то согласно (6) имеем

$$\frac{\sigma}{2\omega} = \pm\left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Если мы положим далее

$$\frac{sJ_s(\varkappa a)}{\varkappa a J_s'(\varkappa a)} = \varphi(\varkappa^2 a^2),$$

то уравнение (17) будет иметь вид

$$\varphi(x) \pm \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} = 0. \tag{19}$$

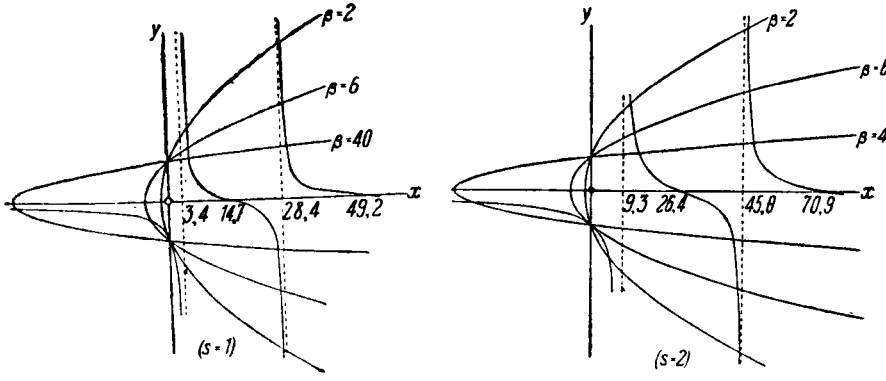
Кривая

$$y = -\varphi(x) \tag{20}$$

может быть легко построена с помощью таблиц для функций $J_s(z)$ и $I_s(z)$; точки пересечения ее с параболой

$$y^2 = 1 + \frac{x}{\beta} \tag{21}$$

дают своими ординатами значения $\frac{\sigma}{2\omega}$. Постоянная β, от которой зависят



Фиг. 49.

положения корней, равна квадрату величины $\frac{2\omega a}{\sqrt{gh}}$; эта величина есть отношение периода волны, которая движется вокруг кругового канала глубины h и длины окружности $2\pi a$, к половине периода $\frac{\pi}{\omega}$ вращения воды.

Фиг. 49 дает относительные величины наименьших корней для случая $s=1$ и $s=2$, причем β имеет значения 2, 6, 40 [1]).

[1]) Для ясности масштаб для y взят в десять раз больше, чем для x.

С помощью этих фигур мы можем исследовать в общем виде изменения в поведении свободных колебаний, когда β растет, начиная с 0. Получаемые результаты тем самым будут обусловлены либо непрерывным возрастанием ω, либо непрерывным убыванием h. Мы будем различать выражениями „положительные" и „отрицательные" те волны, которые движутся по отношению к вращению воды соответственно в том же или противоположном направлении.

Если β будет бесконечно малым, то значения x получим из уравнения

$$J_s'(x^{1/2}) = 0;$$

они соответствуют вертикальным асимптотам кривой, определяемой уравнением (20). Значения σ будут входить тогда попарно с одинаковыми абсолютными величинами, но с противоположными знаками, а это показывает, что здесь нет никакой разницы между скоростями положительной и отрицательной волны. Мы будем иметь здесь случай (12) § 191.

Когда β растет, значения σ, принадлежащие к одной паре, делаются неодинаковыми по абсолютной величине, и соответствующие значения x разделяются, причем то значение будет больше, для которого $\frac{\sigma}{2\omega}$ положительно. Для $\beta = s(s+1)$ кривая уравнения (20) и парабола (21) *касаются* друг друга в точке $(0, -1)$, причем соответствующее значение σ равно -2ω. Когда β перерастает это критическое значение, то одно значение x становится отрицательным, а соответствующее (отрицательное) значение $\frac{\sigma}{2\omega}$ делается все меньше и меньше.

Когда β растет, начиная от нуля, то относительная угловая скорость для отрицательной волны делается больше, чем для положительной волны приблизительно той же формы. Более того, значение σ для отрицательной волны всегда будет больше, чем 2ω. Если вращение ускоряется, то обе волны все больше различаются как по их форме, так и по их частоте. При достаточно большом значении β мы можем получить одну, но не больше, чем одну, положительную волну, для которой σ будет численно меньше, чем 2ω. Когда, наконец, β становится очень большой, то значение σ, соответствующее этой волне, сделается очень малым сравнительно с 2ω, в то время как остальные значения все более приближаются к значению $\pm 2\omega$.

Если теперь приписать индекс нуль тем величинам, которые относятся к случаю $\omega = 0$, то получим

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = \frac{x^2 + \frac{4\omega^2}{gh}}{x_0^2} = \frac{x+\beta}{x_0}, \tag{22}$$

где x_0 относится к соответствующей асимптоте кривой уравнения (20). Это дает частоту произвольного свободного колебания, выраженную через соответствующее колебание при отсутствии вращения.

Все это иллюстрируется следующей таблицей, которая дает для случая $s = 1$ приближенные значения $\varkappa a$ внутри интервала, применен-ного в первой фиг. 46, а также соответствующие значения $\frac{\sigma}{2\omega}$ и $\frac{\sigma a}{c}$.

$\beta=0$	$\beta=2$			$\beta=6$			$\beta=40$			$\beta=\infty$		
$\varkappa a=\frac{\sigma a}{c}$	$\varkappa a$	$\frac{\sigma}{2\omega}$	$\frac{\sigma a}{c}$	$\varkappa a$	$\frac{\sigma}{2\omega}$	$\frac{\sigma a}{c}$	$\varkappa a$	$\frac{\sigma}{2\omega}$	$\frac{\sigma a}{c}$	$\varkappa a$	$\frac{\sigma}{2\omega}$	$\frac{\sigma a}{c}$
+1,84	2·19	+1·84	+2·61	2·29	+1·37	+3·35	2·38	+1·07	+6·76	2·40	+1·00	$+\beta^{1/2}$
	0	−1·00	−1·41	2·10 i	−0·51	−1·26	6·23 i	−0·17	−1·09	$i\beta^{1/2}$	$-\beta^{1/2}$	−1·00
+5,33	5·38	+3·93	+5·56	5·41	+2·42	+5·94	5·47	+1·32	+8·36	5·52	+1·00	$+\beta^{1/2}$
	5·28	−3·86	−5·47	5·25	−2·37	−5·79	5·18	−1·29	−8·17	5·14	$-1\cdot00$	$-\beta^{1/2}$

§ 211. В качестве примера *вынужденных* колебаний достаточно рассмотреть случай, когда

$$\overline{\zeta}=C\left(\frac{r}{a}\right)^{s}e^{i(\sigma t+s\theta+\varepsilon)}, \tag{23}$$

где значение σ теперь задано.

Это дает

$$\Delta_1\overline{\zeta}=0,$$

а из уравнения (4) тогда следует

$$\zeta=AJ_s(\varkappa r)\,e^{i(\sigma t+s\theta+\varepsilon)}, \tag{24}$$

где A должно быть определено из граничного условия (7), именно

$$A=\frac{s\left(1+\dfrac{2\omega}{\sigma}\right)}{\varkappa aJ_s'(\varkappa a)+\dfrac{2s\omega}{\sigma}J(\varkappa a)}\cdot C. \tag{25}$$

Это выражение (25) становится очень большим, когда частота возмущения приблизительно совпадает с частотой собственного колебания соответствующего вида [1]).

Случаи, наиболее интересные с точки зрения приливов, суть те, для которых $s=1$ и $\sigma=\omega$ и соответственно, $s=2$ и $\sigma=2\omega$. Они должны представлять суточные и полусуточные приливы, которые вызываются отдаленным возмущающим телом, собственным движением которого можно пренебречь по сравнению с вращением ω.

В случае $s=1$ мы будем иметь постоянную горизонтальную возмущающую силу. Если мы, кроме того, положим $\sigma=\omega$, то без труда получим, что амплитуда возвышения прилива на границе ($r=a$) бассейна находится к статическому значению в следующем отношении:

$$\frac{3I_1(z)}{I_1(z)+zI_0(z)}, \tag{26}$$

где $z=\frac{1}{2}\sqrt{3\beta}$. С помощью таблиц Лоджа мы находим для этого отношения следующие значения

для

$\beta=$	0,	12,	48.
	1,000,	0,638,	0,396,

[1]) Случай *приблизительно* круглого слоя был исследован Proudman, On some Cases of Tidal Motion on Rotating Sheets of Water, Proc. Lond. Math. Soc. (2), XII, 453 (1913).

Если $\sigma = 2\omega$, то $\varkappa = 0$ и, следовательно, вследствие (23), (24), (25)

$$\zeta = \overline{\zeta}, \tag{27}$$

т. е. возвышение прилива имеет в точности „статическое значение".

Этот замечательный результат может быть получен в более общем виде; он имеет место и тогда, когда возмущающая сила имеет вид

$$\overline{\zeta} = \chi(r)\, e^{i(\sigma t + s\theta + \varepsilon)}, \tag{28}$$

при условии, что глубина h есть функция только от r. Если мы вернемся к уравнениям (1), то увидим, что они для $\sigma = 2\omega$ удовлетворяются значениями

$$\zeta = \overline{\zeta}, \quad \eta = i\xi.$$

Чтобы определить ξ как функцию от r, сделаем подстановку в уравнение неразрывности (2); тогда получим

$$\frac{\partial(h\xi)}{\partial r} - \frac{s-1}{r} h\xi = -\chi(r). \tag{29}$$

Произвольное постоянное, которое получится при интегрировании этого уравнения, определяется из граничных условий.

В рассматриваемом случае будем иметь $\chi(r) = \dfrac{Cr^s}{a^s}$. Если мы проинтегрируем и положим $\xi = 0$ для $r = a$, то найдем

$$h\xi = \frac{Cr^{s-1}}{2a^s}(a^2 - r^2)\, e^{i(2\omega t + s\theta + \varepsilon)}. \tag{30}$$

Соотношение $\eta = i\xi$ показывает, что амплитуды ξ и η равны между собой, в то время как их фазы отличаются на 90°; относительные траектории частиц жидкости в этом случае будут окружности с радиусами

$$\mathfrak{r} = \frac{Cr^{s-1}}{2ha^s}(a^2 - r^2); \tag{31}$$

каждый из этих кругов пробегается в отрицательном направлении с угловой скоростью 2ω. Легко показать, что траектория произвольной частицы в пространстве есть эллипс с полуосями $r \pm \mathfrak{r}$, который она в гармоническом движении пробегает вокруг начала в положительном направлении, причем период будет равен $\dfrac{2\pi}{\omega}$. Этим объясняются особенности рассматриваемого случая. В самом деле, если ζ будет иметь все время статическое значение, то горизонтальные силы, происходящие от возвышения, в точности будут уравновешивать возмущающую силу, и оставаться будут только те силы, которые соответствуют невозмущенной форме свободной поверхности [(1) § 207]. Эти силы дают ускорение к центру $g\dfrac{dz_0}{dr}$, или $\omega^2 r$, где r обозначает радиус-вектор частицы в ее мгновенном положении. Следовательно, все условия задачи будут удовлетворены эллиптическо-гармоническим колебанием отдельных частиц, если только положения, размеры и „фазы" траекторий могут быть выбраны таким образом, что при взятом значении ζ удовлетворяется уравнение неразрывности. Только что проведенное исследование дает решение этого вопроса.

Если слой воды будет ограничен также и радиальными стенками, то задача становится более трудной. Приливные колебания (свободные и вынуж-

денные) в полукруговом бассейне постоянной глубины исследовались Прудманом [1]) в применении к Черному морю, причем рассматривались возмущающие силы идеализированного суточного и полусуточного типа.

Свободные и вынужденные колебания во вращающемся *эллиптическом* бассейне постоянной глубины изучались Гольдштейном [2]).

§ 212 [3]). Мы рассмотрим вкратце также случай круглого бассейна переменной глубины; закон изменения глубины предполагаем при этом тем же самым, как и в § 193, именно

$$h = h_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right). \tag{1}$$

Если мы примем, что ξ, η, ζ все пропорциональны $e^{i(\sigma t + s\theta + \varepsilon)}$ и что h зависит только от r, то из уравнений (2), (3) § 209 получим

$$(\sigma^2 - 4\omega^2)\zeta + g\frac{dh}{dr}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2\omega s}{\sigma r}\right)(\zeta - \bar{\zeta}) + \\ + gh\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{s^2}{r^2}\right)(\zeta - \bar{\zeta}) = 0. \tag{2}$$

Подставив из (1) значение для h, получим для *свободных* колебаний

$$\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r} - \frac{s^2}{r^2}\zeta\right) - \frac{2}{a^2}\left(r\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{2\omega s}{\sigma}\zeta\right) + \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{gh_0}\zeta = 0. \tag{3}$$

Это уравнение тождественно с уравнением (6) § 193 с единственной разницей, что теперь мы имеем

$$\frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{gh_0} - \frac{4\omega^2}{\sigma a^2}$$

вместо $\frac{\sigma^2}{gh_0}$. Следовательно, решение может быть написано сразу из результатов указанного параграфа. В самом деле, если мы положим

$$\frac{(\sigma^2 - 4\omega^2)a^2}{gh_0} - \frac{4\omega s}{\sigma} = n(n-2) - s^2, \tag{4}$$

то будем иметь

$$\zeta = A_s\left(\frac{r}{a}\right)^s F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{r^2}{a^2}\right) e^{i(\sigma t + s\theta + \varepsilon)}, \tag{5}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}s,$$

$$\beta = 1 + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}n,$$

$$\gamma = s + 1.$$

Условие, чтобы ряд сходился на границе $r = a$, требует, чтобы

$$n = s + 2j, \tag{6}$$

где j есть некоторое положительное целое число. Значения σ определяются тогда из уравнения (4).

---

[1]) Proudman, M. N. R. A. S. Geohpys. Suppt. II, 32 (1928).
[2]) Goldstein, M. N. R. A. S. Geophys. Suppt. II, 213 (1929).
[3]) См. подстрочное примечание к § 193.

Вид свободной поверхности будет поэтому тем же самым, как в случае отсутствия вращения, но только движение частиц жидкости будет другим. Относительные траектории будут теперь эллипсы, главные оси которых направлены соответственно вдоль радиуса-вектора и перпендикулярно к нему; это легко получить из уравнений (3) § 209.

Для симметрических видов колебаний ($s=0$) уравнение (4) дает

$$\sigma^2=\sigma_0^2+4\omega^2, \tag{7}$$

где σ_0 обозначает найденную в § 193 частоту соответствующего вида колебаний при отсутствии вращения.

Для значения s, отличного от нуля, наиболее важные виды колебаний суть те, для которых $n=s+2$. Уравнение (4) делится тогда на $\sigma+2\omega$, но этот множитель не существенный; если отбросим его, то получим квадратное уравнение

$$\sigma^2-2\omega\sigma=2s\frac{gh_0}{a^2}, \tag{8}$$

откуда следует

$$\sigma=\omega\pm\left(\omega^2+2s\frac{gh_0}{a^2}\right)^{1/2}. \tag{9}$$

Это дает две волны, которые вращаются около начала, причем относительная скорость волн для отрицательной волны будет больше, чем для положительной, как и в случае постоянной глубины (§ 210). С помощью (8) формулы приводятся к таким:

$$\left.\begin{aligned}\zeta&=A_s\left(\frac{r}{a}\right)^s,\\ \xi&=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{h_0}A_s\left(\frac{r}{a}\right)^{s-1},\\ \eta&=\frac{1}{2}\,i\,\frac{a}{h_0}A_s\left(\frac{r}{a}\right)^{s-1},\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

причем каждый раз необходимо приписать множитель $e^{i(\sigma t+s\theta+\varepsilon)}$. Так как $\eta=i\xi$, то все относительные траектории будут окружности.

Необходимо отметить случай $s=1$, $n=3$; свободная поверхность при этом всегда *плоская*, и круговые траектории имеют тогда все один и тот же радиус. В следующей таблице, которая относится к этому случаю, β поставлено вместо $\frac{4\omega^2a^2}{c_0^2}$, где $c_0=\sqrt{gh_0}$.

$\beta=0$	$\beta=2$		$\beta=6$		$\beta=40$	
$\frac{\sigma a}{c_0}$	$\frac{\sigma}{2\omega}$	$\frac{\sigma a}{c_0}$	$\frac{\sigma}{2\omega}$	$\frac{\sigma a}{c_0}$	$\frac{\sigma}{2\omega}$	$\frac{\sigma a}{c_0}$
+1·414	+1·618 −0·618	+2·288 −0·874	+1·264 −0·264	+3·096 −0·646	+1·048 −0·048	+6·626 −0·302

Если $n>s+2$, то мы имеем круговые узловые линии. Уравнение (4) будет тогда *кубическим* относительно $\frac{\sigma}{2\omega}$; легко убедиться, что его корни

все действительны и лежат соответственно между $-\infty$ и -1, -1, и 0, $+1$ и $+\infty$. Следующая таблица вычислена для случая $s=1$, $n=5$.

$\beta=0$	$\beta=2$		$\beta=6$		$\beta=40$	
$\frac{\sigma a}{c_0}$	$\frac{\sigma}{2\omega}$	$\frac{\sigma a}{c_0}$	$\frac{\sigma}{2\omega}$	$\frac{\sigma a}{c_0}$	$\frac{\sigma}{2\omega}$	$\frac{\sigma a}{c_0}$
$\pm 3{\cdot}742$	$+2{\cdot}889$ $-0{\cdot}125$ $-2{\cdot}764$	$+4{\cdot}085$ $-0{\cdot}176$ $-3{\cdot}909$	$+1{\cdot}874$ $-0{\cdot}100$ $-1{\cdot}774$	$+4{\cdot}590$ $-0{\cdot}245$ $-4{\cdot}344$	$+1{\cdot}183$ $-0{\cdot}040$ $-1{\cdot}143$	$+7{\cdot}483$ $-0{\cdot}253$ $-7{\cdot}230$

Первый и последний корень каждой тройки дают положительные и отрицательные волны того же характера, как те, которые мы получали ранее при постоянной глубине. Меньшнй отрицательный корень дает сравнительно медленное колебание, которое для бесконечно малой угловой скорости ω переходит в *стационарное* вихревое движение без поднятия или опускания поверхности. На возможность подобных колебаний было указано в конце § 206. В рассматрнваемом случае легко проследить этот переход. Из уравнения (4) следует, что соответствующий предел $\frac{\sigma}{2\omega}$ прн бесконечном уменьшении ω будет равен $-1/7$. Мы находим тогда из (2), (3) § 209

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi} &= C\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)e^{i(\theta+\sigma t)},\\ \dot{\eta} &= iC\left(1-5\frac{r^2}{a^2}\right)e^{i(\theta+\sigma t)} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и, наконец,

$$\zeta = -\frac{8i\sigma C}{g}\, r\left(1-\frac{3}{2}\frac{r^2}{a^2}\right)e^{i(\theta+\sigma t)}, \tag{12}$$

где

$$\sigma = -\frac{2}{7}\,\omega.$$

Важнейший случай *вынужденных* колебаний есть тот, когда

$$\overline{\zeta} = C\left(\frac{r}{a}\right)^s e^{i(\sigma t+s\theta+\varepsilon)}. \tag{13}$$

Подстановкой в (3) мы можем тотчас же проверить, что

$$\zeta = \frac{2sgh_0}{2sgh_0-(\sigma^2-2\omega\sigma)a^2}\,\overline{\zeta}. \tag{14}$$

Заметим, что для $\sigma=2\omega$ высота прилива будет иметь в точности статическое значение. Это находится в согласии с § 211.

Когда σ_1, σ_2 обозначают два корня уравнения (8), то последняя формула может быть написана в следующем виде:

$$\zeta = \frac{\overline{\zeta}}{\left(1-\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)\left(1-\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)}. \tag{15}$$

Приливные колебания в полукруглом бассейне с указанным выше законом изменения глубины были изучены Гольдбраухом [1]). Вся трудность этой задачи состоит в удовлетворении условий на прямолинейной части границы.

§ 212a. Приведем некоторые примеры решений по приближенному способу, рассмотренному в § 205b.

1. Имеет смысл рассмотреть сначала уже разрешенную задачу, поэтому возьмем задачу круглого бассейна постоянной глубины (§ 210). Возьмем полярные координаты смещенной частицы относительно вращающейся с угловой скоростью ω горизонтальной начальной прямой в виде

$$r' = r + \xi, \quad \theta' = \theta = \frac{\eta}{r}, \tag{1}$$

тогда уравнение неразрывности будет, как в (2) § 209:

$$\frac{\zeta}{h} = -\frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{\xi}{r} - \frac{\partial \eta}{r\,\partial \theta}. \tag{2}$$

В наших прежних обозначениях будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T} &= \frac{1}{2}\varrho h \int_0^a \int_0^{2\pi} (\dot\xi^2 + \dot\eta^2)\, r\, d\theta\, dr, \\ V - T_0 &= \frac{1}{2} g\varrho \int_0^a \int_0^{2\pi} \zeta^2 r\, d\theta\, dr, \\ M' &= \varrho h \int_0^a \int_0^{2\pi} (\xi\dot\eta - \eta\dot\xi)\, r\, d\theta\, dr. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Для наиболее медленного колебания в качестве предполагаемого типа возьмем

$$\left.\begin{aligned} \xi &= A\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)\cos(\sigma t + \theta), \\ \eta &= \left(-A + B\frac{r^2}{a^2}\right)\sin(\sigma t + \theta), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

а это дает

$$\frac{\zeta}{h} = (3A - B)\frac{r}{a^2}\cos(\sigma t + \theta). \tag{5}$$

Постоянные в (4) выбираются таким образом, чтобы ζ была конечной для $r = 0$.

Отсюда и из определений § 205b следует, если взять средние значения функций в формулах (3) и произвести интегрирования:

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{1}{12}\pi\varrho h a^2 (4A^2 - 3AB + B^2), \\ Q &= -\frac{1}{6}\pi\varrho\omega h a^2 (3A^2 - AB), \\ R &= \frac{1}{8}\pi g\varrho h^2 (3A - B)^2. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

---

[1]) Goldsbrough. Proc. Roy. Soc., CXXII, 228 (1929).

Если для краткости напишем

$$\left.\begin{aligned} c &= \sqrt{gh}, \\ \sigma\frac{a}{c} &= x, \\ \frac{4\omega^2 a^2}{c^2} &= \beta, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

то уравнение

$$\sigma^2 P + \sigma Q - R = 0 \tag{8}$$

переходит в следующее:

$$\left(4x^2 - 3\sqrt{\beta}x - \frac{27}{2}\right)A^2 - (3x^2 - \sqrt{\beta}x - 9)AB + \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)B^2 = 0. \tag{9}$$

Стационарные значения x определяются тогда из уравнения

$$x^2(7x^2 - 6\sqrt{\beta}x - \beta - 24) = 0. \tag{10}$$

Корни, значения которых равны нулю, можно отбросить, так как они соответствуют только циркулирующему движению без изменения поверхности уровня. Для сравнения с численными результатами § 210 положим по очереди

$$\beta = 2,\ 6,\ 40.$$

Корни уравнения (10), отличные от 0, для этих сравниваемых случаев соответственно будут равны

$$\left.\begin{aligned} -1{,}43 \\ +2{,}65 \end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned} -1{,}27 \\ +3{,}27 \end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned} -2{,}35 \\ +6{,}77 \end{aligned}\right\}.$$

Только в третьем случае имеется значительное отклонение от точного значения. Можно показать, что приближенный метод является успешным для довольно большой области значений параметра β.

2. В случае *прямоугольного* бассейна постоянной глубины мы расположим оси Ox и Oy по двум его сторонам, длины которых обозначим через a и b. Если обозначнть через ξ, η компоненты смещения частицы, то будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T} &= \frac{1}{2}\varrho h\int_0^a\int_0^b (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2)\,dx\,dy, \\ V - T_0 &= \frac{1}{2}g\varrho\int_0^a\int_0^b \zeta^2\,dx\,dy, \\ M' &= \varrho h\int_0^a\int_0^b (\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi})\,dx\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

В качестве приближенного типа мы возьмем

$$\left.\begin{aligned} \xi &= A\sin\frac{\pi x}{a}\cos\sigma t, \\ \eta &= B\sin\frac{\pi y}{b}\sin\sigma t. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Это приводит нас к случаю $\omega = 0$, при котором либо A, либо B равно нулю; поэтому нет основания ожидать, что это приближение будет давать хоро-

ные результаты для значений ω, превышающих некоторый предел. Из (12) следует

$$\frac{\zeta}{h} = -\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial y} = -\pi\left(\frac{A}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\cos\sigma t + \frac{B}{b}\cos\frac{\pi y}{b}\sin\sigma t\right). \quad (13)$$

Отсюда получаем

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{1}{8}\varrho hab\,(A^2+B^2),\\ Q &= \frac{4\varrho\omega hab}{\pi^2}AB,\\ R &= \frac{1}{8}\pi^2 g\varrho h^2\left(\frac{b}{a}A^2 + \frac{a}{b}B^2\right). \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Уравнение (8) принимает теперь вид

$$\left(\sigma^2 - \frac{\pi^2c^2}{a^2}\right)A^2 + \frac{32\omega\sigma}{\pi^2}AB + \left(\sigma^2 - \frac{\pi^2c^2}{b^2}\right)B^2 = 0, \quad (15)$$

где, как и раньше, $c^2 = gh$. Стационарные значения σ определяются, таким образом, из уравнения

$$(\sigma^2-\sigma_1^2)(\sigma^2-\sigma_2^2) = \frac{256\omega^2\sigma^2}{\pi^4}, \quad (16)$$

где σ_1, σ_2 предста ляют те значения σ, которые соответствуют колебаниям, параллельным соответственно оси x и оси y при отсутствии вращения.

Если ω будет малым и a и b заведомо не равны между собой, то в том типе колебаний, при котором σ близко к σ_1, будем иметь приближенно

$$\sigma - \sigma_1 = \frac{128\omega^2\sigma_1}{\pi^4(\sigma_1^2-\sigma_2^2)}. \quad (17)$$

Соответствующее отношение B/A будет дано тогда уравнением

$$\frac{16\omega\sigma_1}{\pi^2}A + (\sigma_1^2-\sigma_2^2)B = 0, \quad (18)$$

и оно будет малым, как и следовало ожидать.

Для *квадратного* бассейна $a = b$; тогда уравнение (16) дает

$$\sigma^2 - \sigma_1^2 = \pm\frac{16\omega\sigma}{\pi^2}, \quad (19)$$

или приблизительно

$$\sigma - \sigma_1 = \pm\frac{8\omega}{\pi^2}. \quad (20)$$

В таком случае будет $B/A = \pm 1$.

Приливы на вращающемся шаре

§ 213. Мы переходим теперь к изложению оснований проблемы Лапласа о приливных колебаниях океана, который обладает сравнительно небольшой глубиной и покрывает вращающийся шар [1]). Чтобы

[1]) Laplace, Recherches sur quelques points du Système du monde, Mét. de l'Acad. roy. de Sciences, 1775 [1778] и 1776 [1779] [Oeuvres Complètes, IX, 88, 187]. Это исследование с различными изменениями перепечатано в Mécanique céleste, кн. 4, гл. I (1779).

сделать более ясной сущность применяемых приближенных методов, основания которых различны, мы при выводе основных уравнений изберем путь, несколько уклоняющийся от обычного.

Если имеет место относительное равновесие, то свободная поверхность есть, конечно, поверхность уровня по отношению к силе тяжести и центробежной силе; предположим, что эта поверхность есть поверхность вращения вокруг полярной оси и что сжатие не обязательно мало.

Примем эту равновесную форму свободной поверхности за поверхность отсчета и обозначим соответственно через θ и φ полюсное расстояние (т. е. угол между нормалью и полярной осью) и долготу лежащей на ней точки. Через z обозначим высоту точки над этой поверхностью, отсчитываемую вдоль нормали наружу.

Так как относительное положение частицы жидкости определяется тремя ортогональными координатами θ, φ, z, то кинетическая энергия единицы массы будет

$$2T=(R+z)^2\dot{\theta}^2+\widetilde{\omega}^2(\omega+\dot{\varphi})^2+\dot{z}^2, \tag{1}$$

где R обозначает радиус кривизны меридионального сечения координатной поверхности и $\widetilde{\omega}$ — расстояние частицы от полярной оси. Необходимо заметить, что R зависит только от θ, в то время как $\widetilde{\omega}$ есть функция от θ и z; из геометрических соображений непосредственно следует

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\widetilde{\omega}}{(R+z)\,\partial\theta}&=\cos\theta,\\ \frac{\partial\widetilde{\omega}}{\partial z}&=\sin\theta.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Компоненты ускорения получим сразу из (1) с помощью уравнений Лагранжа. Ограничиваясь бесконечно малыми движениями и пренебрегая членами второго порядка, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{R+z}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)&=(R+z)\ddot{\theta}-\frac{1}{R+z}\left(\omega^2+2\omega\dot{\varphi}\right)\widetilde{\omega}\frac{\partial\widetilde{\omega}}{\partial\theta},\\ \frac{1}{\widetilde{\omega}}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right)&=\widetilde{\omega}\ddot{\varphi}+2\omega\left(\frac{\partial\widetilde{\omega}}{\partial\theta}\dot{\theta}+\frac{\partial\widetilde{\omega}}{\partial z}\dot{z}\right),\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{z}}-\frac{\partial T}{\partial z}&=\ddot{z}-\left(\omega^2+2\omega\dot{\varphi}\right)\widetilde{\omega}\frac{\partial\widetilde{\omega}}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Если обозначим через u, v, w компоненты относительной скорости частицы, т. е.

$$\left.\begin{aligned}u&=(R+z)\dot{\theta},\\ v&=\widetilde{\omega}\dot{\varphi},\\ w&=\dot{z},\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

и используем уравнение (2), то гидродинамические уравнения можно привести к виду

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v\cos\theta &= -\frac{1}{R+z}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{p}{\varrho}+\Psi-\frac{1}{2}\omega^2\widetilde{\omega}^2+\Omega\right),\\
\frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u\cos\theta + 2\omega w\sin\theta &= -\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{p}{\varrho}+\Psi-\frac{1}{2}\omega^2\widetilde{\omega}^2+\Omega\right),\\
\frac{\partial w}{\partial t} - 2\omega v\sin\theta &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\varrho}+\Psi-\frac{1}{2}\omega^2\widetilde{\omega}^2+\Omega\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

где Ψ обозначает потенциал сил, обусловленных притяжением Земли, а Ω есть потенциал возмущающих сил.

До сих пор единственная неточность состояла в отбрасывании в левой части уравнений (5) членов второго порядка относительно u, v, w. Так как в рассматриваемом случае глубина моря мала сравнительно с размерами земного шара, то мы можем $R+z$ заменить через R. Далее мы предположим, что вертикальная компонента скорости w мала сравнительно с горизонтальными компонентами u, v и что величиной $\frac{\partial w}{\partial t}$ можно пренебречь сравнительно с wv. Как и в теории „длинных" волн, подобные допущения оправдываются a posteriori и здесь, если убедиться, что результаты, найденные на основании этих допущений, не находятся в противоречии с самими допущениями (ср. § 172) [1]).

Проинтегрируем теперь третье из уравнений (5) между пределами z и ζ, где ζ обозначает возвышение возмущенной поверхности над уровнем поверхности отсчета. На поверхности отсчета ($z=0$) согласно предположению мы имеем

$$\Psi - \frac{1}{2}\omega^2\widetilde{\omega}^2 = \text{const.}$$

и, следовательно, на свободной поверхности ($z=\zeta$) приближенно будем иметь

$$\Psi - \frac{1}{2}\omega^2\widetilde{\omega}^2 = \text{const.} + g\zeta,$$

при условии, что

$$g = \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\Psi - \frac{1}{2}\omega^2\widetilde{\omega}^2\right)\right]_{z=0}. \qquad (6)$$

Здесь g есть значение *кажущейся* тяжести на поверхности отсчета, которое, вообще говоря, есть, конечно, функция от θ; изменением его, зависящим от изменения z, мы пренебрежем.

---

[1]) Так, например, при упрощенных условиях § 219, 220 $w/\omega v$ оказывается порядка $m\left(=\frac{\omega^2 a}{g}\right)$.

Пренебрегая изменением потенциала возмущающих сил Ω в зависимости от изменения z по сравнению с g и интегрируя, получим

$$\frac{p}{\varrho}+\Psi-\frac{1}{2}\omega^2\tilde{\omega}^2=\text{const.}+g\zeta+2\omega\sin\theta\int_z^\zeta v\,dz. \tag{7}$$

Последний член есть порядка $\omega h v\sin\theta$, где h обозначает глубину жидкости, и можно показать, что в последующих рассуждениях он будет порядка $\frac{h}{a}$ по сравнению с $g\zeta$ [1]). Сделав подстановку в первые два уравнения (5), получим с рассматриваемой точностью приближения

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}-2\omega v\cos\theta&=-\frac{\partial}{R\,\partial\theta}g(\zeta-\bar{\zeta}),\\ \frac{\partial v}{\partial t}+2\omega u\cos\theta&=-\frac{\partial}{\tilde{\omega}\,\partial\varphi}g(\zeta-\bar{\zeta}),\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где

$$\bar{\zeta}=-\frac{\Omega}{g}; \tag{9}$$

Эти уравнения являются независимыми от z, так что можно предположить, что горизонтальное движение для всех частиц одной и той же вертикали в существенном будет одинаковым.

Как в § 198, это предположение существенно упрощает уравнение неразрывности. Для рассматриваемого случая без труда можно получить

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\frac{1}{\tilde{\omega}}\left\{\frac{\partial(\tilde{h}\tilde{\omega}u)}{R\,\partial\theta}+\frac{\partial(hv)}{\partial\varphi}\right\}. \tag{10}$$

Необходимо подчеркнуть, что вышенаписанные уравнения не заключают никаких других допущений, кроме указанных выше; в частности, отсутствует ограничение относительно эллиптичности меридиана, сжатие которого может быть совершенно произвольно.

§ 214. Чтобы, однако, упростить задачу насколько возможно, не пренебрегая ее существенными чертами, воспользуемся тем обстоятельством, что в действительности эллиптичность Земли есть величина малая, так как она сравнима с отношением $\frac{\omega^2 a}{g}$ центробежной силы к силе тяжести на экваторе, а это отношение, как известно, приблизительно равно $\frac{1}{289}$.

С ошибкой того же порядка можно положить

$$R=a,\quad \tilde{\omega}=a\sin\theta,\quad g=\text{const.},$$

[1]) Это, кроме того, можно и проверить в тех же случаях. Конечный результат есть тот, что вертикальным ускорением пренебрегаем, как и в теории длинных волн.

где a обозначает средний радиус Земли. Мы получим тогда

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}-2\omega v\cos\theta&=-\frac{g}{a}\frac{\partial}{\partial\theta}(\zeta-\bar{\zeta}),\\ \frac{dv}{dt}+2\omega u\cos\theta&=-\frac{g}{a}\frac{\partial}{\sin\theta\,\partial\varphi}(\zeta-\bar{\zeta})\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

и

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\frac{1}{a\sin\theta}\left\{\frac{\partial(hu\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(hv)}{\partial\varphi}\right\}.\qquad(2)$$

Это последнее уравнение тождественно с (1) § 198 [1]).

Некоторые интересные следствия получаются тотчас же уже из самого *вида* уравнений (1). Если обозначить через u, v скорости, соответственно параллельные и перпендикулярные к произвольному горизонтальному направлению s, то легко найти при помощи преобразования координат

$$\frac{\partial u}{\partial t}-2\omega v\cos\theta=-g\frac{\partial}{\partial s}(\zeta-\bar{\zeta}).\qquad(3)$$

В случае узкого канала поперечная скорость v будет равна нулю и уравнение (3) принимает тот же вид, как в случае отсутствия вращения; это уже было заранее принято в § 183. Единственное влияние вращения в подобных случаях состоит в образовании небольшого наклонения гребней и впадин волны в поперечном направлении канала, как найдено в § 208. В общем случае из разложения на компоненты в направлении относительной скорости q и перпендикулярно к ней видно, что частица жидкости, помимо ускорения, зависящего от действия сил, обладает кажущимся ускорением $2\omega q\cos\theta$, отклоняющим частицу направо от своего пути.

Далее, сравнивая (1) с (5) § 207, мы видим, что колебания слоя воды сравнительно малых размеров в направлении полюсного углового расстояния θ подчиняются тем же законам, как и колебания *плоского* слоя, который вращается около перпендикулярной к нему оси с угловой скоростью $\omega\cos\theta$.

Как и в § 207, при определенных условиях возможны свободные стационарные движения. Если положить $\bar{\zeta}=0$, то мы видим, что уравнения (1) и (2) удовлетворяются постоянными во времени значениями u, v, ζ, если только

$$\left.\begin{aligned}u&=-\frac{g}{2\omega a\sin\theta\cos\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi},\\ v&=-\frac{g}{2\omega a\cos\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

и

$$\frac{\partial(h\sec\theta,\zeta)}{\partial(\theta,\varphi)}=0.\qquad(5)$$

[1]) Если не обращать внимания на обозначения, то это суть уравнения, найденные Лапласом, см. примечание, стр. 414

Этому последнему условию можно удовлетворить любым допущением вида

$$\zeta = f(h \sec\theta); \tag{6}$$

уравнения (4) дают тогда соответствующие значения u, v. Из (4) следует, что скорость при этих стационарных движениях всюду будет параллельна линиям уровня возмущенной поверхности.

Если h постоянно или есть функция только широты, то единственное условие, которому удовлетворяет ζ, состоит в том, что ζ не должно зависеть от φ; другими словами, возвышение должно быть симметрично относительно полярной оси.

§ 215. Начиная с этого момента, мы будем предполагать, что глубина h есть функция только от θ и что возможные границы моря, если они есть, совпадают с кругами широты.

Рассмотрим сначала случаи, когда возмущенная форма поверхности воды есть поверхность вращения около полярной оси. Если отбросить члены, содержащие φ, то уравнения (1) и (2) предыдущего параграфа принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v\cos\theta = -\frac{g}{a}\frac{\partial}{\partial\theta}(\zeta - \bar{\zeta}),\\ &\frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u\cos\theta = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

и

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\frac{\partial(hu\sin\theta)}{a\sin\theta\,\partial\theta}. \tag{2}$$

Предполагая, что время входит в эти уравнения только множителем $e^{i\sigma t}$, и разрешая их относительно u, v, получим

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{i\sigma g}{\sigma^2 - 4\omega^2\cos^2\theta}\frac{\partial}{a\,\partial\theta}(\zeta - \bar{\zeta}),\\ v &= -\frac{2\omega g\cos\theta}{\sigma^2 - 4\omega^2\cos^2\theta}\frac{\partial}{a\,\partial\theta}(\zeta - \bar{\zeta}) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и

$$i\sigma\zeta = -\frac{\partial(hu\sin\theta)}{a\sin\theta\,\partial\theta}. \tag{4}$$

Формулы для составляющих смещения (ξ, η) могут быть получены из соотношений $u = \dot{\xi}$, $v = \dot{\eta}$, или $u = i\sigma\xi$, $v = i\sigma\eta$. Отсюда получается, что частицы жидкости описывают эллипсы, главные оси которых совпадают соответственно с меридианами и кругами широты; отношение обеих осей равно $\frac{\sigma}{2\omega}\sec\theta$. При *вынужденных* колебаниях рассматриваемого типа отношение $\frac{\sigma}{2\omega}$ будет очень мало, так что эллипсы будут очень вытянуты в направлении с востока на запад; исключение будут представлять области вблизи экватора.

Если исключить u и v из (3) и (4) и положить для краткости

$$\left.\begin{aligned} \zeta - \overline{\zeta} &= \zeta', \\ \frac{\sigma}{2\omega} &= f, \\ \frac{\omega^2 a}{g} &= m, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

то получим

$$\frac{\partial}{a \sin\theta \, \partial\theta}\left(\frac{h \sin\theta}{f^2 - \cos^2\theta} \frac{\partial\zeta'}{\partial\theta}\right) + 4m\zeta' = -4m\overline{\zeta}. \tag{6}$$

Если глубина будет постоянной, то это уравнение напишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1-\mu^2}{f^2-\mu^2}\frac{\partial\zeta'}{\partial\mu}\right) + \beta\zeta' = -\beta\overline{\zeta}, \tag{7}$$

где

$$\mu = \cos\theta$$

и

$$\beta = \frac{4ma}{h} = \frac{4\omega^2 a^2}{gh}. \tag{8}$$

§ 216. Рассмотрим сначала свободные колебания. Полагая $\overline{\zeta} = 0$, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1-\mu^2}{f^2-\mu^2}\frac{\partial\zeta}{\partial\mu}\right) + \beta\zeta = 0; \tag{9}$$

заметим, что при отсутствии вращения это уравнение содержится в (1) § 199, в чем можно убедиться, положив

$$\beta f^2 = \frac{\sigma^2 a^2}{gh}, \quad f = \infty.$$

Общее решение уравнения (9) должно иметь следующий вид:

$$\zeta = AF(\mu) + Bf(\mu), \tag{10}$$

где $F(\mu)$ есть четная, а $f(\mu)$ нечетная функция от μ и постоянные A и B произвольны. Для зонального моря, ограниченного двумя кругами широты, отношение $\frac{A}{B}$ и допустимые значения f (и, следовательно, частоты $\frac{\sigma}{2\pi}$) определяются условием, что для каждого из этих кругов должно быть $u = 0$. Если эти границы лежат симметрично по обе стороны экватора, то имеется два класса колебаний: в первом $B = 0$, во втором $A = 0$. Вообразив, что границы стянуты к точкам на полюсах, мы получим случай безграничного океана, и тогда допустимые значения f определятся условием, что u для $\mu = \pm 1$ должно быть конечно. Доказательство здесь в существенных чертах такое же, как в § 201, но применение этого последнего условия теперь более затруднительно вследствие несколько необычной формы, в которой получено решение диференциального уравнения.

В случае симметрии по отношению к экватору полагаем, следуя Кельвину [1]) и Дарвину [2]):

$$\frac{1}{\mu^2-f^2}\frac{\partial\zeta'}{\partial\mu}=B_1\mu+B_3\mu^3+\ldots+B_{2j+1}\mu^{2j+1}+\ldots \qquad (11)$$

Это дает

$$\zeta'=A-\frac{1}{2}f^2B_1\mu^2+\frac{1}{4}(B_1-f^2B_3)\mu^4+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{2j}(B_{2j-3}-f^2B_{2j-1})\mu^{2j}+\ldots, \qquad (12)$$

где A произвольно; далее имеем

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1-\mu^2}{\mu^2-f^2}\frac{\partial\zeta'}{\partial\mu}\right)=B_1+3(B_3-B_1)\mu^2+\ldots$$
$$\ldots+(2j+1)(B_{2j+1}-B_{2j-1})\mu^{2j}+\ldots \qquad (13)$$

Если сделать подстановку в (9) и сравнить коэфициенты различных степеней μ, то найдем

$$B_1-\beta A=0, \qquad (14)$$

$$B_3-\left(1-\frac{\beta f^2}{2\cdot3}\right)B_1=0, \qquad (15)$$

а затем далее

$$B_{2j+1}-\left(1-\frac{\beta f^2}{2j(2j+1)}\right)B_{2j-1}-\frac{\beta}{2j(2j+1)}B_{2j-3}=0. \qquad (16)$$

Эти уравнения определяют последовательно величины $B_1, B_3, \ldots, B_{2j+1}$, выраженные через A; решение, найденное таким образом, должно подходить, как сказано, для зонального моря, ограниченного двумя параллельными кругами, отвечающим соответственно одинаковым северной и южной широтам. Если бы море покрывало весь земной шар, то это решение дало бы, как мы докажем, бесконечные скорости на полюсах, за исключением тех случаев, когда f принимает определенные значения.

Напишем

$$\frac{B_{2j+1}}{B_{2j-1}}=N_{j+1}. \qquad (17)$$

Мы сначала покажем, что N_j с возрастанием j стремится либо к пределу 0, либо к пределу 1. Уравнение (16) может быть написано так:

$$N_{j+1}=1-\frac{\beta f^2}{2j(2j+1)}+\frac{\beta}{2j(2j+1)}\frac{1}{Nj}. \qquad (18)$$

---

[1]) Thomson W., Note on the Oscillations of the First Species in Laplace's Theory of the Tides, Phil. Mag. (4), L, 279 (1875) [Papers, IV, 248].

[2]) Darwin, On the Dynamical Theory of the Tides, of Long Period, Proc. Roy. Soc., XLI, 337 (1886) [Papers, I, 336)].

Отсюда следует для достаточно большого j либо

$$Nj = -\frac{\beta}{2j(2j+1)} \tag{19}$$

приближенно, либо N_{j+1} не будет малым; во втором случае N_{j+2} близко к 1 и значения N_{j+3}, N_{j+4}, ... все более и более приближаются к 1, причем имеет место приближенная формула

$$N_{j+1} = 1 - \frac{\beta(f^2-1)}{2j(2j+1)}. \tag{20}$$

Таким образом N_j с возрастанием j приближается к одной из двух форм, (19) или (20).

В первом случае (19) ряд (11) сходится для $\mu = \pm 1$ и решение будет законным для всего шара.

Во втором случае (20) произведение N_3, N_4, ..., N_{j+1} и, следовательно, также коэфициент B_{2j+1} с возрастающим j приближается к конечному, отличному от 0, пределу. Ряд (11), начиная с некоторого члена, будет сравним с рядом

$$1 + \mu^2 + \mu^4 + \ldots, \quad \text{или} \quad (1-\mu^2)^{-1},$$

так что мы можем написать

$$\frac{1}{\mu^2 - f^2}\frac{\partial \zeta'}{\partial \mu} = L + \frac{M}{1-\mu^2}, \tag{21}$$

где L и M суть функции от μ, которые остаются конечными для $\mu = \pm 1$. Таким образом из (3) следует

$$u = -\frac{i\sigma}{4m}\frac{(1-\mu^2)^{1/2}}{\mu^2 - f^2}\frac{\partial \zeta'}{\partial \mu} =$$
$$= -\frac{i\sigma}{4m}\{(1-\mu^2)^{1/2}L + (1-\mu^2)^{-1/2}M\}. \tag{22}$$

Отсюда следует, что u на полюсах бесконечно.

Мы видим, таким образом, что условия нашей задачи могут быть выполнены только тогда, когда N_j приближается к пределу нуль; это обстоятельство заставляет нас ограничиться, как будет показано, определенным рядом значений f.

Соотношение (18) можно привести к виду

$$N_j = \frac{-\frac{\beta}{2j(2j+1)}}{1 - \frac{\beta f^2}{2j(2j+1)} - N_{j+1}}; \tag{23}$$

последовательным применением этой формулы мы получаем N_j в виде непрерывной дроби

$$N_j = \cfrac{-\dfrac{\beta}{2j(2j+1)}}{1-\dfrac{\beta f^2}{2j(2j+1)}} + \cfrac{\dfrac{\beta}{(2j+2)(2j+3)}}{1-\dfrac{\beta f^2}{(2j+2)(2j+3)}} + \cfrac{\dfrac{\beta}{(2j+4)(2j+5)}}{1-\dfrac{\beta f^2}{(2j+4)(2j+5)}} + \dots, \tag{24}$$

которая сходится при рассматриваемом допущении, что N_{j+k} с возрастанием k стремится к нулю, как видно из (19). В частности, формула (24) определяет значение N_2. Но из (15) мы должны иметь

$$N_2 = 1 - \frac{\beta f^2}{2\cdot 3}, \tag{25}$$

а отсюда получаем равенство

$$1 - \frac{\beta f^2}{2\cdot 3} + \cfrac{\dfrac{\beta}{4\cdot 5}}{1-\dfrac{\beta f^2}{4\cdot 5}} + \cfrac{\dfrac{\beta}{6\cdot 7}}{1-\dfrac{\beta f^2}{6\cdot 7}} + \dots = 0, \tag{26}$$

которое равнозначно с $N_1 = \infty$. Это уравнение определяет допустимые значения для $f = \dfrac{\sigma}{2\omega}$. Постоянные в (11) определяются из соотношений

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= \beta A, \\ B_3 &= N_2 \beta A, \\ B_5 &= N_2 N_2 \beta A, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

где A произвольно.

Легко видеть, что для бесконечно малого β корни уравнения (26) даются формулой

$$\frac{\sigma^2 a^2}{gh} = \beta f^2 = n(n+1), \tag{28}$$

где n есть целое четное число (ср. § 199).

Необходимо отметить арифметически замечательный момент. При первом взгляде можно было бы подумать, что если значение f найдено из равенства (26), то находить последовательно коэфициенты B_3, B_5, B_7 можно из формул (15) и (16) или с помощью равнозначащей формулы (18). Однако это рассуждение будет ошибочным, так как оно требовало бы, чтобы мы исходили *в точности* из верного значения f и сохраняли бы абсолютную точность при всех последующих шагах. Вышеизложенное доказательство в действительности показывает, что всякое другое значение, которое, как угодно мало отличается от истинного, взятое как исходное для вычисления, в

конце концов неизбежно приводит к значениям N_j, которые стремятся к пределу 1 [1]).

Можно попытаться приближенно получить самый длинный период свободных колебаний методом § 205 b.

Если обозначить через ξ, η соответственно отклонения на юг и восток, то мы будем иметь в обозначениях названного параграфа

$$\left.\begin{aligned} T &= \pi\varrho h a^2 \int_0^\pi (\dot\xi^2 + \dot\eta^2) \sin\theta \, d\theta, \\ M' &= 2\pi\varrho h a^2 \int_0^\pi (\xi \cos\theta \dot\eta - \eta \dot\xi \cos\theta) \sin\theta \, d\theta, \\ V - T_0 &= \pi g \varrho a^2 \int_0^\pi \zeta^2 \sin\theta \, d\theta. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Предположим, что, как и при отсутствии вращения, возвышение поверхности может быть представлено зональной сферической функцией второго порядка. Формулы (3) § 215 подсказывают при применении этого метода исходить из следующего типа:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= A \sin\theta \cos\theta \cos\sigma t, \\ \eta &= B \sin\theta \cos^2\theta \sin\sigma t, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

а это дает

$$\zeta = -\frac{a}{a\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\xi \sin\theta) = -\frac{h}{a} (3\cos^2\theta - 1) A \cos\sigma t. \tag{31}$$

Тогда получаем

$$\left.\begin{aligned} P &= \pi\varrho h a^2 \left(\frac{2}{15} A^2 + \frac{2}{35} B^2\right), \\ Q &= \frac{8}{35} \pi\varrho\omega h a^2 AB, \\ R &= \frac{4}{5} \pi g \varrho h^2 A^2, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Уравнение (10) § 205b переходит в

$$(x^2 - 6) A^2 + \sqrt{\beta} \frac{6}{7} xAB + \frac{3}{7} B^2 x^2 = 0, \tag{33}$$

где

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\sigma a}{\sqrt{gh}}, \\ \beta &= \frac{4\omega^2 a^2}{gh}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Стационарные значения x определяются из

$$x^2 = 6 + \frac{3}{7} \beta. \tag{35}$$

---

[1]) Thomson W., см. сноску на стр. 421.

Если мы возьмем, например, $\beta=5$, что для Земли соответствует глубине в 17 700 метров, то мы найдем

$$\frac{\sigma a}{\sqrt{gh}}=2{,}854, \quad \frac{\omega}{\sigma}=0{,}3917.$$

Второе число выражает период через звездные сутки, т. е. в звездном исчислении $\frac{2\pi}{\sigma}=9$ ч. 24 м. Истинный же период, как вычислил Хауф (см. § 222), равен 9 ч. 52 м.; разница объясняется взаимным притяжением возмущенной воды, которым мы пренебрегали.

Однако легко ввести поправку. Так как мы пренебрегаем влиянием центробежной силы на силу тяжести, то можно пренебречь влиянием T_0 в (29), в то время как значение V изменяем в отношении

$$1-\frac{3}{5}\frac{\varrho_1}{\varrho_0}=0{,}892, \tag{36}$$

где $\frac{\varrho_1}{\varrho_0}$ $(=0{,}18)$ равно отношению плотности воды к средней плотности Земли (см. § 200). В результате необходимо уравнение (35) заменить следующим

$$x^2=5{,}352+\frac{3}{7}\beta.$$

Для $\beta=5$ это дает период 9 ч. 48 м. с хорошим приближением к значению, полученному Хауфом.

Для бо́льших значений β, т. е. для более малых глубин океана или больших скоростей вращения приближение будет менее удовлетворительным, чем мы могли бы ожидать от природы взятого нами типа приближения.

§ 217. В приложении к этой главе будет показано, что потенциал приливообразующих сил состоит из членов трояkого вида, если разложить его по простым гармоническим функциям времени.

Статическое значение высоты прилива, соответствующее членам первого вида, определяется формулой

$$\overline{\zeta}=H'\left(\frac{1}{3}-\cos^2\theta\right)\cos(\sigma t+\varepsilon)\ ^1). \tag{37}$$

Соответствующие вынужденные волны согласно Лапласу называются „колебаниями первого рода"; они включают в себя четырнадцатидневный лунный прилив и полугодовой солнечный прилив, а также вообще все приливы длинного периода. Для них характерна симметрия относительно полярной оси. Эти колебания представляют важнейший случай вынужденных колебаний рассматриваемого типа.

Если подставить $\overline{\zeta}$ из (37) в (7) и взять для

$$\frac{1-\mu^2}{\mu^2-f^2}\frac{\partial\zeta'}{\partial\mu} \text{ и } \zeta'$$

---

[1]) Строго говоря, θ обозначает здесь *геоцентрическую* широту, т. е. широту по отношению к центру Земли, но разностью между этой и географической широтой можно пренебречь вследствие предположений, сделанных в § 214.

выражения вида (11) и (12), то вместо уравнений (14) и (15) будем иметь

$$B_1 - \frac{1}{3}\beta H' - \beta A = 0, \tag{38}$$

$$B_3 - \left(1 - \frac{\beta f^2}{2\cdot 3}\right) B_1 + \frac{1}{3}\beta H' = 0, \tag{39}$$

в то время как уравнение (16) с его следствиями сохраняет свою силу для всех последующих коэфициентов. Необходимо отметить, что (39) есть частный случай общей формулы (16), если положить

$$B_{-1} = -2H'.$$

Рассуждением, подобным сделанному ранее, получим, что единственное допускаемое решение для моря, покрывающего земной шар, это то, которое дает $N_\infty = 0$, и что поэтому N_j должно иметь значение, даваемое непрерывной дробью (24), где f будет задано теперь частотой возмущающих сил.

В частности, эта формула определяет значение N_1. Мы имеем теперь

$$B_1 = N_1 B_{-1} = -2N_1 H',$$

и уравнение (38) дает тогда

$$A = -\frac{1}{3}H' - \frac{2}{\beta}N_1 H'; \tag{40}$$

другими словами, это есть единственное значение A, которое совместимо с предельным значением нуль для N_j и, следовательно, с конечной скоростью на полюсах. Если взять какое-либо другое значение A за исходное для последовательного вычисления B_1, B_3, B_5, ... с помощью (38), (39) и (16), то мы получим в конце концов значения для N_j, которые приближаются к пределу 1. Более того, так как для избежания этого безусловно необходима была бы *абсолютная* точность в первоначальном выборе A и в последующих вычислениях, то единственный осуществимый метод для вычисления коэфициентов состоит в применении формул

$$\left.\begin{aligned} &\frac{B_1}{H'} = -2N_1, \quad B_3 = N_2 B_1, \qquad B_5 = N_3 B_3, \ldots, \\ &\text{или} \\ &\frac{B_1}{H'} = -2N_1, \quad \frac{B_3}{H'} = -2N_1 N_2, \quad \frac{B_5}{H'} = -2N_1 N_2 N_3, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

где значения N_1, N_2, N_3 вычисляются из непрерывной дроби (24). A posteriori ясно теперь, что решение, полученное таким образом, будет удовлетворять всем условиям задачи и что ряд (12) будет сходиться очень быстро. Для наиболее удобного вычисления нужно взять грубое приближенное значение, даваемое формулой (19) для

какого-либо N_j с достаточно большим j и затем последовательно вычислить

$$N_{j-1},\ N_{j-2},\ \ldots,\ N_2,\ N_1$$

с помощью формулы (23). Значения постоянных A, B_1, B_3, ... в формуле (12) будут даны тогда формулами (40) и (41). Для высоты прилива получим

$$\frac{\zeta}{H'} = -\frac{2N_1}{\beta} - (1 - f^2 N_1)\,\mu^2 - \frac{1}{2}\,N_1\,(1 - f^2 N_2)\,\mu^4 - \ldots$$
$$\ldots - \frac{1}{j}\,N_1 N_2 \ldots N_{j-1}\,(1 - f^2 N_j)\,\mu^{2j} - \ldots \qquad (42)$$

В случае четырнадцатидневного лунного прилива f есть отношение звездных суток к лунному месяцу и, следовательно, равно приблизительно $^1/_{28}$, или, точнее, 0,0365. Это дает $f^2 = 0{,}00133$. Очевидно, положив $f = 0$, мы получим достаточно точное представление этого прилива и тем более полугодового солнечного прилива, а также остальных приливов с длинными периодами; это существенно укорачивает вычисления.

Результаты вычислений будут содержать множитель

$$\beta = \frac{4\omega^2 a^2}{gh}.$$

Для $\beta = 40$, что соответствует глубине 2210 метров, этим путем получается

$$\frac{\zeta}{H'} = 0{,}1515 - 1{,}0000\,\mu^2 + 1{,}5153\,\mu^4 - 1{,}2120\,\mu^6 +$$
$$+ 0{,}6063\,\mu^8 - 0{,}2076\,\mu^{10} + 0{,}0516\,\mu^{12} - 0{,}0097\,\mu^{14} +$$
$$+ 0{,}0018\,\mu^{16} - 0{,}0002\,\mu^{18}. \qquad (43)\ ^1)$$

Следовательно, на полюсах ($\mu = \pm 1$)

$$\zeta = -\frac{2}{3}\,H' \cdot 0{,}154$$

и на экваторе ($\mu = 0$)

$$\zeta = \frac{1}{3}\,H' \cdot 0{,}455.$$

Далее, для $\beta = 10$ или для глубины 8850 метров получаем

$$\frac{\zeta}{H'} = 0{,}2359 - 1{,}0000\,\mu^2 + 0{,}5898\,\mu^4 - 0{,}1623\,\mu^6 +$$
$$+ 0{,}0258\,\mu^8 - 0{,}0026\,\mu^{10} + 0{,}0002\,\mu^{12}. \qquad (44)$$

Это дает для полюсов

$$\zeta = -\frac{2}{3}\,H' \cdot 0{,}470$$

---

[1]) Коэфициенты в (43) и (44) отличаются только немного от численных значений, которые получил Дарвин для случая $f = 0{,}0365$.

и для экватора

$$\zeta = \frac{1}{3} H' \cdot 0{,}708.$$

Для $\beta = 5$ или для глубины 17 700 метров мы находим

$$\frac{\zeta}{H'} = 0{,}2723 - 1{,}0000\,\mu^2 + 0{,}3404\,\mu^4 - 0{,}0509\,\mu^6 + \\ + 0{,}0043\,\mu^8 - 0{,}0004\,\mu^{10}. \qquad (45)$$

Это дает для полюсов

$$\zeta = -\frac{2}{3} H' \cdot 0{,}651$$

и для экватора

$$\zeta = \frac{1}{3} H' \cdot 0{,}817.$$

Так как высоты приливов согласно статической теории для полюсов и для экватора соответственно равны $-{}^2/_3 H'$ и ${}^1/_3 H'$, то эти результаты показывают, что для рассматриваемых глубин приливы с длинными периодами, вообще говоря, будут *прямыми*, хотя круглые узловые линии, конечно, отклоняются более или менее от положений, в которых они должны находиться согласно статической теории. Кроме того, оказывается, что при глубинах, сравнимых с действительной морской глубиной, прилив достигает меньше половины статической величины. По виду уравнения (7) легко заключить, что с возрастанием глубины и следуемого отсюда уменьшения β высота прилива все больше и больше приближается к статической величине. Эта тенденция иллюстрируется приведенными выше числовыми данными.

Необходимо отметить, что сам Лаплас не занимался кинетической теорией приливов и длинными периодами, будучи убежден, что эти приливы вследствие трения практически должны иметь значения, даваемые статической теорией. Он и на самом деле показал, что силы трения имеют подобного рода тенденцию, однако Дарвин [1]) заметил, что в случае четырнадцатидневного прилива по меньшей мере сомнительно, чтобы это действие было примерно так велико, как думал Лаплас. К этому вопросу мы вернемся еще позднее.

§ 218. Если мы отбросим ограничение, что возмущение симметрично относительно полярной оси, то должны вернуться к общим уравнениям (1) и (2) § 214. Мы сохраним, однако, допущения относительно закона глубин и природы границ, которые сделали в § 215.

Если мы допустим, что величины Ω, u, v, ζ все содержат множитель $e^{i(\sigma t + s\varphi + \varepsilon)}$, зависящий от времени, где s — целое число, то на-

[1]) См. сноску на стр. 421.

званные уравнения дают

$$\left.\begin{aligned} i\sigma u - 2\omega v\cos\theta &= -\frac{g}{a}\frac{\partial}{\partial\theta}(\zeta-\overline{\zeta}),\\ i\sigma v + 2\omega u\cos\theta &= -\frac{isg}{a\sin\theta}(\zeta-\overline{\zeta}) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

и

$$i\sigma\zeta = -\frac{1}{a\sin\theta}\left\{\frac{\partial(hu\sin\theta)}{\partial\theta} + ihsv\right\}. \quad (2)$$

Если мы решим эти уравнения относительно u и v, то найдем

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{i\sigma}{4m(f^2-\cos^2\theta)}\left(\frac{\partial\zeta'}{\partial\theta} + \frac{s}{f}\zeta'\operatorname{ctg}\theta\right),\\ v &= -\frac{\sigma}{4m(f^2-\cos^2\theta)}\left(\frac{\cos\theta}{f}\frac{\partial\zeta'}{\partial\theta} + s\zeta\operatorname{cosec}\theta\right), \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

где, как и раньше,

$$\left.\begin{aligned} \zeta-\overline{\zeta} &= \zeta',\\ \frac{\sigma}{2\omega} &= f,\\ \frac{\omega^2 a}{g} &= m. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Из уравнений (3) следует, что при всяком простом гармоническом колебании частицы жидкости описывают эллипсы, оси которых лежат соответственно вдоль меридианов и параллелей.

Если сделать подстановку из (3) в (2), то получим дифференциальное уравнение для ζ':

$$\frac{\partial}{\sin\theta\,\partial\theta}\left\{\frac{h\sin\theta}{f^2-\cos^2\theta}\left(\frac{\partial\zeta'}{\partial\theta} + \frac{s}{f}\zeta'\operatorname{ctg}\theta\right)\right\} - \\ - \frac{h}{f^2-\cos^2\theta}\left(\frac{s}{f}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\zeta'}{\partial\theta} + s^2\zeta'\operatorname{cosec}^2\theta\right) + \\ + 4ma\zeta' = -4ma\overline{\zeta}. \quad (5)$$

§ 219. Случай $s=1$ обнимает в качестве вынужденных колебаний также „колебания второго рода" Лапласа, где возмущающий потенциал есть тессеральная сферическая поверхностная функция второго порядка, именно

$$\overline{\zeta} = H''\sin\theta\cos\theta\cos(\sigma t+\varphi+\varepsilon), \quad (1)$$

причем σ не очень отличается от ω. К этим колебаниям принадлежат суточные лунные и солнечные приливы.

В случае, когда собственным движением возмущающего тела можно пренебречь, $\sigma=\omega$ в точности и, следовательно, $f=1/2$. В случае Луны собственное движение настолько быстро, что истинный период важнейшего суточного лунного прилива будет значительно длиннее

звездных суток [1]); однако допущение $f = 1/2$ настолько упрощает формулы, что мы и при дальнейших исследованиях положим его в основу [2]). Мы увидим, что оно позволяет нам вычислять вынужденные колебания, когда глубина подчиняется закону

$$h - (1 - q\cos^2\theta)\, h_0, \tag{2}$$

где q есть какая-то данная постоянная.

Если мы возьмем показательный множитель $e^{i(\omega t+\varphi+s)}$ и соответственно этому в (3) § 218 положим $s = 1$, $f = 1/2$ и затем напишем

$$\zeta' = C\sin\theta\cos\theta, \tag{3}$$

то найдем

$$\left.\begin{aligned} u &= -i\sigma\,\frac{C}{m}, \\ v &= \sigma\,\frac{C}{m}\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Подставив в уравнение неразрывности [(2), § 218], получим

$$\zeta' + \bar{\zeta} = \frac{C}{ma}\,\frac{dh}{d\theta}, \tag{5}$$

а это согласуется с законом глубин (2), если

$$C = -\frac{1}{1 - \frac{2qh_0}{ma}}\, H''. \tag{6}$$

Отсюда получаем

$$\zeta = -\frac{\frac{2qh_0}{ma}}{1 - \frac{2qh_0}{ma}}\,\bar{\zeta}. \tag{7}$$

Замечательное следствие формулы (7) заключается в том, что в случае постоянной глубины суточный прилив в виде поднятия и опускания поверхности будет отсутствовать. Этот результат был (другим путем) впервые найден Лапласом, который считал его очень важным, ибо он показывал, что его кинетическая теория способна объяснить сравнительно малые значения высоты суточного прилива; это обстоятельство было известно (хотя и неточно) из наблюдений, которые находились в странном противоречии с результатами статической теории.

---

[1]) Необходимо, однако, заметить, что в гармоническом разложении Ω встречается важный член, для которого в точности $\sigma = \omega$, если пренебречь изменениями плоскости орбиты возмущающего тела. Эти периоды одинаковы как для Солнца, так и для Луны, и два образовавшихся таким образом частных прилива соединяются в один суточный прилив, который называется „лунно-солнечный прилив".

[2]) Это с незначительными изменениями заимствовано из работы Airy, Tides and Waves, § 95 ... и Darwin, Encycl. Brit., 9-е изд., XXIII, 359.

Однако, если при постоянной глубине и нет поднятия и опускания, то все же приливные течения имеют место. Из уравнений (4) следует, что каждая частица описывает эллипс, большая ось которого направлена по меридиану и имеет для всех широт одинаковую длину. Отношение малой оси к большой равно $\cos\theta$ и пробегает, следовательно, значения от 1 на полюсах до 0 на экваторе, где движение происходит в точности в направлении с севера на юг.

§ 220. В случае $s=2$ важнейшие вынужденные колебания суть те, у которых потенциал возмущающей силы есть секториальная сферическая поверхностная функция второго порядка. Эти колебания образуют „колебания третьего рода" Лапласа; для них имеем

$$\bar{\zeta}=H'''\sin^2\theta\cos(\sigma t+2\varphi+\varepsilon), \tag{1}$$

где σ приблизительно равно 2ω. Сюда принадлежат наиболее важные из всех приливов, именно: полусуточные лунный и солнечный приливы.

Если бы собственное движение возмущающего тела было бесконечно медленное, то мы имели бы $\sigma=2\omega$ и, следовательно, $f=1$; для простоты будем следовать Лапласу и положим в основу это допущение, хотя оно в случае наиболее важного лунного прилива не совсем точно [1]).

Решение, подобное решению предыдущего параграфа, можно получить для специального закона изменения глубины [2])

$$h=h_0\sin^2\theta. \tag{2}$$

Если взять показательный множитель в виде $e^{i(2\omega t+2\varphi+\varepsilon)}$ и положить затем $f=1$, $s=2$, то уравнения (3) § 218 при допущении

$$\zeta'=C\sin^2\theta \tag{3}$$

дадут

$$u=\frac{i\sigma}{m}\,C\operatorname{ctg}\theta,\quad v=-\frac{\sigma}{2m}\,C\,\frac{1+\cos^2\theta}{\sin\theta}\,; \tag{4}$$

отсюда, подставив в уравнение (2) § 218, получаем

$$\zeta=\frac{2h_0}{ma}\,C\sin^2\theta. \tag{5}$$

Если положить

$$\zeta=\zeta'+\bar{\zeta}$$

и подставить из (1) в (3), то найдем

$$C=-\frac{1}{1-\dfrac{2h_0}{ma}}\,H''' \tag{6}$$

---

[1]) Существует, однако, полусуточный „лунно-солнечный прилив", угловая скорость которого в точности равна 2ω, если пренебречь изменениями плоскости орбиты (ср. сноску 1, стр. 430).

[2]) Ср. Airy и Darwin, см. выше.

и, следовательно,

$$\zeta = -\frac{\frac{2h_0}{ma}}{1-\frac{2h_0}{ma}}\,\bar{\zeta}. \tag{7}$$

Для тех глубин, которые в действительности встречаются в море, $2h_0 < ma$ и поэтому прилив обратный. Необходимо отметить, что формулы (4) дают бесконечно большую скорость на полюсах, что и следовало ожидать, так как глубина там равна нулю.

§ 221. Для всякого другого закона глубин решение может быть получено лишь в виде ряда. В случае постоянной глубины, если положить в (5) § 218 $s=2$, $f=1$, $\frac{4ma}{h}=\beta$, то найдем

$$(1-\mu^2)^2\frac{d^2\zeta'}{d\mu^2}+\{\beta(1-\mu^2)^2-2\mu^2-6\}\,\zeta' = -\beta(1-\mu^2)^2\bar{\zeta}, \tag{8}$$

где $\mu=\cos\theta$. В таком виде исследовать это уравнение трудно, так как оно содержит члены четырех различных измерений относительно μ. Однако оно немного упрощается, если взять за независимую переменную

$$\nu=(1-\mu^2)^{1/2}=\sin\theta;$$

в этом случае получим

$$\nu^2(1-\nu^2)\frac{d^2\zeta'}{d\nu^2}-\nu\frac{d\zeta'}{d\nu}-(8-2\nu^2-\beta\nu^4)\,\zeta' = \\ = -\beta\nu^4\bar{\zeta} = -\beta H'''\nu^6; \tag{9}$$

в этом уравнении встречаются члены только *трех* различных измерений относительно ν.

Чтобы получить решение для случая моря, покрывающего земной шар, положим

$$\zeta' = B_0+B_2\nu^2+B_4\nu^4+\ldots+B_{2j}\nu^{2j}+\ldots \tag{10}$$

Подставляя в (9) и сравнивая коэфициенты, мы найдем

$$B_0=0,\quad B_2=0,\quad 0\cdot B_4=0, \tag{11}$$

$$16B_6-10B_4+\beta H'''=0 \tag{12}$$

и, далее,

$$2j(2j+6)B_{2j+4}-2j(2j+3)B_{2j+2}+\beta B_{2j}=0. \tag{13}$$

Эти уравнения дают последовательно B_6, B_8, ..., B_{2j}, ..., выраженные через B_4; само же B_4 пока не определено. Однако из существа задачи ясно, что решение должно быть единственным, за исключением определенных частных значений h (и, следовательно, β), которые допускают свободные колебания соответствующего рода $s=2$ с частотой 2ω. Мы, далее, увидим, что, действительно, до тех пор, пока B_4 не будет принимать определенных значений, приведен-

ное выше решение будет давать в направлении меридиана компоненту скорости u с разрывом на экваторе [1]).

Ход доказательства в некотором смысле подобен доказательству в § 217. Если обозначить через N_j отношение $\frac{B_{2j+2}}{B_{2j}}$ двух последовательных коэфициентов, то согласно (13) будем иметь

$$N_{j+1} = \frac{2j+3}{2j+6} - \frac{\beta}{2j(2j+6)} \frac{1}{N_j}; \tag{14}$$

отсюда получается, что N_j с возрастанием j приближается либо к пределу 0, либо к пределу 1. Выражаясь точнее, если предел N_j не равен нулю, то N_{j+1} для больших значений j приближенно будет равно

$$\frac{2j+3}{2j+6} \quad \text{или} \quad 1 - \frac{3}{2j}.$$

Второй вид тождествен с асимптотическим значением отношения коэфициентов ν^{2j} и ν^{2j-2} в разложении $(1-\nu^2)^{1/2}$. Мы заключаем отсюда, что члены ряда (10) в конце концов делаются сравнимыми с членами ряда $(1-\nu^2)^{1/2}$, если только B_4 не имеет значения, которое дает $N_\infty = 0$; таким образом мы можем положить

$$\zeta' = L + (1-\nu^2)^{1/2} M, \tag{15}$$

где L, M обозначают функции от ν, которые не обращаются в нуль для $\nu = 1$. Вблизи экватора ($\nu = 1$) это дает

$$\frac{d\zeta'}{d\theta} = \mp (1-\nu^2)^{1/2} \frac{d\zeta'}{d\nu} = \pm M. \tag{16}$$

Согласно (3) § 218 при пересечении экватора u должно, не изменяя своей абсолютной величины, изменить свой знак на противоположный.

Поэтому для нашей цели существенно выбрать такое значение для B_4, для которого $N_\infty = 0$. Это достигается таким же способом, как в § 217. Представляя (13) в виде

$$N_j = \frac{\dfrac{\beta}{2j(2j+6)}}{\dfrac{2j+3}{2j+6} - N_{j+1}}, \tag{17}$$

---

[1]) Для моря, лежащего на полюсе и ограниченного параллелью, радиус которой, выраженный в угловой мере, меньше $\frac{1}{2}\pi$, значение B определяется из условия, что $u = 0$ или $\frac{\partial \zeta'}{\partial \nu} = 0$ на границе.

мы видим, что N_j должно быть задано следующей сходящейся непрерывной дробью

$$N_j = \cfrac{\cfrac{\beta}{2j(2j+6)}}{\cfrac{2j+3}{2j+6}} - \cfrac{\cfrac{\beta}{(2j+2)(2j+8)}}{\cfrac{2j+5}{2j+8}} - \cfrac{\cfrac{\beta}{(2j+4)(2j+10)}}{\cfrac{2j+7}{2j+10}} - \ldots \qquad (18)$$

Это имеет место для $j \geqq 2$, но из (12) следует, что оно будет давать теперь также и значение N_1 (которое до сих пор не было определено), если обозначить этим символом $\frac{B_4}{H'''}$. Мы будем иметь тогда

$$B_4 = N_1 H''', \quad B_6 = N_2 B_4, \quad B_8 = N_3 B_6, \ldots$$

В конце концов получим, если положить $\zeta = \bar{\zeta} + \zeta'$,

$$\frac{\zeta}{H'''} = \nu^2 + N_1\nu^4 + N_1N_2\nu^6 + N_1N_2N_3\nu^8 \ldots \qquad (19)$$

Как и в § 217 практический способ проведения вычисления состоит в том, чтобы взять приближенные значения для N_{j+1}, где j есть не слишком большое число, и затем отсюда последовательно вычислять с помощью формулы (17) значения N_j, $N_{j-1}, \ldots, N_2, N_1$.

Это исследование в существенных чертах заимствовано из замечательной работы, написанной Кельвином [1]) в защиту данного Лапласом в его Небесной механике способа трактовки задачи. В соответствующем месте Лаплас определяет константу B_4 с помощью непрерывной дроби N_1, правда, не давая удовлетворительного обоснования этому способу, и поэтому законность этого приема была подвергнута сомнению Эри [2]) и позднее Феррелем [3]).

Лаплас, к сожалению, не имел обыкновения давать точные указания источников, так что, повидимому, немногим из его читателей было знакомо первоначальное изложение [4]) кинетической теории; именно там дано решение этого случая в очень убедительной, хотя и несколько иной форме. Пытаясь сначала получить приближенные решения с помощью *конечного* ряда:

$$\zeta' = B_4\nu^4 + B_6\nu^6 + \ldots + B_{2k+2}\nu^{2k+2}, \qquad (20)$$

---

[1]) Thomson W., On an Alleged Error in Laplace's Theory of the Tides, Phil. Mag. (4), L, 227 (1875) [Papers, IV, 231].

[2]) Airy, Tides and Waves, § 111.

[3]) Ferrel, Tidal Researches, U. S. Coast Survey Rep., 1874, стр. 154.

[4]) Laplace, Récherches, sur quelques points du sistème du monde, Mém de l'Acad. roy. des Sciences, 1776 (1779) [Oeuvres, IX, 187].

Лаплас замечает [1]), что для того, чтобы удовлетворить дифференциальному уравнению, коэфициенты должны удовлетворять следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} 16B_0 - 10B_1 + \beta H''' &= 0,\\ 40B_2 - 28B_1 + \beta B_1 &= 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ (2k-2)\,(2k+4)\,B_{2k+2} - (2k-2)\,(2k+1)\,B_{2k} + \beta B_{2k-2} &= 0,\\ -2k\,(2k+3)\,B_{2k+2} + \beta B_{2k} &= 0,\\ \beta B_{2k+2} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

в чем сейчас же можно убедиться, если в общем уравнении (13) положить $B_{2k+4}=0$, $B_{2k+6}=0$ ...

Мы имеем здесь $k+1$ уравнений между k постоянными. Предлагаемый метод состоит теперь в том, чтобы определить постоянные с помощью первых k уравнений; таким образом получаем точное решение, правда, не первоначального дифференциального уравнения (9), а измененного, которое получается, если к правой части уравнения (9) прибавить член $\beta B_{2k+2}\nu^{2k+6}$. Это соответствует изменению возмущающей силы, и если нам удастся найти решение, при котором это изменение будет очень мало, то мы можем рассматривать его как приближенное решение первоначальной задачи [2]).

Если взять теперь первые k уравнений системы (21) в обратном порядке, то мы получим B_{2k+2}, выраженное через B_{2k}, а затем B_{2k}, выраженное через B_{2k-2}, и т. д., пока, наконец, B_4 не окажется выраженным через H'''; если k будет достаточно велико, то, очевидно, значение B_{2k+2} и получаемое отсюда видоизменение возмущающей силы, которое необходимо, чтобы сделать решение точным, будут очень малы. Это можно непосредственно проиллюстрировать, следуя Лапласу, на численном примере.

Только что данный прием, очевидно, эквивалентен уже рассмотренному применению непрерывной дроби (18) в том случае, если исходить от $j+1=k$ и $N_k=\dfrac{\beta}{2k\,(2k+3)}$. Однако, сама непрерывная дробь не встречается в названной здесь работе, но она была введена в Небесной механике, вероятно, задним числом, как сокращениое выражеиие первоначально примененного способа вычисления.

Нижеследующая таблица дает численные значения коэфициентов для отдельных степеней ν в формуле (19) для $\dfrac{\zeta}{H'''}$ в случаях

$$\beta = 40,\ 20,\ 10,\ 5,\ 1,$$

которые соответствуют глубинам [3])

2 210, 4 430, 8 850, 17 700, 88 510 метров.

---

[1]) Laplace, Oeuvres, IX, 218. Способ обозначения изменен.

[2]) Необходимо отметить, что этот способ доказательства такой же, какой Эри сам всегда применяет в своих исследованиях о волнах.

[3]) Первые три случая были вычислены Лапласом (см. выше на стр. 414) последний — Кельвином. Числа, относящиеся к третьему случаю, были немного исправлены согласно вычислениям Хауфа см. стр. 437.

Последняя строка дает значение $\frac{\zeta}{H'''}$ для $\nu = 1$, т. е. отношение амплитуды на экваторе к ее значению в равновесии. На полюсах ($\nu = 0$) прилив имеет всегда свое статическое значение, именно нуль.

	$\beta = 40$	$\beta = 20$	$\beta = 10$	$\beta = 5$	$\beta = 1$
ν^2	+ 1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000
ν^4	+20,1862	−0,2491	+6,1915	+0,7504	+0,1062
ν^6	+10,1164	−1,4056	+3,2447	+0,1566	+0,0039
ν^8	−13,1047	−0,8594	+0,7234	+0,0157	+0,0001
ν^{10}	−15,4488	−0,2541	+0,0919	+0,0009	
ν^{12}	− 7,4581	−0,0462	+0,0076		
ν^{14}	− 2,1975	−0,0058	+0,0004		
ν^{16}	− 0,4501	−0,0006			
ν^{18}	− 0,0687				
ν^{20}	− 0,0082				
ν^{22}	− 0,0008				
ν^{24}	− 0,0001				
	− 7,434	−1,821	+11,259	+1,924	+1,110

Приведенные числовые результаты мы можем использовать для проведения оценки погрешности приближений в каждом отдельном случае. Например, когда $\beta = 40$, Лаплас нашел $B_{26} = 0{,}000004\,H'''$; прибавка, которую необходимо ввести к возмущающей силе, чтобы сделать решение точным, будет тогда $-0{,}00002\,H'''\nu^{26}$ и, следовательно, будет находиться в отношении $-0{,}00002\,\nu^{26}$ к действительной силе.

Из уравнения (19) следует, что вблизи полюсов, где ν очень мало, приливы во всех случаях будут прямыми. Для достаточно больших глубин β делается очень малым, и тогда формулы (17) и (19) показывают, что приливы имеют повсюду величины, даваемые практически статической теорией, так как коэфициенты все будут малыми, за исключением первого, который равен 1. С уменьшением h значение β возрастает и формула (17) показывает, что каждое из отношений N_j будет непрерывно возрастать, кроме случая, когда оно при переходе через значение ∞ меняет положительный знак на отрицательный. Переход N_j через ∞ не сопровождается особенностью в решении, исключая случай N_1, потому, что, как легко видеть, произведение $N_{j-1}N_j$ остается конечным и поэтому коэфициенты в (19) все конечны. Если же $N_1 = \infty$, то выражение для ζ делается бесконечным, и тогда оказывается, что глубина имеет одно из критических значений, ранее указанных.

Вышеприведенная таблица показывает, что для глубин, начиная с 8 850 метров и выше, приливы будут всюду прямыми, но что существует некоторая критическая глубина между 8 850 и 4 430 метрами, при которой прилив на экваторе перестает быть прямым и стано-

вится обратным. Тот факт, что второй коэфициент в случае $\beta = 40$ велик, указывает на то, что для глубины, немного меньшей 2210 метров, достигается второе критическое значение.

Когда прилив на экваторе будет обратным, то должны существовать одна или несколько пар круговых узловых линий ($\zeta = 0$), которые лежат симметрично с обеих сторон экватора. Для случая $\beta = 40$ положение круговых узловых линий приближенно дается значениями $\nu = 0{,}95$ или $\theta = 90° \pm 18°$ [1]).

§ 222. Динамическая теория приливов для моря, покрывающего весь земной шар таким образом, что вдоль каждой параллели глубина постоянна, была значительно улучшена и разработана Хауфом [2]); он воспользовался отвергнутым приемом Лапласа и ввел разложения по сферическим функциям взамен рядов, расположенных по степеням μ (или ν). Эти разложения имеют преимущество быстрее сходиться, в особенности, как и следует ожидать, в случаях, когда влияние вращения сравнительно мало; этот способ позволяет также принять во внимание взаимное притяжение частиц воды, которое ни в коей мере не является незначительным, как мы уже видели в более простой задаче § 200.

Когда возвышение поверхности ζ и соответствующая статической теории высота прилива $\bar{\zeta}$ (при которой влияние взаимного притяжения не принимается во внимание) будут разложены в ряд по сферическим функциям

$$\zeta = \sum \zeta_n, \quad \bar{\zeta} = \sum \bar{\zeta}_n, \tag{1}$$

то полное выражение для потенциала возмущающих сил будет

$$\Omega = -g \sum \left(\bar{\zeta}_n + \frac{3}{2n+1} \frac{\varrho}{\varrho_0} \zeta_n \right);$$

ср. § 200. Множитель при $-g$ в этом выражении надлежит вставить вместо $\bar{\zeta}$ в уравнения § 214 . . . ; это требует при изменении способа обозначения (5) § 215 или (4) § 218 положить

$$\zeta' = \sum (a_n \zeta_n - \bar{\zeta}_n), \tag{2}$$

где

$$a_n = 1 - \frac{3}{2n+1} \frac{\varrho}{\varrho_0}. \tag{3}$$

При колебаниях „первого рода" диференциальное уравнение может быть написано в виде

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1-\mu^2}{f^2-\mu^2} \frac{\partial \zeta'}{\partial \mu} \right) + \beta \zeta = 0. \tag{4}$$

[1]) Более полное рассмотрение этих вопросов находится в оригинальных исследованиях Лапласа и в работах Кельвина.

[2]) Hough, On the Application of Harmonic Analysis to the Dynamical Theory of the Tides, Phil. Trans. A. CLXXXIX, 201, и CXCI, 139 (1897) (см. также Darwin, Papers, I, 349).

Если положить

$$\left.\begin{aligned}\zeta &= \sum C_n P_n(\mu),\\ \bar{\zeta} &= \sum \gamma_n P_n(\mu),\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

то мы будем иметь

$$\zeta' = \sum (\alpha_n C_n - \gamma_n) P_n(\mu). \tag{6}$$

Подставляя в (4) и интегрируя между пределами -1 и μ, получим

$$\sum (\alpha_n C_n - \gamma_n)(1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu} + \\ + \sum \beta_n C_n \{(f^2-1) + (1-\mu^2)\} \int_{-1}^{\mu} P_n\, d\mu = 0. \tag{7}$$

Согласно известным формулам зональных сферических функций [1]) имеем

$$\int_{-1}^{\mu} P_n\, d\mu = -\frac{1}{n(n+1)}(1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu} \tag{8}$$

и

$$\int_{-1}^{\mu} P_n\, d\mu = \frac{1}{2n+1}(P_{n+1} - P_{n+1}) = \\ = \frac{1}{2n+1}\left\{\frac{1}{2n+3}\left(\frac{dP_{n+2}}{d\mu} - \frac{dP_n}{d\mu}\right) - \frac{1}{2n-1}\left(\frac{dP_n}{d\mu} - \frac{dP_{n-2}}{d\mu}\right)\right\} = \\ = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\frac{dP_{n+2}}{d\mu} - \frac{2}{(2n-1)(2n+3)}\frac{dP_n}{d\mu} + \\ + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\frac{dP_{n-2}}{d\mu}. \tag{9}$$

Если подставить в (7) и положить коэфициент при $(1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu}$ равным нулю, то мы найдем

$$\frac{1}{(2n+3)(2n+5)} C_{n+2} - L_n C_n + \frac{1}{(2n-3)(2n-1)} C_{n-2} = \frac{\gamma_n}{\beta}, \tag{10}$$

где

$$L_n = \frac{f^2-1}{n(n+1)} + \frac{2}{(2n-1)(2n+3)} - \frac{\alpha_n}{\beta}. \tag{11}$$

Соотношение (10) годится, начиная от $n=1$, если положить

$$C_{-1} = 0, \quad C_0 = 0.$$

---

[1]) См. Todhunter, Functions of Laplace etc., гл. V; Whittaker'a. Watson, Modern Analysis, стр. 306.

Дальнейший ход теории будет основываться в существенных чертах на данном в § 221 рассуждении Лапласа и будет иметь мало общего с исследованиями §§ 216, 217, 221.

Для свободных колебаний мы имеем $\gamma_n = 0$, и допускаемые значения f будут определяться трансцендентным уравнением

$$L_2 - \frac{\frac{1}{5\cdot 7^2\cdot 9}}{L_4} - \frac{\frac{1}{9\cdot 11^2\cdot 13}}{L_6} - \text{ и т. д.} = 0 \qquad (12)$$

или уравнением

$$L_1 - \frac{\frac{1}{3\cdot 5^2\cdot 7}}{L_3} - \frac{\frac{1}{7\cdot 9^2\cdot 11}}{L_5} - \text{ и т. д.} = 0, \qquad (13)$$

смотря по тому, будет ли вид колебаний симметричным или несимметричным относительно экватора.

Хауф установил различные виды для уравнения периодов, которые будут пригодны для вычисления высших корней, и показал, что хорошее приближение достигается уравнениями

$$L_n = 0,$$

или

$$\frac{\sigma^2}{4\omega^2} = 1 + n(n+1)\left\{\left(1 - \frac{3}{2n+1}\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\frac{gh}{4\omega^2 a^2} - \frac{2}{(2n-1)(2n+3)}\right\}, \qquad (14)$$

за исключением первых двух или трех значений n[1]).

Следующая таблица дает периоды (по звездному времени) самого медленного симметрического колебания [т. е. такого, при котором возвышение поверхности изменяется как $P_2(\mu)$ при отсутствии вращения] для различных глубин [2]).

β	Глубина (m)	$\frac{\sigma^2}{4\omega^2}$	Период		Период для $\omega = 0$	
			часы	мин.	часы	мин.
40	2210	0,44155	18	3,5	32	49
20	4430	0,62473	15	11,0	23	12
10	8850	0,92506	12	28,6	16	25
5	17700	1,4785	9	52,1	11	35

Результаты, которые получаются для вынужденных колебаний „первого рода", очень похожи на результаты § 217. Предельная

[1]) Мы указываем также Poole, Proc. Lond. Mat. Soc. (2), XIX, 299.

[2]) Самый медленный, несимметрический вид колебаний имеет более длинный период. Он обусловливает смещение центра тяжести воды, так что необходимо внести исправление в том случае, когда ядро будет свободным, ср. § 199.

форма приливов длинного периода, когда $\sigma = 0$, может быть получена из следующей таблицы.

β	$\frac{\varrho}{\varrho_0} = 0{,}181$		$\frac{\varrho}{\varrho_0} = 0$	
	полюс	экватор	полюс	экватор
40	0,140	0,426	0,154	0,455
20	0,266	0,551		
10	0,443	0,681	0,470	0,708
5	0,628	0,796	0,651	0,817

Второй и третий столбцы дают отношение приливов на полюсе и на экваторе к их значениям согласно статической теории [1]). Числа в четвертом и пятом столбцах повторены из § 217. Сравнение показывает, что влияние взаимного притяжения частиц воды сводится к уменьшению амплитуды.

§ 223. В более общем случае, в котором не предполагается симметрии около оси, Хауф разлагает возвышение поверхности ζ в ряд по тессеральным сферическим функциям типа

$$P_n^s(\mu)\, e^{i(\sigma t + s\varphi + \varepsilon)}. \tag{1}$$

Для теории приливов наиболее важны те случаи, в которых потенциал возмущающих сил имеет вид (1), а $n = 2$, причем $s = 1$ или $s = 2$.

Вычисления становятся по необходимости несколько сложными [2]), и будет достаточно привести здесь только некоторые из наиболее интересных результатов, показывающих, как должны быть заполнены пробелы в прежних исследованиях.

Чтобы понять природу свободных колебаний, самое лучшее начать со случая ($\omega = 0$), в котором не имеет места вращение. Когда ω будет увеличиваться, то пары равных по абсолютной величине и противоположных по знаку значений σ, которые мы получили в § 199, начинают разниться по абсолютной величине, и именно то значение

---

[1]) Числа подсчитаны на основании результатов Хауфа. В названной работе рассматриваются также другие интересные вопросы, как, например, исследование некоторых случаев переменной глубины с численными примерами.

[2]) Упрощение сделано Love, Notes on the Dynamical Theory of the Tides, Proc. Lond. Mat. Soc., (2), XII, 309 (1913). Он полагает

$$u = -\frac{\partial \chi}{a\,\partial\theta} - \frac{\partial \psi}{a \sin\theta\, \partial\varphi},$$

$$v = -\frac{\partial \chi}{a \sin\theta\, \partial\varphi} + \frac{\partial \psi}{a\,\partial\theta};$$

ср. (1) § 154. Выражения для χ, ψ разлагаются по сферическим функциям

будет больше, которое имеет одинаковый знак с ω. Характер основных колебаний меняется также постепенно. Эти колебания называются колебаниями „первого класса".

В то же время некоторые стационарные движения, которые возможны при отсутствии вращения без изменения уровня, превращаются в колебания с длинными периодами с изменением уровня, причем частоты будут сравнимы в начале с ω. Соответствующие колебания называются колебаниями „второго класса" [1]); ср. § 206.

Следующая таблица дает частоты σ и соответствующие периоды, выраженные в звездном времени, для тех колебаний первого класса, которые наиболее важны по отношению к суточным и полусуточным приливам. Последняя колонна дает соответствующие периоды для случая отсутствия вращения, вычисленные из формулы (15) § 200.

Второй род ($s=1$)				Третий род ($s=2$)				
Глубина в метрах	$\frac{\sigma}{\omega}$	Период		$\frac{\sigma}{\omega}$	Период		Период для $\omega=0$	
		часы	мин.		часы	мин.	часы	мин.
2 210	1,6337	14	41	1,3347	17	59	32	49
	−0,9834	24	24	−0,6221	38	34		
4 430	1,8677	12	51	1,6133	14	52	23	12
	−1,2450	19	16	−0,8922	26	54		
8 850	2,1641	11	5	1,9968	12	1	16	25
	−1,6170	14	50	−1,2855	18	40		
17 700	2,6288	9	8	2,5535	9	24	21	35
	−2,1611	11	6	−1,8575	12	55		

Наиболее быстрое колебание второго класса имеет в каждом случае период более длинный, чем одни сутки; периоды остальных еще длиннее.

Что касается *вынужденных* колебаний „второго рода", то все еще имеет место заключение Лапласа, что суточный прилив в случае постоянной глубины исчезает (когда в точности $\sigma=\omega$). Вычисление для самого важного случая суточного лунного прилива, для которого $\frac{\sigma}{\omega}=0{,}922700$, показывает, что для рассматриваемых глубин возвышения будут малы сравнительно с высотами по статической теории и что приливы большей частью будут обратными.

Из вынужденных колебаний „третьего рода" упомянем, во-первых, полусуточный солнечный прилив, для которого с достаточной точностью $\sigma=2\omega$. Для четырех глубин, рассмотренных в наших табли-

[1]) Эти оба класса колебаний встречались нам уже при плоской задаче § 212.

цах, найдены следующие значения отношения динамической высоты прилива к соответствующей высоте прилива по статической теории на экваторе:

$$7{,}9548, \quad -1{,}5016, \quad -234{,}87, \quad +2{,}1389.$$

„Очень большие коэфициенты, которые встречаются для $\frac{hg}{4\omega^2a^2} = \frac{1}{10}$, указывают на то, что для этой глубины существует свободное колебание полусуточного типа, период которого очень мало отличается от полусуток. Из таблиц видно, что этот период в действительности равен 12 часам 1 минуте, в то время как в случае $\frac{hg}{4\omega^2a^2} = \frac{1}{40}$ для периода получалось 12 часов 5 минут [1]). Когда период вынужденного колебания отличается от периода свободного колебания только немного менее чем на одну минуту, то может случиться, что вынужденный прилив приблизительно в 250 раз больше прилива, полученного согласно статической теории, между тем как разность в 5 минут между этими периодами будет достаточна, чтобы свести прилив к меньшему, чем соответствующий десятикратный статический прилив. Отсюда следует, что приливы не имеют тенденции делаться чрезмерно большими, кроме случая, когда имеет место очень точное совпадение с одним из периодов свободных колебаний".

„Критические глубины, при которых рассмотренные здесь вынужденные приливы делаются бесконечными, это — те, для которых период свободного колебания равен в точности 12 часам. Можно найти эти глубины, если в уравнении частот свободных колебаний положить $\sigma = 2\omega$ и рассматривать полученное таким образом уравнение как уравнение для определения h. Критические глубины, соответствующие двум наибольшим корням, приблизительно будут равны 8894 метрам и 2248 метрам".

„Легко видеть, что в трех из четырех рассмотренных здесь случаев влияние взаимного притяжения частиц воды выражается в увеличении отношения прилива к статическому приливу (ср. § 221). В двух случаях изменяется также знак. Это есть, конечно, следствие того факта, что для $\frac{\varrho}{\varrho_1} = 0{,}18093$ один из периодов свободных колебаний несколько больше 12 часов, а для $\frac{\varrho}{\varrho_1} = 0$ меньше 12 часов [2])".

Хауф вычислил также полусуточные лунные приливы, для которых

$$\frac{\sigma}{2\omega} = 0{,}96350.$$

---

[1]) Этот период принадлежит к колебанию, которое следует после колебания с периодом 17 ч. 59 мин.

[2]) Hough, Phil. Trans. A. CXCI, 178, 179.

Для четырех рассмотренных глубин отношения экваториальных высот прилива к их значениям согласно статической теории оказываются равными соответственно

$$-2{,}4187, \quad -1{,}8000, \quad +11{,}0725, \quad +1{,}9225.$$

„Если сравнить эти числа с теми, которые мы получили для солнечных приливов, то видно, что для глубины 2 210 метров солнечные приливы будут прямыми, а лунные приливы — обратными, в то время как для глубины 8 850 метров происходит противоположное. Это, конечно, есть следствие того факта, что в каждом из этих случаев имеет место свободное колебание, период которого лежит между 12 солнечными часами (или, точнее, звездными часами) и 12 лунными часами. Критические глубины, для которых лунные приливы делаются бесконечными, равняются 7 938 метрам и 1 965 метрам.

„Это явление, таким образом, будет встречаться, когда глубина моря лежит между 8 894 и 7 938 метрами или между 2 248 и 1 965 метрами. Важное следствие состоит в том, что для глубин между этими пределами обыкновенные явления внезапного и малого морских приливов меняются местами так, что более высокие приливы наступают, когда Луна находится в квадратуре (в четверти), а более низкие при новолунии и полнолунии [1]).

§ 223a. Некоторые важные дополнения в динамическую теорию были внесены Гольдсброу [2]). Рассматривая приливы для моря постоянной глубины, ограниченного одним или двумя параллельными кругами, он нашел, что для полярного бассейна с углом в 30°, например, для таких глубин, какие были рассмотрены в § 217, 221, приливы с длинными периодами и полусуточные приливы мало отклоняются от статически вычисленных значений, которые исправлены по способу, изложенному в приложении. Однако этот случай существенно отличается от суточных приливов, которые сильно меняются в зависимости от формы и глубины бассейна и вообще являются значительными, в то время как для моря, покрывающего равномерно земной шар, ими можно пренебречь.

Для экваториального пояса приливы с длинными периодами опять приближаются к своим статическим значениям, между тем как суточные и полусуточные приливы значительно отклоняются от них, и мера этого отклонения значительно меняется в зависимости от положения границ.

Имеют место и различия, несомненно, обусловленные связью между вынужденным периодом и естественным периодом свободных колебаний. Этот вопрос был изучен Гольдсброу по отношению к полусуточным приливам Атлантического океана, который более или менее

---

[1]) Hough, см. выше, где есть указания на Kelvin, Popular Lectures and Adresses, London, 1894, II, 22 (1868).

[2]) Goldsbrough, The Dynamical Theory of the Tides in a Polar Basin, Proc. Lond. Math. Soc. (2) XIV, 31, (1913); The Dynamical Theory of the Tides in a Zonal Ocean, XIV, 207 (1914).

образует ограниченную и изолированную систему. Рассматривая случай океана, ограниченного двумя меридианами по обе стороны от меридиана в 60°, и предполагая закон глубины в виде

$$h = h_0 \sin^2 \theta,$$

он нашел, что будут иметь место свободные колебания с частотой $\sigma = 2\omega$ в точности, при условии, что $h_0 = 7\,076$ метрам, что дает среднюю глубину в 4727,5 метра. Если же $h_0 = 7\,722{,}6$ метра или средняя глубина будет 5148,6 метра, то он нашел, что вынужденный прилив указанной выше частоты все еще будет большим по сравнению со значением по статической теории.

В более недавней работе [1]) Гольдсброу и Кольборна глубина взята постоянной и равной средней оценочной глубине (3873,5 *м*) Атлантического океана. За частоту вынужденных колебаний они принимали частоту главной полусуточной составляющей (обычно обозначаемой через μ_2) возмущающей силы Луны $\left(\frac{\sigma}{2\omega} = 0{,}9625\right)$. Амплитуды, хотя и не такие большие, как прежде, но значительно превышают значения статической теории. Суточные приливы в океане этого же типа были исследованы Кольборном [2]).

§ 224. Трудно оценить, кроме как совершенно грубым образом, в какой мере предыдущие заключения динамической теории должны быть изменены, если будут приняты во внимание действительные свойства океана с его неправильными очертаниями и изменяющимися глубинами [3]). Однако кое-что об этом должно быть сказано.

Во-первых, формулы (1) § 206 позволяют утверждать, что при всяком данном приливе имеется налицо изменяющаяся от места к месту разность фаз между приливной высокой водой и возмущающей силой [4]). Например, в случае полусуточного лунного прилива высокий или низкий уровень воды не должны совпадать по времени с прохождением Луны или противолуны через меридиан. Выражаясь точнее, это значит: для случая возмущающей силы данного типа, для которой статически вычисленные значения высоты прилива в определенном месте выражаются формулой

$$\bar{\zeta} = a \cos \sigma\tau, \tag{1}$$

динамическое значение высоты прилива определяется из

$$\zeta = A \cos(\sigma t - \varepsilon), \tag{2}$$

---

[1]) Goldsbrough u. Colborne, Proc. Roy. Soc. A, CXVII, 692 (1927).

[2]) Proc. Roy. Soc. A, CXXXI, 38 (1931).

[3]) Решение математической проблемы имеется у Poincaré, Sur l'equilibre et les mouvements des mers, Liouville (5), II, 57, 217 (1896) и в его Leçons de mécanique Céleste, III.

[4]) Это иллюстрируется проблемой канала, § 184.

где отношение $\frac{A}{a}$ и разность фаз ε суть функции как σ, так и положения места.

Рассмотрим, далее, наложение двух колебаний одинакового типа, но с несколько различными частотами, например, полусуточные лунные и солнечные приливы. Если начало отсчета времени t совместить с временем новолуния или полнолуния, то будем иметь

$$\zeta = a\cos\sigma t + a'\cos\sigma' t \tag{3}$$

и

$$\zeta = A\cos(\sigma t - \varepsilon) + A'\cos(\sigma' t - \varepsilon'). \tag{4}$$

Это можно написать также в следующем виде:

$$\zeta = (A + A'\cos\varphi)\cos(\sigma t - \varepsilon) + A'\sin\varphi\sin(\sigma t - \varepsilon'), \tag{5}$$

где

$$\varphi = (\sigma - \sigma')t - \varepsilon + \varepsilon'. \tag{6}$$

Если первый член правой части формулы (4) представляет лунный прилив, а второй — солнечный прилив, то будем иметь $\sigma < \sigma'$, $A > A'$. Положив

$$\left.\begin{aligned} A + A'\cos\varphi &= C\cos\alpha, \\ A'\sin\varphi &= C\sin\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

получим

$$\zeta = C\cos(\sigma t - \varepsilon - \alpha), \tag{8}$$

где

$$\left.\begin{aligned} C &= (A^2 + 2AA'\cos\varphi + A'^2)^{1/2}, \\ \alpha &= \operatorname{arctg}\frac{A'\sin\varphi}{A + A'\cos\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Это можно рассматривать как простое гармоническое колебание с медленно изменяющейся амплитудой и фазой. Амплитуда изменяется между пределами $A - A'$ и $A + A'$, между тем как α можно взять всегда между $-\frac{1}{2}\pi$ и $+\frac{1}{2}\pi$. Частота σ также должна быть рассматриваема как переменная; можно найти, что

$$\frac{d}{dt}(\sigma t - \alpha) = \frac{\sigma A^2 + (\sigma + \sigma')AA'\cos\varphi + \sigma' A'^2}{A^2 + 2AA'\cos\varphi + A'^2}. \tag{10}$$

Это выражение заключено между пределами

$$\frac{A\sigma + A'\sigma'}{A + A'} \quad \text{и} \quad \frac{A\sigma - A'\sigma'}{A - A'}. \tag{11}$$ [1]

Приведенное рассуждение представляет хорошо известное объяснение явлений внезапного морского прилива и малого прилива [2], но нас теперь будет интересовать только вопрос относительно фазы.

[1] Helmholtz, Lehre von den Tonempfindungen, 2-е изд., Braunschweig, 1870, стр. 622.

[2] Ср. Thomson a. Tait, § 60.

Согласно статической теории максимумы амплитуды наступают, когда

$$(\sigma' - \sigma)\, t = 2n\pi,$$

где n обозначает целое число. По динамической же теории соответствующие моменты максимумов определяются уравнением

$$(\sigma' - \sigma)\, t - (\varepsilon' - \varepsilon) = 2n\pi,$$

т. е. динамические максимумы отделены от статических промежутком времени [1])

$$\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\sigma' - \sigma}.$$

Если бы разность между σ' и σ была бесконечно малой, то эта разница во времени равнялась бы $\frac{d\varepsilon}{d\sigma}$.

Тот факт, что момент высокой воды даже во время новолуния и полнолуния может на несколько часов предшествовать прохождению Луны или противолуны или следовать за ним позднее на несколько часов, хорошо известен [2]). Этот интервал, если рассматривать его как запаздывание, обыкновенно для полусуточных солнечных приливов больше, чем для полусуточных лунных приливов; отсюда следует, что внезапные морские приливы во многих местах будут более высокими через день или через два дня после соответствующего новолуния и полнолуния. Это обстоятельство было приписано [3]) влиянию приливного трения (см. гл. XI), однако ясно, что нельзя игнорировать в этой связи разностью фаз, которые получаются из полной динамической теории даже при отсутствии трения. И есть некоторые основания считать их более важными причинами, чем те, которые обусловлены приливным трением.

Наконец, в § 206, 217 было показано, что приливы с длинным периодом могут очень сильно отклоняться от значений, данных статической теорией, вследствие возможности определенных стационарных движений при отсутствии возмущений. Рэлей [4]) показал, что эти стационарные движения невозможны в некоторых случаях, когда море ограничено перпендикулярными стенками. В самом деле: из (6) § 214 получается следующее: если глубина h всюду одинакова, то при стационарном движении ζ должна быть функцией только полюсного расстояния. Вследствие этого из (4) того же параграфа получается, что направленная на восток скорость v должна быть постоянной вдоль каждой параллели. Однако это несовместимо с наличием

[1]) Этот интервал может быть, конечно, и отрицательным.

[2]) Величины запаздываний (мы обозначили их через ε) для различных компонент приливов были вычислены Бэрдом и Дарвином для ряда гаваней Results of the Harmonic Analysis of Tidal Observations, Proc. R. S., XXXIX, 135 (1885), и Darvin, Second Series of Results. . ., Proc. R. S., XLV, 556 (1889).

[3]) Airy, Tides and Waves, § 459.

[4]) Rayleigh, Note on the Theory of the Fortnightly Tide, Phil Mag. (6), V, 136 (1903) [Papers, IV, 84].

перпендикулярной перегородки вдоль меридиана. Но это противоречие может и не иметь места для моря, глубина которого постепенно уменьшается от середины в направлении к границам [1]).

§ 225. Мы можем дополнить исследование § 200 некоторыми краткими замечаниями по вопросу об устойчивости океана, принимая во внимание вращение Земли.

В § 205 было показано, что условие для вековой устойчивости состоит в том, что $V - T_0$ должно быть минимумом в случае равновесия. Пренебрегая взаимным притяжением поднятых частиц воды легко применить это условие к настоящей задаче. Избыток величины $V - T_0$ над ее значением в невозмущенном состоянии, очевидно, равен

$$\iint \left\{ \int_0^{\zeta} \left(\Psi - \frac{1}{2}\omega^2\widetilde{\omega}^2 \right) dz \right\} dS, \tag{1}$$

где Ψ означает потенциал земного притяжения, δS — элемент поверхности моря, а остальные обозначения остаются прежними. Так как $\Psi - \frac{1}{2}\omega^2\widetilde{\omega}^2$ на всем невозмущенном уровне ($z = 0$) постоянно, то его значение для малой высоты z может быть положено равным $gz +$ const., где, как в § 213,

$$g = \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\Psi - \frac{1}{2}\omega^2\widetilde{\omega}^2 \right) \right]_{z=0}. \tag{2}$$

Так как вследствие постоянства объема $\iint \zeta \, dS = 0$, то из (1) получается для приращения разности $V - T_0$ следующее значение:

$$\frac{1}{2} \iint g\zeta^2 \, dS. \tag{3}$$

Эта величина существенно положительна, и поэтому равновесие вековым образом устойчиво [2]).

Необходимо отметить, что этот способ доказательства не содержит никакого ограничения как относительно глубины жидкости, так и малости эллиптичности, а также относительно симметрии невозмущенной поверхности по отношению к оси вращения.

Если мы хотим принять во внимание взаимное притяжение частиц воды, то задача может быть решена без затруднений только тогда, когда невозмущенная поверхность близка к сферической поверхности и когда пренебрегают изменением g. Вопрос (о вековой устойчивости) тогда в точности такой же, как и при отсутствии вращения. Вычисление для этого случая найдет свое место в следующей главе (§ 264). Результат, каковой мы могли предусмотреть и из § 200,

[1]) Теория предельных форм приливов с длинным периодом в различных типах морей была разработана Proudman, Proc. Lond. Mat. Soc. (2), XIII, 273 (1913).

[2]) Ср. Laplace, Mécanique céleste, кн. IV, § 13, 14.

показывает, что необходимое и достаточное условие устойчивости океана состоит в том, что его плотность должна быть меньше, чем средняя плотность Земли [1]).

§ 226. Быть может, здесь уместно будет сделать некоторые дополнительные замечания по общему вопросу об устойчивости динамических систем. В общем мы следуем обычному способу и рассматриваем положение равновесия или стационарное движение как устойчивое или неустойчивое, смотря по характеру решения приближенного уравнения для возмущенного движения. Если это решение состоит из ряда, члены которого имеют вид $Ce^{\pm\lambda t}$, то обычно называют невозмущенное состояние устойчивым, когда все значения λ будут чисто мнимыми (т. е. вида $i\sigma$); если же, напротив, одно из значений λ будет действительным, то невозмущенное состояние называется неустойчивым. В случае возмущенного равновесия, это математически приводит к употребительному критерию устойчивости, согласно которому необходимое и достаточное условие для этого заключается в существовании минимума функции V.

В последнее время это заключение было поставлено под вопросом, оправдывается ли оно с практической точки зрения. Было указано на следующее: так как приближенные динамические уравнения делаются все более неточными, по мере того как возрастает отклонение от положения равновесия, то еще вопрос, в какой мере вообще могут быть выведены из этих уравнений строгие заключения об окончательном значении отклонения [2]).

Доказательство Дирихле было уже упомянуто; согласно ему достижение минимального значения V есть достаточное условие устойчивости в практическом смысле. Но не существует столь же простого доказательства, которое без дополнительных ограничений показало бы, что это условие также и необходимо. Если, однако, принять во внимание силы трения, которые появляются при всяком произвольном движении системы, то доказательство можно провести так, как в § 205.

После небольшого размышления можно видеть, что большая часть неясностей в этом вопросе обусловлена тем, что не существует достаточно строгого математического определения для понятия „устойчивость". Возникает в еще большей степени та же трудность, если перейти к вопросу об устойчивости движения. Определения, предложенные различными авторами, были подвергнуты критическому разбору Клейном и Зоммерфельдом в их книге по теории волчка [3]). Отвергая прежние определения, они основывают свой критерий на виде изменений, вызываемых малыми произвольными возмущающими импульсами в траектории системы. Если невозмущенная траектория представляет предельное положение возмущенных траекторий при

[1]) Ср. Laplace, см. примечание выше.

[2]) См. работы Ляпунова и Адамара, Liouville (5), III (1897).

[3]) Klein u. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, Leipzig, 1897, стр. 342.

бесконечном уменьшении импульса, то она называется устойчивой, в противном случае — неустойчивой. Например, вертикальное падение частицы под действием силы тяжести следует рассматривать как устойчивое, хотя для произвольно данного как угодно малого импульсивного возмущения отклонение положения частицы в какой-то момент t от ее положения в первоначальном движении возрастает неограниченно вместе с t. Даже этот критерий, как признают сами названные авторы, только тогда не лишен смысла, когда выражение „предельное положение", примененное к траектории, является вполне точно определенным. Кроме того, оказывается, что математически строгое определение не во всех случаях может быть легко приведено в согласие с наглядными геометрическими представлениями [1]).

Эти соображения относятся, естественно, к вопросу об „обыкновенной" устойчивости. Более важная теория „вековой" устойчивости (§ 205) при этом не затрагивается. Мы встретимся с критерием для нее в несколько измененной форме на более поздней ступени наших исследований [2]).

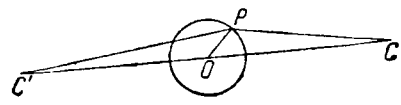
ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ ВОСЬМОЙ

ПРИЛИВООБРАЗУЮЩИЕ СИЛЫ

а) Если обозначить на фиг. 50 через O и C центры Земли и возмущающего тела (например, Луны), то потенциал лунного притяжения для точки P вблизи земной поверхности будет равен $-\frac{\gamma M}{CP}$, где M обозначает массу Луны, а γ — постоянную тяготения.

Если положить

$$OC = D, \quad OP = r$$



Фиг. 50.

и обозначить (геоцентрическое) зенитное расстояние Луны в точке P, именно угол POC, через ϑ, то этот потенциал равен

$$-\frac{\gamma M}{(D^2 - 2rD\cos\vartheta + r^2)^{1/2}}.$$

[1]) Некоторые хорошие иллюстрации можно найти в динамике материальной точки. Так, частица, которая описывает окружность под влиянием центральной силы, обратно пропорциональной кубу расстояния, при малом возмущении будет двигаться либо к центру, либо в бесконечность, причем в каждом из этих случаев она будет описывать спираль с бесконечным числом завитков. Каждая из этих спиралей математически имеет окружность в качестве „предельного положения", хотя движение по этой окружности естественно рассматривать как неустойчивое.

Ср. Korteweg, Wiener. Ber., май 20, 1886.

Более узкое определение было дано Love и применено Bromwich ко многим динамическим и гидродинамическим задачам; см. Proc. Lond. Mat. Soc. (1), XXXIII, 325 (1901).

[2]) Это изложение в существенном взято из статьи автора Dynamics Analytical в Encycl. Brit., 10-е изд., XXVII, 566 (1902), и изд. 11-е, VIII, 756 (1910).

Однако нас интересует не абсолютное ускорение в точке P, а относительное ускорение по отношению к Земле. Луна сообщает при этом всей массе Земли ускорение $\frac{\gamma M}{D^2}$ [1]) параллельно к OC; потенциал однородного силового поля такой интенсивности, очевидно, будет равен

$$-\frac{\gamma M}{D^2} r \cos\vartheta.$$

Вычитая это выражение из нашего прежнего результата, получим потенциал относительного притяжения в точке P

$$\Omega = -\frac{\gamma M}{(D^2 - 2rD\cos\vartheta + r^2)^{1/2}} + \frac{\gamma M}{D^2} r\cos\vartheta. \tag{1}$$

Эта функция Ω тождественна с „пертурбационной функцией" в теории планет.

Разлагая Ω по степеням величины $\frac{r}{D}$, которая в настоящем случае есть малая величина, и сохраняя затем только важнейший член, мы найдем

$$\Omega = \frac{3}{2}\frac{\gamma M r^2}{D^3}\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right). \tag{2}$$

Если рассматривать (2) как функцию положения точки P, то имеем зональную сферическую функцию второго порядка с OC в качестве оси.

Читатель сам легко может показать, что Ω при этой степени приближения равна общему потенциалу двух масс, из которых каждая равна $^1/_2 M$ и из которых одна находится в C, а другая — в C', где C' лежит на продолжении CO и $OC' = OC$ [2]).

b) В статической теории приливов допускают, что свободная поверхность во всякий момент времени принимает ту форму равновесия, которая сохранилась с того момента, когда возмущающее тело принуждено было сохранить неизменным свое мгновенное положение по отношению к вращающейся Земле. Другими словами, предполагают, что свободная поверхность есть поверхность уровня для совместного действия силы тяжести, центробежной силы и возмущающей силы. Уравнение для этой поверхности уровня есть

$$\Psi - \frac{1}{2}\omega^2\widetilde{\omega}^2 + \Omega = \text{const.}, \tag{3}$$

где ω обозначает угловую скорость вращения, $\widetilde{\omega}$ — расстояние произвольной точки от земной оси и Ψ — потенциал земного притяжения. Если обозначить квадратными скобками [] значения заключенных в скобках величин на невозмущенной поверхности и через $\overline{\zeta}$ — возвышение воды над этим невозмущенным уровнем, происходящее от возмущающего потенциала, то вышенаписанное уравнение в приближенном виде будет

$$\left[\Psi - \frac{1}{2}\omega^2\widetilde{\omega}^2\right] + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\Psi - \frac{1}{2}\omega^2\widetilde{\omega}^2\right)\right]\overline{\zeta} + \Omega = \text{const.}, \tag{4}$$

---

[1]) Ее влияние проявляется в образовании месячной неодинаковости в движении центра Земли около Солнца. Амплитуда этого колебания радиуса-вектора равна приблизительно 5600 километров; колебание же по долготе равно приблизительно 7″, см. Laplace, Mécanique céleste, 6-я книга, § 30 и 13-я книга, § 10.

[2]) Thomson a. Tait § 804. Эти два фиктивные тела принято обозначать как „луна" и „противолуна".

где $\frac{\partial}{\partial z}$ обозначает пространственное диференцирование вдоль нормали, направленной наружу. Первый член левой части, конечно, постоянен, и мы будем иметь, следовательно,

$$\overline{\zeta} = -\frac{\Omega}{g} + C, \tag{5}$$

где, как в § 213,

$$g = \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\Psi - \frac{1}{2}\omega^2\widetilde{\omega}^2\right)\right]. \tag{6}$$

Очевидно, g имеет здесь значение „кажущегося тяготения"; оно меняется, конечно, более или менее в зависимости от положения точки P на поверхности Земли.

Однако в теории приливов принято пренебрегать малыми колебаниями значения g и влиянием эллиптичности невозмущенного уровня на значение Ω на поверхности. Таким образом, если положить

$$r = a, \quad g = \frac{\gamma E}{a^2},$$

где E обозначает массу Земли, а a — средний радиус на поверхности Земли, то согласно (2) и (5)

$$\overline{\zeta} = H\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right) + C, \tag{7}$$

где

$$H = \frac{3}{2}\frac{M}{E}\left(\frac{a}{D}\right)^3 a, \tag{8}$$

как в § 180. Таким образом форма равновесия свободной поверхности есть гармонический сфероид второго порядка зоиального типа, ось которого проходит через возмущающее тело.

c) Вследствие суточного вращения, а также вследствие собственного движения возмущающего тела то и дело изменяется положение приливного сфероида по отношению к Земле, так что уровень воды в каком-либо месте беспрестанно поднимается и падает. Мы исследуем характер этих изменений; пусть для определенного места P θ обозначает полюсное угловое расстояние, а φ — долготу на восток, считая от некоторого данного меридиана; через Δ обозначим угловое расстояние возмущающего тела от северного полюса и через α — часовой угол, считая на запад от того же самого меридиана. Тогда будем иметь

$$\cos\vartheta = \cos\Delta\cos\theta + \sin\Delta\sin\theta\cos(\alpha+\varphi) \tag{9}$$

и, следовательно, согласно (7)

$$\overline{\zeta} = \frac{3}{2}H\left(\cos^2\Delta - \frac{1}{3}\right)\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}H\sin 2\Delta\sin 2\theta\cos(\alpha+\varphi) + \\ + \frac{1}{2}H\sin^2\Delta\sin^2\theta\cos 2(\alpha+\varphi) + C. \tag{10}$$

Каждый из членов в правой части этого уравнения можно рассматривать как представляющий частный прилив; действия этих приливов налагаются друг на друга.

Первый член есть зональная сферическая функция второго порядка и дает приливный сфероид, симметричный относительно земной оси и имеющий в качестве узловых линий круги параллелей, для которых

$$\cos^2\theta = \frac{1}{3}, \text{ или } \theta = 90° \pm 35°16'.$$

Высоты приливов для отдельных широт меняются, как $\cos^2\Delta - {}^1/_3$. Для Луны главное колебание этого вида имеет период, равный приблизительно 14 суткам, следовательно, этому члену соответствует „четырнадцатисуточный лунный прилив", или „прилив по склонению". Если возмущающее тело есть Солнце, то мы будем иметь „полугодовой солнечный прилив". Необходимо отметить, что среднее значение от $\cos^2\Delta - {}^1/_3$ по отношению к времени не равно нулю и наклон орбиты возмущающего тела к экватору вызывает как следствие постоянное изменение среднего уровня; ср. § 183.

Второй член правой части (10) есть сферическая функция такого типа, который мы получили из (7) § 86, полагая $n=2$, $s=1$. Соответствующий приливный сфероид имеет в качестве узловых линий экватор и тот меридиан, который удален от возмущающего тела на 90°. Возмущение уровня имеет наибольшее значение в меридиане возмущающего тела в широтах, которые на 45° севернее и южнее экватора. Колебание в каком-нибудь месте завершает свой период одновременно с часовым углом α, т. е. в течение лунных или солнечных суток. Однако амплитуда не постоянна, а меняется медленно вместе с Δ, причем она меняет знак, когда возмущающее тело пересекает экватор. Этот член представляет „суточные" лунный и солнечный приливы.

Третий член есть секториальная сферическая функция $n=2$, $s=2$ и дает приливный сфероид, имеющий узловыми линиями те меридианы, которые лежат на 45° восточнее и западнее от возмущающего тела. Колебание в каком-либо месте завершает свой период одновременно с 2α, т. е. в течение половины (лунных или солнечных) суток, а амплитуда, будучи пропорциональна $\sin^2\Delta$, достигает своего наибольшего значения, когда возмущающее тело находится над экватором. Следовательно, третий член представляет полусуточные лунный и солнечный приливы.

„Постоянная" C определяется из того рассуждения, что вследствие неизменности объема мы должны иметь

$$\iint \bar{\zeta}\, dS = 0, \tag{11}$$

где интегрирование распространяется на полную поверхность моря. Если море покрывает весь земной шар, то согласно общему свойству сферических поверхностных функций, указанному в § 87, $C=0$. Тогда из (7) следует, что наибольшее возвышение над невозмущенным уровнем имеет место в точках $\vartheta=0$, $\vartheta=180°$, т. е. в тех точках, где возмущающее тело находится в зените или в надире; это наибольшее возвышение равно ${}^2/_3\,H$. Наибольшее опускание будет там, где $\vartheta=90°$, т. е. тогда, когда возмущающее тело находится на горизонте, и оно равно ${}^1/_3\,H$. Наибольшая разность уровней равна таким образом H.

В случае ограниченного моря C не обращается в нуль и имеет во всякий момент времени определенное значение, зависящее от положения возмущающего тела по отношению к Земле. Это значение может быть легко выведено из уравнений (10) и (11). Оно равно сумме сферических функций второго порядка от Δ и α с постоянными коэффициентами в форме интегралов по поверхности, значения которых зависят от распределения суши и воды на земном шаре. Колебания значения C, зависящие от относительного движения возмущающего тела, вызывают общее повышение и падение свободной поверхности с четырнадцатисуточным (для случая Луны), суточным и полусуточным периодами. Это уточнение статической теории, приведенное в обычной форме, было исследовано впервые полностью Томсоном и

Тэтом [1]). Необходимость подобного уточнения для ограниченного моря была одиако, осозиаиа еще Даниилом Бернулли [2]).

Эта поправка имеет влияние на момент наступления высокой воды, который уже более не будет совпадать с моментом максимума возмущающей силы. Более того, интервал времени, на который высокая вода будет опаздывать или опережать, меияется в зависимости от места [3]).

d) До сих пор мы пренебрегали взаимным притяжением частиц воды. Чтобы ввести их в вычнсления, мы должны к возмущающему потенциалу Ω прибавить еще потенциал тяготеиия поднятой воды. Для океана, покрывающего весь земной шар, корректирование легко сделать, как в § 200. Если положить $n=2$ в формулах указанного параграфа, то мы должиы увеличить значение Ω на $-\frac{3}{5}\frac{\varrho}{\varrho_0}g\bar{\zeta}$; отсюда легко найти

$$\bar{\zeta}=\frac{H}{1-\frac{3}{5}\frac{\varrho}{\varrho_0}}\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\right); \tag{12}$$

следовательно, все приливы увеличеиы в $\left(1-\frac{3}{5}\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{-1}$ раз. При $\frac{\varrho}{\varrho_0}=0{,}18$ это равно 1,12.

e) Вот все о статической теории. Для исследований кинетической теории § 213—224 необходимо значение величины $\bar{\zeta}$, даваемое формулой (10), предполагать разложеиной в ряд простых гармоиических функций от времени. Действительное разложение, при котором принимаются во внимание измеиения Δ и α и изменения расстояния D возмущающего тела (последнее входит в выражение для H), есть довольно сложная задача физической астрономии, которой мы не будем касаться [4]).

Если не принимать во внимание констаиту C, которая исчезает в дииамических уравнеииях (1) § 215, так как иеизменяемость объема обеспечеиа теперь уравнением неразрывности (2), то легко видеть, что члены формулы (10) будут троякого рода.

Во-первых, мы имеем приливы длинного периода, для которых

$$\bar{\zeta}=H'\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\right)\cos(\sigma t+\varepsilon). \tag{13}$$

Наиболее важные приливы этого рода суть „четырнадцатисуточные лунные приливы", для которых выраженная в угловых градусах $\sigma=1{,}098°$ в средний солнечный час, и „полугодовые солнечные приливы", для которых $\sigma=0{,}082°$.

---

[1]) Thomson a. Tait, Natural Philosophy, § 808; см. также Darwin. On the Correction to the Equilibrium Theory of the Tides for the Continents, Proc. Roy. Soc., 1 апреля 1886 [Paper, I, 328]. Из числовых изыскаиий проф. H. H. Turner, приложенных к этой работе, следует, что при имеющемся в действительиости распределеиии суши и воды эта поправка совершенно незначительна.

[2]) Bernoulli D., Traité sur le Flux et Reflux de la Mer, гл. XI (1740). Эта работа, так же как и цитированиые на стр. 386 работа Маклорена и сочиненне Эйлера по тому же самому предмету перепечатаны в Principia Ньютона, изданных Le Seur и Jacquier.

[3]) Thomson a. Tait, § 810. Это положеиие иллюстрируется формулой (3) § 184.

[4]) Мы указываем на Laplace, Mécanique céleste, кн. XIII, § 2. Более полное разложение, которое служило основанием всем новейшим точным работам о приливах, принадлежит Дарвину и напечатано в его Papers, I. Это разложеиие является только квазигармоническим, причем некоторые элементы, которые изменяются только медленно, рассматриваются как постояиные, но время от времени они корректируются. Строгое гармоническое разложение проведено в последнее время Doodson, Proc. Roy. Soc. A. C, 305 (1921).

Во-вторых, мы имеем суточные приливы, для которых

$$\overline{\zeta} = H'' \sin\theta \cos\theta \cos(\sigma t + \varphi + \varepsilon), \tag{14}$$

где σ только немного отличается от угловой скорости ω вращения Земли. К этим приливам принадлежат „суточные луниые приливы" ($\sigma = 13{,}943°$), „суточные солнечиые приливы" ($\sigma = 14{,}959°$) и „суточные лунно-солнечные приливы" ($\sigma = \omega = 15{,}041°$).

Наконец, мы имеем еще полусуточиые приливы, для которых

$$\overline{\zeta} = H''' \sin^2\theta \cos(\sigma t + 2\varphi + \varepsilon)\,^{1}), \tag{15}$$

где σ только немного отличается от 2ω. Последние включают „полусуточный лунный прилив" ($\sigma = 28{,}984°$), „полусуточный солнечный прилив" ($\sigma = 30°$) и „полусуточные лунно-солнечиые приливы" ($\sigma = \omega = 30{,}082°$).

Более полное перечисление важиейших частных приливов и значения коэфициеитов H', H'', H''' в различных случаях можно найти в уже цитированных исследованиях Дарвина. При гармоническом анализе наблюдений приливов, который составляет специальную тему рассматриваемых исследований, применяется только одиа теорема динамической теории, именно общая теорема, что высота прилива в пронзвольном месте равна сумме ряда простых гармонических функций от времени, которые имеют такие же периоды, как различиые члеиы в разложении возмущающего потенциала, так что эти периоды известны a priori. Амплитуды и фазы различных частных приливов для определенной гавани получаются тогда из сравнения наблюдений приливов за довольно длинный промежуток времени[2]). Так получают вполне пригодное для практических целей выражение, которое применяется к систематическому предсказанию приливов в соответствующей гавани.

f) Особенно нитересно при гармоиическом анализе определение прилнвов длиного периода. Уже было указано, что под влиянием сил трения оии должны приближаться более или меиее близко к своим значениям по статической теорни. Для моря, покрывающего земной шар, по меньшей мере сомнительно, достаточно ли будет сил трения, чтобы вызвать заметное влияние в указанном направлении. Можно ожидать, следовательно, согласно рассмотреиным в § 206, 214 динамическим основаииям, что амплитуды будут меиьше, чем по статической теории. С другой стороны, эти соображеиия не годятся для действительного океана[3]), так как там влияиие трения значительно больше. Таким образом мы можем принять, что приливы длиного периода должны были бы иметь свои полные статические значения, если бы Земля была абсолютно твердой. Однако в действительности четырнадцатидневный лунный прилив, амплитуду которого только и можно получить вообще с некоторой увереиностью из наблюдений, приблизительно на одну треть меньше, чем дает зиачеиие, вычисленное согласно статической теории. Это противоречие объясняется упругой податливостью твердой оболочки Земли влиянию приливовозмущающих сил, происходящих от Луны.

---

[1]) Для малой, лежащей вблизи полюса части поверхности, которая практически может рассматриваться как плоская, из формул (14) и (15) очевидно следует, что $\overline{\zeta}$ будет пропорциональна $r\cos(\sigma t + \varphi + \varepsilon)$ и $\overline{\zeta}$ — пропорциональна $r^2\cos(\sigma t + 2\varphi + \varepsilon)$ соответственно, где r и ω представляют полярные координаты на плоскости. Выражения этого вида были уже заранее использованы в § 211, 212.

[2]) В связи с § 187 интересно, что измерители прилива, которые находятся в сравнительно мелкой воде, заметно подвергаются влнянию некоторых приливов второго порядка, которые поэтому должны быть приняты во внимание в общей схеме гармонического анализа.

[3]) См. цитированную на стр. 446 работу Рэлея.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ

§ 227. Будем теперь рассматривать движение волн в жидкости в том случае, когда уже больше нельзя будет пренебрегать вертикальным ускорением. Наиболее важный случай, который не был охвачен предшествующей теорией, есть движение волн на сравнительно глубокой воде, амплитуда которых, как мы увидим, очень быстро убывает с глубиной. Однако, как это будет выяснено, существует непрерывный переход к тем случаям, которые исследовались в предыдущей главе, если горизонтальное движение жидкости, начиная от поверхности вплоть до дна, будет в основном одинаковым.

Мы начнем с колебаний горизонтального слоя воды и ограничимся сначала случаями, при которых движение происходит в двух измерениях: в горизонтальном направлении (x) и в вертикальном направлении (y). Возвышения и опускания свободной поверхности представляют тогда ряд параллельных прямолинейных гребней и впадин, перпендикулярных к плоскости xy.

Предположим, что движение образовалось первоначально из состояния покоя под действием консервативной системы сил; в таком случае движение будет непременно безвихревым и потенциал скоростей φ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

с условием на неподвижной границе

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0. \tag{2}$$

Чтобы найти условия, которым надо удовлетворить на свободной поверхности ($p=\text{const.}$), возьмем начало координат на невозмущенном уровне и ось Oy направим вертикально вверх. Если положить $\Omega=gy$ в формуле (4) § 20 и, предполагая движение бесконечно малым, пренебречь квадратом скорости q, то получим

$$\frac{p}{\varrho}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}-gy+F(t). \tag{3}$$

Пусть η обозначает возвышение поверхности над точкой (x, 0) в момент t. Так как давление постоянно, то, включая функцию $F(t)$ и аддитивную постоянную в значение $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, будем иметь

$$\eta=\frac{1}{g}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_{y=\eta}. \tag{4}$$

С ошибкой порядка величин, которыми мы пренебрегаем, можно уравнение (4) написать в следующем виде:

$$\eta=\frac{1}{g}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_{y=0}. \tag{5}$$

Так как нормаль к свободной поверхности составляет бесконечно малый угол $\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$ с вертикалью, то условие, что нормальная компонента скорости жидкости на свободной поверхности равна нормальной компоненте скорости самой поверхности, с достаточным приближением выражается в виде

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]_{y=0}. \tag{6}$$

Действительно, это есть вид, который принимает общее условие на поверхности (3) § 9, если положить

$$F(x, y, z, t) \equiv y - \eta$$

и пренебречь малыми величинами второго порядка.

Исключая η из уравнений (5) и (6), получим условие

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \tag{7}$$

которое должно удовлетворяться для $y = 0$. Оно равнозначно с условием

$$\frac{Dp}{Dt} = 0.$$

Для простых гармонических колебаний с временным множителем $e^{i(\sigma t+\varepsilon)}$ условие (7) принимает вид

$$\sigma^2 \varphi = g\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{8}$$

§ 228. Применим эти результаты к свободным колебаниям слоя воды или воды в прямолинейном канале постоянной глубины h. Пусть жидкость, неограниченная в направлении оси x, ограничена вертикальными плоскостями, параллельными плоскости xy.

Так как для всех значений x граничные условия одинаковы, то проще всего предположить, что φ есть простая гармоническая функция от x; наиболее общий случай, совместимый с вышеизложенными условиями, может быть получен отсюда по теореме Фурье с помощью наложения.

Мы предположим, следовательно,

$$\varphi = P\cos kx \cdot e^{i(\sigma t+\varepsilon)}, \tag{1}$$

где P есть функция только y. Уравнение (1) § 227 дает

$$\frac{d^2P}{dy^2} - k^2P = 0, \tag{2}$$

а отсюда следует

$$P = Ae^{ky} + Be^{-ky}. \tag{3}$$

условие, что на дне нет вертикального движения, будет иметь вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{для} \quad y = -h;$$

откуда

$$Ae^{-kh} = Be^{kh} = \frac{1}{2} C.$$

Это приводит к формуле

$$\varphi = C \operatorname{ch} k(y+h) \cos kx \cdot e^{i(\sigma t + \varepsilon)}. \tag{4}$$

Значение σ определяется из уравнения (8) § 227, которое дает

$$\sigma^2 = gk \operatorname{th} kh. \tag{5}$$

Если подставить (4) в (5) § 227, то найдем

$$\eta = \frac{i\sigma C}{g} \operatorname{ch} kh \cos kx \cdot e^{i(\sigma t + \varepsilon)} \tag{6}$$

или, если положить

$$a = -\frac{\sigma C}{g} \operatorname{ch} kh$$

и сохранить только действительную часть (6), то получим

$$\eta = a \cos kx \sin(\sigma t + \varepsilon). \tag{7}$$

Эта формула представляет систему стоячих волн с длиной волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ и вертикальной амплитудой a. Период $\left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)$ и длина волны связаны формулой (5). Числовые примеры для этого соотношения будут даны в ближайшем параграфе.

Выразив φ через a, будем иметь

$$\varphi = -\frac{ga}{\sigma} \frac{\operatorname{ch} k(y+h)}{\operatorname{ch} kh} \cos kx \cos(\sigma t + \varepsilon), \tag{8}$$

и из § 62 легко убедиться, что соответствующая функция тока будет

$$\psi = \frac{ga}{\sigma} \frac{\operatorname{sh} k(y+h)}{\operatorname{ch} kh} \sin kx \cos(\sigma t + \varepsilon). \tag{9}$$

Обозначая через $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ координаты частицы по отношению к ее среднему положению (x, y) и пренебрегая разностями между компонентами скорости в точках (x, y) и $(x+\mathbf{x}, y+\mathbf{y})$, как величинами второго порядка малости, получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Сделав теперь подстановку из (8) и интегрируя по t, после незначительных упрощений согласно (5) найдем

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{x} &= -a\frac{\operatorname{ch} k(y+h)}{\operatorname{sh} kh}\sin kx\sin(\sigma t+\varepsilon),\\ \mathrm{y} &= \quad a\frac{\operatorname{sh} k(y+h)}{\operatorname{sh} kh}\cos kx\sin(\sigma t+\varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Движение каждой частицы будет прямолинейным и простым гармоническим; направление движения изменяется от вертикального в пучностях ($kx = m\pi$) до горизонтального в узлах ($kx = (m+{}^1/_2)\pi$). Амплитуда вертикального движения падает от $a\cos kx$ на поверхности до 0 на дне, в то время как амплитуда горизонтального движения уменьшается в отношении $\operatorname{ch} kh : 1$.

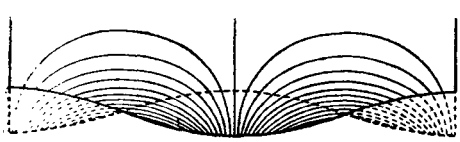
Если длина волны очень мала сравнительно с глубиной, то kh велико и, следовательно, $\operatorname{th} kh = 1$ *). Формулы (11) сводятся тогда к

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{x} &= -ae^{ky}\sin kx\sin(\sigma t+\varepsilon),\\ \mathrm{y} &= \quad ae^{ky}\cos kx\sin(\sigma t+\varepsilon), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где

$$\sigma^2 = gk. \tag{13}$$

Движение убывает от поверхности по направлению ко дну очень быстро; на глубине длины волны амплитуда уменьшается в отношении $e^{-2\pi}$, или 1 : 535. Вид линий тока $\psi = \text{const}$. (колебательного движения) для этого случая представлен на фиг. 51.



Фиг. 51.

При вышеизложенном исследовании мы предполагали, что жидкость простирается в направлении x в бесконечность, и поэтому на значение k не накладывалось никаких ограничений. Однако формулы дают также продольные колебания и в канале конечной длины, если только для k подобрать подходящее значение. Если, например, жидкость ограничена вертикальными плоскостями

$$x = 0, \quad x = l,$$

то условие $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$ выполняется на обоих концах, если

$$\sin kl = 0 \quad \text{или} \quad kl = m\pi,$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$ Длины волн нормальных колебаний даны, следовательно, формулой $\lambda = \frac{2l}{m}$; ср. § 178.

§ 229. В предыдущих параграфах мы рассматривали „стоячие" волны, и было естественно дать их на первом месте, так как они представляют непосредственное применение обычного метода исследования свободных колебаний системы около положения равновесия.

*) Этот случай, конечно, легко исследовать совершенно независимо.

Если слой воды или канал постоянной глубины безграничен в обоих направлениях оси x, то наложением двух систем стоячих волн одинаковой длины волны мы получим систему прогрессивных волн, движущихся поступательно без изменения с постоянной скоростью. Для этого необходимо, чтобы гребни и впадины одной системы совпадали с узлами другой системы, чтобы амплитуды обеих систем были равны и, наконец, чтобы их фазы отличались на четверть периода. Следовательно, положив

$$\eta = \eta_1 \pm \eta_2, \tag{1}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= a \sin kx \cos \sigma t, \\ \eta_2 &= a \cos kx \sin \sigma t, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

мы получим

$$\eta = a \sin (kx \pm \sigma t), \tag{3}$$

а это представляет бесконечную цепь волн, которые распространяются в отрицательном или положительном направлении оси x со скоростью

$$c = \frac{\sigma}{k} = \left(\frac{g}{k} \operatorname{th} kh\right)^{1/2}, \tag{4}$$

где σ определено из формулы (5) § 228. Выражая скорость через длину волны (λ), будем иметь

$$c = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi h}{\lambda}\right)^{1/2}. \tag{5}$$

Когда длина волны будет меньше удвоенной глубины, тогда с достаточной точностью будем иметь $\operatorname{th} kh = 1$ и, следовательно [1]),

$$c = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2} = \left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Если, с другой стороны, λ только немногим будет больше, чем h, то приближенно $\operatorname{th} kh = kh$ и скорость волны не будет зависеть от ее длины и, как в § 170, будет равна

$$c = (gh)^{1/2}. \tag{7}$$

Мы получили этот результат при допущении, что профиль волны есть синусоида; теорема Фурье показывает, однако, что это ограничение в значительной степени не является необходимым.

Если изобразим кривую $y = \dfrac{\operatorname{th} x}{x}$ или рассмотрим числовые значения данной на стр. 462 таблицы, то увидим, что для данной глубины h скорость волн все время возрастает с длиной волны от 0 до асимптотического значения (7).

---

[1]) Green, Note on the Motion of Waves in Canals, Camb. Trans. т. VII (1889) [Papers, стр. 279].

Рассмотрим для определенности цепь простых гармонических волн, распространяющихся в положительном направлении, т. е. возьмем нижний знак в формулах (1) и (3). Из сравнения с формулой (7) § 228 можно убедиться, что η_1 найдется, если положить $\varepsilon = {}^1/_2\pi$ и отнять ${}^1/_2\pi$ от значения kx[1]); η_2 найдется легко, если положить $\varepsilon = 0$. Этим самым доказываются условия, которые мы наложили выше на обе системы стоячих волн; так же мы можем написать сразу соответствующие изменения остальных формул предыдущего параграфа.

Таким способом мы найдем для компонент смещения частицы

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{x} = \mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2 &= a\,\frac{\operatorname{ch} k(y+h)}{\operatorname{sh} kh}\cos(kx - \sigma t), \\ \mathrm{y} = \mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_2 &= a\,\frac{\operatorname{sh} k(y+h)}{\operatorname{sh} kh}\sin(kx - \sigma t). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Это показывает, что каждая частица имеет эллиптическое колебание, период которого $\left(\frac{2\pi}{\sigma} = \frac{\lambda}{c}\right)$ равен времени, в течение которого возмущение передвигается на длину волны. Горизонтальные и вертикальные полуоси эллиптических орбит будут

$$a\,\frac{\operatorname{ch} k(y+h)}{\operatorname{sh} kh} \quad \text{и} \quad a\,\frac{\operatorname{sh} k(y+h)}{\operatorname{sh} kh}.$$

Обе убывают от поверхности до дна ($y = -h$); на дне второе выражение обращается в нуль. Расстояние между фокусами для всех эллипсов одинаково и равно $n\operatorname{cosech} kh$. Сравнивая уравнения (8) и (3), легко видеть, что частица, находящаяся на поверхности, движется в направлении распространения волны, когда она находится на гребне, и в противоположном направлении, когда она находится во впадине[2]).

Если глубина превосходит половину длины волны, то e^{-kh} будет очень малым, и формулы (8) сводятся к

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{x} &= ae^{ky}\cos(kx - \sigma t), \\ \mathrm{y} &= ae^{ky}\sin(kx - \sigma t), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

так что каждая частица описывает окружность с постоянной угловой скоростью $\sigma = \left(\frac{2\pi g}{\lambda}\right)^{1/2}$*). Радиусы этих кругов равны ae^{ky} и, следовательно, очень быстро убывают с глубиной.

В первой из следующих таблиц второй столбец дает значения $\operatorname{sech} kh$, соответствующие различным значениям отношения $\frac{h}{\lambda}$. Эти зна-

---

[1]) Это означает не что иное, как смещение начальной точки, от которой отсчитывается x.

[2]) Результаты § 228—229 для случая конечной глубины в существенном принадлежат Airy, Tides and Waves, § 160 (1845).

*) Green. см. выше.

чения выражают отношение горизонтального движения на дне к горизонтальному движению на поверхности. Третий столбец дает отношение вертикального диаметра к горизонтальному для эллиптической орбиты частицы на поверхности. Четвертый и пятый столбцы дают отношения скорости волны к скорости волн той же длины, но на бесконечной глубине, а также к скорости длинных волн при действительных глубинах.

Таблицы абсолютных значений периодов и скоростей волн (вторая и третья из нижеследующих таблиц) заимствованы из сочинения Эри [1]). Значение g, взятое им, равно 9,802 *м/сек*^{2}.

Возможность прогрессивных волн, движущихся вперед без изменения формы, ограничена теоретически случаем постоянной глубины; числовые результаты показывают, однако, что изменение глубины не оказывает заметного влияния, когда глубина всюду (приблизительно) превосходит половину длины волны.

$\frac{h}{\lambda}$	sech kh	th kh	$\frac{c}{\sqrt{gk^{-1}}}$	$\frac{c}{\sqrt{gh}}$
0,00	1,000	0,000	0,000	1,000
0,01	0,998	0,063	0,250	0,999
0,02	0,992	0,125	0,354	0,997
0,03	0,983	0,186	0,432	0,994
0,04	0,969	0,246	0,496	0,990
0,05	0,953	0,304	0,552	0,984
0,06	0,933	0,360	0,600	0,977
0,07	0,911	0,413	0,643	0,970
0,08	0,886	0,464	0,681	0,961
0,09	0,859	0,512	0,715	0,951
0,10	0,831	0,557	0,746	0,941
0,20	0,527	0,850	0,922	0,823
0,30	0,297	0,955	0,977	0,712
0,40	0,161	0,987	0,993	0,627
0,50	0,086	0,996	0,998	0,563
0,60	0,046	0,999	0,999	0,515
0,70	0,025	1,000	1,000	0,477
0,80	0,013	1,000	1,000	0,446
0,90	0,007	1,000	1,000	0,421
1,00	0,004	1,000	1,000	0,399
∞	0,000	1,000	1,000	0,000

[1]) Airy, Tides and Waves, § 169, 170.

Для следующих таблиц отметим, что один английский фут равен 0,30479 *м*

Глубина воды в английских футах	Длина волны в английских футах				
	1	10	100	1000	10 000
	Период в секундах				
1	0,442	1,873	17,645	176,33	1763,3
10	0,442	1,398	5,923	55,80	557,62
100	0,442	1,398	4,420	18,73	176,45
1000	0,442	1,398	4,420	13,98	59,23
10000	0,442	1,398	4,420	13,98	44,20

Глубина воды в английских футах	Длина волны в английских футах					
	1	10	100	1000	10000	∞
	Скорость волны в английских футах и секундах					
1	2,262	5,399	5,667	5,671	5,671	5,671
10	2,262	7,154	16,88	17,92	17,93	17,93
100	2,262	7,154	22,62	53,39	56,67	56,71
1000	2,262	7,154	22,62	71,54	168,8	179,3
10 000	2,262	7,154	22,62	71,54	226,2	567,1

Наконец, заметим еще, что теория прогрессивных волн может быть получена непосредственно, не опираясь на теорию стоячих волн, если вместо формулы (1) § 228 принять сразу

$$\varphi = Pe^{i(\sigma t - kx)}, \tag{10}$$

где P должно удовлетворять тем же условиям, как раньше. Легко получить в действительной форме

$$\eta = a \sin(kx - \sigma t), \tag{11}$$

$$\varphi = \frac{ga}{\sigma} \frac{\operatorname{ch} k(y+h)}{\operatorname{ch} kh} \cos(kx - \sigma t), \tag{12}$$

где σ имеет прежнее значение. Из уравнения (12) без труда получаются все прежние результаты о движении одной частицы.

§ 230. Энергию системы стоячих волн простого гармонического типа легко найти. Если мы вообразим две вертикальные плоскости, параллельные плоскости xy, на расстоянии единицы длины друг от друга, то потенциальная энергия жидкости, заключенной между этими плоскостями, на длине волны будет равна

$$\frac{1}{2} g\varrho \int_0^{\lambda} \eta^2 dx.$$

Подставив значение η из (7) § 228, получим

$$\frac{1}{4} g\varrho a^2\lambda \sin^2(\sigma t+\varepsilon). \tag{1}$$

Кинетическая же энергия согласно (1) § 61 равна

$$\frac{1}{2}\varrho\int_0^{\lambda}\left[\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]_{y=0}dx.$$

Сделав подстановку из (8) § 228 и принимая во внимание соотношение между σ и k, получим

$$\frac{1}{4} g\varrho a^2\lambda \cos^2(\sigma t+\varepsilon). \tag{2}$$

Полная энергия, будучи равной сумме (1) и (2), имеет постоянное значение $^1/_4 g\varrho a^2\lambda$. Это можно выразить и так, что полная энергия на единицу поверхности воды равна $^1/_4 g\varrho a^2$.

Подобное вычисление можно провести и для прогрессивных волн или же можно применить более общий метод, изложенный в § 174. При помощи каждого из этих методов мы найдем, что в каждый момент времени энергия есть наполовину потенциальная и наполовину кинетическая и что их полная сумма на единицу площади равна $^1/_2 g\varrho a^2$. Другими словами, энергия системы прогрессивных волн амплитуды a равна работе, которая необходима, чтобы поднять слой жидкости толщины a на высоту $^1/_2 a$.

§ 231. Рассмотрим колебания поверхности раздела двух расположенных друг над другом жидкостей, которые в остальных направлениях безграничны.

Если мы возьмем начало на среднем уровне поверхности раздела, то можем написать

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= Ge^{ky}\cos kx e^{i\sigma t},\\ \varphi' &= C'e^{-ky}\cos kx e^{i\sigma t},\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где штрихи относятся к верхней жидкости. Эти выражения удовлетворяют уравнению (1) § 227 и обращаются в нуль соответственно для $y=-\infty$ и для $y=+\infty$. Написав уравнение возмущенной поверхности в виде

$$\eta = a\cos kx e^{i\sigma t}, \tag{2}$$

мы должны иметь согласно (6) § 227

$$-kC = kC' = i\sigma a. \tag{3}$$

Из формул

$$\left.\begin{aligned}\frac{p}{\varrho} &= \frac{\partial\varphi}{\partial t} - gy,\\ \frac{p'}{\varrho'} &= \frac{\partial\varphi'}{\partial t} - gy\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

получаем условие для непрерывности давления на поверхности раздела:

$$\varrho(i\sigma C - ga) = \varrho'(i\sigma C' - ga). \tag{5}$$

Подставив значения C и C' из (3), будем иметь

$$\sigma^2 = gk\frac{\varrho-\varrho'}{\varrho+\varrho'}. \tag{6}$$

Скорость распространения волн длины $\frac{2\pi}{k}$ определяется, следовательно, формулой

$$C^2 = \frac{g}{k}\frac{\varrho-\varrho'}{\varrho+\varrho'}. \tag{7}$$

Присутствие верхней жидкости вызывает, таким образом, уменьшение скорости распространения волн произвольной длины в отношении $\left\{\frac{1-s}{1+s}\right\}^{1/2}$, где s обозначает отношение плотности верхней жидкости к плотности нижней. Это уменьшение скорости имеет двоякое основание: потенциальная энергия деформации поверхности раздела уменьшается в отношении $1-s$, в то время как инерция возрастает в отношении $1+s$ [1]). В качестве числового примера можно указать, что для слоя воды, лежащего над ртутью ($s^{-1}=13{,}6$), скорость волн уменьшается в отношении 0,929.

Необходимо заметить, что в этой и других подобных задачах на поверхности раздела имеет место разрывность движения. Нормальная компонента $\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$ скорости, конечно, непрерывна, но тангенциальная компонента $\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$ меняет свой знак, когда пересекается поверхность раздела; другими словами, мы имеем перед собой (§ 151) вихревой слой. Это представляет прекрасный пример для сделанного в § 17 замечания, что свободные колебания жидкости переменной плотности не должны быть обязательно свободными от вихрей.

---

[1]) Это объясняет, почему собственные периоды колебаний поверхности раздела двух жидкостей приблизительно одинаковой плотности по сравнению с периодами колебаний свободной поверхности, простирающейся аналогично, очень длинны. Этот факт был замечен Веньямином Франклином для масла и воды, см. письмо, относящееся к 1762 г. [Complete Works, London, II, 142].

Вблизи устья некоторых норвежских фиордов находится слой пресной воды над солеиой водой. Вследствие сравнительно небольшой потенциальной энергии, которая обусловлена данной деформацией поверхности раздела, на этой пограничной поверхности легко развиваются волны значительной высоты. Этой причиной объясняют ненормальное сопротивление, которое иногда испытывают суда в этих водах. См. Ekman, On Dead-Water, Scientific Results of the Norwegian North Polar Expedition, часть XV, Christiania, 1904. Укажем также на работу автора On Waves due to a Travelling Disturbance, with an application to Waves in Superposed Fluids, Phil. Mag. (6), XXXI, 3 (1916).

В действительности, если бы разрыв мог когда либо образоваться, он будет немедленно уничтожаться вязкостью, а вихревая пленка будет замещаться вихревым слоем [1]).

Если $\varrho < \varrho'$, то значение σ будет мнимым. Невозмущенная конфигурация равновесия тогда неустойчива.

Если обе жидкости заключены между двумя неподвижными горизонтальными плоскостями

$$y = -h, \quad y = h',$$

то вместо (1) мы примем

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= C \operatorname{ch} k(y+h) \cos kx e^{i\sigma t}, \\ \varphi' &= C' \operatorname{ch} k(y-h') \cos kx e^{i\sigma t}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

так как эти выражения дают на этих плоскостях соответственно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = 0.$$

Отсюда следует

$$-kC \operatorname{sh} kh = kC' \operatorname{sh} kh' = i\sigma a. \tag{9}$$

Из непрерывности давления следует

$$\varrho (i\sigma C \operatorname{ch} kh - ga) = \varrho' (i\sigma C' \operatorname{ch} kh' - ga). \tag{10}$$

Исключая C и C', получим

$$\sigma^2 = \frac{gk(\varrho - \varrho')}{\varrho \operatorname{cth} kh + \varrho' \operatorname{cth} kh'}. \tag{11}$$

Когда kh и kh' оба очень велики, то это выражение приводится к виду (6). Когда kh' велико, а kh мало, то будем иметь приближенно

$$C^2 = \frac{\sigma^2}{k^2} = \left(1 - \frac{\varrho'}{\varrho}\right) gh. \tag{12}$$

Главное влияние наличия верхней жидкости заключается в уменьшении потенциальной энергии деформации. Кинетическая энергия верхней жидкости будет малой по сравнению с кинетической энергией нижней жидкости.

Когда верхняя поверхность верхней жидкости является свободной, то мы можем написать

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= C \operatorname{ch} k(y+h) \cos kx e^{i\sigma t}, \\ \varphi' &= (A \operatorname{ch} ky + B \operatorname{sh} ky) \cos kx e^{i\sigma t}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Кинематическое условие тогда будет иметь вид

$$-kC \operatorname{sh} kh = -B = i\sigma a. \tag{14}$$

Условие непрерывности давления на пограничной поверхности будет

$$\varrho (i\sigma C \operatorname{ch} kh - ga) = \varrho' (i\sigma A - ga). \tag{15}$$

Условие постоянства давления на свободной поверхности дается формулой (8) § 227, если только после диференцирования положить $y = h'$. Таким образом мы получаем

$$\sigma^2 (A \operatorname{ch} kh' + B \operatorname{sh} kh') = gk (A \operatorname{sh} kh' + B \operatorname{ch} kh'). \tag{16}$$

---

[1]) Решение с учетом вязкости было дано Harrison, Proc. Lond. Math. Soc. (2), VI, 396 (1908).

Исключив A, B, C из (14), (15), (16), получим

$$\sigma^4(\varrho \operatorname{cth} kh \operatorname{cth} kh' + \varrho') - \sigma^2 g(\varrho(\operatorname{cth} kh' + \operatorname{cth} kh) k + (\varrho - \varrho') g k^2 = 0. \quad (17)$$

Так как это уравнение является квадратным относительно σ^2, то для каждого данного периода $\left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)$ имеются две возможные системы волн. Этого и следовало ожидать, так как система имеет при заданной длине волны две степени свободы, так что возможны два независимые друг от друга вида колебаний около положения равновесия. Для предельного случая, например, когда $\frac{\varrho'}{\varrho}$ мало, один вид состоит главным образом в колебании верхней жидкости, которое происходит почти таким образом, как если бы нижняя жидкость отвердела; другое колебание можно рассматривать как колебание нижней жидкости, которое происходит почти таким образом, как если бы поверхность раздела была свободной поверхностью.

Для отношения амплитуды на верхней свободной пограничной поверхности к амплитуде на поверхности раздела получаем

$$\frac{kc^2}{kc^2 \operatorname{ch} kh' - g \operatorname{sh} kh'}. \quad (18)$$

Из различных возможных частных случаев наиболее интересный тот, при котором kh велико, т. е. при котором глубина нижней жидкости по сравнению с длиной волны велика. Если положить $\operatorname{cth} kh = 1$, то увидим, что один корень уравнения (17) будет равен

$$\sigma^2 = gk, \quad (19)$$

т. е. в точности тому же, как в случае одной жидкости бесконечной глубины, и что отношение амплитуд будет равно $e^{kh'}$. Это есть ни более ни менее, как только частный случай общей установленной в конце § 233 теоремы; действительно, можно показать, что на поверхности раздела обеих жидкостей в этом случае скольжение уже не будет иметь места.

Второй корень уравнения (17) при том же самом предположении будет равен

$$\sigma^2 = \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho \operatorname{cth} kh' + \varrho'} gk, \quad (20)$$

и для него отношение (18) получает следующее значение:

$$-\left(\frac{\varrho}{\varrho'} - 1\right) e^{-kh'}. \quad (21)$$

Если в формулах (20) и (21) положить $kh' = \infty$, то придем к одному из прежних случаев. Если же, с другой стороны, будем считать kh' малым, то получим

$$\frac{\sigma^2}{k^2} = \left(1 - \frac{\varrho'}{\varrho}\right) gh, \quad (22)$$

и отношение амплитуд будет равно

$$-\left(\frac{\varrho}{\varrho'} - 1\right). \quad (23)$$

Эти задачи впервые были исследованы Стоксом [1]. Случай произвольно большого числа лежащих друг под другом слоев различной плотности был рассмотрен Веббом [2] и Гринхиллем [3].

§ 232. Предположим, что две жидкости с плотностями ϱ, ϱ' движутся друг над другом со скоростями U, U', параллельными оси x, причем поверхность раздела (в невозмущенном состоянии) является плоской и горизонтальной. Это есть фактически задача малых колебаний около состояния установившегося движения.

Положим

$$\varphi = -Ux + \varphi_1, \quad \varphi' = -U'x + \varphi_1', \tag{1}$$

где φ_1, φ_1' предполагаем малыми.

Скорость каждой из жидкостей на поверхности раздела может рассматриваться как составленная из скорости самой поверхности и из скорости жидкости по отношению к поверхности. Если обозначить через η ординату возмущенной поверхности, то мы найдем при рассмотрении вертикальных компонент уравнения

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + U\frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + U'\frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{\partial \varphi'}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$ [4]

в качестве кинематических условий, которые выполняются для $y = 0$.

Уравнение давления для нижней жидкости будет

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{1}{2}\left\{\left(U - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2\right\} - gy + \ldots$$

или

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + U\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - gy + \ldots, \tag{3}$$

причем мы опустили все члены, которые являются либо членами второго порядка, либо не имеют значения для рассматриваемого вопроса. Таким образом условие непрерывности давления имеет следующий вид:

$$\varrho\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + U\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - g\eta\right) = \varrho'\left(\frac{\partial \varphi_1'}{\partial t} + U'\frac{\partial \varphi_1'}{\partial x} - g\eta\right). \tag{4}$$

Мы уже видели при различных случаях, что при колебаниях около стационарного движения не обязательно должна иметь место одинаковость фаз внутри всей системы, а в рассматриваемом случае

---

[1]) Stokes, On the Theory of Oscillatory Waves, Camb. Trans, VIII (1847) [Papers, I, 212].

[2]) Webb, Math. Tripos. Papers, 1884.

[3]) Greenhill, Wave Motion in Hydrodynamics, Amer. Journ. of Math., IX (1887).

[4]) Эти уравнения представляют частные случаи общего пограничного условия (3) § 9, как легко заметить, если положить $F = y - \eta$ и пренебречь малыми членами второго порядка.

при подобном допущении невозможно удовлетворить наличным условиям. Предполагая, что глубины обеих жидкостей неограниченны, мы должны положить

$$\varphi_1 = Ce^{ky+i(\sigma t-kx)},$$
$$\varphi_1' = C'e^{-ky+i(\sigma t-kx)}, \tag{5}$$

и

$$\eta = ae^{(\sigma t-kx)}. \tag{6}$$

Условия (2) дают тогда

$$\left.\begin{aligned} i(\sigma - kU)a &= -kC, \\ i(\sigma - kU')a &= \quad kC' \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

в то время как из (4) следует

$$\varrho\{i(\sigma - kU)C - ga\} = \varrho'\{i(\sigma - kU')C' - ga\}. \tag{8}$$

Отсюда следует

$$\varrho(\sigma - kU)^2 + \varrho'(\sigma - kU')^2 = gk(\varrho - \varrho'), \tag{9}$$

или

$$\frac{\sigma}{k} = \frac{\varrho U + \varrho' U'}{\varrho + \varrho'} \pm \left\{\frac{g}{k}\frac{\varrho - \varrho'}{\varrho + \varrho'} - \frac{\varrho\varrho'}{(\varrho + \varrho')^2}(U - U')^2\right\}^{1/2}. \tag{10}$$

Первый член в правой части этого уравнения можно назвать средней скоростью обоих течений. Относительно этой средней скорости волны обладают скоростями распространения $\pm c$, которые даны формулой

$$c^2 = C_0^2 - \frac{\varrho\varrho'}{(\varrho + \varrho')^2}(U - U')^2, \tag{11}$$

где c_0 обозначает скорость волны при отсутствии течений (§ 231). Необходимо отметить, однако, что значения σ, данные формулой (9), будут мнимыми, когда

$$(U - U')^2 > \frac{g}{k}\frac{\varrho^2 - \varrho'^2}{\varrho\varrho'}. \tag{12}$$

Таким образом общая граница при достаточно малых длинах волны является неустойчивой. Это показывает, что, при отсутствии других влияний, даже при небольшом дуновении ветра на поверхности воды будет появляться рябь. В дальнейшем мы дадим более полное исследование этой проблемы, при котором будут приняты во внимание капиллярные силы, влияющие в сторону устойчивости. Если $\varrho = \varrho'$ или если $g = 0$, то плоская форма поверхности (согласно нашему теперешнему рассуждению) будет неустойчивой для всех длин волны. Это иллюстрирует положение, высказанное в § 79, относительно неустойчивости поверхностей разрыва [1]).

---

[1]) Эта неустойчивость была впервые замечена Гельмгольцем, см. примечание на стр. 38.

Случай $\varrho = \varrho'$ при $U = U'$ представляет интерес, потому что он объясняет, как развеваются паруса и флаги [1]). Удобнее упростить задачу, положив $U = U' = 0$; произвольная общая скорость в случае необходимости может быть наложена потом. При этих предположениях уравнение (8) сводится к уравнению $\sigma^2 = 0$. Благодаря двойному корню решение нужно дополнить, согласно обыкновенным методам решения диференциальных уравнений, излагаемым в учебниках. Таким путем мы получаем два независимых решения

$$\eta = ae^{ikx}, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_1' = 0, \tag{13}$$

и

$$\eta = ate^{ikx}, \quad \varphi_1 = -\frac{a}{k} e^{ky} e^{ikx}, \quad \varphi_1' = \frac{a}{k} e^{-ky} e^{ikx}. \tag{14}$$

Первое решение представляет состояние равновесия, второе решение дает систему стационарных волн, амплитуда которых растет пропорционально времени. При таком виде проблемы сначала не имеется физической поверхности раздела, но если произвести искусственно небольшой разрыв движения, например, подействовать импульсом на тонкую мембрану, мыслимую затем опять как жидкую мембрану, то разрыв сохранится, и высота желобков, как мы видели, будет непрерывно возрастать.

Представляет интерес применение того же метода к случаю струи толщины $2b$, протекающей внутри покоящейся жидкости той же плотности [2]). Выбирая начало в средней плоскости, мы принимаем для возмущенной струи $\varphi = -Ux + \varphi_0$, а для жидкости с обеих сторон $\varphi = \varphi_1$ для $y > b$ и $\varphi = \varphi_2$ для $y < -b$. Обозначим смещения по нормалям к обеим поверхностям $y = b$ и $y = -b$ соответственно через η_1 и η_2. В таком случае подойдут следующие предположения:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1 = A_1 e^{-ky} e^{i(\sigma t - kx)}, \quad && \varphi_2 = A_2 e^{ky} e^{i(\sigma t - kx)}, \\ &\eta_1 = C_1 e^{i(\sigma t - kx)}, && \eta_2 = C_2 e^{i(\sigma t - kx)}, \\ &\varphi_0 = (A_0 \operatorname{ch} ky + B_0 \operatorname{sh} ky) e^{i(\sigma t - kx)}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Очевидно, имеются два типа возмущений: при одном из них $\eta_1 = \eta_2$, а при втором $\eta_1 = -\eta_2$. В первом случае мы будем иметь $C_1 = C_2$, $A_0 = 0$, $A_2 = -A_1$. Кинематические условия (2) на поверхности $y = b$ тогда дают

$$i\sigma C_1 = kA_1 e^{-kh}, \quad i(\sigma - kU) C = -kB_0 \operatorname{ch} kh, \tag{16}$$

тогда как, если опустить влияние силы тяжести, непрерывность давления требует выполнения соотношения

$$(\sigma - kU) B_0 \operatorname{sh} kh = \sigma A_1 e^{-kh}. \tag{17}$$

Отсюда

$$(\sigma - kU)^2 \operatorname{tgh} kh + \sigma^2 = 0. \tag{18}$$

Если толщина $2b$ будет мала в сравнении с длиной волны возмущения, то приближенно будем иметь

$$\sigma = \pm ikU \sqrt{kh}, \tag{19}$$

что указывает на сильно возрастающую неустойчивость, как это в действительности часто можно наблюдать на примере струйки дыма от папиросы.

[1]) Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc. (1), X, 4 (1879) [Papers, I, 361].
[2]) Rayleigh, см. примечание выше.

В симметричном случае ($\eta_1 = -\eta_2$) вместо соотношения (18) будет иметь место соотношение

$$(\sigma - kU)^2 \operatorname{ctgh} kh + \sigma^2 = 0. \tag{20}$$

§ 233. Теорию прогрессивных волн можно также изложить в очень сжатой форме при помощи метода § 175 [1]).

Обозначая через φ, ψ функцию скоростей и функцию тока, после того как задача сведена к установившемуся движению, положим

$$\frac{\varphi + i\psi}{c} = -(x + iy) + i\alpha e^{ik(x+iy)} + i\beta e^{-ik(x+iy)};$$

откуда следует

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi}{c} &= -x - (\alpha e^{-ky} - \beta e^{ky}) \sin kx, \\ \frac{\psi}{c} &= -y + (\alpha e^{-ky} + \beta e^{ky}) \cos kx. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Эти формулы представляют равномерное течение со скоростью c, на которое наложено движение, периодическое относительно x. Мы предполагаем, что $k\alpha$ и $k\beta$ суть величины малые, другими словами, амплитуда возмущения мала сравнительно с длиной волны.

Профиль свободной поверхности должен быть линией тока. Пусть для нее будет $\psi = 0$. Ее вид определяется тогда формулой (1), и в первом приближении мы будем иметь, следовательно,

$$y = (\alpha + \beta) \cos kx. \tag{2}$$

Это уравнение показывает, что начало лежит на среднем уровне свободной поверхности. Далее, на дне ($y = -h$) мы также должны иметь $\psi = \text{const}$; это требует, чтобы

$$\alpha e^{kh} + \beta e^{-kh} = 0.$$

Уравнения (1) в таком случае представятся в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi}{c} &= -x + C \operatorname{ch} k(y+h) \sin kx, \\ \frac{\psi}{c} &= -y + C \operatorname{sh} k(y+h) \cos kx. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Формула же для давления будет

$$\begin{aligned} \frac{p}{\varrho} &= \text{const} - gy - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right\} = \\ &= \text{const} - gy - \frac{c^2}{2}\{1 - 2kC \operatorname{ch} k(y+h) \cos kx\}, \end{aligned}$$

если пренебречь k^2C^2. Так как для линии тока $\psi = 0$ приближенно имеем

$$y = C \operatorname{sh} kh \cos kx, \tag{4}$$

---

[1]) Rayleigh, см. примечание на стр. 328.

то вдоль этой линии будет

$$\frac{p}{\varrho} = \text{const} + (kc^2 \operatorname{ctgh} kh - g)\, y.$$

Условие для свободной поверхности таким образом будет выполнено, если

$$c^2 = gh \frac{\operatorname{tgh} kh}{kh}. \tag{5}$$

Это соотношение определяет длину волны $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$ возможных стационарных волн в потоке данной постоянной глубины h и данной скорости c. Легко видеть, что значение kh будет действительно или мнимо, смотря по тому, будет ли c меньше или больше чем $(gh)^{1/2}$.

Если мы сообщим всему потоку скорость c параллельно оси x, то получим прогрессивные волны на спокойной воде; уравнение (5) дает тогда формулу для скорости волны, как в § 229.

Если отношение глубины к длине волны достаточно велико, то формулы (1) при небольшой погрешности принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi}{c} &= -x + \beta e^{ky} \sin kx, \\ \frac{\psi}{c} &= -y + \beta e^{ky} \cos kx \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

и дают

$$\frac{p}{\varrho} = \text{const.} - gy - \frac{c^2}{2}\left\{1 - 2k\beta e^{ky} \cos kx + k^2\beta^2 e^{2ky}\right\}. \tag{7}$$

Пренебрегая $k^2\beta^2$, последнее уравнение можно написать в виде

$$\frac{p}{\varrho} = \text{const.} + (kc^2 - g)\, y + kc\psi. \tag{8}$$

Отсюда, если

$$c^2 = \frac{g}{k}, \tag{9}$$

давление будет постоянным не только на верхней поверхности, но также и вдоль каждой линии тока $\psi = \text{const}$ [1]). Это представляет довольно важную теорему; в самом деле она показывает, что решение, данное с помощью выражений (6) и (8), можно также применить к произвольному числу жидкостей различных плотностей, расположенных в горизонтальных слоях друг над другом, при условии, что верхняя ограничивающая поверхность есть свободная поверхность, а общая глубина бесконечна. Так как толщина слоев ничем не ограничивается, то решение пригодно и для неоднородной, несжимаемой жидкости, плотность которой непрерывно меняется с глубиной; ср. § 235.

[1]) Необходимо заметить, что это заключение, впервые высказанное Пуассоном (ср. цитату стр. 481), ограничивается случаем бесконечной глубины.

Чтобы найти скорость распространения волн на горизонтальной поверхности раздела двух в остальном неограниченных жидкостей, мы полагаем

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varphi}{c} &= -y+\beta e^{ky}\cos kx,\\ \frac{\varphi'}{c} &= -y+\beta e^{-ky}\cos kx,\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где штрихи относятся к верхней жидкости. При этих допущениях условие для безвихревого движения удовлетворяется: $\Delta\varphi=0$, и они дают постоянную скорость c на большом расстоянии ниже и выше поверхности раздела, на которой $\varphi-\varphi'=0$, и, следовательно, приближенно $y=\beta\cos kx$.

Уравнения давления будут

$$\left.\begin{aligned}\frac{p}{\varrho} &= \text{const.}-gy-\frac{c^2}{2}(1-2k\beta e^{ky}\cos kx),\\ \frac{p'}{\varrho'} &= \text{const.}-gy-\frac{c^2}{2}(1+2k\beta e^{-ky}\cos kx),\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и на поверхности раздела с обычным приближением мы получим из них

$$\left.\begin{aligned}\frac{p}{\varrho} &= \text{const.}-(g-kc^2)\,y,\\ \frac{p'}{\varrho'} &= \text{const.}-(g+kc^2)\,y.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Так как на этой поверхности $p=p'$, то получаем, как в § 231,

$$c^2=\frac{g}{k}\,\frac{\varrho-\varrho'}{\varrho+\varrho'}\,. \tag{13}$$

§ 234. В качестве следующего примера применения данного метода рассмотрим два течения, расположенные друг над другом, которые мы уже изучали прямым методом в § 232.

Предположим, что жидкости в вертикальном направлении не ограничены, и допустим

$$\left.\begin{aligned}\psi &= -U\{y-\beta e^{ky}\cos kx\},\\ \psi' &= -U'\{y-\beta e^{-ky}\cos kx\}\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

соответственно для нижней и верхней жидкости. Начало берем на среднем уровне поверхности раздела, причем последнюю мы считаем стационарной и определяемой уравнением

$$y=\beta\cos kx. \tag{2}$$

Уравнения давления дают

$$\left.\begin{aligned}\frac{p}{\varrho} &= \text{const.}-gy-\frac{1}{2}U^2(1-2k\beta e^{ky}\cos kx),\\ \frac{p'}{\varrho'} &= \text{const.}-gy-\frac{1}{2}U'^2(1+2k\beta e^{-ky}\cos kx);\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

отсюда следует для поверхности раздела

$$\left.\begin{aligned} \frac{p}{\varrho} &= \text{const.} + (kU^2 - g)\,y, \\ \frac{p'}{\varrho'} &= \text{const.} - (kU'^2 + g)\,y. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Так как на этой поверхности должно быть $p = p'$, то будем иметь

$$\varrho U^2 + \varrho' U'^2 = \frac{g}{k}(\varrho - \varrho'). \tag{5}$$

Это есть условие для стационарных волн на поверхности раздела обоих течений U и U'. Оно может быть написано в виде

$$\left(\frac{\varrho U + \varrho' U'}{\varrho + \varrho'}\right)^2 = \frac{g}{k}\,\frac{\varrho - \varrho'}{\varrho + \varrho'} - \frac{\varrho\varrho'}{(\varrho + \varrho')^2}(U - U')^2, \tag{6}$$

эквивалентность которого с (10) § 232 легко заметить.

Если оба течения будут ограничены неподвижными горизонтальными плоскостями

$$y = -h, \quad y = h',$$

то мы принимаем

$$\left.\begin{aligned} \psi &= -U\left\{y - \beta\,\frac{\operatorname{sh} k(y+h)}{\operatorname{sh} kh}\cos kx, \right. \\ \psi' &= -U'\left\{y + \beta\,\frac{\operatorname{sh} k(y-h')}{\operatorname{sh} kh'}\cos kx \right. \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

В качестве условия для стационарных волн на поверхности раздела тогда получается

$$\varrho U^2 \operatorname{ctgh} kh + \varrho' U'^2 \operatorname{ctgh} kh' = \frac{g}{k}(\varrho - \varrho'). \tag{8}$$ [1])

§ 235. Рассмотрим кратко теорию волн в *неоднородной* жидкости ради сравнения ее с случаем однородной жидкости.

В состоянии равновесия значение плотности ϱ_0 должно зависеть только от вертикальной координаты y.

Поэтому мы полагаем

$$p = p_0 + p', \quad \varrho = \varrho_0 + \varrho', \tag{1}$$

где p_0 обозначает статическое давление; уравнения движения

$$\left.\begin{aligned} \varrho\,\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \varrho\,\frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial y} - g\varrho, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + u\,\frac{\partial \varrho}{\partial x} + v\,\frac{\partial \varrho}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

[1]) Greenhill, см. выше, стр. 467.

принимают тогда вид

$$\left.\begin{aligned} \varrho_0 \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial x}, \\ \varrho_0 \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial y} = g\varrho', \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + v\frac{\partial \varrho_0}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

если опустить малые величины второго порядка. Так как жидкость несжимаема, то уравнение неразрывности сохраняет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{6}$$

и мы можем написать

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{7}$$

Исключая p' и ϱ', можно найти [1])

$$\Delta\ddot{\psi} + \frac{1}{\varrho_0}\frac{d\varrho_0}{dy}\left\{\frac{\partial\ddot{\psi}}{\partial y} - g\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\} = 0. \tag{8}$$

На свободной поверхности должно иметь место

$$\frac{Dp}{Dt} = 0.$$

или

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -v\frac{\partial p_0}{\partial y} = g\varrho_0\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{9}$$

Отсюда и из (4) следует, что на этой поверхности должно быть

$$\frac{\partial\ddot{\psi}}{\partial y} = g\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}. \tag{10}$$

Чтобы рассмотреть волновое движение, положим

$$\psi \text{ пропорционально } e^{i(\sigma t - kx)}. \tag{11}$$

Уравнение (8) принимает тогда вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - k^2\psi + \frac{1}{\varrho_0}\frac{d\varrho_0}{dy}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{gk^2}{\sigma^2}\psi\right) = 0, \tag{12}$$

а условие на поверхности будет

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{gk^2}{\sigma^2}\psi = 0. \tag{13}$$

Эти уравнения при всяком вертикальном распределении плотности будут удовлетворены допущением, что ψ пропорционально e^{ky} и при этом

$$\sigma^2 = gk. \tag{14}$$

Тогда для жидкости с бесконечной глубиной соотношение между длиной волны и периодом будет тем же самым, как и в однородной жидкости (ср. § 229), и само движение будет безвихревым.

---

[1]) Ср. Love, Wave Motion in a Heterogeneous Heavy Liquid, Proc. Lond. Math. Soc., XXII, 307 (1891).

Для дальнейших исследований необходимо сделать некоторые предположения относительно зависимости между ϱ_0 и y. Простейшее состоит в том, что

$$\varrho_0 \text{ пропорционально } e^{-\beta y}. \tag{15}$$

В этом случае уравнение (12) принимает вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - k^2\psi - \beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial k^2}{\sigma^2}\psi\right) = 0. \tag{16}$$

Решение его будет

$$\psi = (Ae^{\lambda_1 y} + Be^{\lambda_2 y})\, e^{i(\sigma t - kx)}, \tag{17}$$

где λ_1, λ_2 обозначают корни уравнения

$$\lambda^2 - \beta\lambda + \left(\frac{g\beta}{\sigma^2} - 1\right)k^2 = 0. \tag{18}$$

Мы вначале применим это к колебаниям жидкости, наполняющей замкнутый прямоугольный сосуд [1]). Величина k может быть произвольным кратным от $\frac{\pi}{l}$, где l обозначает длину. Если написать уравнения для горизонтальных границ

$$y = 0, \quad y = h,$$

то условие $\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$ дает

$$A + B = 0, \quad Ae^{\lambda_1 h} + Be^{\lambda_2 h} = 0, \tag{19}$$

откуда

$$e^{(\lambda_1 - \lambda_2)h} = 1 \text{ или } \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2is\pi}{h} \tag{20}$$

где s есть целое число. Отсюда и из (18) следует

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}\beta + \frac{is\pi}{h}, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}\beta - \frac{is\pi}{h} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{g\beta}{\sigma^2} - 1\right)k^2 = \lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{4}\beta^2 + \frac{s^2\pi^2}{h^2}. \tag{22}$$

Отсюда мы замечаем, что σ будет действительным или мнимым, т. е. конфигурация равновесия будет устойчивой или неустойчивой, смотря по тому, будет ли β положительно или отрицательно, или, что то же самое, смотря по тому, уменьшается или увеличивается плотность снизу вверх [2]).

Случай, когда жидкость (глубины h) имеет свободную поверхность, может служить в качестве иллюстрации теории тепловых сейшей в озерах [3]). Предполагая корни уравнения (18) комплексными, скажем

$$\lambda = \frac{1}{2}\beta \pm im, \tag{23}$$

---

[1]) Rayleigh, Investigation of the Character of the Equilibrium of an Incompressible Heavy Liquid of Variable Density, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XIV, 170 [Papers, II, 200]. Необходимо также указать на работу автора On Atmospheric Oscillation, Proc. Roy. Soc. LXXXIV, 566, (571) (1910), где был исследован другой закон плотности.

[2]) Волны в жидкости конечной глубины были рассмотрены Лявом, см. примечание выше; см. также Burnside, On the Small Wave-Motions of a Heterogeneous Fluid under Gravity, Proc. Lond. Math. Soc. (1). XX, 392 (1889).

[3]) Исследовались Wedderburn, Trans. R. S. Edin, XLVII, 619 (1910) и XLVIII (1912).

где

$$m^2 = \left(\frac{g\beta}{\sigma^2} - 1\right) k^2 - \frac{\beta^2}{4}; \tag{24}$$

мы будем иметь

$$\psi = Ce^{1/2\beta y} \sin my, \tag{25}$$

причем начало взято на дне. Условие (13) на поверхности дает

$$\frac{1}{2}\beta \sin mh + m \cos mh = \frac{gk^2}{\sigma^2} \sin mh. \tag{26}$$

Пользуясь равенством (24), последнее можно представить в виде

$$\operatorname{tg} mh = \beta h \frac{mh}{m^2h^2 + k^2h^2 - \frac{1}{4}\beta^2h^2}, \tag{27}$$

откуда можно определить значения mh. Они могут быть получены графически из пересечений кривых

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y = \frac{\mu x}{x^2a^2}, \tag{28}$$

где $\mu = \beta h$, $a^2 = k^2h^2 - {}^1/_4\beta^2h^2$. Интерес представляет только тот случай, когда βh будет мало. В этом случае приближенно мы имеем $mh = s\pi$ и, следовательно,

$$\sigma^2 = g\beta \frac{k^2h^2}{s^2\pi^2 + k^2h^2}. \tag{29}$$

Последнее соотношение будет совпадать с (22), если пренебречь квадратом от βh. На самом деле, из (25) вытекает, что вертикальное движение на свободной поверхности будет очень слабым. Наибольшее вертикальное возмущение будет на уровне $y = (s - {}^1/_2)\pi$.

В случае, когда корни (18) будут *действительными*, можно будет установить только небольшую поправку к формуле $\sigma^2 = gk \operatorname{tgh} kh$, которая имеет место для однородной жидкости.

§ 236. Исследования § 227—234 касаются частного типа волн, когда профиль просто гармонический и волны простираются в бесконечность по обоим направлениям. Но так как все наши уравнения (до тех пор, пока мы ограничиваемся первым приближением) являются линейными, то мы можем, согласно теореме Фурье, наложением получить решение, обусловленное произвольными начальными условиями. Так как результирующее движение, вообще говоря, будет составлено из систем волн всех возможных длин, распространяющихся в том и в другом направлении, причем всякая отдельная волна распространяется со скоростью, свойственной ее длине, то форма свободной поверхности будет постоянно меняться. Единственное исключение представляет случай, когда длина волны каждой системы заметной амплитуды велика сравнительно с глубиной жидкости. Скорость распространения, именно $\sqrt{gh}$, не зависит тогда от длины волны, так что в случае волн, которые распространяются только в *одном* направлении, профиль волны во время своего движения вперед остается неизменным (§ 170).

Мы исследуем сейчас влияние местного возмущения поверхности для случая бесконечной глубины; однако сначала следует ввести очень важное понятие „групповой скорости", которое имеет применение не только для волн жидкости, но также и для всякого волнового движения, при котором скорость распространения простой гармонической цепи меняется с длиной волны.

Часто замечали, что в случае, когда изолированная группа волн с приблизительно одинаковой длиной распространяется на сравнительно глубокой воде, скорость группы как целого меньше, чем скорость отдельных волн, ее составляющих. Если наблюдать отдельную волну, то можно заметить, что она перемещается внутри группы, постепенно уменьшая свою высоту по мере приближения ее к передней стороне группы, тогда как ее прежние места в группе занимают теперь последовательно другие волны, которые идут от задней стороны [1]) вперед.

Простейшее аналитическое представление подобной группы можно получить наложением двух систем волн с одинаковой амплитудой и с приблизительно, но не вполне, равной длиной волны. Соответствующее уравнение свободной поверхности будет иметь вид

$$\eta = a\sin(kx-\sigma t)+a\sin(k'x-\sigma t) = 2a\cos\left\{\frac{1}{2}(k-k')x - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')t\right\}\sin\left\{\frac{1}{2}(k+k')x-\frac{1}{2}(\sigma+\sigma')t\right\}. \quad (1)$$

Если k и k' приблизительно равны, то в этом выражении косинус меняется очень медленно вместе с x, так что профили отдельных волн в каждый момент времени приближенно имеют вид синусоидальных кривых, амплитуды которых колеблются между значениями 0 и $2a$. Поверхность представляет, таким образом, ряд групп волн, которые отделены равными полосами почти спокойной воды. Движение каждой группы тогда не испытывает заметного влияния от присутствия другой. Так как расстояние между серединами двух последовательных групп равно $\frac{2\pi}{k-k'}$ и так как время, которое необходимо системе, чтобы продвинуться на это расстояние, равно $\frac{2\pi}{\sigma-\sigma'}$, то групповая скорость U имеет значение $\frac{\sigma-\sigma'}{k-k'}$ или, окончательно,

$$U = \frac{d\sigma}{dk}. \quad (2)$$

Выражая это через длину волны $\lambda\left(=\frac{2\pi}{k}\right)$, мы будем иметь

$$U = \frac{d(kc)}{dk} = c-\lambda\frac{dc}{d\lambda}, \quad (3)$$

где c обозначает скорость волны.

[1]) Scott Russel, Report on Waves, Brit. Ass. Rep. 1844, стр. 369. Существует интересное письмо об этом предмете, принадлежащее Фруду; это письмо перепечатано у Stokes, Scientific Correspondence, Cambridge, 1907, II, 156.

Этот результат имеет место для любых волн, которые распространяются в однородной среде. В рассматриваемом случае имеем

$$c=\left(\frac{g}{k}\operatorname{tgh} kx\right)^{1/2}, \tag{4}$$

и, следовательно, для групповой скорости получим

$$\frac{d(kc)}{dk}=\frac{1}{2}c\left(1+\frac{2kh}{\operatorname{sh} 2kh}\right). \tag{5}$$

Отношение групповой скорости к скорости волны c возрастает, когда kh уменьшается; оно равно $^1/_2$, когда глубина велика, и равно 1, когда глубина очень мала по сравнению с длиной волны.

Повидимому, это изложение впервые было дано Стоксом [1]. Распространение на более общий род групп было проведено Рэлеем [2] и Гуйем [3].

Существует еще другой вывод формулы (3), может быть, более наглядный. В некоторой среде, такой же, как мы рассматривали, где скорость волны меняется с частотой, ограниченное начальное возмущение вызывает, вообще говоря, некоторую систему волн, в которой волны различной длины, распространяющиеся с различными скоростями, постепенно отделяются друг от друга (§ 238—239). Если мы будем рассматривать длину волны λ как функцию от x и t, то имеет место

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}+U\frac{\partial\lambda}{\partial k}=0, \tag{6}$$

так как λ вблизи некоторой геометрической точки, движущейся со скоростью U, не меняется; а это и есть в действительности определение U. Если мы, далее, вообразим другую геометрическую точку, которая движется вместе с *волнами*, то будем иметь

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}+c\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\lambda\frac{\partial c}{\partial x}=\lambda\frac{dc}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\,; \tag{7}$$

второй член и представляет как раз величину скорости, с которой два следующие друг за другом гребня волны удаляются друг от друга. Если мы соединим уравнения (6) и (7), то снова получим формулу (3) [4].

---

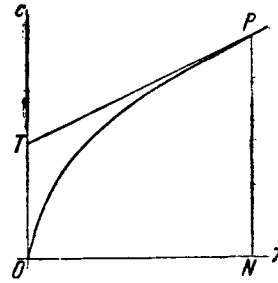
[1] Stokes, Smith's Prize Examination, 1876 [Papers, V, 362]; см. также Rayleigh, Theory of Sound, § 191.

[2] Rayleigh, Nature, XXV, 52 (1881) [Papers, I, 540].

[3] Gouy, Sur la vitesse de la lumière, Ann. de Chim. et de Phys., XVI, 262 (1889). Недавно было найдено, что до известного предела теория была уже предвидена Гамильтоном, который в 1839 г. подошел к ней с точки зрения оптики; см. Havelock, Cambridge Tracts, № 17 (1914), стр. 6.

[4] См. Lamb, On Group-Velocity, Proc. Lond. Math. Soc. (2), I, 473 (1904). Вопрос был исследован дальше Грином — G. Green, On Group-Velocity, and on the Propagation of Waves in a Dispersive Medium, Proc. R. S. Edin., XXIX, 445 (1909).

Формуле (3) можно дать простое геометрическое толкование [1]). Если начертить кривую с абсциссой λ и ординатой c, то отрезок, отсекаемый касательной на оси c, и будет изображать групповую скорость. На фиг. 52. PN представляет таким образом скорость волны для длины волны ON, а OT — групповую скорость. Заметим еще, что частота колебания представляется тангенсом угла PON.



Фиг. 52.

Для тяжелых волн на глубокой воде c пропорционально $\lambda^{1/2}$; кривая имеет формулу параболы $y^2 = 4ax$ и $OT = {}^1/_2\, PN$; это значит, что групповая скорость равна половине скорости волны.

§ 237. Групповая скорость имеет помимо геометрического еще и динамический смысл. Это было впервые показано Осборном Рейнольдсом [2]) для волн на глубокой воде при помощи подсчета энергии, которая переносится через вертикальную плоскость. При бесконечной глубине потенциал скоростей, соответствующий просто гармоническим волнам

$$\eta = a \sin k(x - ct), \tag{8}$$

будет

$$\varphi = ace^{ky} \cos k(x - ct), \tag{9}$$

в чем легко убедиться, если принять во внимание, что должно быть $\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ для $y = 0$. Если пренебречь членами второго порядка, то переменная часть давления равна $\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Таким образом работа, совершаемая в единицу времени над жидкостью, находящейся направо от плоскости x, равна

$$-\int_{-\infty}^{0} p \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dy = \varrho a^2 k^2 c^3 \sin^2 k(x - ct) \int_{-\infty}^{0} e^{2ky}\, dy =$$

$$= \frac{1}{2} g \varrho a^2 c \sin^2 k(x - ct), \tag{10}$$

так как $c^2 = \frac{g}{k}$. Среднее значение этой работы равно ${}^1/_4 g\varrho a^2 c$. Принимая во внимание сказанное в § 230, видим, что это есть в точности половина энергии тех волн, которые проходят рассматриваемую плоскость в единицу времени. В случае изолированной группы, следо-

---

[1]) Lamb. Manch. Mem., XLIV, № 6 (1900).

[2]) Osborne Reynolds, On the Rate of Progression of Groups of Waves, and the Rate at which Energy is Transmitted by Waves, Nature, XVI, 343 (1877) [Papers, I, 198].

Рейнольдс построил также модель, которая очень отчетливо показывает разницу между скоростью волны и групповой скоростью для поперечных колебаний ряда одинаковых маятников, шары которых связаны одною нитью.

вательно, приток энергии только тогда будет достаточен, когда группа передвигается вперед с половинной скоростью отдельных волн.

Подобным же образом легко показать, что для случая конечной глубины h средняя энергия, переносимая в единицу времени, будет равна [1])

$$\frac{1}{4} g\varrho a^2 c \left(1 + \frac{2kh}{\sin h\, 2kh}\right), \tag{11}$$

а это согласно (5) тождественно с

$$\frac{1}{2} g\varrho a^2 \frac{d(kc)}{dk}. \tag{12}$$

Поэтому скорость переноса энергии пропорциональна групповой скорости $\frac{d(kc)}{dk}$, выражение для которой мы нашли другим независимым путем.

Это отождествление кинематической групповой скорости, о которой шла речь в предыдущем параграфе, со скоростью переноса энергии легко распространить на любой вид волн. Оно следует, в самом деле, из теории интерференционных групп (стр. 477), которая носит общий характер. Пусть P есть середина одной из этих групп, Q — середина той покоящейся области, которая лежит в направлении распространения P; в течение промежутка времени τ, превышающего несколько периодов, но не превосходящего времени прохождения группы, середина группы продвинется в точку P', так что

$$PP' = U\tau,$$

и область между P и Q получит соответствующее количество энергии. Другой способ доказательства, который не использует понятия интерференции, был дан Рэлеем (см. выше).

С физической точки зрения групповая скорость, пожалуй, важнее, чем скорость волны. Последняя может быть больше или меньше, чем первая, и даже возможно представить такую среду, в которой обе имеют различное направление; это будет тогда обозначать, что какое-то возмущение могло бы распространяться из некоторой средней точки во внешнее пространство в виде группы, в то время как отдельные волны, из которых состоит группа, сами будут двигаться в обратном направлении, зарождаясь на передней стороне и затухая при приближении к задней стороне [2]). Необходимо, кроме того, указать на то, что даже при наиболее простых явлениях акустики и оптики скорость волны, главным образом, постольку имеет значение, поскольку она совпадает с групповой скоростью. В случае необходимости более строгого различения мы можем заимствовать из новейшей физики термин „фазовая скорость“ для обозначения того, что мы в большей своей части в настоящем руководстве именуем скоростью волны.

[1]) Rayleigh, On Progressive Waves, Proc. Lond. Math. Soc. (1), IX, 21 (1877) [Papers, I, 322]; Theory of Sound, I. Прибавление.

[2]) Lamb, Proc. Lond. Math. Soc. (2), I, 473.

§ 238. Теория волн на глубокой воде, появившихся от местного возмущения свободной поверхности, была разработана Коши[1]) и Пуассоном[2]) в двух классических работах. Долгое время эту проблему считали трудной и даже неясной, но по меньшей мере в ее двухмерном виде эту теорию можно изложить сравнительно просто.

Из §§ 40, 41 следует, что начальное состояние жидкости будет вполне определено, если известна форма границы и граничные значения нормальной компоненты $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ скорости или граничные значения потенциала скоростей φ. Задачу можно поставить таким образом двояко: можно исходить из начального возвышения свободной поверхности без начальной скорости или же можно исходить из невозмущенной (и, следовательно, горизонтальной) поверхности и некоторого начального распределения импульсивных давлений на поверхности ($\varrho\varphi_0$).

Если начало лежит на невозмущенной поверхности, а ось y направлена вертикально вверх, то типичное решение для случая начального возвышения будет

$$\eta = \cos\sigma t \cos kx, \tag{1}$$

$$\varphi = g\frac{\sin\sigma t}{\sigma} e^{ky}\cos kx, \tag{2}$$

где

$$\sigma^2 = gk, \tag{3}$$

в согласии с обыкновенной теорией „стоячих" волн просто гармонического профиля (§ 228).

Если это обобщить с помощью интеграла Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\cos k(x-\alpha)\,d\alpha, \tag{4}$$

то согласно начальным условиям

$$\eta = f(x); \quad \varphi_0 = 0, \tag{5}$$

где индекс нуль соответствует значению на поверхности $y=0$, мы будем иметь

$$\eta = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\sigma t\,dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\cos k(x-\alpha)\,d\alpha, \tag{6}$$

$$\varphi = \frac{g}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\sigma t}{\sigma} e^{ky}\,dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\cos k(x-\alpha)\,d\alpha. \tag{7}$$

---

[1]) Cauchy, см. примечание на стр. 33.

[2]) Poisson, Mémoire sur la théorie des ondes, Mém. de L'Acad. roy. des Sciences, 1 (1816).

Пусть начальное возвышение ограничено непосредственной близостью с началом, так что $f(\alpha)$ обращается в нуль для всех небесконечно малых значений α. Полагая

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\,d\alpha = 1, \tag{8}$$

будем иметь

$$\varphi = \frac{g}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \sigma t}{\sigma}\, e^{ky} \cos kx\, dk. \tag{9}$$

Используя (3), можно выражение для φ разложить в ряд

$$\varphi = \frac{gt}{\pi}\int_0^\infty \left\{1 - \frac{gt^2}{3!}k + \frac{(gt^2)^2}{5!}k^2 - \dots\right\} e^{ky}\cos kx\, dk. \tag{10}$$

Положив

$$-y = r\cos\theta, \quad x = r\sin\theta, \tag{11}$$

будем иметь для отрицательного y [1])

$$\int_0^\infty e^{ky}\cos kx k^n\, dk = \frac{n!}{r^{n+1}}\cos(n+1)\theta, \tag{12}$$

так что (10) примет вид

$$\varphi = \frac{gt}{\pi}\left\{\frac{\cos\theta}{r} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}gt^2\right)\frac{\cos 2\theta}{r^2} + \frac{1}{3\cdot 5}\left(\frac{1}{2}gt^2\right)^2\frac{\cos 3\theta}{r^3} - \dots\right\}, \tag{13}$$

что можно легко проверить. Отсюда, согласно (5) § 227 получим значение η, если положить $\theta = \pm {}^1/_2\pi$. Следовательно, для $x>0$

$$\eta = \frac{1}{\pi x}\left\{\frac{gt^2}{2x} - \frac{1}{3\cdot 5}\left(\frac{gt^2}{2x}\right)^3 + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\left(\frac{gt^2}{2x}\right)^5 - \dots\right\}. \tag{14}$$ [2])

Непосредственно видно, что каждая отдельная фаза возмущения поверхности, например, нулевое значение, максимум или минимум η, связана с определенным значением выражения $\frac{1}{2}\frac{gt^2}{x}$, и, следовательно, рассматриваемая фаза передвигается на поверхности с постоянным *ускорением*. Значение этого несколько удивительного результата сейчас обнаружится (§ 240).

---

[1]) Эту формулу можно опустить. Достаточно вычислить значение φ для точек вертикальной оси симметрии; значение для других точек можно тогда сразу написать с помощью известного свойства гармонических функций (ср. Thomson a. Tait, § 498).

[2]) Рассматривая размерности, можно предвидеть, что влияние сконцентрированного начального возвышения, площадь поперечного сечения которого равна Q представляется формулой

$$\eta = \frac{Q}{x} f\left(\frac{gt^2}{x}\right).$$

Ряд в формуле (14) по сути своей тождествен с рядом, встречающимся в теории интегралов Френеля, применяемых в теории дифракции; он обыкновенно обозначается через M [1]). В рассматриваемом виде он употребляется только тогда, когда мы ограничиваемся начальными стадиями возмущения. Когда $\frac{1}{2}\frac{gt^2}{x}$ перестает быть малым, этот ряд сходится очень медленно. Другой вид решения можно получить следующим образом.

Значение φ на поверхности, согласно (9), будет

$$\varphi_0 = \frac{g}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\sigma t}{\sigma}\cos kx\,dk =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^\infty \sin\left(\frac{\sigma^2 x}{g}+\sigma t\right)d\sigma - \int_0^\infty \sin\left(\frac{\sigma^2 x}{g}-\sigma t\right)d\sigma\right\}. \qquad (15)$$

Если положить

$$\zeta = \frac{x^{1/2}}{g^{1/2}}\left(\sigma \pm \frac{gt}{2x}\right), \qquad (16)$$

то получим

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{\sigma^2 x}{g}+\sigma t\right)d\sigma = \frac{g^{1/2}}{x^{1/2}}\int_w^\infty \sin(\zeta^2-\omega^2)\,d\zeta, \qquad (17)$$

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{\sigma^2 x}{g}-\sigma t\right)d\sigma = \frac{g^{1/2}}{x^{1/2}}\int_{-\omega}^\infty \sin(\zeta^2-\omega^2)\,d\zeta, \qquad (18)$$

где

$$\omega = \left(\frac{gt^2}{4x}\right)^{1/2}. \qquad (19)$$

Следовательно, можно написать

$$\varphi_0 = -\frac{2g^{1/2}}{\pi x^{1/2}}\int_0^\omega \sin(\zeta^2-\omega^2)\,d\zeta, \qquad (20)$$

а отсюда согласно (5) § 227 можно получить η, именно

$$\eta = \frac{g^{1/2}t}{\pi x^{3/2}}\int_0^\omega \cos(\zeta^2-\omega^2)\,d\zeta =$$

$$= \frac{g^{1/2}t}{\pi x^{3/2}}\left\{\cos\omega^2\int_0^\omega \cos\zeta^2\,d\zeta + \sin\omega^2\int_0^\omega \sin\zeta^2\,d\zeta\right\}. \qquad (21)$$

Это совпадает с результатом, полученным Пуассоном. Определенные

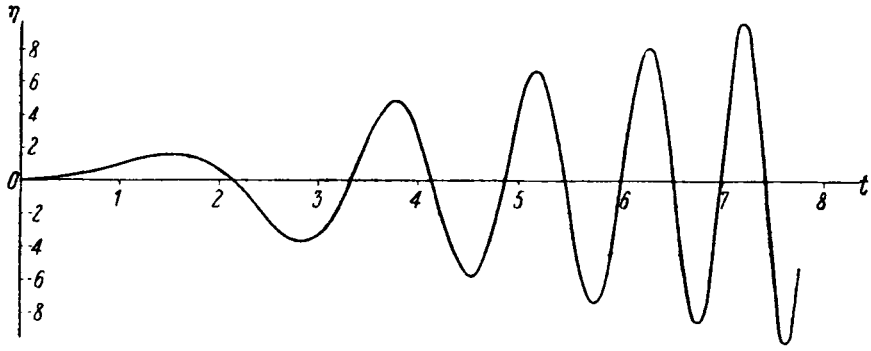
[1]) Ср. Rayleigh [Papers, III, 129].

интегралы практически являются интегралами вида Френеля[1]), и, следовательно, могут рассматриваться как известные функции.

Ломмель в своих исследованиях о явлениях дифракции[2]) дает таблицу функции, встречающейся в (14):

$$1-\frac{z^2}{3\cdot 5}+\frac{z^4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}-\ldots, \qquad (22)$$

для всех значений z между 0 и 60. Следовательно, мы в состоянии представить с большой легкостью первые девять или десять волн. Фиг. 53 показывает зависимость η от времени для определенного



Фиг. 53. За единицу горизонтального масштаба принято $\sqrt{\frac{2x}{g}}$, а вертикального $\frac{Q}{\pi x}$, где Q обозначает площадь поперечного сечения первоначально поднятой жидкости.

места. Для различных мест интервалы времени между двумя определенными фазами пропорциональны $\sqrt{x}$, в то время как соответствующие возвышения обратно пропорциональны x. Напротив, фиг. 54 показывает профиль волны в определенный момент времени; для различных моментов времени горизонтальные расстояния между соот-

[1]) В употребительном обозначении мы имеем

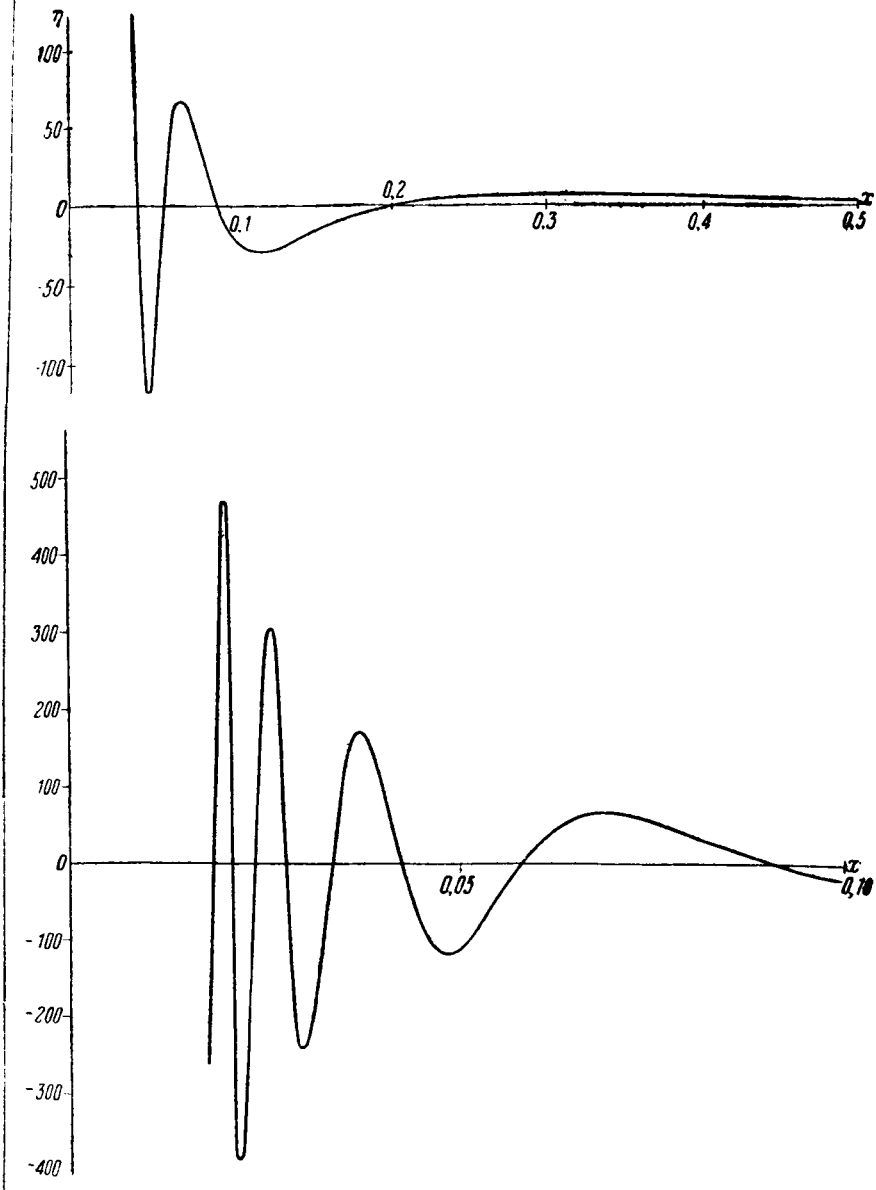
$$\int_0^\omega \cos\zeta^2\,d\zeta=\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\,C(u), \quad \int_0^\omega \sin\zeta^2\,d\zeta=\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\,S(u),$$

где

$$C(u)=\int_0^u \cos\frac{1}{2}\pi u^2\,du, \quad S(u)=\int_0^u \sin\frac{1}{2}\pi u^2\,du$$

с верхним пределом интеграла $u=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega$. Таблицы для $C(u)$ и $S(u)$, вычисленные Гильбертом и другими, можно найти во многих книгах по физической оптике. Более обстоятельные таблицы, данные Ломмелем, перепечатаны Watson, Theory of Bessel Functions, стр. 744—745.

[2]) Lommel, Die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme, Abb. d. k. Bayer Akad. d. Wiss., 2 Kl; XV (1886).



Фиг. 54. За единицу горизонтального масштаба принято $\frac{1}{2}gt^2$, а вертикального $\frac{2Q}{\pi g t^2}$.

ветствующими точками пропорциональны квадрату времени, протекав шему от начала возмущения, в то время как соответствующие возвышения обратно пропорциональны квадрату этого времени.

Если $\frac{gt^2}{4x}$ будет велико, то мы возвращаемся снова к формуле (21), которая дает приближенно

$$\eta = \frac{g^{1/2}t}{2^{3/2}\pi^{1/2}x^{3/2}}\left(\cos\frac{gt^2}{4x} + \sin\frac{gt^2}{4x}\right), \tag{23}$$

что и было установлено Пуассоном и Коши. При этом были использованы известные формулы:

$$\int_0^\infty \cos\zeta^2\,d\zeta = \int_0^\infty \sin\zeta^2\,d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \tag{24}$$

Названные авторы дали также выражения для остатка. Таким образом по существу Пуассон получает полусходящееся разложение

$$\eta = \frac{g^{1/2}t}{2^{3/2}\pi^{1/2}x^{3/2}}\left(\cos\frac{gt^2}{4x} + \sin\frac{gt^2}{4x}\right) - \\ - \frac{1}{\pi x}\left\{\frac{2x}{gt^2} - 1\cdot3\cdot5\left(\frac{2x}{gt^2}\right)^3 + 1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\left(\frac{2x}{gt^2}\right)^5 - \ldots\right\}. \tag{25}$$

Это можно вывести следующим образом. Последовательным интегрированием по частям находим

$$\int_0^\omega e^{i(\zeta^2-\omega^2)}\,d\zeta = \int_0^\infty e^{i(\zeta^2-\omega^2)}\,d\zeta - \int_\omega^\infty e^{i(\zeta^2-\omega^2)}\,d\zeta = \\ = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-i\left(\omega^2-\frac{1}{4}\pi\right)} + \frac{1}{2i\omega} + \frac{1}{(2i)^2\omega^3} + \frac{1\cdot3}{(2i)^3\omega^5} + \ldots, \tag{26}$$

а подставив действительную часть этого выражения в (21), получим формулу (25).

§ 239. Когда на горизонтальную поверхность действуют начальные *импульсы* типичное решение будет

$$\varrho\varphi = \cos\sigma t e^{ky}\cos kx, \tag{27}$$

$$\eta = -\frac{\sigma}{g\varrho}\sin\sigma t\cos kx, \tag{28}$$

где, как раньше, $\sigma^2 = gk$. Если, следовательно, начальные условия будут

$$\varrho\varphi_0 = F(x), \quad \eta = 0,$$

то мы будем иметь

$$\varphi = \frac{1}{\pi\varrho}\int_0^{\infty} \cos \sigma t e^{ky}\, dk \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\cos k(k-\alpha)\, d\alpha, \tag{30}$$

$$\eta = -\frac{1}{\pi g \varrho}\int_0^{\infty} \sigma \sin \sigma t\, dk \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\cos k(x-\alpha)\, d\alpha. \tag{31}$$

Для импульсивного давления, сконцентрированного в точке $x=0$ поверхности, положив

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\, d\alpha = 1, \tag{32}$$

получим

$$\varphi = \frac{1}{\pi\varrho}\int_0^{\infty} \cos \sigma t e^{ky} \cos kx\, dk. \tag{33}$$

Этот интеграл вычисляется подобным же образом, как (9), однако, ясно, что его можно получить также и непосредственно, если операцию $\frac{1}{g\varrho}\cdot\frac{\partial}{\partial t}$ применить к результатам § 238. Таким образом из (13) и (14) получим

$$\varphi = \frac{1}{\pi\varrho}\left\{\frac{\cos\theta}{r} - \frac{1}{2}gt^2\frac{\cos 2\theta}{r^2} + \frac{1}{1\cdot 3}\left(\frac{1}{2}gt^2\right)^2\frac{\cos 3\theta}{r^3} - \dots\right\}, \tag{34}$$

$$\eta = \frac{t}{\pi\varrho x^2}\left\{\frac{1}{1} - \frac{3}{1\cdot 3\cdot 5}\left(\frac{gt^2}{2x}\right)^2 + \frac{5}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\left(\frac{gt^2}{2x}\right)^4 - \dots\right\}. \tag{35}$$ [1]

Ряд (35) связан с функцией

$$\frac{z}{1\cdot 3} - \frac{z^3}{1\cdot 3\cdot 5\ 7} + \frac{z^5}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} - \dots, \tag{36}$$

которая была также табулирована Ломмелем. Обозначив ряды (22) и (36) через $\sum_1$ и $\sum_2$, получим

$$1 - \frac{3z^2}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{5z^4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} - \dots = \frac{1}{2}\left(1 + \sum\nolimits_1 - z\sum\nolimits_2\right), \tag{37}$$

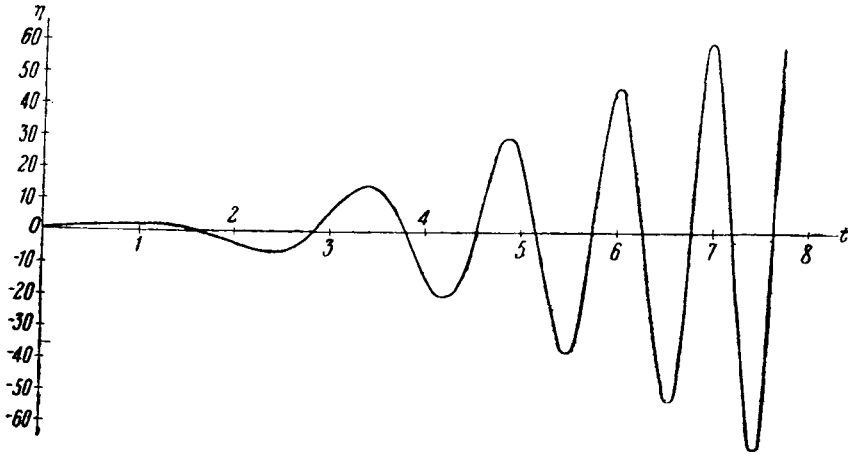
так что легко нарисовать вид нескольких первых волн.

Фиг. 55 показывает возвышения и понижения поверхности в определенном месте; для различных мест интервалы времени между двумя

[1]) С помощью теории „размерности" a priori можно усмотреть, что влияние концентрированного начального импульса P (для единицы ширины) представляется обязательно в следующем виде:

$$\eta = \frac{Pt}{\varrho x^2} f\left(\frac{gt^2}{x}\right).$$

определенными фазами относятся, как $\sqrt{x}$, так же как в предыдущем случае, соответствующие же возвышения обратно пропорциональны $x^{3/2}$. На фиг. 56, которая дает моментальное изображение профиля волны, горизонтальное расстояние между соответствующими



Фиг. 55. За единицу горизонтального масштаба принято $\sqrt{\frac{2x}{g}}$, а вертикального $\frac{P}{\pi\rho x}\sqrt{\frac{2}{gx}}$, где P — общий начальный импульс.

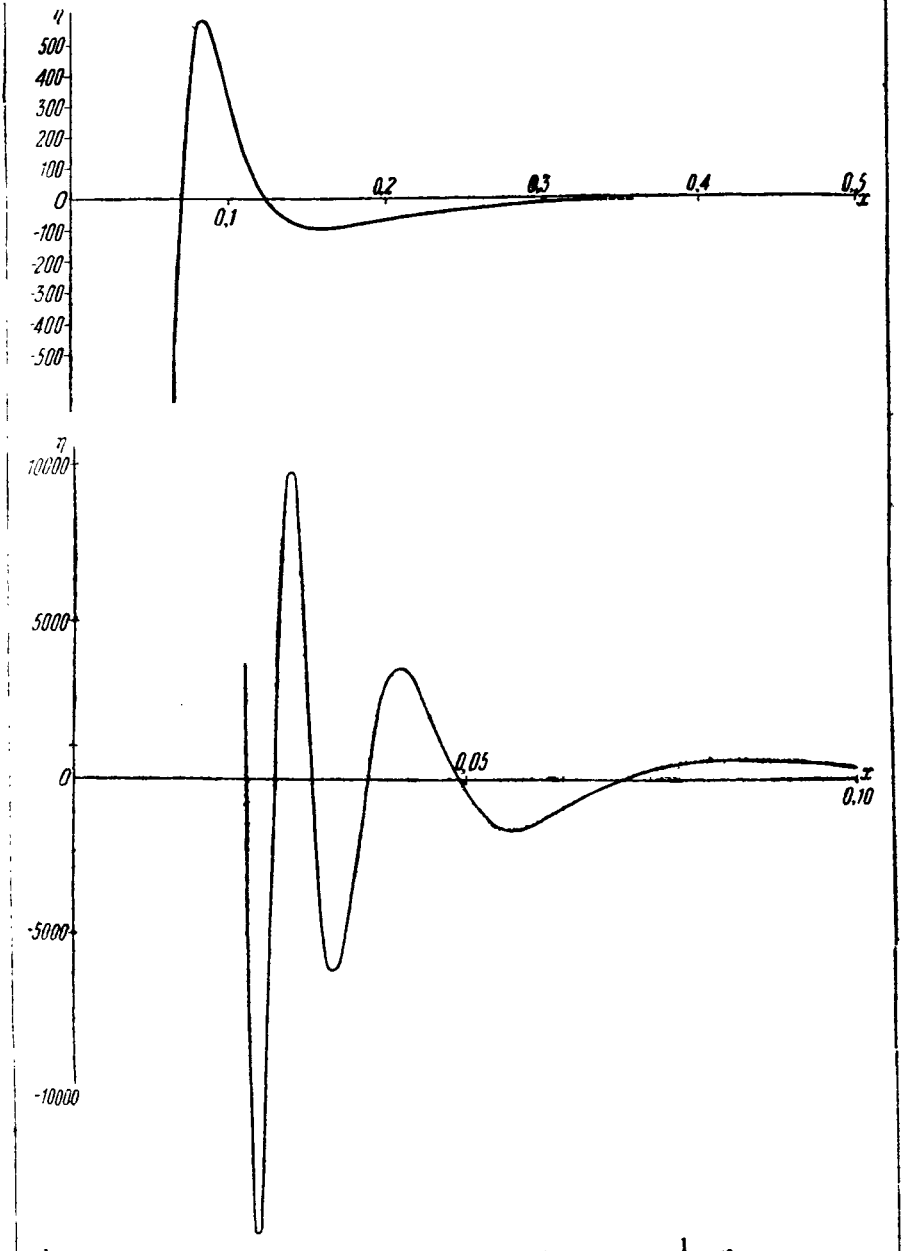
точками пропорционально квадрату времени, в то время как соответствующие ординаты обратно пропорциональны кубу времени.

Если мы к (23) применим операцию $\frac{1}{g\varrho}\frac{\partial}{\partial t}$, то для больших значений $\frac{1}{2}\frac{gt^2}{x}$ найдем приближенно

$$\eta = \frac{g^{1/2}\,t^2}{2^{5/2}\pi^{1/2}\varrho x^{5/2}}\left(\cos\frac{gt^2}{4x} - \sin\frac{gt^2}{4x}\right). \qquad (38)$$

§ 240. Остается рассмотреть значение и следствия полученных результатов. Достаточно рассмотреть главным образом случай § 238, где было принято, что первоначальное возвышение сосредоточено в одной точке поверхности в рассматриваемой плоскости.

Во всякий следующий момент t поверхность захватывается системой волн, наиболее продвинувшиеся вперед части которой изображены на фиг. 51. Для достаточно малых значений x вид волны дается формулой (23); следовательно, при приближении к началу волны беспрерывно уменьшаются в длине и увеличиваются в высоте, причем то и другое происходит беспредельно.



Фиг. 56. За единицу горизонтального масштаба принято $\frac{1}{2} gt^2$, а вертикального $\frac{4P}{\pi\varrho g^2 t^3}$. Если продолжить верхнюю кривую вправо, то она пересечет ось x в точке, которую трудно отметить при выбранном масштабе.

Когда t растет, система волн растягивается в горизонтальном направлении пропорционально квадрату времени, а вертикальные ординаты укорачиваются в той же мере, так что площадь

$$\int \eta\, dx$$

между профилем волны, осью x и ординатами, соответствующими двум определенным фазам (т. е. двум определенным значениям ω), будет постоянной [1]). Последнее утверждение следует непосредственно из вида выражений (14) или (21).

Колебания уровня в определенном месте представлены на фиг. 50. Они следуют друг за другом все быстрее с нарастающей амплитудой Для достаточно больших значений t ход этих колебаний определяется формулой (23).

В области применимости этой формулы, длины и высоты от волны к волне, в каждый определенный момент, меняются очень медленно, и если взять значительное число следующих друг за другом волн, то они могут быть приближенно представлены синусоидой Действительно, все соотношения воспроизводятся приближенно, когда $\frac{gt^2}{4x}$ возрастает на

$$\Delta \frac{gt^2}{4x} = 2\pi. \tag{39}$$

Если, следовательно, будет меняться только t и если положить $\Delta t = \tau$ то для периода колебаний получим

$$\tau = \frac{4\pi x}{gt}; \tag{40}$$

если же, наоборот, меняется только x и если положить $\Delta x = -\lambda$ где λ обозначает длину волны, то мы находим

$$\lambda = \frac{8\pi x^2}{gt^2}. \tag{41}$$

Скорость волн определяется из уравнения

$$\Delta \frac{gt^2}{4x} = 0. \tag{42}$$

Это дает согласно (41)

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2x}{t} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \tag{43}$$

как в случае бесконечно длинного ряда просто гармонических волн длины λ.

---

[1]) Эта теорема не годится для случая начального *импульса*. Соответствующее заключение в этом случае будет:

$$\int \varphi_0\, dx,$$

взятый между указанными значениями ω, постоянен. Это следует из уравнения (34).

Мы видим теперь своего рода обоснование того факта, что каждая волна постоянно ускоряется. Передние волны длиннее, чем задние, и поэтому двигаются быстрее. Вследствие этого все волны вытягиваются по длине, так что их скорости распространения беспрерывно возрастают по мере их продвижения. Однако, чем больше номер волны в их последовательности, тем меньше ее ускорение.

До сих пор мы исследовали распространение отдельных волн. Если мы теперь обратимся к *группе волн*, которая (приближенно) характеризуется данной длиной волны λ, то увидим, что скорость этой группы определяется согласно (43) формулой

$$\frac{x}{t} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \tag{44}$$

т. е. группа распространяется с постоянной скоростью, равной *половине* скорости отдельных составляющих волн. Однако группа при своем распространении не сохраняет постоянной амплитуды; легко видеть из (23), что для данного значения λ амплитуда обратно пропорциональна $\sqrt{x}$.

Таким образом область в непосредственной близости от начала можно рассматривать как своего рода источник, который посылает в каждую сторону бесконечный ряд волн с постоянно растущей амплитудой и частотой; последующее движение этих волн регулируется выше рассмотренными законами. Предположение о такой продолжающейся деятельности источника следует из нашего допущения о начальном накоплении конечного объема поднятой жидкости на бесконечно узком основании, что обусловливает неограниченный запас энергии.

Практически, однако, начальное возвышение может распределяться на некоторой полосе конечной ширины l. Полное возмущение в некоторой точке P будет тогда составляться из частей, обусловленных различными элементами $\delta\alpha$ ширины l; эти части вычисляются по предыдущим формулам, а интегрируются по ширине полосы. В результате тогда исчезают как математически бесконечные, так и другие, лишенные смысла особенности, которые присущи допущению концентрированного линейного источника. Было бы легко дать соответственные формулы, но так как они не очень удобны и, кроме того, не дают ничего, что не содержалось бы в вышеизложенном, то мы от этого откажемся. Будет поучительнее разобрать в общем виде, как можно дополнить вышеизложенные результаты.

Начальные стадии возмущения на некотором расстоянии x, сравнительно большом с l, очевидно, будут в существенном теми же самыми, как при прежнем допущении; части возмущения, зависящие от различных элементов $\alpha\delta$, будут просто взаимно усиливать друг друга, и результат можно достаточно хорошо представить с помощью (14) или (23), если мы умножим его на

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\,d\alpha,$$

т. е. на площадь поперечного сечения первоначально поднято жилкости. В частности, формула (23) в случае, когда $\frac{1}{2}\frac{gt^2}{x}$ велико, будет сохранять свою пригодность до тех пор, пока длина волны в рассматриваемой точке велика сравнительно с l, т. е., согласно (41), пока $\frac{1}{2}\frac{gt^2}{x}\frac{l}{x}$ будет мало. Но когда длина волны в точке x при возрастающем t будет сравнима с l или меньше, чем l, то различные части l нельзя более рассматривать как имеющие приблизительно одинаковые фазы, и тогда мы будем иметь явление, аналогичное „интерференции" в смысле оптики. Результат, конечно, будет зависеть от вида начального распределения значений $f(a)$ на отрезке l[1]), но ясно, что возрастание амплитуды должно когда-нибудь прекратиться, и возмущение в конце концов будет постепенно затухать.

То своеобразие, которое обычно имеют более поздние стадии, мы должны рассмотреть более углубленно, так как оно было причиной некоторых неясностей; дело идет о колебании амплитуды волны, которое легко может быть объяснено на основании принципов „интерференции". В качестве примера достаточно рассмотреть случай, когда начальное возвышение равномерно распределено по ширине l и когда рассматриваемая стадия возмущения является настолько поздней, что значение λ вблизи рассматриваемой точки x становится малой сравнительно с l. Мы имеем тогда, очевидно, ряд групп волн, разделенных полосами сравнительно спокойной воды, причем середины этих полос имеют место там, где l есть кратное от λ, т. е. $l = n\lambda$. Если мы сделаем подстановку в (41), то найдем

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gl}{2n\pi}}. \tag{45}$$

т. е. эти полосы движутся вперед с постоянной скоростью, которая в действительности и есть групповая скорость, соответствующая средней длине волны в окрестности рассматриваемого места[2]):

---

[1]) Ср. Burnside, On Deep-water Waves resulting from a Limited Original Disturbance, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XX, 22 (1888).

[2]) На это колебание впервые указал Пуассон, именно в частном случае, когда начальное возвышение (или быстрое опускание) имеет параболическое очертание.

Вышеизложенные исследования имеют значение, выходящее за пределы рассматриваемого предмета, так как они показывают, насколько сильно действия одного начального импульса в рассеивающей среде (т. е. в среде, в которой скорость волны зависит от длины волны) отличаются от тех, которые совершаются при звуковых волнах или при колебаниях твердого упругого тела. Рассмотренное выше исследование с некоторыми изменениями заимствовано из работы Lamb, On Deep-water Waves, Proc. Lond. Math. Soc. (2), II, 371 (1904), где также исследуется действие локального периодического давления.

Решение, данное в § 238, годное для идеального случая, ничего не говорит относительно того, что происходит в самом начале координат. Чтобы разрешить этот вопрос для какого-либо частного случая, предположим, что

$$f(a) = \frac{Q}{\pi} \frac{b}{b^2 + a^2}, \tag{46}$$

тогда по формуле (7)

$$\varphi = \frac{gQ}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{k(y-b)} \cos kx \, dk. \tag{47}$$

Возвышение поверхности в начале будет выражаться формулой

$$\eta = \frac{Q}{\pi} \int_0^\infty \cos \sigma t e^{-kb} \, dk = \frac{2Q}{\pi g} \int_0^\infty \cos \sigma t e^{-\frac{\sigma^2 b}{g}} \sigma \, d\sigma =$$

$$= \frac{2Q}{\pi g} \frac{d}{dt} \int_0^\infty \sin \sigma t e^{-\frac{\sigma^2 b}{g}} d\sigma. \tag{48}$$

По известной формуле имеем [1])

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2\beta x \, dx = e^{-\beta^2} \int_0^\beta e^{x^2} dx. \tag{49}$$

Если мы положим

$$\omega^2 = \frac{gt^2}{4b}, \tag{50}$$

то получим

$$\eta = \frac{Q}{\pi b} \frac{d}{d\omega} e^{-\omega^2} \int_0^\omega e^{x^2} dx = \frac{Q}{\pi b} \left(1 - 2\omega e^{-\omega^2} \int_0^\omega e^{x^2} \, dx\right). \tag{51}$$

Отсюда следует

$$\frac{d}{d\omega} (\eta e^{\omega^2}) = -\frac{2Q}{\pi b} \int_0^\omega e^{x^2} dx, \tag{52}$$

а это показывает, что ηe^{ω^2} с возрастанием t постоянно убывает. Таким образом η может менять знак только один раз. Вид интегралов в (48) показывает, что η в конце концов стремится к пределу нуль, и можно показать, что главный член его асимптотического значения равен $-\frac{2Q}{\pi g t^2}$ [2]).

---

[1]) Эта формула получается как побочный результат при вычислении интеграла

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2\beta x \, dx$$

с помощью интегрирования по контуру.

[2]) Определенный интеграл в уравнении (52) табулирован Dawson. Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXIX, 519 (1898), а функция в уравнении (49) табулирована Terazawa, Science Reports of the Univ. of Tokio, VI, 171 (1917).

В вышеизложенных задачах следует отметить то обстоятельство, что возмущение *мгновенно* распространяется от начала на любое расстояние, как бы велико оно ни было. Аналитически это объясняется тем, что мы имеем дело с совокупностью волн всех возможных длин, а для бесконечных длин скорость волны бесконечно велика. Однако Рэлеем [1]) было показано, что *мгновенный* характер дальнейшего продвижения сохраняется и в воде конечной глубины, несмотря на то, что в этом случае скорость волны имеет верхний предел. Физическое основание этой особенности состоит в несжимаемости рассматриваемой жидкости, так что изменения давления распространяются с бесконечной скоростью (ср. § 20). Если в вычислениях принять во внимание сжимаемость, то протекает конечный, хотя, быть может, и очень малый, промежуток времени, прежде чем возмущение появится в какой-либо другой точке [2]).

§ 241. Обстоятельность, с которой мы провели вышеизложенные исследования, оправдывается их историческим интересом и тем фактом, что вопрос в них шел об одной из немногих вполне разрешаемых проблем. Однако Кельвин показал, что можно получить приближенное представление о наиболее интересных особенностях этого явления более простым способом, который, помимо того, имеет достаточно общее применение [3]).

Метод основывается на приближенном вычислении интегралов типа

$$u = \int_a^b \varphi(x)\, e^{if(x)}\, dx. \tag{1}$$

Предполагается, что тригонометрическая функция в промежутке интегрирования имеет большое число периодов, в то время как $\varphi(x)$ меняется сравнительно медленно, или, более точно, предполагается, что когда $f(x)$ меняется на 2π, то $\varphi(x)$ меняется только на малую дробь своего значения. При этих условиях различные элементы интеграла по большей части будут взаимно уничтожаться за исключением элементов вблизи тех значений x, — если таковые имеются, — для которых $f(x)$ имеет стационарное значение. Полагая $x = \alpha + \xi$, где α есть значение x внутри области интегрирования, для которой $f'(\alpha) = 0$, мы для малых значений ξ получим приближенно

$$f(x) = f(\alpha) + \tfrac{1}{2}\xi^2 f''(\alpha). \tag{2}$$

---

[1]) Rayleigh, On the Instantaneous Propagation of Disturbance in a Dispersive Medium..., Phil. Mag. (6), XVIII, 1 (1909) [Papers, V, 514]; см. также Pidduck, On the Propagation of a Disturbance in a Fluid under Gravity, Proc. Roy. Soc. A, LXXXIII, 347 (1910).

[2]) Pidduck, The Wave-Problem of Cauchy and Poisson for Finite Depth and slightly Compressible Fluid, Proc. Roy Soc A, LXXXVI, 396 (1912).

[3]) W. Thomson, On the Waves produced by a Single Impulse in Water of any Depth, or in a Dispersive Medium, Proc. R. S., XLII, (80) (1887) [Papers, IV, 303]. Способ использовать интегралы типа (1) был, однако, предложен еще Стоксом в его работе Stokes, On the Numerical Calculation of a Class of Definite Integrals and Infinite Series, Camb. Trans, IX (1850) [Papers, II, 341, примечание].

Главная часть интеграла, соответствующая значениям x вблизи α, будет равна, следовательно, приближенно

$$\varphi(\alpha)\, e^{if(\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}if''(\alpha)\xi^2} d\xi; \tag{3}$$

расширение пределов до пределов от $-\infty$ до $+\infty$ вследствие колебания подинтегральной функции не повлечет заметной ошибки. Мы имеем теперь согласно известной формуле (24) § 238

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm im^2\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{m}\,\frac{1 \pm i}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{m} e^{\pm \frac{1}{4} i\pi}, \tag{4}$$

и, следовательно, формула (3) напишется

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\varphi(\alpha)}{\sqrt{\frac{1}{2}\left|f''(\alpha)\right|}}\, e^{i\left\{f(\alpha) \pm \frac{1}{4}\pi\right\}}; \tag{5}$$

в показателе надо взять верхний или нижний знак, смотря по тому, будет ли $f''(\alpha)$ положительно или отрицательно.

Если α совпадает с одним из пределов интегрирования в формуле (1), то пределы в (3) нужно изменить на 0 и ∞ или $-\infty$ и 0 и результат (5) разделить пополам.

Если мы будем продолжать приближения в формуле (2), то получим следующий член в виде $\frac{1}{6}\xi^3 f'''(\alpha)$. Предыдущий метод таким образом только тогда будет законен, когда $\xi \frac{f'''(\alpha)}{f''(\alpha)}$ будет мало, и даже тогда, когда $\xi^2 f''(\alpha)$ есть небольшое кратное от 2π. Этого требует малость отношения

$$\frac{f'''(\alpha)}{\left\{|f''(\alpha)|\right\}^{3/2}}.$$

Предположим теперь, что в некоторой произвольной среде начальное, состоящее из некоторого импульса или из некоторого смещения, возмущение, по величине пропорциональное $\cos kx$ на единицу длины, производит колебание типа

$$\eta = \varphi(k) \cos kx e^{i\sigma t}; \tag{6}$$

σ обозначает здесь некоторую функцию от k, определенную согласно теории свободных волн. Влияние начального единичного возмущения, концентрированного на некоторой линии, определится формулой Фурье

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \varphi(k)\, e^{i(\sigma t - kx)} dk + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \varphi(k)\, e^{i(\sigma t + kx)} dk; \tag{7}$$

само собой понятно, что в конце вычислений мы должны оставить только действительную часть выражения (7).

Оба члена в правой части (7) представляют результат наложения движений при распространении ряда просто гармонических волн всех возможных длин как в положительном, так и отрицательном направлении оси x. Если мы, используя симметрию, ограничим наше внимание областью, лежащей направо от начала, то, как правило [1]), только одна показательная функция в первом интеграле допускает стационарное значение (или значения), и именно тогда, когда

$$t\frac{d\sigma}{dk}=x. \tag{8}$$

Это уравнение определяет k и, следовательно, σ, как функцию от x и t, и мы находим тогда в согласии с (5)

$$\eta=-\frac{\varphi(k)}{\sqrt{\left|2\pi t\frac{d^2\sigma}{dk^2}\right|}}\cos\left(\sigma t-kx\pm\frac{1}{4}\pi\right); \tag{9}$$

знак перед $^1/_4\pi$ совпадает со знаком перед $\frac{d^2\sigma}{dk^2}$. Приближение предполагает малость отношения

$$\frac{d^3\sigma}{dk^3}:\sqrt{t\left|\frac{d^2\sigma}{dk^2}\right|^3}. \tag{10}$$

Так как согласно (8) имеем

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\sigma t-kx)&=\left(t\frac{d\sigma}{dk}-x\right)\frac{\partial k}{\partial x}-k=-k,\\ \frac{\partial}{\partial t}(\sigma t-kx)&=\left(t\frac{d\sigma}{dk}-x\right)\frac{\partial k}{\partial t}+\sigma=\sigma,\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

то для длины волны и для периода вблизи точки x в момент t мы получим соответственно $\frac{2\pi}{k}$ и $\frac{2\pi}{\sigma}$. Соотношение (8) показывает, что длина волны такова, что соответствующая *групповая* скорость (§ 236) имеет значение $\frac{x}{t}$.

Вышеизложенный процесс и результаты можно иллюстрировать различными графическими построениями [2]). Легкое изменение фиг. 52 представляет с некоторой точки зрения наиболее простое построение. Мы строим (фиг. 57) кривую с абсциссой λ и ординатой ct, где t обозначает время, прошедшее от начала возмущения. Чтобы уяснить природу системы волн вблизи какой-нибудь точки x, нанесем отрезок $OQ=x$ на ось ординат. Если PN есть ордината, соответствующая некоторой произвольной абсциссе λ, то фаза возмущения в x, происходящая от элементарного ряда волн с длиной λ, будет определяться углом наклона прямой QP; в самом деле, проведя QR параллельно ON, будем иметь

$$\frac{PR}{QR}=\frac{PN-OQ}{ON}=\frac{ct-x}{\lambda}=\frac{\sigma t-kx}{2\pi}. \tag{12}$$

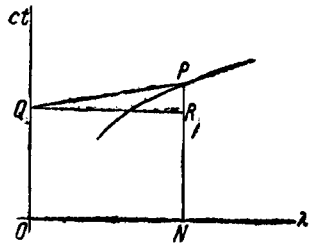
---

[1]) Если групповая скорость будет отрицательной, как это и было в некоторых искусственных случаях § 237, то важнейшим будет второй интеграл.

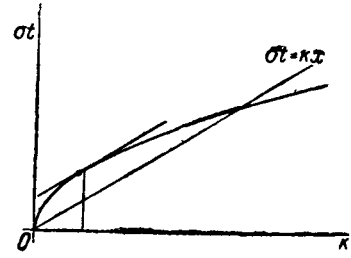
[2]) Lamb, Proc. of the 5 the Intern. Congress of Mathematicians, Cambridge, 1912, том II, стр. 281.

Фаза таким образом будет стационарной, если QP есть касательная к кривой; преобладающие длины волн в точке x даются абсциссами точек, в которых различные возможные касательные, проведенные из Q, касаются кривой. Для этих точек характерно что в них групповая скорость имеет заданное значение $\frac{x}{t}$.

Вообразив точку Q двигающейся по прямой OQ, мы получим картину распределения длин волн в момент t, для которого кривая была начерчена. Если мы будем следить за изменениями, которые происходят с течением *времени* в некоторой данной точке x, то мы можем считать меняющимися ординаты, соответственно различным временам, или же мы можем представить, что точка Q приближается к точке O таким образом, что OQ изменяется обратно пропорционально времени.



Фиг. 57.



Фиг. 58.

Только что проведенное построение имеет тот недостаток, что оно не дает никаких указаний относительно амплитуд в различных частях системы волн. Чтобы получить эти указания, начертим кривую, которая представляет зависимость между σt как ординаты и k как абсциссы (фиг. 58). Если мы, начертим прямую с наклоном x, проходящую через начало, то фаза $\sigma t - kx$ происходящая от частного элементарного ряда волн, будет представляться разностью ординат кривой и прямой. Эта разность будет стационарной, когда касательная к кривой параллельна прямой, т. е. когда $t\frac{d\sigma}{dk} = x$, как это мы уже установили. Далее ясно, что разность фаз для элементарных рядов, длины волн которых мало различны, в конце концов будет пропорциональна квадрату приращения k. Ясно также, что ряд значений k, для которых фазы мало отличаются друг от друга, будет тем больше, и следовательно, получающееся возмущение будет тем интенсивнее, чем больше будет радиус кривизны кривой. Это объясняет появление величины $t\frac{d^2\sigma}{dk^2}$ в знаменателе формулы (9).

В гидродинамической задаче § 238 мы имеем [1])

$$\varphi(k) = 1, \quad \sigma^2 = gk, \tag{13}$$

[1]) Трудность доказательства сходимости в этом случае отпадает, если мы заметим, что по формуле (9) § 238

$$\eta = -\frac{1}{g}\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{ky} \cos \sigma t \cos kx \, dk,$$

где y перед переходом к пределу является отрицательным

откуда получается

$$\frac{d\sigma}{dk} = \frac{1}{2} g^{1/2} k^{-1/2}, \quad \frac{d^2\sigma}{dk^2} = -\frac{1}{4} g^{1/2} k^{-3/2}, \quad \frac{d^3\sigma}{dk^3} = \frac{3}{8} g^{1/2} k^{-5/2}. \tag{14}$$

Отсюда и из (8) следует

$$k = \frac{gt^2}{4x^2}, \quad \sigma = \frac{gt}{2x}, \tag{15}$$

и, следовательно,

$$\eta = \frac{g^{1/2} t}{\sqrt{2\pi} x^{3/2}} e^{i\left(\frac{gt^2}{4x} - \frac{1}{4}\pi\right)},$$

или, если отбросить мнимую часть,

$$\eta = \frac{g^{1/2} t}{(2\pi)^{1/2} x^{3/2}} \cos\left(\frac{gt^2}{4x} - \frac{1}{4}\pi\right). \tag{16}$$

Определив отношение (10), мы видим, что оно есть величина порядка $\left(\frac{2x}{gt^2}\right)^{1/2}$, следовательно, приближение годится только для тех времен и мест, для которых $^1/_2\, gt^2$ велико сравнительно с x.

Эти результаты согласуются с более полными исследованиями § 238. Случай § 239 трактуется подобным же образом.

Из (16) или из приведенного выше геометрического построения (причем кривая здесь есть парабола, как в § 236) следует, что при распространении волн длина волны в некоторый произвольный момент непрерывно уменьшается при переходе от передней стороны к задней и что волны, проходящие через произвольно заданную точку, имеют постоянно убывающие длины [1]).

§ 242. Теперь мы можем вычислить действие произвольного, но установившегося давления, приложенного к поверхности некоторого потока. Мы рассмотрим только состояние стационарного движения, которое наступает в конце концов под влиянием сил трения, как бы малы они ни были [2]). Сначала мы рассмотрим вопрос прямо; более краткий способ получить главнейшие результаты изложен в § 248.

Необходимо отметить, что при отсутствии сил трения задача до известной степени является неопределенной, так как мы можем всегда

---

[1]) Дальнейшие применения см. Havelock, The Propagation of Waves in Dispersive Media..., Proc. Roy. Soc., LXXI, 398 (1908).

[2]) Первые шаги данного исследования заимствованы из работы Rayleigh, The Form of Standing Waves on the Surface of Running Water, Proc. Lond. Math. Soc., XV, 69 (1883) [Papers, II, 258], но упрощены тем, что пока не принята во внимание капиллярность. Встречающиеся определенные интегралы рассматриваются, однако, в несколько общем виде, и обсуждение результатов поэтому проводится с различных точек зрения. Эта задача еще рассматривалась Поповым, Solution d'un problème sur les ondes permanentes, Liouville (2), III, 251 (1858); его анализ безупречен, только не отмечена неопределенность задачи (при отсутствии сил трения), и результаты поэтому не доводятся до практического толкования.

наложить бесконечный ряд свободных волн, имеющих произвольную амплитуду, и длина которых выбрана таким образом, что их скорость по отношению к воде равна и противоположна скорости потока, так что они сохраняют в пространстве неизменное положение. Чтобы избежать этой неопределенности, мы воспользуемся приемом, принадлежащим Рэлею, и предположим, что отклонения частицы жидкости из состояния установившегося потока тормозятся силой, пропорциональной относительной скорости.

Этот закон трения совершенно не претендует быть вполне тождественным с действительностью, но он достаточен для того, чтобы грубо охарактеризовать влияние малых сил трения, и имеет математическое преимущество, так как не нарушает безвихревого характера движения. Действительно, подставив в уравнение § 6

$$\left.\begin{aligned} X &= -\mu(u-c), \\ Y &= -g-\mu v, \\ Z &= -\mu w, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где c обозначает скорость потока в направлении положительной оси x, и применяя метод § 33 к замкнутой кривой, получим

$$\left(\frac{D}{Dt}+\mu\right)\int(u\,dx+v\,dy+w\,dz)=0, \tag{2}$$

откуда следует

$$\int(u\,dx+v\,dy+w\,dz)=Ce^{-\mu t}. \tag{3}$$

Если, следовательно, циркуляция по некоторой замкнутой кривой, движущейся вместе с жидкостью, сделается хоть раз равной нулю, то она всегда будет равна нулю. Мы имеем теперь

$$\frac{p}{\varrho}=\text{const.}-gy+\mu(cx+\varphi)-\frac{1}{2}q^2, \tag{4}$$

а это есть тот вид, который принимает формула (2) § 21, если положить

$$\Omega=gy-\mu(cx+\varphi) \tag{5}$$

в согласии с формулой (1).

Чтобы вычислить действие простого гармонического распределения давлений, положим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi}{c} &= -x+\beta e^{ky}\sin kx, \\ \frac{\psi}{c} &= -y+\beta e^{ky}\cos kx. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Если пренебречь квадратом $k\beta$, то уравнение (4) будет иметь вид

$$\frac{p}{\varrho}=\ldots-gy+\beta e^{ky}(kc^2\cos kx+\mu c\sin kx). \tag{7}$$

Следовательно, на поверхности ($\psi = 0$) переменная часть давления будет равна

$$p_0 = \varrho\beta \{ (kc^2 - g) \cos kx + \mu c \sin kx \}, \tag{8}$$

а это равно действительной части от $\varrho\beta (kc^2 - g - i\mu c) e^{ikx}$. Полагая коэфициент при e^{ikx} равным C, можно сказать, что давлению

$$p_0 = Ce^{ikx} \tag{9}$$

соответствует форма поверхности

$$g\varrho y = \frac{\varkappa}{k - \varkappa - i\mu_1} Ce^{ikx}, \tag{10}$$

где для краткости мы полагаем $\frac{\mu}{c} = \mu_1$ и $\varkappa = \frac{g}{c^2}$; следовательно, $\frac{2\pi}{\varkappa}$ есть длина тех свободных волн, которые могут удержаться на месте, противостоя течению.

Если взять действительные части, то мы найдем, что давление на поверхности

$$p_0 = C \cos kx \tag{11}$$

производит форму волны

$$g\varrho y = \varkappa C \frac{(k - \varkappa) \cos kx - \mu_1 \sin kx}{(k - \varkappa)^2 + \mu_1^2}. \tag{12}$$

Это показывает, что для малого μ в местах наибольшего давления на поверхности находятся гребни волн, а в местах наименьшего давления — углубления, если длина волны меньше чем $\frac{2\pi}{\varkappa}$; в противоположном случае будет иметь место обратное. Это находится в согласии с общим принципом. Если всему потоку сообщить скорость $-c$, параллельную оси x, то результат, — как видно, если в (12) положить $\mu_1 = 0$, — есть частный случай (14) § 168.

В критическом случае $k = \varkappa$ будем иметь

$$g\varrho y = -\frac{\varkappa C}{\mu_1} \sin kx, \tag{13}$$

а это показывает, что избыток давления находится теперь на тех склонах волн, которые идут вниз по течению. Это грубым образом объясняет, как при помощи подходящим образом выбранного распределения давления на склонах система прогрессивных волн может сохраняться, противостоя взятым нами силам трения.

§ 243. Решение, выраженное формулой (12), можно обобщить, во-первых, прибавлением произвольной постоянной к x и, во-вторых, суммированием по k. Таким образом мы можем представить действие любого распределения давления

$$p_0 = f(x) \tag{14}$$

с помощью теоремы Фурье [§ 238 (4)].

Предположим, что $f(x)$ обращается в нуль для всех не бесконечно малых значений x, а для бесконечно малых значений обращается в бесконечность таким образом, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = P; \tag{15}$$

это дает нам действие полного давления P, которое концентрируется на бесконечно малую полосу поверхности около начала. Заменяя C в уравнении (12) через $\frac{P}{\pi}\delta k$ и интегрируя по k между пределами 0 и ∞, получим

$$g\varrho y = \frac{\varkappa P}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{(k-\varkappa)\cos kx - \mu_1 \sin kx}{(k-\varkappa)^2+\mu_1^2}\,dk. \tag{16}$$

Если положить $\zeta = k + im$, где k и m обозначают прямоугольные координаты переменной точки на плоскости, то свойства выражения (16) содержатся в свойствах комплексного интеграла

$$\int \frac{e^{ix\zeta}}{\zeta - c}\,d\zeta. \tag{17}$$

Как известно, этот интеграл обращается в нуль, если интегрировать по контуру произвольной области, не заключающей особой точки ($\zeta = c$). В рассматриваемом случае $c = \varkappa + i\mu_1$, где $\varkappa$ и μ_1 оба положительны.

Предположим, что x положительно, и применим вышеуказанную теорему к области, которая ограничена снаружи прямой $m = 0$ и бесконечно большим полукругом, имеющим центр в начале и для которого $m > 0$, а изнутри малым кругом вокруг точки $(\varkappa, \mu_1)$. Интеграл, взятый по бесконечно большому полукругу, очевидно, исчезает, и легко показать, положив $\zeta - c = re^{i\theta}$, что интеграл, взятый по малому кругу, равен

$$-2\pi i e^{i(\varkappa + i\mu_1)x},$$

причем направление интегрирования выбрано в согласии с § 32. Таким образом мы получаем

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ikx}}{k-(\varkappa+i\mu_1)}\,dk + \int_0^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k-(\varkappa+i\mu_1)}\,dk - 2\pi i e^{i(\varkappa+i\mu_1)x} = 0,$$

а это равносильно

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k-(\varkappa+i\mu_1)}\,dk = 2\pi i e^{i(\varkappa+i\mu_1)x} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k+(\varkappa+i\mu_1)}\,dk. \tag{18}$$

Если же x отрицательно, то мы можем интеграл (17) взять вдоль замкнутой кривой, образованной прямой $m = 0$ и бесконечно большим полукругом, лежащим на той стороне, для которой $m < 0$. Это дает такой результат, как раньше, с той разницей, что теперь исчезает член, зависящий от особой

точки, так как эта точка лежит вне контура. Таким образом для отрицательного x получается

$$\int_0^\infty \frac{e^{ikx}}{k-(\varkappa+i\mu_1)}\,dk = \int_0^\infty \frac{e^{-ikx}}{k+(\varkappa+i\mu_1)}\,dk. \tag{19}$$

Другая форма последнего члена формулы (18) получается, если интегрировать вдоль замкнутой кривой, которая образоваиа из отрицательной части оси k, положительной части оси m и бесконечно большой дуги четверти круга. Таким образом мы иаходим

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ikx}}{k-(\varkappa+i\mu_1)}\,dk + \int_0^\infty \frac{e^{-mx}}{im-(\varkappa+i\mu_1)}\,i\,dm = 0,$$

а это равносильно

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ikx}}{k+(\varkappa+i\mu_1)}\,dk = \int_0^\infty \frac{e^{-mx}}{m-\mu_1+i\varkappa}\,dm. \tag{20}$$

Это годится для положительного x. Для отрицательного x мы должны взять в качестве пути интегрирования отрицательные части осей k и m и бесконечно большую дугу четверти круга. Это дает

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ikx}}{k+(\varkappa+i\mu_1)}\,dk = \int_0^\infty \frac{e^{mx}}{m+\mu_1-i\varkappa}\,dm, \tag{21}$$

что является преобразованием правой части (19).

При этих выводах μ_1 было положительно. Соответствующие результаты для интеграла

$$\int \frac{e^{ix\zeta}}{\zeta-(\varkappa-i\mu_1)}\,d\zeta \tag{22}$$

для наших настоящих целей не нужны, однако мы их дадим, чтобы иметь возможность ими пользоваться впоследствии. Для положительного x мы находим

$$\int_0^\infty \frac{e^{ikx}}{k-(\varkappa-i\mu_1)}\,dk = \int_0^\infty \frac{e^{-ikx}}{k+(\varkappa-i\mu_1)}\,dk = \int_0^\infty \frac{e^{-mx}}{m+\mu_1+i\varkappa}\,dm, \tag{23}$$

а для отрицательного x

$$\int_0^\infty \frac{e^{ikx}}{k-(\varkappa-i\mu_1)}\,dk = -2\pi i e^{i(\varkappa-i\mu_1)x} + \int_0^\infty \frac{e^{-ikx}}{k+(\varkappa-i\mu_1)}\,dk =$$

$$= -2\pi i e^{i(\varkappa-i\mu_1)x} + \int_0^\infty \frac{e^{mx}}{m-\mu_1-i\varkappa}\,dm; \tag{24}$$

поверку мы предоставляем читателю [1]).

[1]) Другую трактовку этих интегралов можно найти у Dirichlet, Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen (изд. Arendt), Braunschweig, 1904, стр. 170.

Если взять действительные части формул (18), (20), а также (19), (21), то получим следующие результаты.

Формула (16) для положительного x равносильна выражению

$$\frac{\pi g\varrho}{\varkappa P}\,y = -2\pi e^{-\mu_1 x}\sin\varkappa x + \int_0^\infty \frac{(k+\varkappa)\cos kx - \mu_1 \sin kx}{(k+\varkappa)^2+\mu_1^2}\,dk =$$

$$= -2\pi e^{-\mu_1 x}\sin\varkappa x + \int_0^\infty \frac{(m-\mu_1)\,e^{-mx}}{(m-\mu_1)^2+\varkappa^2}\,dm, \tag{25}$$

а для отрицательного x

$$\frac{\pi g\varrho}{\varkappa P}\,y = \int_0^\infty \frac{(m+\mu_1)\,e^{mx}\,dm}{(m+\mu_1)^2+\varkappa^2}. \tag{26}$$

Истолкование этих результатов достаточно простое. Первый член в формуле (25) представляет ряд просто гармонических волн, простирающихся от начала в направлении течения; длина волны равна $\frac{2\pi c^2}{g}$, а амплитуды убывают постепенно по закону $e^{-\mu_1 x}$. Дополнительная часть деформации свободной поверхности, которая выражается определенными интегралами в формулах (25) и (26), будучи для малых значений x очень большой, очень быстро убывает по мере возрастания абсолютного значения x, как бы ни был мал коэфициент трения μ_1.

Если μ_1 бесконечно мало, то наши результаты примут следующую более простую форму:

$$\frac{\pi g\varrho}{\varkappa P}\,y = -2\pi\sin\varkappa x + \int_0^\infty \frac{\cos kx}{k+\varkappa}\,dk =$$

$$= -2\pi\sin\varkappa x + \int_0^\infty \frac{me^{-mx}}{m^2+\varkappa^2}\,dm, \tag{27}$$

для положительного x и

$$\frac{\pi g\varrho}{\varkappa P}\,y = \int_0^\infty \frac{\cos kx}{k+\varkappa}\,dk = \int_0^\infty \frac{me^{mx}}{m^2+\varkappa^2}\,dm \tag{28}$$

для отрицательного x. Та часть возмущения уровня, которая представлена в этих выражениях определенными интегралами, является теперь симметричной по отношению к началу, и она беспрерывно убывает с возрастанием расстояния от начала. Если $\varkappa x$ не слишком велико, то обычными методами можно установить полусходящееся разложение

$$\int_0^\infty \frac{me^{-mx}}{m^2+\varkappa^2}\,dm = \frac{1}{\varkappa^2 x^2} - \frac{3!}{\varkappa^4 x^4} + \frac{5!}{\varkappa^6 x^6} - \ldots \tag{29}$$

Тогда оказывается, что на расстоянии приблизительно половины длины волны в направлении течения, считая от начала, мы будем иметь вполне установившийся гармонический профиль волны.

Определенные интегралы в (27) и (28) можно свести к известным функциям. Положив $(k+\varkappa)x=u$, для положительного x будем иметь

$$\int_0^\infty \frac{\cos kx}{k+\varkappa}\,dk = \int_{\varkappa x}^\infty \frac{\cos(\varkappa x-u)}{u}\,du =$$

$$= -\operatorname{Ci}\varkappa x\cos\varkappa x+\left(\frac{1}{2}\pi-\operatorname{Si}\varkappa x\right)\sin\varkappa x, \tag{30}$$

где в согласии с употребительными обозначениями мы полагаем

$$\operatorname{Ci}u=-\int_u^\infty \frac{\cos u}{u}\,du,\quad \operatorname{Si}u=\int_0^u \frac{\sin u}{u}\,du. \tag{31}$$

Функции $\operatorname{Ci}u$ и $\operatorname{Si}u$ табулированы Глезером [1]). Оказывается, что они, начиная от нуля, очень быстро приближаются соответственно к своим предельным значениям 0 и $\frac{1}{2}\pi$ с возрастанием u. Для малых значений u мы имеем

$$\operatorname{Ci}u=\gamma+\ln u-\frac{u^2}{2\cdot 2!}+\frac{u^4}{4\cdot 4!}-\ldots,$$

$$\operatorname{Si}u=u-\frac{u^3}{3\cdot 3!}+\frac{u^5}{5\cdot 5!}-\ldots,$$

где γ обозначает эйлерову постоянную 0,5772...

Из (25) и (26) легко видеть, что для бесконечно малых значений μ_1 полное опускание поверхности будет равно

$$-\int_{-\infty}^{\infty} y\,dx=\frac{P}{g\varrho}, \tag{33}$$

так же, как если бы жидкость была в покое.

§ 244. Выражения (25), (26), а также (27), (28) дают бесконечно большое возвышение в начале, однако это затруднение отпадает, если распределить давление по полосе конечной ширины, вместо того чтобы, как мы делали, концентрировать его на математической линии поверхности.

---

[1]) Glaisher, Tables of the Numerical Values of the Sine-Integral, Cosine-Integral and Exponential-Integral, Phil. Trans., 1870; извлечения отсюда были даны Dale и Jahnke und Emde. Вычисления последнего интеграла в (27) через интегральный синус и интегральный косинус было проведено Шлемильхом иным способом, чем изложено здесь, Sur l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{d\theta}{\theta+a^2}\,e^{-x\theta}$, Crelle, XXXIII (1846); см. также De Morgan, Differential and Integral Calculus, London, 1842, стр. 654, и Dirichlet, Vorlesungen стр. 208.

Чтобы вычислить действие распределенного давления

$$p_0 = f(x), \tag{34}$$

мы должны только поставить в (27) и (28) $x - \alpha$ вместо x, заменить P через $f(\alpha)\,\delta\alpha$ и полученное значение y проинтегрировать по α между соответствующими пределами. Из известных теорем интегрального исчисления следует тогда, что для конечного p_0 интеграл будет конечным для всех значений x.

Если на часть поверхности, простирающуюся от $-\infty$ до начала, приложено постоянное давление, то с помощью интегрирования (25) для $x > 0$ можно легко установить

$$g\varrho y = -2p_0 \cos \varkappa x + \frac{\varkappa p_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-mx}\,dm}{m^2 + \varkappa^2}, \tag{35}$$

причем μ_1 было положено равным нулю. Если же давление p_0 распределено по той части поверхности, которая простирается от 0 до $+\infty$, то для $x < 0$ найдем

$$g\varrho y = \frac{\varkappa p_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{mx}\,dm}{m^2 + \varkappa^2}. \tag{36}$$

Из этих результатов легко можно вывести соответственные формулы для случая, когда давление равномерно распределено по полосе конечной ширины. Определенные интегралы в (35) и (36) можно выразить через функции $\mathrm{Ci}\,u$, $\mathrm{Si}\,u$; например, для интеграла в (35) получаем выражение

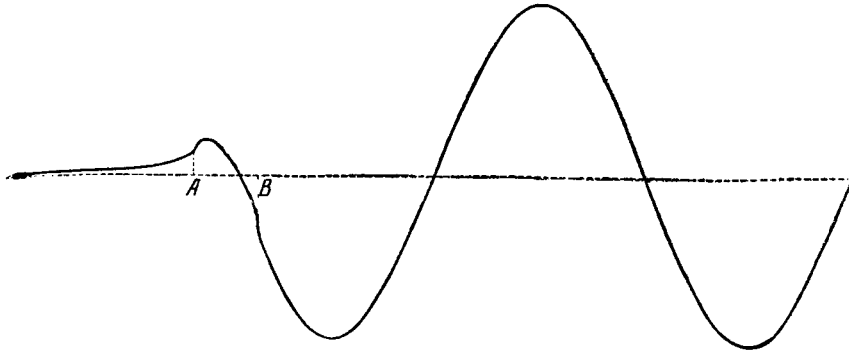
$$\varkappa \int_0^\infty \frac{e^{-mx}\,dm}{m^2 + \varkappa^2} = \int_0^\infty \frac{\sin kx}{k + \varkappa}\,dk =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\pi - \mathrm{Si}\,\varkappa x\right) \cos \varkappa x + \mathrm{Ci}\,\varkappa x \sin \varkappa x. \tag{37}$$

Этим способом построена фиг. 59, которая представляет случай, когда полоса (AB) имеет ширину $\varkappa^{-1}$ или 0,159 части длины стоячей волны.

Подобный случай приблизительно осуществляется, если погрузить ребро легко наклоненной доски внутрь поверхности потока; различие будет состоять в том, что давление на смоченную часть доски не будет равномерным, оно будет убывать от средних частей к краям. Чтобы обеспечить равномерное распределение давления, доска должна быть искривлена у краев и именно по форме тех частей профиля волны, которые примыкают к точкам A, B фиг. 59.

Следует заметить, что если ширина полосы есть точное кратное длины волны $\left(\frac{2\pi}{\varkappa}\right)$, то на некотором расстоянии от источника возмущения потока как в направлении течения, так и против течения возвышение поверхности будет равно нулю.



Фиг. 59.

Фиг. 59 выявляет в точках A, B некоторые особенности, происходящие от разрыва приложенного давления. Более естественный способ представления локального давления будем иметь, если положим

$$p_0 = \frac{P}{\pi}\frac{b}{b^2+x^2}. \tag{38}$$

Мы можем представить это в виде

$$p_0 = \frac{P}{\pi}\frac{1}{b-ix} = \frac{P}{\pi}\int_0^\infty e^{-kb+ikx}\,dk, \tag{39}$$

при условии, что в конце будет сохраняться только действительная часть. Пользуясь формулами (9) и (10) § 242, видим, что соответствующее возвышение свободной поверхности будет представляться в виде

$$g\varrho y = \frac{\varkappa P}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-kb+ikx}}{k-\chi-i\mu_1}\,dk. \tag{40}$$

Методом § 243 мы находим, что для $x>0$ это равносильно

$$g\varrho y = \frac{\varkappa P}{\pi}\left\{2\pi i e^{(\varkappa+i\mu_1)\,(ix-b)} + \int_0^\infty \frac{e^{-imb-mx}}{m-\mu_1+i\varkappa}\,dm\right\}, \tag{41}$$

а для $x<0$

$$g\varrho y = \frac{\varkappa P}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{imb+mx}}{m+\mu_1-i\varkappa}\,dm. \tag{42}$$

Отсюда, беря действительные части и полагая $\mu_1 = 0$, получим

$$g\varrho y = -2\varkappa P e^{-\varkappa b}\sin \varkappa x + \\ + \frac{\varkappa P}{\pi}\int_0^\infty \frac{m\cos mb - \varkappa \sin mb}{m^2+\varkappa^2} e^{-mx}\,dm, \quad [x>0], \tag{43}$$

$$g\varrho y = \frac{\varkappa P}{\pi}\int_0^\infty \frac{m\cos mb - \varkappa \sin mb}{m^2+\varkappa^2} e^{mx}\,dm \quad [x<0]. \tag{44}$$

Множитель $e^{-\varkappa b}$ в первом члене правой части (43) показывает влияние того обстоятельства, что давление распределено на конечную область. Легко доказать, что значения y, данные формулами (43) и (44), а также значения $\frac{dy}{dx}$ для $x=0$ совпадают [1]).

§ 245. Если в задаче § 242 мы примем глубину конечной и равной h, то, при отсутствии сил трения, задача будет неопределенной или определенной, смотря по тому, будет ли скорость потока c меньше или больше, чем $(gh)^{1/2}$, т. е. максимальной скорости волны для данной глубины; см. § 229. В первом случае получающиеся затруднения могут быть избегнуты введением малых сил трения; но, согласно прежним исследованиям, мы можем уже заранее предвидеть, что главный эффект этих сил трения будет состоять в том, чтобы уничтожить возвышение поверхности на некотором расстоянии в направлении, обратном течению, от области распределенного давления; поэтому, если мы примем это с самого начала, то не будет необходимости усложнять наши уравнения сохранением членов, зависящих от трения [2]).

Для случая просто гармонического распределения давления мы полагаем, как в (3) § 233

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi}{c} &= -x + \beta \operatorname{ch} k(y+h)\sin kx, \\ \frac{\psi}{c} &= -y + \beta \operatorname{sh} k(y+h)\cos kx. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

На поверхности

$$y = \beta \operatorname{sh} kh \cos kx \tag{2}$$

мы будем иметь тогда

$$\frac{p_0}{\varrho} = -gy - \frac{1}{2}(q^2 - c^2) = \beta(kc^2 \operatorname{ch} kh - q \operatorname{sh} kh)\cos kx, \tag{3}$$

так что наложенному давлению

$$p_0 = C\cos kx \tag{4}$$

---

[1]) Другой способ трактовки проблемы § 243, 244 можно найти в работе Kelvin, Deep Water Ship-Waves, Proc. R. S. Edin, XXV, 562 (1905) [Papers, IV, 368].

[2]) Для малых сил трения не особенно трудно будет видоизменить исследования таким образом, чтобы эти силы были учтены.

будет соответствовать форма поверхности

$$y=\frac{C}{\varrho}\frac{\operatorname{sh} kh}{kc^2\operatorname{ch} kh-g\operatorname{sh} kh}\cos kx. \tag{5}$$

Так же, как в § 242, давление на впадинах волны будет наибольшим, а на гребнях волны наименьшим, или обратно, в зависимости от того, будет ли длина волны больше или меньше, чем длина той волны, которая соответствует скорости c; это находится в согласии с общей теорией.

Обобщая формулу (5) по методу Фурье, получим формулу

$$y=\frac{P}{\pi\varrho}\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh} kh\cos kx}{kc^2\operatorname{ch} kh-g\operatorname{sh} kh}\,dk, \tag{6}$$

представляющую эффект того давления, которое распределено по узкой полосе поверхности около начала и полная величина которого равна P. Это выражение может быть написано также и в форме

$$\frac{\pi\varrho c^2}{P}y=\int_0^\infty\frac{\cos\dfrac{xu}{h}}{u\operatorname{ctgh} u-\dfrac{gh}{c^2}}\,du. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь комплексный интеграл

$$\int\frac{e^{\frac{ix\zeta}{h}}}{\zeta\operatorname{ctgh}\zeta-\dfrac{gh}{c^2}}\,d\zeta, \tag{8}$$

где $\zeta=u+iv$. Функция под знаком интеграла будет иметь в точке $\zeta=\mp i\infty$ особую точку или нет, смотря по тому, будет ли x положительным или отрицательным; остальные особые точки даются корнями уравнения

$$\frac{\operatorname{tg} h\zeta}{\zeta}=\frac{c^2}{gh}. \tag{9}$$

Так как (6) есть четная функция от x, то достаточно рассмотреть случай положительных x.

Предположим сначала $c^2>gh$. Корни уравнения (9) будут тогда все чисто мнимыми, вида $\pm i\beta$, где β есть корень уравнения

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}=\frac{c^2}{gh}. \tag{10}$$

Наименьший положительный корень этого уравнения лежит между 0 и $^1/_2\pi$, а большие корни стремятся со все более растущим приближением к значению $(s+^1/_2)\,\pi$, где s есть целое число. Мы обозначим эти корни через $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$, располагая их по величине. Распространим интеграл (8) по замкнутой кривой, образованной осью u, бесконечно большим полукругом на положительной стороне этой оси и рядом малых кругов, окружающих особые точки $\zeta=i\beta_0, i\beta_1, i\beta_2, \ldots$. Часть, соответствующая бесконечно большому полукругу, очевидно, будет исчезать. Далее, известно следующее: если α есть простой корень $f(\zeta)=0$, то значение интеграла

$$\int\frac{F(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta,$$

взятого в положительном направлении вдоль малого круга, заключающего точку $\zeta = \alpha$, равно

$$2\pi i \frac{F(\alpha)}{f'(\alpha)}; \tag{11}$$

В нашем случае для (8) имеет место

$$f'(\alpha) = \operatorname{ctgh}\alpha - \alpha(\operatorname{ctgh}^2\alpha - 1) = \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{gh}{c^2}\left(1 - \frac{gh}{c^2}\right) + \alpha^2\right\}; \tag{12}$$

отсюда следует, если положить $\alpha = i\beta_s$, что выражение (11) принимает вид

$$2\pi B_s e^{-\beta_s \frac{x}{h}}, \tag{13}$$

где

$$B_s = \frac{\beta_s}{\beta_s^2 - \frac{gh}{c^2}\left(1 - \frac{gh}{c^2}\right)}. \tag{14}$$

Теорема, что интеграл обращается в нуль, когда он распространен по замкнутому контуру области, внутри которой подинтегральная функция комплексного переменного не имеет особых точек, дает

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\frac{ixu}{h}}}{u\operatorname{ctgh} u - \frac{gh}{c^2}}\,du + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{\frac{ixu}{h}}}{u\operatorname{ctgh} u - \frac{gh}{c^2}}\,du - 2\pi \sum_{0}^{\infty} B_s e^{-\beta_s \frac{x}{h}} = 0. \tag{15}$$

Если в первом интеграле написать $-u$ вместо u, то получим

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos\frac{xu}{h}}{u\operatorname{ctgh} u - \frac{gh}{c^2}}\,du = \pi \sum_{0}^{\infty} B_s e^{-\beta_s \frac{x}{h}}. \tag{16}$$

Вид свободной поверхности дается тогда уравнением

$$y = \frac{P}{\varrho c^2} \sum_{0}^{\infty} B_s e^{-\beta_s \frac{x}{h}}. \tag{17}$$

Оказывается, что возвышение поверхности (которое симметрично относительно начала) на известном расстоянии от места возмущения уже будет незаметным.

С другой стороны, если $c^2 < gh$, то уравнение (9) будет иметь пару действительных корней (пусть они равны $\pm\alpha$) соответственно наименьшим корням ($\pm\beta_0$) уравнения (10), которые сами теперь перестают быть действительными. Интеграл (7) становится тогда несобственным, так как функция под знаком интеграла внутри области интегрирования становится бесконечной. Одно из значений этого интеграла, именно „главное значение" в смысле Коши, можно, однако, определить тем же самым методом, как раньше, причем точки $\zeta = \pm\alpha$ исключаются из пути интегрирования с помощью малых полуокружностей радиуса ε, лежащих на той стороне, где v положительно.

Части комплексного интеграла (8), соответствующие этим полуокружностям, будут

$$-i\pi\frac{e^{\pm i\frac{ax}{h}}}{f'(\pm a)},$$

где $f'(a)$ дается формулой (12); их сумма, следовательно, будет равна

$$2\pi A\sin\frac{ax}{h}, \tag{18}$$

где

$$A=\frac{a}{a^2-\frac{gh}{c^2}\left(\frac{gh}{c^2}-1\right)}. \tag{19}$$

Уравнение, соответствующее (16), принимает теперь вид

$$\left\{\int_0^{a-\varepsilon}+\int_{a+\varepsilon}^{\infty}\right\}\frac{\cos\frac{xu}{h}}{u\operatorname{ctgh}u-\frac{gh}{c^2}}du=-\pi A\sin\frac{ax}{h}+\pi\sum_1^{\infty}B_s e^{-\beta_s\frac{x}{h}}, \tag{20}$$

так что если мы возьмем главное значение интеграла в формуле (7), то форма поверхности на той стороне, на которой x положительно, будет дана уравнением

$$y=-\frac{P}{\varrho c^2}A\sin\frac{ax}{h}+\frac{P}{\varrho c^2}\sum_1^{\infty}B_s e^{-\beta_s\frac{x}{h}}. \tag{21}$$

Таким образом на некотором расстоянии от начала деформация поверхности будет состоять из простого гармонического ряда волн длины $\frac{2\pi h}{a}$, представленного первым членом; эта длина волны соответствует скорости распространения c по отношению к спокойной воде.

Так как функция (7) симметрична по отношению к началу, то соответствующий результат для отрицательных значений x напишется в виде

$$y=\frac{P}{\varrho c^2}A\sin\frac{ax}{h}+\frac{P}{\varrho c^2}\sum_1^{\infty}B_s e^{\beta_s\frac{x}{h}}. \tag{22}$$

Общее решение нашей неопределенной задачи мы получим, если прибавим к выражениям (21) и (22) члены вида

$$C\cos\frac{ax}{h}+D\sin\frac{ax}{h}; \tag{23}$$

если мы выберем эти члены таким образом, что деформация поверхности на некотором расстоянии против течения станет незаметной, то получим практически годное решение, в котором принято во внимание влияние бесконечно малых сил трения. Таким путем мы в конце концов для положительных значений x получим

$$y=-\frac{2P}{\varrho c^2}A\sin\frac{ax}{h}+\frac{P}{\varrho c^2}\sum_1^{\infty}B_s e^{-\beta_s\frac{x}{h}}, \tag{24}$$

а для отрицательных значений:

$$y=\frac{P}{\varrho c^2}\sum_1^{\infty}B_s e^{\beta_s\frac{x}{h}}. \tag{25}$$

За другим способом изучения определенного интеграла в нашей задаче мы должны отослать к уже названной работе Кельвина.

§ 246. Тот же самый метод может быть применен для исследования влияния небольших неровностей дна на равномерное течение [1]).

Для случая дна, гофрированного по гармоническому закону:

$$y = -h + \gamma \cos kx, \tag{1}$$

причем начало, как обычно, лежит на невозмущенной поверхности, мы принимаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi}{c} &= -x(\alpha \operatorname{ch} ky + \beta \operatorname{sh} ky)\sin kx, \\ \frac{\psi}{c} &= -y + (\alpha \operatorname{sh} ky + \beta \operatorname{ch} ky)\cos kx. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Условие того, что (1) должно быть линией тока, напишется в виде

$$\gamma = -\alpha \operatorname{sh} kh + \beta \operatorname{ch} kh. \tag{3}$$

Формула давления в приближенном виде будет

$$\frac{p}{\varrho} = \text{const.} - gy + kc^2(\alpha \operatorname{ch} ky + \beta \sin ky)\cos kx, \tag{4}$$

следовательно, вдоль линии тока $\psi = 0$ будем иметь

$$\frac{p}{\varrho} = \text{const.} + (kc^2\alpha - g\beta)\cos kx,$$

так что условие для свободной поверхности дает

$$kc^2\alpha = g\beta = 0. \tag{5}$$

Уравнения (3) и (5) определяют α и β. Профиль свободной поверхности дается уравнением

$$y = \beta \cos kx = \frac{\gamma}{\operatorname{ch} kh - \frac{g}{kc^2}\operatorname{sh} kh}\cos kx. \tag{6}$$

Если скорость потока будет меньше, чем определенная формулой (4) § 229 скорость волн, распространяющихся в спокойной воде постоянной глубины h, длина которых в точности равна расстоянию гофр друг от друга, то знаменатель будет отрицательным. В этом случае возвышения и опускания свободной поверхности будут как раз соответствовать опусканиям и возвышениям дна. В противоположном случае возвышения и опускания свободной поверхности будут соответствовать возвышениям и опусканиям дна, но с различными по величине амплитудами. Если c имеет в точности значение, даваемое формулой (4) § 229, то решение становится невозможным, как и следовало ожидать, так как знаменатель обращается в нуль. Чтобы получить и для этого случая результат, имеющий смысл, мы принуждены принять во внимание особо диссипативные силы трения.

Вышеизложенное решение можно по теореме Фурье обобщить так, чтобы оно годилось для случая, когда неровности дна следуют произвольному закону. Так, если профиль дна дается уравнением

$$y = -h + f(x) = -h + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dk \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos k(x-\xi)\,d\xi, \tag{7}$$

---

[1]) Sir. W. Thomson, On Stationary Waves in Flowing Water, Phil. Mag. (5). XXV, 353, 445, 517 (1886); XXIII, 52 (1887) [Papers, IV, 270]. Влияние резкого изменения уровня дна исследовалось Wien, Hydrodynamik. стр. 201.

то форму свободной поверхности мы получим с помощью наложения членов типа (6), соответствующих различным элементам интеграла Фурье; таким образом мы будем иметь

$$y = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dk \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)\cos k(x-\xi)}{\operatorname{ch} kh - \frac{g}{kc^2}\operatorname{sh} kh}\, d\xi. \tag{8}$$

В случае единственной изолированной неровности на дне в точке, лежащей вертикально под началом, это приводится к

$$y = \frac{Q}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos kx}{\operatorname{ch} kh - \frac{g}{kc^2}\operatorname{sh} kh}\, dk = \frac{Q}{\pi}\int_0^\infty \frac{u\cos\frac{xu}{h}}{u\operatorname{ch} u - \frac{gh}{c^2}\operatorname{sh} u}\, du, \tag{9}$$

где Q представляет величину площади, ограниченной профилем неровности и общим уровнем дна. Для случая понижения Q, конечно, будет отрицательным.

Исследование интеграла

$$\int \frac{\zeta e^{\frac{ix\zeta}{h}} d\zeta}{\zeta\operatorname{ch}\zeta - \frac{gh}{c^2}\operatorname{sh}\zeta} \tag{10}$$

проводится в точности, как в § 245. Подинтегральная функция отличается только множителем $\frac{\zeta}{\operatorname{sh}\zeta}$; особые точки, следовательно, суть такие же, как и раньше, и мы можем поэтому сразу написать результат.

Таким образом для $c^2 > gh$ форма поверхности будет

$$y = \frac{Q}{h}\sum_0^\infty B_s \frac{\beta_s}{\sin\beta_s} e^{\mp\beta_s\frac{x}{h}}, \tag{11}$$

причем верхний или нижний знак ставится, смотря потому, будет ли x положительным или отрицательным.

Если же $c^2 < gh$, то практически удобное решение для положительного x напишется в виде

$$y = -\frac{2Q}{h}A\frac{\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}\sin\frac{\alpha x}{h} + \frac{Q}{h}\sum_1^\infty B_s\frac{\beta_s}{\sin\beta_s}e^{-\beta_s\frac{x}{h}}, \tag{12}$$

а для отрицательного x

$$y = \frac{Q}{h}\sum_1^\infty B_s\frac{\beta_s}{\sin\beta_s}e^{\beta_s\frac{x}{h}}. \tag{13}$$

Символы α, β_s, A_1, B_s имеют то же значение, как в § 245[1]).

---

[1]) Очень интересный рисунок профиля волны, обусловленного изолированной неровностью русла, встречается в работе Кельвина, Phil. Mag. (5) XXII, 517 (1886) [Papers, IV]. Влияние различного рода неровностей исследовано Чизотти в новых томах Rend. della R. Accad. dei Lincei в предположении, что c^2 настолько больше gh, что можно пренебречь влиянием тяжести. Эти задачи имеют такой же характер, как в § 73.

§ 247. Подобным же образом мы можем вычислить то возмущение, которое возникает в равномерном потоке вследствие погружения цилиндрического препятствия, ось которого горизонтальна и перпендикулярна к направлению потока, при условии, что радиус l цилиндра мал [1]) сравнительно с глубиной f погружения оси.

Мы пишем

$$\varphi = -cx\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)+\chi, \tag{1}$$

где c, как и раньше, обозначает общую скорость потока, а r — расстояние от оси цилиндра, именно

$$r = \sqrt{x^2+(y+f)^2}; \tag{2}$$

начало лежит здесь на невозмущенном уровне поверхности и как раз вертикально над осью. Это выражение дает

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0 \quad \text{для} \quad r = b,$$

если предположить, что значением χ в окрестности цилиндра можно пренебречь.

Положим

$$\chi = \int_0^\infty \alpha(k)\, e^{ky} \sin kx\, dk, \tag{3}$$

где $\alpha(k)$ есть функция k, которая должна быть определена более точно. Для уравнения свободной поверхности, рассматриваемой как стационарная, положим

$$\eta = \int_0^\infty \beta(k) \cos kx\, dk. \tag{4}$$

Геометрическое условие, которое должно быть выполнено на свободной поверхности, имеет вид

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial y} = c\frac{d\eta}{dx}, \tag{5}$$

где надо положить $y=0$. Так как выражение (1) для положительных значений $y+f$ равносильно выражению

$$\varphi = -cx - b^2c\int_0^\infty e^{-k(y+f)} \sin kx\, dk + \chi, \tag{6}$$

то условие (5) будет выполняться, если

$$b^2ce^{-kf} + \alpha(k) = c\beta(k). \tag{7}$$

[1]) Это исследование заимствовано из работы Lamb, On Some cases of Wave-Motion on Deep Water, Ann. di matematica (3), XXI, 237 (1913). Я установил, что эта проблема была предложена Кельвином. Phil. Mag. (6), IX, 733 (1905) [Papers, IV, 369 (1904)].

Далее, для переменной части давления на свободной поверхности имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{p}{\varrho} = -gy - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2;\\
&\frac{p}{\varrho} = -g\eta - \frac{1}{2}c^2 - b^2c^2\int_0^\infty e^{-kf}\cos kx\,dk + c\frac{\partial\chi}{\partial x};\\
&\frac{p}{\varrho} = -g\eta - \frac{1}{2}c^2 - b^2c^2\int_0^\infty e^{-kf}\cos kx\,dk +\\
&\qquad\qquad + c\int_0^\infty \alpha(k)\cos kxk\,dk,
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где члены второго порядка относительно возмущения опущены. Это выражение не будет зависеть от x, если

$$g\beta(k) + kb^2c^2e^{-kf} - kc\alpha(k) = 0. \tag{9}$$

Отсюда и из (7) будем иметь

$$\alpha(k) = \frac{k+\varkappa}{k-\varkappa}\;\; b^2ce^{-kf},\quad \beta(k) = \frac{2b^2ke^{-kf}}{k-\varkappa}, \tag{10}$$

где, как в § 242,

$$\varkappa = \frac{g}{c^2}. \tag{11}$$

Следовательно,

$$\eta = 2b^2\int_0^\infty \frac{ke^{-kf}\cos kx\,dk}{k-\varkappa} = \frac{2b^2f}{x^2+f^2} + 2\varkappa b^2\int_0^\infty \frac{e^{-kf}\cos kx\,dk}{k-\varkappa}. \tag{12}$$

Интеграл будет несобственным, однако для положительного x его главное значение равно действительной части выражения

$$i\pi e^{-\varkappa f + i\varkappa x} + i\int_0^\infty \frac{e^{-imf - mx}}{im-\varkappa}\,dm. \tag{13}$$

Если мы этим воспользуемся, то будем иметь

$$\eta = \frac{2b^2f}{x^2+f^2} - 2\pi\varkappa b^2e^{-\varkappa f}\sin\varkappa x - \\ - 2\varkappa b^2\int_0^\infty \frac{(\varkappa\sin mf - m\cos mf)\,e^{-mx}}{m^2+\varkappa^2}\,dm. \tag{14}$$

Для больших значений x будет иметь значение только второй член.

Так как значение η в (12) есть четная функция от x, то для отрицательного x мы должны иметь

$$\eta = \frac{2b^2 f}{x^2+f^2} + 2\pi\varkappa b^2 e^{-\varkappa f}\sin\varkappa x - \\ - 2\varkappa b^2 \int_0^\infty \frac{(\varkappa \sin mf - m\cos mf)\, e^{mx}}{m^2+\varkappa^2}\, dm. \qquad (15)$$

На возмущения, представленные этими формулами, можно наложить произвольную систему стационарных волн длиной $\frac{2\pi}{\varkappa}$, так как они могут сохранять свое положение в пространстве и при наличии течения; если выбрать добавочную систему в виде

$$\eta = -2\pi\varkappa b^2 e^{-kf}\sin\varkappa x, \qquad (16)$$

то благодаря этому на некотором расстоянии вверх по течению ($x<0$) возмущение становится незаметным, как это и необходимо для физически пригодного решения. Результат тогда будет

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \frac{2b^2 f}{x^2+f^2} - 4\pi\varkappa b^2 e^{-\varkappa f}\sin\varkappa x + \text{ и т. д. } [x>0], \\ \eta &= \frac{2b^2 f}{x^2+f^2} + \text{ и т. д. } [x<0]. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Получается, таким образом, что непосредственно над препятствием возникает локальное возмущение, за которым вниз по течению следует ряд волн длиной $\frac{2\pi c^2}{g}$ [1]).

Данное исследование легко приспособить к случаю, когда сечение цилиндра имеет произвольную форму. Принятое выше допущение означает в первом приближении то, что на достаточном расстоянии влияние цилиндра эквивалентно влиянию соответственно подобранного диполя. Обращаясь к § 72а, в общем случае мы можем принять

$$\varphi = -cx + \varphi_1 + \chi, \qquad (18)$$

где

$$\varphi_1 = -\frac{(A+Q)x + H(y+f)}{2\pi\{x^2+(y+f)^2\}}\, c. \qquad (19)$$

Удобнее иметь дело с комплексными величинами, поэтому положим

$$\varphi_1 = C\int_0^\infty e^{-k(y+f)\, ikx}\, dk, \qquad (20)$$

где

$$C = -\frac{i(A+Q)-H}{2\pi}\, c, \qquad (21)$$

---

[1]) Если мы исследуем асимптотическое разложение определенного интеграла в (13) для большого значения $\varkappa f$, то мы найдем после подстановки в (12), что важнейший член дает выражение $-\frac{2b^2 f}{x^2+f^2}$; и он будет сокращаться с первым членом вышенаписанного выражения η. Это приближение было продолжено, далее, для средних значений kf Havelock, Proc. Roy. Soc. A, CXV, 274 (1927).

В конце вычислений должна быть сохранена, конечно, только действительная часть функции (20). Отдельные вычисления могут быть проведены самим читателем. Конечный результат для больших значений $|x|$ будет

$$\left.\begin{aligned}\eta &= \frac{(A+Q)f-Hx}{\pi(f^2+x^2)} - \{2(A+Q)\varkappa\sin\varkappa x + \\ &\qquad + 2\varkappa H\cos\varkappa x\}\, e^{-\varkappa f} + \text{ и т. д. } [x>0], \\ \eta &= \frac{(A+Q)f-Hx}{\pi(f^2+x^2)} + \text{ и т. д. } [x<0].\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Местное возмущение вблизи начала не будет симметричным, если H отлично от нуля.

Для случая эллиптического сечения, большая ось которого составляет угол α с направлением течения, мы будем иметь

$$A=\pi(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha),\quad Q=\pi ab,\quad H=\pi(a^2-b^2)\sin\alpha\cos\alpha. \quad (23)$$

В этом случае квадрат амплитуды волн будет

$$4\varkappa^2(A+Q)^2+4\varkappa^2H^2=4\pi^2\varkappa^2(a+b)^2(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha). \quad (24)$$

§ 248. Если мы в задачах §§ 243, 245 наложим на поток в целом скорость $-c$, параллельную оси x, то получим случай возмущающего давления, перемещающегося с постоянной скоростью c по поверхности в остальном спокойной воды. При такой постановке задачи легко понять в общем виде причину образования ряда волн, следуемого за возмущением.

Например, если на ряд бесконечно близких равноотстоящих параллельных прямых на поверхности через равные промежутки времени действуют последовательно одинаковые бесконечно малые импульсы, то каждый импульс сам по себе производит систему волн исследованного в § 239 типа. Системы, возникшие от различных импульсов, накладываются друг на друга, и результат, очевидно, будет такой: отдельные части, с длиной волны, соответствующей скорости c, с какой возмущение распространяется по поверхности и направление распространения которых совпадает с направлением возмущения, будут усиливать друг друга. Исследования §§ 236, 237 показывают, что группы волн рассматриваемой частной длины будут постоянно оставаться сзади возмущения. Последнее заключение по необходимости будет видоизменено, когда будут рассматриваться капиллярные волны.

Проблема может трактоваться также с общей точки зрения независимо от особого рода рассмотренных волн, именно следующим образом [1]).

За начало мы возьмем мгновенное положение возмущающего воздействия, относительно которого предполагаем, что оно движется со скоростью c в направлении отрицательной оси x. Эффект импульса δt, который был сообщен в предшествующий момент t, будет представляться формулой (7) § 241, если заменить x через $ct-x$ и

[1]) Lamb, Phil. Mag. (6), XXXI, 386 (1916).

умножить на δt. Вводя малое трение, пропорциональное скорости, и интегрируя от $t=0$ до $t=\infty$, получим

$$\eta = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty \varphi(k)\, e^{i\sigma t - ik(ct-x)}\, dk + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \varphi(k)\, e^{i\sigma t + ik(ct-x)}\, dk \right\} e^{-\frac{1}{2}\mu t}\, dt. \qquad (1)$$

Интегрирование по t дает

$$\eta = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\varphi(k)\, e^{ikx}\, dk}{\frac{1}{2}\mu - i(\sigma - kc)} + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\varphi(k)\, e^{-ikx}\, dk}{\frac{1}{2}\mu - i(\sigma + kc)}. \qquad (2)$$

Величина μ по предположению мала и в пределе обращается в нуль. Главная часть результата таким образом будет зависеть от тех значений k в первом интеграле, для которых приближенно

$$\sigma = kc. \qquad (3)$$

Если положить $k = \varkappa + k'$, где $\varkappa$ есть корень этого уравнения, то приближенно будем иметь

$$\sigma - kc = \left(\frac{d\sigma}{dk} - c\right) k' = (U - c)\, k', \qquad (4)$$

где U обозначает групповую скорость, соответствующую длине волны $\frac{2\pi}{\varkappa}$. Главная часть (2) будет равна, следовательно,

$$\eta = \frac{1}{2\pi}\varphi(\varkappa)\, e^{i\varkappa x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik'x}\, \partial k'}{\frac{1}{2}\mu - i(U-c)\, k'}, \qquad (5)$$

ибо существенных изменений не произойдет, если интеграл распространить до $k' = \pm\infty$. Для положительного a будем иметь [1])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}\, dm}{a + im} = \begin{cases} 2\pi e^{-ax} & [x > 0], \\ 0 & [x < 0], \end{cases} \qquad (6)$$

в то время как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}\, dm}{a - im} = \begin{cases} 0 & [x > 0], \\ 2\pi e^{ax} & [x < 0]. \end{cases} \qquad (7)$$

---

[1]) Приведенные результаты равносильны с известными формулами

$$a\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx\, dm}{a^2 + m^2} = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m \sin mx\, dm}{a^2 + m^2} = \pi e^{\mp ax}$$

(где надо взять верхний или нижний знак, смотря по тому, будет ли x положительным или отрицательным); их можно, однако, получить и прямо путем интегрирования по контуру.

Отсюда следует для $U<c$

$$\eta=\frac{\varphi(\varkappa)\,e^{i\varkappa x}}{c-U}\,e^{-\frac{1}{2}\frac{\mu x}{c-U}}\quad\text{или}\quad\eta=0, \tag{8}$$

смотря по тому $x\gtrless 0$; для $U>c$ будем иметь

$$\eta=0\ \text{или}\ \eta=\frac{\varphi(\varkappa)\,e^{i\varkappa x}}{U-c}\,e^{-\frac{1}{2}\frac{\mu x}{U-c}} \tag{9}$$

в соответствующих случаях. Если μ будет стремиться к нулю, то для ряда волн, вызываемых перемещающимся возмущением, получим простое выражение

$$\eta=\frac{\varphi(\varkappa)\,e^{i\varkappa x}}{|c-U|}. \tag{10}$$

Этот ряд волн следует за возмущением или предшествует ему, смотря по тому $U\gtrless c$. Примерами этих случаев являются соответственно тяжелые волны на воде и капиллярные волны (§§ 236, 266).

Принятое приближение в (4) только тогда будет законным, когда отношение:

$$\frac{d^2\sigma}{dk^2}k' : (U-c), \tag{11}$$

будет малым даже тогда, когда $k'x$ есть небольшое кратное 2π. Для этого необходимо, чтобы

$$\frac{d^2\sigma}{dk^2} : (U-c)x \tag{12}$$

было мало. За исключением случая, когда в точности $U=c$, это условие всегда будет выполняться для достаточно больших x. Можем прибавить к этому, что результаты (8) и (9) будут точными в том смысле, что они представляют главные члены при вычислении (2) по методу вычетов Коши; ср. § 242.

В случае волн на глубокой воде, образовавшихся вследствие концентрированного давления, полная величина которого равна P, мы полагаем для согласования с формулой (28) § 239

$$\varphi(k)=\frac{i\sigma P}{g\varrho}. \tag{13}$$

Так как $U=\frac{1}{2}c$, то, взяв действительную часть, получим в согласии с (27) § 243[1])

$$\eta=-\frac{2P\varkappa}{g\varrho}\sin\varkappa x. \tag{14}$$

Если имеется несколько значений k, удовлетворяющих условию (3), то для каждого такого значения существует член типа (10). Этот

[1]) Из (2) можно без труда получить упомянутую полную формулу.

случай имеет место для волн воды, возникающих от совместного действия тяжести и капиллярности (§ 269), о чем мы будем сейчас говорить в случае, когда жидкости расположены друг над другом.

§ 249. Предыдущие результаты имеют значение для проблемы „волнового сопротивления". Рассматривая плоскую задачу, представим две неподвижные вертикальные плоскости, проведенные одна перед, а вторая позади возмущающего тела. Если $U<c$, то область между плоскостями получает в единицу времени прирост энергии cE, где E есть средняя энергия единицы площади свободной поверхности. Этот прирост частично обусловлен работой сил давления на задней плоскости с мощностью UE (§ 237), а частично восполняется реакцией возмущающего тела. Таким образом, если R есть сопротивление, испытываемое возмущающим телом вследствие образования волн, то мы будем иметь

$$Rc+UE=cE, \quad \text{или} \quad R=\frac{c-U}{c}E. \tag{1}$$

Если же $U>c$, т. е. ряд волн опережает тело, то область между плоскостями теряет энергию в единицу времени cE. Так как потеря на первой плоскости есть UE, то будем иметь

$$Rc-UE=-cE, \text{ или } R=\frac{U-c}{c}E. \tag{2}$$

Таким способом мы найдем, используя результаты § 237, для случая возмущения, перемещающегося со скоростью $c<\sqrt{gh}$ по спокойной воде глубины h:

$$R=\tfrac{1}{4}\,g\varrho a^2\left(1-\frac{2\varkappa h}{\operatorname{sh}2\varkappa h}\right), \tag{3}$$

где a обозначает амплитуду волн. Если c возрастает от 0 до $\sqrt{gh}$, то $\varkappa h$ убывает от ∞ до 0, так что R убывает от $^1/_4 g\varrho a^2$ до 0. Если $c>\sqrt{gh}$, то эффект будет чисто местным, и мы будем иметь $R=0$ [1]). Однако необходимо заметить, что амплитуда a, вызванная возмущением данного типа, будет также зависеть от c. Например, в случае погруженного цилиндра (43) § 244 a будет пропорционально $\varkappa e^{-\varkappa b}$, где $\varkappa=\frac{g}{c^2}$, а глубина берется бесконечной. В этом случае

$$R \text{ пропорционально } c^{-4}e^{-\frac{2gb}{c^2}} \text{ *}). \tag{4}$$

---

[1]) Ср. Sir. W. Thomson, On Ship Waves, Proc. Inst. Mech. Eng., 3 августа 1887 [Pohular Lectures and Adresses, London, 1889—1894, III, 450]. Формула, равносильная с (3), имеется в работе того же автора, Phil. Mag. (5), XXII, 451. [Papers, IV, 279].

*) Вертикальная сила на цилиндр была вычислена Havelock, Proc. Roy. Soc. A, CXXII, 387 (1928).

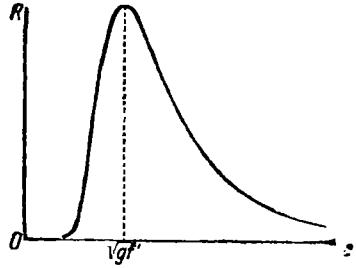
Интересный вариант общего случая мы будем иметь, когда слой жидкости наложен на другой слой, немного большей плотности. Если ϱ, ϱ' обозначают соответственно плотности нижней и верхней жидкости и если глубина верхней жидкости равна h', в то время как глубина нижней практически бесконечна, то рассмотренные в § 231 результаты Стокса показывают, что могут быть образованы две системы волн, длины которых $\frac{2\pi}{\varkappa}$ связаны со скоростью возмущения формулами

$$c^2 = \frac{g}{\varkappa}, \quad c^2 = \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho \operatorname{ctgh} \varkappa h' + \varrho'} \frac{g}{\varkappa}. \tag{5}$$

Легко показать, что определяемое вторым уравнением значение $\varkappa$ только тогда будет действительным, когда

$$c^2 < \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho} gh'. \tag{6}$$

Если c превосходит данное здесь критическое значение, то образуется только одна система волн, и, если разница плотностей будет малой, то сопротивление волн будет практически тем же самым, как в случае только одной жидкости. Если же, наоборот, c будет меньше критического значения, то может возникнуть второй тип волн, при котором амплитуда на поверхности раздела значительно превосходит амплитуду на верхней поверхности. С этими волнами связано „сопротивление мертвой воды", на которое было указано в § 231 [1]).



Фиг. 60.

Задача о погруженном цилиндре (§ 247) представляет пример, в котором может быть вычислено волновое сопротивление движению твердого тела. Средняя энергия волн, представленных вторым членом в (14) § 247, отнесенная к единице площади поверхности воды, будет равна

$$E = \frac{1}{2} g\varrho \, (4\pi\varkappa b^2 e^{-\varkappa f})^2.$$

Так как $U = {}^1/_2 c$, то из (1) следует

$$R = 4\pi^2 g\varrho b^4 \varkappa^2 e^{-2\varkappa f}. \tag{7}$$

Для данной глубины погружения (f) R имеет наибольшее значение, если $\varkappa f = 1$ или

$$c = \sqrt{gf}. \tag{8}$$

Выражая это через скорость c, получим

$$R = 4\pi^2 g^2 \varrho b^4 c^{-4} e^{-\frac{2gf}{c^2}}. \tag{9}$$

Фиг. 60 показывает нам R, как функцию c [2]).

---

[1]) Ekman, см. примечание на стр. 464; см. также цитированную там же работу Ламба.

[2]) Lamb, Ann. di Mat., см. примечание выше. Тот же самый закон, который дает сопротивление как функцию скорости c, получил Хавелок для различных типов возмущений поверхности в работе Ship Resistance, Proc. R. S., LXXXIX, 489 (1913). Укажем также на более раннюю работу этого автора, The Wave-Making Resistance of Ships . . . , Proc. R. S., LXXXII, 276 (1909).

Волны с конечной амплитудой.

§ 250. Положенное в основу исследований § 227 ограничение „бесконечно малыми" движениями требует, чтобы отношение $\frac{a}{\lambda}$ наибольшего возвышения к длине волны было мало. Определение вида волн, удовлетворяющих условиям равномерного распространения без изменения формы, если отбросить указанное ограничение, составляет содержание классической работы Стокса [1]) и многих других более поздних исследований.

Эту проблему наиболее удобно рассматривать как задачу установившегося движения. Рэлей [2]) указал, что если пренебречь малыми величинами порядка $\frac{a^3}{\lambda^3}$, то выражения

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi}{c} &= -x + \beta e^{ky}\sin kx, \\ \frac{\psi}{c} &= -y + \beta e^{ky}\cos kx \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

суть решения для случая бесконечной глубины.

Пользуясь методом последовательных приближений, найдем, что уравнение профиля волны ($\psi = 0$) имеет вид

$$\begin{aligned} y = \beta e^{ky}\cos kx &= \beta\left(1 + ky + \tfrac{1}{2}k^2y^2 + \ldots\right)\cos kx = \\ &= \tfrac{1}{2}k\beta^2 + \beta\left(1 + \tfrac{9}{8}k^2\beta^2\right)\cos kx + \tfrac{1}{2}k\beta^2\cos 2kx + \\ &\quad + \tfrac{3}{8}k^2\beta^3\cos 3kx + \ldots, \end{aligned} \qquad (2)$$

или, положив

$$\beta\left(1 + \tfrac{9}{8}k^2\beta^2\right) = a,$$

$$y - \tfrac{1}{2}ka^2 = a\cos kx + \tfrac{1}{2}ka^2\cos 2kx + \tfrac{3}{8}k^2a^3\cos 3kx + \ldots \qquad (3)$$

Выписанное здесь выражение совпадает с уравнением трохоиды, для которой длина окружности катящегося круга равна $\frac{2\pi}{k}$ или λ, а длина плеча вычерчивающей точки равна a.

---

[1]) Stokes, On the Theory of Oscillatory Waves, Camb. Trans., VIII (1847) [Papers, I, 197]. Его метод сводится к последовательному приближению, которое основывается на точных уравнениях § 9 и 20. В дополнительной работе, относящейся к 1880 г., координаты x и y рассматриваются как функции независимых переменных φ, ψ [Papers, I, 314].

[2]) Rayleigh, см. примечание на стр. 328. Метод был впоследствии настолько разработан, что он обнимает все результаты Стокса, Phil. Mag. (6). XXI, 183 [Papers, VI, II].

Мы должны еще показать, что условие постоянства давления вдоль этой линии тока может быть выполнено при подходящем подборе значения c. Из (1), не прибегая к приближениям, получаем

$$\frac{p}{\varrho} = \text{const.} - gy - \frac{1}{2}c^2\left\{1 - 2k\beta e^{ky}\cos kx + k^2\beta^2 e^{2ky}\right\}; \qquad (4)$$

и, следовательно, для точек на линии $y = \beta e^{ky}\cos kx$

$$\frac{p}{\varrho} = \text{const.} + (kc^2 - g)\,y - \frac{1}{2}k^2c^2\beta^2 e^{2ky} =$$
$$= \text{const.} + (kc^2 - g - k^3c^2\beta^2)\,y + \ldots \qquad (5)$$

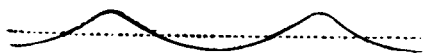
Таким образом условие для свободной поверхности будет выполняться при данной степени приближения, если

$$c^2 = \frac{g}{k} + k^2c^2\beta^2 = \frac{g}{k}(1 + k^2a^2). \qquad (6)$$

Это уравнение определяет скорость прогрессивных волн неизменяемого вида и показывает, что эта скорость немного возрастает с возрастанием амплитуды a.

Фиг. 61 показывает профиль волны, даваемой формулой (1) для $ka = {}^1/_2$ или $\frac{a}{\lambda} = 0{,}0796$ [1]).

Вид волны, приближающийся к трохоиде, имеет очертание, более острое на гребнях и более пологое во впадинах, чем это было в случае просто гармонических волн с бесконечно малой амплитудой, исследованных в § 229, и эти особенности делаются еще более заметными, если амплитуда будет расти. Если бы вид волны не только приближенно, а в точности являлся бы трохоидой, то этот предельный вид волны имел бы в гребнях заострения, как и в случае волн Герстнера, о которых мы сейчас будем говорить.



Фиг. 61.

В рассматриваемой задаче, в которой движение предполагается безвихревым, Стокс [2]) показал очень простым способом, что предельный вид волны имеет заострение с углом в 120°. Задачу можно все еще рассматривать как задачу об установившемся движении; движение же вблизи угла определяется формулами § 63; если мы, следовательно, введем полярные координаты r, θ, начало координат возьмем на гребне и полярную ось направим вертикально вниз, то мы будем иметь

$$\psi = Cr^m\cos m\theta \qquad (7)$$

[1]) Приближение в (3) едва ли будет удовлетворительным для такой большой величины ka; см. уравнение (17). Фигура 58, однако, может служить для того, чтобы дать представление об общем виде профиля волны.

[2]) Stokes, Papers, I, 227 (1880).

с условием, что $\psi = 0$ для $\theta \pm \alpha$, так что $m\alpha = {}^1/_2\pi$. Эта формула дает

$$q = mCr^{m-1}, \tag{8}$$

где q обозначает абсолютную величину скорости жидкости. Но так как скорость на гребнях обращается в нуль, то ее значение в соседней точке на свободной поверхности определяется, как в (2) § 24, из уравнения

$$q^2 = 2gr\cos\alpha. \tag{9}$$

Если сравним (8) и (9), то увидим, что $m = {}^3/_2$ и, следовательно, $\alpha = {}^1/_3\pi$ [1]).

Для волн, распространяющихся на спокойной воде, частицы на гребнях, если последние имеют предельную форму, движутся с такой же скоростью вперед, как сама волна.

Другое интересное свойство этих волн установившейся формы состоит в том, что они имеют по отношению к невозмущенной воде некоторое количество движения в направлении распространения волн. Количество движения жидкости, находящейся между свободной поверхностью и глубиной h (ниже уровня начала), причем h предполагается большим по сравнению с λ, отнесенное к длине волны, будет

$$-\varrho\int\int\frac{\partial\psi}{\partial y}\,dx\,dy = \varrho ch\lambda, \tag{10}$$

так как по предположению на поверхности $\psi = 0$ и согласно (1) на большой глубине h $\psi = ch$. При отсутствии волн уравнение свободной поверхности согласно (3) имело бы вид

$$y = \frac{1}{2}ka^2$$

и соответствующее значение количества движения равнялось бы

$$\varrho c\left(h + \frac{1}{2}ka^2\right)\lambda. \tag{11}$$

Разность этих значений, равная

$$\pi\varrho a^2 c, \tag{12}$$

и есть количество движения на длину волны для системы прогрессивных волн установившейся формы, которые движутся на воде, покоящейся на большой глубине.

Чтобы найти вертикальное распределение этого количества движения, заметим, что уравнение линии тока $\psi = ch'$ можно получить

---

[1]) Профиль волны был исследован и вычерчен Michell, The Highest Waves in Water, Phil. Mag. (5), XXXVI, 430 (1893). Он находит, что наибольшая высота равна 0,142 λ и что скорость волн больше, чем соответствующая скорость при бесконечно малой высоте в отношении 1,2 к 1; см. также Wilton, Phil. Mag. (6), XXVI, 1053 (1913).

из (2), полагая $y+h'$ вместо y и $\beta e^{-kh'}$ вместо β. Средний уровень этой линии тока определяется, следовательно, уравнением

$$y = -h' + \frac{1}{2} k\beta^2 e^{-2kh'} . \tag{13}$$

Поэтому в случае невозмущенного течения количество движения, отнесенное к длине волны слоя, заключенного между профилем поверхности и соответствующей линией тока, было бы равно

$$\varrho c\lambda \left\{ h' + \frac{1}{2} k\beta^2 (1 - e^{-2kh'}) \right\}. \tag{14}$$

Так как действительное количество движения равно $\varrho ch'\lambda$, то для волн, распространяющихся на спокойной воде, количество движения этого самого слоя равно

$$\pi\varrho a^2 c(1 - e^{-2kh'}). \tag{15}$$

Мы видим, следовательно, что движение отдельных частиц при этих прогрессивных волнах установившейся формы есть не только чистое колебательное движение, но что еще имеет место медленное, но постоянное движение всех частиц вперед в направлении распространения волн [1]). Дифференцируя (15) по h' и разделив на $\varrho\lambda$, мы получим приближенно величину этого потока в единицу времени на глубине h'; она равна

$$ka^2 ce^{-2kh'} \tag{16}$$

и убывает очень быстро от свободной поверхности вниз.

Дальнейшее приближение Стокса, которое было подтверждено независимыми вычислениями Рэлея и других, дает для профиля волны следующее уравнение:

$$y = \text{const.} + a\cos kx - \left(\frac{1}{2}ka^2 + \frac{17}{24}k^2a^4\right)\cos 2kx + \\ + \frac{3}{8}k^2a^2\cos 3kx - \frac{1}{3}k^3a^4\cos 4kx + \ldots , \tag{17}$$

а для скорости волны

$$c^2 = \frac{g}{k}\left(1 + k^2a^2 + \frac{5}{4}k^4a^4 + \ldots\right). \tag{18}$$

Вопрос о сходимости ряда, который образуется при продолжении приближения из коэфициентов при косинусах кратных дуг, а также и результирующего косинусоидального ряда, был поставлен Бурнсайдом [2]), который даже сомневался в существовании волн строго установившейся формы. Это обстоятельство побудило Рэлея [3]) предпринять детальное исследование, которое показывает, что усло-

[1]) Stokes, см. примечание на стр. 521. Другое очень простое доказательство этой теоремы было дано Рэлеем, см. примечание на стр. 328.

[2]) Burnside, Proc. Lond. Math. Soc. (2), XV, 26 (1916).

[3]) Rayleigh, Phil. Mag. (6), XXXIII, 381 (1917) [Papers, VI, 478]. Укажем также на Havelock, Proc. Roy. Soc. A, XCV, 38 (1918).

вие равномерности давления на свободной поверхности для достаточно малых значений ka может быть выполнено вплоть до очень высокой степени точности. Отсюда он заключает, что существование установившегося типа волн, вплоть до высоких волн Митчела, следует рассматривать практически, если не теоретически, как вполне достоверное. Наконец, существование указанных волн было строго установлено исследованием проф. Леви-Чивита [1]), который положил конец историческому спору.

Некоторые простые свойства этих установившихся волн можно легко установить на основании излагаемых вначале принципов [2]). Задача сводится к задаче об установившемся движении. Начало выбирается на средней уровенной поверхности, например, под гребнем. Длина волны обозначается через λ. Обозначая возвышение поверхности над средним уровнем через η, будем иметь

$$\int_0^\lambda \eta\, dx = 0. \tag{19}$$

Таким образом, если q есть скорость на свободной поверхности, а q_0 есть та же скорость на среднем уровне, то имеем

$$q^2 = q_0^2 - 2g\eta,$$

и следовательно,

$$\int_0^\lambda q^2\, dx = q_0^2\lambda; \tag{20}$$

далее, рассмотрим массу жидкости, находящейся между вертикальными стенками, проходящими через два последовательных гребня, и ограниченной снизу плоскостью $y = -h_1$, где скорость почти горизонтальна и равна c. Легко видеть, что полное вертикальное ускорение массы есть нуль, так как нет переноса через границы количества движения по вертикали. А тогда, если p есть давление на свободной поверхности, а p_1 — давление на глубине h_1, то будем иметь

$$\int_0^\lambda (p_1 - p)\, dx = g\varrho \int_0^\lambda (h_1 + \eta)\, dx = g\varrho h_1\lambda. \tag{21}$$

А сравнивая давления по одной и той же вертикали, получим

$$p_1 - p = g\varrho\,(h_1 + \eta) + \frac{1}{2}(q^2 - c^2),$$

и, следовательно,

$$\int_0^\lambda q^2\, dx = c^2\lambda. \tag{22}$$

Полученный результат мы можем выразить словами так: среднее от квадрата скорости на поверхности, отнесенное к одинаковым приращениям x, равно c^2. Из (20) также следует, что $q_0 = c$, т. е. скорость в точках пересечения профиля волны со средним уровнем равна c.

---

[1]) Levi-Civitá, Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie, Math. Ann., XCIII, 264 (1925). Распространение этого метода на волны в канале конечной глубины было сделано Struik, Math. Ann., XCV, 595 (1926).

[2]) Levi-Civitá, см. выше.

§ 251. Система *точных* уравнений, которые дают возможную форму волнового движения для бесконечной глубины жидкости, была установлена еще очень давно, именно в 1802 г. Герстнером [1]), а позднее независимо Ранкином [2]). Физическое значение этих результатов, однако, несколько уменьшается в виду того обстоятельства, что движение при этих волнах является вихревым.

Если взять ось x горизонтальной, а ось y провести вертикально вверх, то формулы для рассматриваемой задачи могут быть написаны в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \frac{1}{k}\, e^{kb} \sin k(a+ct), \\ y &= b - \frac{1}{k}\, e^{kb} \cos k(a+ct), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где обозначения введены в согласии с методом Лагранжа (§ 16), т. е. a, b обозначают два параметра, служащие для определения самой частицы, а x и y суть координаты этой частицы в момент t. Постоянная k определяет длину волны, а c — скорость волн, которые распространяются в направлении отрицательной оси x.

Чтобы проверить это решение и определить значение c, заметим сначала, что

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} = 1 - e^{2kb}, \tag{2}$$

так что уравнение неразрывности в форме Лагранжа [§ 16 (2)] будет удовлетворяться. Далее, подставляя из (1) в уравнения движения (§ 13), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{p}{\varrho} + gy\right) &= \quad kc^2 e^{kb} \sin k(a+ct), \\ \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{p}{\varrho} + gy\right) &= -kc^2 e^{kb} \cos k(a+ct) + kc^2 e^{2kb}; \end{aligned} \tag{3}$$

и отсюда

$$\begin{aligned} \frac{p}{\varrho} = \text{const.} - g\left\{b - \frac{1}{k}\, e^{kb} \cos k(a+ct)\right\} - \\ - c^2 e^{kb} \cos k(a+ct) + \frac{1}{2}\, c^2 e^{2kb}. \end{aligned} \tag{4}$$

Для частицы на свободной поверхности давление должно быть постоянным; это требует

$$c^2 = \frac{g}{k}, \tag{5}$$

как в § 229. Отсюда получается

$$\frac{p}{\varrho} = \text{const.} - gb + \frac{1}{2}\, c^2 e^{2kb}. \tag{6}$$

---

[1]) Герстнер был профессором математики в Праге, 1789—1823. Его трактат „Теория волн" был опубликован в Abh. d. k. böhm. Ges. d. Wiss. (1802) [Gilbert's Annalen der Physik, XXXII (1809)].

[2]) Rankine, On the Exact Form of Waves near the Surface of Deep Water, Phil Trans., 1863 [Papers, стр. 481].

Согласно (1) траектория произвольной частицы (a, b), очевидно, есть окружность с радиусом $k^{-1}e^{kb}$.

Мы уже сказали, что движение жидкости при этих волнах будет вихревым. Чтобы это доказать, заметим, что

$$u\,\delta x + v\,\delta y = \left(\dot{x}\,\frac{\partial x}{\partial a} + \dot{y}\,\frac{\partial y}{\partial a}\right)\delta a + \left(\dot{x}\,\frac{\partial x}{\partial b} + \dot{y}\,\frac{\partial y}{\partial b}\right)\delta b = \\ = \frac{c}{k}\,\delta\left\{e^{kb}\sin k(a+ct)\right\} + ce^{2kb}\,\delta a, \tag{7}$$

а это не является полным диференциалом.

Циркуляция по контуру параллелограма, вершины которого совпадают с частицами

$$(a,\ b),\ (a+\delta a,\ b),\ (a,\ b+\delta b),\ (a+\delta a,\ b+\delta b),$$

будет равна, следовательно,

$$-\frac{\partial}{\partial b}\left(ce^{2kb}\,\delta a\right)\delta b,$$

а величина площади области, ограниченной параллелограмом, равна

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)}\,\delta a\,\delta b = (1 - e^{2kb})\,\delta a\,\delta b.$$

Следовательно, модуль вихря (ω) элемента (a, b) будет равен

$$\omega = -\frac{2kce^{2kb}}{1 - e^{2kb}}. \tag{8}$$

Имея наибольшую величину на поверхности, он убывает очень быстро с увеличением глубины. *Направление* же вихря противоположно направлению движения частиц по их круговым траекториям.

Система волн рассматриваемого типа не может быть разрушена или образована из состояния покоя под действием сил вида, предполагаемого в общей теореме § 17, 33. Мы можем, однако, допустить, что жидкость под действием выбранных подходящим образом давлений, распределенных на свободной поверхности жидкости, постепенно приводится в такое состояние, когда течение происходит по горизонтальной прямой как раз со скоростью (u'), зависящей только от ординаты (y') [1]. При этом состоянии будем иметь $\frac{\partial x'}{\partial a} = 1$, в то время как y' будет функцией от b, и эта функция определяется из условия

$$\frac{\partial(x', y')}{\partial(a, b)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)}, \tag{9}$$

или

$$\frac{\partial y'}{\partial b} = 1 - e^{2kb}. \tag{10}$$

[1]) Более полное изложение доказательства можно найти у Стокса, Papers, I, 222.

Отсюда получается

$$\frac{du'}{db} = \frac{du'}{dy'}\frac{dy'}{db} = -2\omega\frac{dy'}{db} = 2kce^{2kb}, \tag{11}$$

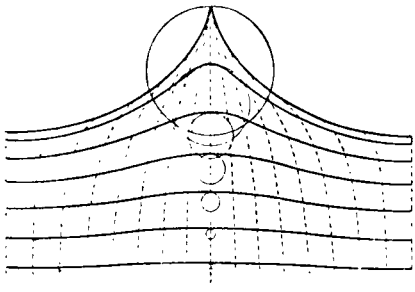
и, следовательно,

$$u' = ce^{2kb}. \tag{12}$$

Таким образом, чтобы образовать волны с помощью обыкновенных сил, нам необходимо в качестве начального состояния иметь горизонтальное движение, имеющее направление, *противоположное* направлению распространения образовавшихся в конце концов волн, и такое, которое очень быстро убывает от свободной поверхности вниз по закону (12); b при этом есть функция от y', определяемая уравнением

$$y' = b - \frac{1}{2}k^{-1}e^{2kb}. \tag{13}$$

Необходимо отметить, что эти вихревые волны, раз они образовались, имеют количество движения, равное нулю.



Фиг. 62.

Фиг. 62 показывает линии равного давления $b = \text{const.}$ для ряда равноотстоящих значений b [1]). Кривые суть трохоиды, получающиеся при качении кругов с радиусами k^{-1} по нижней стороне прямых $y = b + k^{-1}$, а расстояния производящих точек от соответствующих центров будут равны $k^{-1}e^{kb}$. Каждая из этих линий может рассматриваться как свободная поверхность, причем предельная допустимая форма представляет обыкновенную циклоиду. Пунктирные линии представляют последовательные положения тех частиц, которые находились на вертикали при прохождении через гребень или впадину.

§ 252. При своих интересных экспериментальных исследованиях [2]) Скотт Руссель вынужден был обратить большое внимание на специальный тип волн, который он назвал „одиночными волнами". Это есть волна, состоящая из одного единственного возвышения, высота которого не должна быть обязательно мала сравнительно с глубиной жидкости, и которая, если она соответственным образом воз-

[1]) Рисунок очень похож на тот рисунок, который первоначально дал Герстнер и который затем позднейшими авторами повторялся более или менее похожим на оригинал. Версия исследования Герстнера с включением в одном пункте некоторой поправки была приведена во втором издании этого труда в § 233.

[2]) Scott Russel, Report on Waves, Brit. Ass. Rep., 1844.

никла, может распространяться на значительные расстояния без или с малым изменением формы вдоль канала постоянного сечения. Волны, которые состоят из одной впадины такой же относительной амплитуды, как было найдено, не обладают такой же прочностью и распадаются на ряд более коротких волн.

„Одиночную волну" Русселя можно рассматривать как предельную форму колебательной волны Стокса установившегося вида, причем, так как длина волны должна быть большой сравнительно с глубиной канала, далеко лежащие друг от друга возвышения практически будут независимы друг от друга. Примененные Стоксом приближенные методы оказываются, однако, непригодными, если длина волны намного превосходит глубину, поэтому дальнейшие исследования об одиночных волнах установившегося вида развивались в другом направлении.

Первые подобные исследования были проведены независимо друг от друга Буссинеском [1]) и Рэлеем [2]). Последний, рассматривая задачу как задачу об установившемся движении, исходит в основном из формулы

$$\varphi + i\psi = F(x+iy) = e^{iy\frac{d}{dx}} F(x), \tag{1}$$

где $F(x)$ есть функция действительного переменного.

Этот прием в особенности подходит для случаев, подобных рассматриваемому, в которых одна из линий тока есть прямая. Из (1) будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= F - \frac{y^2}{2!}F'' + \frac{y^4}{4!}F^{IV} \dots, \\ \psi &= yF' - \frac{y^3}{3!}F''' + \frac{y^5}{5!}F^{V} \dots, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где индексы указывают на дифференцирование по x. Линия тока $\psi = 0$ образует здесь дно канала, а на свободной поверхности $\psi = -ch$, где h обозначает глубину, а c — постоянная скорость тех частиц жидкости, которые достаточно отдалены от волны и вперед и назад.

Условие для постоянства давления вдоль свободной поверхности дает

$$u^2 + v^2 = c^2 - 2g(y-h) \tag{3}$$

или, подставляя из (2),

$$F'^2 - y^2F'F''' + y^2F''^2 + \dots = c^2 - 2g(y-h). \tag{4}$$

Согласно (2), вдоль той же самой поверхности имеем

$$yF' - \frac{y^3}{3!}F''' + \dots = -ch. \tag{5}$$

Исключив F из уравнений (4) и (5), получим дифференциальное уравнение, определяющее ординату y свободной поверхности. Если (как мы и примем) функция $F'(x)$ и ее производные меняются настолько медленно с x, что они изменятся только на малую долю своих значений, когда x возрастет на величину порядка глубины h, то члены в уравнениях (4) и (5) будут постепенно убывать, и указанное исключение можно выполнить с помощью последовательных приближений.

[1]) Boussinesq, Compte Rendus, 19 июня 1871.
[2]) Rayleigh, см. примечание на стр. ...

Так, из уравнения (5) будем иметь

$$F' = -\frac{c \cdot h}{y} + \frac{1}{6} y^2 F''' + \ldots = -ch\left\{\frac{1}{y} + \frac{1}{6} y^2 \left(\frac{1}{y}\right)'' + \ldots\right\}; \quad (6)$$

и, если мы сохраним только члены порядка выписанных в конце (6), то уравнение (4) примет вид

$$\frac{1}{y^2} - \frac{2}{3} y\left(\frac{1}{y}\right)'' + y^2\left(\frac{1}{y}\right)' = \frac{1}{h^2} - \frac{2g(y-h)}{c^2h^2}$$

или, после некоторого приведения,

$$\frac{1}{y^2} + \frac{2}{3}\frac{y''}{y} - \frac{1}{3}\frac{y'^2}{y^2} = \frac{1}{h^2} - \frac{2g(y-h)}{c^2h^2}. \quad (7)$$

Если умножим (7) на y' и проинтегрируем, причем определим произвольную постоянную таким образом, что $y' = 0$ для $y = h$, то получим

$$-\frac{1}{y} + \frac{1}{3}\frac{y'^2}{y} = -\frac{1}{h} + \frac{y-h}{h^2} - \frac{g(y-h)^2}{c^2h^2},$$

или

$$y'^2 = 3\frac{(y-h)^2}{h^2}\left(1 - \frac{gy}{c^2}\right). \quad (8)$$

Отсюда следует, что y' обращается в нуль только для $y = h$ и $y = \frac{c^2}{g}$, и так как последний множитель должен быть положительным, то $\frac{c^2}{g}$ есть, очевидно, *максимальное* значение y. Следовательно, волна необходимо будет состоять только из одного возвышения, и, обозначив через a наибольшее возвышение над невозмущенным уровнем, будем иметь

$$c^2 = g(h + a); \quad (9)$$

это выражение представляет в точности эмпирическую формулу, которую установил Руссель для скорости волн.

Предельная форма волны должна иметь, как в § 250, острый гребень в 120°, и так как жидкость здесь находится в покое, то будем иметь $c^2 = 2ga$. Если бы формула (9) была применима к такому предельному случаю, то получилось бы, что $a = h$.

Если для краткости положить

$$\left.\begin{aligned} y - h &= \eta, \\ \frac{h^2(h+a)}{3a} &= b^2, \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

то из (8) получится уравнение

$$\eta' = \pm\frac{\eta}{b}\left(1 - \frac{\eta}{a}\right)^{1/2}, \quad (11)$$

интеграл которого равен

$$\eta = a\,\mathrm{sech}^2\frac{1}{2}\frac{x}{b}, \quad (12)$$

при условии, что начало взято в точности под гребнем.

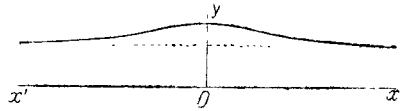
Определенной „длины волны" не существует, но можно в качестве приблизительного указания относительно протяжения волны отметить, что возвышение имеет десятую часть своего максимума, если $\frac{x}{b} = 3{,}636$.

Фиг. 63 представляет изображение кривой

$$y = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sech}^2 \frac{1}{2}x$$

и дает профиль волны для случая $a = {}^1/_2 h$. Для более низких волн надо уменьшить масштаб для x и увеличить масштаб для y соответственно приложенной таблице, в которой для различных значений $\frac{a}{h}$ дано отношение $\frac{b}{h}$ и, следовательно, дан горизонтальный масштаб.

a/h	b/h
0,1	1,915
0,2	1,414
0,3	1,202
0,4	1,080
0,5	1,000
0,6	0,943
0,7	0,900
0,8	0,866
0,9	0,839
1,0	0,816



Фиг. 63.

При рассмотрении изложенного выше исследования можно установить, что приближение сказалось в том, что мы пренебрегаем четвертой степенью отношения $\frac{h+a}{2b}$ [1]).

Если сообщить жидкости скорость $-c$ параллельно оси x, то получим случай прогрессивной волны на спокойной воде. Легко показать, что тогда для малых значений отношения $\frac{d}{h}$ траектория каждой частицы есть дуга параболы, ось которой направлена вертикально и вершина которой обращена вверх [2]).

С первого взгляда может казаться, что эта теория несовместима с результатами § 187, где было доказано, что волна конечной амплитуды, длина которой велика сравнительно с глубиной, должна безусловно испытывать постоянное изменение формы при поступательном ее движении, причем это изменение происходит тем быстрее, чем больше возвышение над невозмущенным уровнем. Однако там мы предполагали, что длина волны является настолько большой, что вертикальным ускорением можно пренебречь и, следовательно, считать горизонтальную скорость от поверхности до дна почти постоянной (§ 169). Вышеприведенная числовая таблица показывает также, что „одиночная волна" тем ниже, чем она длиннее. Другими словами: чем более она приближается к характеру „длинной" волны, в смысле § 169, тем легче предотвращается изменение формы незначительным приспособлением скоростей частиц [3]).

Движение в крайних частях одиночной волны может быть представлено одной очень простой формулой. Рассматривая прогрессивную волну, распространяющуюся в направлении положительной оси x, и выбирая начало координат на дне канала, именно в точке на передней стороне волны, положим

$$\varphi = Ae^{-m(x-ct)} \cos my. \qquad (13)$$

[1]) Теория одиночной волны была изучена Weinstein, Lincei (6), III, 463 (1926), методом Леви-Чивита, на который была ссылка в § 250. Он нашел, что формула (9) представляет очень хорошее приближение.

[2]) Boussinesq, см. выше.

[3]) Stokes, On the Highest Wave of Uniform Propagation, Proc. Camb. Phil. Soc., IV, 361 (1883) [Papers V, 140].

Уравнение $\Delta\varphi = 0$ при этом удовлетворяется, а условие на поверхности

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \tag{14}$$

также будет удовлетворяться для $y = h$, если

$$c^2 = gh\frac{\operatorname{tg} mh}{mh}. \tag{15}$$

Легко видеть, что это приблизительно совпадает с исследованием Рэлея, если положить $m = b^{-1}$.

Вышеизложенное замечание, которое было сообщено автору покойным сэром Георгом Стоксом [1]), было вызвано исследованием Кована [2]), который показал, что формула

$$\frac{\varphi + i\psi}{c} = -(x + iy) + a\operatorname{tg} h\frac{1}{2}m(x + iy) \tag{16}$$

удовлетворяет условиям приближенно до высокой степени точности, если принять

$$c^2 = \frac{g}{m}\operatorname{tg} mh \tag{17}$$

и

$$\left.\begin{aligned} ma &= \frac{2}{3}\sin^2 m\left(h + \frac{2}{3}a\right), \\ a &= a\operatorname{tg}\frac{1}{2}m(h + a), \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где a обозначает максимальное возвышение над невозмущенным уровнем, а a есть некоторая вспомогательная постоянная. В более поздней работе была исследована [3]) предельная форма волн, где угол при гребне равен 120°. Предельное значение отношения $\frac{a}{h}$ получается равным 0,78; скорость волн в этом случае определяется из равенства $c^2 = 1{,}56\,gh$.

§ 253. Исследование Рэлея и Буссинеска можно слегка видоизменить таким образом, что оно будет давать теорию *колебательных* волн конечной высоты в канале ограниченной глубины [4]).

Рассматривая задачу как задачу об установившемся движении, получим для количества движения на длину волны (λ) выражение

$$\iint \varrho u\,dx\,dy = -\varrho\iint\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx\,dy = -\varrho\psi_1\lambda. \tag{19}$$

---

[1]) Stokes, Papers, V, 62.

[2]) Mc. Cowan, On the Solitary Wave, Phil. Mag. (5), XXXII, 45 (1891).

[3]) Mc. Cowan, On the Highest Wave of Permanent Type, Phil. Mag. (5), XXXVIII, 351 (1894).

[4]) Korteweg u. De Vries, On the Change of Form of Long Waves advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves, Phil. Mag. (5), XXXIX, 422 (1895). Метод этих авторов слегка отличается от вышеизложенного. Как указывает заглавие, эта работа содержит также исследование о том, как меняется профиль волны в некоторый произвольный момент, если не выполнены условия для постоянства формы.

Другое изменение метода Рэлея можно найти у Gwyther, Phil. Mag. (5), L, 213, 308, 349 (1900).

где ψ_1 соответствует свободной поверхности. Если h обозначает среднюю глубину, то это количество движения может быть положено равным $\varrho ch\lambda$, где c означает (по смыслу) среднюю скорость потока. Здесь на поверхности имеем, как и раньше, $\psi_1 = -ch$. Произвольную постоянную в (3) оставляем пока неопределенной, тогда можем написать

$$u^2 + v^2 = C - 2gy. \tag{20}$$

В таком случае вместо (8) получим

$$y'^2 = \frac{3\lambda}{c^2h^2}(y-l)(h_1-y)(y-h_2), \tag{21}$$

где h_1, h_2 обозначают верхний и нижний пределы y, и

$$l = \frac{c^2h^2}{gh_1h_2}. \tag{22}$$

Отсюда следует, что l не может быть больше чем h_2.

Если теперь положить

$$y = h_1\cos^2\chi + h_2\sin^2\chi, \tag{23}$$

то будем иметь

$$\beta\frac{d\chi}{dx} = \sqrt{1-k^2\sin^2\chi}, \tag{24}$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{4h_1h_2l}{3(h_1-l)}}, \qquad k^2 = \frac{h_1-h_2}{h_1-l}. \tag{25}$$

Следовательно, если мы возьмем начало для x на гребне, то будем иметь

$$x = \beta\int_0^{\chi}\frac{d\chi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}} = \beta F(\chi, k) \tag{26}$$

и

$$y = h_2 + (h_1-h_2)\,\mathrm{cn}^2\frac{x}{\beta}\quad [\mathrm{mod}\ k]. \tag{27}$$ [1])

Длина волны определяется формулой

$$\lambda = 2\beta\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\chi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}} = 2\beta F_1(k). \tag{28}$$

Далее из (23) и (24) следует

$$\int_0^{\lambda} y\,dx = 2\beta\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{h_1\cos^2\chi + h_2\sin^2\chi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}}\,d\chi = 2\beta\{lF_1(k) + (h_1-l)E_1(k)\}. \tag{29}$$

Так как это должно быть равно $h\lambda$, то имеем

$$(h-l)F_1(k) = (h_1-l)E_1(k). \tag{30}$$

---

[1]) Волны, представляемые формулой (27), указанные авторы называют „cnoidal waves". Что касается метода получения более высокой степени приближения, то мы должны отослать читателя к оригиналу.

Уравнения (25), (28), (30) представляют четыре соотношения между шестью величинами h_1, h_2, l, k, λ, β. Следовательно, когда две из этих величин будут даны, остальные можно будет определить аналитически. Скорость волн c определяется тогда из (22) [1]). Например, форма волн и их скорость могут быть выражены через длину λ и высоту h_1 гребней относительно дна.

Одиночная волна § 252 сюда включается как частный случай. Если положить $l=h_2$, то $k=1$ и формулы (28) и (30) показывают тогда, что $\lambda=\infty$, $h_2=h$.

§ 254. Гельмгольц [2]) привел теорию волн установившейся формы в связь с общими принципами динамики.

Если в уравнениях движения „гиростатической" системы (23) § 141 положить

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{\partial V}{\partial q_1},\\ Q_2 &= -\frac{\partial V}{\partial q_2},\\ &\cdots\cdots\\ Q_n &= -\frac{\partial V}{\partial q_n}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где V обозначает потенциальную энергию, то в качестве условий установившегося движения при постоянных $q_1, q_2, \ldots, q_n$ получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial q_1}(V+K)=0,\\ &\frac{\partial}{\partial q_2}(V+K)=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{\partial}{\partial q_n}(V+K)=0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Здесь K есть энергия того движения, которое соответствует произвольно данным значениям координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$, если эти последние вследствие применения соответственным образом выбранных внешних сил сохраняются постоянными.

Мы предполагаем, что эта энергия выражена через постоянные обобщенные импульсы, соответствующие скрытым координатам χ, $\chi', \ldots$, и через явные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Но она также может быть выражена через скорости χ, $\chi', \ldots$ и координаты q_1,

---

[1]) Если глубина будет конечной, то возникает вопрос, что именно следует понимать под скоростью распространения. То, что называлось в тексте скоростью, есть скорость профиля волны по отношению к центру инерции той массы жидкости, которая заключена между двумя вертикальными плоскостями, отдаленными друг от друга на длину волны. Ср. Stokes, Papers, I, 202.

[2]) Helmholtz, Die Energie der Wogen und des Windes, Berl. Monatsber., 17 июля 1890 [Wiss. Abh., III, 333].

$q_2, \ldots, q_n$; в этой форме мы обозначим ее через T_0. Точно так, как в § 142, можно показать, что

$$\frac{\partial T_0}{\partial q_r} = -\frac{\partial K}{\partial q_r},$$

так что условия (2) равносильны условиям

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(V - T_0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial q_2}(V - T_0) = 0, \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial q_n}(V - T_0) = 0. \tag{3}$$

Следовательно, условие для свободного установившегося движения с произвольно заданными постоянными значениями q_1, $q_2, \ldots, q_n$ состоит в том, что соответствующее значение $V + K$ или $V - T_0$ должно быть стационарным; ср. (7) § 203.

Далее, если мы напишем в уравнениях § 141 $-\frac{\partial V}{\partial q_r} + Q_r$ вместо Q_r, так что Q_r представляет теперь компоненту внешних сил, то найдем, умножая последовательно на $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ и затем складывая,

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{T} + V + K) = Q_1\dot{q}_1 + Q_2\dot{q}_2 + \ldots + Q_n\dot{q}_n, \tag{4}$$

где $\mathfrak{T}$ есть та часть энергии, которая зависит от скоростей $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$. С помощью такого же рассуждения, как в § 205, мы получим, что если имеются налицо диссипативные силы, которые влияют на координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$, но не на скрытые координаты $\chi, \chi', \ldots$, то условие для „вековой" устойчивости будет состоять в том, что $V + K$ должно быть минимумом.

При применении к задаче об установившихся волнах мы достигнем большей ясности, если удалим из рассматриваемого вопроса все бесконечное, принимая, что жидкость циркулирует в кольцеобразном канале постоянного прямоугольного поперечного сечения (стороны которого горизонтальны и вертикальны) очень большого радиуса. За обобщенную скорость $\dot{\chi}$, соответствующую скрытой координате, можно взять поток через единицу ширины канала, а постоянное количество движения циркуляции можно заменить через циклическую константу $\varkappa$. Координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ общей теории представятся здесь через значения возвышения поверхности η, которая рассматривается как функция пространственной координаты продольного направления x. Соответствующие же компоненты внешней силы представляются произвольными давлениями, действующими на поверхность.

Если обозначить через l общую длину канала, то на единицу ширины будем иметь

$$V = \frac{1}{2} g\varrho \int_0^l \eta^2\, dx, \tag{5}$$

где η удовлетворяет условию

$$\int_0^l \eta\, dx = 0. \tag{6}$$

Если бы также легко мы могли найти общее выражение для кинетической энергии стационарного движения, соответствующего произвольной заданной форме поверхности, то приведенное выше условие в какой-либо из данных форм позволило бы с помощью обычного приема вариационного исчисления определить возможные, если таковые существуют, формы стационарных волн [1]).

Практически это можно установить не иначе как методами последовательных приближений; но для известного уяснения вопроса мы можем воспроизвести, пользуясь настоящей теорией, результаты, которые мы получили для „длинных" волн с бесконечно малой амплитудой.

Если обозначим через h глубину канала, то скорость в любом поперечном сечении, когда поверхность с произвольным возвышением η находится в покое, будет равна $\frac{\dot{\chi}}{h+\eta}$, где $\dot{\chi}$ обозначает поток. Следовательно, для циклической постоянной приближенно будем иметь

$$\varkappa = \dot{\chi}\int_0^l (h+\eta)^{-1}\,dx = \frac{l\dot{\chi}}{h}\left(1+\frac{1}{h^2 l}\int_0^l \eta^2\,dx\right), \tag{7}$$

где члены первого порядка относительно η в силу уравнения (6) опущены.

Кинетическая энергия $^1/_2\varrho\varkappa\dot{\chi}$ может быть выражена как через $\dot{\chi}$, так и через $\varkappa$. Таким образом мы получаем обе формы в виде

$$T_0 = \frac{1}{2}\frac{\varrho l\dot{\chi}^2}{h}\left(1+\frac{1}{h^2 l}\int_0^l \eta^2\,dx\right), \tag{8}$$

$$K = \frac{1}{2}\frac{\varrho h\varkappa^2}{l}\left(1-\frac{1}{h^2 l}\int_0^l \eta^2\,dx\right). \tag{9}$$

Переменная часть от $V - T_0$ будет равна

$$\frac{1}{2}\varrho\left(g-\frac{\dot{\chi}}{h^3}\right)\int_0^l \eta^2\,dx, \tag{10}$$

а от $V+K$ равна

$$\frac{1}{2}\varrho\left(g-\frac{\varkappa^2}{hl^2}\right)\int_0^l \eta^2\,dx. \tag{11}$$

Очевидно, обе эти величины стационарны для $\eta=0$ и остаются такими для *любых* бесконечно малых значений η, если только

$$\dot{\chi}^2 = gh^3 \quad \text{или} \quad \varkappa^2 = ghl^2.$$

---

[1]) Относительно некоторых общих исследований задачи об установившихся волнах на поверхности раздела двух потоков укажем на работу Гельмгольца. Она содержит в конце также некоторые, основанные на вычислении энергии и количества движения рассуждения относительно длины тех волн, которые вызываются в первый момент благодаря ветру данной скорости. Эти исследования, повидимому, содержат допущение о том, что волны предполагаются обязательно установившегося вида, так как только на основании подобного допущения можно получить определенное значение для количества движения ряда волн малой амплитуды.

Если положить $\varkappa = ch$ или $\varkappa = cl$, то это условие дает в согласии с § 175

$$c^2 = gh. \tag{12}$$

Более того, оказывается, что предположение $\eta = 0$ обращает $V + K$ в максимум или минимум, смотря по тому, будет ли c^2 больше или меньше, чем gh. Другими словами, плоская форма поверхности тогда и только тогда вековым образом устойчива, если $c < \sqrt{gh}$. Необходимо, однако, отметить, что рассмотренные здесь диссипативные силы имеют особый характер; они влияют на *вертикальное* движение поверхности, но не (прямым образом) на течение жидкости. В противном случае из § 175 очевидно, что если для сохранения какой-либо данной установившейся формы поверхности приложены давления, то тогда эти давления для $c^2 > gh$ должны быть наибольшими в возвышениях и наименьшими во впадинах. Отсюда, если эти давления удалить, то неровности поверхности будут иметь стремление усиливаться.

Распространение волн в двух измерениях.

§ 255. Рассмотрим теперь некоторые случаи распространения волн в двух горизонтальных измерениях x и y. Направив ось z вертикально вверх, мы будем иметь, предполагая движения бесконечно малыми,

$$-\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz + F(t), \tag{1}$$

где φ удовлетворяет уравнению

$$\Delta \varphi = 0. \tag{2}$$

Произвольную функцию $F(t)$ можно включить в значение $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

Если мы возьмем начало координат на невозмущенной поверхности и обозначим через ζ возвышение над этим уровнем в момент t, то из условия постоянства давления на поверхности получим

$$\zeta = \frac{1}{g}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]_{z=0}, \tag{3}$$

а кинематическое условие на поверхности представится в виде

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]_{z=0}; \tag{4}$$

ср. § 227. Следовательно, для $z = 0$ должно иметь место

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \tag{5}$$

или, в случае простых гармонических колебаний,

$$\sigma^2 \varphi = g\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{6}$$

если множитель, зависящий от времени, равен $e^{i(\sigma t + \varepsilon)}$.

Предполагая жидкость простирающейся до бесконечности в горизонтальном направлении и вниз, рассмотрим вкратце эффект локального начального возмущения, симметричного относительно начала координат.

Согласно § 100 легко видеть, что типовое решение для случая начального состояния равновесия будет

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= g\frac{\sin\sigma t}{\sigma}e^{kz}J_0(k\widetilde{\omega}),\\ \zeta &= \cos\sigma t J_0(k\widetilde{\omega}), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где, как в § 228,

$$\sigma^2 = gk. \tag{8}$$

Чтобы обобщить этот результат, сохраняя симметрию, прибегнем к теореме (12) § 100, а именно к формуле

$$f(\widetilde{\omega}) = \int_0^\infty J_0(k\widetilde{\omega})\,k\,dk\int_0^\infty f(\alpha)\,J_0(k\alpha)\,\alpha\,d\alpha. \tag{9}$$

Принимая во внимание начальные условия

$$\zeta = f(\widetilde{\omega}), \quad \varphi_0 = 0, \tag{10}$$

мы будем иметь

$$\varphi = g\int_0^\infty \frac{\sin\sigma t}{\sigma}e^{kz}J_0(k\widetilde{\omega})\,k\,dk\int_0^\infty f(\alpha)\,J_0(k\alpha)\,\alpha\,d\alpha,$$

$$\zeta = \int_0^\infty \cos\sigma t J_0(k\widetilde{\omega})\,k\,dk\int_0^\infty f(\alpha)\,J_0(k\alpha)\,\alpha\,d\alpha. \tag{11}$$

Если начальное возвышение ограничивается непосредственной близостью с началом координат и если мы положим

$$\int_0^\infty f(\alpha)\,2\pi\alpha\,d\alpha = 1, \tag{12}$$

то будем иметь

$$p = \frac{g}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\sigma t}{\sigma}e^{kz}J_0(k\widetilde{\omega})\,k\,dk. \tag{13}$$

Разлагая в ряд и применяя уравнение (8), получим

$$\varphi = \frac{gt}{2\pi}\int_0^\infty \left\{k - \frac{gt^2}{3!}k^2 + \frac{(gt^2)^2}{5!}k^3 - \ldots\right\}e^{kz}J_0(k\widetilde{\omega})\,dk. \tag{14}$$

Если положить

$$z = -r\cos\theta, \qquad \widetilde{\omega} = r\sin\theta, \tag{15}$$

то, согласно (9) § 102, будем иметь

$$\int_0^\infty e^{kz} J_0(k\widetilde{\omega})\, dk = \frac{1}{r} \tag{16}$$

и далее [1])

$$\int_0^\infty e^{kz} J_0(k\widetilde{\omega})\, k^n\, dk = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \frac{1}{r} = n!\,\frac{P_n(\mu)}{r^{n+1}}, \tag{17}$$

где $\mu = \cos\theta$ (ср. § 85). Отсюда получается

$$\varphi = \frac{gt}{2\pi}\left\{\frac{P_1(\mu)}{r^2} - \frac{gt^2}{3!}\,\frac{2!\,P_2(\mu)}{r^3} + \frac{(gt^2)^2}{5!}\,\frac{3!\,P_3(\mu)}{r^4} - \ldots\right\}. \tag{18}$$

Значение ζ вычисляется отсюда с помощью формулы (3). Из §§ 84, 85 следует, что

$$P_{2n+1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n\,\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n} \tag{19}$$

и, следовательно,

$$\zeta = \frac{1}{2\pi\widetilde{\omega}^2}\left\{\frac{1^2}{2!}\,\frac{gt^2}{\widetilde{\omega}} - \frac{1^2\cdot 3^2}{6!}\left(\frac{gt^2}{\widetilde{\omega}}\right)^2 + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{10!}\left(\frac{gt^2}{\widetilde{\omega}}\right)^5 - \ldots\right\}. \tag{20}$$ [2])

Отсюда следует, что каждая особая фаза движения связана с особым значением величины $\frac{gt^2}{\widetilde{\omega}}$ и что, следовательно, различные фазы распространяются от начала координат по радиусам наружу, каждая с постоянным ускорением.

До сих пор не удалось найти выражение, эквивалентное ряду (20), подобное формуле (21) § 238, которая была установлена для плоского случая и которая, следовательно, была бы подходящей в случае, когда $\frac{gt^2}{\widetilde{\omega}}$ велико. Методом Кельвина (§ 241) можно, однако, получить приближенное значение. Так как $J_0(z)$ есть колеблющаяся функция, стремящаяся с возрастанием z стать периодической с периодом 2π, как $\sin z$, то элементы интеграла в (13) большей частью будут взаимно сокращаться за исключением тех, для которых приближенно

$$t\,\frac{d\sigma}{dk} = \widetilde{\omega} \quad \text{или} \quad k\widetilde{\omega} = \frac{gt^2}{4\widetilde{\omega}}. \tag{21}$$

---

[1]) Hobson, Proc. Lond. Math. Soc., XXV, 72, 73 (1893). Эта формула, однако, не обязательна; см. стр. 482, сноска 1.

[2]) Этот результат принадлежит Коши и Пуассону.

Для больших значений $k\widetilde{\omega}$, согласно формуле (15) § 194, имеем приближенно

$$J_0(k\widetilde{\omega}) = \left(\frac{2}{\pi k\widetilde{\omega}}\right)^{1/2} \sin\left(k\widetilde{\omega} + \frac{1}{4}\pi\right); \tag{22}$$

следовательно, формулу (13) можно заменить через

$$\varphi = \frac{g^{1/2}}{2^{3/2}\pi^{3/2}\widetilde{\omega}^{1/2}} \int_0^\infty e^{kz} \cos\left(\sigma t - k\widetilde{\omega} - \frac{1}{4}\pi\right) dk. \tag{23}$$

Сравнивая с формулами (7) и (9) § 241 и полагая затем $z=0$, найдем для значения φ на поверхности

$$\varphi_0 = \frac{g^{1/2}}{2\pi\widetilde{\omega}^{1/2}\sqrt{\left|t\frac{d^2\sigma}{dk^2}\right|}} \sin(\sigma t - k\widetilde{\omega}); \tag{24}$$

входящие сюда величины k и σ выражаются при помощи (8) и (21) через $\widetilde{\omega}$ и t. Здесь принято во внимание, что $\frac{d^2\sigma}{dk^2}$ будет отрицательным. Так как

$$\sigma t = (gkt^2)^{1/2} = 2k\widetilde{\omega},$$

$$t\frac{d^2\sigma}{dk^2} = -\frac{1}{4} g^{1/2} t k^{-3/2} = -\frac{2\widetilde{\omega}^3}{gt^2}, \tag{25}$$

то имеем

$$\varphi_0 = \frac{gt}{2^{3/2}\pi\widetilde{\omega}^2} \sin\frac{gt^2}{4\widetilde{\omega}}. \tag{26}$$

Возвышение поверхности определяется тогда формулой (3). Если мы в соответствии с предшествующим сохраним только наиболее важные члены, то получим

$$\zeta = -\frac{gt^2}{2^{5/2}\pi\widetilde{\omega}^3} \cos\frac{gt^2}{4\widetilde{\omega}}, \tag{27}$$

что совпадает с результатом, полученным Коши и Пуассоном другим путем.

Нет надобности останавливаться на истолковании этого результата; его можно вполне осмыслить из того, что было сказано в § 240 для двухмерного случая. Следствия были разобраны обстоятельно Пуассоном для случая начальной депрессии в форме параболоида.

Если в качестве начальных условий даны импульсы, то типовым решением будет

$$\left.\begin{aligned} \varrho\varphi &= \cos\sigma t e^{kz} J_0(k\widetilde{\omega}), \\ \zeta &= -\frac{\sigma}{g\varrho} \sin\sigma t J_0(k\widetilde{\omega}). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Обобщая это решение для начальных условий

$$\left.\begin{aligned} \varrho\varphi_0 &= F(\widetilde{\omega}), \\ \zeta &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

получим

$$\varphi = \frac{1}{\varrho}\int_0^\infty \cos\sigma t e^{kz} J_0(k\widetilde{\omega})\, k\, dk \int_0^\infty F(\alpha) J_0(k\alpha)\,\alpha\, d\alpha,$$

$$\zeta = -\frac{1}{g\varrho}\int_0^\infty \sigma \sin\sigma t J_0(k\widetilde{\omega})\, k\, dk \int_0^\infty F(\alpha) J_0(k\alpha)\,\alpha\, d\alpha. \tag{30}$$

В частности, для случая сосредоточенного около начала координат импульса, при котором

$$\int_0^\infty F(\alpha)\, 2\pi\alpha\, d\alpha = 1, \tag{31}$$

найдем

$$\varphi = \frac{1}{2\pi\varrho}\int_0^\infty \cos\sigma t e^{kz} J_0(k\widetilde{\omega})\, k\, dk. \tag{32}$$

Так как это можно написать в виде

$$\varphi = \frac{1}{2\pi\varrho}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \frac{\sin\sigma t}{\sigma} e^{kz} J_0(k\widetilde{\omega})\, k\, dk, \tag{33}$$

то, применяя операцию $\frac{1}{g\varrho}\frac{\partial}{\partial t}$ к выражениям (18) и (20), получим

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2\pi\varrho}\left\{\frac{P_1(\mu)}{r^2} - \frac{gt^2}{2!}\frac{2!P_2(\mu)}{r^3} + \frac{(gt^2)^2}{4!}\frac{3!P_3(\mu)}{r^4} - \dots\right\}, \\ \zeta &= \frac{t}{2\pi\varrho\widetilde{\omega}^3}\left\{1 - \frac{1^2\cdot 3^2}{5!}\left(\frac{gt^2}{\widetilde{\omega}}\right)^2 + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{9!}\left(\frac{gt^2}{\widetilde{\omega}}\right)^4 - \dots\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Далее, если $\frac{1/2\, gt^2}{\widetilde{\omega}}$ велико, то вместо (27) будем иметь

$$\zeta = -\frac{gt^3}{2^{7/2}\pi\varrho\widetilde{\omega}^4}\sin\frac{gt^2}{4\widetilde{\omega}}. \tag{35}^{1)}$$

§ 256. Рассмотрим теперь эффект локального возмущения давления, предполагая, что это возмущение перемещается с постоянной

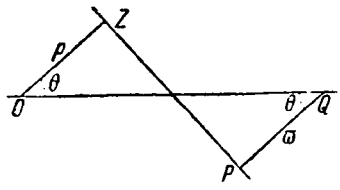
---

[1]) Волны, обусловленные различного рода взрывами под поверхностью, были исследованы Terazawa, Proc. Roy Soc. A, XCII, 57 (1915) и автором, см. примечание на стр. 513 и Proc. Lond. Soc. (2) XXI, 359 (1922).

скоростью по поверхности [1]). Этим путем мы получим, хотя бы в основных чертах, объяснение той частной системы волн, которая сопровождает корабль, плывущий по достаточно глубокой воде.

Полное исследование, подобное исследованию §§ 242, 243, было бы довольно затруднительно; но общую характеристику явления можно легко получить на основе предшествующих результатов с помощью метода, подобного методу § 249.

Предположим, что центр давления движется со скоростью c вдоль оси x в отрицательном направлении; пусть в рассматриваемый момент он достиг точки O. Возвышение ζ в какой-либо точке P (фиг. 64) можно рассматривать как происходящее от ряда бесконечно малых толчков, производимых через равные бесконечно малые промежутки времени на точки оси x, лежащие направо от O. Из тех кольцеобразных систем волн, которые благодаря этим толчкам постепенно образуются, заметный эффект в точке P дают только те, которые возникают вблизи некоторых точек Q. Эти точки Q определяются из того соображения, что фаза в точке P должна быть „стационарной" по отношению к изменениям положения точек Q. Если t обозначает время, которое необходимо источнику возмущения для того, чтобы переместиться из Q в O, то фаза возникших в точке Q волн будет равна в точке P



Фиг. 64.

$$\frac{gt^2}{4\tilde{\omega}} + \frac{1}{2}\pi, \tag{1}$$

где $\tilde{\omega} = QP$ [(35) § 255]. Следовательно, условие, что фаза стационарна, будет

$$\dot{\tilde{\omega}} = \frac{2\tilde{\omega}}{t}. \tag{2}$$

Так как при этом диференцировании O и P следует считать фиксированными, то будем иметь

$$\dot{\tilde{\omega}} = c\cos\theta,$$

где

$$\theta = \angle\, OQP,$$

откуда следует

$$OQ = ct = 2\tilde{\omega}\sec\theta. \tag{3}$$

Далее ясно, что точки, лежащие в непосредственной близости к P, для которых результирующая фаза такая же, как и в точке P,

[1]) Более общую трактовку подобного рода задач можно найти в работе автора On Wave-Patterns due to a Travelling Disturbance, Phil. Mag. (6), XXXI, 539, 1916.

будут лежать на прямой, перпендикулярной к QP. Взглянув на фиг. 64, увидим, что кривая постоянной фазы характеризуется тем свойством, что касательная делит пополам отрезок между началом координат и основанием нормалей. Если обозначить через p перпендикуляр, опущенный из начала координат на касательную и через θ — угол между p и осью x, то согласно известной формуле будем иметь

$$PZ = -\frac{dp}{d\theta};$$

отсюда следует

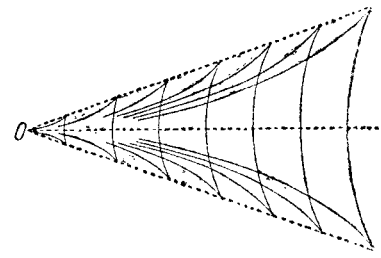
$$2p = -\frac{dp}{d\theta}\operatorname{ctg}\theta, \tag{4}$$

$$p = a\cos^2\theta. \tag{5}$$

Формы кривых, определяемых условием (5), показаны на фиг. 65 [1]), которая начерчена согласно уравнениям

$$\left.\begin{aligned} x &= p\cos\theta - \frac{dp}{d\theta}\sin\theta = \frac{1}{4}a(5\cos\theta - \cos 3\theta), \\ y &= p\sin\theta + \frac{dp}{d\theta}\cos\theta = -\frac{1}{4}a(\sin\theta + \sin 3\theta). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Разность фаз от одной кривой до соответствующей части следующей кривой равна 2π. Это соответствует разности $\frac{2\pi c^2}{g}$ значений параметра a.

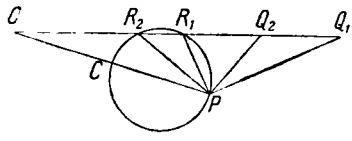


Фиг. 65.

Так как через каждую заданную точку P, лежащую внутри границ системы волн, проходят две подобные кривые, то в рассматриваемом примере существуют, очевидно, два соответствующих действительных положения Q. Они определяются следующим очень простым построением: разделим отрезок OP пополам точкой C и построим на диаметре CP окружность; эта окружность пересечет ось x в точках R_1, R_2; точки пересечения Q_1 и Q_2 (фиг. 66), в которых перпендикуляры PQ_1 и PQ_2, восставленные соответственно к PR_1 и PR_2, пересекают ось x и являются тогда иско-

[1]) Ср. Sir W. Thomson, On Ship Waves, Proc. Inst. Mech. Eng. 3 августа 1887 [Popular Lectures, III, 482]; там дается аналогичный рисунок. Исследование, на которое мы сослались, несомненно, основывается на теории групповой скорости, но это не было указано; см. также Froude, On Ship Resistance, Papers of the Greenock, Phil. Soc., 19 января 1894. Можно непосредственно показать, что между двумя ветвями, сходящимися к острию, существует разность фаз, так что рисунок не в точности передает конфигурацию борозд волны.

мыми точками. В самом деле, CR_1 параллельно PQ_1 и, следовательно, равно $^1/_2\ PQ_1$; перпендикуляр, опущенный из O на PR_1, будет равен тогда PQ_1. Аналогично, перпендикуляр, опущенный из O на PR_2, будет равен PQ_2.



Фиг. 66.

Точки Q_1 и Q_2 будут совпадать, если OP составляет с осью симметрии угол, величина которого равна $\arcsin {}^1/_3$, или 19°28′. При больших углах наклона OP точки Q_1 и Q_2 становятся мнимыми. Из формулы (6) следует также, что значения x, y для $\sin^2\theta = {}^1/_3$ будут стационарны; это дает ряд угловых точек, лежащих на прямых

$$\frac{x}{y} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} = \pm \operatorname{tg} 19°28'. \tag{7}$$

Чтобы иметь возможность приближенно оценить действительную высоту волн в различных частях системы, вернемся к формуле (35) § 255. Если P_0 обозначает полное возмущающее давление, то возвышение в точке P, обусловленное кольцеобразной системой волн, исходящих из точки Q, лежащей направо от O, будет равно

$$\delta\zeta = -\frac{gt^3}{8\sqrt{2}\,\pi\varrho\tilde{\omega}^4}\sin\frac{gt^2}{\tilde{\omega}}\,P_0\,\delta t, \tag{8}$$

где $\tilde{\omega} = PQ$, $t = \frac{OQ}{c}$. Это надо проинтегрировать по t, но, как уже было сказано, только те части интеграла будут иметь существенное значение для окончательного результата, для которых t приблизительно равно значениям (τ_1, τ_2), соответствующим как раз упомянутым особым точкам Q_1, Q_2.

Что касается фаз, то, если положить $t = \tau + t'$, будем иметь

$$\frac{gt^2}{4\tilde{\omega}} = \left[\frac{gt^2}{4\tilde{\omega}}\right] + t'\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{gt^2}{4\tilde{\omega}}\right)\right] + \frac{t'^2}{1\cdot 2}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{gt^2}{4\tilde{\omega}}\right)\right] + \ldots, \tag{9}$$

где в членах, заключенных в квадратных скобках, t следует положить, смотря по необходимости, равным τ_1 или τ_2. Второй член исчезает вследствие наших предположений, так как фаза в точке P для волн, возникающих вблизи Q_1 или Q_2, „стационарна“. Далее, мы находим

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{gt^2}{4\tilde{\omega}}\right) = \frac{g}{2\tilde{\omega}} - \frac{g}{\tilde{\omega}^2}\dot{\tilde{\omega}} + \frac{gt^2}{4}\left(\frac{2\dot{\tilde{\omega}}^2}{\tilde{\omega}^3} - \frac{\ddot{\tilde{\omega}}}{\tilde{\omega}^2}\right).$$

Так как

$$\dot{\tilde{\omega}} = c\cos\theta, \quad \ddot{\tilde{\omega}} = \frac{c^2\sin^2\theta}{\tilde{\omega}}, \tag{10}$$

то с помощью уравнения (2) получим

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{gt^2}{4\tilde{\omega}}\right)\right] = \frac{g}{\tilde{\omega}}\left(\frac{1}{2} - \operatorname{tg}^2\theta\right). \tag{11}$$

Вследствие колебаний тригонометрического множителя не будет большой ошибки, если в выражении (8) пренебречь изменением первого множителя или если затем взять в качестве пределов интегрирования для t' значения $\pm\infty$. Мы будем иметь тогда приближенно

$$\zeta = -\frac{g\tau_1^3 P_0}{8\sqrt{2}\,\pi\varrho\widetilde{\omega}_1^4}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\left(\frac{g\tau_1^2}{4\widetilde{\omega}_1}+m_1^2 t'^2\right)dt' -$$

$$-\frac{g\tau_2^3 P_0}{8\sqrt{2}\,\pi\varrho\widetilde{\omega}_2^4}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\left(\frac{g\tau_2^2}{4\widetilde{\omega}_2}+m_2^2 t'^2\right)dt', \qquad (12)$$

где

$$\left.\begin{aligned} m_1^2 &= \frac{g}{2\widetilde{\omega}_1}(1-\operatorname{tg}^2\theta_1),\\ m_2^2 &= \frac{g}{2\widetilde{\omega}_2}(\operatorname{tg}^2\theta_2-\tfrac{1}{2}),\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

а индексы относятся к точкам Q_1, Q_2 фиг. 66. Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos m^2 t'^2\,dt' = \int_{-\infty}^{\infty}\sin m^2 t'^2\,dt' = \frac{\sqrt{1/2\,\pi}}{m}, \qquad (14)$$

где надо взять положительное значение m, то мы найдем

$$\zeta = -\frac{g\tau_1^3 P_0}{8\sqrt{2}\,\pi^{1/2}\varrho\widetilde{\omega}_1^4 m_1}\sin\left(\frac{g\tau_1^2}{4\widetilde{\omega}_1}+\frac{1}{4}\pi\right) -$$

$$-\frac{g\tau_2^3 P_0}{8\sqrt{2}\,\pi^{1/2}\varrho\widetilde{\omega}_2^4 m_2}\sin\left(\frac{g\tau_2^2}{4\widetilde{\omega}_2}-\frac{1}{4}\pi\right). \qquad (15)$$

Два члена этого выражения представляют части, обусловленные соответственно поперечными боковыми волнами. Так как

$$\widetilde{\omega}_1 = PQ_1 = \frac{1}{2}c\tau_1\cos\theta_1,$$

$$\widetilde{\omega}_2 = PQ_2 = \frac{1}{2}c\tau_2\cos\theta_2,$$

то получается, что если мы будем рассматривать каждый отдельный член сам по себе, то фаза вдоль соответствующей части кривой

$$p = \widetilde{\omega} = a\cos^2\theta$$

будет постоянной, в то время как возвышение изменяется пропорционально выражению

$$\frac{\sqrt{2}\,g^{1/2}P_0}{\pi^{1/2}\varrho c^3 a^{1/2}}\,\frac{\sec^3\theta}{\sqrt{|1-3\sin^2\theta|}}. \qquad (16)$$

В „остриях“, где обе системы соединяются, между ними существует разность фаз в четверть периода.

В „острие", где $\sin^2\theta = 1/3$, формулы дают бесконечное значение для ζ, но это обстоятельство указывает скорее всего на недостаток нашего приближенного приема. Что возвышение в некоторой точке P вблизи „острия" будет сравнительно большим, можно было и предвидеть, так как из уравнений (9) и (11) следует, что множество точек на оси x, посылающих в точку P волны приблизительно одинаковой фазы, будет тогда необычайно обширным. Напротив, бесконечность, которая встречается при $\theta = \frac{1}{2}\pi$, имеет несколько другой характер: она происходит от искусственного допущения, что давление сконцентрировано в одной *точке*. При распределенном давлении эта трудность исчезла бы [1]).

Кроме того, необходимо заметить, что все это исследование имеет место только для тех точек, для которых $\frac{gt^2}{\omega}$ велико; ср. §§ 240, 255. При более обстоятельном исследовании можно найти, что это ограничение равносильно предположению, что параметр a велик сравнительно с $\frac{2\pi c^2}{g}$. Следовательно, наши рассуждения нельзя распространить непосредственно на части системы волн, лежащие вблизи начала координат.

§ 256a. Как уже было указано, система волн рассматриваемого выше типа может быть образована и другими видами перемещающегося возмущения. Некоторые из этих случаев доступны для расчетов. Например, движение погруженного шара рассмотрено Хавелоком [2]), и для этого случая подсчитано волновое сопротивление. Автор [3]) данной книги исследовал другим методом движение погруженного тела, не прибегая к ограничениям как формы тела, так и его ориентации. Результаты, естественно, получались наиболее простыми в том случае, когда направление движения совпадало с одним из трех возможных направлений установившегося движения, рассматриваемых в § 124. В этом случае волновое сопротивление выражается формулой

$$R = \frac{g^4(\mathbf{A} + \varrho Q)^2 I}{\pi \varrho c^6}. \tag{17}$$

Здесь $\mathbf{A}$ обозначает соответствующую присоединенную массу (§ 121), Q есть объем тела, c — его скорость, а

$$I = \int_0^{\pi/2} \sec^5\theta\, e^{-\frac{2gf}{c^2\sec^2\theta}}\, d\theta, \tag{18}$$

---

[1]) Более подробные исследования были проведены Хопфом в его диссертации в Мюнхене в 1909 г. и Hogner'ом, Arkiv för Matem., XVII (1923). Последний автор, в частности, исследовал вид волн вблизи „острий", где сходятся обе системы.

[2]) Havelock, Proc. Roy. Soc. A, XCIII, 520 (1917); XCV, 354 (1918); см. также Green, Phil. Mag. (6), XXXVI, 48 (1918).

[3]) Lamb, Proc. Roy. Soc. A, CXI, 14 (1926).

где f есть глубина погружения. Другая форма этого интеграла (употребляемая Хавелоком) есть

$$I = \frac{1}{4} e^{-\alpha} \left\{ K_0(\alpha) + \left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right) K_1(\alpha) \right\} \qquad (19)$$

в обычных обозначениях функций Бесселя [1]), где $\alpha = \frac{gf}{c^2}$. Для шара мы имеем $\mathbf{A} = {}^2/_3 \pi \varrho a^3$, $Q = {}^4/_3 \pi a^3$, где a есть радиус. Отсюда, если M' есть вытесненная масса жидкости, получим

$$R = 3M'g \left(\frac{a}{f}\right)^3 \left(\frac{gf}{c^2}\right)^3 I, \qquad (20)^2)$$

что находится в согласии с результатами Хавелока. В качестве примера положим $c = \sqrt{gf}$, тогда

$$R = 0{,}365\, M'g \left(\frac{a}{f}\right)^3.$$

График R как функции от c приведен Хавелоком; он имеет общее сходство с кривой фиг. 57.

В последующей работе [3]) Хавелок тот же метод применил к подвижному источнику возмущения, состоящему из различных комбинаций диполей, и дал важные применения к подсчету волнового сопротивления корабля.

Уместно будет дать здесь дальнейшее краткое изложение теоретической литературы о волновом сопротивлении. Хотя характер возмущения и будет различным, все же можно сравнивать влияние носа корабля с влиянием точечного источника давления. Фиг. 65 выявляет две системы поперечных и боковых волн, которые наблюдаются в действительности, и особую заметную группу волн вблизи острия, где сходятся эти две системы. Если мы вообразим дополнительный отрицательный источник давления на месте кормы корабля, то и получим грубое представление о действии корабля как целого. При изменяющейся скорости корабля кормовые волны могут частично погасить или усилить влияние носовых волн, в результате можно ожидать, что график сопротивления будет иметь горбы и впадины с возрастанием длины корабля или с изменением его скорости [4]). В действительности, оказывается, кривая сопротивления в зависимости от скорости обладает несколькими максимумами (или „горбами“) и соответствующими минимумами.

Получить улучшенное представление о том, что происходит в непосредственной близости корабля, и вычислить соответствующее сопротивление представляет, конечно, трудную задачу, но все же попытки были сделаны и

---

[1]) Watson, стр. 172.

[2]) Эта формула в работе автора была приведена неправильно.

[3]) Proc. Roy. Soc. A. CXVIII, 24 (1927).

[4]) W. Froudé. On the Effect on the Wave-Making Resistance of ships of Length of Parallel Middle Body, Trans. Inst. Nav. Arch., XVII (1877); также R. E. Froude, On the Leading Phenomena of the Wave-Making Resistance of Ships, Trans. Inst. Nav. Arch., XXII (1881), где даны рисунки действительных образцов волн, которые в своих главных чертах находятся в удивительном согласии с результатами предшествующей теории. Некоторые из этих рисунков воспроизведены в работе Kelvin'a, Proc. Inst. Mech. Eng., цитированной выше.

не без значительного успеха. Начало было положено Митчеллом [1]) для идеализированной формы корабля, которая отличается от формы действительного корабля только тем, что для нее предполагается угол наклона поверхности к срединной плоскости всюду малым. Этого допущения придерживается и Виглей [2]) в своих недавних работах, в которых он исследовал различные формы (подчиненные тому же ограничению), вычислил их сопротивления и сравнил с экспериментальными результатами для моделей, получив хорошее качественное согласие. Хавелок [3]) в целом ряде своих работ исследовал влияние различных деталей в конструкции корабля таких, как длина „срединной параллельной плоскости", средняя осадка и т. д. Его метод заключается (частично) в подборе соответственной комбинации движущихся источников и, следовательно, свободен от только что упомянутого специального ограничения [4]).

Общая формула для волнового сопротивления геометрически подобных и подобно погруженных (целиком или частично) тел была дана еще очень давно Фрудом. Так как сопротивление может зависеть только от скорости, плотности жидкости, ускорения силы тяжести и некоторой линейной величины, которая определяет масштаб, то из рассмотрения размерностей можно показать, что оно должно представляться выражением

$$R = \varrho l^2 c^2 f\left(\frac{gl}{c^2}\right), \tag{21}$$

где C есть скорость и l — характерная линейная величина. Можно заметить, что формула (17) есть частный случай (21). Из формулы (21) следует, что волновое сопротивление корабля можно вывести из экспериментов над моделями при условии, что значение $\frac{l}{c^2}$ будет одно и то же для модели и натуры.

§ 256b. Чтобы исследовать изменение фигур волн, учитывая глубину воды, мы должны рассуждениям в § 256 придать более общую форму. Обозначая через t, как и раньше, время, которое требуется, чтобы центр давления перешел от точки Q до точки O, можно показать, что фаза возмущения в точке P, возникшего от импульса, переданного из точки Q, отличается от значения

$$k(Vt - \tilde{\omega}) \tag{22}$$

только аддитивным постоянным, где $\frac{2\pi}{k}$ обозначает длину волны, преобладающую вблизи P, а V — соответствующая скорость волн [5]). Эта преобладающая длина волны определяется тем условием, что фаза

---

[1]) Phil. Mag. (5), XLV, 106 (1898).

[2]) Trans. Inst. Nav. Arch., LXVIII., 124 (1926); LXIX, 27 (1927); LXXII (1930).

[3]) Начиная с 1909 г. в журналах Proc. Roy Soc.

[4]) Превосходные доклады о развитии рассматриваемого вопроса были сделаны Hogner'ом, Proc. Congress Appl. Moth. Delft, 1924, стр. 146, и Wigley'ем, Congress for techn. Mechanics, Stogckolm, 1930.

[5]) Символ c, который раньше употреблялся в этом смысле, обозначает теперь скорость центра давления относительно воды.

является стационарной относительно изменений длины волны, т. е. что

$$\frac{\partial}{\partial k} k(Vt - \tilde{\omega}) = 0 \quad \text{или} \quad \tilde{\omega} = Ut, \tag{23}$$

где $U = \frac{d(kV)}{dk}$ обозначает групповую скорость (§ 236).

Далее, для эффективной части возмущения в точке P фаза (22) должна быть стационарной относительно изменений положения Q; следовательно, взяв частную производную по t, мы получим

$$\dot{\tilde{\omega}} = V \quad \text{или} \quad V = c\cos\theta, \tag{24}$$

так как $\dot{\tilde{\omega}} = c\cos\theta$. Теперь, обращаясь к фиг. 61, будем иметь

$$p = ct\cos\theta - \tilde{\omega} = Vt - \tilde{\omega}. \tag{25}$$

Таким образом для данного гребня волны давление p будет находиться в постоянном отношении к длине волны λ и при переходе от одного гребня волны к следующему это отношение будет возрастать на единицу (или убывать). Так как λ, согласно (24), определяется как функция от θ, то этим самым устанавливается соотношение между p и θ.

Для случая бесконечной глубины формула (24) дает

$$c^2\cos^2\theta = V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}, \tag{26}$$

и искомое соотношение будет иметь, как и раньше, вид

$$p = a\cos^2\theta. \tag{27}$$

При конечной глубине (h) имеем

$$c^2\cos^2\theta = V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\operatorname{tg} h\frac{2\pi h}{\lambda}, \tag{28}$$

и соответствующее соотношение представится в виде

$$\frac{p}{a}\operatorname{tg} h\frac{a}{p} = \frac{c^2}{gh}\cos^2\theta, \tag{29}$$

где значения a для следующих друг за другом гребней волны образуют арифметическую прогрессию. Экманом [1]) начерчены кривые для различных случаев. Так как выражение в левой части не может превосходить единицу, то оказывается, что при $c^2 > gh$ существует нижний предел для значения θ, определяемый из уравнения

$$\cos^2\theta = \frac{gh}{c^2}, \tag{30}$$

при котором кривая простирается в бесконечность.

---

[1]) Ekman, см. примечание на стр. 464.

Отсюда следует: если скорость возмущающего действия превосходит значение $\sqrt{gh}$, то исчезают поперечные волны и остаются только боковые. Это обстоятельство приводит к уменьшению волнового сопротивления (ср. § 249) [1]).

Изменение конфигурации вида волн при увеличении отношения $\frac{c^2}{gh}$ от нуля до бесконечности было прослежено Хавелоком [2]).

Стоячие волны в ограниченной жидкости.

§ 257. Задачу о свободных колебаниях в двух горизонтальных измерениях (x, y) для случая, когда глубина постоянна и жидкость ограничена по сторонам вертикальными стенками, можно изложить в такой же математической форме, как задачу § 190.

Если взять начало координат на невозмущенной поверхности и обозначить через ζ возвышение над этим уровнем в момент t, то условия, которые должны быть выполнены на свободной поверхности, будут такими же, как (3), (4) в § 255.

Уравнению неразрывности

$$\Delta\varphi = 0$$

и условию, что на глубине $z = -h$ вертикальная скорость обращается в нуль, мы удовлетворим, полагая

$$\varphi = \varphi_1 \operatorname{ch} k(z+h), \tag{1}$$

где φ_1 есть функция от x, y, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} + k^2\varphi_1 = 0. \tag{2}$$

Вид функции φ_1 и допустимые значения k определяются этим уравнением и условием, что на вертикальных стенках должно иметь место

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0. \tag{3}$$

Соответствующие значения частоты (σ) колебаний будут тогда определяться условием на поверхности (6) § 255; именно, мы будем иметь

$$\sigma^2 = gh \operatorname{th} kh. \tag{4}$$

Отсюда получается

$$\zeta = \frac{ik}{\sigma} \operatorname{sh} kh\, \varphi_1. \tag{5}$$

---

[1]) Найдено, что мощность, потребная для продвижения торпедной лодки в сравнительно мелкой воде, возрастает с увеличением скорости до некоторого ее критического значения, зависящего от глубины, а затем убывает и, наконец, снова возрастает. См. работы Rasmussen, Ttans. Inst. Nav. Arch., XLI, 12 (1899); Rota, там же, XLII, 239 (1900); Yarrow и Mariner, там же, XLVII, 339, 344 (1905).

[2]) Havelock, Proc. Roy. Soc., LXXXI, 426 (1908).

Условия (2) и (3) имеют такой же вид, как и в случае малой глубины, а поэтому мы можем сразу написать результаты для прямоугольного или круглого [1]) бассейна. Значения k и формы свободной поверхности при различных нормальных колебаниях будут те же, как в §§ 190, 191 [2]), но амплитуда колебания с увеличением глубины теперь убывает по закону (1); значение σ для каждой особой формы колебания будет даваться формулой (4). Если kh мало, то будем иметь, как и в названных параграфах,

$$\sigma^2 = k^2 gh.$$

В связи с этим упомянем случай длинного, узкого, прямоугольного бассейна, в котором вблизи центра находится одно или несколько цилиндрических препятствий с вертикальными образующими.



Фиг. 67.

Возьмем начало координат в центре свободной поверхности, а ось x параллельно длине l; вообразим проведенными две плоскости $x = \pm x'$, где x' довольно велико по сравнению с горизонтальным размером препятствий, но все же является малым по сравнению с длиной (l). Вне этих плоскостей приближенно будем иметь

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + k^2 \varphi_1 = 0, \tag{6}$$

и, следовательно, для $x > x'$

$$\varphi_1 = A \sin kx + B \cos kx, \tag{7}$$

а для $x < -x'$

$$\varphi_1 = A \sin kx - B \cos kx, \tag{8}$$

так как при самом медленном колебании, которое только и должно здесь рассматриваться, φ должно быть нечетной функцией от x.

В области между плоскостями $x = \pm x'$ распределение линий

$$\varphi_1 = \text{const.}$$

в основном такое же, каким оно было бы, если положить в формуле (2) $k = 0$, на том основании, о котором мы будем говорить в связи с другими задачами в § 290. Поскольку мы интересуемся этой областью, то эта задача тождественна с задачей о распространении электричества в металлическом стержне, который имеет форму бассейна, занимаемого жидкостью, где на месте препятствий имеются отверстия. Электрическое сопротивление между двумя плоскостями будет равно тогда электрическому сопротивлению стержня, лишенного отверстий, с одинаковым поперечным сечением с некоторой длиной $2x' + \alpha$. Разность потенциалов между обеими плоскостями, на основании (7), может быть принята равной $2(kAx' + B)$, так как kx' мало; сила

[1]) Указания на оригинальные работы Пуассона и Рэлея о волнах в круглом бассейне см. стр. 361. Проблема разрабатывалась также Merian, Über die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen, Basel, 1828 (см. Von der Mühl, Math. Ann., XXVII, 575) и Остроградским, Mémoire sur la propagation des ondes, dans un bassin cylindrique, Mém. des Savants Etrang., III (1862).

[2]) Необходимо заметить, что каждая из обеих нарисованных на фиг. 42 форм колебаний может быть легко вызвана подходящим движением туда и сюда стакана воды в горизонтальном направлении.

тока на единицу поперечного сечения приближенно будет равна kA. Следовательно,

$$2(kAx'+B)=(2x'+a)\,kA; \tag{9}$$

отсюда следует

$$\frac{B}{A}=\frac{1}{2}\,ka, \tag{10}$$

и для $x>x'$

$$\varphi_1=A\left(\sin kx+\frac{1}{2}\,ka\cos kx\right). \tag{11}$$

Условие $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$, которое должно выполняться для $x={}^1/_2\,l$, дает

$$\cos\frac{1}{2}\,kl-\frac{1}{2}\,ka\sin kl \tag{12}$$

или, так как ka есть малая величина,

$$\cos\frac{1}{2}\,k(l+a)=0. \tag{13}$$

Введение препятствий, таким образом, имеет тот же самый эффект, как и удлинение сосуда на величину a. Период самого медленного колебания поэтому будет равен

$$\frac{2\pi}{\sigma}=2\sqrt{\frac{\pi l'}{g}\operatorname{cth}\frac{\pi h}{l'}}, \tag{14}$$

где $l'=l+a$.

Значение a известно только в немногих случаях. Для круглого цилиндра радиуса b, который находится в центре бассейна, формулы (11) и (13) § 64 показывают, что φ_1 меняется практически как $x+C$ или как $x+\frac{\pi b^2}{a}$, когда x будет величиной порядка ширины a бассейна. Сравнивая с (11), увидим, что

$$a=\frac{2\pi b^3}{a}, \tag{15}$$

при условии, что $\frac{b}{a}$ приблизительно не превосходит $\frac{1}{4}$ [1]).

Если на месте плоскости $x=0$ будем иметь тонкую твердую перегородку ширины a, которая в середине имеет вертикальную щель ширины c, то получим формулу

$$a=\frac{2a}{\pi}\ln\sec\frac{\pi(a-c)}{2a}. \tag{16}$$

§ 258. Число решенных до сих пор случаев движения при переменной глубине очень ограничено.

1. Мы рассмотрим сначала двумерные колебания воды в канале, поперечное сеченне которого состоит из двух прямых, наклоненных под углом в 45° к вертикали [2]).

---

[1]) Формула (14) в этом случае хорошо согласуется с опытами [Lamb и Cooke, Phil. Mag. (6), XX, 303 (1910)]. Опыты были проведены главным образом с той целью, чтобы испробовать вышеизложенный приближенный способ, который имеет еще другие более важные возможности применения (см. § 306, 307).

[2]) Kirchhoff, Über stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit, Berl. Monatsber., 15 мая 1879 г. [Ges. Abh., 428]; Greenhill, см. примечание на стр. 467.

Возьмем в плоскости поперечного сечения оси y и z соответственно по горизонтали и вертикали и положим

$$\varphi + i\psi = A\{\operatorname{ch} k(y+iz) + \cos k(y+iz)\}, \tag{1}$$

причем зависящий от времени множитель $\cos(\sigma t + \varepsilon)$ следует здесь подразумевать. Это дает

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= A(\operatorname{ch} ky \cos kz + \cos ky \operatorname{ch} kz), \\ \psi &= A(\operatorname{sh} ky \sin kz - \sin ky \operatorname{sh} kz). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Вторая формула тотчас же показывает, что прямые $y = \pm z$ образуют линию тока $\psi = 0$ и поэтому могут быть взяты в качестве неподвижных границ.

Условие на свободной поверхности будет, как в § 227,

$$\sigma^2\varphi = g\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{3}$$

Подставляя из (2), найдем, если h обозначает высоту поверхности над началом координат,

$$\sigma^2(\operatorname{ch} kh \cos kh + \cos ky \operatorname{ch} kh) = gk(-\operatorname{ch} ky \sin kh + \cos ky \operatorname{sh} kh).$$

Это уравнение выполняется для всех значений y, если

$$\left.\begin{aligned} \sigma^2 \cos kh &= -gk \sin kh, \\ \sigma^2 \operatorname{ch} kh &= gk \operatorname{sh} kh; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

отсюда получаем

$$\operatorname{th} kh = -\operatorname{tg} kh. \tag{5}$$

Это уравнение определяет допустимые значения k; соответствующие значения σ будут даны тогда одним из уравнений (4).

Так как φ, согласно (2), есть четная функция от y, то колебания, определяемые ею, будут симметричны по отношению к плоскости $y = 0$.

Асимметрические же колебания определяются из уравнений

$$\varphi + i\psi = iA\{\operatorname{ch} k(y+iz) - \cos k(y+iz)\}, \tag{6}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= -A(\operatorname{sh} ky \sin kz + \sin ky \operatorname{sh} kz), \\ \psi &= A(\operatorname{ch} ky \cos kz - \cos ky \operatorname{ch} kz). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Линия тока $\psi = 0$ состоит, как и выше, из прямых $y = \pm z$; условие на поверхности (3) дает

$$\sigma^2(\operatorname{sh} ky \sin kh + \sin ky \operatorname{sh} kh) = gk(\operatorname{sh} ky \cos kh + \sin ky \operatorname{ch} kh).$$

Это требует, чтобы

$$\left.\begin{aligned} \sigma^2 \sin kh &= gk \cos kh, \\ \sigma^2 \operatorname{sh} kh &= gk \operatorname{ch} kh; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

отсюда следует

$$\operatorname{th} kh = \operatorname{tg} kh. \tag{9}$$

Уравнения (5) и (9) встречаются также в теории поперечных колебаний балки, свободной на обоих концах, и оба они могут быть включены в уравнение

$$\cos m \operatorname{ch} m = 1, \tag{10}$$ [1]

если положить $m = 2kh$.

---

[1]) Ср. Rayleigh, Theory of Sound, I, 277, где подробно разобрано числовое решение уравнения.

Корень $kh=0$ уравнения (9) не имеет значения в упомянутой теории, но здесь он очень важен, именно, он соответствует самому медленному колебанию в рассматриваемой задаче. Если положить $Ak^2=B$ и, рассматривая k как бесконечно малое, восстановить множитель, зависящий от времени, а потом взять только действительные части, то формулы (7) представятся в виде

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= -2Byz\cos(\sigma t+\varepsilon),\\ \psi &= B(y^2-z^2)\cos(\sigma t+\varepsilon),\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где, согласно уравнению (8),

$$\sigma^2=\frac{g}{h}. \tag{12}$$

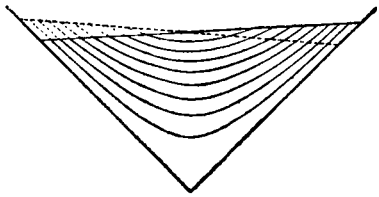
Соответствующий вид свободной поверхности будет

$$\zeta=\frac{1}{g}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_{z=h}=2\sigma Bhy\sin(\sigma t+\varepsilon). \tag{13}$$

Следовательно, свободная поверхность при этом виде колебания есть всегда плоскость. Фиг. 68 показывает линии тока $\psi=\text{const}$. для ряда равноотстоящих значений ψ.

Следующее по медленности нормальное колебание будет симметричным и дается наименьшим, отличным от нуля, корнем уравнения (5). Этот корень будет $kh=2{,}3650$, откуда следует $\sigma=1{,}5244\left(\frac{g}{h}\right)^{1/2}$. Профиль свободной поверхности имеет теперь два узла, положения которых найдутся, если в (2) положить $\varphi=0$, $z=h$, откуда получим

$$\frac{y}{h}=0{,}5516\ ^{1}).$$



Фиг. 68.

Следующее нормальное колебание соответствует наименьшему, отличному от нуля, корню уравнения (9) и т. д. [2]).

2. Гринхилл в названной в примечании 3 на стр. 467 работе исследовал *симметрические* колебания воды в канале, поперечное сечение которого состоит из двух прямых, наклоненных к вертикали под углом в 60°. Для наиболее аналитически простого колебания этого рода мы будем иметь, опустив множитель, зависящий от времени,

$$\varphi+i\psi=iA(y+iz)^3+B, \tag{14}$$

или

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= Az(z^2-3y^2)+B,\\ \psi &= Ay(y^2-3z^2);\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

последняя формула дает $\psi=0$ вдоль границы $y=\pm\sqrt{3}z$. Условие на поверхности (3) будет выполняться для $z=h$, если

$$\sigma^2=\frac{g}{h},\quad B=2Ah^3. \tag{16}$$

---

[1]) Rayleigh, Theory of Sound, § 178.

[2]) Экспериментальное подтверждение частот и положений петель (т. е. мест наибольшей вертикальной амплитуды) было дано для различных нормальных колебаний Kirchhoff и Hansemann, Über stehende Schwingungen des Wassers, Wied. Ann., X [Kirchhoff, Ges. Abh., стр. 442].

$\varkappa_2 = \varkappa_1$. Первый член в формулах (16) и (17) оказывается теперь бесконечно большим, в то время как остальная часть выражения дает конечное значение. Чтобы в этом случае получить результат, имеющий смысл, мы должны удержать коэфициент трения μ'.

Полагая $\mu' = 2\widetilde{\omega}^2$, будем иметь

$$(k-\varkappa)^2 + i\mu' = \{k-(\varkappa+\widetilde{\omega}-i\widetilde{\omega})\}\{k-(\varkappa-\widetilde{\omega}+i\widetilde{\omega})\}, \qquad (25)$$

так что интеграл (10) можно теперь положить равным

$$\frac{1+i}{4\widetilde{\omega}}\left\{\int_0^\infty \frac{e^{ikx}}{k-(\varkappa-\widetilde{\omega}+i\widetilde{\omega})}\,dk - \int_0^\infty \frac{e^{ikx}}{k-(\varkappa+\widetilde{\omega}-i\widetilde{\omega})}\,dk\right\}. \qquad (26)$$

Формулы § 243 показывают, что когда величина $\widetilde{\omega}$ будет малой, то главная часть этого выражения для достаточно удаленных точек по обе стороны от начала будет равна

$$\frac{1+i}{4\widetilde{\omega}}\,2\pi i e^{i\varkappa x}. \qquad (27)$$

Возвышение поверхности определяется теперь из уравнения

$$\frac{\pi T_1}{P}\,y = -\frac{\pi}{\mu^{1/3}}\cos\left(\varkappa x - \frac{1}{4}\pi\right). \qquad (28)$$

§ 272. Исследование Рэлея[1]), от которого только что проведенное здесь отличается главным образом способом представления определенных интегралов, было предпринято с целью найти более удовлетворительное объяснение для некоторых явлений, описанных Скоттом Ресселем[2]) и Кельвином[3]).

„Когда препятствие незначительных размеров, например, леска от удочки, движется медленно в спокойной воде или (что, конечно, сводится к тому же) находится в покое в движущейся жидкости, то поверхность жидкости покрывается красивыми волнами, которые по отношению к препятствию остаются неподвижными. На стороне, лежащей вверх по течению, длина волны будет короче, и колебания, как показал Томсон, главным образом обусловливаются капиллярными силами. На стороне, расположенной по течению, волны оказываются длиннее и главным образом зависят от силы тяжести. Обе системы волн движутся с одинаковой относительной скоростью по отношению к воде, что необходимо для того, чтобы они могли сохранять неизменное положение относительно препятствия. Это же обстоятельство обусловливает и скорость, а вместе с тем и длину волны в той части системы волн, в которой гребни расположены наклонно к направлению движения. Если обозначить угол между направлением движения и нормалью к фронту волн через θ, то ско-

[1]) Rayleigh, см. выше, стр. 498.
[2]) Scott Russel, On Waves, Brit. Ass. Rep., 1844.
[3]) Kelvin, см. прим. выше, стр. 574.

Если предположить, что θ изменяется пропорционально $\cos(\sigma t+\varepsilon)$, то получим

$$\sigma^2=\frac{8\pi}{48-3\pi^2}\cdot\frac{g}{h}, \tag{3}$$

или $\sigma=1{,}169\left(\frac{g}{a}\right)^{1/2}$ [1]).

В случае прямоугольного поперечного сечения ширины $2a$ и глубины a частота определяется из (4) § 257, где мы должны положить $k=\frac{\pi}{2a}$, согласно § 178, и $h=a$. Это дает

$$\sigma^2=\frac{1}{2}\pi\,\mathrm{th}\,\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{g}{a}, \tag{4}$$

или $\sigma=1{,}200\left(\frac{g}{a}\right)^{1/2}$. В рассматриваемой задаче частота будет меньше, так как кинетическая энергия, зависящая от данного движения поверхности, будет больше, в то время как потенциальная энергия данной деформации останется той же самой; ср. § 45.

§ 260. Мы можем теперь рассмотреть свободные колебания воды между двумя поперечными перегородками в горизонтальном канале постоянного сечения. Перед тем как переходить к частным случаям, исследуем пока общий характер математической задачи.

Если ось x будет параллельна длине, а начало координат взято на одном из концов, то потенциал скоростей, относящийся к одному из нормальных видов колебаний, может быть представлен по теории Фурье в виде

$$\varphi=(P_0+P_1\cos kx+P_2\cos 2kx+\ldots+P_s\cos skx+\ldots)\cos(\sigma t+\varepsilon), \tag{1}$$

где $k=\frac{\pi}{l}$, если l обозначает длину секции. Коэфициенты P_s будут функциями от y и z. Если ось z проведем вертикально вверх, а ось y горизонтально, перпендикулярно к длине канала, то вид этих функций и допустимые значения σ будут определяться из уравнения непрерывности

$$\Delta\varphi=0 \tag{2}$$

и условий, что на стенках

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0, \tag{3}$$

а на свободной поверхности

$$\sigma^2\varphi=g\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{4}$$

---

[1]) Lamb, Hydrodynamics, 2-е изд. (1895). Рэлей в качестве лучшего приближенного значения находит $\sigma=1{,}1644\left(\frac{g}{a}\right)^{1/2}$; см. Phil. Mag. (5), XLVII, 566 (1899) [Papers, IV, 407].

Так как $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ должно обращаться в нуль для $x=0$ и $x=l$, то, согласно известным теоремам [1]), каждый член в выражении (1) должен удовлетворять условиям (2), (3), (4) независимо от других; поэтому мы должны иметь

$$\frac{\partial^2 P_s}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P_s}{\partial z^2}-s^2k^2P_s=0, \tag{5}$$

а на продольных границах

$$\frac{\partial P_s}{\partial n}=0 \tag{6}$$

и на свободной поверхности

$$\sigma^2 P_s=g\frac{\partial P_s}{\partial z}. \tag{7}$$

Член P_0 представляет чисто поперечные колебания, такие, которые были рассмотрены в § 258. Другие члены $P_s\cos skx$ дают ряд нормальных колебаний с s узловыми линиями, направленными поперек канала, и узловыми линиями 0, 1, 2, 3, ..., параллельными его длине.

Для наших целей будет достаточно рассмотреть член $P_1\cos kx$. Очевидно, что выражение

$$\varphi=P_1\cos kx\cos(\sigma t+\varepsilon), \tag{8}$$

с соответственно подобранной формой P_1 и тем значением σ, которое определяется по указанному выше способу, представляет потенциал скоростей возможной системы стоячих волн с произвольной длиной волны $\frac{2\pi}{k}$ в неограниченном канале заданного сечения. Как указано в § 129, наложением двух соответственно сопряженных систем стоячих волн этого типа мы теперь можем образовать систему прогрессивных волн, для которых

$$\varphi=P_1\cos(kx\mp\sigma t). \tag{9}$$

Отсюда мы заключаем, что прогрессивные волны простого гармонического профиля с фиксированными длинами волн принадлежат к числу возможных для бесконечно длинного канала с произвольным постоянным сечением.

Мы можем итти и далее, подтверждая возможность бесконечного числа нормальных типов с произвольно заданной длиной волны и со скоростями распространения, изменяющимися от некоторого наименьшего значения до бесконечности. Однако, те типы, в которых имеют место продольные узловые линии на некотором расстоянии от боков, представляют с рассматриваемой точки зрения только подчиненное значение.

---

[1]) См. **Stokes**, On the Critical Values of the Sums of Periodic Series, Camb. Trans., VIII (1847) [Papers, I, 236].

Особо следует отметить два предельных случая, а именно тот, где длина волны очень велика, и тот, где она мала в сравнении с размерами поперечного сечения.

Наиболее интересен первый случай, не имеющий продольных узловых линий и охватываемый общей теорией „длинных" волн, изложенной в §§ 169, 170. В этом случае мы можем получить только дополнительные сведения, например, о виде гребней волн в поперечном к каналу направлении.

В случае сравнительно коротких волн более важный тип есть тот, в котором гребни располагаются поперек канала с постепенно изменяющейся высотой и скорость распространения волн совпадает со скоростью свободных волн на глубокой воде, определяемой по формуле (6) § 229.

Имеются и другие короткие волны, которые проявляются тогда, когда берега будут наклонными; эти волны мы можем отличать названием „краевых волн", так как их амплитуда уменьшается по экспоненциальному закону при увеличении расстояния от берега. Действительно, если амплитуда на краях будет лежать в пределах, допускаемых нашим приближением, то она становится мало заметной на расстоянии, проекция которого на откос превышает длину волны. Скорость волны здесь будет *меньше* скорости волн той же длины на глубокой воде. Поэтому нет оснований считать этот тип волн очень важным.

Общая формула для этих краевых волн была дана Стоксом [1]). Выбирая начало на одном крае, ось z вертикально вверх, ось y перпендикулярно к каналу и рассматривая ширину как сравнительно бесконечно большую, указанную формулу можно представить в виде

$$\varphi = He^{-k(y\cos\beta - z\sin\beta)}\cos k(x - ct), \tag{10}$$

где β есть угол наклона берега к горизонту и

$$c = \left(\frac{g}{k}\sin\beta\right)^{1/2}. \tag{11}$$

Читатель без труда сам может проверить этот результат.

§ 261. Приступим теперь к рассмотрению некоторых частных случаев. Мы будем исследовать вопрос только о стоячих волнах в бесконечно длинном канале или в его секции, ограниченной двумя поперечными сечениями, расстояние между которыми есть кратное половины произвольной длины волны $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$, но сами исследования можно легко видоизменить, подобно тому как в предшествующем параграфе, чтобы их распространить и на случай прогрессивных волн. Иногда будем формулировать результаты через скорость распространения волн.

---

[1]) Stokes, Report on Recent Researches in Hydrodynamics, Brit. Ass. Rep., 1846 [Papers, I, 167].

1. Решение для случая прямоугольного сечения при горизонтальном дне и вертикальных боковых сторонах может быть написано сразу на основании результатов §§ 190, 257. Узловые линии в этом случае суть продольные и поперечные, если только нет совпадения периодов двух различных типов, когда возможны более сложные формы. Последнее, например, будет встречаться в случае квадратного бассейна.

2. В случае канала, сечение которого состоит из двух прямолинейных отрезков, наклоненных под углом 45° к вертикали, мы будем иметь, прежде всего, тип, открытый Келландом, т. е. если ось x совпадает с линией дна канала, то

$$\varphi = A \operatorname{ch} \frac{ky}{\sqrt{2}} \operatorname{ch} \frac{kz}{\sqrt{2}} \cos kx \cos(\sigma t + \varepsilon). \tag{1}$$

Это выражение, очевидно, удовлетворяет уравнению $\nabla^2\varphi = 0$ и для $y = \pm z$ соответственно дает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \pm \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{2}$$

Условие на поверхности [(4) § 260] тогда будет давать

$$\sigma^2 = \frac{gk}{\sqrt{2}} \operatorname{th} \frac{kh}{\sqrt{2}}, \tag{3}$$

где h — возвышение свободной поверхности над линией дна. Если мы положим $\sigma = kc$, то скорость волны будет представляться формулой

$$c^2 = \frac{g}{k\sqrt{2}} \operatorname{th} \frac{kh}{\sqrt{2}}, \tag{4}$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, а λ — длина волны.

Когда $\frac{h}{\lambda}$ будет мало, формула (4) приводится к выражению

$$c = \left(\frac{1}{2} gh\right)^{1/2}, \tag{5}$$

что находится в согласии с (13) § 170, так как средняя глубина теперь обозначается через $\frac{1}{2} h$ [1]). Если же, с другой стороны, $\frac{h}{\lambda}$ будет значительно большим, то будем иметь

$$c^2 = \frac{g}{k\sqrt{2}}. \tag{6}$$

Формула (1) в этом случае обнаруживает быстрое возрастание амплитуды при подходе к боковым стенкам. В действительности мы будем иметь здесь пример „краевых волн", и скорость волны будет совпадать с той скоростью, которую мы получим из формулы Стокса, полагая в ней $\beta = 45°$.

Остальные типы колебаний, симметричные по отношению к срединной плоскости $y = 0$, будут представляться формулой

$$\varphi = C(\operatorname{ch} \alpha y \cos \beta z + \cos \beta y \operatorname{ch} \alpha z) \cos kx \cos(\sigma t + \varepsilon), \tag{7}$$

при соответственном подборе α, β, σ. Это выражение удовлетворяет условию (2), а уравнение непрерывности будет давать

$$\alpha^2 - \beta^2 = k^2. \tag{8}$$

---

[1]) Kelland, On Waves, Trans. R. S. Edin., XIV (1839).

Граничное условие (4) § 260 будет удовлетворено для $z=h$, если потребовать

$$\sigma^2 \operatorname{ch} \alpha h = g\alpha \operatorname{sh} \alpha h, \quad \sigma^2 \cos \beta h = -g\beta \sin \beta h. \tag{9}$$

Отсюда получаем

$$\alpha h \operatorname{tg h} \alpha h + \beta h \operatorname{tg} \beta h = 0. \tag{10}$$

Таким образом, значения α и β определяются из соотношений (8) и (10), а соответственное значение σ будет даваться тем или другим уравнением (9). Если мы на момент положим

$$x = \alpha h, \quad y = \beta h, \tag{11}$$

то корни уравнений (8) и (10) будут представляться точками пересечения кривой

$$x \operatorname{tg h} x + y \operatorname{tg} y = 0, \tag{12}$$

общий вид которой легко начертить, с гиперболой

$$x^2 - y^2 = k^2 h^2. \tag{13}$$

Действительных решений будет бесконечное число, причем соответствующие значения βh располагаются во втором, четвертом, шестом ... квадрантах. Последние и дают соответственно 2, 4, 6, ... продольные узлы свободной поверхности. Если $\frac{h}{\lambda}$ будет значительно большим, то приближенно $\operatorname{th} \alpha h = 1$ и βh будет (при простейшем типе колебаний этого класса) немного превышать значение $\frac{\pi}{2}$. Два продольных узла в этом случае очень близко подходят к краям с уменьшением λ, тогда как скорость волны становится практически равной скорости волны длины λ на глубокой воде. В качестве числового примера положим $\beta h = 1{,}1 \cdot \frac{\pi}{2}$, тогда найдем

$$\alpha h = 10{,}910, \quad kh = 10{,}772, \quad c = 1{,}0064 \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2}.$$

Расстояние одной из узловых линий от ближайшего края будет тогда $0{,}12h$.

Мы можем, далее, рассмотреть асимметричные типы. Решение такого типа, аналогичное типу Келланда, было замечено Гринхиллом (см. выше). Оно представляется в виде

$$\varphi = A \operatorname{sh} \frac{ky}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} \frac{kz}{\sqrt{2}} \cos kx \cos(\sigma t + \varepsilon), \tag{14}$$

где

$$\sigma^2 = \frac{gk}{\sqrt{2}} \operatorname{ctgh} \frac{kh}{\sqrt{2}}. \tag{15}$$

Когда kh мало, последнее дает $\sigma^2 = \frac{g}{h}$, так что частота будет значительно больше в сравнении с той, которая получается из теории „длинных" волн. В действительности будут иметь место главным образом поперечные колебания с очень постепенным изменением фаз при продвижении вдоль канала. И, конечно, средняя линия поверхности будет узловой. Если, с другой стороны, kh будет велико, то мы получим „краевые волны", как и в случае решения Келланда.

Остальные асимметричные колебания представляются формулой

$$\varphi = A(\operatorname{sh}\alpha y \sin\beta z + \sin\beta y \operatorname{sh}\alpha z)\cos kx\cos(\sigma t+\varepsilon). \tag{16}$$

Из этой формулы тем же способом, что и раньше, получим

$$\alpha^2-\beta^2=k^2, \tag{17}$$

и

$$\sigma^2\operatorname{sh}\alpha h = g\alpha\operatorname{ch}\alpha h,\quad \sigma^2\sin\beta h = g\beta\cos\beta h, \tag{18}$$

где

$$\alpha h\operatorname{ctgh}\alpha h = \beta h\operatorname{ctg}\beta h. \tag{19}$$

Имеется бесконечное число решений, для которых значения βh лежат в третьем, пятом, седьмом, ... квадрантах и представляют 3, 5, 7, ... продольные узлы, один из которых является центральным.

3. Случай канала с боковыми сторонами, наклоненными к вертикали под углом в 60°, был изучен Макдональдом [1]). Он установил очень широкий тип, к которому можно притти следующим образом.

Выражение

$$\varphi = P\cos kx\cos(\sigma t+\varepsilon), \tag{20}$$

где

$$P = A\operatorname{ch}kz + B\operatorname{sh}kz + \operatorname{ch}\frac{ky\sqrt{3}}{2}\left(C\operatorname{ch}\frac{kz}{2}+D\operatorname{sh}\frac{kz}{2}\right), \tag{21}$$

очевидно, удовлетворяет уравнению неразрывности. Легко показать, что оно для $y=\pm\sqrt{3}z$ дает

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \pm\sqrt{3}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

при условии

$$C=2A,\quad D=-2B. \tag{22}$$

Граничное условие (4) § 260 будет тогда удовлетворено, если

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sigma^2}{gk}(A\operatorname{ch}kh+B\operatorname{sh}kh) &= A\operatorname{sh}kh+B\operatorname{ch}kh,\\ \frac{2\sigma^2}{gk}\left(A\operatorname{ch}\frac{kh}{2}-B\operatorname{sh}\frac{kh}{2}\right) &= A\operatorname{sh}\frac{kh}{2}-B\operatorname{ch}\frac{kh}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Первое из них эквивалентно соотношениям

$$A = H\left(\operatorname{ch}kh-\frac{\sigma^2}{gk}\operatorname{sh}kh\right),\quad B = H\left(\frac{\sigma^2}{gk}\operatorname{ch}kh-\operatorname{sh}kh\right), \tag{24}$$

а последнее приводится тогда к уравнению

$$2\left(\frac{\sigma^2}{gk}\right)^2-3\,\frac{\sigma^2}{gk}\operatorname{ctgh}\frac{kh}{2}+1=0. \tag{25}$$

Таким образом, подставляя из (22) и (24) в (21), получим

$$P = H\left\{\operatorname{ch}k(z-h)+\frac{\sigma^2}{gk}\operatorname{sh}k(z-h)\right\}+$$
$$+2H\operatorname{ch}\frac{ky\sqrt{3}}{2}\left\{\operatorname{ch}k\left(\frac{z}{2}+h\right)-\frac{\sigma^2}{gk}\operatorname{sh}k\left(\frac{z}{2}+h\right)\right\}.$$

[1]) Macdonald, Waves in Canals, Proc. Lond. Math. Soc., XXV, 101 (1894).

Формулы (25) и (26) и были установлены Макдональдом, но другим способом. Граничное значение P представляется в виде

$$P = H\left\{1 + 2\operatorname{ch}\frac{ky\sqrt{3}}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{3kh}{2} - \frac{\sigma^2}{gk}\operatorname{sh}\frac{3kh}{2}\right)\right\}. \qquad (27)$$

Уравнение (25) является квадратным относительно $\frac{\sigma^2}{gk}$. В случае волны, длина которой $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$ велика по отношению к h, будем иметь приближенно

$$\operatorname{ctgh}\frac{3kh}{2} = \frac{2}{3kh},$$

и корни (25) будут тогда приближенно равны

$$\frac{\sigma^2}{gk} = \frac{1}{2}kh \quad \text{и} \quad \frac{\sigma^2}{gk} = \frac{1}{kh}. \qquad (28)$$

Если мы положим $\sigma = kc$, то первый результат дает $c^2 = \frac{1}{2}gh$ в согласии с обычной теорией „длинных волн" (§§ 169, 170). В этом случае формула (27) дает приближенно $P = 3H$; последнее не зависит от y; это значит, что гребни волны будут почти прямолинейными. Второй корень (28) дает $c^2 = \frac{g}{k^2h}$, т. е. представляет значительную большую „фазовую скорость", но ничего парадоксального в этом нет. *Групповая* скорость на самом деле будет сравнительно малой. При дальнейшем исследовании можно найти, что поперечные сечения волн будут по форме параболическими и что имеются две узловые линии, параллельные длине канала. Период колебаний будет почти в точности совпадать с периодом симметричных поперечных колебаний, о которых шла речь в § 258.

Если, с другой стороны, длина волны будет короткой в сравнении с поперечными размерами канала, то kh будет велико и приближенно $\operatorname{ctgh}\frac{3}{2}kh = 1$. Тогда корни уравнения (25) будут приближенно

$$\frac{\sigma^2}{gk} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\sigma^2}{gk} = \frac{1}{2}. \qquad (29)$$

Первый корень дает примерно $P = H$, т. е. гребни волн будут прямолинейными, обнаруживая только небольшое изменение высот в направлении к боковым стенкам. Частота $\sigma = (gk)^{1/2}$ в точности есть та частота, которую мы могли бы ожидать на основании общей теории волн на сравнительно глубокой воде.

Если мы в этом случае перенесем начало на один край, полагая $z + h$ вместо z и $y - \sqrt{3}h$ вместо y, и затем устремим h к бесконечности, то получим случай системы волн, перемещающихся параллельно берегу, который наклонен в сторону течения под углом в 30° к горизонту. В результате имеем

$$\varphi = H\left\{e^{kz} + e^{-\frac{1}{2}k(y\sqrt{3}+z)} - 3e^{-\frac{1}{2}k(y\sqrt{3}-z)}\right\}\cos kx\cos(\sigma t + \varepsilon), \qquad (30)$$

где $\sigma = (gk)^{1/2}$. Эта формула допускает непосредственную проверку. На расстоянии длины волны или на таком же расстоянии от берега значение φ вблизи поверхности практически будет приводиться к выражению

$$\varphi = He^{kz}\cos kx\cos(\sigma t + \varepsilon), \qquad (31)$$

что согласуется с § 228. Вблизи края возвышение изменяет знак, так как там имеется продольная узловая линия, для которой

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\, ky = \ln 2, \tag{32}$$

или $\frac{y}{\lambda} = 0{,}127$.

Второй из двух корней (29) дает систему краевых волн, и результаты будут эквивалентны тем результатам, которые получатся, полагая $\beta = 30°$ в формуле Стокса [1]).

Колебания сферической массы жидкости.

§ 262. Теорией гравитационных колебаний массы жидкости относительно ее сферической формы мы обязаны Кельвину [2]).

Выбирая начало в центре и обозначая радиус-вектор произвольной точки свободной поверхности через $a + \zeta$, где a — радиус в невозмущенном состоянии, мы принимаем

$$\zeta = \sum_{1}^{\infty} \zeta_n, \tag{1}$$

где ζ_n есть поверхностная сферическая функция целого порядка n. Уравнение неразрывности $\nabla^2 \varphi = 0$ удовлетворяется выражением

$$\varphi = \sum_{1}^{\infty} \frac{r^n}{a_n} S_n, \tag{2}$$

где S_n — сферическая поверхностная функция, а кинематическое условие

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \tag{3}$$

будучи удовлетворено при $r = a$, дает

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial t} = -\frac{n}{a} S_n. \tag{4}$$

На свободной поверхности гравитационный потенциал (см. § 200) имеет значение

$$\Omega = -\frac{4\pi\gamma\varrho a^3}{3r} - \sum_{1}^{\infty} \frac{4\pi\gamma\varrho a}{2n+1} \zeta_n, \tag{5}$$

---

[1]) О распространении на другие углы наклона берега смотреть Hanson, Proc. Roy. Soc., A, CXI, 491 (1926).

[2]) W. Thomson, Dynamical Problems regarding Elastic Spheroidal Shells and Spheroids of Incompressible Liquid, Phil. on Trans., 1863 [Papers, III, 384].

где γ есть гравитационная постоянная. Полагая

$$g = \frac{4}{3}\pi\gamma\varrho a, \quad r = a + \sum \zeta_n,$$

получим

$$\Omega = \text{const.} + g\sum_1^\infty \frac{2(n-1)}{2n+1}\zeta_n. \tag{6}$$

Подставляя из (2) и (6) в уравнение давлений

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \Omega + \text{const.} \tag{7}$$

и принимая p постоянным вдоль поверхности, мы получим

$$\frac{\partial S_n}{\partial t} = \frac{2(n-1)}{2n+1} g\zeta_n. \tag{8}$$

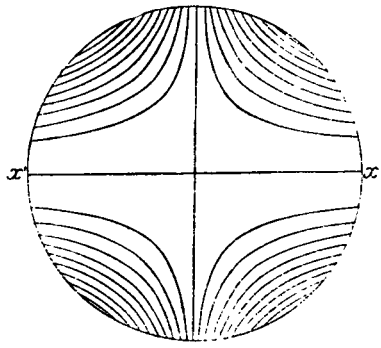
Исключая S_n из (4) и (8), будем иметь

$$\frac{\partial^2\zeta_n}{\partial t^2} + \frac{2n(n-1)}{2n+1}\frac{g}{a}\zeta_n = 0. \tag{9}$$

Последняя формула показывает, что ζ_n пропорционально $\cos(\sigma_n t + \varepsilon)$, где

$$\sigma_n^2 = \frac{2n(n-1)}{2n+1}\frac{g}{a}. \tag{10}$$

При одинаковой плотности жидкости g пропорционально a; это значит, что частота не зависит от размера шара.



Фиг. 69.

Формула дает $\sigma_1 = 0$, как и следовало ожидать, так как при малых деформациях, представляемых сферической функцией первого порядка, поверхность остается сферической и период, следовательно, будет бесконечно длинным.

Для случая $n = 2$, или при эллипсоидальной деформации, длина изохронного простого маятника становится равной $\frac{4}{5}a$ или составляет один с четвертью радиуса Земли для однородного жидкого шара той же массы и того же диаметра, что и Земля; следовательно, для этого случая или для какого-либо однородного жидкого шара с $5^1/_2$-кратной плотностью воды полупериод будет равен 47 мин. 12 сек.

„Стальной шар тех же размеров без взаимного притяжения своих частиц вряд ли мог бы колебаться так быстро, так как скорость плоских волн возмущения в стали составляет приблизительно только 3090 *м*

в секунду; с такой скоростью расстояние, равное диаметру Земли, нельзя пройти в меньшее время, чем 1 час 8 мин. 40 сек." [1]).

Когда поверхность совершает колебания вида *зонального* гармонического сфероида второго порядка, тогда уравнение линий тока представляется в виде $x\varpi^2 = \text{const.}$, где ϖ обозначает расстояние какой-либо точки от оси симметрии, которая принимается за ось x [см. (11) § 95]. Вид этих линий для ряда эквидистантных значений постоянного показан на фиг. 69.

§ 263. Эта проблема может быть также изучена очень компактно методом „нормальных координат" (§ 168).

Кинетическая энергия представляется формулой

$$T = \frac{1}{2}\varrho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r}\, dS, \tag{11}$$

где dS есть элемент поверхности $r = a$. Отсюда, если поверхность совершает колебания в виде $r = a + \zeta_n$, то, подставляя из формул (2) и (4) в (11), мы найдем

$$T = \frac{1}{2}\frac{\varrho a}{n}\iint \dot{\zeta}_n^2\, dS. \tag{12}$$

Чтобы найти потенциальную энергию, мы можем допустить, что внешняя поверхность сдавливается, чтобы принимать последовательно формы $r = a + \theta\zeta_n$, где θ изменяется от 0 до 1. В каком-либо состоянии этого процесса гравитационный потенциал на поверхности, согласно (6), будет

$$\Omega = \text{const.} + \frac{2(n-1)}{2n+1} g\theta\zeta_n. \tag{13}$$

А тогда работа, потребная для приращения слоя толщины ζ_n и $\delta\theta$, будет равна

$$\theta\,\delta\theta\,\frac{2(n-1)}{2n+1} g\varrho \iint \zeta_n^2\, dS. \tag{14}$$

Интегрируя от $\theta = 0$ до $\theta = 1$, мы найдем

$$V = \frac{n-1}{2n+1} g\varrho \iint \zeta_n^2\, dS. \tag{15}$$

Результаты, отвечающие общей деформации (1), получаются приставлением знака $\sum$ суммирования по n в формулы (12) и (15), так как члены с произведениями поверхностных сферических функций разных порядков будут, согласно § 87, исчезать.

---

[1]) W. Thomson, см. выше. Точная теория колебаний упругой сферы для самого медленного колебания стального шара с размерами Земли дает период в 1 час 18 мин. См. работу „On the Vibrations of an Elastic Sphere", Proc. Lond. Math. Soc., XIII, 212 (1882). Вибрации сферы с несжимаемым веществом при совместном влиянии притяжения и упругости были исследованы Bromwich, Proc. Lond. Math. Soc., XXX, 98 (1898). Влияние сжимаемости изучено Love, Some Problems of Geodynamics (Adams. Prize Essay), Cambridge (1911), стр. 126.

Тот факт, что общие выражения для T и V приводятся к сумме квадратов, показывает, что деформация, отвечающая произвольной поверхностно-сферической функции, принадлежит к „нормальному типу". Таким образом, принимая ζ_n пропорциональной $\cos(\sigma_n t+\varepsilon)$, на основании того, что энергия $T+V$ должна быть постоянной, мы снова приходим к результату (10).

В случае вынужденных колебаний, отвечающих потенциалу возмущения $\Omega'\cos(\sigma t+\varepsilon)$, который во всех точках внутри жидкости удовлетворяет уравнению $\nabla^2\Omega'=0$, мы должны предполагать Ω' разложенной в ряд по объемным сферическим функциям. Если $\bar{\zeta}_n$ будет равновесное возвышение, отвечающее члену порядка n, то при вынужденном колебании, согласно (14) § 168, мы будем иметь

$$\zeta_n=\frac{1}{1-\frac{\sigma^2}{\sigma_n^2}}\,\bar{\zeta}_n, \tag{16}$$

где σ — частота вынужденных колебаний, а σ_n — частота свободных колебаний того же типа, который представлен формулой (10).

Числовые результаты, приведенные выше для случая $n=2$, показывают, что для невращающегося жидкого шара с теми же размерами и с той же средней плотностью, что и у Земли, вынужденные колебания, характер и периоды которых совпадают с действительными лунными и солнечными приливами, будут иметь практически те амплитуды, которые фигурируют в статической теории.

§ 264. Исследование легко распространить на случай океана произвольной постоянной глубины, покрывающего симметричное сферическое ядро.

Пусть b — радиус ядра и a — радиус внешней поверхности. Пусть вид поверхности представляется уравнением

$$r=a+\sum_1^\infty \zeta_n, \tag{1}$$

тогда для потенциала скоростей мы принимаем

$$\varphi=\left\{(n+1)\,\frac{r^n}{b^n}+n\,\frac{b^{n+1}}{r^{n+1}}\right\}S_n, \tag{2}$$

где коэфициент подобран так, чтобы для $r=b$ получилось $\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0$.

Условие, что для $r=a$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \tag{3}$$

дает

$$\frac{\partial\zeta_n}{\partial t}=-n(n+1)\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^n-\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\right\}\frac{S_n}{a}. \tag{4}$$

Для гравитационного потенциала на свободной поверхности (1) мы будем иметь

$$\Omega = -\frac{4\pi\gamma\varrho_0 a^3}{3r} - \sum_1^\infty \frac{4\pi\gamma\varrho a}{2n+1}\,\zeta_n. \tag{5}$$

где ϱ_0 — средняя плотность всей массы. Отсюда, полагая $g = \frac{4}{3}\pi\gamma\varrho_0 a$, мы найдем

$$\Omega = \text{const} + g\sum_1^\infty \left(1 - \frac{3}{2n+1}\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\zeta_n. \tag{6}$$

Условие для давления на свободной поверхности тогда будет давать

$$\left\{(n+1)\left(\frac{a}{b}\right)^n + n\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\right\}\frac{\partial S_n}{\partial t} = \left(1 - \frac{3}{2n+1}\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)g\zeta_n. \tag{7}$$

При исключении S_n из уравнений (4) и (7) получим

$$\frac{\partial^2\zeta_n}{\partial t^2} + \sigma_n^2\zeta_n = 0, \tag{8}$$

где

$$\sigma_n^2 = \frac{n(n+1)\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^n - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\right\}}{(n+1)\left(\frac{a}{b}\right)^n + n\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}\left(1 - \frac{3}{2n+1}\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\frac{g}{a}. \tag{9}$$

Случай $n=1$ является исключением, так как при вычислениях ядро предполагалось неподвижным. Однако, оказывается, что σ_1 обращается в нуль при $\varrho = \varrho_0$ и становится мнимым при $\varrho > \varrho_0$, как и следовало ожидать. Поправка едва ли будет значительной, но все же можно показать, что если ядро не будет закреплено, то результат, получаемый из уравнения (9)

$$\sigma_1^2 = \frac{1 - \frac{b^3}{a^3}}{1 + \frac{b^3}{a^3}}\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\frac{g}{a}, \tag{10}$$

должен быть увеличен в отношении

$$\frac{1 + \frac{b^3}{2a^3}}{1 + \frac{b^3}{2a^3} - \frac{m}{M}},$$

где M есть вся масса, а m — масса только одного океана. Заключение же об устойчивости остается неизменным.

Если в выражении (9) положить $b=0$, то мы воспроизведем результат предшествующего параграфа. С другой стороны, если глубина океана будет мала в сравнении с радиусом, то, полагая $b = a - h$ и пренебрегая квадратом h/a, мы найдем

$$\sigma_n^2 = n(n+1)\left(1 - \frac{3}{2n+1}\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\frac{gh}{a^2} \tag{11}$$

при условии, что n будет малым по отношению к a/h. А это согласуется с результатом Лапласа, полученным более прямым способом в § 200.

Но если n будет сравнимым с a/h, то мы будем иметь, полагая $n=ka$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(1-\frac{h}{a}\right)^{-ka}=e^{kh},$$

а тогда (9) приводится к тому же выражению, как и в § 228,

$$\sigma^2=gk\,\mathrm{th}\,kh. \tag{12}$$

Более того, выражение (2) для потенциала скоростей, если мы положим $r=a+z$, принимает вид

$$\varphi=\varphi_1\,\mathrm{ch}\,k(z+h), \tag{13}$$

где φ_1 есть функция координат на поверхности, которую теперь мы можем рассматривать как плоскость (ср. § 257).

Формулы для кинетической и потенциальной энергии, легко устанавливаемые по тому же методу, как и в предшествующем параграфе, будут

$$T=\frac{1}{2}\varrho a\sum_1^\infty\frac{n(n+1)\left(\frac{a}{b}\right)^n+n\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{n(n+1)\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^n-\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\right\}}\int\int\dot\zeta_n^2\,dS, \tag{14}$$

$$V=\frac{1}{2}g\varrho\sum_1^\infty\left(1-\frac{3}{2n+1}\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\int\int\zeta_n^2\,dS. \tag{15}$$

Последний результат снова показывает, что равновесная конфигурация есть конфигурация с минимальным значением потенциальной энергии и будет, следовательно, наверно устойчивой, если только $\varrho<\varrho_0$.

В случае, когда глубина является относительно малой, а n является конечным, полагая $b=a-h$, мы получим

$$T=\frac{1}{2}\frac{\varrho a^2}{h}\sum_1^\infty\frac{1}{n(n+1)}\int\int\dot\zeta_n^2\,dS, \tag{16}$$

тогда как выражение для V, естественно, останется неизменным.

Если амплитуды гармоник ζ_n рассматривать как обобщенные координаты, то формула (16) показывает, что при сравнительно малых глубинах „коэфициенты инерции" изменяются обратно пропорционально глубине. Мы имели и другие иллюстрации эффекта связей при нашем рассмотрении приливных волн.

Капиллярность.

§ 265. Роль, которую играет в некоторых случаях движения жидкости молекулярное сцепление, признавалась давно в общих чертах, но только сравнительно недавно этот вопрос был подчинен точному математическому анализу. Мы приведем некоторые результаты замечательных исследований Кельвина и Рэлея в этом вопросе.

В нашу задачу не входит дать физическую теорию этого вопроса [1]). Для наших целей достаточно будет знать, что свободная

[1]) См. Максвелл, Encyc. Britann., статья „Capillary Action" [Papers, Cambridge, 1890, II, 541], где есть ссылки на более ранних авторов. Далее, Rayleigh, On the Theory of Surface Forces, Phil. Mag. (5), XXX, 285, 456 (1890). [Papers, III, 397].

поверхность жидкости или, в более общем случае, поверхность раздела двух несмешивающихся жидкостей ведет себя так, как если бы она находилась в состоянии равномерного *натяжения*, причем натяжение между двумя соседними частями поверхности, отнесенное к единице длины общей линии раздела, зависит только от природы обеих жидкостей и от температуры. Мы будем обозначать это так называемое „поверхностное натяжение" буквой T_1. Размерность этой величины в абсолютной системе единиц есть MT^{-2}. Значение ее в системе единиц *CGS* (дина на сантиметр) для поверхности раздела вода — воздух при температуре 20° C оказывается приблизительно равным 74 [1]); при возрастании температуры это значение несколько убывает. Соответствующее значение для поверхности раздела ртуть — воздух приблизительно равно 540.

Можно высказать следующее положение, равносильное тому, что было изложено:

„Свободная" энергия каждой системы, к которой принадлежит рассматриваемая поверхность, содержит член, пропорциональный площади поверхности, причем значение этой „поверхностной энергии" (как она обычно называется), отнесенное к единице поверхности, равно T_1 [2]). Так как условие устойчивости равновесия заключается в том, что свободная энергия должна быть наименьшей, то поверхность стремится сокращаться до тех пор, пока это оказывается совместимым с другими условиями задачи.

Существенное изменение в наших прежних методах, которое оказывается необходимым, если мы принимаем во внимание поверхностное натяжение, заключается в предложении, что давление жидкости на поверхности раздела испытывает теперь разрыв; именно, мы будем иметь

$$p - p' = T_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где p, p' обозначают давления на обеих сторонах поверхности, вблизи от нее, а R_1, R_2 суть главные радиусы кривизны поверхности, причем радиус нужно считать отрицательным, когда соответствующий центр кривизны лежит на стороне, отмеченной значком штрих.

Эту формулу можно легко получить, определяя компоненты в направлении нормали к поверхности сил, действующих на прямоугольный элемент тонкого поверхностного слоя, ограниченный линиями кривизны; но здесь нет необходимости приводить это доказательство, которое можно найти почти во всех современных учебниках по гидростатике.

---

[1]) Rayleigh, On the Tension of Water-Surfaces, Clean and Contaminated, investigated by the method of Ripples, Phil. Mag. (5), XXX, 386 (1890) [Papers, III, 394]; Pedersen, Phil. Trans. A, CCVII, 341 (1907); Bohr, Phil. Trans. A, CCIX, 281 (1909).

[2]) Различие между „свободной" и „внутренней" энергией основывается на термодинамических принципах. В процессах с постоянной температурой и свободным теплообменом речь идет о свободной энергии.

§ 266. Простейшая задача, с которой мы можем начать, есть задача о волнах на плоской поверхности, образующей общую границу двух покоющихся жидкостей.

Если мы возьмем начало на этой плоскости, а ось y перпендикулярно к ней, то можем положить потенциалы скоростей, отвечающих простым гармоническим колебаниям поверхности раздела, равными

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= Ce^{ky}\cos kx\cos(\sigma t+\varepsilon),\\ \varphi' &= C'e^{-ky}\cos kx\cos(\sigma t+\varepsilon),\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

причем первое равенство относится к той стороне, где y отрицательно, а второе — к той стороне, где y положительно. В самом деле, эти выражения удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\varphi' = 0$$

и дают для $y = \mp\infty$ скорость, равную нулю.

Соответствующие перемещения точек поверхности в направлении оси y будут иметь вид

$$\eta = a\cos kx\sin(\sigma t+\varepsilon), \tag{2}$$

а условие что при $y=0$ должно быть

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\varphi'}{\partial y},$$

даст

$$\sigma a = -kC = kC'. \tag{3}$$

Если мы на мгновение оставим в стороне силу тяжести, то переменная часть давления будет дана равенствами

$$\left.\begin{aligned} \frac{p}{\varrho} &= \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\sigma^2 a}{k}e^{ky}\cos kx\sin(\sigma t+\varepsilon),\\ \frac{p'}{\varrho'} &= \frac{\partial\varphi'}{\partial t} = -\frac{\sigma^2 a}{k}e^{-ky}\cos kx\sin(\sigma t+\varepsilon).\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Чтобы найти условие, которому должно удовлетворять давление на общей поверхности, вычислим силы, действующие в направлении оси y на отрезок шириной δx. Давления жидкости на обеих сторонах имеют результирующую $(p'-p)\,\delta x$, разность же напряжений, параллельных оси y, для обоих краев равна $\delta\left(T'\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$. Мы получаем, таким образом, уравнение

$$p - p' + T_1\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = 0, \tag{5}$$

которое должно иметь место, когда приближенно $y=0$. Можно было бы прямо написать это уравнение как частный случай обще-

то граничного условия (§ 265). Подставляя из (2) и (4) в (5), находим

$$\sigma^2 = \frac{T_1 k^2}{\varrho + \varrho'}\ ; \tag{6}$$

это уравнение определяет скорость для колебаний с длиной волны $\frac{2\pi}{k}$.

Кинетическая энергия жидкости, отнесенная к длине волны, если жидкость заключена между двумя плоскостями, параллельными плоскостям xy и отстоящими друг от друга на единицу длины, равна

$$T = -\frac{1}{2}\varrho \int_0^{\lambda} \left[\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]_{y=0} dx - \frac{1}{2}\varrho' \int_0^{\lambda} \left[\varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial y}\right]_{y=0} dx. \tag{7}$$

Если мы примем

$$\eta = a \cos kx, \tag{8}$$

где a зависит только от t, и положим, имея в виду кинематические условия,

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= -k^{-1}\dot{a}e^{ky}\cos kx, \\ \varphi' &= k^{-1}\dot{a}e^{-ky}\cos kx, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

то получим

$$T = \frac{1}{4}(\varrho + \varrho')\, k^{-1}\dot{a}^2\lambda. \tag{10}$$

Далее, потенциальная энергия, соответствующая растяжению поверхности раздела, будет равна

$$V = T_1 \int_0^{\lambda} \left\{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right\}^{1/2} dx - T_1\lambda = \frac{1}{2}\, T_1 \int_0^{\lambda} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{11}$$

Подставляя значение η из (8), получим

$$V = \frac{1}{4}\, T_1 k^2 a^2 \lambda. \tag{12}$$

Чтобы получить среднюю энергию как кинетическую, так и потенциальную на единицу площади поверхности раздела, мы должны отбросить множитель λ.

Если предположим, что a пропорционально $\cos(\sigma t + \varepsilon)$, где σ определяется формулой (6), то увидим, что полная энергия $T + V$ будет постоянной. С другой стороны, полагая

$$\eta = \sum (\alpha \cos kx + \beta \sin kx). \tag{13}$$

легко увидим, что выражения для T и V приведутся к суммам квадратов $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ и, соответственно, α, β с постоянными коэфициентами, так что величины α, β суть „нормальные координаты“. Тогда общая теория § 168 независимо приводит к формуле (6) для скорости.

Если мы объединим вместе, как в § 229, две системы стоячих волн, то получим прогрессивную систему волн

$$\eta = a\cos(kx \mp \sigma t), \tag{14}$$

которая движется со скоростью

$$c = \frac{\sigma}{k} = \left(\frac{T_1 k}{\varrho + \varrho'}\right)^{1/2}; \tag{15}$$

выражая скорость через длину волны, будем иметь

$$c = \left(\frac{2\pi T_1}{\varrho + \varrho'}\right)^{1/2} \lambda^{-1/2}. \tag{16}$$

Заслуживает замечания отличие этого результата от результата § 229; если длина волны убывает, то период убывает еще быстрее, так что волновая скорость ***возрастает***.

Так как c изменяется как $\lambda^{-1/2}$, то групповая скорость на основании (3) § 236 равна

$$U = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} = \frac{3}{2} c. \tag{17}$$

Представляет интерес проверка соотношения между групповой скоростью и скоростью переноса энергии.

Полагая

$$\eta = a\cos k(ct - x), \tag{18}$$

находим на основании формул (10), (12) для общей энергии на единицу поверхности раздела выражение

$$\frac{1}{4}(\varrho + \varrho') kc^2a^2 + \frac{1}{4} T_1 k^2 a^2 = \frac{1}{2}(\varrho + \varrho') kc^2 a^2. \tag{19}$$

Средняя работа, произведенная в единицу времени давлением жидкости на плоскость, перпендикулярную к оси x, может быть найдена при помощи вычисления, подобного вычислениям § 237, и оказывается равной

$$\frac{1}{4}(\varrho + \varrho') kc^3 a^2. \tag{20}$$

Работа поверхностного натяжения на такой плоскости, отнесенная к единице времени, будет равна

$$T_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} \dot{\eta} = T_1 k^2 c a^2 \sin^2 k(ct - x),$$

и среднее значение ее есть

$$\frac{1}{2} T_1 k^2 c a^2 = \frac{1}{2}(\varrho + \varrho') kc^3 a^2. \tag{21}$$

Если сложим это выражение с выражением (20) и разделим потом на правую часть формулы (19), то в частном получится $^3/_2\, c$, в согласии с формулой (17).

То обстоятельство, что групповая скорость для капиллярных волн превосходит скорость самих волн, помогает объяснить некоторые интересные явления, о которых речь будет позднее (§§ 271, 272).

В качестве числового примера рассмотрим случай свободной поверхности воды.

Полагая

$$\varrho = 1, \quad \varrho' = 0, \quad T_1 = 74,$$

получим следующие результаты (в сантиметрах и секундах) [1]):

Длина волны	Волновая скорость	Частота
0,50	30	61
0,10	68	680
0,05	96	1 930

§ 267. Если ввести в рассмотрение силу тяжести, то общая поверхность в состоянии равновесия будет, конечно, горизонтальной плоскостью. Направив положительную ось y вверх, получим для определения давления на возмущенной поверхности раздела следующие приближенные формулы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{p}{\varrho} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gy = \left(\frac{\sigma^2}{k} - g\right) a \cos kx \sin(\sigma t + \varepsilon), \\ \frac{p'}{\varrho'} &= \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - gy = -\left(\frac{\sigma^2}{k} + g\right) a \cos kx \sin(\sigma t + \varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

После подстановки в уравнение (5) § 266 получится

$$\sigma^2 = \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho + \varrho'} gk + \frac{T_1 k^3}{\varrho + \varrho'}. \tag{2}$$

Если положим $\sigma = kc$, то найдем для квадрата скорости ряда прогрессивных волн выражение

$$c^2 = \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho + \varrho'} \frac{g}{k} + \frac{T_1}{\varrho + \varrho'} k = \frac{1 - s}{1 + s}\left(\frac{g}{k} + T'k\right), \tag{3}$$

где обозначено

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = s, \quad \frac{T_1}{\varrho - \varrho'} = T'. \tag{4}$$

В частных случаях $T_1 = 0$ и соответственно $g = 0$ мы опять получаем результаты §§ 231 и 266.

По отношению к формуле (3) нужно сделать несколько замечаний. Прежде всего, хотя значение σ постоянно возрастает, когда длина

---

[1]) Ср. W. Thomson, Papers, III, 520.

Изложенная теория дает объяснение той ряби, которую можно наблюдать на поверхности воды в стакане, когда этот стакан легкими ударами смоченным пальцем о край приводится в колебание. Следует, однако, заметить, что частота капиллярных волн в этом опыте оказывается *вдвое* больше частоты колебаний самого стакана; см. Rayleigh, On Maintained Vibrations. Phil. Mag. (5) XV, 229 (1883) [Papers, II, 188; Theory of Sound, 2 изд., гл. 20].

волны $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$ убывает от ∞ до 0, однако, скорость волн, после того как она упадет до известного минимума, начинает опять возрастать. Значение этого минимума, которое мы обозначим c_m, определяется равенством

$$c_m^2 = \frac{1-s}{1+s} 2(gT')^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

и отвечает длине волны

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{k_m} = 2\pi \sqrt{\frac{T'}{g}}. \tag{6}$$ [1])

Формулу (3), если ввести в нее λ_m и c_m, можно записать в виде

$$\frac{c^2}{c_m^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda_m} + \frac{\lambda_m}{\lambda}\right); \tag{7}$$

это показывает, что для каждого заданного значения c, большего c_m, существует два допустимых (взаимных) значения $\frac{\lambda}{\lambda_m}$. Например, значениям

$$\frac{c}{c_m} = 1{,}2, \quad 1{,}4, \quad 1{,}6, \quad 1{,}8, \quad 2{,}0$$

отвечают значения

$$\frac{\lambda}{\lambda_m} = \begin{cases} 2{,}476, & 3{,}646, & 4{,}917, & 6{,}322, & 7{,}873 \\ 0{,}404, & 0{,}274, & 0{,}203, & 0{,}158, & 0{,}127 \end{cases}$$

добавим к этому еще значения

$$\arcsin \frac{c_m}{c} = 56°26', \quad 45°35', \quad 38°41', \quad 33°45', \quad 30°,$$

которыми мы воспользуемся позднее.

Для достаточно больших значений λ первый член в формуле (3) для c^2 оказывается большим по сравнению с вторым членом; поэтому силой, обусловливающей волновое движение, будет являться главным образом сила тяжести. Если же величина λ очень мала, то становится преобладающим второй член, и движение определяется, как в § 266, главным образом силами сцепления. Чтобы указать порядок входящих в рассмотрение величин, заметим, что для $\frac{\lambda}{\lambda_m} > 3$ влияние сил сцепления на длину волны можно оценить примерно в 5%, а влияние

---

[1]) Теория минимума скорости волн так же, как и большая часть содержания §§ 266, 267, принадлежит W. Thomson, Hydrokinetic Solutions and Observations, Phil. Mag. (4) XLII, 374 (1871) [Papers, IV, 76]; см. также Nature V. 1 (1871).

силы тяжести оказывается в такой же степени незначительным, когда $\frac{\lambda}{\lambda_m} < \frac{1}{3}$.

Кельвин предложил называть рябью волны, длина которых меньше, чем λ_m.

Подставляя значение для $\frac{dc}{d\lambda}$ из формулы (7) в общую формулу для групповой скорости [§ 236 (3)], находим

$$U = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} = c\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2 - \lambda_m^2}{\lambda^2 + \lambda_m^2}\right). \tag{8}$$

Групповая скорость, таким образом, будет больше или меньше скорости самих волн, смотря по тому, какое из двух неравенств $\lambda \lessgtr \lambda_m$ имеет место. Для достаточно длинных волн групповая скорость практически равна $\frac{1}{2}c$, в то время как для коротких волн она приближается к значению $\frac{3}{2}c$ [1]).

Относительная важность тяжести и сцепления в зависимости от значения λ может быть обнаружена на виде выражения для потенциальной энергии при деформации типа

$$\eta = a\cos kx. \tag{9}$$

Та часть энергии, которая получается в результате растяжения граничной поверхности и относится к единице площади, имеет своим значением

$$\frac{\pi^2 T_1 a^2}{\lambda^2}, \tag{10}$$

в то время как относящаяся к тяжести часть равна

$$\frac{1}{2} g(\varrho - \varrho')\, a^2. \tag{11}$$

При уменьшении λ выражение (10) становится все более и более важным по сравнению с выражением (11).

При тех же числовых данных, как и выше, и при $g = 981$ находим для поверхности воды из формул (5) и (6)

$$\lambda_m = 1{,}73, \quad c_m = 23{,}2,$$

причем за единицы взяты сантиметр и секунда. Это значит, что минимум скорости волн приблизительно равен 23 *см/сек* или 830 *м/час* при длине волны 1,73 *см*. Вместе с уже полученными числовыми результатами это дает для

$c =$	27,8	32,5	37,1	41,8	46,4

и для

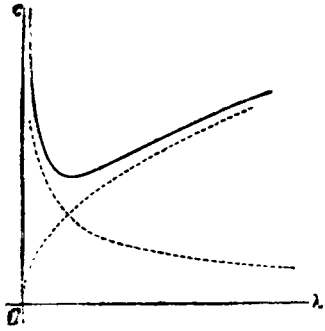
$\lambda =$	4,3	6,3	8,5	10,9	13,6
	0,70	0,47	0,35	0,27	0,22

в сантиметрах и секундах.

---

[1]) Ср. Rayleigh, см. прим. выше, стр. 429.

Фиг. 70 представляет зависимость между длиной и скоростью волн; пунктирные кривые относятся к тому случаю, когда тяжесть и капиллярность действуют отдельно, в то время как кривая, обозначенная сплошной линией, представляет совместное их действие. Как объяснено в § 236, групповая скорость выражается отрезком, который касательная отсекает на оси y.



Фиг. 70.

Так как из каждой точки этой оси, расстояние которой от точки O превосходит некоторое определенное значение, можно провести к кривой две касательные, то каждому произвольно заданному значению групповой скорости U отвечают две скорости самих волн. Эти два значения λ совпадают для некоторого (минимального) значения U, соответствующего точке пересечения оси Oc с касательной к кривой в ее точке перегиба; легко можно показать, что в этом случае

$$\frac{\lambda}{\lambda_m} = \sqrt{3+2\sqrt{3}} = 2{,}542,$$

$$U = 0{,}767\, c_m,$$

если c_m, как и выше, обозначает минимальную скорость волн.

Обратим внимание еще на дальнейшее следствие из формулы (2). До сих пор мы молчаливо предполагали, что жидкость, находящаяся внизу, обладает большей плотностью (т. е. $\varrho > \varrho'$), что в действительности необходимо для устойчивости, если пренебречь величиной T_1. Названная формула показывает, однако, что устойчивость имеет место также для $\varrho < \varrho'$, если предположить, что

$$\lambda < 2\pi\left(\frac{T_1}{g(\varrho'-\varrho)}\right)^{1/2}, \tag{12}$$

т. е., что значение λ должно быть меньше, чем длина волны, отвечающей минимальной скорости в том случае, когда более плотная жидкость находится внизу. Для случая воды, расположенной над воздухом, максимум длины волн, совместимой с устойчивостью, оказывается равным 1,73 *см*. Если обе жидкости заключены между двумя параллельными вертикальными стенками, то это обстоятельство обусловливает границу для допустимой длины волны; в результате мы приходим к выводу, что устойчивость в этом случае (в случае задачи двух измерений) будет иметь место тогда, когда расстояние между стенками не превосходит 0,86 *см*.

В этом заключается в основном объяснение известного опыта, при котором вода атмосферным давлением удерживается в опрокинутом стакане или в каком-либо другом сосуде, когда отверстие его затянуто достаточно частой сеткой [1]).

§ 268. Рассмотрим теперь случай волн на горизонтальной плоскости, представляющей общую границу двух параллельных потоков U, U' [2]).

---

[1]) Задача для того случая, когда жидкости заключены в цилиндрической трубе, была решена Максвеллом, Encyc. Britann. Art. Capillary Action [Papers, II, 585], и результаты были сравнены с некоторыми опытами Дупреца (Duprez). Совпадение оказалось лучше, чем можно было ожидать, если учесть, что не было принято во внимание особое условие, которое должно быть выполнено на линии соприкосновения поверхности со стенкой.

[2]) Ср. W. Thomson, см. прим. выше, стр. 574.

Если мы применим метод § 234, то найдем без затруднений, что условие для стационарного профиля волн будет иметь теперь вид

$$\varrho U^2+\varrho' U'^2=\frac{g}{k}(\varrho-\varrho')+kT_1, \tag{1}$$

где последний член получается из измененной формы условия, которому должно удовлетворять давление на граничной поверхности. Уравнение (1) можно представить в следующем виде:

$$\left(\frac{\varrho U+\varrho' U'}{\varrho+\varrho'}\right)^2=\frac{g}{k}\frac{\varrho-\varrho'}{\varrho+\varrho'}+\frac{kT_1}{\varrho+\varrho'}-\frac{\varrho\varrho'}{(\varrho+\varrho')^2}(U-U')^2. \tag{2}$$

Относительная скорость волн, которая накладывается на среднюю скорость потоков (§ 232), будет равна $\pm c$, причем

$$c^2=c_0^2-\frac{\varrho\varrho'}{(\varrho+\varrho')^2}(U-U')^2, \tag{3}$$

где c_0 обозначает скорость волн при отсутствии течения.

Различные следствия, которые можно получить из соотношения (3), будут в общем теми же, как в указанном выше параграфе, но со следующим существенным отличием: так как c_0 теперь может иметь минимальное значение, именно, значение c_m из (5) § 267, то равновесие плоской поверхности будет устойчивым для возмущений всех длин волн, пока имеет место неравенство

$$U-U'|<\frac{1+s}{s^{\frac{1}{2}}}c_m, \tag{4}$$

где $s=\frac{\varrho'}{\varrho}$.

Если относительная скорость обоих потоков превосходит это значение, то значение c для длины волн, которые лежат внутри известных границ, будет мнимым.

Ясно, что множитель, зависящий от времени e^{ipt} в методе § 232, принимает здесь вид

$$e^{\pm\alpha t+i\beta t},$$

где

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\left\{\frac{s}{(1+s)^2}(U-U')^2-c_0^2\right\}^{\frac{1}{2}}k,\\ \beta&=\frac{s}{1+s}k|U-U'|.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Действительная часть показательной функции указывает на возможность появления возмущения с постоянно возрастающей амплитудой.

В случае воздуха, расположенного над водой, мы имеем $s=0{,}0012$, $c_m=23{,}2$ (*см/сек*); вместе с тем максимальное значение функции $|U-U'|$, совместимое с устойчивостью, оказывается равным приблизительно 646 *см* в секунду или круглым числом 23,25 *км/час* [1]).

[1]) Скорость ветра, при которой поверхность воды начинает рябиться вследствие образования капиллярных волн настолько, что теряет способность отражать, оказывается значительно меньше, чем приведенное в тексте значение, и это обусловливается другими причинами. Мы возвратимся несколько позже к этому вопросу (XI глава).

При несколько больших значениях имеет место неустойчивость, которая проявляется в первый момент в образовании мелких волн с длиной приблизительно в 17 *мм*, амплитуды которых постепенно возрастают, пока не превзойдут предельных значений, которыми ограничиваются наши приближенные формулы.

§ 269. Волны, которые возникают на поверхности покоящейся воды благодаря местному возмущению, могут быть до некоторой степени исследованы применением метода Кельвина (§ 241).

Так как на поверхности имеем $\dot{\eta} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, то результат действия единичного импульса, приложенного в начале координат, выражается формулами

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{\pi\varrho}\int_0^\infty \cos\sigma t e^{ky}\cos kx\,dx, \\ \eta &= -\frac{1}{\pi\varrho}\int_0^\infty \frac{\sin\sigma t}{\sigma}\cos kx\,k\,dk. \end{aligned}\right| \tag{1}$$

Чтобы иметь согласие с формулой (6) § 241, мы должны положить

$$\varphi(k) = \frac{ik}{\varrho\sigma}. \tag{2}$$

Если в формуле (2) § 267 положить $v' = 0$ и обозначить для краткости

$$\frac{T_1}{\varrho} = T', \tag{3}$$

то будем иметь

$$\sigma^2 = gk + T'k^3. \tag{4}$$

Предположим прежде всего, что влияние оказывает только капиллярность, так что

$$\sigma^2 = T'k^3. \tag{5}$$

Так как

$$\frac{d\sigma}{dk} = \frac{3}{2}T'^{1/2}k^{1/2}, \quad \frac{d^2\sigma}{dk^2} = \frac{3}{4}T'^{1/2}k^{-1/2}, \tag{6}$$

то находим

$$k = \frac{4}{9}\frac{x^2}{T't^2}, \quad \sigma = \frac{8}{27}\frac{x^3}{T't^3}, \quad t\frac{d^2\sigma}{dk^2} = \frac{9}{8}\frac{T't^2}{x}. \tag{7}$$

Способ, изложенный в § 241, тогда дает

$$\eta = \frac{1}{\pi^{1/2}\varrho T'^{1/2}x^{1/2}}\sin\left(\frac{4x^3}{27T't^2} - \frac{1}{4}\pi\right). \tag{8}$$

Критическое значение дроби (10) § 241 в данном случае имеет порядок величины $\frac{T'^{1/2}t}{x^{3/2}}$; приближение в этом случае не может претендовать на высокую степень точности, за исключением начальных

стадий возмущения в какой-либо точке. Далее получается из формулы (8), что длина волны и период в произвольной точке сначала имеют бесконечно малые значения, а потом постепенно возрастают. Все эти обстоятельства находятся в полном контрасте с тем, что имело место для тяжелых волн (§ 240).

Мы видели в § 267, что если ввести в вычисления силу тяжести, то каждому заданному значению групповой скорости U, превосходящему минимальное значение U_0, соответствуют две длины волны. Отдельные длины волн, которые отвечают данным значениям x и t, можно найти при помощи геометрических методов § 241. Аналитически они определяются, если положить $\frac{d\sigma}{dk} = U = \frac{x}{t}$, действительными значениями k, удовлетворяющими уравнению

$$(g + 3T'k^2)^2 = 4\sigma^2\left(\frac{d\sigma}{dk}\right)^2 = \frac{4x^2}{t^2}(gk + T'k^3). \tag{9}$$

Приближенное значение для η будет соответственно с этим составлено из двух членов типа (9) § 241, так что мы получим две наложенные друг на друга системы волн. Для $x < U_0 t$ метод Кельвина показывает, что возмущение оказывается незначительным [1]).

Для достаточно больших значений $\frac{x}{U_0 t}$ приближенные значения действительных решений уравнения (9) будут

$$k = \frac{1}{4}\frac{gt^2}{x^2}, \quad k = \frac{4}{9}\frac{x^2}{T't^2}, \tag{10}$$

т. е. действительные решения таковы, как если бы сила тяжести и капиллярные силы действовали отдельно. Условия приложимости в этом случае приближенного метода Кельвина, заключающиеся в том, что значения $\frac{gt^2}{x}$ и $\frac{x^3}{T't^2}$ должны быть большими, до некоторой степени противоречат друг другу; они, однако, согласуются друг с другом, если как x, так и t одновременно достаточно велики. Длина волны в каждом из этих случаев должна быть мала по сравнению с x.

Эффект движущегося возмущения можно непосредственно представить на основании общих формул § 248. Если выражения $\frac{2\pi}{\varkappa_1}$, $\frac{2\pi}{\varkappa_2}$ обозначают две длины волн, соответствующие волновой скорости C, то из фиг. 67 следует, что для $\varkappa_1 < \varkappa_2$ должны иметь место неравенства $U_1 < c$, $U_2 > c$.

В результате будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \frac{\varphi(\varkappa_1)}{c - U_1} e^{i\varkappa_1 x} \quad (x > 0), \\ \eta &= \frac{\varphi(\varkappa_2)}{U_2 - c} e^{i\varkappa_2 x} \quad (x < 0). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

[1]) Rayleigh, Phil. Mag. (6), XXI, 180 (1911) [Papers, VI, 9].

Если положить

$$\varphi(k)=\frac{iP}{\varrho\sigma}, \qquad (12)$$

то далее увидим, что эти результаты можно рассматривать как приближенное выражение результатов последующего более полного исследования.

§ 270. Возобновим по методам §§ 242, 243 более формальные исследования тех явлений, которые получаются в результате постоянного возмущения давления на поверхности движущегося потока, причем теперь мы примем во внимание влияние капиллярных сил. Это даст нам вместе с ранее полученными результатами объяснения (по крайней мере в принципе) той ряби, которая появляется впереди твердого тела, движущегося с умеренной скоростью в спокойной воде, а также наблюдается в движущемся равномерно потоке в местах, расположенных вверх по течению от места возмущения.

Мы начнем с простого гармонического распределения давления и положим

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varphi}{c}&=-x+\beta e^{ky}\sin kx,\\ \frac{\psi}{c}&=-y+\beta e^{ky}\cos kx,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

причем верхняя поверхность должна совпадать с линией тока $\psi=0$, приближенное уравнение которой имеет вид

$$y=\beta\cos kx. \qquad (2)$$

Для точки, расположенной непосредственно под этой поверхностью, находим, как в (8) § 242, в качестве переменной части давления выражение

$$p_0=\beta\varrho\left\{(kc^2-g)\cos kx+\mu c\sin kx\right\}, \qquad (3)$$

где μ — коэфициент трения. В соседней точке, расположенной непосредственно над поверхностью, должно иметь место равенство

$$p_0'=p_0+T_1\frac{d^2y}{dx^2}=\beta\varrho\left\{(kc^2-g-k^2T')\cos kx+\mu c\sin kx\right\}, \qquad (4)$$

где T' написано вместо $\frac{T_1}{\varrho}$. Это равно действительной части выражения

$$\beta\varrho(kc^2-g-k^2T'-i\mu c)\,e^{ikx}.$$

Отсюда заключаем, что приложенному извне давлению

$$p_0=C\cos kx \qquad (5)$$

соответствует форма поверхности, выраженная уравнением

$$\varrho y=C\frac{(kc^2-g-k^2T')\cos kx-\mu c\sin kx}{(kc^2-g-k^2T')^2+\mu^2c^2}. \qquad (6)$$

Предположим вначале, что скорость c потока превосходит минимальное значение (c_m) волновой скорости, полученное в § 267. В таком случае мы можем написать

$$kc^2 - g - k^2T' = T'(k - \varkappa_1)(\varkappa_2 - k), \tag{7}$$

где $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ суть два значения k, соответствующие волновой скорости c в спокойной воде; другими словами, величины $\frac{2\pi}{\varkappa_1}$, $\frac{2\pi}{\varkappa_2}$ суть длины волн тех двух систем свободных волн, которые могли бы занять стационарное положение в пространстве на свободной поверхности движущейся жидкости. Мы будем считать, что $\varkappa_2 > \varkappa_1$.

После подстановки этих величин формула (6) может быть представлена в виде

$$\varphi y = \frac{C}{T'} \frac{(k - \varkappa_1)(\varkappa_2 - \varkappa)\cos kx - \mu' \sin kx}{(k - \varkappa_1)^2(\varkappa_2 - k)^2 + \mu'^2}, \tag{8}$$

где положено $\mu' = \frac{\mu c}{T'}$. Отсюда следует, что для малых значений μ^2 давление на гребнях имеет наименьшее значение, а во впадинах — наибольшее значение, когда k больше, чем $\varkappa_2$, или меньше, чем $\varkappa_1$, и будет обратное, когда k лежит между $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. В случае возмущения, распространяющегося по спокойной поверхности воды, эти результаты совпадают, очевидно, с результатами (14) § 168.

§ 271. Из формулы (8) мы можем, как в § 243, вывести некоторые заключения о том действии, которое производит давление, сосредоточенное вначале и имеющее общую величину P; мы находим

$$y = \frac{P}{\pi T_1} \int_0^\infty \frac{(k - \varkappa_1)(\varkappa_2 - k)\cos kx - \mu' \sin kx}{(k - \varkappa_1)^2(\varkappa_2 - k)^2 + \mu'^2} dk. \tag{9}$$

Этот определенный интеграл есть действительная часть интеграла

$$\int_0^\infty \frac{e^{ikx}\, dk}{(k - \varkappa_1)(\varkappa_2 - k) - i\mu'}. \tag{10}$$

Коэфициент рассеяния μ' введен единственно с той целью, чтобы сделать задачу определенной; поэтому мы можем воспользоваться этим и для упрощения в дальнейшем предположить μ' величиной бесконечно малой. В этом случае корни знаменателя в выражении (10) суть

$$k = \varkappa_1 + iv, \quad k = \varkappa_2 - iv,$$

где

$$v = \frac{\mu'}{\varkappa_2 - \varkappa_1}.$$

Интеграл (10), таким образом, будет равен

$$\frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1 - 2iv} \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{ikx}\, dk}{k - (\varkappa_1 + iv)} - \int_0^\infty \frac{e^{ikx}\, dk}{k - (\varkappa_2 - iv)} \right\}. \tag{11}$$

Эти интегралы имеют вид, разобранный в § 243. Так как $\varkappa_2 > \varkappa_1$, то ν будет положительным и, следовательно, для положительных значений x первый интеграл будет равен

$$2\pi i e^{i\varkappa_1 x} + \int_0^\infty \frac{e^{-ikx}}{k+\varkappa_1}\,dk, \tag{12}$$

а второй получит вид

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ikx}}{k+\varkappa_2}\,dk. \tag{13}$$

Для отрицательных значений x, напротив, первый интеграл приводится к виду

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ikx}}{k+\varkappa_1}\,dk, \tag{14}$$

а второй интеграл будет равен

$$-2\pi i e^{i\varkappa x} + \int_0^\infty \frac{e^{-ikx}}{k+\varkappa_2}\,dk. \tag{15}$$

Мы упростили здесь формулу тем, что после преобразования положили $\nu = 0$.

Если теперь отбросить мнимые части наших выражений, то получим следующие результаты.

Если μ' бесконечно мало, то уравнение (9) дает для положительных значений x

$$\frac{\pi T_1}{P} y = -\frac{2\pi}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \sin \varkappa_1 x + F(x), \tag{16}$$

а для отрицательных значений x

$$\frac{\pi T_1}{P} y = -\frac{2\pi}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \sin \varkappa_2 x + F(x), \tag{17}$$

где

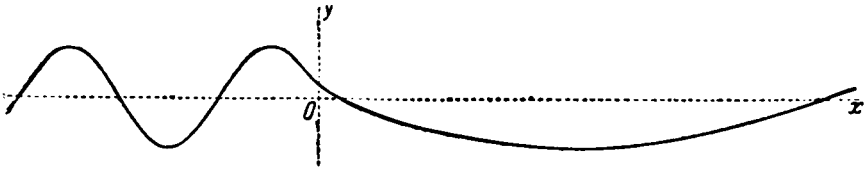
$$F(x) = \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1}\left\{\int_0^\infty \frac{\cos kx}{k+\varkappa_1}\,dk - \int_0^\infty \frac{\cos kx}{k+\varkappa_2}\,dk\right\}. \tag{18}$$

Функция $F(x)$ может быть выражена на основании (30) § 243 через известные функции

$$\mathrm{Ci}\,\varkappa_1 x, \quad \mathrm{Si}\,\varkappa_1 x, \quad \mathrm{Ci}\,\varkappa_2 x, \quad \mathrm{Si}\,\varkappa_2 x.$$

Выражаемое этими функциями возмущение уровня оказывается очень малым для всех тех положительных и отрицательных значений x, которые превосходят примерно половину наибольшей длины волны $\left(\frac{2\pi}{\varkappa_1}\right)$.

Отсюда следует, что вне таких значений x поверхность оказывается покрытой вниз по течению правильной последовательностью простых гармонических волн длиной $\frac{2\pi}{\varkappa_1}$, а вверх против течения последовательностью таких же волн с меньшей длиной волны $\frac{2\pi}{\varkappa_2}$. Из числовых результатов § 267 тогда получается, что, если скорость течения c значительно превосходит минимальное значение волновой скорости (c_m), то первая система волн происходит главным образом от действия силы тяжести, а вторая система волн получается в результате действия капиллярных сил.



Фиг. 71.

Заслуживает внимания то обстоятельство, что теперь, в противоположность случаю, рассмотренному в § 243, возвышение для $x=0$ оказывается конечным; мы имеем, в самом деле,

$$\frac{\pi T_1}{Q} y = \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \log \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}, \tag{19}$$

как это получается без затруднений из формул (16) и (18).

Фиг. 71 показывает переход от одной системы волн к другой для случая $\varkappa_2 = 5\varkappa_1$.

Общее исследование явлений, которые наблюдаются при движении по спокойной поверхности воды изолированного точечного источника возмущения давления видоизменяется теперь тем фактом, что заданному значению c скорости отвечают *две* системы волн различной длины. Для одной из этих систем волн, именно для более коротких волн, групповая скорость оказывается больше, чем c, в то время как для другой системы групповая скорость меньше c. Отсюда можно понять, почему волны с меньшей длиной волны находятся впереди, а волны с большей длиной находятся позади источника возмущения давления.

Заметим, что формулы (16), (17) дают для высоты капиллярных волн, расположенных вверх по течению, то же значение, как и для высоты гравитационных волн, расположенных вниз по течению; однако, этот результат существенно меняется, когда давление будет распределено по полосе конечной ширины вместо того, чтобы быть сосредоточенным на математической линии. Если, например, ширина полосы не будет превосходить четверти длины волн, расположенных вниз по течению, но будет значительно больше, чем длина

волн ряби, расположенной вверх по течению, что может случиться при небольшой скорости, то различные части этой полосы в отношении их действия на часть жидкости, расположенную ниже по течению, будут усиливать друг друга; в части же жидкости, лежащей вверх по течению, может произойти „интерференция", и результирующая амплитуда окажется сравнительно небольшой.

Чтобы пояснить этот результат, предположим, что общее давление P на поверхности распределено по закону

$$p' = \frac{P}{\pi} \frac{b}{b^2 + x^2}. \tag{20}$$

Это распределение распространяется тем дальше, чем больше оказывается b.

Способ вычисления вытекает из § 244. В результате получаем для стороны, лежащей вниз по течению,

$$y = -\frac{2P}{\varrho T'(\varkappa_2 - \varkappa_1)} e^{-\varkappa_1 b} \sin \varkappa_1 x + \ldots, \tag{21}$$

а для противоположной стороны

$$y = -\frac{2P}{\varrho T'(\varkappa_2 - \varkappa_1)} e^{-\varkappa_2 b} \sin \varkappa_2 x + \ldots, \tag{22}$$

причем в этих выражениях опущены те члены, которые оказываются мало заметными на расстоянии от начала, равном, примерно, половине длины волны. Показательные множители указывают на уменьшение высоты, получающееся вследствие распределения давления; и это уменьшение оказывается больше со стороны капиллярных волн, так как $\varkappa_2 > \varkappa_1$.

Если скорость течения c меньше, чем минимальное значение скорости волн, то множители при

$$kc^2 - g - k^2 T'$$

оказываются мнимыми. При этом не получится никакой неопределенности, если с самого начала положить $\mu = 0$. Форма поверхности в этом случае определяется интегралом

$$y = -\frac{P}{\pi\varrho} \int_0^\infty \frac{\cos kx}{k^2 T' - kc^2 + g} dk. \tag{23}$$

Этот интеграл можно преобразовать прежним способом, но a priori очевидно, что его значение при возрастании x очень быстро стремится к нулю вследствие все более и более быстрых изменений знака $\cos kx$. Возмущение уровня поверхности ограничивается поэтому только некоторой окрестностью около начала. Для $x = 0$ находим

$$y = -\frac{P}{(c_m^4 - c^4)^{1/2}\varrho} \left(1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{c^2}{c_m^2}\right). \tag{24}$$

Остается, наконец, рассмотреть еще критический случай, когда c оказывается в точности равным минимуму волновой скорости, т. е.

$\varkappa_2 = \varkappa_1$. Первый член в формулах (16) и (17) оказывается теперь бесконечно большим, в то время как остальная часть выражения дает конечное значение. Чтобы в этом случае получить результат, имеющий смысл, мы должны удержать коэфициент трения μ'.

Полагая $\mu' = 2\tilde{\omega}^2$, будем иметь

$$(k-\varkappa)^2 + i\mu' = \{k-(\varkappa+\tilde{\omega}-i\tilde{\omega})\}\{k-(\varkappa-\tilde{\omega}+i\tilde{\omega})\}, \qquad (25)$$

так что интеграл (10) можно теперь положить равным

$$\frac{1+i}{4\tilde{\omega}}\left\{\int_0^\infty \frac{e^{ihx}}{k-(\varkappa-\tilde{\omega}+i\tilde{\omega})}\,dk - \int_0^\infty \frac{e^{ihx}}{k-(\varkappa+\tilde{\omega}-i\tilde{\omega})}\,dk\right\}. \qquad (26)$$

Формулы § 243 показывают, что когда величина $\tilde{\omega}$ будет малой, то главная часть этого выражения для достаточно удаленных точек по обе стороны от начала будет равна

$$\frac{1+i}{4\tilde{\omega}}\,2\pi i e^{i\varkappa x}. \qquad (27)$$

Возвышение поверхности определяется теперь из уравнения

$$\frac{\pi T_1}{P}\,y = -\frac{\pi}{\mu'^{1/2}}\cos\left(\varkappa x - \frac{1}{4}\pi\right). \qquad (28)$$

§ 272. Исследование Рэлея[1]), от которого только что проведенное здесь отличается главным образом способом представления определенных интегралов, было предпринято с целью найти более удовлетворительное объяснение для некоторых явлений, описанных Скоттом Рессслем[2]) и Кельвином[3]).

„Когда препятствие незначительных размеров, например, леска от удочки, движется медленно в спокойной воде или (что, конечно, сводится к тому же) находится в покое в движущейся жидкости, то поверхность жидкости покрывается красивыми волнами, которые по отношению к препятствию остаются неподвижными. На стороне, лежащей вверх по течению, длина волны будет короче, и колебания, как показал Томсон, главным образом обусловливаются капиллярными силами. На стороне, расположенной по течению, волны оказываются длиннее и главным образом зависят от силы тяжести. Обе системы волн движутся с одинаковой относительной скоростью по отношению к воде, что необходимо для того, чтобы они могли сохранять неизменное положение относительно препятствия. Это же обстоятельство обусловливает и скорость, а вместе с тем и длину волны в той части системы волн, в которой гребни расположены наклонно к направлению движения. Если обозначить угол между направлением движения и нормалью к фронту волн через θ, то ско-

[1]) Rayleigh, см. выше, стр. 498.
[2]) Scott Russel, On Waves, Brit. Ass. Rep., 1844.
[3]) Kelvin, см. прим. выше, стр. 574.

рость распространения волн будет равна $v_0 \cos\theta$, где v_0 обозначает скорость жидкости по отношению к неподвижному, препятствию".

„Томсон показал, что скорость распространения волн по поверхности, какова бы ни была длина волны, никогда не может быть меньше примерно 23 *см/сек*. Скорость же текущей воды должна быть несколько больше этого предельного значения, чтобы волны могли образоваться. Все же и в этом случае угол θ подчинен ограничению, которое определяется равенством $v_0 \cos\theta = 23$, и искривленный фронт волн имеет соответствующую асимптоту".

„Погруженная часть препятствия возмущает течение жидкости независимо от деформации свободной поверхности, и это обстоятельство делает задачу в ее первоначальной постановке чрезвычайно трудной. Мы можем, однако, не меняя существа дела, предположить, что возмущение произведено в одной точке поверхности давлением, несколько отличающимся от нормального, как это может произойти в результате электрического притяжения или при ударе о поверхность тонкой воздушной струи. И действительно, каждым из этих способов, в особенности последним, можно получить очень красивые волны" [1]).

Характер волн можно выяснить, пользуясь методом, изложенным в конце § 256. Если ввести в вычисления только капиллярные силы, то формула (19) указанного параграфа на основании § 266 дает

$$c^2 \cos^2\theta = V^2 = \frac{2\pi T'}{\lambda}; \tag{1}$$

форма гребней определяется при этом уравнением

$$p = a \sec^2\theta. \tag{2}$$ [2])

Это дает

$$\left.\begin{aligned} x &= a \sec\theta (1 - 2\operatorname{tg}^2\theta), \\ y &= 3a \sec\theta \operatorname{tg}\theta. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Если мы примем во внимание как силу тяжести, так и капиллярные силы, то на основании § 267 получим

$$c^2 \cos^2\theta = V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T'}{\lambda}. \tag{4}$$

Полагая

$$c_m = (4gT')^{\frac{1}{4}}, \quad b = 2\pi\left(\frac{T'}{g}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

будем иметь

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{b} + \frac{b}{\lambda}\right), \tag{6}$$

где

$$\cos\alpha = \frac{c_m}{c}. \tag{7}$$

---

[1]) Rayleigh, см. прим. выше.

[2]) Так как теперь $U > V$, то из (20) § 256 получается, что постоянная a должна быть отрицательной.

Соотношение между p и θ принимает поэтому вид

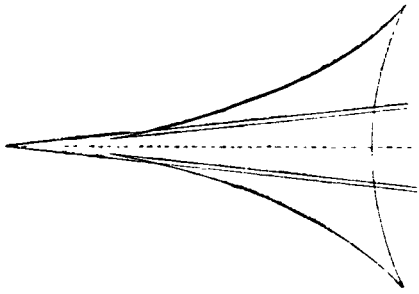
$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{a\cos^2\alpha} + \frac{a\cos^2\alpha}{p}\right) \tag{8}$$

или

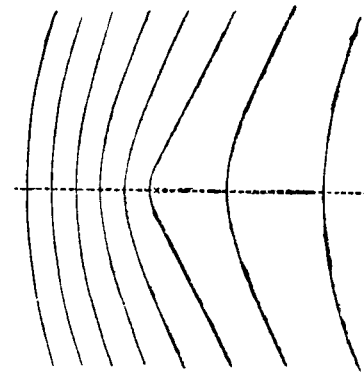
$$\frac{p}{a} = \cos^2\theta \pm \sqrt{\cos^4\theta - \cos^4\alpha}. \tag{9}$$

Четыре прямые, для которых $\theta = \pm\alpha$, суть асимптоты определенной таким образом кривой. Значения выражения $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ для нескольких значений отношения $\frac{c}{c_m}$ были даны в § 267.

Если отношение $\frac{c}{c_m}$ достаточно велико, то α приблизительно будет равно $\frac{1}{2}\pi$, и асимптоты образуют с осью x очень острые углы. На фиг. 72 показана часть кривой, которую приходится рассматривать при физической задаче в случае $c = 10\,c_m$[1]). Отношение длины волны самих „волн" к длине



Фиг. 72.



Фиг. 73.

волн „ряби" в плоскости симметрии естественно оказывается при этом очень большим. Кривая фиг. 72 может быть сравнена с кривой, которая образует основание фиг. 65 на стр. 543.

По мере того как отношение $\frac{c}{c_m}$ убывает, угол между асимптотами становится все больше и больше, в то время как оба заострения с обеих сторон оси приближаются друг к другу, сходятся и, наконец, исчезают[2]). Система волн имеет при этом расположение такого вида, какой указан на фиг. 73; эта фигура представляет тот случай, когда отношение длин волн на оси симметрии равно 4 : 1,

[1]) Все необходимые вычисления были выполнены Удалем (Woodall). Размеры фигуры 69 не позволяют провести асимптоты отдельно от кривой.

[2]) Опытная диаграмма показала, что для $c = 2c_m$ ($\alpha = 60°$) заострения почти совпадают.

что соответствует значению $\alpha = 26°34'$ или $c = 1{,}12\,c_m$ [1]). Если $c < c_m$, то волнообразования исчезают.

§ 273. Другая очень интересная задача заключается в определении характера равновесия цилиндрического столба жидкости кругового сечения. Сюда же относится теория хорошо известных опытов Пидона, Савара и других о поведении струи, вытекающей под давлением из маленького отверстия в сосуде. Постоянная скорость в направлении оси струи, очевидно, не оказывает влияния на динамическую часть задачи и может быть поэтому при аналитическом рассмотрении оставлена без внимания.

Рассмотрим прежде всего колебания колонки жидкости в двух измерениях, предполагая движение во всех поперечных сечениях одинаковым. Применяя в плоскости поперечного сечения полярные координаты r, θ, начало которых лежит на оси, мы можем в согласии с § 63 написать

$$\varphi = A \frac{r^s}{a^s} \cos s\theta \cos(\sigma t + \varepsilon), \tag{1}$$

где a обозначает средний радиус. Уравнение границы для произвольного момента времени будет

$$r = a + \zeta, \tag{2}$$

где

$$\zeta = -\frac{sA}{\sigma a} \cos s\theta \sin(\sigma t + \varepsilon), \tag{3}$$

и зависимость между коэфициентами определяется условием, что для $r = a$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}. \tag{4}$$

Для переменной части давления внутри колонки и вблизи от свободной поверхности имеем

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\sigma A \cos s\theta \sin(\sigma t + \varepsilon). \tag{5}$$

Кривизна кривой, бесконечно мало отличающейся от окружности, имеющей свой центр в начале координат, находится элементарным способом и оказывается равной

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 r}{d\theta^2}$$

или, в обозначениях формулы (2),

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}\left(\zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2}\right). \tag{6}$$

---

[1]) Фиг. 73 можно сравнить с той фигурой, которую построил из наблюдений Скотт Рассел, см. прим. на стр. 585.

Вместе с тем условие на поверхности

$$p = \frac{T_1}{R} + \text{const.} \tag{7}$$

дает после подстановки из формулы (5)

$$\sigma^2 = s(s^2-1)\frac{T_1}{\varrho a^3}. \tag{8}$$ [1])

Для $s=1$ будем иметь $\sigma=0$; при нашей степени приближения поперечные сечения остаются круговыми, будучи только сдвинутыми, так что равновесие оказывается безразличным. Для всех других целочисленных значений s величина σ^2 будет положительной, так что равновесие при плоских деформациях оказывается абсолютно устойчивым. Это ясно à priori, так как круг есть фигура с наименьшим периметром и вместе с тем с наименьшей энергией при заданной площади поперечного сечения.

В случае струи, которая вытекает из отверстий, имеющих форму эллипса, равностороннего треугольника или квадрата, возмущение принимает преимущественно одну из форм $s=2$, 3 или 4. Так как в этом случае мы имеем стационарное движение, то на свободной струе образуется система стационарных волн, длина которых оказывается равной скорости струи, умноженной на период $\left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)$ [2]).

§ 274. Отбросим теперь ограничение задачи двумя измерениями и положим

$$\varphi = \varphi_1 \cos kz \cos(\sigma t + \varepsilon); \tag{9}$$

при этом предполагается, что ось z должна совпадать с осью цилиндра и φ_1 есть функция координат x, y. Подставляя это выражение в уравнение непрерывности $\Delta\varphi = 0$, получим

$$(\Delta_1 - k^2)\varphi_1 = 0, \tag{10}$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Полагая $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, мы можем написать уравнение (10) в виде

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\theta^2} - k^2\varphi_1 = 0. \tag{11}$$

[1]) По поводу оригинальных исследований на применение энергетических методов см. Rayleigh, On the Instability of Jets, Proc. Lond. Math. Soc., X, 4 (1878) и On the Capillary Phenomena of Jets, Proc. Roy. Soc., XXIX, 71 (1879) [Papers, I, 361, 377; Theory of Sound, 2 изд., гл. XX]. Последняя из названных работ содержит сопоставление теории и опытов.

[2]) Предполагается, что эта длина волны велика по отношению к периметру сечения струи. Иначе нужно было бы применить формулу (18) при $\sigma = kc$, где c обозначает скорость струи.

Это уравнение за исключением знака при k^2 имеет форму, разобранную в §§ 101, 191; решения, конечные при $r=0$, имеют поэтому такой вид:

$$\varphi_1 = \left\{ \begin{array}{l} BI_s(kr)\cos s\theta \\ BI_s(kr)\sin s\theta \end{array} \right\}; \tag{12}$$

при этом, как в (11) § 210,

$$I_s(z) = \frac{z^s}{2^s s!}\left\{1 + \frac{z^2}{2(2s+2)} + \frac{z^4}{2\cdot 4(2s+2)(2s+4)} + \ldots\right\}. \tag{13}$$

Полагая поэтому

$$\varphi = BI_s(kr)\cos s\theta\cos kz\cos(\sigma t+\varepsilon), \tag{14}$$

получим на основании соотношения (4)

$$\zeta = -B\frac{kaI'_s(ka)}{\sigma a}\cos s\theta\cos kz\sin(\sigma t+\varepsilon). \tag{15}$$

Чтобы найти сумму главных кривизн, заметим, что на основании теорем Эйлера и Менье о кривизне поверхности кривизна произвольного сечения, наклоненного под бесконечно малым углом к нормальному главному сечению, будет равна с точностью до бесконечно малых первого порядка кривизне самого главного нормального сечения. Достаточно поэтому в рассматриваемой задаче вычислить кривизны поперечного и осевого сечения цилиндра. Эти сечения представляют собой главные сечения в невозмущенном состоянии, главные же сечения деформированной поверхности образуют с ними бесконечно малые углы. Для поперечного сечения будет справедлива формула (6), тогда как для осевого сечения кривизна будет равна $-\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}$; так что искомая сумма главных кривизн будет

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}\left(\zeta + \frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2}\right) - \frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{1}{a} - B\frac{kaI'_s(ka)}{\sigma a^3}(k^2a^2+s^2-1)\cos s\theta\cos kz\sin(\sigma t+\varepsilon). \tag{16}$$

Далее на поверхности имеем

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\sigma BI_s(ka)\cos s\theta\cos kz\sin(\sigma t+\varepsilon). \tag{17}$$

Условие на поверхности § 265 дает поэтому

$$\sigma^2 = \frac{kaI'_s(ka)}{I_s(ka)}(k^2a^2+s^2-1)\frac{T_1}{\varrho a^3}. \tag{18}$$

Для $s>0$ величина σ^2 положительна; но в случае симметрии вокруг оси ($s>0$) значение σ^2 становится отрицательным, если $ka<1$; это значит, что равновесие оказывается неустойчивым для

возмущений, длина волны которых $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$ больше, чем длина кривой поперечного сечения струи. Чтобы найти форму возмущения, для которой неустойчивость оказывается наибольшей, мы должны искать такое значение ka, которое соответствует максимуму выражения

$$\frac{kaI_0'(ka)}{I_0(ka)}(1-k^2a^2).$$

Рэлей нашел для этого случая значение $k^2a^2=0{,}4858$ и отсюда получил для длины волны, соответствующей наибольшей неустойчивости, значение

$$\frac{2\pi}{k}=4{,}508\cdot 2a.$$

В этом случае образуются похожие на бусинки возвышения и желобки с постоянно нарастающими размерами, до тех пор пока струя не распадется окончательно на отдельные капли [1]).

§ 275. Эти результаты естественно побуждают к исследованию малых колебаний капли жидкости около ее шаровой формы [2]). Мы несколько обобщим задачу, предполагая, что имеем жидкий шар с плотностью ϱ, окруженный бесконечной массой другой жидкости с плотностью ϱ'.

Возьмем начало координат в центре шара, пусть форма общей поверхности обеих жидкостей для некоторого произвольного момента времени задана уравнением

$$r=a+\zeta=a+S_n\sin(\sigma t+\varepsilon), \tag{1}$$

где a — средний радиус, а S_n — сферическая функция порядка n. Соответствующие значения потенциала скоростей будут тогда определены для внутренних точек функцией

$$\varphi=-\frac{\sigma a}{n}\frac{r^n}{a^n}S_n\cos(\sigma t+\varepsilon), \tag{2}$$

а для внешних точек функцией

$$\varphi'=-\frac{\sigma a}{n+1}\frac{a^{n+1}}{r^{n+1}}S_n\cos(\sigma t+\varepsilon), \tag{3}$$

[1]) Доказательство этого состоит в том, что если мы имеем ряд возможных форм возмущения с временными факторами $e^{\alpha_1 t}$, $e^{\alpha_2 t}$, $e^{\alpha_3 t}$, ..., где $\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\ldots$, и если эти возмущения возбуждаются одновременно, то амплитуда первого из них по сравнению с амплитудами остальных будет возрастать в отношении $e^{(\alpha_1-\alpha_2)t}$, $e^{(\alpha_1-\alpha_3)t}$, ... Поэтому в конце концов преобладающее влияние будет иметь слагающая с наибольшим значением α.

Неустойчивость цилиндрической струи, окруженной другой жидкостью, была исследована Рэлеем в мемуаре: On the Instability of Cylindrical Fluid Surfaces, Phil. Mag. (5), XXXIV, 177 (1892) [Papers, III, 594]. В случае струи воздуха в воде длина волны наибольшей неустойчивости оказывается равной $6{,}48\cdot 2a$.

[2]) Rayleigh, см. прим. выше, стр. 591; Webb, Mess. of Math., IX, 177 (1880).

так как эти функции для $r=a$ дают

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=-\frac{\partial\varphi'}{\partial r}.$$

Переменные части внутреннего и внешнего давления определяются тогда выражениями вида

$$\left.\begin{aligned} p&=\ldots+\frac{\varrho\sigma^2 a}{n}S_n\sin(\sigma t+\varepsilon),\\ p'&=\ldots-\frac{\varrho'\sigma^2 a}{n+1}S_n\sin(\sigma t+\varepsilon).\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Чтобы найти сумму кривизн, воспользуемся следующим предложением из пространственной геометрии. Если λ, μ, ν обозначают направляющие косинусы нормали в точке (x, y, z) к поверхности семейства

$$F(x, y, z)=\text{const.},$$

проходящей через эту точку, т. е., если имеем

$$\lambda=\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},$$

$$\mu=\frac{F_y}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},$$

$$\nu=\frac{F_z}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},$$

то справедливо равенство

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}+\frac{\partial\nu}{\partial z}.\tag{5}$$

Так как квадратом ζ можно пренебречь, то уравнение (1) гармонического сфероида может быть записано в виде

$$r=a+\zeta_n,\tag{6}$$

где

$$\zeta_n=\frac{r^n}{a^n}S_n\sin(\sigma t+\varepsilon),\tag{7}$$

т. е. ζ_n есть *объемная* сферическая функция порядка n. Таким образом, находим

$$\left.\begin{aligned} \lambda&=\frac{x}{r}-\frac{\partial\zeta_n}{\partial x}+n\frac{x}{r^2}\zeta_n,\\ \mu&=\frac{y}{r}-\frac{\partial\zeta_n}{\partial y}+n\frac{y}{r^2}\zeta_n,\\ \nu&=\frac{z}{r}-\frac{\partial\zeta_n}{\partial z}+n\frac{z}{r^2}\zeta_n;\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

отсюда следует

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{2}{r}+\frac{n(n+1)}{r^2}\zeta_n=\frac{2}{a}+\frac{(n-1)(n+2)}{a^2}S_n\sin(\sigma t+\varepsilon).\tag{9}$$

Подставляя выражения (4) и (5) в общее граничное условие § 265, получим

$$\sigma^2 = n(n+1)(n-1)(n+2)\frac{T_1}{\{(n+1)\varrho + n\varrho'\}a^3}. \qquad (10)$$

Полагая $\varrho' = 0$, будем иметь

$$\sigma^2 = n(n-1)(n+2)\frac{T_1}{\varrho a^3}. \qquad (11)$$

Наиболее важный тип колебания соответствует случаю $n = 2$, для которого будем иметь

$$\sigma^2 = \frac{8T_1}{\varrho a^3}.$$

Если мы положим для водяной капли $T_1 = 74$, $\varrho = 1$, то найдем для частоты значение

$$\frac{\sigma}{2\pi} = 3{,}87\, a^{-\frac{3}{2}} \text{ колебаний в секунду,}$$

если a — радиус капли, выраженный в сантиметрах. Радиус шара, период колебания которого равен одной секунде, должен быть равен $a = 2{,}47$ *см*.

Случай шаровидного пузырька воздуха, окруженного жидкостью, получим, если в формуле (10) положим $\varrho = 0$; тогда будем иметь

$$\sigma^2 = (n+1)(n-1)(n+2)\frac{T_1}{\varrho' a^3}. \qquad (12)$$

При одинаковой плотности жидкости частота данного нормального колебания благодаря уменьшению присоединенной массы оказывается в этом случае больше, чем в случае, которому соответствует формула (11); ср. (7), (8) § 91.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ

§ 276. Учебник гидродинамики был бы неполным, если бы в нем не был затронут вопрос о звуковых волнах, хотя бы по той причине, что все действительные жидкости более или менее сжимаемы и что, только принимая во внимание сжимаемость жидкостей, мы можем избежать таких явно парадоксальных результатов, как в § 20, где было найдено, что изменение давления распространяется в жидкости *мгновенно*.

Мы рассмотрим в этой главе общие законы распространения малых возмущений, не входя, однако, большей частью в такие подробности, которые относятся больше к акустике.

В большинстве случаев, которые мы будем рассматривать, изменения давления будут малы; их можно будет поэтому считать пропорциональными изменениям плотности, т. е. можно положить

$$\Delta p = \varkappa \frac{\Delta \varrho}{\varrho},$$

где $\varkappa \left(= \varrho \frac{dp}{d\varrho} \right)$ есть некоторый коэфициент, называемый „объемной упругостью". Для данной жидкости значение $\varkappa$ изменяется с температурой и (в очень малой степени) с давлением. Для воды при 15° С $\varkappa = 2{,}045 \cdot 10^{10}$ дин на квадратный сантиметр. Случай газов мы вскоре рассмотрим.

Плоские волны

§ 277. Рассмотрим прежде всего плоские волны в однородной среде.

Когда движение происходит только в направлении оси x, то уравнение движения при отсутствии внешних сил будет

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{d\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial x}, \tag{1}$$

а уравнение непрерывности (5) § 7 приведется к следующему

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho u) = 0. \tag{2}$$

Если положить

$$\varrho = \varrho_0 (1 + s), \tag{3}$$

где ϱ_0 есть плотность в невозмущенном состоянии, то s можно назвать „коэфициентом уплотнения" в плоскости x. Подставляя выражение (3) в уравнения (1) и (2), находим, предполагая движение бесконечно малым,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\varkappa}{\varrho_0} \frac{\partial s}{\partial x} \tag{4}$$

и

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{5}$$

где, как и выше,

$$\varkappa = \left[\varrho \frac{dp}{d\varrho} \right]_{\varrho = \varrho_0}. \tag{6}$$

Исключая s, получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{7}$$

где

$$c^2 = \frac{\varkappa}{\varrho_0} = \left[\frac{dp}{d\varrho} \right]_{\varrho = \varrho_0}. \tag{8}$$

Уравнение (7) имеет тот же вид, что и уравнение, разобранное в § 170; общее решение его будет

$$u = f(ct - x) + F(ct + x); \tag{9}$$

решение это представляет две системы волн, распространяющихся с постоянной скоростью c вдоль оси x; одна в положительном, другая в отрицательном направлении. Из уравнения (5) получаем выражение для соответствующего значения s в виде

$$cs = f(ct - x) - F(ct + x). \tag{10}$$

Для одной волны будем иметь

$$u = \pm cs, \tag{11}$$

так как одна из функций f, F будет обращаться в нуль. В формуле (11) нужно брать верхний или нижний знак в соответствии с тем, распространяется ли волна в положительном или в отрицательном направлении. В этом случае легко показать, что приближение, заключающееся в формулах (4) и (5), оправдывается в том случае, когда u всюду мало по сравнению с c.

Между изложенной выше приближенной теорией и теорией „длинных" тяжелых волн на поверхности воды имеется полная аналогия. Если мы напишем $-\frac{\eta}{h}$ вместо s и gh вместо $\frac{\varkappa}{\varrho_0}$, то уравнения (4) и (5) совпадут с уравнениями (3) и (5) § 169.

§ 278. При данном в § 276 значении для $\varkappa$ получим для воды при 15° C

$$c = 1430 \text{ м/сек}.$$

Колладон и Штурм [1]) на основании своих опытов на Женевском озере получили для c значение 1437 при температуре 8° C [2]).

В случае газа, предполагая, что температура остается постоянной, значение $\varkappa$ определяется на основании закона Бойля

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0}. \tag{1}$$

Получаем

$$\varkappa = p_0, \tag{2}$$

так что

$$c = \sqrt{\frac{p_0}{\varrho_0}}. \tag{3}$$

---

[1]) Colladon und Sturm, Ann. de Chim. et de Phys., XXXVI (1827). Укажем, что скорость звука в воде, заполняющей трубу, благодаря податливости стенки может быть значительно меньше. См. Helmholtz, Fortschritte d. Physik, IV, 119 (1848) (Wiss. Abh., 1, 242); Kortewег, Wied. Ann., V, 526 (1878); Lamb, Manch. Mem., XLII, Nr. 1 (1898).

[2]) Новые опыты в морской воде дали для скорости c значение 1510 м/сек при температуре 17° C и обнаружили возрастание скорости приблизительно на 3,35 м/сек при возрастании температуры на 1° C [Wood и др. Proc. Roy. Soc. A, CIII, 284 1923)].

Это есть так называемая „Ньютонова" скорость звука [1]). Если обозначить через H высоту атмосферы, состоящей из газа одинаковой плотности и создающей давление p_0, то будем иметь $p_0 = g\varrho_0 H$ и

$$c = (gH)^{1/2}. \tag{4}$$

Этот результат можно сравнить с формулой (13) § 170, которая дает скорость „длинных" гравитационных волн в жидкостях. Для воздуха при 0° C соответствующие значения в системе абсолютных единиц *CGS* будут $p_0 = 76 \cdot 13{,}60 \cdot 981$, $\varrho_0 = 0{,}00129$; отсюда следует

$$c = 280 \text{ м/сек}.$$

Это значение для c значительно меньше найденного из непосредственных наблюдений.

Лаплас [2]) привел теоретические результаты в согласие с тем, что наблюдается в действительности. Если газ быстро сжать, то температура его поднимется, а потому давление возрастет в большей степени, чем это соответствует уменьшению объема; подобно этому дело обстоит и в случае расширения газа. Формула (1) годится только для того случая, когда сжатия и расширения происходят настолько медленно, что имеется достаточно времени для выравнивания температуры путем теплопроводности и лучеиспускания. В очень большом числе важных случаев изменения плотности совершаются чрезвычайно быстро; движение тепла от одной частицы к другой едва только начинается, как уже направление его меняется на обратное, так что практически каждая частица жидкости ведет себя так, как если бы ее запас тепла оставался постоянным.

По этой причине формула (1) должна быть заменена законом „адиабатического" изменения давления

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\gamma}, \tag{5}$$

где γ обозначает отношение удельных теплоемкостей газов: $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$. Это дает

$$\varkappa = \gamma p_0 \tag{6}$$

и, следовательно,

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\varrho_0}} = \sqrt{\gamma g H}. \tag{7}$$

---

[1]) Newton, Principia, кн. II, секц. VIII, предлож. 48.

[2]) Обыкновенно указывают на мемуар Лапласа: Sur la vitesse du son dans l'air et dans l'eau, Ann. de chim. et de Phys., III, 238 (1816). [Mécanique Céleste, кн. 12, гл. III (1823)]. Однако, Пуассон уже в работе, помеченной 1807 годом (на которую будет ссылка ниже), указывает на это согласование теории с опытом и прибавляет, что оно было дано Лапласом.

Если положим $\gamma = 1{,}402$ [1]), то прежний результат нужно умножить на 1,184; отсюда получается

$$c = 332 \text{ м/сек},$$

что очень хорошо согласуется с лучшими результатами непосредственных измерений.

Вывод Лапласа пользуется таким полным доверием среди физиков, что теперь формулу (7) применяют с обратной целью, именно, чтобы получить значения γ для различных паров и газов из наблюдений над скоростью звука в них.

Строго говоря, подобное же различие следовало бы проводить и между „адиабатическими" и „изотермическими" коэфициентами упругости капельной жидкости или твердого тела; однако, разница в этом случае практически несущественна. Для воды, например, вычисленное отношение обоих объемных коэфициентов упругости равно 1,0012 [2]).

Влияние теплового лученспускания и теплопроводности теоретически было исследовано Стоксом [3]) и Рэлеем [4]). Если колебания совершаются слишком быстро для того, чтобы могло иметь место выравнивание температуры, но достаточно медленно для того, чтобы переход тепла между соседними частицами не мог быть совершенно исключен, то амплитуда волн по мере их распространения постепенно убывает вследствие происходящего при термических процессах рассеяния энергии. Влияние теплопроводности вместе с влиянием вязкости будет рассмотрено в следующей главе.

Согласно закону Шарля и Дальтона имеем

$$p = R\rho\theta, \tag{8}$$

где θ обозначает абсолютную температуру, а R — некоторую постоянную, зависящую от природы газов. Скорость звука будет изменяться, следовательно, как квадратный корень из θ. Для некоторых из более устойчивых газов, имеющих приблизительно одинаковые значения γ, формула (7) показывает, что скорость звука обратно пропорциональна квадратному корню из плотности, если только относительные плотности определены при одинаковых условиях давления и температуры.

§ 279. Теорию плоских волн можно также очень просто изложить в переменных Лагранжа (§§ 13, 14).

Если обозначить через ξ соответствующее моменту времени t перемещение частицы жидкости, абсцисса которой в невозмущенном состоянии есть x, то слой жидкости, первоначально заключенный

---

[1]) Это значение для γ получено в результате непосредственных опытов, произведенных в последнее время.

[2]) Everett, Units and Physical Constants.

[3]) Stokes, An Examination of the possible effect of the Radiation of Heat on the Propagation of Sound, Phil. Mag. (4), 1, 305 (1851) [Papers, III 142].

[4]) Rayleigh, Theory of Sound, § 247. См. § 360 нашей книги. В работе „On the Cooling of Air by Radiation and Conduction, and on the Propagation of Sound", Phil. Mag. (5), XLVII, 308 (1899) [Papers, IV, 376]. Рэлей на основании опытных данных заключает, что влияние теплопроводности значительно больше в этом отношении, чем влияние лучеиспускания.

между плоскостями x и $x+\delta x$, к моменту времени $t+\delta t$ будет ограничен плоскостями

$$x+\xi \text{ и } x+\xi+\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\delta x,$$

так что уравнение непрерывности будет иметь вид

$$\varrho\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)=\varrho_0, \tag{1}$$

где ϱ_0 — плотность в невозмущенном состоянии. Обозначая через s „коэфициент уплотнения"

$$\frac{\varrho-\varrho_0}{\varrho_0},$$

получим

$$s=\frac{-\frac{\partial\xi}{\partial x}}{1+\frac{\partial\xi}{\partial x}}. \tag{2}$$

Принимая во внимание силы, действующие на единицу поверхности рассматриваемого слоя, получим уравнение движения в виде

$$\varrho_0\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{3}$$

Уравнения эти являются точными, но в случае малых движений можно положить

$$p=p_0+\varkappa s \tag{4}$$

и

$$s=-\frac{\partial\xi}{\partial x}. \tag{5}$$

Подставляя выражения (4) и (5) в уравнение (3), получим

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \tag{6}$$

где $c^2=\frac{\varkappa}{\varrho_0}$. Решение уравнения (6) получается так же, как в §§ 170, 277.

§ 280. *Кинетическая энергия* системы плоских волн выражается так:

$$T=\frac{1}{2}\varrho_0\int_x\int_y\int_z u^2\,dx\,dy\,dz; \tag{1}$$

в этой формуле u обозначает скорость в точке (x, y, z) в момент t.

Вычисление ***внутренней энергии*** требует некоторой осторожности. Работа, которую совершит единица массы, когда объем ее возрастет от своего действительного значения v до нормального значения v_0 при условии, что v лишь мало отличается от v_0, будет с точностью до малых второго порядка иметь значение

$$\frac{1}{2}(p+p_0)(v_0-v),$$

как это непосредственно видно из диаграммы Уатта (фиг. 74). Полагая

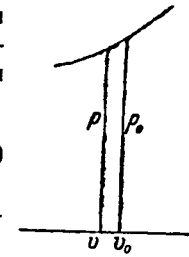
$$p = p_0 + \varkappa s, \quad v_0 - v = sv_0, \tag{2}$$

получим

$$\tfrac{1}{2}(p+p_0)(v_0 - v) = p_0(v_0 - v) + \tfrac{1}{2}(p-p_0)(v_0 - v) = \\ = p_0(v_0 - v) + \tfrac{1}{2}\varkappa s^2 v_0. \tag{3}$$

Если составить сумму соответствующих выражений для всех элементов массы системы, то член $p_0(v_0 - v)$ будет исчезать во всех тех случаях, когда имеют место условия, при которых полное изменение объема равно нулю. В этих случаях работа, которую совершает газ, заключающийся в произвольном данном объеме, когда он из своего действительного состояния переходит в нормальное состояние, определяется выражением

$$W = \frac{1}{2}\varkappa \int\int\int s^2\, dx\, dy\, dz. \tag{4}$$



Фиг. 74.

До сих пор не было сделано никакого предположения относительно характера этого перехода, определяющего значение $\varkappa$. Выражение (4), строго говоря, только в случае *адиабатического* расширения представляет внутреннюю энергию данного объема газа. Если же расширение происходит *изотермически*, то это выражение дает то, что в термодинамике известно под названием „свободной энергии".

В прогрессивной плоской волне мы имеем $cs = \pm u$ и потому $T = W$. Равенство обеих энергий в этом случае можно вывести также из более общих соображений § 174.

Для акустики особенный интерес, естественно, представляют простые гармонические колебания. Если a есть амплитуда прогрессивной волны, имеющей период $\frac{2\pi}{\sigma}$, то согласно (6) § 279 можем положить

$$\xi = a\cos(kx - \sigma t + \varepsilon), \tag{5}$$

где $k = \frac{\sigma}{c}$, а соответствующая длина волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Формулы (1) и (4) дают для энергии, заключающейся в призматической области с площадью поперечного сечения, равной единице, и длиной λ (в направлении оси x), значение

$$T + W = \tfrac{1}{2}\varrho_0\sigma^2 a^2 \lambda, \tag{6}$$

т. е. такое значение, какое имела бы кинетическая энергия всей рассматриваемой массы жидкости, если бы жидкость как целое двигалась со скоростью σa.

Скорость переноса энергии через единицу площади той плоскости, которая движется вместе с лежащими на ней частицами, определяется равенством

$$p\frac{\partial\xi}{\partial t}=p\sigma a\sin(kx-\sigma t+\varepsilon). \tag{7}$$

Работа, совершаемая постоянной частью давления в течение полного периода, равна нулю. Для переменной же части давления будем иметь

$$\Delta p=\varkappa s=-\varkappa\frac{\partial\xi}{\partial x}=\varkappa ka\sin(kx-\sigma t+\varepsilon). \tag{8}$$

Подставляя это значение в формулу (7), получим среднее значение скорости переноса энергии

$$\frac{1}{2}\varkappa\sigma ka^2=\frac{1}{2}\varrho_0\sigma^2a^2c. \tag{9}$$

Таким образом, энергия, которая переносится в течение любого числа полных периодов через какую-нибудь плоскость, в точности равна энергии волн, проходящих через эту плоскость за тот же промежуток времени. Это и следовало ожидать, так как групповая скорость совпадает со скоростью волн в силу того, что c не зависит от λ (ср. § 237).

Волны конечной амплитуды

§ 281. Если давление p есть функция только плотности ϱ, то из уравнений (1) и (3) § 279 мы получаем не приближенное, а точное уравнение

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{\varrho^2}{\varrho_0}\frac{dp}{d\varrho}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}. \tag{1}$$

В случае „изотермического" процесса, при котором

$$\frac{p}{p_0}=\frac{\varrho}{\varrho_0}, \tag{2}$$

уравнение (1) принимает следующий вид

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{p_0}{\varrho_0}\frac{\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}}{\left(1+\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2}. \tag{3}$$

Подобным же образом при „адиабатическом" процессе, когда

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^\gamma, \tag{4}$$

получаем

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{\gamma p_0}{\varrho_0}\frac{\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}}{\left(1+\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^{\gamma+1}}. \tag{5}$$

Точные уравнения (3) и (5) можно сравнить с аналогичным уравнением [(3) §173] для „длинных" волн в канале постоянного сечения.

Из уравнения (1) следует, что уравнение (6) § 279 было бы точным, если бы между p и ϱ имела место зависимость такого рода, что

$$\varrho^2 \frac{dp}{d\varrho} = \varrho_0^2 c^2. \tag{6}$$

Отсюда плоские волны конечной амплитуды могут распространяться, не меняя своего вида, в том и только в том случае, когда

$$p - p_0 = \varrho_0 c^2 \left(1 - \frac{\varrho_0}{\varrho}\right). \tag{7}$$

Однако, зависимость такого рода не имеет места ни для одной из известных жидкостей как при постоянной температуре, так и в том случае, когда не происходит потери тепла вследствие теплопроводности и излучения [1]). Поэтому звуковые волны конечной амплитуды безусловно должны изменять свой вид при своем распространении.

§ 282. Законы распространения волн конечной амплитуды в предположении, что давление p есть определенная функция от плотности ϱ, были исследованы Ирншоу и независимо от него Риманом. Мы приведем здесь только результаты их исследований; подробности можно найти в оригинальных работах, а также в очень полной обработке этого вопроса у Рэлея [2]).

Уравнения Эйлера (1) и (2) § 277 можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} &= -c^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где

$$\tilde{\omega} = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{dp}{\varrho}, \quad c = \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}. \tag{2}$$

Величина c есть скорость распространения волн при малых амплитудах; в общем случае c есть функция от ϱ и потому является величиной переменной. Если мы напишем теперь

$$d\tilde{\omega} = c\, d\omega \text{ или } \omega = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \left(\frac{dp}{d\varrho}\right)^{1/2} \frac{d\varrho}{\varrho}, \tag{3}$$

то уравнения (1) примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -c \frac{\partial \omega}{\partial x}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} &= -c \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

---

[1]) Эта зависимость дала бы для p отрицательное значение, если бы плотность ϱ упала ниже некоторого определенного значения.

[2]) Rayleigh, Aerial Plane Waves of finite Amplitude, Proc. Roy. Soc. A, LXXXIV. 247 (1910) [Papers, V, 573]. См. также Theory of Sound, гл. XI.

Отсюда получаем в результате сложения и вычитания уравнения

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(u+c)\frac{\partial}{\partial x}\right\}(\omega+u)=0 \tag{5}$$

и

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(u-c)\frac{\partial}{\partial x}\right\}(\omega-u)=0. \tag{6}$$

Из этих уравнений видно, что величина $\omega+u$ остается постоянной для той геометрической точки, которая движется со скоростью

$$\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)^{1/2}+u, \tag{7}$$

в то время как величина $\omega-u$ постоянна для точки, движущейся со скоростью

$$-\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)^{1/2}+u. \tag{8}$$

Это означает также, что когда данное значение величины $\omega+u$ движется со скоростью (7) вперед, то значение величины $\omega-u$ движется со скоростью (8) назад.

Таковы результаты, полученные Риманом[1]). Эти результаты достаточны, чтобы получить общее представление о природе движения в каждом отдельном случае. Если начальное возмущение ограничено областью между плоскостями $x=a$ и $x=b$, то мы можем принять, что как ω, так и u исчезают при $x<a$ и $x>b$. Область, в которой $\omega+u$ является переменной, будет двигаться вперед; область же, в которой $\omega-u$ является переменной, будет двигаться назад, и это будет происходить до тех пор, пока эти области не отделятся одна от другой; тогда в области между ними будем иметь $\omega=0$, $u=0$, т. е. жидкость будет находиться в покое и будет иметь нормальную плотность ϱ_0. Таким образом, первоначальное возмущение оказывается разложенным на две волны, движущиеся в противоположных направлениях. В волне, движущейся вперед, мы имеем $\omega=u$, так что как плотность, так и скорость частицы жидкости распространяются вперед и быстрота этого распространения определяется формулой (7). Эта скорость распространения, примем ли мы изотермический или адиабатический закон расширения, будет тем больше, чем больше будет значение ϱ. Закон распространения волн можно наглядно изобразить так: построим кривую, точки которой будут иметь абсциссами значения x, а ординатами — значения ϱ, и будем двигать вперед каждую точку этой кривой со скоростью, которая определяется выражением (7).

Так как частицы, имеющие бо́льшие ординаты, движутся более быстро, то кривая в некоторых точках может оказаться перпендику-

---

[1]) Riemann, Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, Gött. Abh., VIII, 43 (1858—1859) (Werke 2 изд., Лейпциг, 1892, стр. 157).

лярной к направлению оси x. В этом случае соответствующие значения $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial \varrho}{\partial x}$ делаются бесконечно большими, и наш метод не может дать какое-либо заключение о дальнейшем ходе движения (ср. § 187).

§ 283. Исследование Ирншоу [1]) приводит к подобным же результатам; однако, оно является несколько менее общим, так как применяется только к прогрессивным волнам, которые при этом предполагаются уже существующими.

Для определенности будем считать, что значения p и ϱ связаны между собой адиабатическим законом. Если положить $y = x + \xi$, так что y обозначает абсолютную координату для момента времени t частицы, имеющей в невозмущенном состоянии абсциссу x, то уравнение (5) § 281 примет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\gamma+1}}, \tag{1}$$

где

$$c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\varrho_0}.$$

Это уравнение удовлетворится, если положить

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right), \tag{2}$$

причем функция $f\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ должна удовлетворять уравнению

$$f'\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\pm c_0}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}}. \tag{3}$$

Отсюда первый интеграл уравнения (1) будет иметь вид

$$\frac{\partial y}{\partial t} = C \mp \frac{2c_0}{\gamma - 1} \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}}. \tag{4}$$

Определяя C так, что $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ на границах волны, где $\frac{\partial y}{\partial x} = 1$, мы будем иметь

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = \mp \frac{2c_0}{\gamma - 1}\left\{\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1\right\}, \tag{5}$$

так как

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\varrho_0}{\varrho}.$$

---

[1]) Earnshaw, On the Mathematical Theory of Sound, Phil. Trans., CL, 133 (1858).

Чтобы найти скорость, с которой распространяется какое-либо частное значение u, заметим, что значение u, которое в момент времени t относится к частице x, в момент $t+\delta t$ будет относиться к частице $x+\delta x$, при условии, что

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\delta t+\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}\,\delta x=0; \tag{6}$$

отсюда и из равенств (2) и (3) следует

$$\delta x\pm c_0\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}\delta t=0. \tag{7}$$

Значения u и ϱ распространяются, таким образом, *от частицы к частице* со скоростью

$$\mp\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}c_0.$$

Для вывода формулы для скорости распространения в *пространстве* мы имеем

$$\delta y=\frac{\partial y}{\partial x}\,\delta x+\frac{\partial y}{\partial t}\,\delta t=\left\{\mp c_0\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}+u\right\}\delta t. \tag{8}$$

Нижний знак относится к волне, перемещающейся в положительном направлении оси x, а верхний — к волне, перемещающейся в отрицательном направлении оси x. Скорость распространения тем больше, чем больше плотность, что было также установлено и на основании исследований Римана. Из (8) следует, что в положительной волне соотношение между u и y имеет вид

$$u=F\left\{y-\left(c_0+\frac{\gamma+1}{2}u\right)t\right\}, \tag{9}$$

который представляет рэлеевское обобщение формулы, полученной Пуассоном [1]) в 1807 г. для изотермического закона ($\gamma=1$).

Что формула Пуассона включает в себя измененне в типе распространяющейся волны, было еще указано Стоксом [2]). Надо заметить, что если будем стремить γ к еднице в (5), то получим

$$\left.\begin{aligned} u&=\pm c_0\log\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right),\\ \text{или}\qquad \varrho&=\varrho_0 e^{\mp\frac{u}{c_0}}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$ [3])

§ 284. Условия распространения волн установившегося типа были очень простым способом исследованы Ранкином [4]).

---

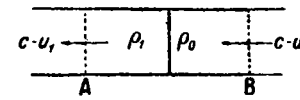
[1]) Poisson, Mémoire sur la théorie du son, Journ. de l'École Polytechn., VII, 367.

[2]) Stokes, On a Difficulty in the Theory of Sound, Phil. Mag. (3), XXIII, 349 (1848) [Papers, II, 51].

[3]) Этот результат вместе с аналогичным результатом для *длинных* воли в воде, кажется, впервые был указан Морганом. См. Airy, Phil. Mag. (3), XXXIV, 401 (1849).

[4]) Rankine, On the Thermodynamic Theory of Waves of Finite Longitudinal Disturbance, Phil. Trans., CLX, 277 (1870) [Papers, стр. 530].

Пусть A, B суть две точки воображаемой цилиндрической трубки (фиг. 75), которая имеет поперечное сечение, равное *единице*, и расположена в направлении движения волн; возьмем положительное направление оси x в том же направлении и обозначим давление, плотность и скорость частицы в точках A и B соответственно через p_1, ϱ_1, u_1 и p_0, ϱ_0, u_0.



Фиг. 75.

Если сообщить, как в § 175, всей массе жидкости скорость c, равную, но противоположную скорости распространения волн, то задача приведется к рассмотрению установившегося движения. Так как теперь через любое поперечное сечение какой-нибудь трубки в каждую единицу времени протекает одинаковое количество жидкости, то мы должны иметь соотношение

$$\varrho_1(c-u_1)=\varrho_0(c-u_0)=m; \tag{1}$$

здесь m обозначает массу жидкости, которая протекает в единицу времени через единицу площади плоскости, движущейся вместе с волной, если рассматривать задачу в ее первоначальной форме. Ранкин называет величину m „массовой скоростью" волны.

Далее, равнодействующая давлений в направлении BA, приложенных к массе жидкости, заключенной между сечениями A и B, равна p_0-p_1, а приращение количества движения этой массы в том же направлении в единицу времени равно

$$m(c-u_1)-m(c-u_0).$$

Отсюда следует

$$p_0-p_1=m(u_0-u_1). \tag{2}$$

Это равенство вместе с равенством (1) дает зависимость

$$p_1+\frac{m^2}{\varrho_1}=p_0+\frac{m^2}{\varrho_0}. \tag{3}$$

Таким образом, волна конечной амплитуды может распространяться, оставаясь неизменной, только в такой среде, для которой имеет место равенство

$$p+\frac{m}{\varrho^2}=\text{const. или } p+m^2v=\text{const.}, \tag{4}$$

где v обозначает объем единицы массы. К этому заключению другим путем мы уже пришли в § 281. Заметим, что соотношение (4) на диаграмме Уатта изображается *прямой линией*.

Если изменение плотности будет незначительным, то можно будет считать, что соотношение (4) в качестве приближенного годится при подходящем значении m и для действительных жидкостей. Полагая

$$\left.\begin{aligned}\varrho&=\varrho_0(1+s),\\ p&=p_0+\varkappa s,\\ m&=\varrho_0 c,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

получим, как в § 277,

$$c^2=\frac{\varkappa}{\varrho_0}. \tag{6}$$

Сначала Стокс [1]), а позднее и многие другие авторы показали, что в случае такого рода волн должны выполняться как условие постоянства массы, так и условие постоянства количества движения. Простейшим случаем будет тот, когда величины ϱ и u остаются всюду постоянными, кроме плоскости разрыва, где они претерпевают изменения. Если в предшествующих рассуждениях взять одно из сечений A, B позади, а другое — впереди этой плоскости, то на основании зависимости (3) будем иметь

$$m = \left(\frac{p - p_0}{\varrho_1 - \varrho_0}\varrho_1\varrho_0\right)^{1/2}, \tag{7}$$

$$c - u_0 = \frac{m}{\varrho_0} = \left(\frac{p_1 - p_0}{\varrho_1 - \varrho_0}\,\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right)^{1/2} \tag{8}$$

и

$$u_1 - u_0 = \frac{m}{\varrho_0} - \frac{m_1}{\varrho_1} = \pm\left[\frac{(p_1 - p_0)(\varrho_1 - \varrho_0)}{\varrho_1\varrho_0}\right]^{1/2}. \tag{9}$$

Здесь следует брать верхний или нижний знак в зависимости от того, больше или меньше ϱ_1, чем ϱ_0, т. е. имеем ли мы дело с волной сгущения или разрежения. Полученные здесь результаты содержат только *разности* скоростей, что и следовало ожидать, так как мы можем сообщить всей массе рассматриваемой жидкости общую скорость, не изменяя характера волн.

Мы можем, например, принять, что величины p_0, ϱ_0, u_0, определяющие состояние среды перед волной, заданы произвольно и что плотность ϱ_1 воздуха в самой распространяющейся волне тоже задана. Далее необходимо заранее принять на основании физических соображений какое-либо соотношение между p_1, ϱ_1 и p_0, ϱ_0. Тогда остальные величины m, c, u_1 определятся равенствами (7), (8), (9). Формула (8) дает скорость, с которой волна вступает в лежащую перед ней область.

Против этих результатов можно, однако, сделать то возражение [2]), что для действительных жидкостей уравнение энергии не может иметь место одновременно с равенствами (1) и (2). Если мы вычислим избыток работы, которая производится в единицу времени силами давления, приложенными к жидкости, втекающей через сечение B в пространство AB, над той работой, которую за то же время производит давление жидкости, вытекающей через сечение A, и вычтем отсюда приращение кинетической энергии, то получим

$$p_0(c - u_0) - p_1(c - u_1) - \frac{1}{2}m\left\{(c - u_1)^2 - (c - u_0)^2\right\},$$

или

$$p_1u_1 - p_0u_0 - \frac{1}{2}m(u_1^2 - u_0^2),$$

---

[1]) Stokes, см. выше, стр. 604.

[2]) Rayleigh, Theory of Sound, § 253. Представляет интерес сравнение этого параграфа труда Рэлея с § 187 нашей книги.

или, наконец,

$$\frac{1}{2}(p_1+p_0)(u_1-u_0). \tag{10}$$

Эти выражения эквивалентны друг другу в силу динамического уравнения (2). Соответствующий результат *для единицы массы* получим, если разделим это выражение на m. Подставляя значение u_1-u_0 из формулы (1), получим

$$\frac{1}{2}(p_1+p_0)(v_0-v_1), \tag{11}$$

где буква v поставлена, как и раньше, вместо $\frac{1}{\varrho}$.

Если обозначить на диаграмме Уатта через A и B два состояния среды, то выражение (11) будет измерять площадь между прямой AB, осью v и ординатами точек A и B. Если бы переход от состояния B к состоянию A на каждой стадии процесса мог быть осуществлен без притока или потери тепла, то соответствующие точки диаграммы лежали бы на одной и той же „адиабатической кривой" и приращение внутренней энергии было бы представлено площадью, заключенной между этой кривой, осью v и крайними ординатами. Для действительных газов адиабата обращена вогнутостью кверху и потому последняя из названных площадей (по абсолютному значению) меньше, чем первая. Если мы обратим внимание на знак площади, то увидим, что для волны сгущения ($v_1<v_0$) работа внешнего давления была бы больше, чем приращение кинетической и внутренней энергии; в случае же волны разрежения ($v_1>v_0$), наоборот, отданная работа больше, чем соответствующая ей кажущаяся потеря энергии [1]).

---

[1]) В некоторых исследованиях Гюгонио (которые Адамар в своих „Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique", Париж, 1903, развивает дальше) доказательство, приведенное в тексте, обращено. При *предположении* возможности волны разрыва оказывается, что уравнение энергии может быть удовлетворено, если выражение (10) положить равным приращению внутренней энергии [см. § 10 (8)]. На основании такого предположения Гюгонио делает заключение, что переход от одного состояния к другому происходит по закону

$$\frac{1}{2}(p_1+p_0)(v_0-v_1)=\frac{1}{\gamma-1}(p_1v_1-p_0v_0).$$

„Telle est la relation gu'Hugoniot a substituée à [$pv^\gamma=$ const.] pour exprimer que la condensation ou dilatation brusque se fait sans absorption ni dégagement de chaleur. On lui donne actuellement le nom de *loi adiabatique dynamique*, la relation [$pv^\gamma=$ const.], qui convient aux changements lents, etant désignée sous le nom de *loi adiabatique statique*" (Hadamard, p. 192), что в переводе означает: „Таково соотношение, которое Гюгонио поставил на место закона [$pv^\gamma=$ const.], чтобы выразить, что внезапное сгущение или разрежение происходит без поглощения или выделения тепла. Эту зависимость называют *динамическим адиабатическим законом*, соотношение же [$pv^\gamma=$ const.], которое имеет место в случае медленных изменений, называют *статическим адиабатическим законом*". Однако, для такого закона не даны какие-либо физические основания.

Оказывается, что уравнение энергии для волн разрыва не может удовлетворяться за исключением такой гипотетической среды, в которой адиабатами являются прямые линии. Это совпадает с тем условием, которое мы получили для возможности установившихся непрерывных волн.

В исследованиях, которые изложены выше, не принимались во внимание диссипативные силы, такие, как вязкость, теплопроводность и лучеиспускание. Практически же существование волны разрыва должно предполагать наличие конечной разности температур между частями жидкости, лежащими с обеих сторон плоскости разрыва; поэтому, если даже оставить в стороне вязкость, рассеяние энергии должно происходить вследствие тепловых явлений на плоскости разрыва. То обстоятельство, что установившаяся волна разрежения должна была бы дать выигрыш энергии, показывает, что такого рода волна невозможна. Отсюда следует, что такая волна, если даже она когда-либо возникла бы, оказалась бы неустойчивой.

Вопрос о том, можно ли соотношения между обоими состояниями при допущении рассеяния энергии согласовать с уравнением энергии, был подробно исследован Ранкином и (более подробно) Рэлеем [1]). При этих исследованиях предполагалось, что переход от одного установившегося состояния к другому происходит непрерывно, хотя и очень быстро. Так как температурный градиент $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$ впереди и позади волны есть нуль, то полное приращение тепла на единицу массы при переходе от состояния A к состоянию B равно нулю. Количество тепла, необходимое для того, чтобы вызвать бесконечно малые приращения δp и δv, определяется термодинамической формулой

$$\delta Q = \frac{v\,\delta p + \gamma p\,\delta v}{\gamma - 1}. \tag{12}$$

Так как на основании уравнения (4) имеем

$$\delta p = -m^2\,\delta v,$$

то формулу (12) можно представить в виде

$$\delta Q = \frac{\delta p}{(\gamma-1)\,m^2}\left\{p + m^2 v - (\gamma+1)\,p\right\}. \tag{13}$$

Отсюда, выражая, что

$$\int dQ = 0,$$

получим соотношение

$$p + m^2 v = \frac{1}{2}(\gamma+1)(p_0 + p_1). \tag{14}$$

---

[1]) Rayleigh, см. выше, стр. 601.

В частности имеем

$$\left.\begin{aligned} m^2v_1 &= \frac{1}{2}(\gamma-1)\,p_1+\frac{1}{2}(\gamma+1)\,p_0,\\ m^2v_0 &= \frac{1}{2}(\gamma+1)\,p_1+\frac{1}{2}(\gamma-1)\,p_0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Из формул (13) и (14) получается

$$\delta Q = \frac{(\gamma+1)\,\delta p}{2(\gamma-1)\,m^2}(p_0+p_1-2p), \tag{16}$$

а отсюда

$$Q = \frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)\,m^2}(p_1-p)(p-p_0). \tag{17}$$

Эта формула дает полное количество тепла, которое получила единица массы жидкости к тому моменту, когда давление сделалось равным p.

Если принять во внимание только теплопроводность, то поток тепла в область, расположенную влево от плоскости, которая лежит между плоскостями A и B, равен $k\frac{d\theta}{dx}$, где k обозначает коэфициент теплопроводности, в то время как количество тепла, проходящее в единицу времени через плоскость вследствие конвекции, оказывается равным mQ. Так как область, расположенная с левой стороны, не получает и не теряет тепла, то имеем

$$k\frac{d\theta}{dx} = -mQ. \tag{18}$$

Ранкин исключает θ посредством формулы $pv = R\theta$ и находит таким способом зависимость между величинами x и p. Формула $pv = R\theta$ в соединении с формулой (14) дает соотношение

$$\theta = \frac{\left\{\frac{1}{2}(\gamma+1)(p_0+p_1)-p\right\}p}{m^2R}. \tag{19}$$

Отсюда на основании формулы (18) следует

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\frac{d\theta}{dp}}{\frac{d\theta}{dx}} = -\frac{(\gamma-1)\,k}{(\gamma+1)\,mR}\cdot\frac{(\gamma+1)(p_0+p_1)-4p}{(p_1-p)(p-p_0)}. \tag{20}$$

Для некоторой точки волны вследствие предполагаемой непрерывности мы должны иметь $p=\frac{1}{2}(p_0+p_1)$; в этой точке значение величины $\frac{dx}{dp}$ должно быть отрицательным. Кроме того, величина $\frac{dx}{dp}$ не должна менять знак, так как в противном случае мы имели бы два различных значения для p при одном и том же значении x.

Следовательно, мы должны иметь $p_0 < p_1$, и потому $v_0 > v_1$, т. е. волна должна быть волной сгущения. При возрастании x значения p непрерывно уменьшаются от p_1 до p_0, и потому знаменатель во второй дроби в правой части равенства (20) оказывается положительным. Для того чтобы числитель был положителен, должно выполняться равенство

$$\frac{p_1}{p_0} < \frac{\gamma+1}{3-\gamma}. \tag{21}$$

Для воздуха это предельное значение приблизительно равно $^3/_2$.

Интеграл от выражения (20) равен

$$x = \frac{k}{(\gamma+1)mC_v}\left\{\frac{(\gamma-1)(p_0+p_1)}{p_1-p_0}\log\frac{p_1-p}{p-p_0} - 2\log\frac{4(p_1-p)(p-p_0)}{(p_1-p_0)^2}\right\}, \tag{22}$$

если начало отсчета x взять в точке, где $p=\frac{1}{2}(p_0+p_1)$. Мы воспользовались при этом термодинамическим соотношением

$$R=(\gamma-1)C_v, \tag{23}$$

в котором C_v обозначает удельную теплоемкость при постоянном объеме. При изменении величины p от значения p_1 до значения p_0 значение x возрастает от $-\infty$ до $+\infty$; однако, если отношение $\frac{p_1}{p_0}$ заметно отклоняется от *единицы*, то область, в которой практически имеет место этот переход, оказывается очень малой, и все обстоятельства оказываются очень близкими к тем, которые наблюдаются в случае разрыва [1]).

В случае воздуха мы можем положить в системе *CGS*

$$k=5{,}22\cdot10^{-5},\quad \gamma=1{,}40,\quad C_v=0{,}1715,$$
$$\varrho_0=0{,}00129,\quad p_0=1{,}013\cdot10^6.$$

Отсюда, полагая для примера $\frac{p_1}{p_0}=1{,}4$, мы находим из равенств (15) $m=49{,}6$ и, следовательно,

$$\frac{k}{(\gamma+1)mC_v}=2{,}559\cdot10^{-6}.$$

Из этих данных мы заключаем, что давление изменяется

$$\text{от } \frac{9}{10}p_1+\frac{1}{10}p_0 \text{ до } \frac{9}{10}p_0+\frac{1}{10}p_1$$

на протяжении $2{,}7\cdot10^{-5}$ *см*. Скорость распространения возмущения относительно покоящегося воздуха получается равной

$$\frac{m}{\varrho_0}=3{,}84\cdot10^4 \text{ } см/сек.$$

---

[1]) Rayleigh, см. выше. Независимо от Рэлея к подобным же результатам пришел Г. И. Тэйлор, The Conditions Necessary for Discontinuous Motion in Gases, Proc. Roy. Soc. A, LXXXIV, 371 (1910).

В том случае, когда и вязкость и теплопроводность будут приняты во внимание, исследование становится более сложным. Рэлеем было установлено, что общий характер полученных результатов не изменится, за исключением того, что область допустимых значений отношения $\frac{p_1}{p_0}$ значительно расширится. Его решение для случая учета одной только вязкости будет приведено позднее (§ 360а).

Сферические волны.

§ 285. Общие уравнения малых колебаний имеют следующий вид

$$\varrho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \varrho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \varrho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{1}$$

Если положим

$$p = p_0 + \varkappa s, \quad c^2 = \frac{\varkappa}{\varrho_0} \tag{2}$$

и проинтегрируем уравнения (1) по t, то получим

$$\left.\begin{aligned} u &= -c^2 \frac{\partial}{\partial x}\int_0^t s\,dt + u_0, \qquad v = -c^2 \frac{\partial}{\partial y}\int_0^t s\,dt + v_0, \\ w &= -c^2 \frac{\partial}{\partial z}\int_0^t s\,dt + w_0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где u_0, v_0, w_0 суть значения u, v, w в точке (x, y, z) в момент $t = 0$. Если в начальный момент движение было безвихревым и обладало потенциалом скоростей φ_0, то будем иметь

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{4}$$

где

$$\varphi = c^2 \int_0^t s\,dt + \varphi_0. \tag{5}$$

Такое непрерывное существование потенциала скоростей мы доказали в более общем виде в §§ 17 и 33.

Из равенства (5) получается

$$c^2 s = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{6}$$

Мы будем теперь предполагать, что возмущение симметрично относительно некоторой неподвижной точки, которую будем принимать за начало. Движение в данном случае необходимо должно быть безвихревым, так что должен существовать потенциал скоростей φ, который в нашем случае зависит только от расстояния r от начала и от времени t.

Чтобы составить уравнение непрерывности, заметим, что масса жидкости, заключенная между сферами r и $r+\delta r$, вследствие разности потоков через внутреннюю и внешнюю поверхности увеличится в единицу времени на величину

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(4\pi r^2 \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)\delta r.$$

Так как это же количество может быть выражено также через $\frac{\partial \varrho}{\partial t} 4\pi r^2 \delta r$, то имеем

$$r^2 \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\varrho r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right). \tag{7}$$

Это уравнение можно было бы также получить непосредственно из общего уравнения непрерывности (5) § 7. Для случая бесконечно малых движений из уравнения (7) следует

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right); \tag{8}$$

отсюда на основании формулы (6) получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right). \tag{9}$$ [1])

Это уравнение можно привести к более удобной форме

$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2}; \tag{10}$$

решение его имеет вид

$$r\varphi = f(r-ct) + F(r+ct). \tag{11}$$

Движение складывается, таким образом, из двух систем сферических волн, из которых одна распространяется со скоростью c наружу, а другая с такой же скоростью внутрь.

Если мы рассмотрим теперь только первую систему, то на основании равенства (6) будем иметь

$$cs = -\frac{1}{r} f'(r-ct);$$

это показывает, что сгущение распространяется со скоростью c наружу, причем во время движения значение его убывает, так как оно оказывается обратно пропорциональным расстоянию от начала координат.

---

[1]) Если мы примем закон Бойля, то точное уравнение симметричных сферических волн будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2\frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r\, \partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right).$$

Скорость в одном и том же ряду волн равна

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=-\frac{1}{r}f'(r-ct)+\frac{1}{r^2}f(r-ct).$$

С возрастанием r второй член становится все меньше по сравнению с первым, так что скорость в конце концов распространяется по тому же закону, как и сгущение.

Если имеются налицо только расходящиеся или только сходящиеся волны, то из равенства (11) имеем

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi)=\mp cs; \tag{12}$$

это соответствует формуле (11) § 277.

Для наших целей удобнее представить формулу для расходящихся волн в следующем виде

$$4\pi r\varphi=f\left(t-\frac{r}{c}\right). \tag{13}$$

Так как отсюда получается

$$\lim_{r=0}\left[-4\pi r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right]=f(t), \tag{14}$$

то можно считать, что эти волны возбуждаются источником интенсивности $f(t)$, находящимся в начале; ср. § 196.

Если источник действует только в течение конечного промежутка времени, то значение φ, данное формулою (13), будет исчезать за границами волн. Отсюда на основании формулы (6) следует

$$\int s\,dt=0, \tag{15}$$

где интеграл распространяется на весь тот промежуток времени, который необходим для того, чтобы возмущение прошло через рассматриваемую точку. То обстоятельство, что расходящаяся сферическая волна должна обязательно содержать как сгущенную, так и разреженную части, было в первый раз замечено Стоксом[1]), ср. § 197.

Энергия конечной системы расходящихся сферических волн так же, как и в случае плоских прогрессивных волн, состоит наполовину из кинетической энергии, наполовину из потенциальной.

Это следует из общих рассуждений § 174, но может быть получено и независимо от них следующим образом. Имеем тождество

$$r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2=\left\{\frac{\partial(r\varphi)}{\partial r}\right\}^2-\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi^2).$$

---

[1]) Stokes, On some Points in the Received Theory of Sound, Phil. Mag. (3), XXXIV, 52 (1849) [Papers, II, 82]. См. также Rayleigh, Theory of Sound, § 279.

Если положим

$$q = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad c^2 s = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{16}$$

то это тождество на основании формулы (12) дает для случая расходящейся системы волн зависимость

$$r^2 q^2 = c^2 r^2 s^2 - \frac{\partial}{\partial r}(r\varphi^2).$$

Отсюда следует

$$\int_0^\infty \frac{1}{2} \varrho q^2 4\pi r^2 \, dr = \int_0^\infty \frac{1}{2} \varrho c^2 s^2 4\pi r^2 \, dr, \tag{17}$$

так как $r\varphi^2$ исчезает на внешней и внутренней границе системы волн [1]).

§ 286. Определение функций f и F в формуле (11) из начальных условий для неограниченного пространства можно выполнить следующим способом.

Будем считать, что распределение скорости и плотности в момент t дается формулами

$$\varphi = \psi(r), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \chi(r), \tag{18}$$

где ψ, χ обозначают произвольные функции.

При сравнении с формулами (11) получим

$$f(z) + F(z) = z\psi(z), \tag{19}$$

$$-f'(z) + F'(z) = \frac{z}{c}\chi(z).$$

Второе из этих уравнений дает после интегрирования

$$-f(z) + F(z) = \frac{1}{c}\int_0^z z\chi(z)\, dz + C. \tag{20}$$

Далее, из того условия, что в начале волн не происходит никакого возникновения или исчезания жидкости, т. е. $r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \to 0$, когда $r \to 0$, следует

$$f(-z) + F(z) = 0. \tag{21}$$

Формулы (19) и (20) определяют функции f и F для положительных значений z, после чего формула (21) определяет f для отрицательных значений z [2]).

---

[1]) Lamb, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXXV, 160 (1902).

[2]) Rayleigh, Theory of Sound, § 279.

Окончательный результат можно написать в виде

$$r\varphi = \frac{1}{2}(r-ct)\psi(r-ct) + \frac{1}{2}(r+ct)\psi(r+ct) + \frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct} z\chi(z)\,dz \qquad (22)$$

или

$$r\varphi = -\frac{1}{2}(ct-r)\psi(ct-r) + \frac{1}{2}(ct+r)\psi(ct+r) + \frac{1}{2c}\int_{ct-r}^{ct+r} z\chi(z)\,dz, \qquad (23)$$

смотря по тому, будет ли r больше или меньше, чем ct. Эти формулы могут быть непосредственно проверены.

В качестве очень простого примера рассмотрим тот случай, когда воздух вначале находится в покое и начальное возмущение представляет собой сгущение s_0, постоянное внутри шара раднуса a. Тогда мы будем иметь $\psi(z)=0$, в то время как $\chi(z)=c^2s_0$ или 0, смотря по тому $z \lesseqgtr a$. На расстоянин $r\,(>a)$ от начала координат движенне начнется в момент $t=\frac{r-a}{c}$ и закончится в момент $t=\frac{r+a}{c}$. Для промежуточных моментов времени мы будем иметь

$$r\varphi = \frac{1}{4}cs_0\left\{a^2-(r-ct)\right\}^2 \qquad (24)$$

и

$$\frac{s}{s_0} = \frac{r-ct}{2r}. \qquad (25)$$

Возмущение оказывается заключенным в пространстве между двумя концентрическими сферами с разностью радиусов $2a$, и коэфицнент сгущения s остается положительным для внешней половины этого пространства и отрицательным для внутренней половины

Нам потребуется скоро выражение, которое дает значение φ в начале координат как функцию t, выраженную через начальные данные. На основании формул (11) и (21) имеем

$$[\varphi]_{r=0} = \lim_{r\to 0}\frac{f(r-ct)+F(r+ct)}{r} =$$
$$= \lim_{r\to 0}\frac{F(ct+r)-F(ct-r)}{r} = 2F'(ct)$$

или на основании формулы (19) и последующей

$$[\varphi]_{r=0} = \frac{d}{dt}[t\psi(ct)] + t\chi(ct). \qquad (26)$$

Например, в только что рассмотренной специальной задаче имеет место равенство $\psi=0$ для всех значеиий переменного, в то время как $\chi(r)=c^2s_0$ или 0 при $r \lesseqgtr a$. В начальиой точке мы имеем, таким образом, $\varphi=c^2s_0t$ или 0

для $ct \lesssim a$. Когда $ct = a$, то значение φ изменяется скачком от acs_0 до 0, так что значение s в центре на одно мгновение обращается в отрицательную бесконечность. Мы можем избежать обращения φ в бесконечность, если примем, что начальное значение s вблизи значения $r = a$ изменяется непрерывно, но быстро от s_0 до 0.

Общее уравнение звуковых волн.

§ 287. Мы переходим теперь к общему случаю распространения звуковых волн. Как и прежде, мы будем пренебрегать малыми величинами второго порядка, так что уравнение движения, как в § 285, будет иметь вид

$$c^2 s = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{1}$$

Подставляя $\varrho = \varrho_0(1+s)$ в общее уравнение непрерывности, будем иметь с тою же степенью приближения

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \tag{2}$$

Исключение s из уравнений (1) и (2) дает

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \tag{3}$$

или, при нашем прежнем способе обозначения,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi. \tag{4}$$

Так как это уравнение линейное, то оно будет удовлетворяться средним арифметическим произвольного числа частных решений φ_1, φ_2, φ_3, ... Как в § 38, представим себе бесконечное число прямоугольных систем осей, равномерно распределенных около точки P как около начала; пусть функции φ_1, φ_2, φ_3, ... суть потенциалы скоростей тех движений, которые по отношению к этим системам оказываются такими же, как первоначальное движение по отношению к системе x, y, z. Тогда среднее арифметическое $\bar{\varphi}$ функций φ_1, φ_2, φ_3 будет потенциалом скоростей движения, симметричного по отношению к точке P; поэтому к функции $\bar{\varphi}$ можно будет применить результаты исследования § 286, если через r обозначить расстояние произвольной точки от точки P. Другими словами, если $\bar{\varphi}$ есть функция от r и t, определяемая уравнением

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4\pi} \int\int \varphi \, d\tilde{\omega}, \tag{5}$$

где φ обозначает произвольное решение уравнения (4), а $\delta\tilde{\omega}$ — телесный угол, под которым из P виден элемент шаровой поверхности

радиуса r с центром в P, то будем иметь

$$\frac{\partial^2 r\bar{\varphi}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 r\bar{\varphi}}{\partial r^2}. \tag{6}$$ [1])

Отсюда следует

$$r\bar{\varphi} = f(r-ct) + F(r+ct). \tag{7}$$

Таким образом, среднее значение φ для шара, имеющего центр в произвольной точке среды, следует такому же закону, как потенциал скоростей симметрической шаровой волны. Мы видим сразу, что значение φ в точке P в момент t зависит от средних значений, которые функции φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ имели первоначально в точках сферы с радиусом ct и с центром в P; возмущение поэтому распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью c. Таким образом, если первоначальное возмущение распространялось только на конечную часть Σ области, то возмущение в точке P, лежащей вне Σ, начинается по истечении промежутка времени $\frac{r_1}{c}$, продолжается в течение времени $\frac{r_2-r_1}{c}$, а потом совершенно прекращается; r_1, r_2 обозначают радиусы двух сфер с центрами в P, из которых одна охватывает Σ, а другая ее исключает.

Чтобы дать математическое выражение решению уравнения (4), в существенных чертах уже полученному, положим, что значения функций φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ в момент $t=0$ даются формулами

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \psi(x, y, z), \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} &= \chi(x, y, z). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Средние значения этих функций в шаре радиуса r с центром в точке (x, y, z) суть

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4\pi}\iint \psi(x+lr, y+mr, z+nr)\, d\tilde{\omega},$$

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\iint \chi(x+lr, y+mr, z+nr)\, d\tilde{\omega},$$

где l, m, n обозначают направляющие косинусы произвольного радиуса этого шара и $d\tilde{\omega}$ есть соответствующий элементарный телесный угол.

---

[1]) Этот результат другим путем был найден Пуассоном, Mémoire sur la théorie du son, Journ. de l'École Polytechn., VII, 334—338 (1807). Замечание, что это приводит также к полному решению уравнения (4), принадлежит Лиувиллю, Journ. de Math., I, 1 (1856).

Полагая

$$l = \sin\theta\cos\omega,$$

$$m = \sin\theta\sin\omega,$$

$$n = \cos\theta,$$

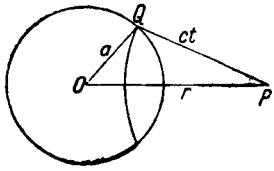
получим

$$\delta\widetilde{\omega} = \sin\theta\,\delta\theta\,\delta\omega.$$

Если мы сравним этот результат с формулой (26) § 286, то увидим, что значение φ в точке (x, y, z) для какого-либо следующего момента времени t определится формулой

$$\left.\begin{aligned}\varphi = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\,t\iint\psi(x+ct\sin\theta\cos\omega,\ y+ct\sin\theta\sin\omega,\ z+\\ +ct\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\omega+\\ +\frac{t}{4\pi}\iint\chi(x+ct\sin\theta\cos\omega,\ y+ct\sin\theta\sin\omega,\ z+\\ +ct\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\omega;\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

эта формула была дана Пуассоном [1]).



Фиг. 76.

Простое приложение этих результатов представляет рассмотренная в § 280 специальная задача; в этой задаче начальное условие заключалось в том, что начальное возмущение s_0 было постоянно внутри сферы с радиусом a (фиг. 76) и с центром в начале координат. Если сферическая поверхность с радиусом $PQ = ct$ и с центром в точке P, лежащей вне первой сферы, пересекает сферу $r = a$, то расположенная внутри этой последней часть поверхности шара радиуса PQ будет равна $2\pi PQ^2(1-\cos OPQ)$, и среднее значение начальных значений s на всей поверхности шара $4\pi PQ^2$ оказывается равным

$$\frac{1}{2}(1-\cos OPQ)\,s_0 = \frac{a^2-(ct-r)^2}{4ctr}\,s_0, \tag{10}$$

где $r = OP$. Отсюда получается

$$\varphi_P = \frac{cs_0}{4r}\,[a^2-(ct-r)^2], \tag{11}$$

как в (24) § 286.

В случае возмущения, продолжающегося лишь некоторое время и распространяющегося в неограниченном пространстве, среднее значе-

---

[1]) Poisson, Mémoire sur l'intégration de quelques equations linéaires aux différences partielles et particulièrement de l'équation général du mouvement des fluides élastiques, Mém. de l'Acad. des Sciences, III, 121 (1819). Другие доказательства имеются у Кирхгофа, Mechanik, гл. XXIII и Рэлея, Theory of Sound, § 273.

ние во времени коэфициента уплотнения s в каждой точке равно нулю. В самом деле, из (1) следует уравнение

$$c^2 \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial u}{\partial t}$$

и два других аналогичных уравнения. Отсюда получается

$$\frac{\partial}{\partial x} \int s\, dt = -\left[\frac{u}{c^2}\right] = 0 \text{ и т. д.},$$

так как u, v, $w = 0$ при обоих пределах интеграции по t. Интеграл $\int s\, dt$ имеет поэтому для всех точек пространства одно и то же значение, и если мы рассмотрим бесконечно удаленные точки, в которых волны вследствие расхождения ослаблены, то увидим, что это значение есть нуль, ср. (15) § 285.

§ 288. Выражение для кинетической энергии жидкости, содержащейся в произвольной области, имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \varrho_0 \iiint \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\, dy\, dz. \tag{1}$$

Отсюда

$$\frac{dT}{dt} = \varrho_0 \iiint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz,$$

где $\dot{\varphi}$ стоит вместо $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. На основании формулы Грина § 43 это соотношение может быть написано в виде

$$\frac{dT}{dt} = -\varrho_0 \iint \dot{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS - \varrho_0 \iiint \dot{\varphi}\, \Delta\varphi\, dx\, dy\, dz =$$

$$= -\varrho_0 \iint \dot{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS - \frac{\varrho_0}{c^2} \iiint \dot{\varphi} \ddot{\varphi}\, dx\, dy\, dz.$$

Отсюда, обозначая

$$W = \frac{1}{2} \varkappa \iiint s^2\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{2} \frac{\varrho_0}{c^2} \iiint \dot{\varphi}^2\, dx\, dy\, dz, \tag{2}$$

имеем

$$\frac{d}{dt}(T + W) = -\varrho_0 \iint \dot{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS. \tag{3}$$

Мы видели (§ 280), что при известных условиях W представляет внутреннюю энергию.

Полное истолкование формулы (3) мы предоставляем читателю. В различных важных случаях, как, например, в случае неподвижных $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0\right)$ или свободных границ ($\dot{\varphi} = 0$), поверхностный интеграл будет исчезать, и мы будем иметь тогда равенство

$$T + W = \text{const}. \tag{4}$$

Этот результат позволяет дать доказательство однозначности определения движения по заданному начальному распределению скоростей и плотностей. В самом деле, если бы φ_1, φ_2 были две различные формы потенциала скоростей, соответствующие одним и тем же начальным условиям, то для движения с потенциалом скоростей $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ сумма $T + W$ должна была бы все время быть равной нулю, ибо она должна исчезать в начальный момент. Но так как каждый элемент в выражениях для T и W существенно положителен, то это требует, чтобы производные от φ по x, y, z, t все исчезали, а это обозначает, что φ_1 и φ_2 могут различаться между собой только на абсолютное постоянное [1]).

Этот ход доказательства годится, естественно, для всех тех случаев, для которых можно утверждать, что поверхностный интеграл в равенстве (3) исчезает.

Простые гармонические колебания.

§ 289. В случае простого гармонического движения с множителем времени $e^{i\sigma t}$ уравнение (4) § 287 принимает вид

$$(\Delta + k^2)\varphi = 0, \tag{1}$$

где

$$k = \frac{\sigma}{c}. \tag{2}$$

Сравнение с § 280 показывает, что $\frac{2\pi}{k}$ есть длина волны плоских волн с данным периодом $\frac{2\pi}{\sigma}$.

В случае симметрии относительно начала из уравнения (10) § 258 или после преобразования уравнения (1) будем иметь

$$\frac{\partial^2 r\varphi}{\partial r^2} + k^2 r\varphi = 0. \tag{3}$$

Решение этого уравнения можно написать в виде

$$\varphi = A\frac{\sin kr}{kr} + B\frac{\cos kr}{kr}\ ^2). \tag{4}$$

Если в начале координат источника нет, то должно быть $B = 0$, и выражение (4) приводится к виду

$$\varphi = A\frac{\sin kr}{kr}. \tag{5}$$

Следует заметить, что это решение можно получить наложением системы плоских волн с равномерно распределенными направлениями

[1]) Kirchhoff, Mechanik, гл. XXIII.

[2]) Множитель, зависящий от времени, здесь, как и в других случаях, ради краткости отброшен.

движения. В самом деле, для системы плоских волн, направление движения которых составляет с данным радиусом-вектором r угол θ, имеем

$$\varphi = e^{-ikr\cos\theta}, \tag{6}$$

и среднее значение этой величины для всевозможных направлений, проходящих через начало, есть

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} e^{-ikr\cos\theta}\, 2\pi\sin\theta\, d\theta = \frac{\sin kr}{kr}. \tag{7}$$

На основании выражения (5) мы можем вывести заключение относительно общего случая, для которого имеет место уравнение (1). Из уравнения (6) § 287 следует, что среднее значение функции φ на поверхности сферы с радиусом r и с произвольным центром O удовлетворяет уравнению вида (3). Поэтому будем иметь, пользуясь обозначениями § 287,

$$\bar{\varphi} = \frac{\sin kr}{kr}\varphi_0, \tag{8}$$

где φ_0 — значение функции φ в точке O. При этом предполагается, что φ не имеет особенностей внутри сферы, к которой относится r [1]), ср. § 38.

Возвращаясь к случаю симметрии, заметим, что решение (4) может быть также написано в виде

$$\varphi = C\frac{e^{-ikr}}{kr} + D\frac{e^{ikr}}{kr}. \tag{9}$$

Принимая во внимание равенство (13) § 285, тотчас же видим, что формула

$$\varphi = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \tag{10}$$

представляет систему расходящихся волн, происходящую от единичного источника в начале координат.

Чтобы вычислить энергию, излучаемую изолированным источником в свободное пространство, мы воспользуемся выражением в действительной форме

$$4\pi\varphi = \frac{\cos k(ct-r)}{r}. \tag{11}$$

Работа в единицу времени, произведенная над массою жидкости, находящеюся вне поверхности сферы радиуса r, равна

$$\left(p_0 + \varrho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)4\pi r^2. \tag{12}$$

---

[1]) Этот результат был дан Г. Вебером, Crelle, LXIX (1868).

Если мы подставим сюда значение φ из формулы (11) и возьмем средние значения тригонометрических членов, то получим

$$\frac{\varrho_0 k^2 c}{8\pi}. \tag{13}$$

Этот результат можно также получить из § 280, так как сферические волны с возрастанием радиуса приближаются по форме к плоским волнам [1]).

Подобным же образом второй член в формуле (9) представляет сток, в котором энергия поглощается в количестве (13) в единицу времени. Однако, представление о стоке энергии является для акустики очень искусственным и в действительности не применяется.

Потенциал скоростей диполя можно получить на основании § 56. Так, например, если ось симметрии совпадает с осью x, то мы можем написать

$$4\pi\varphi = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-ikr}}{r} \tag{14}$$

или в действительной форме

$$4\pi\varphi = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\cos k(ct-r)}{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{\cos k(ct-r)}{r}\cos\theta, \tag{15}$$

где θ — угол наклона радиуса-вектора r к оси x. Для больших значений kr имеем приближенное равенство

$$4\pi\varphi = -\frac{k\sin k(ct-r)}{r}\cos\theta. \tag{16}$$

Среднее значение энергии, излучаемой в единицу времени, тогда будет равно

$$\frac{\varrho_0 k^2 c}{24\pi}. \tag{17}$$

Это выражение можно получить или способом, указанным выше, или из теории плоских волн.

Напомним здесь, что эти вычисления имеют силу только в случае изолированного источника в свободном пространстве. Присутствие же препятствий в значительной степени может изменить приведенные результаты. Например, в случае простого источника, находящегося вблизи от бесконечной плоской стенки, амплитуда колебаний в любой точке удваивается вследствие отражения, и явление протекает таким образом, как если бы это отражение приходило от зеркального изображения источника, между тем как излучение энергии оказывается увеличившимся в четыре раза. Наоборот, источник, со всех сторон окруженный твердыми стенками, не производит вообще никакой работы, так как энергия газа остается постоянной.

[1]) Величина a § 280 в этом случае равна $\frac{1}{4\pi cr}$. Подставляя это значение в формулу (9) § 280 и умножая на $4\pi r^2$, получим выражение (13).

§ 290. Общая теория функций, удовлетворяющих уравнению

$$(\Delta + k^2)\varphi = 0, \tag{1}$$

была развита Гельмгольцем [1]), Рэлеем [2]) и другими авторами [3]). Она во многих отношениях аналогична теории уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$; в самом деле, последнее уравнение есть специальный случай, который получается, если положить $c = \infty$ или $\sigma = 0$.

Типичное решение уравнения (1), из которого можно получить все другие, есть решение, соответствующее единичному источнику, именно

$$\varphi = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}, \tag{2}$$

где r обозначает расстояние от источника.

На основании теоремы Грина получается следующее: если φ, φ' — две произвольные функции, конечные и однозначные вместе со своими первыми и вторыми производными в какой-либо конечной области, то имеем

$$\iint\left(\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n} - \varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS = \iiint(\varphi'\Delta\varphi - \varphi\Delta\varphi')\,dx\,dy\,dz. \tag{3}$$

Если, кроме того, как φ, так и φ' будут удовлетворять уравнению (1), то правая часть формулы (3) будет исчезать, и мы получим

$$\iint\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,dS = \iint\varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS. \tag{4}$$

Отсюда тем же способом [4]), как в § 57, мы получаем формулу

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi}\iint\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS + \frac{1}{4\pi}\iint\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dS, \tag{5}$$

которая выражает значение φ в произвольной точке P области через значения φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ на границе. Буква r обозначает здесь расстояния отдельных элементов поверхности от точки P, и мы видим, что значение φ получается таким, как если бы оно соответствовало некото-

---

[1]) Helmholtz, Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden, Crelle, LVII, 1 (1859) (Wiss. Abh., II, 303).

[2]) Rayleigh, Theorie of Sound, II.

[3]) Относительно новой математической теории см. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2u = 0$, Лейпциг, 1891 и Sommerfeld, см. выше стр. 83.

[4]) Это показывает, что мы полагаем $\varphi' = \frac{e^{-ikr}}{r}$, где r обозначает расстояние от некоторой постоянной точки, и исключаем эту точку (если она лежит в рассматриваемой области) при помощи некоторой сферы малого радиуса.

рому распределению простых источников и диполей [1]) на граничной поверхности.

Если далее r' обозначает расстояние от точки P', лежащей вне области, то имеем

$$0 = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{e^{-ikr'}}{r'}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS + \frac{1}{4\pi}\iiint \varphi\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{e^{-ikr'}}{r'}\,dS. \qquad (6)$$

Следует заметить, что, как и в § 58, какое-то частное распределение источников на границе, выражаемое формулой (5), представляет только одно из бесконечного числа возможных распределений, которые дают точно такое же значение функции φ для *внутренних* точек области. Так, например, в результате сложения равенств (5) и (6) мы получим другое подобное же распределение, которое, кроме того, может быть изменено бесчисленным множеством способов путем изменения положения точки P' [2]).

Формулы (5) и (6) сохраняют также силу для бесконечной области, ограниченной изнутри одной или несколькими замкнутыми поверхностями, в предположении, что функция φ с увеличением расстояния R от начала приближается к виду

$$\varphi = C\frac{e^{-ikR}}{R}. \qquad (7)$$

Эта формула выражает то обстоятельство, что в бесконечности мы не имеем никаких источников звука.

Можно *при некоторых условиях* несколько далее провести аналогию с теорией обыкновенного потенциала и выразить значение φ в произвольной точке заданной области при помощи распределения только одних простых источников или только одних диполей по границе; в самом деле имеем

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{e^{-ikr}}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \frac{\partial\varphi'}{\partial n'}\right)dS, \qquad (8)$$

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi}\iint (\varphi - \varphi')\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dS, \qquad (9)$$

где вспомогательная функция φ' вместе со своими первыми и вторыми производными предполагается конечной и удовлетворяющей уравнению (1) внутри остальной области, являющейся внешней и заданной, тогда как на границе в зависимости от случая должно быть

$$\varphi' = \varphi \quad \text{или} \quad \frac{\partial\varphi'}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}. \qquad (10)$$

Также предполагается, что φ' стремится асимптотически к виду (7), когда область, к которой она относится, расширяется до бесконеч-

[1]) Helmholtz, см. выше, стр. 623.
[2]) Larmor, см. выше, стр. 82.

ности. Нет необходимости доказывать это, так как это доказательство повторяло бы ход рассуждений § 58.

Было бы, однако, неправильно считать, что так же, как в случае обыкновенного потенциала, необходимо должна существовать функция φ, которая удовлетворяет уравнению (1) внутри заданной конечной области и в то же время удовлетворяет условию, что φ или $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ на границе должны принимать *произвольные* заданные значения. Хотя приведенная теорема существования *обычно* имеет место, однако, она теряет силу для ряда определенных значений k, отвечающих нормальным колебаниям воздушной массы, заполняющей некоторую область, если граничные условия имеют вид соответственно $\varphi=0$ или $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$.

На том же основании формулы (8) и (9) нельзя применять без каких-либо ограничений к случаю бесконечной области, так как определение вспомогательной функции может оказаться невозможным.

Для иллюстрации этих результатов положим, что внутри шара с радиусом a и с центром в начале O мы имеем

$$\varphi=\frac{\sin kR}{R}, \tag{11}$$

где R обозначает теперь расстояние от точки O. Если для внешней области положим

$$\varphi'=\frac{e^{-ik(R-a)}}{R}-\sin ka, \tag{12}$$

то условия применимости формулы (8) будут выполнены, и мы находим

$$\varphi=\frac{ke^{ika}}{4\pi a}\iint\frac{e^{-ikr}}{r}\,dS. \tag{13}$$

Легко показать a posteriori, что при $R<a$ эта формула равносильна формуле (11), а при $R>a$ — формуле (12).

Найдем теперь поверхностное распределение простых источников, которое дает для пространства, лежащего вне сферы, значение φ в виде

$$\varphi=\frac{e^{-ikR}}{R}. \tag{14}$$

Значение φ' для внутренней области, совпадающее на границе с значением (14), равно

$$\varphi'=\frac{e^{-ika}}{\sin ka}\cdot\frac{\sin kR}{R}, \tag{15}$$

и мы получаем

$$\varphi'=\frac{k}{4\pi a\sin ka}\iint\frac{e^{-ikr}}{r}\,dS. \tag{16}$$

Однако определение φ' становится невозможным, когда k есть корень уравнения $\sin ka=0$. В самом деле, оказывается, что в этом случае равномерное распределенне простых источников по поверхности шара с радиусом a не оказывает никакого действия на внешние точки.

Частный случай будем иметь, когда рассматриваемая область является полубесконечной, будучи ограничена плоскостью. Предположим, что это будет область на положительной стороне от плоскости $x=0$. Если мы примем $\varphi'(-x, y, z)=\varphi(x, y, z)$, то на границе $\varphi'=\varphi$ и $\frac{\partial\varphi'}{\partial n}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, так что формула (8) приводится к виду

$$\varphi_P=-\frac{1}{2\pi}\iint\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS. \tag{17}$$

С другой стороны, если мы предположим $\varphi'(-x, y, z)=-\varphi(x, y, z)$, то на границе $\varphi'=-\varphi$, $\frac{\partial\varphi'}{\partial n}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ и, следовательно,

$$\varphi_P=\frac{1}{2\pi}\iint\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dS. \tag{18}$$

Если все размеры рассматриваемой области малы по сравнению с длиной волны, то мы можем в формуле (5) приближенно положить $e^{-ikr}=1$, и формула, как в § 57, принимает вид

$$\varphi_P=-\frac{1}{4\pi}\iint\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS+\frac{1}{4\pi}\iint\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS. \tag{19}$$

Таким образом, для расстояний, малых по сравнению с длиной волны, можно вычислять изменения φ так, как если бы удовлетворялось уравнение $\Delta\varphi=0$. Это правило оказывается очень полезным для приближенного решения различных акустических задач (ср. §§ 299 300).

Заметим, наконец, что формула (8) после введения множителя, зависящего от времени, может быть написана в виде

$$\varphi_P=-\frac{1}{4\pi}\iint\frac{e^{i\sigma\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS+\frac{1}{4\pi}\iint\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{i\sigma\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}\,dS. \tag{20}$$

Этот результат можно обобщить, применяя теорему Фурье о двойном интеграле, которую мы можем представить в виде

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)\,e^{i\sigma(t-\tau)}\,dt. \tag{21}$$

Обозначая через $\varphi(t)$ значение φ в точке (x, y, z) на границе области в момент t и через $f(t)$ соответствующее значение $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, получим значение φ для внутренней точки P

$$\varphi_P(t)=-\frac{1}{4\pi}\iint\frac{f\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\,dS+\frac{1}{4\pi}\iint\frac{\partial}{\partial n}\frac{\varphi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\,dS, \tag{22}$$

причем в последнем члене пространственное диференцирование относится только к явно входящему r. Эта замечательная формула выражает значение φ в точке P для произвольного момента времени через предшествующие значения φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ в точках поверхности, заключающей внутри себя точку P; она была получена первоначально Кирхгофом[1]) другим путем из общего уравнения (4) § 287.

Некоторые авторы считали, что эта формула содержит точную математическую формулировку „принципа Гюйгенса" в акустике; однако, как мы это заметили уже в связи со специальным случаем (5), представление функции таким способом оказывается в значительной степени произвольным и неопределенным.

§ 291. Авторы, названные на стр. 623, исследовали также решение уравнения

$$(\Delta + k^2)\varphi = \Phi, \tag{1}$$

где Φ обозначает данную функцию от x, y, z, исчезающую вне некоторой конечной области.

Решение это может быть получено на основании аналогии с теорией обыкновенного потенциала притяжения. Уравнению удовлетворяет функция

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi}\iiint \Phi' \frac{e^{-ikr}}{r}\,dx'\,dy'\,dz'; \tag{2}$$

здесь Φ'—значение Φ в точке (x', y', z'), r—расстояние этой точки от точки P, для которой отыскивается значение φ, и интеграция распространяется на область Σ. Если точка P лежит вне области Σ, то непосредственно видно, что правая часть формулы (2) представляет собой потенциал простых источников, распределенных в области Σ с объемной плотностью — Φ. Чтобы проверить решение для случая, когда точка P лежит внутри области Σ, разделим область Σ на две части Σ_1 и Σ_2, из которых одна, например, Σ_2, пусть содержит внутри себя точку P и по своим линейным размерам в конце концов может сделаться бесконечно малой (по сравнению с k^{-1}). Так как P лежит вне Σ_1, то мы должны в интеграле (2) принимать во внимание только те элементы, которые относятся к пространству внутри Σ_2. Для этих элементов получаем после разложения в ряд показательной функции

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\Phi'}{r}dx', dy'\,dz' + \frac{ik}{4\pi}\iiint \Phi'\,dx'\,dy'\,dz' + \ldots \tag{3}$$

Как и в случае обыкновенного потенциала, первый член удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = \Phi$, но значение его может сделаться как

[1]) Kirchhoff, Zur Theorie der Lichtstrahlen, Berl. Ber., 1882, стр. 641 (Ges. Abh., II, 22). Некоторые другие доказательства были даны: сравнить Larmor, см. выше стр. 82 и Love, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 1, 37 (1903).

угодно малым. Второй и следующий члены не дают при предельном переходе никаких прибавок к значению φ или $\Delta\varphi$.

Можно показать, что функция (2) есть единственное решение уравнения (1), годное для всех точек пространства и исчезающее в бесконечности. В случае ограниченной области мы можем присоединить еще произвольное решение уравнения $(\Delta + k^2)\varphi = 0$; благодаря этому оказывается возможным удовлетворить граничным условиям.

Мы можем воспользоваться изложенной здесь теорией, чтобы определить эффект, производимый действующими на среду периодическими внешними силами (X, Y, Z). Уравнения движения получаются в результате очевидного обобщения уравнений (4) и (5) § 277; таким способом мы получаем уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial s}{\partial x} + X, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial s}{\partial y} + Y, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial s}{\partial z} + Z \tag{4}$$

вместе с уравнением

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right). \tag{5}$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \Delta s - \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \tag{6}$$

или, если принять в качестве множителя, зависящего от времени, e^{ikct}.

$$(\Delta + k^2)\, s = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right). \tag{7}$$

Для случая неограниченной области решение принимает вид

$$s = -\frac{1}{4\pi c^2} \iiint \left(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'}\right) \frac{e^{-ikr}}{r}\, dx'\, dy'\, dz', \tag{8}$$

причем предполагается, что X, Y, Z исчезают для расстояний от начала, превосходящих некоторое определенное конечное значение. Так как

$$\frac{\partial}{\partial x'} r^{-1} = -\frac{\partial}{\partial x} \cdot r^{-1} \text{ и т. д.},$$

то формула (8) принимает следующий вид:

$$s = \frac{1}{4\pi c^2} \iiint \left(X' \frac{\partial}{\partial x'} + Y' \frac{\partial}{\partial y'} + Z' \frac{\partial}{\partial z'}\right) \frac{e^{-ikr}}{r}\, dx'\, dy'\, dz'. \tag{9}$$

Обращаясь к уравнениям (4), мы видим, что движение *вне* области, в которой действуют силы, свободно от вихрей и имеет потенциал скоростей

$$\varphi = -\frac{ics}{k}; \tag{10}$$

такой потенциал скоростей можно получить в результате некоторого распределения диполей.

Если мы предположим, например, что силы действуют на бесконечно малую область около начала и параллельны оси x, и обозначим

$$F = \varrho \iiint X'\,dx'\,dy'\,dz', \tag{11}$$

то получим

$$\varphi = -\frac{iF}{4\pi k c \varrho}\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-ikr}}{r}, \tag{12}$$

где r обозначает расстояние от начала. Сосредоточенная сила Fe^{ikct} таким образом эквивалентна диполю интенсивности $\frac{iF}{kc\varrho}$.

Из формул (9) и (11) мы получаем, вводя опять множитель, зависящий от времени,

$$s = \frac{F}{4\pi\varrho c^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{i\sigma\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}, \tag{13}$$

что соответствует силе $Fe^{i\sigma t}$. Этот результат можно так обобщить, что он окажется годным для произвольного закона силы как функции от времени. Если мы обозначим этот закон через $F(t)$, то получим

$$s = \frac{1}{4\pi\varrho c^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}. \tag{14}$$

Приложения сферических функций.

§ 292. Если граничные условия относятся к сферическим поверхностям, то решение уравнения

$$(\Delta + k^2)\varphi = 0 \tag{1}$$

можно получить следующим способом.

Мы можем предположить, что значение φ на произвольной сферической поверхности радиуса r с центром в начале координат разлагается в ряд поверхностных сферических функций, коэфициенты которого суть функции r. Мы можем, следовательно, написать

$$\varphi = \sum R_n \varphi_n, \tag{2}$$

где φ_n есть объемная сферическая функция степени n и R_n есть функция только r.

Тогда будем иметь

$$\Delta(R_n\varphi_n) = \Delta R_n \varphi_n + 2\left(\frac{\partial R_n}{\partial x}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \frac{\partial R_n}{\partial y}\frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + \frac{\partial R_n}{\partial z}\frac{\partial \varphi_n}{\partial z}\right) + R_n \Delta\varphi_n$$

или

$$\Delta(R_n\varphi_n) = \Delta R_n \varphi_n + \frac{2}{r}\frac{dR_n}{dr}\left(x\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi_n}{\partial z}\right) + R_n\Delta\varphi_n, \tag{3}$$

но согласно определению объемной сферической функции

$$\Delta\varphi_n = 0$$

и

$$x\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = n\varphi_n.$$

Отсюда следует

$$\Delta(R_n\varphi_n)=\left(\Delta R_n+\frac{2n}{r}\frac{dR_n}{dr}\right)\varphi_n=\left(\frac{d^2R_n}{dr^2}+\frac{2(n+1)}{r}\frac{dR_n}{dr}\right)\varphi_n. \quad (4)$$

Если подставить значение φ из формулы (2) в уравнение (1), то отдельные члены в выражении (2) должны для каждого n удовлетворять уравнению независимо один от другого, а это дает

$$\frac{d^2R_n}{dr^2}+\frac{2(n+1)}{r}\frac{dR_n}{dr}+k^2R_n=0. \quad (5)$$

Это уравнение можно интегрировать степенными рядами. Если мы положим

$$R_n=\sum C_m(kr)^m,$$

то найдем следующую рекуррентную формулу

$$m(2n+1+m)C_m+C_{m-2}=0.$$

Это дает два ряда, расположенных по возрастающим степеням r, из которых один начинается со значения $m=0$, а другой со значения $m=-2n-1$; таким образом, имеем

$$R_n=A_n\left(1-\frac{k^2r^2}{2(2n+3)}+\frac{k^4r^4}{2\cdot4(2n+3)(2n+5)}-\dots\right)+$$
$$+B_nr^{-2n-1}\left(1-\frac{k^2r^2}{2(1-2n)}+\frac{k^4r^4}{2\cdot4(1-2n)(3-2n)}-\dots\right),$$

где A_n, P_n — произвольные постоянные. Если теперь мы положим $\varphi_n=r^nS_n$, так что S_n будет поверхностной сферической функцией порядка n, то общее решение уравнения (1) можем написать в виде

$$\varphi=\sum\{A_n\psi_n(kr)+B_n\Psi_n(kr)\}r^nS_n, \quad (6)$$

где

$$\left.\begin{aligned}\psi_n(\zeta)&=\frac{1}{1\cdot3\cdot\dots(2n+1)}\left(1-\frac{\zeta^2}{2(2n+3)}+\frac{\zeta^4}{2\cdot4(2n+3)(2n+5)}-\dots\right),\\ \Psi_n(\zeta)&=\frac{1\cdot3\dots(2n-1)}{\zeta^{2n+1}}\left(1-\frac{\zeta^2}{2(1-2n)}+\frac{\zeta^4}{2\cdot4(1-2n)(3-2n)}-\dots\right)\end{aligned}\right\} \quad (7)^1)$$

---

[1]) Этот способ обозначения уклоняется несколько от способа, примененного в книге Heine, Kugelfunktionen, 1, 82. Следует заметить, что формула (6) дает непосредственное доказательство предложения (8) § 289.

Функции (7) имеют следующую связь с функциями Бесселя дробного порядка:

$$\zeta^n\psi_n(\zeta)=\sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}}\,I_{n+1/2}(\zeta),$$

$$\zeta^n\Psi_n(\zeta)=(-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}}\,I_{-n-1/2}(\zeta).$$

Таблицы функций Бесселя порядка $\pm\frac{1}{2}$ $(2m+1)$, где m есть целое число, были составлены Лоттелем с единичным интервалом ζ; они воспроизведены в сборнике таблиц Jahnke und Emde и в руководстве Watson'a. Таблицы с коротким интервалом (с интервалом 0,2) были даны Динником в Archiv d. Math. u. Phys. (3) XX (1912).

Если движение в начале координат не будет иметь бесконечной скорости, то в формуле (6) следует удержать только первый член.

Функции ψ_n, Ψ_n можно представить также в конечном виде, именно следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\psi_n(\zeta) &= \left(-\frac{d}{\zeta\, d\zeta}\right)^n \frac{\sin\zeta}{\zeta},\\ \Psi_n(\zeta) &= \left(-\frac{d}{\zeta\, d\zeta}\right)^n \frac{\cos\zeta}{\zeta}.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Тождество этих выражений с разложениями (7) легко можно показать, если разложить $\sin\zeta$, $\cos\zeta$ в ряды и выполнить дифференцирования. В качестве частных случаев имеем

$$\left.\begin{aligned}\psi_0(\zeta) &= \frac{\sin\zeta}{\zeta}, \quad \psi_1(\zeta) = \frac{\sin\zeta}{\zeta^2} - \frac{\cos\zeta}{\zeta},\\ \psi_2(\zeta) &= \left(\frac{3}{\zeta^3} - \frac{1}{\zeta}\right)\sin\zeta - \frac{3\cos\zeta}{\zeta^2}.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Формулы (6) и (8) показывают, что общее решение уравнения

$$\frac{d^2R_n}{d\zeta^2} + \frac{2(n+1)}{\zeta}\,\frac{dR_n}{d\zeta} + R_n = 0, \tag{10}$$

т. е. уравнения, которое получится, если написать ζ вместо kr в уравнении (5), имеет вид

$$R_n = \left(\frac{d}{\zeta\, d\zeta}\right)^n \frac{Ae^{i\zeta} + Be^{-i\zeta}}{\zeta}. \tag{11}$$

Этот результат можно легко проверить; если R_n есть какое-либо решение уравнения (10), то мы видим, что соответствующее уравнение для R_{n+1} удовлетворится функцией вида

$$R_{n+1} = \frac{dR_n}{\zeta\, d\zeta},$$

и после повторного применения этого приема окажется, что уравнению (10) удовлетворит функция

$$R_n = \left(\frac{d}{d\zeta}\right)^n R_0, \tag{12}$$

где R_0 есть решение уравнения

$$\frac{d^2(\zeta R_0)}{d\zeta^2} + \zeta R_0 = 0,$$

а именно

$$R_0 = \frac{Ae^{i\zeta} + Be^{-i\zeta}}{\zeta}. \tag{13}$$ [1])

---

[1]) Приведенный здесь анализ, часто применяемый в математической физике, впервые был дан Лапласом, Sur la diminution de la durée du jour par le refroidissement de la Terre, Conn. des Temps за 1823, стр. 245 (1820) (Méc. Céleste, 1 кн., IV гл.), и с тех пор в том или другом виде применялся различными авторами. Исторические данные можно найти у Glaisher'a, On Riccatis Equation and its transformation, Phil. Trans., 1881; там эта задача рассматривается как относящаяся к теории дифференциальных уравнений.

Для каждой комбинации функций $\psi_n(\zeta)$, $\Psi_n(\zeta)$, пригодной для представления *расходящихся* волн, удобно будет ввести особое обозначение. Мы положим

$$f_n(\zeta)=\left(-\frac{d}{\zeta\,d\zeta}\right)^n\frac{e^{-i\zeta}}{\zeta}=\Psi_n(\zeta)-i\psi_n(\zeta). \tag{14}$$

Как частные случаи приведем здесь

$$\left.\begin{aligned} f_0(\zeta)&=\frac{e^{-i\zeta}}{\zeta}, \qquad f_1(\zeta)=\left(\frac{i}{\zeta^2}+\frac{1}{\zeta^3}\right)e^{-i\zeta},\\ f_2(\zeta)&=\left(-\frac{1}{\zeta^2}+\frac{3i}{\zeta^3}+\frac{3}{\zeta^4}\right)e^{-i\zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Общая формула имеет вид

$$f_n(\zeta)=\frac{i^n e^{-i\zeta}}{\zeta^{n+1}}\left\{1+\frac{n(n+1)}{2i\zeta}+\frac{(n-1)\,n(n+1)(n+2)}{2\cdot4\,(i\zeta)^2}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot2\cdot3\ldots2n}{2\cdot4\cdot6\ldots2n\,(i\zeta)^n}\right\}. \tag{16}$$

Эту формулу можно получить посредством „полной индукции“ или из дифференциального уравнения, которому должна удовлетворять функция $f_n(\zeta)$ [1]).

Если мы приравняем друг другу отдельно действительную и мнимую части, то на основании формулы (14) получим для $\psi_n(\zeta)$, $\Psi_n(\zeta)$ выражения через $\cos\zeta$ и $\sin\zeta$; коэфициентами в этих выражениях будут рациональные функции от ζ.

Все функции $\psi_n(\zeta)$, $\Psi_n(\zeta)$, $f_n(\zeta)$ удовлетворяют рекуррентным формулам вида

$$\psi_n'(\zeta)=-\zeta\psi_{n+1}(\zeta), \tag{17}$$

$$\zeta\psi_n'(\zeta)+(2n+1)\psi_n(\zeta)=\psi_{n-1}(\zeta). \tag{18}$$

Формулы эти часто оказываются полезными для понижения порядка функций.

Мы имеем также соотношение

$$\left\{\psi_n'(\zeta)\Psi_n(\zeta)-\psi_n(\zeta)\Psi_n'(\zeta)\right\}\zeta^{2n+2}=1 \tag{19}$$

или эквивалентное ему соотношение

$$\left\{\psi_{n-1}(\zeta)\Psi_n(\zeta)-\psi_n(\zeta)\Psi_{n-1}(\zeta)\right\}\zeta^{2n+1}=1. \tag{20}$$

Из формул (17) и (18) видно, что левая часть равенства (19) не меняет своего значения, если написать $n-1$ вместо n, и потому для доказательства будет достаточно исследовать случай $n=0$. Формулу (19) можно также вывести из формулы (4) § 290, если рас-

[1]) Ср. Stokes, см. ниже, стр. 636. Обозначения там применяются другие.

смотреть область, заключенную между двумя концентрическими шаровыми поверхностями [1]). Если подставить в названную формулу

$$\varphi = \Psi_n(kr)\, r^n S_n, \quad \varphi' = \psi_n(kr)\, r^n S_n, \tag{21}$$

то оказывается, что выражение

$$\{\psi_n'(kr)\Psi_n(kr) - \psi_n(kr)\Psi_n'(kr)\}\, r^{2n+2} \int\int S_n^2\, d\tilde{\omega}, \tag{22}$$

где интегрирование распространено на все телесные элементарные углы $\delta\tilde{\omega}$ с вершинами в начале координат, не зависит от r. Полагая r бесконечно малым, мы опять придем к формуле (19).

§ 293. Простое применение предшествующих вычислений мы встречаем при исследовании колебаний воздуха, заключенного в шаровой оболочке.

1. Рассмотрим прежде всего свободные колебания в случае твердых границ. Так как движение в начале координат конечно, то имеем

$$\varphi = A\psi_n(kr)\, r^n S_n e^{i\sigma t} \tag{1}$$

с граничным условием

$$ka\psi_n'(ka) + h\psi_n(ka) = 0, \tag{2}$$

где a есть радиус. Этим уравнением определяются допустимые значения k и вместе с тем также $\sigma\,(=kc)$.

Из формул (8) § 292 следует, что это уравнение всегда приводится к виду

$$\operatorname{tg} ka = F(ka), \tag{3}$$

где $F(ka)$ есть рациональная алгебраическая функция. Корни вычисляются тогда без затруднений или при помощи рядов, или посредством способа, данного Фурье [2]).

В случае чисто радиальных колебаний ($n=0$) мы получаем

$$\varphi = A\frac{\sin kr}{kr}\, e^{i\sigma t} \tag{4}$$

с граничным условием, определяющим частоту нормальных колебаний,

$$\operatorname{tg} ka = ka. \tag{5}$$

Корни этого уравнения, встречающиеся в различных физических задачах, легче всего можно вычислить посредством ряда [3]). Шверд [4]) получил для первых корней следующие значения

$$\frac{ka}{\pi} = 1{,}4303,\ 2{,}4590,\ 3{,}4709,\ 4{,}4774,\ 5{,}4818,\ 6{,}4844. \tag{6}$$

Эти значения приближаются к виду $m+\frac{1}{2}$, где m — целое число, и представляют отношение $\frac{2a}{\lambda}$ диаметра шара к длине волны. Если мы возьмем обратные значения, то найдем

$$\frac{\lambda}{2a} = 0{,}6992,\ 0{,}4067,\ 0{,}2881,\ 0{,}2233,\ 0{,}1824,\ 0{,}1542. \tag{7}$$

---

[1]) Cp. Rayleigh, Theory of Sound, § 327.

[2]) Fourier, Théorie analytique de la Chaleur, Париж, 1822, § 286.

[3]) Euler, Introductio in Analysin Infinitorum, Лозанна, 1748, II, 319; Rayleigh, Theory of Sound, § 207.

[4]) Приведено в книге Verdet, Leçons d'Optique Physique, Париж, 1869—1870, I, 266.

В случае второго и следующих корней уравнения (5) положенне сферических узлов $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0\right)$ определяется корнями низшего порядка. Так, например, прн втором нормальном колебании имеется один сферический узел, радиус которого равен

$$\frac{r}{a}=\frac{1{,}4303}{2{,}4590}=0{,}5817.$$

В случае $n=1$, если мы направим ось x по оси сферической функцни S_1 и положим $x=r\cos\theta$, будем иметь

$$\varphi=A\left(\frac{\sin kr}{k^2r^2}-\frac{\cos kr}{kr}\right)\cos\theta\cdot e^{i\sigma t}, \tag{8}$$

и уравнение (2) получнт тогда вид

$$\operatorname{tg} ka=\frac{2ka}{2-k^2a^2}\,. \tag{9}$$

Корень, равный нулю, значения не имеет. Ближайший корень дает для отношения диаметра к длине волны значение

$$\frac{ka}{\pi}=0{,}6625,$$

а для корней более высокого порядка значение этого отношения приближается соответственно к целым числам 2, 3, 4, ... В случае наименьшего корня, если возьмем обратное значение, будем иметь

$$\frac{\lambda}{2a}=1{,}509.$$

При этом, самом медленном из всех нормальных колебаний, воздух движется до некоторой степени таким же образом, как в закрытой с обоих концов трубе. В случае корней более высокого порядка корни низшего порядка будут давать положения сферических узлов $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0\right)$. Относительно дальнейших подробностей этой задачи мы отсылаем читателя к исследованиям Рэлея [1]).

2. Чтобы определить движение воздуха, заключенного в замкнутый сосуд, если это движение вызвано колебанием граничной поверхности в направлении нормалей, например, по закону

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=S_n e^{i\sigma t}, \tag{10}$$

положим

$$\varphi=A\psi_n(kr)\,r^n S_n e^{i\sigma t}; \tag{11}$$

тогда из граничного условия получим

$$A\left\{ka\psi_n'(ka)+n\psi_n(ka)\right\}a^{n-1}=1,$$

и, следовательно,

$$\varphi=\frac{\psi_n(kr)}{ka\psi_n'(ka)+n\psi_n(ka)}\,a\left(\frac{r}{a}\right)^n S_n e^{i\sigma t}. \tag{12}$$

Как и следовало ожидать, это выражение становится бесконечно большим, когда ka есть корень уравнення (2), т. е. всегда, когда период заданного на

---

[1]) Rayleigh, On the Vibrations of a Gas contained within a Rigid Spherical Envelope, Proc. Lond. Math. Soc. (1), IV, 93 (1872); Theory of Sound, § 331.

границе колебания совпадает с периодом свободного колебания, соответствующего сферической функции того же порядка n.

Если мы положим $ka=0$, то придем к случаю несжимаемой жидкости. Формула (12) приводится в этом случае, как и в § 91, к виду

$$\varphi=\frac{a}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n S_n e^{i\sigma t}. \tag{13}$$

Важно обратить внимание на то, что этот результат в качестве уже приближенного имеет место и в случае газа, когда ka мало, т. е. всегда, когда длина волны $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$, соответствующая действительному периоду, велика по сравнению с окружностью сферы. Мы имеем здесь пример общего закона, установленного в § 290; ниже (§§ 299, 300) этот закон будет использован более широко.

3. Чтобы определить движение газа, который заключен в пространстве, ограниченном двумя концентрическими шаровыми поверхностями, мы можем воспользоваться формулой (6) § 292 во всем ее объеме. Интересен только тот случай, когда оба радиуса приблизительно равны; однако, этот случай может быть легче исследован непосредственно [1]).

Уравнение $(\Delta+k^2)\varphi=0$ в полярных координатах r, θ, ω принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right\}+\frac{1}{1+\mu^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}\right]+k^2\varphi=0, \tag{14}$$

где $\mu=\cos\theta$. Если теперь $\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0$ при $r=a$ и $r=b$, причем a и b приблизительно равны, то мы можем совершенно пренебречь радиальным движением, так что уравнение приведется к виду

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right\}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}+k^2a^2\varphi=0. \tag{15}$$

Оказывается, точно так же как в § 199, что единственные решения, конечные на всей поверхности шара, относятся к типу

$$\varphi \text{ пропорционально } S_n, \tag{16}$$

где S_n — сферическая функция целого порядка n и соответственные значения k даны формулой

$$k^2a^2=n(n+1). \tag{17}$$

При самом медленном колебании ($n=1$) газ движется через экватор функции S_1 то в одну, то в другую сторону, причем в крайних фазах колебания газ сгущается на одном полюсе и разрежается на другом. Так как в этом случае $ka=\sqrt{2}$, то для соответствующей длины волны оказывается $\frac{\lambda}{2a}=2{,}221$.

Для ближайшего следующего колебания ($n=2$) вид колебаний зависит от типа сферической функции S_2. Если эта функция есть зональная сферическая функция, то экватор будет узловой линией. Частота определяется из равенства $ka=\sqrt{6}$ или $\frac{\lambda}{2a}=1{,}283$.

---

[1]) Rayleigh, Theory of Sound, § 233. Прямое решение принадлежит Chree, Mess. of Math., XV, 20 (1866); оно основывается на формуле (19) § 292.

§ 294. Рассмотрим теперь распространение волн в неограниченной среде от поверхности шара *наружу* [1]).

Если на поверхности ($r=a$) задана нормальная скорость

$$\dot{r}=S_n e^{i\sigma t}, \tag{1}$$

то соответствующее решение уравнения $(\Delta+k^2)\varphi=0$ в обозначениях § 292 будет иметь вид

$$\varphi=C_n f_n(kr)\, r^n S_n e^{i\sigma t}. \tag{2}$$

Условие

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=S_n e^{i\sigma t}, \tag{3}$$

которое должно быть выполнено на поверхности шара ($r=a$), дает

$$C_n=-\frac{1}{\left\{ka f_n'(ka)+n f_n(ka)\right\} a^{n-1}}. \tag{4}$$

На расстояниях r, которые велики по сравнению с длиной волны $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$, будем иметь приближенно

$$f_n(kr)=\frac{i^n e^{ikr}}{(kr)^{n+1}}, \tag{5}$$

так что формула (2) приобретет вид

$$\varphi=\frac{i^n C_n}{k^{n+1}}\,\frac{e^{ik(ct-r)}}{r}\,S_n \tag{6}$$

или в действительной форме

$$\varphi=\frac{|C_n|}{k^{n+1}}\,\frac{\cos k(ct-r+\varepsilon)}{r}\,S_n. \tag{7}$$

Поток энергии изнутри наружу, отнесенный к единице времени, равен

$$-\int\int p\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,r^2\,d\widetilde{\omega}, \tag{8}$$

где $d\widetilde{\omega}$ обозначает элемент телесного угла и r следует считать очень большим. Так как

$$p=p_0+\varrho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{9}$$

то в качестве среднего значения для выражения (8) получаем

$$\frac{1}{2}\,\frac{\varrho_0 c}{k^{2n}}\,|C_n^2|\int\int S_n^2\,d\widetilde{\omega}. \tag{10}$$

Этот результат можно было бы получить прямо из формулы (9) § 280, так как волны, которые распространяются в каком-нибудь определенном направлении, в конце концов будут плоскими.

---

[1]) Эта задача несколько другим способом была решена Стоксом: Stokes, On the Communication of Vibrations from a Vibrating Body to a surrounding Gas, Phil. Trans., 1868 [Papers, IV, 299].

Если $n>0$, то нормальная скорость в двух каких-либо областях поверхности шара $r=a$, разделенных узловой линией $S_n=0$, имеет противоположные фазы. Боковое движение воздуха вблизи от поверхности шара по направлению от тех мест, в которых воздух движется наружу, к тем местам, в которых он движется внутрь, в случае не слишком малой длины волны проявляет себя в том, что интенсивность возмущения в некотором удалении уменьшается по сравнению с той интенсивностью, которая должна была бы иметь место, если бы скорость повсюду была в одинаковых фазах; это действие будет тем более заметным, чем выше будет порядок n соответствующей сферической фуикции, так как в этом случае число частей, на которые поверхность шара разделяется узловыми линиями, будет больше. Кроме того, для той же сферической функции S_n и для определенной частоты $\frac{\sigma}{2\pi}$ влияние бокового движения будет очень быстро увеличиваться по мере возрастания скорости волны c, а, следовательно, по мере возрастания длины волны $\frac{2\pi}{k}$. Этим объясняется, почему колокол в воде звучит слабее, чем в воздухе [1]).

Чтобы иллюстрировать эти результаты, заметим следующее: если бы боковое движение воздуха было задержано большим количеством конусообразных перегородок, идущих по направлению радиусов неограниченно наружу, то выражение (10) нужно было бы заменить следующим

$$\frac{1}{2}\varrho_0 c\,|C_0|^2 \int\int S_n^2\, d\tilde{\omega}. \tag{11}$$

Отношение I_n этой величины к выражению (10) равно абсолютному значению количества

$$\frac{(ka)^{2n}\left\{kaf_n'(ka)+nf_n(ka)\right\}^2}{\left\{kaf_0'(ka)\right\}^2}. \tag{12}$$

Из данных в формулах (15) § 292 выражений для f_0, f_1, f_2 легко получаем

$$\left.\begin{aligned} I_0&=1,\\ I_1&=\frac{4+k^4a^4}{k^2a^2(1+k^2a^2)},\\ I_2&=\frac{81+9k^2a^2-2k^4a^4+k^6a^6}{k^4a^4(1+k^2a^2)}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ka	I_0	I_1	I_2
4	1	0,95588	0,87523
2	1	1	1,8625
1	1	2,5	44,5
0,5	1	13	1064,2
0,25	1	60,294	19650

Приведенные примеры вместе с некоторыми другими были даны Стоксом.

[1]) Stokes, см. выше.

Отношение скоростей переноса энергии для двух различных газов, находящихся в одинаковых условиях, равно абсолютному значению отношения

$$\frac{(k'a)^{2n-1}\left\{k'af_n'(ka)+nf_n(k'a)\right\}^2}{(ka)^{2n-1}\left\{kaf_n'(ka)+nf_n(ka)\right\}^2}, \tag{14}$$

причем штрихи у k относятся ко второму газу. Это выражение при помощи соотношения

$$\frac{\varrho_0 c}{\varrho_0' c'}=\frac{c'}{c}=\frac{k}{k'}$$

легко можно вывести из выражений (10) и (4), так как частота в обоих случаях должна быть одинаковой [1]). При $n=2$ отношение (14) принимает вид

$$\frac{(ka)^7(81+9k'^2a^2-2k'^4a^4+k'^6a^6)}{(k'a)^7(81+9k^2a^2-2k^4a^4+k^6a^6)}. \tag{15}$$

Если мы предположим, например, что два рассматриваемых нами газа суть кислород и водород, и положим $ka=0{,}5$, $k'a=0{,}125$, то найдем, что скорости распространения энергии по направлению изнутри наружу находятся приблизительно в отношении 16000 : 1 [2]).

§ 295. Случай $n=1$ предыдущего параграфа в особенности интересен с точки зрения теории маятника, так как он соответствует прямолинейному колебательному движению шара, рассматриваемого как твердое тело. Следует, однако, заметить, что отбрасывание членов второго порядка в уравнениях движения равносильно предположению, что амплитуда колебаний шара мала по сравнению с радиусом.

Для решения этой задачи едва ли необходимо обращаться к общей теории, так как движение жидкости будет таковым, как если бы оно было вызвано диполем (§ 289) в центре шара.

Мы предположим, что центр шара колеблется вдоль оси x со скоростью $U=ae^{i\sigma t}$, и положим

$$\varphi=C\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-ikr}}{r}=C\frac{d}{dr}\frac{e^{-ikr}}{r}\cdot\cos\theta, \tag{16}$$

причем $x=r\cos\theta$. Условие, что $-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=U\cos\theta$, для $r=a$ дает

$$C\frac{d^2}{da^2}\frac{e^{-ika}}{a}=-a, \tag{17}$$

откуда следует

$$C=\frac{(2-k^2a^2-2ika)\,aa^3e^{ika}}{4+k^4a^4}. \tag{18}$$

---

[1]) При этом предполагается также, что отношение γ удельных теплоемкостей для обоих газов одинаково.

[2]) Распределение энергии в пространстве вокруг колеблющегося шара было исследовано Дж. Е. Джоном (J. E. Jones), Proc. Lond. Math. Soc. (2), XX, 347 (1921). В области, непосредственно прилегающей к шару, энергия состоит главным образом из кинетической части, так как жидкость движется почти так, как если бы она была несжимаемой; ср. § 290. Эта область тем больше, чем ниже частота и чем выше порядок соответствующей сферической функции. Если мы рассмотрим всю систему волн, то найдем, что кинетическая энергия на конечную величину превышает потенциальную.

Результирующая давлений, действующих на шар, будет равна

$$X = -\int_0^{\pi} p \cos\theta \cdot 2\pi a^2 \sin\theta \, d\theta, \tag{19}$$

где p обозначает давление на наружную поверхность, именно,

$$p = p_0 + \varrho_0 \varphi = p_0 + i\sigma\varrho_0 C \frac{d}{da} \frac{e^{-ika}}{a} \cdot \cos\theta. \tag{20}$$

Если выполним интегрирование и подставим значение для C из формулы (18), то получим

$$X = -\frac{4}{3} \pi\varrho_0 a^3 \cdot \frac{2 + k^2a^2 - ik^3a^3}{4 + k^4a^4} \, i\sigma a e^{i\sigma t}. \tag{21}$$

Это можно написать в виде

$$X = -\frac{1}{3} \pi\varrho_0 a^3 \frac{2 + k^2a^2}{4 + k^4a^4} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{4}{3} \pi\varrho_0 a^3 \cdot \frac{k^3a^3}{4 + k^4a^4} \cdot \sigma U. \tag{22}$$ [1])

Если изменим знак у X, то получим внешнюю силу, которая должна быть приложена, чтобы поддерживать рассматриваемое простое гармоническое колебательное движение.

Первый член выражения (22) выглядит совершенно так, как если бы масса шара была увеличена на количество

$$\frac{2 + k^2a^2}{4 + k^4a^4} \cdot \frac{4}{3} \pi\varrho a^3, \tag{23}$$

второй же член такой, как если бы на шар действовала сила трения, пропорциональная скорости с коэфициентом пропорциональности

$$\frac{k^3a^3}{4 + k^4a^4} \cdot \frac{4}{3} \pi\varrho_0 a^3 \sigma. \tag{24}$$

В случае несжимаемой жидкости или в более общем случае, когда длина волны $\frac{2\pi}{k}$ велика по сравнению с окружностью большого круга шара, мы можем положить $ka = 0$. Приращение инерции будет равно тогда половине массы вытесненной жидкости, в то время как коэфициент трения будет равен нулю [2]), ср. § 92.

Коэфициент трения в каждом случае имеет высокий порядок отиосительно ka, так что колебания шара, окружность которого сравнительно мала по отношению к длине волны, лишь в малой степени будут подвержены влиянию этого „трения". Чтобы вычислить энергию, которая должна быть израсходована в единицу времени для возбуждения волн в окружающей среде, мы должны в формуле (22), которая должна теперь рассматриваться как уравнение между действительными величинами, умножить отвечающий трению член на U и взять среднее значение; таким способом мы находим для энергии выражение

$$\frac{2}{3} \pi\varrho_0 a^3 \cdot \frac{k^3a^3}{4 + k^4a^4} \cdot \sigma a^2. \tag{25}$$

---

[1]) Эта формула получена Рэлеем: Rayleigh, Theory of Sound, § 325. Другую трактовку задачи о колеблющемся шаре можно найти у Пуассона, Sur les mouvements simultanés d'un pendule et de l'air environnant. Mém. de l'Acad. des Sciences, XI, 521 (1832) и у Кирхгофа, Mechanik, Лекция XXIII.

[2]) Poisson, см. выше.

Другими словами: если ϱ_1 — средняя плотность шара, то энергия, расходуемая в течение одного периода, будет составлять от всей его энергии часть

$$2\pi\frac{\varrho_0}{\varrho_1}\cdot\frac{k^3a^3}{4+k^4a^4}. \tag{26}$$

§ 296. Способ, рассмотренный в § 292, можно также применить к вычислению отражения волн сферическим препятствием. Рассмотрим, в частности, случай системы падающих плоских волн, движущихся в направлении отрицательной оси x и заданных функцией

$$\varphi = e^{ikx}, \tag{1}$$

причем множитель, зависящий от времени, опущен.

Так как эта функция удовлетворяет уравнению $(\Delta + k^2)\varphi = 0$, не имеет особых точек на конечном расстоянии и симметрична по отношению к оси x, то она должна разлагаться в ряд, члены которого имеют вид

$$\psi_n(kr)\, r^n P_n(\cos\theta), \tag{2}$$

причем следует иметь в виду обозначения $x = r\cos\theta = r\mu$. Положим поэтому

$$e^{ikr\mu} = A_0\psi_0(kr) + A_1\psi_1(kr)\, krP_1(\mu) + \ldots + \\ + A_n\psi_n(kr)(kr)^n P_n(\mu) + \ldots \tag{3}$$

Если продифференцировать это выражение n раз по μ, то первые n членов исчезнут, так как $P_s(\mu)$ есть целая рациональная функция степени s. Разделяя результат на $(kr)^n$ и обращая внимание на то, что согласно (1) § 85 имеет место равенство

$$\frac{d^n}{d\mu^n}P_n(\mu) = 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1), \tag{4}$$

получим

$$i^n e^{ikr\mu} = 1\cdot 3\ldots(2n-1)\, A_n\psi_n(kr) + \ldots \tag{5}$$

Полагая теперь $r = 0$, получим на основании (7) § 292

$$A_n = (2n+1)\, i^n; \tag{6}$$

отсюда получается

$$e^{ikx} = \sum_0^\infty (2n+1)\,\psi_n(kr)(ikr)^n P_n(\mu). \tag{7}^{1)}$$

Это выражение представляет разложение по сферическим фуикциям потенциала скоростей источника, лежащего в бесконечности. Подобное же разложение для случая источника, лежащего на конечном расстоянии от

---

[1]) Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc. (1), IV, 253 (1873). См. также Heine, Kugelfunktionen, I, 82 (1878). Доказательство, приведенное выше, построено по образцу принадлежащего Гейне вывода формулы (13).

начала O, можно получить следующим способом. Обозначим через P' положение источника и через P точку, для которой отыскивается потенциал скоростей. Положим

$$OP = r,\ OP' = r',\ \varrho^2 = r^2 - 2rr'\mu + r'^2, \tag{8}$$

где $\mu = \cos POP'$. Если $r < r'$, то мы можем принять

$$f_0(k\varrho) = \sum_0^\infty A_n \psi_n(kr)\,(kr)^n\, P_n(\mu). \tag{9}$$

Если мы заставим изменяться только ϱ и μ, то будем иметь $\varrho\, d\varrho = -rr'\, d\mu$ и вместе с тем

$$-\frac{1}{k\varrho}\frac{d}{d(k\varrho)} = \frac{1}{kr\cdot kr'}\frac{d}{d\mu}. \tag{10}$$

Выполняя над формулою (9) эту операцию n раз, получим на основании формулы (14) § 292

$$f_n(k\varrho) = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{(kr')^n}\psi_n(kr)\,A_n + \ldots \tag{11}$$

Если положить теперь $r = 0$, то получится

$$A_n = (2n+1)\,(kr')^n\, f_n(kr') \tag{12}$$

и вместе с тем

$$f_0(k\varrho) = \sum_0^\infty (2n+1)\,(kr)^n\,(kr')^n\, f_n(kr')\psi_n(kr)\, P_n(\mu). \tag{13}$$

Если $r > r'$, то мы должны только в формуле (13) поменять местами r и r', так как ϱ по отношению к этим переменным входит симметрично. Поэтому имеем:

$$f_0(k\varrho) = \sum_0^\infty (2n+1)\,(kr)^n\,(kr')^n\,\psi_n(kr')\, f_n(kr)\, P_n(\mu). \tag{14}^{1}$$

Мы можем воспользоваться формулой (7), чтобы показать, как можно получить типичное решение уравнения

$$(\Delta + k^2)\,\varphi = 0, \tag{15}$$

конечное в начале, именно:

$$\varphi = \psi_n(kr)\, r^n S_n, \tag{16}$$

наложением плоских волн. Случай $n = 0$ был уже рассмотрен в § 289.

Вследствие свойств ортогональности сферических функций (§ 87) имеем

$$\iint e^{ikr\mu}\, S_n\, d\widetilde{\omega} = (2n+1)\,(ikr)^n\,\psi_n(kr)\iint P_n(\mu)\, S_n\, d\widetilde{\omega}, \tag{17}$$

где $d\widetilde{\omega}$ обозначает элемент поверхности шара, описанной около начала координат единичным радиусом. Буква μ обозначает здесь косинус углового расстояния элемента $d\widetilde{\omega}$ от точки Q, в которой произвольный радиус-

---

[1]) Формула (13) указанным здесь способом (за исключением обозначений была получена Гейне, I, 346. Равносильный результат получил Клебш (1863 в работе, приведенной на стр. 138.

вектор r пересекает поверхность шара. Теперь имеем на основании известной формулы Лапласа [1])

$$\iint P_n(\mu)\, S_n\, d\widetilde{\omega} = \frac{4\pi}{2n+1}\, S_n', \tag{18}$$

где S_n' обозначает значение S_n в точке Q. Отсюда следует

$$(ikr)^n \psi_n(kr)\, S_n' = \frac{1}{4\pi} \iint e^{ikr\mu}\, S_n\, d\widetilde{\omega}. \tag{19}$$

Типичное решение оказывается, таким образом, представленным в виде ряда плоских волн, имеющих амплитуду, равную единице; нормали этих волн распределены вокруг начала с некоторою переменною плотностью, выражающеюся при помощи сферической функции S_n.

В результате получается, что движение в каждой свободной от источников области может быть разложено в ряды плоских волн, налагающихся друг на друга.

§ 297. Мы переходим теперь к специальной задаче воздушных волн, падающих на шаровое препятствие.

Рассмотрим одну из составляющих

$$\varphi = B_n \psi_n(kr)\, r^n S_n \tag{1}$$

падающей системы воли; пусть соответствующий элемент отраженных волн будет

$$\varphi' = B_n' f_n(kr)\, r^n S_n. \tag{2}$$

Если препятствие неподвижно, то условие

$$\frac{\partial}{\partial r}(\varphi + \varphi') = 0, \tag{3}$$

которое должно выполняться для $r = a$, дает

$$\frac{B_n'}{B_n} = -\frac{ka\,\psi_n'(ka) + n\psi_n(ka)}{ka\, f_n'(ka) + n f_n(ka)}. \tag{4}$$

Этот результат можно легко объяснить только в том случае, когда длина волны велика по сравнению с диаметром шара, т. е. когда ka мало. В этом случае для малых значений ζ на основании формул (7), (16) § 292 имеем приближенно

$$\psi_n(\zeta) = \frac{1}{1\cdot 3 \ldots (2n+1)}, \quad f_n(\zeta) = \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{\zeta^{2n+1}}; \tag{5}$$

отсюда следует для $n > 0$

$$\frac{B_n'}{B_n} = \frac{n}{n+1} \frac{(ka)^{2n+1}}{\{1 \ldots (2n-1)\}^2 (2n+1)}. \tag{6}$$

Случай $n = 0$ составляет исключение; для него имеем приближенно

$$\frac{B_0'}{B_0} = -\frac{1}{3}(ka)^3. \tag{7}$$

---

[1]) Ferrers, Spherical Harmonics, стр. 89.

Если падающие волны будут плоски : и выражаются при помощи функции e^{ikx}, то будем иметь $S_n = P_n$ и на основании формулы (7) § 296

$$B_n = (2n+1)\, i^n k^n. \tag{8}$$

Отсюда следует

$$B_0' = -\frac{1}{3}(ka)^3, \quad B_1' = \frac{1}{2}\, ik\,(ka)^3. \tag{9}$$

Важнейшая составная часть отраженных волн на некотором расстоянии r, большом по сравнению с длиною волны, на основании формул (15) § 292 представляется в виде

$$\varphi' = B_0' j_0(kr) + B_1' j_1(kr)\cos\theta = -(ka)^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cos\theta\right)\frac{e^{-ikr}}{kr}. \tag{10}$$

Физическое значение обоих членов будет объяснено в конце § 300.

Количество энергии, которая уносится в единицу времени наружу вместе с отраженными волнами, как в § 294, определяется выражением

$$\sum \frac{1}{2}\,\frac{\varrho_0 c}{k^{2n}}\,|B_n'|^2 \iint P_n^2\, d\tilde{\omega}. \tag{11}$$

Подходящим масштабом для сравнения может быть в этом случае поток энергии через единицу поверхности фронта волны падающей системы. При наших предположениях этот поток, согласно с § 280, равен $\frac{1}{2}\varrho_0 k^2 c$, и отношение колчиества (11) к этому потоку на основании формулы (5) § 87 будет равно

$$\sum \frac{4\pi}{(2n+1)\,k^{2n+2}}\,|B_n'^2|. \tag{12}$$

Члены низшего порядка при малом ka суть те, для которых $n=0$ и $n=1$. Подставляя из формул (9) и составляя сумму, получаем

$$\frac{7}{9}\,(ka)^4 \cdot \pi a^2. \tag{13}$$

Скорость, с которою энергия рассеивается, оказывается таким образом обратно пропорциональной четвертой степени длины волны [1]).

Приведем в качестве примера маленький шарик с диаметром 0,025 *мм*, который будет рассеивать только $1{,}43 \cdot 10^{-17}$ падающей энергии, если длина волны равна 1,22 *м*. Отсюда становится понятным, почему туман, оптически совершенно непроницаемый, свободно пропускает обыкновенные звуки.

§ 298. Рассмотрим теперь случай плоских волн, падающих на *движущийся* шар.

Уравнение движения этих волн имеет вид

$$M\ddot{\xi} = -\iint p\cos\theta a^2\, d\tilde{\omega} + X, \tag{1}$$

где X обозначает внешнюю силу, если она имеется.

---

[1]) Рассматриваемая здесь задача другим методом была исследована Рэлеем, Proc. Lond. Math. Soc. (1), IV, 253 (1872); см. также Theory of Sound, §§ 296, 334, 335. Формулу (13) Рэлей дал в работе „On the Transmission of Light through an Atmosphere Containing Small Particles in Suspension", Phil. Mag. (5), XLVII, 375 (1899) [Papers, IV, 397].

Если множитель, зависящий от времени, есть e^{ikct}, то имеем

$$p = p_0 + \varrho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\varphi + \varphi') = p_0 + ikc\varrho_0(\varphi + \varphi'). \tag{2}$$

Далее, кинематическое граничное условие имеет вид

$$-\frac{\partial}{\partial r}(\varphi + \varphi') = \dot{\xi}\cos\theta = ikc\xi\cos\theta. \tag{3}$$

1. Допустим прежде всего, что шар совершенно свободен и движется под действием воздушных волн, так что $X = 0$. Полагая $M = \frac{4}{3}\pi\varrho_1 a^3$ и подставляя значение p из формулы (2) в уравнение (1), находим

$$kc\varrho_1\xi = i\{B_1\psi_1(ka) + B_1' f_1(ka)\}\varrho_0, \tag{4}$$

так как интегралы по поверхности шара от произведения сферических функций различного порядка исчезают. Далее, на основании формулы (3) будем иметь

$$-ikc\xi = B_1\{ka\psi_1'(ka) + \psi_1(ka)\} + B_1'\{kaf_1'(ka) + f_1(ka)\}, \tag{5}$$

в то время как равенство (4) будет сохраняться для $n > 1$. Если исключить ξ из равенств (4) и (5), то получим

$$\frac{B_1'}{B_1} = -\frac{\{ka\psi_1'(ka) + \psi_1(ka)\}\varrho_1 - \psi_1(ka)\varrho_0}{\{kaf_1'(ka) + f_1(ka)\}\varrho_1 - f_1(ka)\varrho_0}. \tag{6}$$

Если величина ka мала, то приближенные значения $\psi_1(ka)$ и $f_1(ka)$ дают

$$\frac{B_1'}{B_1} = \frac{\varrho_1 - \varrho_0}{6\varrho_1 - 3\varrho_1} k^3 a^3. \tag{7}$$

Рассеянные волны типа $n = 1$ при этой степени приближения, как и следовало ожидать, исчезают, когда $\varrho_1 = \varrho_0$. Шар в этом случае просто переносится воздухом вперед и назад.

Если через ξ_0 обозначить смещение воздуха в начале координат в случае отсутствия сферы, то при наших настоящих предположениях имеет место формула

$$ikc\xi_0 = -ike^{ikct}. \tag{8}$$

Отсюда получаем, если подставим из формулы (7) в формулу (5) и обратим внимание на то, что $B_1 = 3ik$,

$$\frac{\xi}{\xi_0} = \frac{3\varrho_0}{2\varrho_1 + \varrho_0}. \tag{9}$$

Как и следовало ожидать, это отношение меньше или больше единицы в зависимости от того $\varrho_1 \gtrless \varrho_0$.

2. В качестве иллюстрации теории *резонанса* мы можем рассмотреть случай, когда шар притягивается к неподвижной точке силой, пропорциональной расстоянию. Обозначая через $\frac{2\pi}{\sigma_0}$ период свободных колебаний шара в том случае, когда влиянием воздуха мы пренебрегаем, положим в уравнении (1)

$$X = -M\sigma_0^2\xi. \tag{10}$$

Тогда вместо формулы (4) будем иметь

$$(\sigma_0^2 - k^2c^2)\varrho_1\xi = -ikc\varrho_0\{B_1\psi_1(ka) + B_1' f_1(ka)\}; \tag{11}$$

отсюда и из формулы (5) следует

$$\frac{\sigma_0^2-k^2c^2}{k^2c^2}\varrho_1 = -\frac{B_1\psi_1(ka)+B_1'f_1(ka)}{B_1\{ka\psi_1'(ka)+\psi_1(ka)\}+B_1'\{kaf_1'(ka)+f_1(ka)\}}\varrho_0. \quad (12)$$

Если нет внешних источников, то $B_1=0$ и

$$\frac{\sigma_0^2-k^2c^2}{k^2c^2}\varrho_1 = -\frac{f_1(ka)}{ka\,f_1'(ka)+f_1(ka)}\varrho_0. \quad (13)$$

Это есть уравнение, определяющее k, а вместе с этим определяющее характер „свободного" движения шара, вызванного окружающей средой. Если привести это уравнение на основании условия (15) § 292 к алгебраическому виду, то оно окажется биквадратным[1]) относительно k и будет иметь вид

$$(k^2c^2-\sigma_0^2)(k^2a^2-2ika-2)+2\beta k^2c^2(ika+1)=0, \quad (14)$$

где $\beta=\frac{1}{2}\frac{\varrho_0}{\varrho_1}$. С нашей настоящей точки зрения имеют значение только два меньших корня. Они приближенно определяются из формулы

$$k^2c^2=\frac{\sigma_0^2}{1+\beta}. \quad (15)$$

Мы видим, что главное влияние присутствия жидкости состоит в том, что масса шара увеличивается на количество, равное половине массы вытесненной жидкости; ср. §§ 92, 295. Чтобы определить, с какой скоростью затухают колебания, мы должны пойти дальше в нашем приближении. Оказывается, в согласии с результатами § 295, что „свободные" колебания выражаются формулой

$$\xi=Ce^{-\nu t}\cos(\sigma' t+\varepsilon), \quad (16)$$

где

$$\sigma'=\frac{\sigma_0}{\sqrt{1+\beta}},\quad \nu=\frac{\beta}{4(1+\beta)}\frac{\sigma'^4a^3}{c^3}, \quad (17)$$

если мы удержим только важнейшие члены.

Для *вынужденных* колебаний, при которых значение k дано заранее имеем по формуле (12)

$$\frac{B_1'}{B_1}=-\frac{\{ka\psi_1'(ka)+\psi_1(ka)\}(\sigma_0^2-k^2c^2)+2\beta k^2c^2\psi_1(ka)}{\{kaf_1'(ka)+f_1(ka)\}(\sigma_0^2-k^2c^2)+2\beta k^2c^2f_1(ka)}. \quad (18)$$

Если ka мало, то приближенные значения для $\psi_1(ka)$ и $f_1(ka)$ будут давать

$$\frac{B_1'}{B_1}=\frac{\sigma_0^2-(1-2\beta)k^2c^2}{\sigma_0^2-(1+\beta)k^2c^2}\cdot\frac{1}{6}k^3a^3; \quad (19)$$

приближение, однако, оказывается совершенно непригодным, когда значение ka почти равно $\frac{\sigma_0}{(1+\beta)^{1/2}}$, т. е. когда частота падающих волн почти в точности совпадает с частотой свободных колебаний.

---

[1]) Равносильный результат получим, если положим в равенстве (21) § 295

$$ae^{i\sigma t}=i\sigma\xi,\ X=M(\sigma_0^2-\sigma^2)\xi.$$

Чтобы точнее исследовать случай приближенного синхронизма, положим в точной формуле (18)

$$f_1(ka) = \Psi_1(ka) - i\psi_1(ka); \tag{20}$$

тогда получим

$$\frac{B_1'}{B_1} = -\frac{g_1(ka)}{G_1(ka) - ig_1(ka)}, \tag{21}$$

где

$$\left.\begin{aligned} g_1(ka) &= \{ ka\psi_1'(ka) + \psi_1(ka) \}\left(\frac{\sigma_0^2 a^2}{c^2} - k^2a^2\right) + 2\beta k^2a^2\psi_1(ka), \\ G_1(ka) &= \{ ka\Psi_1'(ka) + \Psi_1(ka) \}\left(\frac{\sigma_0^2 a^2}{c^2} - k^2a^2\right) + 2\beta k^2a^2\Psi_1(ka). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Абсолютное значение правой части уравнения (21) никогда не может быть больше единицы, но может достигать этого значения; амплитуда рассеянных волн имеет, таким образом, максимум для

$$G_1(ka) = 0; \tag{23}$$

в этом случае

$$B_1' = -iB_1. \tag{24}$$

В случае системы плоских волн, представленных формулой (1) § 296, будем иметь

$$B_1' = 3k; \tag{25}$$

действительная часть потенциала скоростей рассеянных волн будет иметь на некотором расстоянии вид

$$\varphi' = -3\,\frac{\sin k(ct - r)}{kr}\cos\theta, \tag{26}$$

соответствующий потенциалу падающих волн

$$\varphi = \cos k(ct + x). \tag{27}$$

Следует заметить, что этот результат не зависит от значения величины ka.

Если ka мало, то выражение для $\Psi_1(ka)$ мы возьмем из формулы (7) § 292. Уравнение (23) принимает в этом случае вид

$$-\left(2 + \frac{1}{4}k^4a^4 + \ldots\right)\left(\frac{\sigma_0^2 a^2}{c^2} - k^2a^2\right) + 2\beta k^2a^2\left(1 + \frac{1}{2}k^2a^2 + \ldots\right) = 0, \tag{28}$$

и легко можно убедиться, что это уравнение при малых значениях $\frac{\sigma_0 a}{c}$ удовлетворится действительным значением ka, именно

$$ka = \frac{\sigma_0 a}{(1+\beta)^{1/2}c}; \tag{29}$$

это значение оказывается лишь немного меньше, чем то, которое соответствует свободным колебаниям. Далее, принимая во внимание условие (3), находим приближенно

$$\xi = \frac{6}{k^3a^3c}\sin kct. \tag{30}$$

Амплитуда колебаний частицы воздуха в первоначальной волне в тех же единицах масштаба будет равна $\frac{1}{c}$. Амплитуда же колебаний шара будет превышать это значение в отношении $\frac{6}{k^3a^3}$. Кроме этого из выраже-

ния (10) получается, что рассеяние энергии в отраженных волнах имеет своим максимальным значением $6\pi\varrho_0 c$ или, если выразить это значение через поток энергии в первоначальных волнах,

$$\frac{3\lambda^2}{\pi}. \tag{31}$$

Отношение этой величины к величине рассеяния, имеющего место в случае неподвижного шара, равно $\frac{108}{7}(ka)^{-6}$.

С другой стороны, нужно заметить, что длина волны максимального рассеяния может быть определена очень точно. Без труда можно показать, что рассеяние убывает на половину своего максимального значения, когда длина волны падающих волн отличается от критического значения на долю этого значения, выражающуюся дробью

$$\frac{\beta k^3 a^3}{4(1+\beta)}.$$

При всех акустических приложениях эта дробь оказывается очень малой. На практике массивные тела обычно приводятся в сильное колебательное движение не *непосредственно* воздушными волнами, но посредством резонансных ящиков и звучащих планок.

Присутствие множителя 3 в выражении (31) требует некоторого разъяснения. Вследствие того, что шар имеет три степени свободы, результат оказывается независимым от направления падающих волн. Если бы движение шара было ограничено условием, что он должен совершать колебания вдоль определенной прямой, то степень рассеяния зависела бы от направления падения, и среднее значение для всех направлений было бы равно $\frac{\lambda^2}{\pi}$ [1]).

§ 299. Дифракция плоских звуковых волн у края пластинки или у отверстия в плоском экране может быть исследована приближенными методами, предполагая, что размеры препятствия или отверстия малы по сравнению с длиною волны [2]). Это условие, очевидно, прямо противоположно условию, имеющему место в оптике, и соответственно этому результаты здесь имеют существенно отличный характер. В частности, при таком предположении мы не встречаемся ни с чем, что могло бы быть названо звуковою тенью или звуковым лучом.

1. Рассмотрим прежде всего следующий случай: система плоских волн, движущаяся в направлении отрицательной оси x, падает на плоскую пластинку, расположенную в плоскости $x=0$. При отсутствии пластинки движение всюду было бы представлено функцией

$$\varphi = e^{ikx}. \tag{1}$$

---

[1]) Исследования этого параграфа взяты из работы Ламба, A Problem in Resonance, illustrative of the Theory of Selective Absorption of Light, Proc. Lond. Math. Soc., XXXII, 11 (1900). Заключительное замечание взято из работы Рэлея, Some General Theorems concerning Forced Vibrations and Resonance, Phil. Mag. (6), III, 97 (1902) (Papers, V, 8).

[2]) Rayleigh, On the Passage of Waves through Apertures in Plane Screens, and Allied Problems, Phil. Mag. (5), XLIII, 259 (1897) (Papers, IV, 283).

Это дает скорость $-ik$ в направлении нормали к поверхности пластинки; полное же решение будет иметь тогда вид

$$\varphi = e^{ikx} + \chi, \tag{2}$$

где функция χ представляет движение, которое возникло бы в окружающем воздухе вследствие колебаний пластинки, перпендикулярных к ее плоскости и происходящих со скоростью ik. Если мы приложим формулу (18) § 290, то получим

$$\chi_P = \frac{1}{2\pi}\iint \chi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) dS; \tag{3}$$

интеграция при этом распространяется только на положительную сторону пластинки. Если x, y, z суть координаты точки P относительно начала, лежащего на поверхности пластинки, то имеем $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial x}$, и если расстояние точки P от каждой точки пластинки велико по сравнению с линейными размерами пластинки, то имеет место равенство

$$\chi_P = -\frac{1}{2\pi}\iint \chi\, dS\, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right), \tag{4}$$

где r теперь должно обозначать расстояние от начала. Отраженные волны оказываются, следовательно, такими, как если бы они были вызваны диполем соответствующей мощности.

При указанных основных условиях функция χ в непосредственной близости от пластинки изменяется почти в точности так, как если бы жидкость была несжимаема (§ 290). В последнем случае, если плотность жидкости и скорость пластинки в направлении, перпендикулярном к ее плоскости, положить равными *единице*, то выражение $2\iint \chi\, dS$ сделалось бы равным „коэфициенту инерции" пластинки [§ 121 (3)]. Обозначая этот коэфицнент, зависящий только от величины и формы пластинки, через M, будем иметь в нашем случае

$$\iint \chi\, dS = \frac{1}{2}\, ikM \tag{5}$$

и вместе с тем приближенно

$$\chi_P = -\frac{ikM}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) = -\frac{k^2 M}{4\pi}\cdot\frac{e^{-ikr}}{r}\cos\theta, \tag{6}$$

где θ обозначает угол, который OP составляет с Ox.

Для *круговой* пластинки радиуса a имеем согласно §§ 102, 108

$$M = \frac{8}{3}a^3, \tag{7}$$

и, следовательно,

$$\chi_P = -\frac{8}{3}\frac{\pi a^3}{\lambda^2}\cdot\frac{e^{-ikr}}{r}\cos\theta. \tag{8}$$

2. Если плоские волны падают непосредственно на экран, расположенный в плоскости $x=0$, то в случае сплошного экрана мы имели бы

$$\varphi = e^{ikx} + e^{-ikx} \text{ или } = 0, \tag{9}$$

соответственно для $x \gtrless 0$; член e^{-ikx} представляет отраженные волны. Если же имеется отверстие, то мы примем для двух ее сторон

$$\varphi = e^{ikx} + e^{-ikx} + \chi \text{ и } \varphi = \chi'. \tag{10}$$

Непрерывность давления и скорости требует, чтобы у отверстия имели место равенства

$$2+\chi=\chi', \qquad \frac{\partial\chi}{\partial x}=\frac{\partial\chi'}{\partial x}, \tag{11}$$

в то время как на остальной части плоскости $x=0$ было бы

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial\chi'}{\partial x}=0. \tag{12}$$

Эти условия будут выполнены, если мы положим χ и χ' равными потенциалам таких распределений простых источников по поверхности отверстия, которые на этой поверхности дают

$$\chi=-1, \qquad \chi'=+1. \tag{13}$$

Теперь на основании формулы (17) § 290 будем иметь

$$\chi_P=-\frac{1}{2\pi}\iint\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial\chi}{\partial n}\,dS, \tag{14}$$

так как $r'=r$ для $x=0$. В рассматриваемом случае вследствие соотношений (12) интеграцию можно ограничить поверхностью отверстия. В таком случае на расстояниях r, значения которых велики по сравнению с размерами отверстия, формула (14) приводится к виду

$$\chi_P=-\frac{1}{2\pi}\iint\frac{\partial\chi}{\partial n}\,dS\cdot\frac{e^{-ikr}}{r}. \tag{15}$$

Если бы k было равно нулю, то в согласии с формулой (13) задача определения χ была бы тождественна с задачей определения течения несжимаемой жидкости через отверстие; для точек в непосредственной близости к пластинке течение в нашей задаче будет иметь в существенном те же самые свойства. Мы можем поэтому написать

$$\iint\frac{\partial\chi}{\partial n}\,dS=C, \tag{16}$$

где C обозначает пропускную способность отверстия [1]).

Вместе с тем уравнение (15) приближенно приобретает вид

$$\chi_P=-C\frac{e^{-ikr}}{\pi r}. \tag{17}$$

Отсюда получается значение χ' на основании очевидного соотношения

$$\chi'(-x, y, z)=-\chi(x, y, z). \tag{18}$$

Оказывается, что волны, прошедшие сквозь отверстие, таковы, как если бы они возбуждались *простым* источником соответствующей мощности.

Значение C для эллиптического отверстия было уже дано в формуле (8) § 113. В случае же кругового отверстия имеем

$$C=2a \tag{19}$$

и

$$\chi_P=-\frac{2a}{\pi}\frac{e^{-ikr}}{r}. \tag{20}$$

---

[1]) Ср. §§ 102, 3; 108, 1 и 113.

Сравнение с формулой (8) показывает, что при принимаемых выше условиях на одном и том же расстоянии амплитуда волн, отраженных пластинкой, оказывается намного меньше, чем амплитуда волн, прошедших через отверстие такой же величины и формы. Легко видеть, что отношение полной энергии, которая проходит в течение одной секунды через круговое отверстие, к потоку энергии в первоначальных волнах равно

$$\frac{8a^2}{\pi^2} \text{ или } 0{,}816\,a^2. \tag{21}$$

Отношение амплитуды отраженных волн к амплитуде первоначальных волн в какой-либо удаленной точке не зависит от длины волны, пока длина волны велика по сравнению с наибольшей шириной отверстия.

§ 300. Подобные же вычисления можно выполнить и в том случае, когда звуковые волны отражаются от препятствия произвольной формы, если имеет место прежнее основное условие, что размеры препятствия малы по сравнению с длиной волны [1]).

Пусть начало координат взято на самом препятствии или вблизи от него; положим

$$\varphi = e^{ikx} + \chi, \tag{1}$$

где первый член представляет падающие волны, а второй член — отраженные волны. На поверхности препятствия, которое мы считаем твердым и неподвижным, должны иметь место условия

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n} e^{ikx} = -ikle^{ikx} \tag{2}$$

в предположении, что l, m, n суть направляющие косинусы нормали, направленной наружу.

Формула (5) § 290 дает

$$\chi_P = -\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial \chi}{\partial n}\,dS + \frac{1}{4\pi}\int\int \chi\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dS, \tag{3}$$

причем интегрирования распространяются на поверхность препятствия. Найдем теперь приближенное значение для выражения в правой части в том случае, когда расстояния r велики по сравнению с размерами препятствия. Обозначим координаты произвольной точки поверхности через x, y, z, а координаты точки P через x_1, y_1, z_1.

Если мы рассмотрим первый член в правой части равенства (3), то сможем написать

$$\frac{e^{-ikr}}{r} = \left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)_0 + x\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-ikr}}{r}\right)_0 + y\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{-ikr}}{r}\right)_0 + z\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{-ikr}}{r}\right)_0 + \ldots,$$

где значок нуль указывает, что в выражениях, при которых он поставлен, x, y, z нужно положить равными нулю. Равенство это можно также написать в виде

$$\frac{e^{-ikr}}{r} = \left(1 - x\frac{\partial}{\partial x_1} - y\frac{\partial}{\partial y_1} - z\frac{\partial}{\partial z_1} + \ldots\right)\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}, \tag{4}$$

---

[1]) Rayleigh, On the Incidence of Aerial and Electric Waves upon Small Obstacles in the Form of Ellipsoids or Elliptic Cylinders . . ., Phil. Mag. (5), XLIV, 28 (1897) [Papers, IV, 305].

где r_0 обозначает расстояние точки P от начала. Далее из равенств (2) следует

$$\frac{\partial\chi}{\partial n} = -ikl + k^2xl + \dots \tag{5}$$

Если мы перемножим равенства (4) и (5) и проинтегрируем по поверхности препятствия, то получим приближенное равенство

$$\iint \frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial\chi}{\partial n}\,dS = k^2Q\frac{e^{-ikr_0}}{r_0} + ikQ\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}, \tag{6}$$

в котором Q обозначает объем препятствия. Мы использовали при этом очевидные соотношения

$$\iint l\,ds = 0,\quad \iint xl\,dS = Q,\quad \iint yl\,dS = 0,\quad \iint zl\,dS = 0. \tag{7}$$

Члены, удержанные в правой части равенства (6), имеют один и тот же порядок, между тем как отброшенные члены малы по сравнению с удержанными.

Что же касается второго члена в равенстве (3), то имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-ikr}}{r} &= \left(l\frac{\partial}{\partial x} + m\frac{\partial}{\partial y} + n\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{e^{-ikr}}{r} = \\ &= -\left(l\frac{\partial}{\partial x_1} + m\frac{\partial}{\partial y_1} + n\frac{\partial}{\partial z_1}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}.\end{aligned} \tag{8}$$

Мы можем, в согласии с нашим прежним приближением, написать r_0 вместо r и вынести за знак интеграла пространственные производные от выражения $\dfrac{e^{-ikr_0}}{r_0}$. Результат будет тогда содержать интегралы

$$\iint l\chi\,dS,\quad \iint m\chi\,dS,\quad \iint n\chi\,dS. \tag{9}$$

Из равенств (2) и (5) и из общего предложения, установленного в § 290, следует, что функция χ в непосредственной близости от препятствия приблизительно совпадает с потенциалом скоростей движения жидкости, которое получится в том случае, когда препятствие будет двигаться в жидкости со скоростью ik, параллельной оси x. И для этого движения жидкости интегралы (9) представляют компоненты „импульса", и мы можем в согласии с § 121 написать

$$\iint l\chi\,dS = ik\mathbf{A},\quad \iint m\chi\,dS = ik\mathbf{C}',\quad \iint n\chi\,dS = ik\mathbf{B}', \tag{10}$$

причем плотность взятой для сравнения жидкости предполагается равной *единице*. Отсюда следует

$$\iint \chi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dS = -ik\left(\mathbf{A}\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{C}'\frac{\partial}{\partial y_1} + \mathbf{B}'\frac{\partial}{\partial z_1}\right)\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}. \tag{11}$$

Окончательная приближенная формула будет, таким образом, иметь вид

$$\chi_P = -\frac{k^2Q}{4\pi}\frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{ik}{4\pi}\left\{(\mathbf{A}+Q)\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{C}'\frac{\partial}{\partial y_1} + \mathbf{B}'\frac{\partial}{\partial z_1}\right\}\frac{e^{-ikr}}{r}\ ^{1}), \tag{12}$$

---

[1]) Если мы разделим на k и затем будем стремить $k \to 0$, то воспроизведем результат, полученный в § 121а для случая несжимаемой жидкости.

причем значок нуль при r, как ненужный более, отброшен. Если kr велико, то эта формула может быть представлена в виде

$$\chi_P = -\frac{k^2 Q}{4\pi}\frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{k^2}{4\pi}\{(\mathbf{A}+Q)\lambda_1 + \mathbf{C}'\mu_1 + \mathbf{B}'\nu_1\}\frac{e^{-ikr}}{r}, \qquad (13)$$

где λ_1, μ_1, ν_1 суть направляющие косинусы для r.

Для шара радиуса a имеем

$$\mathbf{A} = \frac{2}{3}\pi a^3, \quad Q = \frac{4}{3}\pi a^3, \quad \mathbf{B}' = 0, \quad \mathbf{C}' = 0,$$

что приводит снова к результату (10) § 297.

Отраженные волны можно представлять себе полученными в результате совместного действия простого источника и диполя. Ось последнего вообще не совпадает с направлением падающих волн.

Более симметричная формула получается, если принять, что первоначальные волны идут из произвольно заданного направления (λ, μ, ν), так что формула (1) должна быть заменена формулой

$$\varphi = e^{ik(\lambda x + \mu y + \nu z)} + \chi. \qquad (14)$$

Повторяя рассуждения предшествующего исследования, получим без затруднений вместо формулы (13) формулу

$$\chi_P = -\frac{k^2 Q}{4\pi}\frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{k^2 Q}{4\pi}(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1)\frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{k^2}{4\pi}\{\mathbf{A}\lambda\lambda_1 - \mathbf{B}\mu\mu_1 +$$

$$+ \mathbf{C}\nu\nu_1 + \mathbf{A}'(\mu\nu_1 + \mu_1\nu) + \mathbf{B}'(\nu\lambda_1 + \nu_1\lambda) + \mathbf{C}'(\lambda\mu_1 + \lambda_1\mu)\}\frac{e^{-ikr}}{r}. \qquad (15)$$

Как в § 124, направления координатных осей могут быть выбраны таким образом, что будем иметь $\mathbf{A}' = \mathbf{B}' = \mathbf{C}' = 0$; тогда формула приведется к следующей

$$\chi_P = -\frac{k^2 Q}{4\pi}\frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{k^2}{4\pi}\{(\mathbf{A}+Q)\lambda\lambda_1 + (\mathbf{B}+Q)\mu\mu_1 +$$

$$+ (\mathbf{C}+Q)\nu\nu_1\}\frac{e^{-ikr}}{r}. \qquad (16)$$

В случае эллипсоида с полуосями a, b, c на основании формул (4) § 121 будем иметь

$$\mathbf{A}+Q = \frac{2}{2-\alpha_0}Q, \quad \mathbf{B}+Q = \frac{2}{2-\beta_0}Q, \quad \mathbf{C}+Q = \frac{2}{2-\gamma_0}Q, \qquad (17)$$

где α_0, β_0, γ_0 определяются на основании формул (6) § 114. В случае круговой пластинки ($a=b$, $c=0$) имеем $Q=0$, $\mathbf{A} = \frac{8}{3}a^3$, $\mathbf{B}=0$, $\mathbf{C}=0$; уравнение (16) приводится при этом к виду

$$\chi_P = -\frac{2}{3}\frac{k^3 a^3}{\pi}\lambda\lambda_1\frac{e^{-ikr}}{r}. \qquad (18)$$

Если пластинка стоит наклонно к падающим волнам, то амплитуда отраженных волн будет меньше, именно в отношении косинуса угла наклона.

Объяснение обоих типов возмущений в (13) и (16) можно легко дать в одной и той же форме. Прежде всего, если препятствия налицо нет, то

в области, которую оно должно было бы занимать, будут происходить попеременно то сгущения, то разрежения. При наличии препятствия его сопротивление этим сгущениям и разрежениям оказывает определенное воздействие на окружающую среду; волны, получившиеся благодаря этому обстоятельству на большом расстоянии, на самом деле будут таковы, как если бы они были возбуждены в покоящейся до того среде периодическим колебательным движением жидкости в объеме препятствия; при этом движение должно быть достаточно интенсивным для того, чтобы компенсировать указанные выше изменения плотности. Этот результат оказывается равносильным „простому" источнику звука. На это колебательное движение накладывается вторая система волн, которая обязана своим возникновением *неподвижности* препятствия. Если бы препятствие могло свободно двигаться и имело бы, кроме того, такую же массу, как и вытесненный им воздух, то оно стало бы раскачиваться вперед и назад вместе со звуковыми колебаниями, и вторая система волн не возникла бы. Эта вторая система в действительности такова, как если бы она получилась благодаря колебательному движению препятствия вдоль прямой со скоростью, равной и прямопротивоположной скорости частицы воздуха при невозмущенных волнах. Это действие препятствия равносильно диполю.

Если длина волны *мала* по сравнению с размерами препятствия, то задача дифракции в общем случае представляет большие аналитические трудности. Единственный случай, в котором задачу можно считать решенной до конца, есть случай плоского экрана, ограниченного с одной стороны; в этом случае ничто не зависит от длины волны. Мы исследуем этот случай в § 308.

Случай плоских волн, падающих на неподвижную сферу, кажется с первого взгляда многообещающим: полное выражение для возмущения, вызванного в этом случае падающими и отраженными волнами, дается формулами § 297; таким образом, мы имеем

$$\varphi+\varphi'=\sum(2n+1)(ikr)^n\left\{\psi_n(kr)-\frac{ka\psi_n'(ka)+n\psi_n(ka)}{kaf_n'(ka)+nf_n(ka)}f_n(kr)\right\}P_n(\mu). \quad (19)$$

Для точек поверхности шара выражение это приводится к виду

$$\varphi+\varphi'=-\sum\frac{(2n+1)i^nP_n(\mu)}{(ka)^{n+1}\{kaf_n'(ka)+nf_n(ka)\}}. \quad (20)$$

Однако, если длина волны мала по сравнению с окружностью $2\pi a$ шара, то значение ka велико, и ряд в формуле (20), к сожалению, сходится очень медленно, так что нужно взять большое число его членов, чтобы получить достаточно хорошее приближение. Рэлей [1]) провел эти вычисления для случая $ka=10$, который оказывается достаточным для того, чтобы показать начало образования звуковой тени за задней стороной шара (т. е. вблизи значения $\mu=-1$) [2]).

---

[1]) Rayleigh, On the Acoustic Shadow of a Sphere, Phil. Trans. A, CCIII, 7 (1904) [Papers, V, 149].

[2]) Относящиеся сюда оптические и электрические задачи очень важны, так как они связаны с самыми разнообразными вопросами, как, например, с теорией радуги и с влиянием кривизны земной поверхности на беспроволочную телеграфию. Задачи эти были подробно разобраны Дебюн, Л. Лоренцом, Макдональдом, Пуанкаре, Нкольсоном и другими, причем обнаружились различия в мнениях относительно законности применяемых при этом математических методов. Полные указания по этим вопросам находятся в работе Лява, On the Transmission of Electric Waves over the Surface of the Earth, Phil. Trans. A, CCXV, 105 (1914). См. также Watson, Proc. Roy. Soc., XCV, 83 (1918).

§ 301. Если, не ограничиваясь простыми гармоническими колебаниями, мы постараемся проинтегрировать уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi \tag{1}$$

при помощи ряда сферических функций

$$\varphi = \sum R_n \varphi_n, \tag{2}$$

где φ_n — пространственная сферическая функция порядка n, то будем иметь на основании уравнения (4) § 292

$$\frac{\partial^2 R_n}{\partial t^2} = c^2 \left\{ \frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2} + \frac{2(n+1)}{r} \frac{\partial R_n}{\partial r} \right\}. \tag{3}$$

Если R_n — решение этого уравнения, то можно легко показать, что соответствующее уравнение для R_{n+1} удовлетворится решением вида

$$R_{n+1} = \frac{1}{r} \frac{\partial R_n}{\partial r}; \tag{4}$$

поэтому уравнению (3) будет удовлетворять решение

$$R_n = \left(\frac{\partial}{r\,\partial r}\right)^n R_0 = \left(\frac{\partial}{r\,\partial r}\right)^n \frac{f(r-ct) + F(r+ct)}{r}. \tag{5}$$

В случае $n = 1$ мы имеем решение

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial r} \frac{f(r-ct) + F(r+ct)}{r} \cos\theta. \tag{6}$$

Этот результат был применен Кирхгофом и в более полном виде Лявом к подробному разбору довольно интересного вопроса о том, как распространяется в окружающей среде фронт системы волн, получившихся благодаря движению шара.

В исследовании [2]) Кирхгофа движение шара задано заранее, причем скорость этого движения есть данная функция времени, и решение в этом случае оказывается сравнительно простым.

Ляв [3]) разбирает случай волн, которые возникают в результате мгновенного импульса, приложенного к шаровому маятнику. Уравнение движения маятника, как и в § 298, имеет вид

$$M\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} + \sigma_0^2 \xi\right) = -\int\int p \cos\theta a^2 d\tilde{\omega}, \tag{7}$$

и мы полагаем

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial r} \frac{f(ct-r)}{r} \cos\theta, \tag{8}$$

---

[1]) Ср. Clebsch, см. выше стр. 138; Niven, Solutions of the Senate House Problems... for 1878, стр. 158.

[2]) Kirchhoff, см. выше, стр. 639.

[3]) Love, Some Illustrations of Modes of Decay of Vibratory Motions, Proc. Lond. Math. Soc. (2), II, 88 (1904).

причем член в формуле (6), который соответствует волнам, распространяющимся внутрь, отброшен. Это приводит к уравнению

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+\sigma_0^2\xi=\frac{2\beta c}{a^2}\left\{f'(ct-a)+\frac{1}{a}f(ct-a)\right\}, \tag{9}$$

где

$$\beta=\frac{\frac{2}{3}\pi\varrho_0 a^3}{M}. \tag{10}$$

Из кинематического условия, которое должно быть выполнено на поверхности шара, имеем

$$\frac{d\xi}{dt}=-\frac{1}{a}f''(ct-a)-\frac{2}{a^2}f'(ct-a)-\frac{2}{a^2}f(ct-a). \tag{11}$$

Чтобы решить совместную систему уравнений (9) и (11), положим

$$f(ct-r)=Ae^{\lambda(ct-r+a)},\qquad \xi=Be^{\lambda ct}, \tag{12}$$

тогда получим

$$\left.\begin{aligned}(\lambda^2c^2+\sigma_0^2)B&=\frac{2\beta c}{a^2}(\lambda a+1)\lambda A,\\ \lambda cB&=-\frac{1}{a^2}(\lambda^2a^2+2\lambda a+2)A.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Если мы исключим отношение A/B, то получим биквадратное уравнение [1]) относительно λ

$$(\lambda^2c^2+\sigma_0^2)(\lambda^2a^2+2\lambda a+2)+2\beta c^2\lambda^2(\lambda a+1)=0. \tag{14}$$

Отмечая различные корни значками внизу, будем иметь

$$\xi=-\sum_1^4\frac{\lambda_s^2a^2+2\lambda_s a+2}{ca^2\lambda_s}A_s e^{\lambda_s ct}, \tag{15}$$

$$\varphi=-\sum_1^4(\lambda_s r+1)\frac{A_s}{r^2}e^{\lambda_s(ct-r+a)}\cos\theta. \tag{16}$$

Если мы будем исходить от произвольных начальных значений для ξ и $\frac{d\xi}{dt}$ и если окружающая среда вначале находится в покое, то в этом решении следует считать $t>0$ и $r<ct+a$. Начальные условия дают два уравнения для четырех постоянных A_s. Полагая, например, что для $t=0$ имеют место равенства

$$\xi=0,\qquad \frac{d\xi}{dt}=U_0, \tag{17}$$

будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\sum_1^4\left(\lambda_s a+2+\frac{2}{\lambda_s a}\right)A_s&=0,\\ \sum_1^4(\lambda_s^2a^2+2\lambda_s a+2)A_s&=-U_0a^3.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

[1]) Если положить $\lambda=ik$, то это уравнение совпадет с уравнением (26) § 298.

Остальные условия получаются из рассмотрения разрывов сплошности на шаровой граничной поверхности фронта движущихся волн. Обозначим через δS элемент этой граничной поверхности и проведем через точки контура элемента δS нормали по направлению изнутри наружу, которые на расстоянии $c\,\delta t$ пересекут поверхность шара, параллельную первой. Таким способом получается элемент объема величины $\delta S \cdot c\,\delta t$. За промежуток времени δt жидкость, содержащаяся в этом элементе объема, изменяет свою скорость в направлении нормали от значения 0 до значения $-\frac{\partial \varphi}{\partial r}$, равного значению скорости в направлении внутренней нормали к граничной поверхности элемента, вследствие избытка давления $c^2\varrho_0 s$, где s обозначает коэфициент уплотнения на внутренней стороне поверхности. Отсюда получается уравнение

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r}\cdot \varrho_0\,\delta S\cdot c\,\delta t = c^2\varrho_0 s\cdot \delta S\cdot \delta t$$

или, так как $c^2 s = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, уравнение [1])

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c\,\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \tag{19}$$

которое должно удовлетворяться для $r = ct + a$. Подставляя в это уравнение значение φ из формулы (16), находим

$$\sum (\lambda_s r + 2)\, A_s = 0.$$

Это уравнение вообще может удовлетворяться только в том случае, когда имеем

$$\sum \lambda_s A_s = 0, \qquad \sum A_s = 0, \tag{20}$$

что, как это следует отметить, обеспечивает непрерывность φ и вместе с тем также непрерывность компоненты скорости, касательной к волновому фронту.

Четыре условия (18), (20) могут теперь быть записаны следующим образом:

$$\sum \lambda_s^2 A_s = -U_0 a, \quad \sum \lambda_s A_s = 0, \quad \sum A_s = 0, \quad \sum \frac{A_s}{\lambda_s} = 0; \tag{21}$$

отсюда следует

$$A_1 = -\frac{\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)}\cdot U_0 a, \ \ldots, \ \ldots, \ \ldots \tag{22}$$

Движение воздуха определяется, таким образом, уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{\partial}{\partial r}\sum_1^4 \frac{A_s}{r}\, e^{\lambda_s(ct-r+a)}\cos\theta \quad [r<ct+a] \\ \varphi &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [r>ct+a]. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

[1]) Теория разрывов сплошности на поверхности фронта волн была систематически изучена Кристоффелем, Untersuchungen über die mit dem Forbestehen linearer partieller Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten, Ann. d. Matemat., VIII, 81 (1876) и Лявом, Wave-Motions with Discontinuities at Wave-Fronts, Proc. Lond. Math. Soc. (2), I, 37 (1903).

В практически встречающихся случаях β есть очень малая дробь, и корни уравнения (14) в первом приближении равны

$$\lambda_1=\frac{i\sigma_0}{c},\quad \lambda_2=-\frac{i\sigma_0}{c},\quad \lambda_3=\frac{-1+i}{a},\quad \lambda_4=\frac{-1-i}{a}. \tag{24}$$

Если путь, пройденный звуковой волной в течение одного периода колебаний, превосходит во много раз окружность шара, то λ_3, λ_4 оказываются большими по сравнению с λ_1, λ_2. Отсюда для $r<ct+a$ находим подстановкой в выражения (22) и (23)

$$\varphi=-\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{U_0a^2}{2r}\cos\sigma_0\left(t-\frac{r-a}{c}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\sqrt{2}U_0a^2}{2r}e^{\frac{-(ct+a-r)}{a}}\cdot\cos\left(\frac{ct+a-r}{a}-\frac{1}{4}\pi\right)\right\}\cos\theta. \tag{25}$$

Первая часть этого выражения такова, как если бы шар в течение неограниченного времени испытывал простые гармонические колебания с периодом $\frac{2\pi}{\sigma_0}$ и амплитудой $\frac{U_0}{\sigma_0}$. Вторая часть становится незаметной на расстоянии нескольких диаметров шара от внутренней граничной поверхности движущейся волны; однако, вблизи от этой поверхности вторая часть оказывается сравнимой с первой частью. Чтобы исследовать затухание колебаний, нужно перейти ко второму приближению; но эта часть задачи была разобрана уже в §§ 295, 298. Здесь достаточно заметить, что наиболее важная часть возмущения внутри движущейся волны дается выражением вида

$$\varphi=\frac{C}{r}e^{-m(ct-r)}\cos\sigma_0\left(t-\frac{r}{c}+\varepsilon\right)\cos\theta. \tag{26}$$

Множитель e^{-mct} дает затухание в произвольной точке, получающееся вследствие того, что первоначальная энергия маятника расходуется на возбуждение волн. Что же касается множителя e^{mr}, то следует заметить, что внутри пространства, занятого волнами, амплитуда в какой-либо точке Q (если мы будем пренебрегать тем изменением, которое обусловлено расхождением радиусов) оказывается больше, чем амплитуда в точке P, лежащей на том же радиусе-векторе ближе к центру, и именно — в отношении $e^{m\cdot PQ}$; причина этого заключается в том, что амплитуда в точке Q представляет возмущение, которое началось ранее на промежуток времени $\frac{PQ}{c}$, в течение которого амплитуда колебаний убывала по закону e^{-mct} [1]).

Звуковые волны в двух измерениях.

§ 302. Если φ не зависит от z, то имеем

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=c^2\Delta_1\varphi, \tag{1}$$

где

$$\Delta_1=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{2}$$

---

[1]) Ср. Lamb, On a Peculiarity of the Wave-System due to the Free Vibrations of a Nucleus in an Extended Medium, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXXII, 208 (1900).

В случае симметрии относительно начала отсюда получается

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right), \tag{3}$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Общее решение (этого уравнения) мы получили в § 196 в виде

$$2\pi\varphi = \int_0^\infty f\left(t - \frac{r}{c}\operatorname{ch} u\right)du + \int_0^\infty F\left(t + \frac{r}{c}\operatorname{ch} u\right)du, \tag{4}$$

и далее было показано, что решение

$$2\pi\varphi = \int_0^\infty f\left(t - \frac{r}{c}\operatorname{ch} u\right)du \tag{5}$$

представляет систему расходящихся волн, которая возбуждается источником $f(t)$, находящимся в начале координат.

Мы теперь можем дать другой вывод этих результатов. Из формулы (13) § 285 получается следующее: если точечный источник $f(t)\,\delta z$ находится в точке $(0, 0, z)$, то его действие в точке, лежащей в плоскости xy на расстоянии r от начала, может быть представлено выражением

$$\frac{1}{4\pi\sqrt{r^2+z^2}}\, f\left(t - \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{c}\right)\delta z.$$

Интегрируя это выражение по z между пределами $-\infty$ и $+\infty$, мы получим действие системы точечных источников, распределенных вдоль оси z с равномерной линейной плотностью $f(t)$ в виде

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{c}\right)\frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f\left(t - \frac{r}{c}\operatorname{ch} u\right)du. \tag{6}$$

Тот же метод, конечно, может быть применен и для получения второго члена в формуле (4).

Уравнения движения звука в одном, двух или трех измерениях в случае симметрии содержатся в формуле

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{m-1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right). \tag{7}$$

Сложная и несколько неудобная форма, в которой получено решение для случая $m=2$, находится в резком контрасте с аналитической простотой и внешним формальным видом решений для случаев $m=1$, $m=3$; но это обстоятельство не должно вводить нас в заблуждение относительно истин-

ных физических соотношений. Чтобы иметь возможность сравнить между собой эти три случая, рассмотрим действие (A) плоского источника, (B) линейного источника и (C) точечного источника, причем мощность источника в каждом из этих случаев пусть будет равна

$$f(t)=\frac{\tau}{t^2+\tau^2}. \tag{8}$$

Это дает удобное представление для того источника, который имеет более или менее преходящий характер, так как мы можем, уменьшая τ, сделать произвольно малым тот промежуток времени, в течение которого действие источника оказывается заметным, тогда как интеграл по времени остается неизменным.

Результаты (для всех трех случаев) можно выразить в более удобной форме, введя коэфициент уплотнения s.

(A). В случае $m=1$ находим для $x>0$

$$s=\frac{\tau}{2c}\,\frac{1}{\left(t-\frac{x}{c}\right)^2+\tau^2}. \tag{9}$$

(B). Для $m=2$ аналитическое представление оказывается подобным данному в § 197. Результат для главной части волны может быть представлен в виде

$$s=\frac{1}{4\sqrt{2}c^2\tau^2}\sqrt{\frac{c\tau}{r}}\sin\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{3}{2}\eta\right)\cos^{3/2}\eta, \tag{10}$$

где η определяется из уравнения

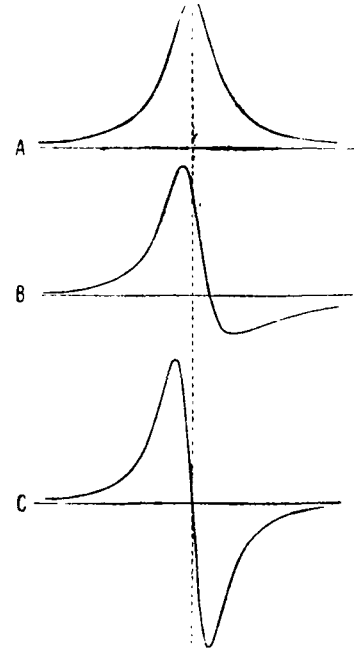
$$t=\frac{r}{c}+\tau\operatorname{tg}\eta.$$

(C). В случае трех измерений мы имеем

$$s=\frac{\tau}{2\pi c^2}\,\frac{\frac{r}{c}-t}{r\left\{\left(t-\frac{r}{c}\right)^2+\tau^2\right\}^2}. \tag{11}$$

Эти три случая представлены на фиг. 77, причем в качестве ординат взяты значения s, а в качестве абсцисс значения t. Масштаб для t во всех трех случаях взят один и тот же, но между вертикальными масштабами не имеется, конечно, никакого соответствия. В случае (A) мы имеем чистую волну сгущения; в случае (B) за начальным сгущением следует разрежение менее сильное, но зато с большей продолжительностью; в случае (C), наоборот, сгущение и разреженне будут антисимметричны. В случаях (B) и (C) для каждой произвольной точки необходимо имеет место одно и то же равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} s\,dt=0; \tag{12}$$



Фиг. 77.

ср. § 288. Если бы источник по своей продолжительности был строго ограничен, то в случае трех измерений среда после прохождения волны

оставалась бы совершенно в покое, как и в случае одного измерения, хотя и по другой причине. В промежуточном случае двух измерений волна будет оставлять после себя хвост неограниченной длины, и следовательно, здесь имеет место только лишь асимптотическое приближение к положению покоя.

Оказывается, что с физической точки зрения случаи $m=1$, $m=2$, $m=3$ образуют последовательность с правильным чередованием тех свойств, которые обусловлены возрастающей подвижностью среды.

Если мы не будем ограничиваться случаем симметрии, то общее решение уравнения (1) в полярных координатах будет иметь вид

$$\varphi = \sum (Q_s r^s \cos s\theta + R_s r^s \sin s\theta), \tag{13}$$

где Q_s, R_s суть функции от r и t, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial^2 Q_s}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 Q_s}{\partial r^2} + \frac{2s+1}{r} \frac{\partial Q_s}{\partial r} \right) \tag{14}$$

и аналогичному уравнению относительно R_s. Решение уравнения (14) есть

$$Q_s = \left(\frac{\partial}{r\,\partial r} \right)^s Q_0, \tag{15}$$

где

$$Q_0 = \int_0^\infty f\left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right) du + \int_0^\infty F\left(t + \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right) du. \tag{16}$$

Доказательство аналогично приведенному в (5) § 301 [1]).

§ 303. В случае простого гармонического колебания ($e^{i\sigma t}$) будем иметь в полярных координатах уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + k^2 \varphi = 0, \tag{1}$$

где $k = \frac{\sigma}{c}$. Решение этого уравнения, подчиненное условию быть конечным в начале координат, может быть представлено, как в § 191, в виде

$$\varphi = \sum (A_s \cos s\theta + B_s \sin s\theta)\, J_s(kr), \tag{2}$$

где s может принимать любые целые значения между 0 и ∞.

Отсюда мы сразу получаем предложение, что среднее значение $(\bar{\varphi})$ функции φ в круге, описанном около начала координат радиусом r, равно

$$\bar{\varphi} = J_0(kr)\, \varphi_0, \tag{3}$$

где φ_0 обозначает значение φ вначале [2]). Эта теорема (при том ограничении, которое высказано выше) аналогична теореме (8) § 289 и доказывается подобным же способом.

---

[1]) Этот параграф с незначительными изменениями взят из одной работы автора, указанной на стр. 374.

[2]) H. Weber, Math. Ann. I (1868).

При поперечных колебаниях воздуха, заключенного в сосуде, имеющем форму круглого цилиндра, нормальные колебания выражаются различными членами ряда (2), причем допускаемые значения k, а следовательно, и σ определяются из уравнения

$$J_s'(ka) = 0, \tag{4}$$

где a обозначает радиус. Смысл этого результата может быть выяснен из § 191, где рассматривается точно такая же математическая задача. Фиг. 45 показывает для двух важнейших случаев форму линий равного давления; движение частиц происходит в направлениях, перпендикулярных к этим линиям [1]).

Бесселевы функции $J_s(z)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\frac{d}{d\zeta}\frac{J_s(\zeta)}{\zeta^s} = -\frac{J_{s+1}(\zeta)}{\zeta^s}, \tag{5}$$

отвечающему формуле (17) § 292. Соотношение это легко получается из разложения в ряд функции $J_s(\zeta)$, данного в § 101. Из формулы (5) и из диференциального уравнения для $J_s(\zeta)$, именно,

$$f''(\zeta) + \frac{1}{\zeta} f'(\zeta) + \left(1 - \frac{s^2}{\zeta^2}\right) f(\zeta) = 0, \tag{6}$$

можно получить различные рекуррентные формулы, например,

$$\zeta J_s'(\zeta) + s J_s(\zeta) = \zeta J_{s-1}(\zeta); \tag{7}$$

эта формула соответствует формуле (18) § 292.

Последовательным применением формулы (5) получаем

$$J_s(\zeta) = \zeta^s \left(-\frac{d}{\zeta\, d\zeta}\right)^s J_0(\zeta). \tag{8}$$

Методом полной индукции можно легко показать, что выражение в правой части равенства (8) действительно есть решение диференциального уравнения (6), если $J_0(\zeta)$ удовлетворяет тому же уравнению при $s = 0$. Это подсказывает подходящий для наших целей выбор функций Бесселя „второго рода". Мы полагаем

$$D_s(\zeta) = \zeta^s \left(-\frac{d}{\zeta\, d\zeta}\right)^s D_0(\zeta), \tag{9}$$

где $D_0(\zeta)$ обозначает функцию [2]), введенную в § 194, именно

$$D_0(\zeta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-i\zeta \operatorname{ch} u}\, du. \tag{10}$$

---

[1]) Эта задача исчерпывающим образом была разобрана Рэлеем, Theory of Sound, § 339.

[2]) При помощи метода § 302 можно легко показать, что $D_0(kr)$ представляет потенциал простых гармонических точечных источников, равномерно распределенных вдоль оси z. См. Rayleigh, On Point-, Line- and Plane-Sources of Sound, Proc. Lond. Math. Soc., XIX, 504 (1888) [Papers, III, 44; Theory of Sound, § 342].

Ясно без дальнейшего доказательства, что $D_s(\zeta)$ удовлетворяет диференциальному уравнению (6) и той же системе рекуррентных формул, как и $J_s(\zeta)$. Важный частный случай формулы (9) представляет равенство

$$D_1(\zeta) = -D_0'(\zeta). \tag{11}$$

Полезны следующие приближенные формулы. Для малого ζ имеют место на основании §§ 100, 194 равенства

$$\left.\begin{aligned} J_0(\zeta) &= 1 - \frac{\zeta^2}{4} + \dots, \\ D_0(\zeta) &= -\frac{2}{\pi}\left(\log\frac{1}{2}\zeta + \gamma + \frac{1}{2}i\pi + \dots\right); \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

отсюда и из формул (8) и (9) следует для $s > 0$

$$\left.\begin{aligned} J_s(\zeta) &= \frac{\zeta^s}{2^s s!} + \dots, \\ D_s(\zeta) &= \frac{2^s (s-1)!}{\pi\zeta^s} + \dots \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

С другой стороны, для больших значений ζ мы имеем

$$\left.\begin{aligned} J_s(\zeta) &= \left(\frac{2}{\pi\zeta}\right)^{1/2} \sin\left(\zeta + \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}s\pi\right) + \dots, \\ D_s(\zeta) &= \left(\frac{2}{\pi\zeta}\right)^{1/2} i^s e^{-i\left(\zeta + \frac{1}{4}\pi\right)} + \dots, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

до тех пор пока порядок s функций не станет сравнимым с порядком ζ или больше, чем ζ.

Формулы эти могут быть применены для того, чтобы исследовать, как колебания цилиндра (например, фортепианной струны) сообщаются окружающему воздуху.

Пусть поперечные колебания цилиндра определяются функцией

$$U = ae^{i\sigma t}; \tag{15}$$

тогда радиальная скорость на поверхности $r = a$ будет дана формулой

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r} = ae^{i\sigma t}\cos\theta. \tag{16}$$

Соответствующее значение φ будет равно

$$\varphi = AD_1(kr)\cos\theta e^{i\sigma t} \tag{17}$$

при условии

$$-kD_1'(ka)\,A = a. \tag{18}$$

Если, как мы и будем предполагать, окружность поперечного сечения цилиндра очень мала по сравнению с длиной звуковой волны, то ka представляет очень малую дробь, и мы находим из формул (13)

$$A = \frac{1}{2}\pi k a^2 a.$$

На расстояниях r, бо́льших по сравнению с k^{-1}, мы имеем таким же образом на основании формул (14)

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}\pi}\,\frac{ik^{1/2}a^2}{r^{1/2}}\,\alpha\cos\theta e^{i(\sigma t - kr + 1/4\pi)}. \tag{19}$$

Если бы скорость на границе $r=a$ всюду была направлена по радиусам и амплитуда была бы равна α, то значение φ на некотором расстоянии было бы равно

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}\pi}\,\frac{a}{k^{1/2}r^{1/2}}\,\alpha e^{i(\sigma t - kr - 1/4\pi)}. \tag{20}$$

В действительности интенсивность, измеряемая квадратом амплитуды, оказывается меньше в отношении k^2a^2, которое по предположению очень мало. Это показывает, что боковое движение воздуха вблизи цилиндрической поверхности имеет своим следствием то, что амплитуды распространяющихся волн на некотором расстоянии умеиьшаются; ср. § 294. Так, например, значительно бо́льшая часть звука фортепианной струны получается не непосредственно от проволоки, а от резонансного ящика, который приводится в вынужденные колебания вследствие измеиения давления в местах укрепления струны.

Реакция воздуха, действующая на колеблющийся цилиндр, на основании уравнения (18) будет равна

$$-\int_0^{2\pi} p\cos\theta a\,d\theta = -\varrho_0 a\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cos\theta\,d\theta = -\pi\varrho_0 ai\sigma AD_1(ka)e^{i\sigma t} =$$

$$= \pi\varrho_0 a^2\frac{D_1(ka)}{kaD_1'(ka)}\,\frac{dU}{dt}. \tag{21}$$

Если ka мало, то это выражение приближеино равно

$$-\pi\varrho_0 a^2\frac{dU}{dt}. \tag{22}$$

Наиболее важное действие воздуха проявляется в том, что масса цилиндра увеличивается на количество, равное массе вытесненного воздуха; ср. § 68 [1]).

§ 304. Исследуем теперь отражение системы плоских волн от твердого цилиндрического препятствия, ось которого параллельна фронту волн.

Примем потенциал падающих волн, как и в § 296, равным

$$\varphi = e^{ikx} \tag{1}$$

и найдем прежде всего разложение этого потенциала в ряд вида (2) **§ 303.** Искомая формула имеет вид

$$e^{ikx} = J_0(kr) + 2iJ_1(kr)\cos\theta + \ldots + 2i^s J_s(kr)\cos s\theta + \ldots \tag{2}$$

---

[1]) Более полное исследование выполнеио Стоксом, см. выше стр. 636.

Этот результат можно получить прямо [1]), если разложить в ряд $e^{ikr\cos\theta}$, воспользоваться формулой

$$\cos^n\theta = \frac{1}{2^{n-1}}\left\{\cos n\theta + \frac{n}{1}\cos(n-2)\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos(n-4)\theta + \ldots\right\} \qquad (3)$$

и из результата отобрать коэфициенты при $\cos s\theta$.

Разложение (2) заключает в себе формулу

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ikr\cos\theta}\cos s\theta\, d\theta = i^s J_s(kr); \qquad (4)$$

эта формула хорошо известна в теории бесселевых функций [2]).

Наоборот, считая эту формулу известной, получим на основании ее другой вывод формулы (2).

Отраженные волны, будучи представлены функцией

$$\varphi' = \sum B_s D_s(kr)\cos s\theta, \qquad (5)$$

должны удовлетворять условию на поверхности

$$\frac{\partial}{\partial r}(\varphi+\varphi') = 0 \qquad (r=a), \qquad (6)$$

которое дает значение

$$B_s = -\frac{2i^s J_s'(ka)}{D_s'(ka)}, \qquad (7)$$

за исключением случая $s=0$, когда множитель 2 должен быть опущен.

Если ka будет мало, то имеют место приближенные равенства

$$J_0'(ka) = -\frac{1}{2}ka, \qquad D_0'(ka) = -\frac{2}{\pi ka} \qquad (8)$$

и для $s>0$

$$J_s'(ka) = \frac{(ka)^{s-1}}{2^s(s-1)!}, \qquad D_s'(ka) = -\frac{2^s s!}{\pi(ka)^{s+1}}. \qquad (9)$$

Отсюда следует

$$B_0 = -\frac{1}{4}\pi k^2a^2, \qquad B_s = \frac{\pi i^s (ka)^{2s}}{2^{2s-1}s!(s-1)!} \quad (s>0). \qquad (10)$$

Наиболее важными членами являются те, которые соответствуют значениям $s=0$ и $s=1$. Если остальные члены отбросить, то будем иметь для отраженных волн

$$\varphi' = -\frac{1}{4}\pi k^2a^2\{D_0(kr) - 2iD_1(kr)\cos\theta\}. \qquad (11)$$

---

[1]) Heine, Kugelfunctionen, I, 82. Можно также применить метод, использованный в (7) § 296.

[2]) Watson, стр. 21. Случай $s=0$ встречался нам уже в § 100; его можно истолковать, говоря, что он показывает, как можно получить потенциал $J_0(kr)$ наложением плоских систем волн, которые движутся в направлениях, равномерно распределенных в плоскости xy вокруг начала; ср. (7), § 289.

Для больших значений ka, если ввести опять множитель с временем, эта функция примет вид

$$\varphi' = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\,\frac{k^{3/2}a^2}{r^{1/2}}\cdot(1+2\cos\theta)\,e^{i(kt-kr-1/4\pi)}. \qquad (12)^1)$$

Скорость, с которой энергия (на единицу длины цилиндра) уносится отраженными волнами наружу, равна

$$-\int_0^{2\pi} p\,\frac{\partial\varphi^1}{\partial r}\,r\,d\theta = -\varrho_0 r\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi^1}{\partial t}\,\frac{\partial\varphi^1}{\partial r}\,d\theta,$$

где значение r может быть взято ради удобства очень большим. Подставляя действительное значение φ^1 из формулы (12), найдем в качестве среднего значения

$$\frac{3}{8}\pi^2\varrho_0\sigma(ka)^4. \qquad (13)$$

Поток энергии в первоначальных волнах равен, как и в § 297, $\frac{1}{2}\varrho_0 k^2 c$. Отношение величины (13) к этой величине будет равно (так как $\sigma = kc$)

$$\frac{3}{8}\pi^2(ka)^3 2a. \qquad (14)$$

Так, например, проволока диаметром в 0,5 *мм*, при длине волны 1220 *мм*, отражает только $6{,}63\cdot10^{-8}$ падающей энергии.

§ 305. Приближенные методы §§ 299, 300 могут быть также применены к соответствующим задачам двух измерений [2]).

Формула (5) § 290 должна быть теперь заменена формулой

$$\varphi_P = -\frac{1}{4}\int D_0(kr)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds + \frac{1}{4}\int\varphi\frac{\partial}{\partial n}D_0(kr)\,ds, \qquad (1)$$

которую можно получить аналогичным способом. В случае области, простирающейся до бесконечности, линейный интеграл можно брать только по внутренним границам, так как φ на большом расстоянии R от начала стремится к виду

$$D_0(kR) \quad \text{или} \quad \frac{e^{-ikR}}{R^{1/2}}.$$

Таким же способом находим соотношение

$$0 = -\frac{1}{4}\int D_0(kr')\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds + \frac{1}{4}\int\varphi\frac{\partial}{\partial n}D_0(kr')\,ds. \qquad (2)$$

где r' обозначает расстояние от точки P', лежащей вне рассматриваемой области.

---

1) Rayleigh, Theory of Sound, § 343.
2) Rayleigh, см. выше, стр. 647, 650.

Внутри области в плоскости xy, размеры которой малы по сравнению с длиной волны, величина kr будет малой, и формула (1) приводится к виду

$$\varphi_P = \frac{1}{2\pi}\int \ln r \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds - \frac{1}{2\pi}\int \varphi \frac{\partial}{\partial n}\ln r\,ds, \tag{3}$$

причем постоянный член здесь отброшен. Функция φ_P, определенная таким образом, удовлетворяет уравнению

$$\Delta_1\varphi = 0, \tag{4}$$

имеющему место в случае несжимаемой жидкости.

1. Рассмотрим прежде всего случай, когда волны падают нормально на плоскую пластинку; положим

$$\varphi = e^{ikx} + \chi, \tag{5}$$

где χ обозначает потенциал отраженных волн. Если мы предположим, что пластинка занимает часть плоскости $x = 0$, лежащую между прямыми $y = \pm b$, то условие для χ примет вид

$$\frac{\partial\chi}{\partial x} = -ik \qquad (x = 0,\quad b > y > -b). \tag{6}$$

Применяя теперь формулы (1) и (2) к области, лежащей вправо от оси y, и совмещая точку P' с *зеркальным изображением* точки P по отношению к границе этой области, получим после вычитания

$$\chi_P = \frac{1}{2}\int_{-b}^{b} \chi \frac{\partial}{\partial n} D_0(kr)\,dy, \tag{7}$$

где значения χ и $\frac{\partial D_0}{\partial n}$ должны быть взяты на положительной стороне пластинки. Обозначая через x и y координаты точки P, мы будем иметь $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial x}$, и тогда на расстоянии r от начала, значительно превосходящем $2b$, будет иметь место формула

$$\chi_P = -\frac{1}{2}\int_{-b}^{b} \chi\,dy \frac{\partial}{\partial x} D_0(kr); \tag{8}$$

ср. (4) § 299. Определенный интеграл равен половине „импульса" пластинки, отнесенного к единице длины; при этом предполагается, что пластинка движется в несжимаемой жидкости с плотностью, равной единице, со скоростью ik и обращена широкой стороной вперед. Отсюда на основании формулы (11) § 71 получаем

$$\int_{-b}^{b} \chi\,dy = \frac{1}{2}\,ik\pi b^2 \tag{9}$$

и, следовательно,

$$\chi_P = -\frac{1}{4}\,i\pi kb^2 \frac{\partial}{\partial x} D_0(kr) = \frac{1}{4}\,i\pi k^2 b^2 D_1(kr)\cos\theta. \tag{10}$$

Если значение kr велико, то эта формула на основании формул (14) § 303 приводится к виду

$$\chi_P = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\pi^{1/2} k^{3/2} b^2}{r^{1/2}} e^{-i(kr + 1/4\pi)} \cos\theta. \tag{11}$$

Отношение энергии, рассеянной в течение одной секунды, к потоку энергии первоначальных волн равно

$$\frac{1}{16} \pi^2 (kb)^3 2b; \tag{12}$$

это отношение в точности равно одной шестой соответствующего отношения в случае кругового цилиндра радиуса b.

2. В случае отверстия в плоском экране ($x = 0$), ограниченного параллельными прямыми ($y = \pm b$), положим, как в (10) § 299,2,

$$\varphi = e^{ikx} + e^{-ikx} + \chi \qquad \text{и} \qquad \varphi = \chi' \tag{13}$$

соответственно для $x \gtrless 0$, и постараемся так определить χ и χ', чтобы для всего отверстия имели место равенства

$$\chi = -1, \qquad \chi' = +1, \tag{14}$$

в то время как на самом экране было бы

$$\frac{\partial\chi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\chi'}{\partial x} = 0. \tag{15}$$

Если мы приложим теперь формулы (1) и (2) к части плоскости, лежащей вправо от оси y, и если далее мы совместим точку P' с зеркальным изображением точки P, то получим в результате сложения

$$\chi_P = -\frac{1}{2} \int_{-b}^{b} D_0(kr) \frac{\partial\chi}{\partial n} dy, \tag{16}$$

причем δn взято с положительной стороны (плоскости $y=0$). Для расстояний r от начала, значительно превосходящих $2b$, из этой формулы получается

$$\chi_P = -\frac{1}{2} \int_{-b}^{b} \frac{\partial\chi}{\partial n} dy\, D_0(kr). \tag{17}$$

В непосредственной близости от отверстия движение, представленное функциями χ и χ', одинаково с течением несжимаемой жидкости через то же самое отверстие, и поэтому приближенное значение определенного интеграла (17) может быть получено из сравнения с соответственными результатами § 66, 1. Оказывается, что соответствующее единице потока приращение χ на пути от самого отверстия до точки, находящейся на расстоянии r, значительно превосходящем $2b$, будет равно

$$\frac{1}{\pi} \ln \frac{2r}{b}.$$

Мы можем все же принять, что значение r мало по сравнению с длиной волны, и тогда формулы (14) и (17) показывают, что в действительной задаче соответствующее приращение χ на основании формул (12) § 303 будет равно

$$1 + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^{b} \frac{\partial\chi}{\partial n} dy \left(\ln \frac{1}{2} kr + \gamma + \frac{1}{2} i\pi\right). \tag{18}$$

Полагая это выражение равным

$$\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{\partial\chi}{\partial n}\,dy\,\ln\frac{2r}{b}, \tag{19}$$

находим

$$\int_{-b}^{b}\frac{\partial\chi}{\partial n}\,dy=-\frac{\pi}{\ln\frac{1}{4}kb+\gamma+\frac{1}{2}i\pi}. \tag{20}$$

Тогда, если значение kr велико, из формулы (17) следует

$$\chi_P=\frac{\frac{1}{2}\pi}{\ln\frac{1}{4}kb+\gamma+\frac{1}{2}i\pi}D_0(kr)=$$

$$=\frac{1}{\ln\frac{1}{4}kb+\gamma+\frac{1}{2}i\pi}\left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{1/2}e^{-i(kr+1/4\pi)} \tag{21}$$

Значение функции χ' в произвольной точке P с отрицательной стороны плоскости $x=0$ равно и по знаку прямо противоположно значению χ в точке, представляющей зеркальное изображение точки P по отношению к этой плоскости.

Отношение энергии, прошедшей через отверстия, к потоку энергии первоначальных волн получается равным

$$\frac{\frac{1}{4}\pi^2}{kb\left\{\left(\ln\frac{1}{4}kb+\gamma\right)^2+\frac{1}{4}\pi^2\right\}}\,2b. \tag{22}$$

Если длина волны в 10, 100 или 1000 раз больше ширины отверстия, то множитель $2b$ оказывается соответственно равным 1,240, 3,795, 17,20.

3. Задача в двух измерениях о диффракции плоских волн у цилиндрического препятствия с произвольной формой поперечного сечения может быть исследована методом § 300 [1]), причем вместо формулы (5) § 290 должна быть взята приведенная выше формула (1). Так как при этом новые вопросы не затрагиваются, то достаточно будет привести важнейшие результаты. Мы будем считать, что волны исходят из направления $(\lambda, \mu, 0)$ и будем поэтому писать

$$\varphi=e^{ik(\lambda x+\mu y)}+\chi, \tag{23}$$

где функция χ должна представлять отраженные волны. Далее мы предположим, что оси x и y имеют специальные направления в плоскости поперечного сечения. Эти направления определяются тем, что кинетическая энергия несжимаемой жидкости с плотностью, равной единице, отнесенная к единице длины вдоль оси z, при движении цилиндра в жидкости со скоростью $(u, v, 0)$ дается выражением вида

$$\frac{1}{2}(Au^2+Bv^2), \tag{24}$$

где, следовательно, член с произведением uv должен отсутствовать. Размеры поперечного сечения предполагаются при этом малыми по сравнению с дли-

[1]) Ср. Rayleigh, см. выше, стр. 650.

ной волны; волны, отраженные в направлении $(\lambda_1, \mu_1, 0)$, определяются тогда формулой

$$\chi_P = -\frac{k^2 S}{(8\pi kr)^{1/2}} e^{-i\left(kr+\frac{1}{4}\pi\right)} - \frac{k^2}{(8\pi kr)^{1/2}} \{(A+S)\lambda\lambda_1 + (B+S)\mu\mu_1\} e^{-i\left(kr+\frac{1}{4}\pi\right)}, \quad (25)$$

где S — площадь поперечного сечения.

Для эллиптического поперечного сечения, полуоси которого a и b лежат в направлении осей x и y, имеем [см. (11) § 77]

$$S = \pi ab, \qquad A = \pi b^2, \qquad B = \pi a^2. \quad (26)$$

В случае кругового цилиндра ($a = b$) или плоской пластинки ($a = 0$) мы приходим к уже ранее полученным результатам.

§ 306. Мы можем также исследовать те возмущения, которые производятся в последовательности плоских волн тонким экраном, прорезанным рядом параллельных, равных и равноотстоящих друг от друга щелей. Как и выше, метод исследования является приближенным и основывается на предположении, что длина волны велика по сравнению с расстоянием между центрами соседних отверстий.

Предварительно определим течение несжимаемой жидкости сквозь твердую решетку вышеупомянутого вида. Это можно сделать при помощи метода Шварца (§ 73), но для нашей цели достаточно будет только привести результаты и их проверить. Возьмем ось x перпендикулярно к плоскости решетки, ось y в плоскости решетки перпендикулярно к направлению длины отверстий и напишем

$$\operatorname{ch} w = \mu \operatorname{ch} z, \quad (1)$$

где

$$w = \varphi + i\psi, \qquad z = x + iy \quad (2)$$

и μ предполагается больше, чем единица. Определенное таким способом w будет циклической функцией; но мы можем избежать всякую неопределенность, если ограничимся сначала той половиной плоскости xy, для которой $x > 0$, а затем зафиксируем значение w в какой-либо точке. Будем предполагать, что в начале координат $\psi = 0$, в то время как значение φ равно действительному положительному значению $\operatorname{arcch} \mu$.

Формула (1) дает

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ch}\varphi \cos\psi &= \mu \operatorname{ch} x \cos y, \\ \operatorname{sh}\varphi \sin\psi &= \mu \operatorname{sh} x \sin y. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Геометрическое место точек, для которых $\varphi = 0$, состоит из тех частей оси y, для которых

$$1 > \mu \cos y > -1;$$

эти части представляют отверстия, так что в масштабе наших формул половина ширины отверстия равна $\arcsin \frac{1}{\mu}$. Для других частей области $x > 0$ значения φ будут положительными. Далее линии

$$\psi = 0, \qquad \psi = \pm\pi, \qquad \psi = \pm 2\pi, \ldots$$

состоят отчасти из прямых

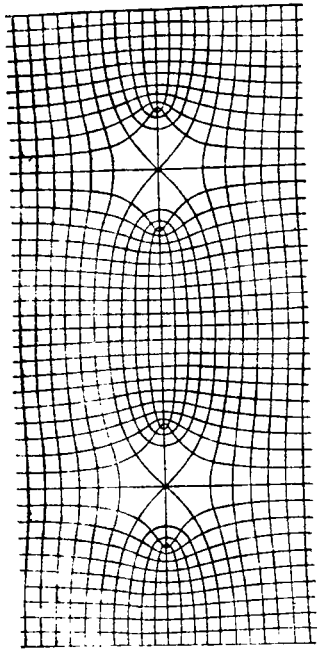
$$y = 0, \qquad y = \pm\pi, \qquad y = \pm 2\pi, \ldots,$$

отчасти же из тех отрезков оси y, для которых

$$|\mu \cos y| > 1;$$

эти отрезки соответствуют частям экрана между отверстиями.

Кривые $\varphi = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$ для одного специального случая изображены на фиг. 78, причем значение μ для упрощения вычислений принято равным



Фиг. 78.

$$\mu = \operatorname{ch} \frac{1}{5}\pi = 1{,}2040;$$

отсюда получается

$$\arcsin \frac{1}{\mu} = 0{,}312\,\pi, \quad \arccos \frac{1}{\mu} = 0{,}188\,\pi$$

Последние числа дают значения относительной ширины отверстий и лежащих между ними частей экрана.

Формулы (3) и фиг. 78 [1]) допускают различные интерпретации в электростатике и других смежных математических областях. В рассматриваемом здесь случае мы должны принять, что значения ψ в двух точках, лежащих симметрично по отношению к обеим сторонам оси y, равны, в то время как значения φ в этих точках хотя и равны друг другу, но противоположны по знаку.

Из формул (3) или из рассмотрения фиг. 78 получается, что функция φ в формулах (3) есть четная периодическая функция от y с периодом π. Поэтому она может быть разложена по теореме Фурье в ряд по косинусам кратных от $2y$, причем коэфициенты суть функции от x, общий вид которых определяется подстановкой в уравнение

$$\Delta_1 \varphi = 0. \qquad (4$$

Если мы примем во внимание условие, которое должно удовлетворяться при больших значениях x, то найдем для положительных значений x

$$\varphi = \ln \mu + x + \sum_1^\infty C_s e^{-2sx} \cos 2sy. \qquad (5)$$

---

[1]) Взяты из работы автора, указанной на стр. 675. Формула, равносильная с формулой (1), была дана Ларморо м, Mathematical Tripos ч. II, 1895.

[2]) Точные значения коэфициентов C_s для наших целей не требуются Можно показать, что в обозначениях гипергеометрических функций

$$C_s = \frac{(-1)^{s-1}}{s} F\left(s, -s, 1, \frac{1}{\mu^2}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{s-1}}{s}\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) F\left(1+s, 1-s, 1, \frac{1}{\mu^2}\right).$$

См. названную работу.

Если мы введем более общую линейную единицу и обозначим ширину каждого отверстия через a, а ширину полосы экрана между отверстиями через b, то будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ch}\varphi\cos\psi &= \mu\operatorname{ch}\frac{\pi x}{a+b}\cos\frac{\pi y}{a+b},\\ \operatorname{sh}\varphi\sin\psi &= \mu\operatorname{sh}\frac{\pi x}{a+b}\sin\frac{\pi y}{a+b}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где

$$\mu=\sec\frac{\pi b}{2(a+b)}=\operatorname{cosec}\frac{\pi a}{2(a+b)}. \tag{7}$$

Вместо разложения (5) получается теперь разложение

$$\varphi=\ln\mu+\frac{\pi x}{a+b}+\sum_1^\infty C_s e^{-\varkappa_s x}\cos\frac{2s\pi y}{a+b}, \tag{8}$$

где

$$\varkappa_s=\frac{2s\pi}{a+b}. \tag{9}$$

Обратимся теперь к акустической задаче. Соответственно последовательности падающих волн с потенциалом e^{ikx} положим [1])

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= e^{ikx}+e^{-ikx}+\chi \qquad \text{при } x>0\\ \text{и}\qquad \Phi &= \chi' \qquad\qquad\quad \text{при } x<0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Как и в §§ 299,2 и 305,2 для отверстий должны иметь место условия

$$\chi=-1,\qquad \chi'=+1, \tag{11}$$

а для остальной части плоскости $x=0$

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial\chi'}{\partial x}=0. \tag{12}$$

Так как функция χ должна удовлетворять уравнению

$$(\Delta_1+k^2)\chi=0 \tag{13}$$

и должна к тому же быть периодической относительно y с периодом $a+b$, то она должна разлагаться в ряд Фурье вида

$$\chi=B_0e^{-ikx}+\sum_1^\infty B_s e^{-\lambda_s x}\cos\frac{2s\pi y}{a+b}, \tag{14}$$

где

$$\lambda_s^2=\frac{4s^2\pi^2}{(a+b)^2}-k^2. \tag{15}$$

Так как по предположению величина $a+b$ мала по сравнению с длиной волны $\frac{2\pi}{k}$, то величины λ_s будут действительными и, кроме того, очень мало будут уклоняться от значений $\varkappa_s$. Члены, содержащие $e^{\lambda_s x}$, исключены условием, что функция χ должна быть конечной при $x=\infty$, так что волны, представленные при помощи функции χ, должны сделаться в конце концов плоскими. То обстоятельство, что волны движутся от решетки наружу, оправдывает отбрасывание члена с e^{ikx}.

---

[1]) Буква Φ употреблена здесь для обозначения акустического потенциала скоростей, тогда как φ использована здесь для другой цели.

Если бы k было равно нулю, то условия для определения χ были бы такими же, как в случае несжимаемой жидкости, и мы имели бы

$$\chi = -1 + C\varphi, \tag{16}$$

где φ — функция, определяемая из формул (6) (способом, указанным выше), а C — некоторая постоянная; мы можем заранее предвидеть, что то же самое выражение будет в качестве приближенного пригодным и в рассматриваемом случае в непосредственной близости от решетки. Кроме того, для малых значений kx разложение (14) принимает вид

$$\chi = B_0(1 - ikx) + \sum_1^\infty B_s e^{-\varkappa_s x} \cos \frac{2s\pi y}{a+b}, \tag{17}$$

причем подстановка $\varkappa_s$ вместо λ_s в показательную функцию соответствует ошибке порядка $\frac{k^2(a+b)^2}{4\pi^2}$. Подставляя из (8) в (16), найдем, что формулы (16) и (17) в действительности будут тождественны, есть принять

$$B_0 = -1 + C \ln \mu, \qquad -ikB_0 = \frac{\pi C}{a+b} \tag{18}$$

и для $s > 0$

$$B_s = CC_s. \tag{19}$$

Отсюда получается

$$B_0 = -\frac{1}{1+ikl}, \tag{20}$$

где

$$l = \frac{a+b}{\pi} \ln \sec \frac{\pi b}{2(a+b)}. \tag{21}$$

Что же касается функции χ', то все условия оказываются выполненными, если мы предположим, что ее значение для каждой точки P' на отрицательной стороне решетки равно и прямо противоположно значению χ в точке P, лежащей на положительной стороне и являющейся зеркальным изображением точки P'. Из этого следует

$$\chi' = -B_0 e^{ikx} - \sum_1^\infty B_s e^{\lambda_s x} \cos \frac{2s\pi y}{a+b}. \tag{22}$$

На расстоянии от решетки, равном нескольким длинам волн, можно пренебречь последними членами в формулах (14) и (22), а поэтому волны там оказываются почти плоскими. Принимая во внимание формулы (10), мы видим, что коэфициенты отражения и прошедших через решетку волн суть $1 + B_0$ и $-B_0$ или соответственно

$$\frac{ikl}{1+ikl} \quad \text{и} \quad \frac{1}{1+ikl}, \tag{23}$$

если каждая из первоначальных волн принята в качестве единичной. В таком случае интенсивности этих волн представляются формулами

$$I = \frac{k^2 l^2}{1+k^2 l^2}, \qquad I' = \frac{1}{1+k^2 l^2}. \tag{24}$$

При достаточно больших длинах волн отражение имеет место лишь в очень малой степени даже тогда, когда отверстия составляют только очень

малую часть поверхности экрана. Соответствующие числовые значения могут быть записаны в виде

$$\frac{a}{a+b}=0,\ 0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}3,\ 0{,}4,\ 0{,}5,\ 0{,}6,\ 0{,}7,\ 0{,}8,\ 0{,}9,\ 1{,}0,$$

$$\frac{l}{a+b}=\infty,\ 0{,}590,\ 0{,}374,\ 0{,}251,\ 0{,}169,\ 0{,}110,\ 0{,}067,\ 0{,}037,\ 0{,}016,\ 0{,}004,\ 0.$$

Если мы предположим, например, что длина волны в десять раз больше интервала $a+b$ и что отверстия занимают десятую часть поверхности решетки, то найдем для интенсивностей отраженных и прошедших сквозь решетку волн значения

$$I=0{,}121, \qquad I'=0{,}879.$$

Несмотря на то, что отверстия сравнительно узки, 88% звука проходит сквозь решетку.

§ 307. Подобный же метод может быть приложен к случаю решетки, которая составлена из параллельных равноотстоящих друг от друга проволок.

В § 64 мы показали, что потенциал скоростей и функция тока для несжимаемой жидкости, которая протекает сквозь решетку, составленную из параллельных цилиндрических стержней радиуса b, приближенно определяются из формулы

$$w=z+\frac{\pi b^2}{a}\coth\frac{\pi z}{a}, \qquad (1)$$

где a обозначает расстояние между осями двух последовательных стержней и предполагается, что $b<\frac{1}{4}a$.

Если действительная часть z будет положительной, то будем иметь

$$w=z+\frac{\pi b^2}{a}\left(1+2\sum_1^\infty e^{-\frac{2s\pi z}{a}}\right) \qquad (2)$$

и отсюда получим

$$\varphi=x+\frac{\pi b^2}{a}\left(1+2\sum_1^\infty e^{-\frac{2s\pi x}{a}}\cos\frac{2s\pi y}{a}\right). \qquad (3)$$

Аналогично находим для отрицательных x

$$\varphi=x-\frac{\pi b^2}{a}\left(1+2\sum_1^\infty e^{\frac{2s\pi x}{a}}\cos\frac{2s\pi y}{a}\right). \qquad (4)$$

В случае же акустической задачи потенциал скоростей будет принимать вид

$$\Phi=e^{ikx}+Ae^{-ikx}+\sum_1^\infty C_s e^{-\lambda_s x}\cos\frac{2s\pi y}{a} \qquad (5)$$

или

$$\Phi=Be^{ikx}-\sum_1^\infty C_s e^{-\lambda_s x}\cos\frac{2s\pi y}{a}, \qquad (6)$$

смотря по тому, какое из двух неравенств $x \gtrless 0$ имеет место; при этом λ_s обозначает положительную величину, определенную формулой

$$\lambda_s^2 = \frac{4s^2\pi^2}{a^2} - k^2. \tag{7}$$

Для значений x, малых по сравнению с длиной волны, мы можем пренебречь разностью между λ_s и $\frac{2s\pi}{a}$, если длина волны велика по сравнению с a. При этих условиях формулы (5) и (6) приводятся соответственно к виду

$$\Phi = 1 + A + ik(1-A)x + \sum_1^\infty C_s e^{-\frac{2s\pi x}{a}} \cos\frac{2s\pi y}{a} \tag{8}$$

и

$$\Phi = B + ikBx - \sum_1^\infty C_s e^{\frac{2s\pi x}{a}} \cos\frac{2s\pi y}{a}. \tag{9}$$

Функция Φ принимает, следовательно, вид

$$\Phi = \alpha\varphi + \beta, \tag{10}$$

где φ определяется формулами (3) и (4), а α и β суть постоянные, причем имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned} 1 + A &= \alpha\frac{\pi b^2}{a} + \beta, & B &= -\alpha\frac{\pi b^2}{a} + \beta, \\ ik(1-A) &= \alpha, & ikB &= \alpha, \quad C_s = 2\alpha\frac{\pi b^2}{a}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Это дает

$$A = \frac{ikl}{1+ikl}, \qquad B = \frac{1}{1+ikl}, \tag{12}$$

где

$$l = \frac{\pi b^2}{a}. \tag{13}$$

Интенсивности отраженных и прошедших через решетку волн будут равны поэтому

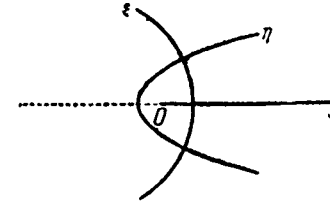
$$I = \frac{k^2l^2}{1+k^2l^2}, \qquad I' = \frac{1}{1+k^2l^2}. \tag{14}$$

Если половина длины волны велика по сравнению с $\frac{b^2}{a}$, то имеет место свободное прохождение воли почти без отражения. Этим обстоятельством объясняется „чрезвычайно малое сопротивление, которое оказывают прохождению звука тонкие проволоки и волокна [1])".

§ 308. Диффракция плоских звуковых волн у края бесконечно простирающегося в одну сторону экрана и образование звуковой

[1]) Rayleigh, Theory of Sound, § 343. Исследования §§ 306, 307 взяты с соответствующими изменениями из одной работы автора, „On the Reflection and Transmission of Electric Waves by a Metallic Grating", Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXIX, 523 (1898).

тени были исследованы Зоммерфельдом [1]) и Кэрслоу [2]). Следует заметить, что в условия этой задачи не входят никакие другие особые линейные величины, кроме длин волн, и вместе с тем оказывается, что общий характер результата не зависит от длины волны. Случай нормального падения может быть исследован очень простым способом, который описывается ниже [3]).



Фиг. 79.

Мы будем предполагать, что экран занимает ту половину плоскости xz, для которой координата x положительна. Удобно ввести „параболические координаты", которыми пользовались Ганкель и другие авторы. Положим

$$k(x+iy)=(\xi+i\eta)^2 \tag{1}$$

или

$$kx=\xi^2-\eta^2, \qquad ky=2\xi\eta; \tag{2}$$

следовательно, будем иметь

$$kr=\xi^2+\eta^2, \tag{3}$$

если через r обозначить расстояние от начала координат. Кривые

$$\xi=\text{const.}, \qquad \eta=\text{const.}$$

образуют систему софокусных парабол, общий фокус которых лежит в начале.

Можно принять, что координата η (фиг. 79) всюду положительна, за исключением обеих сторон экрана, где она равна нулю. Координата ξ будет тогда на обеих сторонах оси x иметь противоположные знаки и на части этой оси, незанятой экраном, исчезать. Легко получаем следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial x}&=\frac{1}{2}\frac{\xi}{r}, & \frac{\partial\eta}{\partial x}&=-\frac{1}{2}\frac{\eta}{r},\\ \frac{\partial\xi}{\partial y}&=\frac{1}{2}\frac{\eta}{r}, & \frac{\partial\eta}{\partial y}&=\frac{1}{2}\frac{\xi}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Потенциал скоростей φ должен удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+k^2\varphi=0, \tag{5}$$

причем фактор времени, как обычно, равен e^{ikct}.

Пусть первоначальные волны представлены функцией

$$\varphi=e^{ikv}, \tag{6}$$

и мы будем искать решения вида

$$e^{ikv_u} \qquad \text{и} \qquad e^{-ikv_v}. \tag{7}$$

---

[1]) Sommerfeld, Mathematische Theorie der Diffraction, Math. Ann., XLVII, 317 (1895).

[2]) Carslaw, Some Multiform Solutions of the Partial Differential Equations of Physics . . ., Proc. Lond. Math. Soc., XXX, 121 (1899).

[3]) Метод заимствован из одной работы автора, „On Sommerfeld's Diffraction Problem, and on Reflection by a Parabolic Mirror", Proc. Lond. Math. Soc. (2), IV, 190 (1906).

Если возьмем решение первого вида, то для u получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2ik\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{8}$$

Вследствие соотношений (4) отсюда получается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+4i\left(\eta\frac{\partial u}{\partial \xi}+\xi\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0, \tag{9}$$

которое удовлетворяется решением вида

$$u=f(\xi+\eta)=f(\zeta), \tag{10}$$

если

$$\frac{d^2 f}{d\zeta^2}+2i\zeta\frac{df}{d\zeta}=0, \tag{11}$$

т. е., если

$$u=A+B\int_0^{\zeta+\eta} e^{-i\zeta^2}d\zeta. \tag{12}$$

Если же значение ω велико и положительно, то мы будем иметь приближенную формулу

$$\int_0^{\omega} e^{-i\zeta^2}d\zeta=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-1/4\,i\pi}+\frac{i}{2\omega}e^{-i\omega^2}+\ldots \tag{13}$$

На большом расстоянии от начала со стороны положительных значений y имеет также место приближенное равенство

$$ue^{iky}=\left(A+\frac{1}{2}\sqrt{\pi}Be^{-1/4\,i\pi}\right)e^{iky}+\frac{i}{2(\zeta+\eta)}e^{-ikr}. \tag{14}$$

Последний член в этом равенстве представляет волны, расходящиеся от начала.

Подобным же способом можно получить и решение вида

$$u'=A'+B'\int_0^{\xi-\eta} e^{i\zeta^2}d\zeta, \tag{15}$$

но так как это решение представляет волны, сходящиеся к началу, то оно не подходит для наших целей.

Если рассмотрим теперь второе из решений (7), то для v получим выражение вида

$$v=C+D\int_0^{\xi-\eta} e^{-i\zeta^2}d\zeta \tag{16}$$

и другое выражение, которое мы из указанием выше основании отбрасываем.

Покажем теперь, что функция

$$\varphi=Ae^{iky}+Ce^{-iky}+Be^{iky}\int_0^{\zeta+\eta} e^{-i\zeta^2}d\zeta+De^{-iky}\int_0^{\zeta-\eta} e^{-i\zeta^2}d\zeta \tag{17}$$

при подходящем выборе постоянных удовлетворяет всем условиям задачи.

Прежде всего эта функция должна при $y=0$ и при отрицательном x, абсолютное значение которого велико, приводиться к виду (6). Отсюда получаются, если положить $\zeta=0$, $\eta=\infty$ и принять во внимание уравнение (13), условия

$$A+\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-1/4\,i\pi}B=1, \quad C-\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-1/4\,i\pi}D=0. \tag{18}$$

Далее для $y=0$ и $x>0$ должно быть

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.$$

Применяя равенства (4) и полагая $\eta=0$, находим, что это условие удовлетворяется при

$$A=C, \qquad B=D. \tag{19}$$

Окончательно для φ получаем выражение

$$\varphi=\frac{1}{2}\left(e^{iky}+e^{-iky}\right)+ \\ +\frac{e^{1/4\,i\pi}}{\sqrt{\pi}}\left\{e^{iky}\int_0^{\zeta+\eta}e^{-i\zeta^2}\,d\zeta+e^{-iky}\int_0^{\xi-\eta}e^{-i\zeta^2}\,d\zeta\right\}. \tag{20}$$

Это выражение равносильно той форме, которую принимает результат Зоммерфельда в случае нормального падения волн [1]).

Если значения $\xi+\eta$ и $\xi-\eta$ велики и положительны, то формула приводится к виду

$$\varphi=e^{iky}+e^{-iky}. \tag{21}$$

Эта формула относится к области, которая лежит вправо от экрана на большом расстоянии перед ним; второй член представляет всю отраженную часть волн.

Если значение $\xi+\eta$ велико и положительно, а значение $\xi-\eta$ велико по абсолютной величине и отрицательно, то будем иметь приближенно

$$\varphi=e^{iky}. \tag{22}$$

Эта формула относится к области, которая целиком лежит на левой стороне оси y, где преобладают первоначальные волны. Когда же величины $\xi+\eta$ и $\xi-\eta$ обе велики и отрицательны, то будем иметь

$$\varphi=0; \tag{23}$$

это равенство относится к области звуковой тени за экраном.

На каждой стороне плоскости $y=0$ существует промежуточная область, в которой имеет место переход от состояния, представленного приближенно функцией (22), к состоянию, выраженному функциями (21) или (23) соответственно. Чтобы установить критерий приложимости нашего приближенного способа, выберем величину ω таким образом, чтобы значение величины $\omega\sqrt{\pi}$ можно было считать большим [2]). Результаты (21) и (22) основываются на предположении, что как значение $|\xi-\eta|$, так и значение $|\xi+\eta|$ велики. Границу соответствующей области, лежащей на стороне положительных значений y, мы получим, если положим

$$|\xi-\eta|=\omega.$$

---

[1]) Случай наклонного падения разобран в работах, указанных на стр. 675.

[2]) Значение ω не должно быть очень большим. Если мы положим, например, $\omega=6$, то ошибка не будет превосходить 10%.

Это приводит, на основании равенств (2), к параболе

$$y=\frac{k}{2\omega}x^2-\frac{\omega^2}{2k}, \tag{24}$$

параметр которой пропорционален длине волны. Соответствующая область на стороне отрицательных значений y ограничена параболой

$$y=-\frac{k}{2\omega}x^2+\frac{\omega^2}{2k}. \tag{25}$$

Эти промежуточные области представляют собой то место, где происходят явления диффракции, важные по своей оптической аналогии; здесь эти явления не могут быть исследованы ближе. Нетрудно показать, что для точек, которые лежат вблизи от геометрической тени и расстояния которых от краев экрана велики по сравнению с длиной волны, результаты практически совпадают с теми, которые получены при помощи метода Френеля [1]).

Атмосферные волны.

§ 309. Теория волн, распространяющихся в атмосфере по вертикальному направлению, интересна как пример распространения волн в среде неодинаковой плотности [2]).

Мы будем считать ось x направленною вертикально вверх; пусть ξ обозначает вертикальное смещение в момент t той плоскости частиц, невозмущенное положение которой есть x. Соответствующие значения давления и плотности обозначим через p и ϱ, а значения тех же величин в случае равновесия через p_0 и ϱ_0. Последние две величины подчинены статическому условию

$$\frac{\partial p_0}{\partial x}=-g\varrho_0. \tag{1}$$

Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$\varrho_0\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\frac{\partial p}{\partial x}-g\varrho_0=-\frac{\partial}{\partial x}(p-p_0), \tag{2}$$

а уравнение непрерывности

$$\varrho\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)=\varrho_0. \tag{3}$$

Если мы будем пренебрегать теплопроводностью и лучеиспусканием, то значения p и ϱ в произвольной точке будут связаны адиабатическим соотношением

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^\gamma, \tag{4}$$

где γ есть отношение обеих удельных теплоемкостей. Отсюда следует в первом приближении

$$p-p_0=-\gamma p_0\frac{\partial\xi}{\partial x}. \tag{5}$$

---

[1]) См. названную работу. Диффракция „единичной волны" была исследована автором в Proc. Lond. Math. Soc. (2), VIII, 422 (1910).

[2]) Эта задача была исследована Пуассоном, см. выше, стр. 617 и Рэлеем, On Vibrations of an Atmosphere, Phil. Mag. (4), XXIX, 173 (1890) (Papers, III, 335). Исследование, данное в тексте, появилось в Proc. Lond. Math. Soc. (2), VII, 122 (1908).

Подставляя значение $p - p_0$ из (5) в (2), получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \gamma g \frac{\partial \xi}{\partial x}, \tag{6}$$

причем здесь положено

$$c^2 = \frac{\gamma p_0}{\varrho_0}, \tag{7}$$

т. е. c обозначает скорость звука (обыкновенно переменную), соответствующую условиям среды в плоскости $x = 0$. Если обозначить через H высоту „однородной атмосферы", которая соответствует температуре в этой плоскости, то получится

$$c^2 = \gamma g H. \tag{8}$$

Предполагая вначале, что температура в состоянии равновесия всюду одинакова, так что H и c суть постоянные, получим

$$\varrho_0 = Ce^{-\frac{x}{H}}. \tag{9}$$

Удобно принять $2H$ за единицу длины, а единицу времени выбрать так, чтобы было $c = 1$. При этом условии будем иметь

$$\varrho_0 = Ce^{-2x} \tag{10}$$

и

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{11}$$

Если положить

$$\xi = ue^x, \tag{12}$$

то из (11) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u. \tag{13}$$

В случае простых гармонических колебаний с фактором времени $e^{i\sigma t}$ для $\sigma^2 > 1$ будем иметь

$$u = Ae^{i\sigma t + i\sqrt{\sigma^2 - 1}\, x} + Be^{i\sigma t - i\sqrt{\sigma^2 - 1}\, x}; \tag{14}$$

первый и второй члены этого выражения представляют системы волн, движущихся соответственно вниз и вверх.

Если $\sigma^2 < 1$, то имеем

$$u = \left\{Ae^{\sqrt{1-\sigma^2}\, x} + Be^{-\sqrt{1-\sigma^2}\, x}\right\} e^{i\sigma t}. \tag{15}$$

Каждый член представляет такую стоячую волну, которая в конце концов установилась бы благодаря продолжительному действию источника простых гармонических колебаний; оба члена относятся к областям соответственно над и под источником.

Следовательно, возмущение, произведенное заданным и поддерживаемым в плоскости $x=0$ колебанием

$$\xi = e^{i\sigma t}, \tag{16}$$

будет выражаться формулами

$$\xi = e^{x} e^{i(\sigma t \mp \sqrt{\sigma^2-1}\, x)}, \quad (\sigma^2 > 1) \tag{17}$$

или

$$\xi = e^{(1 \mp \sqrt{1-\sigma^2})x} e^{i\sigma t}, \quad (\sigma^2 < 1) \tag{18}$$

причем следует брать верхний или нижний знак, смотря по тому, какое из двух неравенств $x \gtrless 0$ имеет место.

Далее для возмущения, которое производится периодической *силой*, сконцентрированной в бесконечно тонком слое в плоскости $x=0$, находим формулы

$$\xi = -\frac{i}{2\sqrt{\sigma^2-1}} e^{x} e^{i(\sigma t \mp \sqrt{\sigma^2-1}\, x)} \quad (\sigma^2 > 1) \tag{19}$$

или

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{1-\sigma^2}} e^{(1 \mp \sqrt{1-\sigma^2})x} e^{i\sigma t} \quad (\sigma^2 < 1), \tag{20}$$

если только плотность в плоскости $x=0$ примем за единицу плотности. Чтобы проверить это, заметим, что формула (5) в выбранных нами единицах имеет вид

$$p - p_0 = -e^{-2x} \frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{21}$$

Формулы (19) и (20) дают, таким образом, для разности давлений на обеих сторонах плоскости $x=0$ значение $e^{i\sigma t}$. Можно заметить, что определяемые из формул (19) и (20) амплитуды бесконечно возрастают, когда σ приближается к критическому значению, равному *единице*. В общих единицах критическое значение σ равно $\frac{c}{2H}$, а соответствующий период есть $\frac{4\pi H}{c}$. Для воздуха при обыкновенной температуре период равен примерно (в очень грубом приближении) 5 минутам.

Из формулы (14) получается, если возвратиться к общим единицам, что для прогрессивной последовательности волн с длиною $\frac{2\pi}{k}$

$$\xi = a e^{\frac{1}{2}\frac{x}{H}} \cos(\sigma t - kx), \tag{22}$$

причем

$$\sigma^2 = k^2 c^2 + \frac{1}{4}\frac{c^2}{H^2}. \tag{23}$$

Скорость волн оказывается при этом равной

$$V = \frac{\sigma}{k} = c\sqrt{1 + \frac{1}{4k^2H^2}}. \tag{24}$$

Эта величина изменяется вместе с частотой, но остается приблизительно постоянной, пока длина волны мала по сравнению с $4\pi H$, причем она отличается от c только на малую величину второго порядка. Наибольшее влияние от изменения плотности испытывает амплитуда, которая возрастает по закону, выраженному показательным множителем в формуле (22), если волны при движении вверх входят в более разреженный воздух. Это возрастание можно было бы предвидеть и без вычислений; в самом деле, если изменение плотности в пределах одной волны мало, то не происходит никакого заметного отражения, и энергия на единицу длины, пропорциональная величине $a^2\varrho_0$ (где a обозначает амплитуду), остается при этом неизменной при движении волны. Так как значение ϱ_0 пропорционально $e^{-\frac{x}{H}}$, то отсюда следует, что амплитуда a должна быть пропорциональна $e^{\frac{1}{2}\frac{x}{H}}$.

Легко проверить, что средняя энергия на единицу объема для каждой из последовательности волн (22) равна

$$\frac{1}{2}\varrho\sigma^2a^2, \tag{25}$$

а скорость распространения энергии равна кинематической групповой скорости

$$U = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{1}{4k^2H^2}}}. \tag{26}$$

Атмосфера предполагалась неограниченной вверх и вниз; однако, легко установить эффект твердой горизонтальной стенки. Например, в случае атмосферы, слой которой в плоскости $x = -h$ находится в покое, если в плоскости $x = 0$ поддерживается заданное колебание

$$\xi = a\cos\sigma t \quad \left(\sigma > \frac{c}{2H}\right),$$

будем иметь

$$\xi = ae^{\frac{1}{2}\frac{x}{H}}\cos(\sigma t - kx) \quad (x > c),$$

и

$$\xi = ae^{\frac{1}{2}\frac{x}{H}}\frac{\sin k(x+h)}{\sin kh}\cos\sigma t \quad (x < c),$$

где связь между k и σ такая же, как и в формуле (23).

Чтобы определить свободное движение, соответствующее произвольным начальным условиям, будем исходить из типичного решения [1])

$$u=\left\{A(k)\cos\sqrt{k^2+1}\,t+B(k)\frac{\sin\sqrt{k^2+1}\,t}{\sqrt{k^2+1}}\right\}e^{ikx} \tag{27}$$

уравнения (13). Это решение дает

$$u=A(k),\quad \frac{\partial u}{\partial t}=B(k)\quad (t\to 0). \tag{28}$$

Обобщая формулу (27) на основании теоремы Фурье, получим

$$u=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)\cos\sqrt{k^2+1}\,te^{ikx}\,dk+\int_{-\infty}^{\infty}B(k)\frac{\sin\sqrt{k^2+1}\,t}{\sqrt{k^2+1}}e^{ikx}\,dk, \tag{29}$$

где

$$A(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha)e^{-ik\alpha}\,d\alpha,\qquad B(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)e^{-ik\alpha}\,d\alpha. \tag{30}$$

Выражение (29) удовлетворяет уравнению (13) и дает

$$u=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}=F(x)\quad (t=0). \tag{31}$$

В качестве примера рассмотрим тот случай, когда начальные перемещения равны нулю, а начальное количество движения сосредоточено в непосредственной близости от плоскости $x=0$. Тогда имеем $f(x)=0$, в то время как функция $F(x)$ заметно изменяется только для бесконечно малых значений x, где она становится бесконечно большой, но так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)\,d\alpha=1. \tag{32}$$

Если мы примем плотность на плоскости $x=0$ за единицу плотности, то сообщенное количество движения окажется благодаря этому равным *единице* (на единицу площади). Отсюда получается $A(k)=0$, $B(k)=\frac{1}{2\pi}$ и

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}\frac{\sin\sqrt{k^2+1}\,t}{\sqrt{k^2+1}}\,dk. \tag{33}$$

Значение этого интеграла может быть определено. Вводя новую переменную, получаем

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(t\operatorname{ch}\omega+x\operatorname{sh}\omega)\,d\omega.$$

Если $t^2>x^2$, то положим

$$t=\sqrt{x^2-t^2}\operatorname{ch}\beta,\quad x=\pm\sqrt{x^2-t^2}\operatorname{sh}\beta,\quad \omega+\beta=\omega'$$

---

[1]) Этот метод подобен тому, который применил Пуанкаре в случае „телеграфного уравнения"; см. его Théorie analytique de la propagation de la chaleur, Париж, 1895, гл. VIII.

и на основании формулы Мелера [§ 194 (7)] получим

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\left(\sqrt{t^2-x^2}\,\mathrm{ch}\,\omega'\right)d\omega'=\frac{1}{2}J_0\left(\sqrt{t^2-x^2}\right). \tag{34}$$

Если же $t^2<x^2$, то полагаем

$$t=\sqrt{x^2-t^2}\,\mathrm{sh}\,\beta,\quad x=\pm\sqrt{x^2-t^2}\,\mathrm{ch}\,\beta,\quad \omega\pm\beta=\omega'$$

и получаем

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\left(\sqrt{x^2-t^2}\,\mathrm{sh}\,\omega'\right)d\omega'=0. \tag{35}$$

Возмущение достигает положения x только по истечении промежутка времени $t=\pm x$; соответствующее перемещение определяется формулой

$$\xi=\frac{1}{2}e^{x}J_0\left(\sqrt{t^2-x^2}\right) \tag{36}$$

или в общих единицах формулой

$$\xi=\frac{1}{2\sqrt{\varrho_0\varrho_0'}}J_0\left(\frac{\sqrt{c^2t^2-x^2}}{2H}\right), \tag{37}$$

где ϱ_0 обозначает плотность в положении x и ϱ_0' — плотность в том месте ($x=0$), где был приложен единичный импульс. Структура этой формулы согласуется с хорошо известным законом взаимности [1]).

Можно заметить, что перемещение ξ в произвольной точке после прохода волны не остается постоянным, как это было бы в случае одиородной среды, а колеблется по знаку, непрерывно убывая по амплитуде. Более того, в этих колебаниях знака имеется тенденция к определенной периодичности, а именно, период стремится к пределу 2π, или, в общих единицах, к $\frac{4\pi H}{c}$.

Следует еще заметить, что можно проверить сохранение количества движения в этом случае. Рассмотрим статический момент ($\sum mx$) по отношению к плоскости $x=0$ для массы воздуха, заключенной между верхней и нижней границами системы волн. По сравнению с состоянием равновесия момент этот увеличился на

$$\int_{-t}^{t}\varrho_0\xi\,dx=\frac{1}{2}\int_{-t}^{t}e^{-x}J_0\left(\sqrt{t^2-x^2}\right)dx=\int_{0}^{t}\mathrm{ch}\,x\,J_0\left(\sqrt{t^2-x^2}\right)dx. \tag{38}$$

Можно показать, что этот определенный интеграл равен t [2]).

---

[1]) См. Lamb, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XIX, 144.

[2]) Непосредственным умножением рядов получаем

$$\mathrm{ch}\,(t\cos\theta)\,J_0\,(t\sin\theta)=1+\frac{t^2}{2!}P_2(\cos\theta)+\frac{t^4}{4!}P_4(\cos\theta)+\ldots,$$

и отсюда на основании (8) § 87 следует

$$\int_{0}^{1/2\pi}\mathrm{ch}\,(t\cos\theta)\,J_0\,(t\sin\theta)\sin\theta\,d\theta=1.$$

Это разложение принадлежит Гобсону, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXV, 66 (1893).

Диференцированием убеждаемся в том, что общее количество движения равно единице.

§ 310. Теперь мы предположим, что температура не всюду одинакова, но убывает по направлению вверх с постоянным градиентом. Это определяет верхнюю границу атмосферы, причем оказывается удобным поместить начало на этой границе и положительные значения x отсчитывать вниз. Если в соответствии с этим обозначим через θ_0 абсолютную температуру в состоянии равновесия, то можем написать

$$\theta_0 = \beta x, \tag{1}$$

где β — постоянный температурный градиент. Так как p_0, ϱ_0, θ_0 связаны соотношением

$$p_0 = R\varrho_0\theta_0, \tag{2}$$

то имеем

$$\frac{1}{\varrho_0}\frac{d\varrho_0}{dx} = \frac{1}{p_0}\frac{dp_0}{dx} - \frac{1}{\theta_0}\frac{d\theta_0}{dx} = \frac{g\varrho_0}{p_0} - \frac{\beta}{\theta_0} = \frac{m}{x},$$

где

$$m = \frac{g}{R\beta} - 1. \tag{3}$$

Отсюда следует:

$$\varrho_0 \text{ пропорционально } x^m, \quad p_0 \text{ пропорционально } x^{m+1}. \tag{4}$$

В случае атмосферы, находящейся в „конвективном равновесии“ [1]), когда величина p_0 пропорциональна ϱ_0^γ, будем иметь $m\gamma = m + 1$ или

$$m = \frac{1}{\gamma - 1}, \quad \beta = \frac{(\gamma - 1)\, g}{\gamma R}. \tag{5}$$

Если $\beta = \frac{g}{\varrho}$, то оказывается $m = 0$ и плотность постоянна. Это условие, так же как и всякое другое, при котором m оказывается меньше, чем значение, полученное из формулы (5), означало бы неустойчивость, если бы мы отбросили ограничение, наложенное на вертикальное движение.

Изменяя знак у x в уравнении (6) § 309, получим

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \gamma g\frac{\partial\xi}{\partial x}, \tag{6}$$

где

$$c^2 = \frac{\gamma p_0}{\varrho_0} = \gamma R\beta x. \tag{7}$$

Положим теперь

$$\tau = \int_0^x \frac{dx}{c} = \sqrt{\frac{4x}{\gamma R\beta}} \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{4}\gamma R\beta\tau^2, \tag{8}$$

[1]) Thomson W., Manch. Memoirs (3), II, 125 (1862) (Papers, III, 255)

так что τ обозначает промежуток времени, необходимый для того, чтобы точка, двигаясь со скоростью, все время равной скорости звука в соответствующем месте, прошла расстояние от верхнего края атмосферы до положения x. Если заменим в уравнении (6) независимую переменную x через τ, то получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + \frac{2m+1}{\tau} \frac{\partial \xi}{\partial \tau}. \tag{9}$$

где m имеет значение, данное формулой (3).

В случае простого гармонического колебания ($e^{i\sigma t}$) имеем

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + \frac{2m+1}{\tau} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \sigma^2 \xi = 0. \tag{10}$$

Решение этого уравнения есть

$$\xi = \tau^{-m} \left\{ A J_m(\sigma\tau) + B J_{-m}(\sigma\tau) \right\}. \tag{11}$$

Из (5) § 309 получается, что

$$p - p_0 \text{ пропорционально } \rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \text{ пропорционально } \tau^{2m+1} \frac{\partial \xi}{\partial \tau}, \tag{12}$$

и для того, чтобы эта величина могла стремиться к предельному значению 0 для $x \to 0$, должно быть $B = 0$.

Решение, которое соответствует колебанию

$$\xi = e^{i\sigma t}, \tag{13}$$

происходящему в плоскости $\tau = \tau_1$, имеет вид

$$\xi = \left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^m \frac{J_m(\sigma\tau)}{J_m(\sigma\tau_1)} e^{i\sigma t}. \tag{14}$$

Для больших значений $\sigma\tau$ будем иметь

$$\xi \text{ пропорционально } \frac{1}{\tau^{m+1/2}} \sin\left(\sigma\tau + \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}m\pi\right) e^{i\sigma t}. \tag{15}$$

Выражение (14) представляет, таким образом, стоячую волну, которая получается в результате наложения двух последовательностей волн одинаковой амплитуды, движущихся одна вверх, а другая вниз. Если Δx, $\Delta\tau$ представляют изменения x и τ, соответствующие длине волны (λ), то имеем $\Delta(\sigma\tau) = 2\pi$ и, следовательно, в пределе, когда x будет большим,

$$\lambda = \Delta x = \frac{1}{2} \gamma R \beta \tau \, \Delta\tau = \pi\gamma R\beta \frac{\tau}{\sigma} = \frac{2\pi c}{\sigma}, \tag{16}$$

как и следовало ожидать.

Выражение (14) обращается в бесконечность при

$$J_m(\sigma\tau_1) = 0. \tag{17}$$

Это уравнение определяет периоды $\frac{2\pi}{\sigma}$ свободных колебаний слоя воздуха, лежащего над определенной горизонтальной плоскостью, для которой $\tau = \tau_1$ [1]).

§ 311. Переходя к рассмотрению возмущений, распространяющихся в горизонтальном направлении, выберем оси x и y в горизонтальной плоскости, а ось z вертикально с положительным направлением вниз. Тогда уравнения малых колебаний в переменных Эйлера будут иметь вид

$$\varrho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \varrho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \varrho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + g\varrho, \tag{1}$$

$$\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho_0 \chi = 0, \tag{2}$$

где

$$\chi = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{3}$$

Мы будем предполагать по большей части, что *отклонения* давления и плотности от их равновесных значений связаны между собой адиабатическим соотношением

$$\frac{Dp}{Dt} = c^2 \frac{D\varrho}{Dt}, \tag{4}$$

где

$$c^2 = \frac{\gamma p_0}{\varrho_0} = \gamma R \theta_0, \tag{5}$$

т. е. c обозначает скорость звука, соответствующую температурному равновесию на уровне z.

Полагая

$$p = p_0 + p', \quad \varrho = \varrho_0 + \varrho' \tag{6}$$

и продолжая пренебрегать малыми величинами второго порядка, будем иметь

$$\varrho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x}, \quad \varrho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial y}, \quad \varrho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + g\varrho' \tag{7}$$

и

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + w \frac{\partial \varrho_0}{\partial z} = -\varrho_0 \chi. \tag{8}$$

Точно так же из (4) и (2) получим

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + g\varrho_0 w = -\gamma p_0 \chi. \tag{9}$$

---

[1]) Исследование влияния произвольных начальных условий имеется в работе автора, указанной на стр. 678 в подстрочном примечании.

Исключая p' и ϱ', найдем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(c^2\chi + gw), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y}(c^2\chi + gw), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z}(c^2\chi + gw) - \left\{\frac{dc^2}{dz} - (\gamma-1)\,g\right\}\chi. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Отсюда, если обозначить через ξ, η, ζ компоненты вихря, получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= -\left\{\frac{dc^2}{dz} - (\gamma-1)\,g\right\}\frac{\partial \chi}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \left\{\frac{dc^2}{dz} - (\gamma-1)\,g\right\}\frac{\partial \chi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0.$$

До сих пор уравнения были общими; они показывают, что безвихревое движение невозможно, если только не выполнено одно из двух условий. Мы должны иметь либо

$$c = \text{const.}, \quad \gamma = 1, \tag{12}$$

что представляет случай постоянного температурного равновесия с изотермическим расширением, либо

$$\frac{dc^2}{dz} = (\gamma-1)\,g, \tag{13}$$

или

$$\frac{d\theta_0}{dz} = \frac{(\gamma-1)\,g}{\gamma R}, \tag{14}$$

что представляет случай конвективного равновесия. Эти заключения находятся в согласии с § 17. В каждом из этих частных случаев имеем

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{15}$$

при условии, что для φ имеет место уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -(c^2\chi + gw) = c^2\,\Delta\varphi + g\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{16}$$

Таким образом, возможны, как мы и могли ожидать, стационарные вихревые движения, так как каждое из двух имеющихся в виду физических состояний в известном смысле представляет одно из средних состояний равновесия [1]).

---

[1]) За подробностями по этому вопросу можно отослать к работе Lamb, On Atmospheric Oscillations, Proc. Roy. Soc. A, LXXXIV, 551 (1890), из которой взяты в большей части §§ 311, 311a и 312.

§ 311a. Переходим теперь к различным предположениям относительно вертикального распределения температуры. В случае *изотермической* атмосферы, где c будет постоянной, соответствующее решение имеет вид

$$u = e^{-(\gamma-1)\frac{gz}{c^2}} f(ct-x), \quad v=0, \quad w=0 \tag{1}$$

или в более общем виде

$$u = e^{-\frac{(\gamma-1)gz}{c^2}} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v = e^{-\frac{(\gamma-1)gz}{c^2}} \frac{\partial P}{\partial y}, \; w=0, \tag{2}$$

если P есть функция горизонтальных координат x и y и времени, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \Delta_1 P, \tag{3}$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Эти уравнения представляют системы волн, распространяющихся в горизонтальном направлении с постоянной скоростью c или $\sqrt{\gamma g H}$, где H есть высота „однородной атмосферы". Так как в принятом допущении ϱ_0 изменяется по закону $e^{z/H}$ или $e^{\gamma g z/c^2}$, то из (4) и (2) § 311 следует, что $\frac{DP}{Dt}$ будет изменяться по закону e^{gz/c^2}. Условие неизменяемости давления в верхних областях, где $z \to -\infty$, будет, таким образом, выполняться. Скорость с высотой увеличивается, но *количество движения*, отнесенное к единице объема, уменьшается. Расширение предполагалось при этом адиабатическим. Если же оно будет изотермическим, то мы должны положить $\gamma = 1$; тогда скорость частиц не будет зависеть от высоты.

В случае конвективного равновесия начало возьмем на верхней границе атмосферы и положим в согласии с (5) § 310

$$c^2 = (\gamma-1)gz = \frac{gz}{m}. \tag{4}$$

Чтобы исследовать распространение волн в горизонтальном направлении, предположим, что φ в (16) § 311 изменяется по закону $e^{i(\sigma t - kx)}$ или, более обще, с учетом зависимости от горизонтальных координат, оно удовлетворяет уравнению

$$(\Delta_1 + k^2)\varphi = 0, \tag{5}$$

предполагая множитель от времени в виде $e^{i\sigma t}$. В том и другом случае уравнение (16) принимает вид

$$z\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + m\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \left(\frac{m\sigma^2}{gk} - kz\right)k\varphi = 0. \tag{6}$$

Оно упростится, если положить

$$\varphi = e^{-kz}\psi, \tag{7}$$

тогда получим

$$z\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + (m - 2kz)\frac{\partial\psi}{\partial z} - m\left(1 - \frac{\sigma^2}{gk}\right)k\psi = 0. \tag{8}$$

Если обозначить

$$m\left(1 - \frac{\sigma^2}{gk}\right) = 2\alpha, \tag{9}$$

то решение, конечное при $z \to 0$, имеет вид

$$\psi_1 = A\left\{1 + \frac{\alpha}{1\cdot m}(2kz) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2m(m+1)}(2kz)^2 + \ldots\right\}, \tag{10}$$

или в применяемых обозначениях [1])

$$\psi_1 = A\,{}_1F_1(\alpha;\ m;\ 2kz). \tag{11}$$

Второе же решение будет иметь вид

$$\psi_2 = B\psi_1\int_0^z \frac{e^{2kz}\,dz}{z^m\psi_1^2}. \tag{12}$$

Для последнего решения $\frac{\partial\psi_2}{\partial z}$ при $z \to 0$ изменяется, как z^{-m}, тогда как ϱ_0 изменяется по закону z^m. Теперь из (2) и (4) § 311 имеем

$$\frac{DP}{Dt} = -\varrho_0 c^2\chi = \varrho_0(\ddot{\varphi} + gw) \tag{13}$$

и, следовательно, $\frac{DP}{Dt}$ при $z \to 0$ не будет исчезать, если только не положить $B = 0$.

Условие $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$ при $z = h$, где h — высота атмосферы, теперь будет давать

$$\frac{2\alpha}{m}\left\{1 + \frac{\alpha+1}{1(m+1)}(2kh) + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{1\cdot 2(m+1)(m+2)}(2kh)^2 + \ldots\right\} =$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{1\cdot m}(2kh) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2m(m+1)}(2kh)^2 + \ldots \tag{14}$$

или

$$\frac{2\alpha}{m}\,{}_1F_1(\alpha+1;\ m+1;\ 2kh) = {}_1F_1(\alpha;\ m;\ 2kh). \tag{15}$$

Это соотношение определяет α через длину волны $\frac{2\pi}{k}$. Соответствующее же значение σ, а вместе с ним и значение скорости волны будет определяться из (9).

---

[1]) См., например, Barnes, Camb. Trans., XX, 253 (1906), где имеются ссылки и на другие работы.

Главный интерес представляют волны, которые являются длинными по сравнению с h. Если kh будет мало, то в качестве первого приближения для корней (14) получим $\frac{2a}{m}=1$, а в качестве второго приближения

$$\frac{2a}{m}=\frac{1+kh}{1+\frac{m+2}{m+1}kh}=1-\frac{kh}{m+1}, \tag{16}$$

откуда следует

$$\frac{\sigma^2}{gk}=\frac{kh}{m+1}. \tag{17}$$

Теперь, если мы через H_1 обозначим „приведенную высоту" атмосферы, т. е. высоту, до которой она простиралась бы, если бы она имела постоянную плотность, равную плотности низшего слоя, то будем иметь

$$H_1=h^{-m}\int_0^h z^m\,dz=\frac{h}{m+1}, \tag{18}$$

и тогда скорость распространения длинных волн будет стремиться к значению

$$V=\frac{\sigma}{k}=\sqrt{gH_1}. \tag{19}$$

Полученную формулу можно сравнить с формулой (7) § 278, которая относится к изотермическому случаю. При 15° С значение H_1 приблизительно равно 8 292 *м*, отсюда для скорости будем иметь $V=283$ *м/сек*.

Из формул (7) и (10), рассматривая зависимость φ от z, приближенно получим

$$\psi=A\left\{1+\frac{k^2}{m+1}\left(\frac{1}{2}z^2-hz\right)\right\}. \tag{20}$$

Ради простоты примем, что второй множитель имеет вид $e^{i(\sigma t-kx)}$. В таком случае получим

$$u=ikA,\quad v=0,\quad w=\frac{k^2A}{m+1}(h-z), \tag{21}$$

при этом тот же множитель подразумевается. Так как отношение w/u будет порядка kh, то колебания будут главным образом горизонтальными. Кроме того, горизонтальная амплитуда будет почти постоянной от края до дна. Эти характерные свойства, как вскоре окажется, обусловлены принятыми допущениями при рассмотрении колебаний, а именно допущением о конвективном равновесии и допущением об изотермической атмосфере с изотермическим расширением.

Далее мы заметим, не выписывая подразумеваемый множитель, что формула (20) приближенно дает

$$c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+gw=\frac{gk^2h}{m+1} \tag{22}$$

и не содержит высоты.

Остальные решения уравнения (14), уместные тогда, когда kh является малым, включают в себя и такие, которые будут отличаться от малых значений akh. Соответствующие этим решениям колебания приближаются к типу волн, распространяющихся вертикально, таких как в § 310, но с постепенным изменением фаз в горизонтальном направлении.

§ 312. В более общем случае, когда вертикальное распределение температуры является произвольным, мы снова обратимся к уравнениям (10) § 311. Из них с помощью диференцирования получим

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=c^2\,\Delta\chi+\left(\frac{dc^2}{dz}+\gamma g\right)\frac{\partial\chi}{\partial z}+g\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\right), \tag{1}$$

так как

$$\Delta w=\frac{\partial\chi}{\partial z}+\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{2}$$

тождественно. Тогда из (11) § 311 получим

$$\frac{\partial^4\chi}{\partial t^4}=c^2\Delta\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}+\left(\frac{d\cdot c^2}{dz}+\gamma g\right)\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2\,\partial z}-g\left(\frac{d\cdot c^2}{dz}-(\gamma-1)g\right)\Delta_1\chi. \tag{3}$$

Если мы допустим, что χ изменяется по закону $e^{i(\sigma t-kx)}$, или более общо, что χ удовлетворяет уравнению

$$(\Delta_1+k^2)\chi=0, \tag{4}$$

имея в качестве множителя $e^{i\sigma t}$, где k является постоянной (которая может быть, если это необходимо, определена из условий на боковых границах), то мы найдем следующее диференциальное уравнение для χ:

$$c^2\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}+\left(\frac{dc^2}{dz}+\gamma g\right)\frac{\partial\chi}{\partial z}+\left[\sigma^2-k^2c^2-\frac{gk^2}{\sigma^2}\left\{\frac{dc^2}{dz}-(\gamma-1)g\right\}\right]\chi=0. \tag{5}$$

Кроме того из первых двух уравнений (10) § 311 получим

$$\sigma^2\frac{\partial w}{\partial z}+gk^2w=(\sigma^2-k^2c^2)\chi, \tag{6}$$

а из третьего уравнения

$$g\frac{\partial w}{\partial z}+\sigma^2w=-c^2\frac{\partial\chi}{\partial z}-(\gamma-1)g\chi. \tag{7}$$

Исключая из (6) и (7) $\frac{\partial w}{\partial z}$, мы и получим необходимое для нас соотношение

$$(\sigma^4 - g^2k^2)\,w = -\sigma^2c^2\frac{\partial \chi}{\partial z} - g(\gamma\sigma^2 - k^2c^2)\,\chi. \qquad (8)\ ^1)$$

Дальнейшие рассуждения мы попытаемся провести здесь только для случая, когда равновесный температурный градиент постоянен, т. е.

$$\theta_0 = \beta z_1, \qquad (9)$$

если начало взято на уровне нулевой температуры. При этом, как и в § 310, значения ϱ_0 и p будут соответственно изменяться по законам z^m и z^{m+1}, где

$$m = \frac{g}{R\beta} - 1, \qquad (10)$$

и, следовательно,

$$c^2 = \gamma R\beta z = \frac{\gamma g z}{m+1}. \qquad (11)$$

Отсюда будем иметь

$$\frac{dc^2}{dz} - (\gamma - 1)g = -\frac{\gamma g}{m+1}\left(\frac{\beta_1}{\beta} - 1\right), \qquad (12)$$

где β_1, как в (5) § 310, означает температурный градиент при конвективном равновесии.

Уравнение (5) в таком случае приводится к виду

$$z\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} + (m+2)\frac{\partial \chi}{\partial z} + \left\{\frac{m+1}{\gamma}\frac{\sigma^2}{gk} + \left(\frac{\beta_1}{\beta} - 1\right)\frac{gk}{\sigma^2} - kz\right\}k\chi = 0 \qquad (13)$$

или, если мы положим

$$\chi = e^{-kz}\psi, \qquad (14)$$

к виду

$$z\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + (m+2-2kz)\frac{\partial \psi}{\partial z} + 2ak\psi = 0, \qquad (15)$$

где

$$2a = \frac{m+1}{\gamma}\frac{\sigma^2}{gk} + \left(\frac{\beta_1}{\beta} - 1\right)\frac{gk}{\sigma^2} - (m+2). \qquad (16)$$

Решение уравнения (15), конечное при $z \to 0$, имеет вид

$$\psi = 1 - \frac{a}{1\,(m+2)}(2kz) + \frac{a(a-1)}{1\cdot 2\,(m+2)\,(m+3)}(2kz)^2 - \ldots = {}_1F_1(-a;\ m+2;\ 2kz). \qquad (17)$$

Подставляя из (14) и (17) в уравнение (8), получим

$$(\sigma^4 - g^2k^2)\,w = -\frac{\gamma g^2 k}{m+1}\left[\frac{\sigma^2}{gk}\left\{z\frac{\partial \psi}{\partial z} + (m+1)\psi\right\} - \left(1 + \frac{\sigma^2}{gk}\right)kz\psi\right]e^{kz}. \qquad (18)$$

---

[1]) Полное же исключение w из (6) и (7) сиова привело бы нас к (5).

Мы можем заранее предвидеть, что для длинных волн ($kh \to 0$) скорость волны будет сравнимой с величиной $\sqrt{gh}$. Поэтому величина

$$\frac{\sigma^2}{gk} = \frac{\sigma^2}{k^2}\,\frac{kh}{gh}$$

может предполагаться заранее малой.

„Конвективный" случай $\beta = \beta_1$ был уже рассмотрен, и мы можем ожидать, что если отношение β/β_1 только немногим меньше единицы, то результаты не будут сильно различаться. Но если это отношение заметно отличается от единицы, то в выражении (16) для 2α средний член будет превосходить остальные и поэтому α может быть большим, хотя αkh будет конечным. В таком случае мы приближенно будем иметь

$$\psi = 1 - \frac{2\alpha kz}{1\,(m+2)} + \frac{(2\alpha \cdot kz)^2}{1 \cdot 2\,(m+2)\,(m+3)} - \ldots = {}_0F_1(m+2;\ -2\alpha kz), \tag{19}$$

и вместе с этим

$$z\,\frac{\partial \psi}{\partial z} + (m+1)\,\psi = (m+1)\left\{1 - \frac{2\alpha kz}{1\,(m+1)} + \frac{(2\alpha kz)^2}{1 \cdot 2\,(m+1)\,(m+2)} - \ldots\right\} = (m+1)\,{}_0F_1(m+1;\ -2\alpha kz). \tag{20}$$

Эти ряды могут быть представлены через функции Бесселя. Если мы положим

$$\eta^2 = 8\alpha kz, \quad \omega^2 = 8\alpha kh, \tag{21}$$

то получим

$$\psi = 2^{m+1}\,\Pi(m+1)\,\eta^{-m-1} J_{m+1}(\eta), \tag{22}$$

$$z\,\frac{\partial \psi}{\partial z} + (m+1)\,\psi = 2^m\,\Pi(m+1)\,\eta^{-m} J_m(\eta). \tag{23}$$

Так как из (16) приближенно имеем

$$\frac{gk}{\sigma^2} = \frac{2\alpha}{\dfrac{\beta_1}{\beta} - 1}, \tag{24}$$

то условие $w = 0$ для $\eta = \omega$ приводится к виду

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta} - 1\right) J_m(\omega) = \frac{1}{2}\,\omega J_{m+1}(\omega). \tag{25}$$

Это соотношение определяет ω, а вместе с этим и α. Для скорости волны мы будем иметь

$$V^2 = \frac{\sigma^2}{k^2} = \left(\frac{\beta_1}{\beta} - 1\right)\frac{4gh}{\omega^2} = \left(\frac{\beta_1}{\beta} - 1\right)\frac{4\,(m+1)\,gH_1}{\omega^2}, \tag{26}$$

где, как и в § 311a, H_1 — высота однородной атмосферы, имеющей температуру низшего слоя. Эта формула делает V мнимой, если $\beta < \beta_1$; в этом случае атмосфера будет неустойчивой.

Для числового примера допустим, что температурный градиент имеет половину того значения, которое соответствует конвективному случаю. Принимая $\gamma = 1{,}40$, получим $m = 6$, а уравнение (25) примет вид

$$J_6(\omega) = \frac{1}{2}\omega J_7(\omega). \tag{27}$$

Наименьший корень этого уравнения приближенно равен $\omega = 4{,}96$; тогда

$$V = 1{,}07\sqrt{gH_1}. \tag{28}$$

В любом случае результат должен лежать между $\sqrt{gH_1}$ и $\sqrt{\gamma gH_1}$ или $1{,}18\sqrt{gH_1}$. Если мы примем при 15° C значение H_1 равным 8 292 метрам, то формула (28) даст

$$V = 303 \text{ м/сек}^{1}).$$

Чтобы сравнить горизонтальные и вертикальные скорости в простейшем случае, допустим, что u изменяется как $e^{i(\sigma t - kx)}$, а $v = 0$. Возвращаясь к уравнениям (10) § 311, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \sigma^2 u - igkw &= ikc^2\chi, \\ igku + \sigma^2 w &= -c^2\frac{\partial\chi}{\partial z} - \gamma g\chi. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} (\sigma^4 - g^2k^2)u &= -ik\left\{gc^2\frac{\partial\chi}{\partial z} + (\gamma g^2 - \sigma^2c^2)\chi\right\} = \\ &= -\frac{i\gamma g^2 k}{m+1}\left\{z\frac{\partial\chi}{\partial z} + (m+1)\chi - \frac{\sigma^2}{gk}kz\chi\right\} = \\ &= \frac{i\gamma g^2 k}{m+1}\left\{z\frac{\partial\psi}{\partial z} + (m+1)\psi - \left(1 + \frac{\sigma^2}{gk}\right)kz\psi\right\}e^{-kz}. \end{aligned} \tag{30}$$

Исключение u из (29) снова дало бы нам соотношение (13). Если мы сравним с формулой (18), то увидим, что для $z = 0$ отношение вертикальной скорости к горизонтальной дает $\frac{\sigma^2}{gk}$, а так как $w = 0$ для $z = h$, то мы заключаем, что вертикальная скорость всюду будет сравнительно малой.

---

[1]) Проф. Тэйлор вычислил скорость длинных воли при таких предположениях, которые очень близки к условиям действительной атмосферы. Принимая, что температура падает равномерно от 283° (по абсолютной шкале) на земле до 220° на высоте 3 км и далее остается постоянной, он нашел для V значение 307,2 м/сек, которое немногим отличается от скорости воздушных волн, вызванных огромным взрывом в Krakatoa в 1883 г. [Proc. Roy. Soc., CXXVI, 169, 728 (1929)].

Если мы выразим полученные результаты через функции Бесселя, опустив все общие множители и выписывая только важнейшие члены, то получим

$$u = \frac{J_m(\eta)}{\eta^m}, \tag{31}$$

$$w = \frac{1}{2a}\left\{\left(\frac{\beta_1}{\beta} - 1\right) J_m(\eta) - \frac{1}{2}\eta J_{m+1}(\eta)\right\}\frac{1}{\eta^m}. \tag{32}$$

Теперь горизонтальная скорость изменяется с высотой; отношение этой скорости в крайних слоях к скорости у земли будет равно

$$\frac{\omega^m}{2^m \Pi(m) J_m(\omega)}. \tag{33}$$

В рассмотрением выше случае, где $\beta = \frac{1}{2}\beta_1$, $m = 6$, $\omega = 4{,}96$, это отношение выражается числом 2,55.

Для примера *внутренних* колебаний мы можем ввести возмущающий потенциал приливного типа, например

$$\Omega = gHe^{-kz+i(\sigma t - kx)}; \tag{34}$$

ср. § 181. Характерные черты получаемого при этом результата могут быть, однако, установлены на основании теории колебаний, изложенной вкратце в главе VIII. Если заданный период $\frac{2\pi}{\sigma}$ отличается, но мало, от свободного периода, соответствующего длине волны $\frac{2\pi}{k}$, то движение будет иметь в общем тот же характер, что и соответствующее свободное колебание, с таким распределением вертикальной скорости, о котором только что шла речь. Но в случае значительного расхождения заданного периода от свободного горизонтальная скорость может стать практически постоянной от края до дна.

§ 313. Общие уравнения малых колебаний газа около равновесного состояния в стационарном силовом поле (X, Y, Z) могут быть получены с помощью небольшого обобщения метода § 311.

Для невозмущенного состояния будем иметь

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = \varrho_0 X, \quad \frac{\partial p_0}{\partial y} = \varrho_0 Y, \quad \frac{\partial p_0}{\partial z} = \varrho_0 Z. \tag{1}$$

Тогда, пользуясь предшествующими обозначениями, получим

$$\left.\begin{aligned} \varrho_0 \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + \varrho' X, \\ \varrho_0 \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial y} + \varrho' Y, \\ \varrho_0 \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial z} + \varrho' Z, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\frac{D\varrho}{Dt} = -\varrho_0 \chi, \tag{3}$$

где

$$\chi = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Мы будем, как и раньше, предполагать, что *изменения* давления и плотности связаны адиабатической зависимостью

$$\frac{Dp}{Dt} = c^2 \frac{D\varrho}{Dt}, \tag{4}$$

где

$$c^2 = \frac{\gamma p_0}{\varrho_0} = \gamma R\theta_0,$$

т. е. c есть скорость звука, которая соответствует температуре в точке (x, y, z) в состоянии равновесия.

В таком случае будем иметь

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \varrho_0 (Xu + Yv + Zw) = -\varrho_0 c^2 \chi. \tag{5}$$

Исключая p' и ϱ' из уравнений (2), (3) и (5), получим

$$\varrho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \{ \varrho_0 c^2 \chi + \varrho_0 (Xu + Yv + Zw) \} - \\ - X \left\{ \frac{\partial (\varrho_0 u)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho_0 v)}{\partial y} + \frac{\partial (\varrho_0 w)}{\partial z} \right\} \tag{6}$$

и два других уравнения.

Предположим теперь, что силы X, Y, Z имеют потенциал; в этом случае давление p_0 в состоянии равновесия есть функция только ϱ_0, т. е.

$$p_0 = f(\varrho_0). \tag{7}$$

Тогда получим

$$X = \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho_0}{\partial x} f'(\varrho_0), \quad Y = \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho_0}{\partial y} f'(\varrho_0), \quad Z = \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho_0}{\partial z} f'(\varrho_0), \tag{8}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho_0}{\partial x} (Xu + Yv + Zw) = X \left(\frac{x}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho_0}{\partial x} + \frac{v}{\varrho} \frac{\partial \varrho_0}{\partial y} + \frac{w}{\varrho} \frac{\partial \varrho_0}{\partial z} \right). \tag{9}$$

Уравнение (6) можно поэтому написать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \{ c^2 \chi + Xu + Yv + Zw \} + \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho_0}{\partial x} \{ c^2 - f'(\varrho_0) \} \chi. \tag{10}$$

Этому уравнению будет эквивалентно уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (c^2 \chi + Xu + Yv + Zw) - \left\{ \frac{\partial c^2}{\partial x} - (\gamma - 1) X \right\} \chi. \tag{11}$$

Возмущенное движение, таким образом, не будет свободно от вихрей. Если же, однако, распределение температуры в невозмущенном состоянии было таково, что газ находился в конвективном равно-

весии, так что величина p_0 пропорциональна ϱ_0^γ, то будет иметь место равенство

$$f'(\varrho_0) = \frac{\gamma p_0}{\varrho_0} = c^2,$$

и второе слагаемое в формуле (10) будет исчезать. Три уравнения (10) удовлетворятся тогда решениями вида

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{12}$$

если

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi + \left(X \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + Z \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right). \tag{13}$$

То же самое заключение будет иметь место и тогда, когда температура в состоянии равновесия повсюду одинакова, если только предположить, что *расширения* происходят изотермически. Скорость волны c в этом случае будет постоянной.

Эти же самые результаты можно было бы, разумеется, получить легче, если сначала принять некоторые специальные гипотезы. Если мы предположим, что давление и плотность остаются связанными той же зависимостью, как и в состоянии равновесия, а именно, соотношением (7), то будем иметь вместо уравнения (5)

$$p' = \varrho f'(\varrho_0) = c^2 \varrho'. \tag{14}$$

Поэтому уравнение (2) может быть представлено в виде

$$\varrho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{p'}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho_0}{\partial x}. \tag{15}$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p'}{\varrho_0}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p'}{\varrho_0}\right), \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\varrho_0}\right). \tag{16}$$

Эти уравнения имеют свободное от вихрей решение (11) вместе с зависимостью

$$p' = \varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{17}$$

Исключая p' и ϱ' из (5), (11) и (16), получим уравнение (12).

Рассмотренные до сих пор движения были „свободны" в том смысле, что кроме сил стационарного поля не действовали никакие другие силы. В случае наличия малой возмущающей силы с потенциалом Ω нужно к правой части уравнения (10) прибавить еще член $-\varrho_0 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial t}$. Уравнение (12) будет тогда заменено уравнением

$$p' = \varrho_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Omega\right), \tag{18}$$

и мы получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi + \left(X \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + Z \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + \frac{\partial \Omega}{\partial t}. \tag{19}$$

§ 314. Теория таких задач, как большие колебания земной атмосферы, еще очень несовершенна. Особенное затруднение в этом случае представляет то, что приходится принимать во внимание физические условия в верхних слоях атмосферы.

Результаты §§ 311а, 312 показывают, что при более медленных нормальных колебаниях движение воздуха происходит главным образом в горизонтальном направлении. Мы рассмотрим теперь случай атмосферы с постоянной температурой, которая окружает невращающийся шар и подчиняется закону изотермического расширения; тогда уравнение (13) § 313 в полярных координатах r, θ, φ принимает вид

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = c^2\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right\} - g\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \qquad (1)$$

причем потенциал скоростей мы обозначаем теперь через Φ. Если в согласии с результатом § 311а (при $\gamma = 1$) мы будем пренебрегать радиальным движением и положим $r = a$ ($=$ радиусу шара), то в случае простых гармонических колебаний получим

$$\frac{c^2}{a^2}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right\} + \sigma^2\Phi = 0. \qquad (2)$$

Как и в случае задачи § 199, функция Φ, соответствующая какому-то нормальному колебанию, будет изменяться как поверхностная сферическая функция целого порядка n; из этого следует

$$\frac{\sigma^2a^2}{c^2} = n(n+1). \qquad (3)$$

Интерпретация этого результата получается таким же способом, как и в названных выше параграфах. Коэфициент сгущения $\left(s = c^2\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$ соответствует величине $\frac{\zeta}{h}$ этого параграфа, а c^2 занимает место gh. Так как теперь имеет место равенство $c^2 = gH$, где H обозначает высоту однородной атмосферы, то оказывается, что свободные колебания подчиняются тем же законам, как и колебания жидкого океана постоянной глубины H, покрывающего земной шар [1])

В качестве числового примера положим

$$c = 2{,}80 \times 10^4 \text{ см/сек}, \quad 2\pi a = 4 \times 10^9 \text{ см}.$$

В случаях $n = 1$, $n = 2$ это дает, на основании формулы (3), при температуре 0° С периоды свободных колебаний 28,1 и 16,2 часа. При температуре 15° С периоды делаются равными 27,4 и 15,8 часа.

§ 315. Гипотеза конвективного равновесия с адиабатическим расширением так же хорошо пригодна для вычислений. В математиче-

---

[1]) Рэлей, см. прим., стр. 678.

ском отношении преимущество этой гипотезы заключается в том, что она позволяет на верхней границе установить определенные условия.

Уравнение (1) предыдущего параграфа будет сохранять все еще свою силу, если только иметь в виду, что величина c^2 теперь изменяется вместе с глубиной места относительно верхней границы атмосферы. Принимая, что потенциал скоростей изменяется, как сферическая функция порядка n, для свободных колебаний будем иметь

$$c^2\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\frac{n(n+1)}{r^2}\Phi\right\}-g\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\sigma^2\Phi=0. \tag{1}$$

Глубина h атмосферы считается малой в сравнении с радиусом земли. Отсюда, если положим $r=a-z$, где a относится к внешней границе, и напишем в согласии с (5) § 310

$$c^2=\frac{gz}{m}, \tag{2}$$

то найдем

$$z\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+m\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\left\{\frac{m\sigma^2}{g}-\frac{n(n+1)z}{a^2}\right\}\Phi=0, \tag{3}$$

так как величиной $\frac{c^2}{a}$ по сравнению с g можно пренебречь. Если мы положим

$$k^2=n(n+1)\frac{1}{a^2}, \tag{4}$$

то полученное уравнение будет тождественно совпадать с уравнением (6) § 311a. В таком случае будем иметь

$$\sigma^2=n(n+1)\frac{gH_1}{a^2}. \tag{5}$$

Свободные колебания соответствуют, таким образом, колебаниям жидкого океана, глубина которого равна приведенной глубине H_1 атмосферы.

§ 316. Аналогия все еще будет продолжать сохраняться и тогда, когда мы перейдем к случаю *вращающегося* земного шара. Если мы временно предположим, что ось z совпадает с осью вращения, в то время как оси x и y вращаются с угловой скоростью ω земного шара, то уравнения (2) § 313 заменятся следующими уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\varrho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}-2\omega v\right)&=-\frac{\partial p'}{\partial x}+\varrho' X-\varrho_0\frac{\partial\Omega}{\partial x},\\ \varrho_0\left(\frac{\partial v}{\partial t}+2\omega u\right)&=-\frac{\partial p'}{\partial y}+\varrho' Y-\varrho_0\frac{\partial\Omega}{\partial y},\\ \varrho_0\frac{\partial w}{\partial t}&=-\frac{\partial p'}{\partial z}+\varrho' Z-\varrho_0\frac{\partial\Omega}{\partial z},\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

причем мы предполагаем, что центробежная сила включена в (X, Y, Z). Буквы u, v, w обозначают здесь относительные скорости, т. е. скорости по отношению к вращающемуся земному шару. Для общ-

ности в уравнения введены члены, которые должны представлять влияние возмущающих сил с потенциалом Ω. Уравнение непрерывности остается по форме неизменным.

Если мы будем поступать так же, как в указанных выше параграфах, то получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\omega \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial P}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial P}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где

$$P = c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + Xu + Yv + Zw - \frac{\partial \Omega}{\partial t}. \tag{8}$$

Если мы теперь изменим значение наших символов и будем понимать под u скорость вдоль меридиана, под v — скорость вдоль параллельного круга и под w — скорость в вертикальном направлении, то будем иметь по аналогии с (5) § 213

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\omega \frac{\partial v}{\partial t}\cos\theta &= \frac{\partial P}{r\,\partial\theta}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial u}{\partial t}\cos\theta + 2\omega \frac{\partial w}{\partial t}\sin\theta &= \frac{\partial P}{r\sin\theta\,\partial\varphi}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\omega \frac{\partial v}{\partial t}\sin\theta &= \frac{\partial P}{\partial r}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где θ, φ обозначают географическую широту и долготу.

В применении к приливным движениям мы можем так же, как в случае задачи, относящейся к океану (§ 213), ввести различные упрощения. В частности, пренебрегая вертикальным ускорением, мы можем приближенно считать на основании последнего уравнения, что P может рассматриваться как величина, независимая от r, и что вместе с тем горизонтальные скорости u, v для всех частиц одной и той же вертикали практически будут одинаковыми [1]). Если положить теперь $r = a - z$, то будем иметь в полярных координатах

$$P = \frac{c^2}{a\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(u\sin\theta) + \frac{\partial v}{\partial\varphi}\right\} - c^2\frac{\partial w}{\partial z} - gw - \frac{\partial\Omega}{\partial t}. \tag{10}$$

---

[1]) При более общем подходе к строению атмосферы приближенное допущение $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$ может быть заменено через

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \left\{\frac{\partial c^2}{\partial r} + (\gamma - 1)\,g\right\}\chi,$$

и тогда сходство с приливами в океанах становится менее точным.

Полагая $c^2 = \frac{gz}{m}$, умножая на z^{m-1} и интегрируя по z в пределах от 0 до h, находим в предположении, что $z^m w$ изчезает при обоих пределах интегрирования,

$$P = \frac{gH_1}{a \sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(u\sin\theta) + \frac{\partial v}{\partial\varphi}\right\} - \frac{\partial\Omega}{\partial t}. \tag{11}$$

Упрощенные уравнения имеют теперь вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\omega\cos\theta\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial P}{a\,\partial\theta}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\omega\cos\theta\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial P}{a\sin\theta\,\partial\varphi}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

причем P дано формулой (11). Если положить

$$P = -g\frac{\partial\zeta}{\partial t}, \quad \Omega = -g\frac{\partial\overline{\zeta}}{\partial t}, \tag{13}$$

то уравнения (11) и (12) будут похожи на те уравнения, которые мы нашли в § 214 для случая водяного океана постоянной глубины H_1. Поэтому теория океанских приливов на вращающемся земном шаре, изложенная в главе VIII, может быть как раз применена и к прилнвам в атмосфере рассмотренного здесь внда, вызванным силой тяжести.

Результаты распространяются также и на случай изотермической атмосферы (с изотермическим расширением), если в (10) мы положим $c^2 = gH$.

Некоторые вычисления периодов свободных колебаний изотермической атмосферы были выполнены Маргулисом [1]). Он брал температуру 0° С и (возможную) скорость звука, равную $c = 2{,}84 \cdot 10^4$ *см/сек*. Периоды, получающиеся в результате его вычислений, можно рассматривать как периоды водяного океана глубиной в 7980 *м*, если пренебречь взаимными притяжениями водяных частиц.

Для первых трех колебаний зонального типа ($s = 0$ в обозначениях § 223), симметричных по отношению к экватору, он находит периоды

12,28 7,88 6,37

звездных часов, а для первых трех асимметричных колебаний

20,44 9,59 6,67.

---

[1]) Margules, Wiener Sitzber, Math. nat. Wiss. Classe, CI, 597 (1892) и CII (1895). Автор обязан этими литературными указаниями проф. Чепману. Во второй из указаиных работ вычислены свободные периоды, отличные от 24 часов, для ряда значений $\frac{2\pi}{\omega}$; здесь же содержатся примеры такого типа, который рассмотрен в конце § 206. В обеих работах исследуется влияние сил трения, пропорциональных скорости.

Для симметричных колебаний секториального типа ($s = 1$) результаты получаются в виде пар значений, соответствующих волнам, которые движутся на вращающемся земном шаре на восток и на запад; таким образом, имеем

$$\left.\begin{matrix}13{,}87\\39{,}57\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}9{,}22\\10{,}22\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}6{,}63\\6{,}77\end{matrix}\right\}.$$

Для тессерального типа ($s = 2$) вычисления Маргулиса дают значения $\left.\begin{matrix}11{,}94\\18{,}42\end{matrix}\right\}$.

Эти результаты можно сравнить с теми, которые получил Хоф (Hough) (см. стр. 440, 441) для океана глубиной в 8 850 *м*, с той лишь разницей, что при их получении не принималось во внимание взаимное притяженне частиц. Ср. также §§ 210, 212.

Если обратить внимание на возможное увеличенне амплитуды вследствие „резонанса", то интересно поставить вопрос о том, не может ли атмосфера иметь свободные периоды приблизнтельно в 12 солнечных или лунных часов. Маргулис находнт для наиболее важных свободных колебаний, имеющих такой же, в общем, характер, как и полусуточные приливные волны, период 11,94 звездного часа в предположении постоянной температуры 0° С. С другой стороны, Хоф [1]) в своих исследованиях по теорни приливов находит, что глубина h океана, для которого период в точиости равен 12 звездным часам, определяется нз формулы:

$$\frac{gh}{4\omega^2 a^2} = 0{,}10049.$$

Это дает значение $h = 8895$ *м*. Следует, однако, заметить, что при этих вычислениях было принято во внимаиие взаимное притяжение частиц возмущенной жидкости, в то время как в случае воздушного океана влияние взаимного притяжения должно быть совершенно незаметным. Если приниять это во внимание и провести вычисления для периода в 12 средних солнечных часов, то получится

$$\frac{gh}{4\omega^2 a^2} = 0{,}08911$$

или $h = 7834$ *м* [2]). Средняя температура воздуха вблизи земной поверхиости оценивается обычно в 15° С, что дает $H_1 = 8425$ *м*. Не делая слишком далеко ндущих выводов из той гипотезы, что атмосфера иад поверхностью земли однородна и приблизительно находится в конвективном равновесии, мы можем все же с достаточной вероятностью утверждать, что существуют свободные колебания атмосферы полусуточного типа, период которых очень близок к 12 средним *солнечным* часам, ио несколько меньше.

Известно из опыта, что в показаниях барометра наблюдаются правильные колебания с периодом в одни *солнечные* сутки и в половину *солнечных* суток, между тем как влияние соответствующих луниых приливов почти незаметно [3]). Амплитуда полусуточных колебаний (по солнечным суткам) на экваторе примерно равна 0,937 *мм*, в то время как амплитуда, которую дает „статиче-

---

[1]) Hough, см. выше стр. 437.

[2]) См. работу автора, указанную на стр. 687.

[3]) Так, Чепман (Chapman) находит амплитуду 0,00914 *мм* ртутного столба для полусуточных атмосферных лунных приливов в Гринвиче [Q. J. R. Met. Soc., XLIV, 271 (1918)].

ская" теория приливов, равна только 0,011 *мм*. Некоторые числовые результаты, которые приводит Хоф для иллюстрации динамической теории океанских приливов, показывают, что свободные периоды должны отличаться от вынужденных периодов не более чем на 2 или 3 минуты, чтобы эта амплитуда могла возрасти благодаря динамическому воздействию в восемьдесят или девяносто раз. Так как разность между периодами полусуточных колебаний, вызванных солнцем и луной, доходит до 26 минут, то возможно, что влияние солнца этим путем может передаваться значительно более эффективно, чем влияние луны. При этом, однако, сохраняется то затруднение, что *фаза* наблюдаемого полусуточного несоответствия по отношению к прохождению солнца имеет ускорение, а не запаздывание (как это должно было бы быть благодаря приливному трению).

Кельвин приписал наблюдаемые колебания другой причине, а именно, суточному колебанию температуры, которое, будучи разложено на простые гармонические составляющие, будет иметь компоненты с периодами 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... солнечных суток. В особенности заслуживает внимания то обстоятельство, что второе (т. е. полусуточное) колебание барометра имеет значительно бо́льшую амплитуду, чем первое. Кельвин полагал, что объяснение этой особенности может быть найдено в том, что период полусуточной компоненты лучше согласуется со свободным периодом земной атмосферы, чем период суточной компоненты [1]).

Для того чтобы объяснить требуемую степень избирательного резонанса при той и другой гипотезе, необходимо постулировать существование свободного периода, почти равного 12 солнечным часам. Совсем недавняя оценка [2]), основанная на сравнении скорости атмосферных волн со скоростью по приливной теории, обнаружила свободные периоды более кратковременные.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ.

ВЯЗКОСТЬ.

§ 317. Эта глава в основном посвящена рассмотрению сопротивления, вызываемого деформацией и известного под названием „вязкости" или „внутреннего трения"; это сопротивление в большей или меньшей степени имеет место при движении всех жидкостей, но мы им до сих пор пренебрегали.

Для удобства будем следовать плану, которого мы уже придерживались в различных случаях, а именно сначала дадим обзор общей теории динамической системы, подверженной действию диссипативных сил, которые выражаются линейными функциями обобщенных скоростей [3]). Это позволит не только свести к одной точке зрения

---

[1]) Kelvin, On the Thermodynamic, Aceeleration of the Earth's Rotation, Proc. R. S. Edin., XI (1882) (Papers, III, 341). О более подробном исследовании смотреть Chapman Q. J. R. Met. Soc., 1, 165 (1923). Вынужденные приливы, которые происходят вследствие колебаний температуры, были исследованы Маргулисом, Wiener Ber., XCIX, 204(1890).

[2]) Taylor G. J., Proc. Roy. Soc., CXXVI, 169, 728 (1929—1930).

[3]) Более полное изложение теории находится в книгах Rayleigh, Theory of Sound, гл. IV и V; Thomson and Tait, Natural Philosophy (2 изд.), § 340—345; Routh, Advanced Rigid Dynamics, гл. VI и VII.

большую часть дальнейших исследований, но иногда даст возможность указать общий характер ожидаемых результатов в тех случаях, которые не поддаются вычислениям.

Мы начнем с рассмотрения случая с одной степенью свободы. Уравнение движения имеет в этом случае вид

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q. \tag{1}$$

Здесь q есть обобщенная координата, характеризующая отклонение от положения равновесия; a — коэфициент инерции и представляет собой величину существенно положительную; c — коэфициент восстановления, который при наших исследованиях должен быть положительным; b — коэфициент трения и тоже положителен. Так как при изменении знака у t члены левой части уравнения (1) ведут себя различным образом, то движение системы, описываемое этим уравнением, не будет обратимым.

Если положить

$$T = \frac{1}{2} a\dot{q}^2, \quad V = \frac{1}{2} cq^2, \quad F = \frac{1}{2} b\dot{q}^2, \tag{2}$$

то уравнение можно написать в виде

$$\frac{d}{dt}(T+V) = -2F + Q\dot{q}. \tag{3}$$

Это показывает, что приращение энергии $T+V$ в единицу времени оказывается меньшим произведенной внешними силами работы. Разность $2F$ представляет рассеяние энергии за единицу времени; эта величина всегда положительна.

При *свободном* колебании будем иметь

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0. \tag{4}$$

Если мы предположим, что q пропорционально $e^{\lambda t}$, то решение примет различные формы в зависимости от относительной величины коэфициента трения. Если $b^2 < 4ac$, то

$$\lambda = -\frac{1}{2}\frac{b}{a} \pm i\left(\frac{c}{a} - \frac{1}{4}\frac{b^2}{a^2}\right)^{1/2} \tag{5}$$

или, в несколько иных обозначениях,

$$\lambda = -\tau^{-1} \pm i\sigma. \tag{6}$$

Следовательно, полное решение в действительной форме будет иметь вид

$$q = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\sigma t + \varepsilon), \tag{7}$$

где A и ε — произвольные постоянные. Представляемое этим уравнением движение есть простое гармоническое колебание, амплитуда ко-

торого асимптотически приближается к нулю по закону $e^{-\frac{t}{\tau}}$. Промежуток времени τ, в течение которого амплитуда убывает до $\frac{1}{e}$ ее первоначального значения, называется „модулем затухания" колебаний.

Если величина $\frac{b}{2a}$ мала по сравнению с $\left(\frac{c}{a}\right)^{1/2}$, то $\frac{b^2}{4ac}$ есть малая второго порядка, и трение в этом случае практически не оказывает влияния на „частоту" σ. Этот случай имеет место тогда, когда промежуток времени $(2\pi\tau)$, в течение которого амплитуда убывает на $e^{-2\pi}\left(=\frac{1}{535}\right)$ своего начального значения, оказывается бо́льшим по сравнению с периодом $\left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)$.

Если имеет место неравенство $b^2 > 4ac$, то значения λ оказываются действительными и отрицательными. Обозначая их через $-\alpha_1$ и $-\alpha_2$, будем иметь

$$q = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}. \tag{8}$$

Это уравнение представляет „апериодическое движение"; это означает, что система может не больше одного раза пройти через свое положение равновесия, к которому она потом приближается асимптотически.

В критическом случае $b^2 = 4ac$ оба значения λ равны друг другу; в этом случае обычными методами находим решение

$$q = (A + Bt)\, e^{-\alpha t}, \tag{9}$$

которое может быть истолковано в том же смысле, что и в предшествующем случае.

Чем больше коэфициент трения b, тем больше отличаются друг от друга величины α_1 и α_2; одна из них (например, α_2) стремится к значению $\frac{b}{a}$, а другая к значению $\frac{c}{b}$. Влияние второго члена в формуле (8) быстро убывает, и результирующее движение оказывается таким, как если бы коэфициент инерции (a) был равен нулю.

§ 318. Рассмотрим теперь влияние периодической внешней силы. Если мы положим

$$Q = Ce^{i(\sigma t + \varepsilon)}, \tag{10}$$

то уравнение (1) дает

$$q = \frac{Q}{c - \sigma^2 a + i\sigma b}. \tag{11}$$

Вводя обозначения

$$1 - \frac{\sigma^2 a}{c} = R\cos\varepsilon_1, \quad \frac{\sigma b}{c} = R\sin\varepsilon_1, \tag{12}$$

где ε_1 должно лежать между 0° и 180°, получаем

$$q = \frac{Q}{Rc}\, e^{-i\varepsilon_1}. \tag{13}$$

Если возьмем действительные части, то можем сказать, что сила

$$Q = C\cos(\sigma t + \varepsilon) \tag{14}$$

будет поддерживать колебания

$$q = \frac{C}{Rc}\cos(\sigma t + \varepsilon - \varepsilon_1). \tag{15}$$

Так как

$$R^2 = \left(1 - \frac{\sigma^2 a}{c}\right)^2 + \frac{\sigma^2 b^2}{c^2}, \tag{16}$$

то легко находим, что для $b^2 < 2ac$ амплитуда будет наибольшей тогда, когда

$$\sigma = \left(\frac{c}{a}\right)^{1/2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{ac}\right)^{1/2}; \tag{17}$$

это наибольшее значение амплитуды будет равно

$$\frac{C}{b}\left(\frac{a}{c}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{b^2}{ac}\right)^{-1/2}. \tag{18}$$

При сравнительно небольшом трении, когда величиной $\frac{b^2}{4ac}$ можно пренебречь как малой второго порядка, амплитуда будет наибольшей в том случае, когда период возмущающей силы совпадает с периодом свободных колебаний (ср. § 168). Формула (18) показывает далее, что отношение максимальной амплитуды к ее „статическому значению“ $\frac{C}{c}$ равно $\frac{(aC)^{1/2}}{b}$; эта величина согласно предположению будет достаточно большой.

Если, наоборот, $b^2 > 2ac$, то амплитуда с уменьшением частоты непрерывно возрастает, стремясь в конце концов к „статическому значению“ $\frac{C}{c}$.

Из формул (15) и (12) оказывается, что максимум смещения наступает позднее максимума силы на разность фаз, равную ε_1, где

$$\operatorname{tg}\varepsilon_1 = \frac{\sigma b}{c - \sigma^2 a}. \tag{19}$$

Если период возмущающей силы больше, чем период свободных колебаний при отсутствии трения, то эта разность фаз лежит между 0° и 90°; в противном случае она лежит между 90° и 180°. Если коэфициент трения b относительно мал, то разность фаз отличается очень мало от 0° или 180°, в зависимости от указанного выше случая, если только значение σ не оказывается близким к критической частоте $\left(\frac{c}{a}\right)^{1/2}$. Для критической частоты разность фаз равна 90°.

Рассеяние в единицу времени равно $b\dot{q}^2$; среднее значение этой величины, как легко найти, оказывается равным

$$\frac{1}{2}\frac{bC^2}{\left(\sigma a - \frac{c}{\sigma}\right)^2 + b^2}. \tag{20}$$

Это выражение имеет наибольшее значение, когда $\sigma = \left(\frac{c}{a}\right)^{1/2}$.

Как и в § 168, формула (11) для очень быстрых колебаний приближенно дает

$$q = -\frac{Q}{\sigma^2 a}; \tag{21}$$

в этом случае существенное влияние оказывает лишь масса.

Если же значение σ мало, то смещение приближенно равно статическому смещению

$$q = \frac{Q}{c}. \tag{22}$$

§ 319. Интересный пример представляют приливы в экваториальном канале [1]).

Уравнение движения, видоизмененное благодаря введению члена, соответствующего трению, имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial \xi}{\partial t} + c^2 \frac{\partial^2 \xi}{a^2 \partial \varphi^2} + X, \tag{1}$$

где обозначения совпадают с принятыми в § 181 [2]) и a обозначает радиус земли.

В случае свободных волн полагаем $X = 0$ и принимаем, что

$$\xi \text{ пропорционально } e^{\lambda t + ik a \varphi}; \tag{2}$$

в результате находим

$$\lambda^2 + \mu\lambda + k^2 c^2 = 0$$

и отсюда

$$\lambda = -\frac{1}{2}\mu \pm i\left(k^2 c^2 - \frac{1}{4}\mu^2\right)^{1/2}. \tag{3}$$

Если пренебрежем квадратом величины $\frac{\mu}{kc}$, то из (2) получим для действительной части ξ выражение

$$\xi = A e^{-\frac{1}{2}\mu t} \cos\left\{k(ct \pm a\varphi) + \varepsilon\right\}. \tag{4}$$

Модуль затухания равен $2\mu^{-1}$, а скорость волны (в первом приближении) не зависит от трения.

Чтобы найти вынужденные колебания, вызванные притяжением луны, положим в согласии с § 181

$$X = ife^{2i(nt+\varphi+\varepsilon)}, \tag{5}$$

где n обозначает угловую скорость луны по отношению к фиксированной точке канала. Принимая тот же самый множитель, зависящий от времени, находим

$$\xi = \frac{1}{4} \frac{ifa^2}{c^2 - n^2 a^2 + \frac{1}{2} i\mu n a^2} e^{2i(nt+\varphi+\varepsilon)}. \tag{6}$$

---

[1]) Airy, Tides and Waves, § 315 и далее.

[2]) В частности c^2 обозначает теперь gh, где h — глубина.

Отсюда для возвышения поверхности получаем

$$\eta = -h\frac{\partial\xi}{a\,\partial\varphi} = \frac{1}{2}\frac{Hc^2}{c^2 - n^2a^2 + \frac{1}{2}i\mu na^2}e^{2i(nt+\varphi+\varepsilon)}, \tag{7}$$

где, как и в § 180,

$$H = \frac{af}{g}.$$

Чтобы привести эти выражения к действительному виду, положим

$$\operatorname{tg} 2\chi = \frac{1}{2}\frac{\mu na^2}{c^2 - n^2a^2}, \tag{8}$$

причем $0 < \chi < 90°$. Таким образом, мы найдем, что возмущающей силе

$$X = -f\sin 2(nt + \varphi + \varepsilon) \tag{9}$$

соответствует горизонтальное перемещение

$$\xi = -\frac{1}{4}\frac{fa^2}{\left\{(c^2 - n^2a^2)^2 + \frac{1}{4}\mu^2n^2a^4\right\}^{1/2}}\sin 2(nt + \varphi + \varepsilon - \chi) \tag{10}$$

и возвышение поверхности, выражаемое формулой

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{Hc^2}{\left\{(c^2 - n^2a^2)^2 + \frac{1}{4}\mu^2n^2a^4\right\}^{1/2}}\cos 2(nt + \varphi + \varepsilon - \chi). \tag{11}$$

Так как величина $nt + \varphi + \varepsilon$ в этих выражениях измеряет часовой угол луны по отношению к меридиану, проходящему через произвольную точку (φ) канала, то оказывается, что момент высокой воды наступает после прохождения луны через меридиан по прошествии промежутка времени t_1, определяемого равенством $nt_1 = \chi$.

Если $c^2 < n^2a^2$ или $\frac{h}{a} < \frac{n^2a}{g}$, то в случае бесконечно малого трения мы имели бы $\chi = 90°$, т. е. приливы были бы *обращенными* (ср. § 181). При заметном трении значение χ лежит между 90° и 45°, и момент высокой воды *ускоряется* на промежуток времени, который соответствует углу $90° - \chi$.

Если же $\frac{h}{a} > \frac{n^2a}{g}$, так что при отсутствии трения приливы были бы *прямые*, то значение χ лежит между 0° и 45°, и момент высокой воды *запаздывает* на промежуток времени, соответствующий этому углу.

Фиг. 80 показывает оба случая. Буквы M, M' обозначают положения луны и противолуны (см. стр. 449), которые мы считаем находящимися в плоскости экватора; круглые стрелки указывают направления вращения земли.

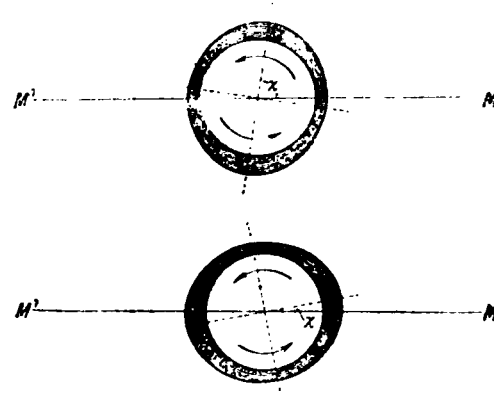
Очевидно, что в обоих случаях притяжение, производимое возмущающим телом на приподнятые части воды, эквивалентно паре

сил, которая стремится *уменьшить* момент количеств движения системы, состоящей из земли и покрывающего ее слоя воды.

В рассматриваемом случае момент этой пары сил может быть легко вычислен. Из (9) и (11) находим для среднего значения тангенциальной силы, действующей на поднятую часть воды и относящейся к единице площади, выражение

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varrho X\eta\, d\varphi = -\frac{1}{2}\varrho h f \sin 2\chi, \tag{12}$$

где h обозначает вертикальную амплитуду. Так как в качестве положительного направления для X выбрано восточное, то оказывается, что в общем итоге получается сила, направленная к западу. Если мы умножим среднее значение силы на площадь водной поверхности и радиус a, то получим величину замедляющего момента.



Фиг. 80.

О влиянии разности фаз при сложении приливов, для которых значения частот лишь незначительно отличаются друг от друга, было упомянуто уже в § 224. Чтобы применить данную там формулу к рассматриваемому случаю, мы должны положить $\sigma = 2n$, $\varepsilon = 2\chi$. Тогда из уравнения (8) найдем

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{d\chi}{dn} = \frac{\mu a^2 (c^2 + n^2a^2)}{4(c^2 - n^2a^2)^2 + \mu^2 n^2 a^4}. \tag{13}$$ [1])

Если имеются налицо два тела, возбуждающие приливы с приблизительно равными периодами, то это выражение дает промежуток времени от момента совмещения действий тел (или противостояния) до наступления сильного прилива. Отношение этого значения $\frac{d\varepsilon}{d\sigma}$ к продолжительности суток $\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ не может быть больше, чем

$$\frac{n^2a^2 + c^2}{8\pi\,|\,n^2a^2 - c^2\,|}.$$

[1]) Ср. Airy, Tides and Waves, § 328 и далее.

Мы привели это исследование лишь ради его теоретического интереса; для действительных же обстоятельств, имеющих место на земном шаре, оно имеет лишь ограниченное применение. Даже в случае широкой полосы воды, расположенной вдоль экватора, глубиной, скажем, в 3510 *м*, разности фаз, которые можно получить на основании этой теории, оказываются совершенно незначительными. Из равенства (8) и из § 181 получается

$$\operatorname{tg} 2\chi = -\frac{1}{1-311\dfrac{h}{a}} \cdot \frac{1}{n\tau} = -0{,}191\,\frac{2\pi}{n\tau},$$

где $\tau = \dfrac{2}{\mu}$ обозначает коэфициент затухания свободных колебаний. Представляется естественным принять, что коэфициент затухания в подобном случае в значительное число раз превосходит лунные сутки $\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$; тогда изменение времени прилива, обусловленное трением, было бы сравнимо с величиной $\dfrac{2\pi}{n\tau}$ · 22 минуты. Следовательно, этим способом мы не можем объяснить ускорение в фазе, большее чем на несколько минут.

Подобная же граница получается и для величины запаздывания сильного прилива, вычисляемого из формулы (13).

Приливные течения в открытом море в действительности так незначительны, что вызываемый ими эффект трения оказывается несущественным даже с астрономической точки зрения. В мелкой же воде и в узких морях и устьях рек этот эффект оказывается очень значительным вследствие инерции воды и свойств морского дна и берегов. В настоящее время, повидимому, можно считать установленным [1]), что в таких областях общее рассеяние энергии в конце концов за счет энергии вращения земли становится сравнимой с той, которая получается на основании астрономических данных; см. § 371.

§ 320. Возвратимся снова к общей теории; пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ суть координаты динамической системы, на которую действуют: 1) консервативные силы, зависящие от конфигурации системы, 2) силы, возникающие при движении и пропорциональные скоростям, и 3) заданные внешние силы. Уравнения малых движений для такой системы при самых общих предположениях имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} + B_{r1}\dot{q}_1 + B_{r2}\dot{q}_2 + \ldots = -\frac{\partial V}{\partial q_r} + Q_r, \tag{1}$$

где кинетическая и потенциальная энергии определяются выражениями вида

$$2T = a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + \ldots + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \ldots, \tag{2}$$

$$2V = c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2 + \ldots + 2c_{12}q_1q_2 + \ldots \tag{3}$$

Нужно иметь в виду, что

$$a_{sr} = a_{rs}, \quad c_{rs} = c_{sr}, \tag{4}$$

но мы не будем предполагать, что коэфициенты B_{rs} и B_{sr} равны друг другу.

---

[1]) Taylor G., см. выше, стр. 402. Jeffreys H., Phil. Trans. A, CCXXI, 239 (1921).

Если положим теперь

$$b_{rs} = b_{sr} = \frac{1}{2}(B_{rs} + B_{sr}) \tag{5}$$

и

$$\beta_{rs} = -\beta_{sr} = \frac{1}{2}(B_{rs} - B_{sr}), \tag{6}$$

то типовое уравнение (1) примет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r} + \beta_{r1}\dot{q}_1 + \beta_{r2}\dot{q}_2 + \ldots = -\frac{\partial V}{\partial q_r} + Q_r, \tag{7}$$

где

$$2F = b_{11}\dot{q}_1^2 + b_{22}\dot{q}_2^2 + \ldots + 2b_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \ldots \tag{8}$$

Из уравнений такого вида выводим

$$\frac{d}{dt}(T+V) + 2F = \sum \theta_r \dot{q}_r. \tag{9}$$

Правая часть этого выражения представляет работу, произведенную внешними силами в единицу времени. Часть этой работы идет на увеличение общей энергии $T+V$ системы; остальная же часть, с нашей точки зрения в настоящий момент, рассеивается со скоростью $2F$. В приложениях к реальным задачам функция F оказывается существенно положительной; эту функцию, следуя Рэлею[1]), который первый ее ввел, называют „диссипативной функцией".

Члены в уравнении (7), зависящие от F, мы будем называть „членами трения". Остальные же члены, в которые величины $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ входят с коэфициентами, удовлетворяющими соотношению $\beta_{rs} = -\beta_{sr}$, имеют вид, который мы уже встречали в общих уравнениях „гиростатической" системы (§ 141); их можно поэтому называть „гиростатическими членами".

§ 321. Если гиростатических членов нет, то уравнение (7) приводится к виду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r} = Q_r. \tag{10}$$

Как и в § 168, мы можем предположить, что выражения T и V преобразованием координат приведены к сумме квадратов, так что

$$2T = a_1\dot{q}_1^2 + a_2\dot{q}_2^2 + \ldots + a_n\dot{q}_n^2, \tag{11}$$

$$2V = c_1q_1^2 + c_2q_2^2 + \ldots + c_nq_n^2. \tag{12}$$

Случайно может оказаться, хотя это вовсе не обязательно, что то же самое преобразование координат приводит также и функцию F к этому виду, т. е. к виду

$$2F = b_1\dot{q}_1^2 + b_2\dot{q}_2^2 + \ldots + b_n\dot{q}_n^2. \tag{13}$$

---

[1]) Rayleigh, Some General Theorems relating to Vibrations, Proc. Lond. Math. Soc. (1), IV, 357 (1873) (Papers, 1, 170); Theory of Sound, § 81.

Типовое уравнение (10) принимает тогда простой вид

$$a_r\ddot{q}_r + b_r\dot{q}_r + c_r q_r = Q_r, \tag{14}$$

который рассматривался уже в § 317. В этом случае каждая координата q_r может изменяться независимо от остальных.

Если функция F не может быть приведена к сумме квадратов при помощи того же преобразования, как функции T и V, то уравнения (10) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} a_1\ddot{q}_1 + b_{11}\dot{q}_1 + b_{12}\dot{q}_2 + \ldots + b_{1n}\dot{q}_n + c_1 q_1 &= Q_1, \\ a_2\ddot{q}_2 + b_{21}\dot{q}_1 + b_{22}\dot{q}_2 + \ldots + b_{2n}\dot{q}_n + c_2 q_2 &= Q_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_n\ddot{q}_n + b_{n1}\dot{q}_1 + b_{n2}\dot{q}_2 + \ldots + b_{nn}\dot{q}_n + c_n q_n &= Q_n, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где

$$b_{rs} = b_{sr}.$$

Движение оказывается в этом случае более сложным; например, в случае свободных колебаний около устойчивого положения равновесия движение каждой частицы (при произвольном нормальном колебании) представляет собой эллиптическое гармоническое колебание, причем оси эллипса убывают по закону $e^{-\alpha t}$.

Вопрос несколько упрощается, когда коэфициенты вязкости b_{rs} оказываются *малыми*, так как в этом случае нормальные колебания происходят почти в точности в том виде, как и при отсутствии трения. Так, например, из уравнений (15) получается, что существует свободное колебание такого типа, при котором изменяется главным образом *одна* координата, скажем q_r; тогда r-ое уравнение приводится к виду

$$a_r\ddot{q}_r + b_{rr}\dot{q}_r + c_r q_r = 0, \tag{16}$$

причем были отброшены члены, в которых сравнительно малые величины $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ (кроме $\dot{q}_r$) умножаются на малые коэфициенты $b_{r1}, b_{r2}, \ldots, b_{rn}$. Мы видели в § 317, что для малых значений величин b_{rr} решение уравнения (16) имеет вид

$$q_r = Ae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\sigma t + \varepsilon), \tag{17}$$

где

$$\tau^{-1} = \frac{1}{2}\frac{b_{rr}}{a_r}, \qquad \sigma = \left(\frac{c_r}{a_r}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

Сравнительно малые изменения остальных координат определятся в этом случае из остальных уравнений системы (15). С тою же степенью точности имеем, например,

$$a_s\ddot{q}_s + b_{rs}\dot{q}_r + c_s q_s = 0, \tag{19}$$

откуда следует

$$q_s = \frac{\sigma b_{rs}}{c_s - \sigma^2 a_s}Ae^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\sigma t + \varepsilon). \tag{20}$$

Эллиптические траектории частиц при наших предположениях будут очень вытянутыми, за исключением того случая, когда периоды обоих нормальных колебаний будут приблизительно равны. Если бы можно было принять, что

$$q_r = a\cos(\sigma t + \varepsilon), \tag{21}$$

где величина σ имеет то же значение, как и при отсутствии трения, в то время как амплитуда a медленно изменяется с течением времени, и что изменения других координат оказываются сравнительно малыми, то мы получили бы приближенное уравнение

$$T+V=\frac{1}{2}a_r\dot{q}_r^2+\frac{1}{2}c_rq_r^2=\frac{1}{2}\sigma^2a_ra^2. \tag{22}$$

Далее, рассеяние выражалось бы формулой

$$2F=b_{rr}\dot{q}_r^2;$$

Среднее значение этой величины было бы приближенно равно

$$\frac{1}{2}\sigma^2b_{rr}a^2. \tag{23}$$

Отсюда, приравнивая убыль энергии в единицу времени среднему значению рассеяния, получим

$$\frac{da}{dt}=-\frac{1}{2}\frac{b_{rr}}{a_r}a \tag{24}$$

и, следовательно,

$$a=a_0e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{25}$$

если, как в формуле (18),

$$\tau^{-1}=\frac{1}{2}\frac{b_{rr}}{a_r}. \tag{26}$$

Этот способ определения скорости затухания колебаний иногда будет пригодным для тех случаев, в которых полное определение влияния трения было бы затруднительным (ср. §§ 348, 355).

Если коэфициенты трения сравнительно велики, то масса системы почти не будет оказывать влияние на движение; наиболее удобной системой координат тогда будет такая система, при которой функции F и V приводятся одновременно к суммам квадратов, т. е.

$$\left.\begin{aligned}2F&=b_1\dot{q}_1^2+b_2\dot{q}_2^2+\ldots+b_n\dot{q}_n^2,\\2V&=c_1q_1^2+c_2q_2^2+\ldots+c_nq_n^2.\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Уравнения свободных движений в этом случае будут иметь вид

$$b_r\dot{q}_r+c_rq_r=0, \tag{28}$$

откуда следует

$$q_r=Ce^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{29}$$

если

$$\tau=\frac{b_r}{c_r}. \tag{30}$$

§ 322. Если в основные уравнения входят как гиростатические члены, так и члены, соответствующие силам трения, то теория естественно становится еще более сложной. Достаточно будет здесь рассмотреть случай *двух* степеней свободы, продолжая исследование § 206 [1]).

[1]) За более подробным исследованием можно отослать к работе, цитированной на стр. 315.

Уравнения движения имеют в этом случае вид

$$\left.\begin{aligned} a_1\ddot{q}_1 + b_{11}\dot{q}_1 + (b_{12}+\beta)\dot{q}_2 + c_1 q_1 &= Q_1, \\ a_2\ddot{q}_2 + (b_{21}-\beta)\dot{q}_1 + b_{22}\dot{q}_2 + c_2 q_2 &= Q_2. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Чтобы определить свободные движения, положим $Q_1=0$, $Q_2=0$ и примем, что координаты q_1 и q_2 пропорциональны $e^{\lambda t}$. Это приводит к уравнению четвертой степени относительно λ

$$a_1a_2\lambda^4 + (a_2b_{11}+a_1b_{22})\lambda^3 + (a_2c_1+a_1c_2+\beta^2+ \\ + b_{11}b_{22}-b_{12}^2)\lambda^2 + (b_{11}c_2+b_{22}c_1)\lambda + c_1c_2 = 0. \quad (2)$$

При помощи критерия, установленного Раусом [1]), можно без труда показать следующее. Если, как это и имеет место в нашем случае, величины

$$a_1,\ a_2,\ b_{11},\ b_{22},\ b_{11}b_{22}-b_{12}^2$$

оказываются все положительными, то необходимое и достаточное условие для того, чтобы действительные части корней этого уравнения четвертой степени были все отрицательными, заключается в том, что коэфициенты c_1 и c_2 должны быть оба положительными.

Если мы отбросим члены второго порядка по отношению к коэфициентам трения, то то же заключение может быть получено более непосредственно следующим образом. При нашем предположении корни уравнения (2) могут быть выражены равенствами

$$\lambda = -\alpha_1 \pm i\sigma_1, \quad \lambda = -\alpha_2 \pm i\sigma_2, \quad (3)$$

причем значения σ_1 и σ_2 в первом приближении оказываются такими же, как и при отсутствии трения, т. е. они являются корнями уравнения

$$a_1a_2\sigma^4 - (a_2c_1+a_1c_2+\beta^2)\sigma^2 + c_1c_2 = 0, \quad (4)$$

между тем как значения α_1, α_2 определяются уравнениями

$$\alpha_1+\alpha_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{b_{11}}{a_1}+\frac{b_{22}}{a_2}\right), \quad \frac{\alpha_1}{\sigma_1^2}+\frac{\alpha_2}{\sigma_2^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{b_{11}}{c_1}+\frac{b_{22}}{c_2}\right). \quad (5)$$

Очевидно, для того чтобы σ_1 и σ_2 были действительны, c_1 и c_2 должны иметь одинаковые знаки, а для того чтобы α_1 и α_2 были положительны, знаки у c_1 и c_2 должны быть положительными. Если, наоборот, значения c_1 и c_2 оба положительны, то значения σ_1^2 и σ_2^2 оказываются действительными и положительными, и количества $\frac{c_1}{a_1}$, $\frac{c_2}{a_2}$ оба лежат в интервале, определяемом значениями σ_1^2 и σ_2^2. Из уравнений (5) далее легко получается, что корни α_1 и α_2 будут тогда оба положительны [2]).

---

[1]) Routh, Advanced Rigid Dynamics, § 287.

[2]) Простой пример изложенной здесь теории представляет материальная частица в эллиптической чаше, вращающейся около вертикальной главной оси. Если бы поверхность чаши была абсолютно гладкой, то равновесие частицы в ее самом низшем положении было бы устойчивым, за исключением того случая, когда период вращения лежит м е ж д у периодами обоих нормальных колебаний (каждое в соответствующей главной плоскости) частицы, имеющих место в случае покоящейся чаши. Но если принимается во внимание трение между частицей и поверхностью чаши, то равновесие только до тех пор будет „вековым образом" устойчивым, пока угловая скорость вращения остается меньше, чем угловая частота более медленного из двух названных нормальных колебаний. А если вращение происходит более быстро, то частица постепенно удаляется от оси и переходит в положение относительного равновесия, в котором она вращается вместе с чашей подобно грузику конического маятника. В этом состоянии система, состоящая из частицы и чаши, при том же главном моменте количеств движения обладает м е н ь ш е й энергией, чем в том случае, когда частица остается в самой нижней точке чаши (ср. § 254). Некоторые дальнейшие иллюстрации имеются в работе: Lamb, On kinetik Stability, Proc. Roy. Soc. A, LXXX, 168 (1907).

Если один из коэфициентов c_1, c_2 (например, c_2) равен нулю, то одно из значений σ (например, σ_2) тоже должно быть равно нулю, благодаря чему одно из нормальных колебаний будет иметь бесконечно большой период. Мы будем тогда иметь

$$\sigma_1^2 = \frac{c_1}{a_1} + \frac{\beta^2}{a_1 a_2}, \quad a_2 = \frac{b_{22}c_1}{a_2 c_1 + \beta^2}. \tag{6}$$

Как и в § 206, легко могут быть написаны выражения для вынужденных колебаний в общем случае, когда Q_1 и Q_2 пропорциональны $e^{i\sigma t}$; мы, однако, исследуем здесь более подробно частный случай, когда $c_2 = 0$ и $Q_2 = 0$. Уравнения (1) дают в этом случае

$$\left.\begin{aligned} (c_1 - \sigma^2 a_1 + i\sigma b_{11})\, q_1 + (b_{12} + \beta)\, \dot{q}_2 &= Q_1, \\ i\sigma\,(b_{12} - \beta)\, q_1 + (i\sigma a_2 + b_{22})\, \dot{q}_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

откуда следует

$$q_1 = \frac{i\sigma a_2 + b_{22}}{-a_1 a_2 i\sigma^3 - (a_1 b_{11} + a_1 b_{22})\,\sigma^2 + (a_2 c_1 + \beta^2 + b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\, i\sigma + b_{22}c_1}\, Q_1. \tag{8}$$

Это равенство можно написать также в виде

$$q_1 = \frac{i\sigma a_2 + b_{22}}{a_1 a_2 \{(i\sigma + a_1)^2 + \sigma_1^2\}\,(i\sigma + a_2)}\, Q_1. \tag{9}$$

Главная наша задача состоит в том, чтобы исследовать случай возмущающей силы бесконечно большого периода по той причине, что он фигурирует в теории Лапласа для объяснения четырнадцатидневных приливов (§ 217). Мы предположим поэтому, что как отношение $\frac{\sigma_1}{\sigma}$, так и отношение $\frac{\sigma_1}{a_1}$ велики. Тогда формула приведется к виду

$$q_1 = \frac{i\sigma a_2 + b_{22}}{a_1 a_2 \sigma_1^2\,(i\sigma + a_2)}\, Q_1 = \frac{i\sigma a_2 + b_{22}}{b_{22}c_1\left(\frac{i\sigma}{a_2} + 1\right)}\, Q_1. \tag{10}$$

Все зависит теперь от значений отношений $\frac{\sigma}{a_2}$ и $\frac{\sigma a_2}{b_{22}}$. Если значение σ настолько мало, что значениями обоих отношений можно пренебречь, то в согласии со статической теорией получаем

$$q_1 = \frac{Q_1}{c_1}. \tag{11}$$

Принятое здесь допущение означает, что период приложенной силы велик по сравнению с промежутком времени, в течение которого амплитуды свободных колебаний убывают вследствие трения до $\frac{1}{e^{2\pi}}$ их первоначальных значений. Если же мы предположим, что и отношения $\frac{\sigma}{a_2}$ и $\frac{\sigma a_2}{b_{22}}$ велики, то получим, как в (8) § 206.

$$q_1 = \frac{a_2 a_2}{b_{22}c_1}\, Q_1 = \frac{a_2}{a_2 c_1 + \beta^2}\, Q_1. \tag{12}$$

Вязкость.

§ 323. Переходим теперь к рассмотрению сопротивления особого рода, которое характерно для жидкостей. Методы, которые мы будем применять при этом, неизбежно будут теми же самыми, какие применяются при рассмотрении сопротивления изменению формы, называемого „упругостью" и характерного для твердых тел. Оба этих класса явлений с физической стороны являются различными, ибо последний зависит от действительно произведенных изменений формы, тогда как первый зависит от *скорости* этого изменения, но применяемые при этом математические методы оказываются в обоих случаях в значительной степени тождественными.

Проведем через произвольную точку P три плоскости перпендикулярно к координатным осям x, y, z и обозначим три составляющие напряжения, действующего на первую из этих плоскостей и отнесенного к единице площади, через p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}, составляющие напряжения на вторую плоскость — через p_{yx}, p_{yy}, p_{yz} и составляющие напряжения на третью плоскость — через p_{zx}, p_{zy}, p_{zz} [1]).

Если мы теперь рассмотрим элемент $\delta x\,\delta y\,\delta z$, имеющий центр в точке P, то найдем, составляя уравнения моментов и деля на $\delta x\,\delta y\,\delta z$.

$$p_{yz} = p_{zy}, \quad p_{zx} = p_{xz}, \quad p_{xy} = p_{yx};$$

при этом мы отбрасываем внешние силы и кинетические реакции, так как они представляют малые величины более высокого порядка, чем поверхностные напряжения. Эти соотношения приводят девять составляющих напряжения к шести; для случая вязкой жидкости соотношения эти получаются также непосредственно из выражений для p_{yz}, p_{zx}, p_{xy}, которые будут даны ниже (§ 325).

§ 324. Из § 1 и § 2 следует, что отличие того состояния жидкости, которое определяется величинами p_{xx}, p_{xy}, ..., от состояния, при котором давление по всем направлениям одинаково, обусловлено только движением от деформации в окрестности точки P. Эта деформация определяется шестью величинами a, b, c, f, g, h, как было показано в § 30. Прежде чем перейти к определению p_{xx}, p_{xy}, ... как функций этих величин, удобно будет установить здесь некоторые формулы преобразования.

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

[1]) В согласии с обычными обозначениями теории упругости мы считаем *растяжение* положительным, а *сжатие* отрицательным. В случае идеальной жидкости имеем, таким образом, $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$.

Проведем оси Px', Py', Pz' по направлениям главных осей деформации в точке P; пусть a', b', c' будут скорости деформации по этим направлениям. Пусть, далее, взаимное расположение обеих систем осей: x, y, z и x', y', z' определено обычным способом при помощи приложенной здесь схемы направляющих косинусов. Тогда будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(l_1 \frac{\partial}{\partial x'} + l_2 \frac{\partial}{\partial y'} + l_3 \frac{\partial}{\partial z'} \right) (l_1 u' + l_2 v' + l_3 w') =$$
$$= l_1^2 \frac{\partial u'}{\partial x'} + l_2^2 \frac{\partial v'}{\partial y'} + l_3^2 \frac{\partial w'}{\partial z'}.$$

Отсюда следует

$$\left.\begin{aligned} a &= l_1^2 a' + l_2^2 b' + l_3^2 c', \\ b &= m_1^2 a' + m_2^2 b' + m_3^2 c', \\ c &= n_1^2 a' + n_2^2 b' + n_3^2 c', \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

причем последние два соотношения получаются просто по аналогии. Мы видим, что

$$a + b + c = a' + b' + c', \qquad (2)$$

как и следовало ожидать, так как каждая из обеих частей этого равенства измеряет „кубическое расширение“ (§ 7). Далее имеем

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \left(m_1 \frac{\partial}{\partial x'} + m_2 \frac{\partial}{\partial y'} + m_3 \frac{\partial}{\partial z'} \right) (n_1 u' + n_2 v' + n_3 w') +$$
$$+ \left(n_1 \frac{\partial}{\partial x'} + n_2 \frac{\partial}{\partial y'} + n_3 \frac{\partial}{\partial z'} \right) (m_1 u' + m_2 v' + m_3 w');$$

это соотношение вместе с двумя другими, аналогичными ему, дает

$$\left.\begin{aligned} f &= 2(m_1 n_1 a' + m_2 n_2 b' + m_3 n_3 c'), \\ g &= 2(n_1 l_1 a' + n_2 l_2 b' + n_3 l_3 c'), \\ h &= 2(l_1 m_1 a' + l_2 m_2 b' + l_3 m_3 c'). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

§ 325. Из соображений симметрии следует, что напряжения, действующие в точке P на плоскости $y'z'$, $z'x'$, $x'y'$, должны быть целиком направлены перпендикулярно к этим плоскостям.

Обозначим эти напряжения через p_1, p_2, p_3.

Пусть ABC на фиг. 1 (§ 2) обозначает теперь плоскость, проходящую в непосредственной близости от точки P перпендикулярно к оси x и пересекающую оси x', y', z' в точках A, B, C; Δ пусть обозначает площадь треугольника ABC. Площади остальных боковых граней тетраедра $PABC$ будут тогда $l_1\Delta$, $l_2\Delta$, $l_3\Delta$. Если мы составим компоненту по оси x равнодействующей сил, действующих на тетраедр, то найдем

$$p_{xx}\Delta = p_1 l_1 \Delta \cdot l_1 + p_2 l_2 \Delta \cdot l_2 + p_3 l_3 \Delta \cdot l_3,$$

причем внешние приложенные силы и силы инерции на тех же основаниях, как и выше, отброшены. Отсюда и из подобных выражений, относящихся к осям y, z, получим

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= p_1 l_1^2 + p_2 l_2^2 + p_3 l_3^2, \\ p_{yy} &= p_1 m_1^2 + p_2 m_2^2 + p_3 m_3^2, \\ p_{zz} &= p_1 n_1^2 + p_2 n_2^2 + p_3 n_3^2. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Мы видим, что

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = p_1 + p_2 + p_3. \quad (2)$$

Таким образом, значение среднего арифметического трех нормальных составляющих для каждой из трех взаимно перпендикулярных плоскостей в точке оказывается всегда одним и тем же. Мы будем обозначать это среднее давление через p[1]).

Если мы составим далее компоненту, параллельную оси y, то получим третье соотношение из следующей симметричной системы равенств:

$$\left.\begin{aligned} p_{yz} &= p_1 m_1 n_1 + p_2 m_2 n_2 + p_3 m_3 n_3, \\ p_{zx} &= p_1 n_1 l_1 + p_2 n_2 l_2 + p_3 n_3 l_3, \\ p_{xy} &= p_1 l_1 m_1 + p_2 l_2 m_2 + p_3 l_3 m_3. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Отсюда следует, что

$$p_{yz} = p_{zy}, \quad p_{zx} = p_{xz}, \quad p_{xy} = p_{yx},$$

что другим способом было доказано в § 323.

Если мы на той же фиг. 1 примем, что PA, PB, PC параллельны осям x, y, z и ABC есть произвольная плоскость, проходящая в непосредственной близости от точки P и имеющая направляющие косинусы l, m, n, то подобным же способом найдем, что составляющие p_{hx}, p_{hy}, p_{hz} напряжения, действующего на эту плоскость, будут даны выражениями вида

$$\left.\begin{aligned} p_{hx} &= l p_{xx} + m p_{xy} + n p_{xz}, \\ p_{hy} &= l p_{yx} + m p_{yy} + n p_{yz}, \\ p_{hz} &= l p_{zx} + m p_{zy} + n p_{zz}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

§ 326. Значения величин p_1, p_2, p_3 отличаются от $-p$ на количества, которые зависят от движения, обусловленного деформацией, и потому должны быть функциями только величин a', b', c'.

---

[1]) Остается открытым вопрос, представляет ли среднее значение давления в случае газа функцию только плотности и температуры (как при статических условиях, к которым в первую очередь относятся законы Бойля и Дальтона), или оно зависит также и от скорости кубического расширения в точке (x, y, z); см. § 358.

Простейшее из возможных здесь предположений заключается в том, что эти функции линейные. Мы напишем поэтому

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -p+\lambda(a'+b'+c')+2\mu a', \\ p_2 &= -p+\lambda(a'+b'+c')+2\mu b', \\ p_3 &= -p+\lambda(a'+b'+c')+2\mu c', \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где λ и μ — постоянные, зависящие от природы и физического состояния жидкости; эти соотношения в наиболее общей форме представляют высказанные выше допущения и согласуются с симметрией. Подставляя эти значения p_1, p_2, p_3 в равенства (1) и (3) § 325 и применяя результаты § 324, находим

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= -p+\lambda(a+b+c)+2\mu a, \\ p_{yy} &= -p+\lambda(a+b+c)+2\mu b, \\ p_{zz} &= -p+\lambda(a+b+c)+2\mu c, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$p_{yz}=\mu f, \qquad p_{zx}=\mu g, \qquad p_{xy}=\mu h. \tag{3}$$

На основании определения среднего давления p, введенного в § 325, получаем соотношение

$$3\lambda+2\mu=0; \tag{4}$$

принимая это во внимание и подставляя в равенства (2) значения a, b, c, f, g, h из § 30, приходим к следующим соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= -p-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \\ p_{yy} &= -p-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \\ p_{zz} &= -p-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} p_{yz} &= \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=p_{zy}, \\ p_{zx} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=p_{xz}, \\ p_{xy} &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=p_{yx}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Постоянная μ называется „коэфициентом вязкости“ или „коэфициентом внутреннего трения“. Физическое значение этого коэфициента можно истолковать, рассматривая так называемое „ламинарное“ движение (§ 30); в этом случае жидкость движется как система параллельных плоскостей, причем скорость всюду имеет одно и то же направление и по величине пропорциональна расстоянию от некоторой неподвижной плоскости системы. Каждый слой жидкости действует при этом на ближайший соседний слой с тангенциальной силой, противодействующей относительному движению слоев; численное

значение этой силы, отнесенное к единице площади, равно коэфициенту μ, умноженному на градиент скорости в направлении, перпендикулярном к плоскостям. Выражая это формулами и полагая $u = \alpha y$, $v = 0$, $w = 0$, получим

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p, \quad p_{yz} = 0, \quad p_{zx} = 0, \quad p_{xy} = \mu\alpha.$$

Если $[M]$, $[L]$, $[T]$ обозначают единицы массы, длины и времени, то напряжение имеет размерность $[ML^{-1}T^{-2}]$, а скорости деформации $(a, b, c, \ldots)$ размерность $[T^{-1}]$, так что размерность величины μ есть $[ML^{-1}T^{-1}]$.

Напряжения в различных жидкостях, движущихся одинаковым образом, относятся как соответствующие значения μ; но если мы хотим сравнить влияние этих напряжений на видоизменение существующего движения, то мы должны ввести в рассмотрение отношение этих напряжений к инерции жидкости. С этой точки зрения характерной величиной будет отношение $\frac{\mu}{\varrho}$; поэтому принято эту величину обозначать особым символом, буквою ν, и, следуя Максвеллу, называть „кинематическим коэфициентом“ вязкости. Размерность величины ν есть $[L^2T^{-1}]$ [1]).

Следует заметить, что сделанное выше предположение, согласно которому напряжения p_{xx}, p_{xy}, ... суть *линейные* функции скоростей деформации a, b, c, ..., имеет чисто пробный характер, и что хотя a priori имеется большая вероятность того, что эта гипотеза в случае бесконечно малых движений на самом деле соответствует действительности, все же у нас далеко нет уверенности в том, что она приложима вообще.

Рейнольдс [2]), однако, обратил внимание на то, что основанные на этом предположении уравнения подверглись очень строгой проверке в опытах, поставленных Пуазейлем и другими, ссылка на которые следует ниже (§ 331). Если учесть достаточно широкий диапазон изменения скоростей деформации в указанных опытах, то едва ли можно сомневаться в том, что эти уравнения вполне представляют законы вязкости. Для случая газов дополнительные основания законности этих уравнений можно найти в исследованиях Максвелла [3]) по кинетической теории газов.

Практическое определение значения величины μ (или ν) представляет некоторые трудности. Не входя в детали экспериментальных методов, приведем

---

[1]) В случае сжимаемых жидкостей при некотором особом подходе к вопросу может войти второй коэфициент вязкости, именно в выражение для среднего давления p, зависящего от физического состояния и скорости кубического расширения; см. §§ 325, 358.

[2]) Reynolds, On the Theory of Lubrication, etc., Phil. Trans., CLXXVII, 157 (1886) (Papers, II, 228).

[3]) Maxwell, On the Dynamical Theory of Gases, Phil. Trans. CLVII, 19 (1866) (Papers, II, 26).

здесь некоторые из наиболее надежных результатов. Приведенные Гельмгольцем [1]) наблюдения Пуазейля дают для воды значение

$$\mu = \frac{0{,}01779}{1 + 0{,}03368\,\theta + 0{,}00022099\,\theta^2},$$

выраженное в системе *CGS*, где θ — температура в градусах Цельсия.

Для всех до сих пор исследованных несжимаемых жидкостей вязкость очень быстро убывает при возрастании температуры; при 10° С, например, $\mu_{10} = 0{,}0131$. Результаты более новых опытов хорошо согласуются с приведенной выше формулой [2]). Для ртути Кох [3]) нашел $\mu_0 = 0{,}01697$ и $\mu_{10} = 0{,}01633$.

Мы должны прибавить к этому, что для некоторых несжимаемых жидкостей, в особенности для минеральных масел, значение μ значительно увеличивается при давлении порядка несколько сот атмосфер [4]).

Для газов было найдено, что при изменении давления в очень широких границах значение μ не изменяется заметным образом, при возрастании же температуры оно несколько *растет*. Для случая воздуха эмпирическая формула [5]) имеет вид

$$\mu = 0{,}0001702\,(1 + 0{,}00329\,\theta + 0\ 0000070\,\theta^2).$$

Эта формула при атмосферном давлении, если положить $\varrho = 0{,}00129$, дает

$$\nu_0 = 0{,}132.$$

Значение ν изменяется обратно пропорционально давлению.

§ 327. Нам нужно теперь установить условия, которые должны удовлетворяться на границах.

На свободной поверхности или на поверхности раздела двух различных жидкостей три составляющие напряжения должны быть непрерывны вдоль поверхности [6]). Получающиеся отсюда условия можно легко вывести при помощи формул (4) § 325.

Вопрос значительно усложняется при выяснении положения вещей на поверхности соприкосновения несжимаемой жидкости и твердого тела. Кажется очень вероятным, что во всех обычных случаях жидкость, находящаяся в непосредственном соприкосновении с твердым телом, не испытывает относительного движения по отношению к этому телу.

Противоположное предположение привело бы к тому, что при скольжении двух жидких частиц одна по другой получалось бы значительно большее сопротивление, чем при скольжении жидкости вдоль твердого тела [7]).

---

[1]) Helmholtz, Über Reibung tropfbarer Flüssigkeiten, Wiener Sitzungsber., XL, 607 (1860) (Wiss. Abh., I, 218).

[2]) Hosking, Phil. Mag. (6), XVII, 502 (1909).

[3]) Koch, Wied. Ann. XIV (1881).

[4]) Hyde, Proc. Roy. Soc. A, XCVII, 240 (1919).

[5]) Grindley and Gibson, Proc. Roy. Soc. A, LXXX, 114 (1907).

[6]) Если принимается в расчет капиллярность, то это заключение должно, очевидно, несколько видоизмениться.

[7]) Stokes, On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, etc., Camb. Trans., VIII, 287 (1845) (Papers, I, 75).

Однако, если мы пожелали бы считать на время этот вопрос открытым, то наиболее естественным было бы принять, что скольжение вызывает тангенциальную силу, которая пропорциональна относительной скорости. Если мы рассмотрим движение маленькой жидкой пленки, толщина которой бесконечно мала в сравнении с ее поперечными размерами и которая находится в соприкосновении с твердым телом, то очевидно, что касательное усилие, приложенное к ее внутренней поверхности, должно в конце концов уравновешиваться силой, с которой твердое тело действует на ее внешнюю поверхность. Первая сила может быть вычислена при помощи формул (4) § 325; вторая же будет направлена в сторону, противоположную относительной скорости, и будет пропорциональна относительной скорости. Постоянная (назовем ее β), которая дает отношение тангенциальной силы к относительной скорости, может быть названа „коэфициентом трения скольжения".

§ 328. Уравнения движения вязкой жидкости можно получить, рассматривая, как в § 6, прямоугольный параллелепипед $\delta x\,\delta y\,\delta z$, центр которого находится в точке (x, y, z). Находя, например, результирующую в направлении оси x, будем иметь, что разность нормальных напряжений, действующих на площадки yz, равна $\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z$. Касательные же напряжения на обе площадки zx дают составляющую $\left(\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}\right)\delta y\,\delta z\,\delta x$; аналогично обе площадки xy дают составляющую $\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\delta z\,\delta x\,\delta y$. Поэтому в обычных обозначениях будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\varrho\frac{Du}{Dt}&=\varrho X+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{xz}}{\partial z},\\ \varrho\frac{Dv}{Dt}&=\varrho Y+\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial z},\\ \varrho\frac{Dw}{Dt}&=\varrho Z+\frac{\partial p_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Подставляя значения p_{xx}, p_{xy}, ... из равенств (5), (6) § 326, находим

$$\left.\begin{aligned}\varrho\frac{Du}{Dt}&=\varrho X-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta u,\\ \varrho\frac{Dv}{Dt}&=\varrho Y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta v,\\ \varrho\frac{Dw}{Dt}&=\varrho Z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\Delta w,\end{aligned}\right\}\qquad(2$$

где

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\qquad(3)$$

и Δ имеет обычное значение.

В случае несжимаемой жидкости эти уравнения приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned} \varrho\frac{Du}{Dt} &= \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\,\Delta u,\\ \varrho\frac{Dv}{Dt} &= \varrho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\,\Delta v,\\ \varrho\frac{Dw}{\partial t} &= \varrho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\,\Delta w. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Эти уравнения движения в первый раз были получены Навье [1]) и Пуассоном [2]) на основании различных соображений о взаимодействии между молекулами жидкости. Способ, примененный выше, свободный от предположений подобного рода, повидимому, в существенных чертах принадлежит Сен-Венану [3]) и Стоксу [4]).

Уравнения (4) допускают интересное истолкование. Первое из них может быть написано в виде

$$\frac{Du}{Dt} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\,\Delta u. \tag{5}$$

Первые два члена в правой части представляют изменение скорости u в единицу времени, происходящее вследствие действия внешних сил и распределения давления в данный момент, и имеют такой же вид, как и в случае идеальной жидкости. Последний же член, зависящий от вязкости, представляет, таким образом, дополнительное изменение скорости, которое следует тому же закону, какой имеет место для температуры в теории теплопроводности или для плотности в теории диффузии. Это изменение скорости в самом деле пропорционально (положительной или отрицательной) разности между среднim значением величины u на поверхности небольшой сферы, окружающей точку (x, y, z), и значением u в этой точке [5]).

В связи с термической аналогией интересно отметить, что значение величины ν для воды имеет такой же порядок, как значение (0,01249), найденное Эвереттом для теплопроводности гринвичского гравия.

Если силы X, Y, Z имеют потенциал, то уравнения (4) можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - v\zeta + w\eta &= -\frac{\partial \chi'}{\partial x} + \nu\,\Delta u,\\ \frac{\partial v}{\partial t} - w\xi + u\zeta &= -\frac{\partial \chi'}{\partial y} + \nu\,\Delta v,\\ \frac{\partial w}{\partial t} - u\eta + v\xi &= -\frac{\partial \chi'}{\partial z} + \nu\,\Delta w, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где

$$\chi' = \frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}\,q^2 + \Omega; \tag{7}$$

---

[1]) Navier, Mémoire sur les Lois du Mouvement des Fluides, Mém. de l'Acad. des Sciences, VI, 389 (1822).

[2]) Poisson, Mémoire sur les Équations générales de l'Équilibre et du Mouvement des Corps solides elastiques et des Fluides, Journ. de l'École Polytechn., XIII, 1 (1829).

[3]) Saint-Venant, Comptes Rendus, XVII, 1240 (1843).

[4]) Stokes, On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion etc., Camb. Trans., VIII, 287 (1845) (Papers, I, 75).

[5]) Maxwell, On the Mathematical Classification of Physical Quantities, Proc. Lond. Math. Soc. (1), III, 224 (1871) (Papers, II, 257); Electricity and Magnetism, § 26.

q обозначает здесь абсолютное значение скорости, а ξ, η, ζ суть составляющие вихря. Исключая χ' перекрестным диференцированием, находим

$$\left.\begin{aligned}\frac{D\xi}{Dt} &= \xi\frac{\partial u}{\partial x}+\eta\frac{\partial u}{\partial y}+\zeta\frac{\partial u}{\partial z}+\nu\Delta\xi,\\ \frac{D\eta}{Dt} &= \xi\frac{\partial v}{\partial x}+\eta\frac{\partial v}{\partial y}+\zeta\frac{\partial v}{\partial z}+\nu\Delta\eta,\\ \frac{D\zeta}{Dt} &= \xi\frac{\partial w}{\partial x}+\eta\frac{\partial w}{\partial y}+\zeta\frac{\partial w}{\partial z}+\nu\Delta\zeta.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Первые три члена в правых частях этих уравнений дают, как в (4) § 146, скорости, с которыми изменяются значения ξ, η, ζ для данной частицы, когда вихревые линии движутся вместе с жидкостью и напряжения вихрей остаются постоянными. Добавочное изменение этих трех величин, происходящее вследствие вязкости, определяется последними членами и следует закону теплопроводности. Из этой аналогии следует, что вихревое движение не может возникнуть внутри вязкой жидкости; оно должно распространяться от граничной поверхности внутрь жидкости.

§ 328a. Для плоского случая уравнения (6) предшествующего параграфа приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}-v\zeta &= -\frac{\partial\chi'}{\partial x}-\nu\frac{\partial\zeta}{\partial y},\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\zeta &= -\frac{\partial\chi'}{\partial y}+\nu\frac{\partial\zeta}{\partial x}.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Отсюда или из (8) предыдущего параграфа получается

$$\frac{D\zeta}{Dt}=\nu\Delta_1\zeta; \tag{2}$$

здесь аналогия с теплопроводностью вполне очевидна.

Из уравнений (1) можно установить простое выражение для скорости изменения циркуляции по фиксированному контуру. Таким образом, будем иметь

$$\frac{d}{dt}\int(u\,dx+v\,dy)=\int(lu+mv)\,\xi\,ds+\nu\int\frac{\partial\zeta}{\partial n}\,ds, \tag{3}$$

где (l, m) суть направляющие косинусы внутренней нормали. Первое слагаемое в правой части представляет эффект переноса вихрей в область, ограниченную данным контуром; второе слагаемое представляет эффект от вязкости.

Например, в случае движения по концентрическим окружностям будем иметь

$$r\frac{\partial q}{\partial t}=\nu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial q}{\partial r}+\frac{q}{r}\right), \tag{4}$$

или

$$\frac{\partial q}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial q}{\partial r}-\frac{q}{r^2}\right). \tag{5}$$

Иногда бывает удобно иметь под рукой основные формулы в полярных координатах на плоскости. Если мы обозначим через u, v радиальную компоненту скорости и компоненту по перпендикуляру к радиусу, то кинематические формулы, как это указано в дополнении к главе VIII, будут иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial v}{r\,\partial\theta}=0, \tag{6}$$

$$\zeta=\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}-\frac{\partial u}{r\,\partial\theta}. \tag{7}$$

Выражения для составляющих ускорения приведены на стр. 199. Поэтому уравнения движения преобразуются в следующие:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+v\frac{\partial u}{r\partial\theta}-\frac{v^2}{r}=R-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}-\nu\frac{\partial\zeta}{r\partial\theta},\\ &\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial r}+v\frac{\partial v}{r\partial\theta}+\frac{uv}{r}=\Theta-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{r\partial\theta}+\nu\frac{\partial\zeta}{\partial r}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Здесь R, Θ обозначают радиальную и трансверсальную составляющие внешней силы.

Чтобы найти составляющие напряжения, мы обозначим через (u_1, v_1) составляющие скорости, отнесенные к неподвижным декартовым осям; тогда будем иметь

$$u_1=u\cos\theta-v\sin\theta,\quad v_1=u\sin\theta+v\cos\theta, \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\sin\theta\frac{\partial}{r\partial\theta},\\ &\frac{\partial}{\partial y_1}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{r\partial\theta}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Если мы после дифереицирований примем ось x совпадающей с мгновенным положением радиуса-вектора, то, полагая в формулах (9), (10) $\theta=0$, получим

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{\partial u}{\partial r},\quad \frac{\partial v_1}{\partial y_1}=\frac{\partial v}{r\partial\theta}+\frac{u}{r},$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}=\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial u}{r\partial\theta}-\frac{v}{r}.$$

Следовательно, напряжения из (5) § 326 представятся в виде

$$\left.\begin{aligned} &p_{rr}=-p+2\mu\frac{\partial u}{\partial r},\quad p_{\theta\theta}=-p+2\mu\left(\frac{\partial v}{r\partial\theta}+\frac{u}{r}\right),\\ &p_{r\theta}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial u}{r\partial\theta}-\frac{v}{r}\right). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Определяя результирующие напряжений в направлениях r и θ по граням элемента $r\,\partial\theta\,\partial r$, мы воспроизведем уравнения (8).

§ 329. Чтобы найти скорость рассеяния энергии, происходящего вследствие вязкости, рассмотрим прежде всего часть жидкости, занимающую прямоугольный элемент $\delta x\,\delta y\,\delta z$ с центром в точке (x, y, z). Если мы вычислим работу, которая производится в единицу времени напряжениями, действующими на пары противоположных граней элемента, то получим

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x}(p_{xx}u+p_{xy}vp+p_{xz}w)+\frac{\partial}{\partial y}(p_{yx}u+p_{yy}v+p_{yz}w)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}(p_{zx}u+p_{zy}v+p_{zz}w)\right\}\delta x\,\delta y\,\delta z. \tag{1}$$

Члены

$$\left\{\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right)u+\left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial z}\right)v+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right)w\right\}\delta x\,\delta y\,\delta z \tag{2}$$

выражают согласно формулам (1) § 328 работу, которую производят в единицу времени напряжения, действующие на грани элемента при движении его как твердой частицы; эта работа идет на увеличение кинетической энергии элемента и на возмещение той работы, которая совершается против действия внешних сил X, Y, Z. Остальные члены выражают работу в единицу времени, производимую при изменении объема и формы элемента. Их можно написать в виде

$$(p_{xx}a + p_{yy}b + p_{zz}c + p_{yz}f + p_{zx}g + p_{xy}h)\,\delta x\,\delta y\,\delta z, \qquad (3)$$

где a, b, c, f, g, h имеют те же значения, как в §§ 30 и 324. Подставляя значения напряжений из формул (2) и (3) § 326, получим

$$-p(a+b+c)\,\delta x\,\delta y\,\delta z + \left\{-\frac{2}{3}\mu(a+b+c)^2 + \right.$$
$$\left. + \mu(2a^2+2b^2+2c^2+f^2+g^2+h^2)\right\}\delta x\,\delta y\,\delta z. \qquad (4)$$

Достаточно будет пока рассмотреть тот случай, при котором не происходит изменения плотности, когда, следовательно,

$$a+b+c=0. \qquad (5)$$

Выражение (4) приводится тогда к виду

$$\mu(2a^2+2b^2+2c^2+f^2+g^2+h^2)\,\delta x\,\delta y\,\delta z \qquad (6)$$

и представляет вместе с тем скорость рассеяния механической энергии. На основании законов, установленных Джоулем, энергия, которая кажется при этом потерянной, на самом деле должна переходить в теплоту, развивающуюся внутри элемента.

Если мы проинтегрируем по всему объему жидкости, то найдем для полного рассеяния энергии в единицу времени значение

$$2F = \int\int\int \Phi\,dx\,dy\,dz, \qquad (7)$$

где

$$\Phi = \mu\left\{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}. \qquad (8)\ ^{1})$$

Вычитая отсюда выражение

$$2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2,$$

которое при сделанном выше допущении равно нулю, получим

$$\Phi = \mu\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} -$$
$$- 4\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right). \qquad (9)$$

---

[1] Stokes. On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums, Camb. Trans., IX (8) (1851) (Papers, III, 1).

Проинтегрируем это выражение по области, на границах которой величины u, v, w повсюду исчезают, как это имеет место для жидкости, заполняющей замкнутый сосуд согласно гипотезе прилипания; тогда скольжения нет, члены во второй строке (после интегрирования по частям) исчезают, и мы получаем

$$2F = \iiint \Phi \, dx\, dy\, dz = \mu \iiint (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, dx\, dy\, dz. \qquad (10)\ ^1)$$

Более непосредственное доказательство этой формулы будем иметь, если заметим, что при принятых предположениях уравненне энергии (5) § 10 заменяется следующим:

$$\frac{D}{Dt}(T+V) = \mu \iiint (u\,\Delta u + v\,\Delta v + w\,\Delta w)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \mu \iiint \left\{ u\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) + v\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) + w\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right\} dx\, dy\, dz =$$

$$= -\mu \iiint (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, dx\, dy\, dz. \qquad (11)$$

В общем случае, когда на граничные условия не накладываются ограничения, формула (5) приводит к выражению

$$2F = \mu \iiint (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, dx\, dy\, dz - \mu \iint \frac{\partial q^2}{\partial n}\, dS + 2\mu \iint \begin{vmatrix} l, & m, & n \\ u, & v, & w \\ \xi, & \eta, & \zeta \end{vmatrix} dS; \qquad (12)$$

δn в первом поверхностном интеграле обозначает элемент нормали, а l, m, n во втором интеграле суть направляющие косинусы нормали; в обоих случаях нормаль направлена от поверхностного элемента δS внутрь.

Если рассматриваемое движение свободно от вихрей, то эта формула приводится к виду

$$2F = -\mu \iint \frac{\partial q^2}{\partial n}\, dS. \qquad (13)$$

Для частного случая сферической поверхности это выражение следует непосредственно из формулы (5) § 44.

Из формулы (6) следует, что величина F не может обращаться в нуль если равенства

$$a = b = c = 0 \quad \text{и} \quad f = g = h = 0$$

не имеют места для каждой точки жидкости. Отсюда, принимая во внимание § 30, следует, что движение жидкости без рассеяния энергии вследствие вязкости возможно только в том случае, когда нигде в жидкости не происходит удлинение или сокращение линейных элементов. Другими словами, движение жидкости должно состоять из поступательного и вращательного движения всей массы как целого, как это имеет место в случае твердого тела.

---

[1]) Bobyleff, Einige Betrachtungen über die Gleichungen der Hydrodynamik, Math. Ann., VI, 72 (1873); Forsyth, On the Motion of a Viscous Incompressible Fluid, Mess. of Math., IX (1880).

Задачи установившегося движения.

§ 330. Переходя теперь к рассмотрению частных задач, необходимо с самого начала предупредить, что хотя уравнения движения вязкой жидкости и получены надлежащим способом, все же вычисления, опирающиеся на них, приводят к довольно сильно ограниченным результатам. Причина этого лежит в том, что мы, чтобы упростить вычисления, отбрасываем в эйлеровой форме выражений для ускорения малые величины второго порядка, которые, однако, часто имеют, по меньшей мере, такую же важность, как и члены, зависящие от вязкости. Другая причина заключается в том, что даже при точном решении задачи полученные формы движения часто оказываются неустойчивыми. Мы будем в дальнейшем иметь случай обратить внимание на это обстоятельство и исследуем его подробнее в § 365 и далее.

Первое применение уравнений движения, которое мы теперь рассмотрим, будет относиться к установившемуся движению жидкости, происходящему под действием давления между двумя неподвижными плоскостями. Пусть начало координат лежит в одной из этих плоскостей и ось z направлена перпендикулярно к этой плоскости.

Предположим прежде всего, что u есть функция только z и $v = w = 0$. Так как напряжение, параллельное оси x и действующее на произвольную, перпендикулярную к оси z плоскость, равно $\mu \frac{\partial u}{\partial z}$, то разность напряжений на две граничные поверхности слоя, с площадью основания, равной единице, и с толщиной δz будет равна $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot \delta z$.

Эта разность напряжений должна уравновешиваться давлением, имеющим на каждую единицу объема слоя равнодействующую $-\frac{\partial p}{\partial x}$. Отсюда следует

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{1}$$

Так как далее движения в направлении оси z нет, то производная $\frac{\partial p}{\partial z}$ должна быть равна нулю. Эти результаты следуют также непосредственно из общих уравнений § 328.

Отсюда получается, что градиент давления $\frac{\partial p}{\partial x}$ есть абсолютная постоянная.

Поэтому уравнение (1) дает

$$u = A + Bz + \frac{1}{2\mu} z^2 \frac{\partial p}{\partial x}; \tag{2}$$

если мы определим постоянные так, что будем иметь $u = 0$ при $z = 0$ и $z = h$, то найдем

$$u = -\frac{1}{2\mu} z(h - z) \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{3}$$

Отсюда получается

$$\int_{-h}^{h} u\,dz = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{dp}{dx}. \tag{4}$$

Если, как это имело место в опытах проф. Хиль Шоу [1]), жидкость течет в двух измерениях между двумя близко друг к другу расположенными плоскими пластинками, то мы можем положить

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{dp}{dx}, \quad \mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{dp}{dy}, \tag{5}$$

если только пренебречь значениями производных от функций u и v, взятых по x и y, по сравненню с производными по z. Если далее предположить, что всюду $w=0$, то получим $\frac{dp}{dz}=0$, т. е. p есть функция только x и y.

Условне отсутствия скольжения в плоскостях $z=0$ и $z=h$ будет выполнено, если мы положим

$$u = \frac{6z(h-z)}{h^3}u', \quad v = \frac{6z(h-z)}{h^2}v'. \tag{6}$$

Велнчины u' и v' представляют здесь средние скорости в слое и предполагаются функциями только x и y. Есln мы подставим эти выражения в уравнения (5), то найдем

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{12\mu}{h^2}u', \quad \frac{dp}{dy} = -\frac{12\mu}{h^2}v'. \tag{7}$$

Следовательно, величины u' и v' можно рассматривать как составляющие скорости плоского безвихревого движения жидкостн с потенциалом скоростей

$$\varphi = \frac{ph^2}{12\mu}. \tag{8}$$

Если жидкость, находящаяся под давлением, вынуждена обтекать препятствие, которое расположено между плоскостями и имеет форму пластинки толщиной h, то кинематические условия большей частью оказываются такими же. как и при плоском движении идеальной жидкости, обтекающей цилиндр с поперечным сечением в форме пластинки. Это заключение справедливо только с тем небольшим ограничением, что уравнения (5) на расстоянии порядка h от препятствия перестают быть годными, так как вязкая жидкость не может скользить вдоль поверхности препятствия, как это имеет место для идеальной жидкости.

Однако, фигуры линий тока в обеих задачах могут быть сделаны как угодно мало отличающимися друг от друга, если только расстояние между плоскостями взять достаточно малым [2]).

§ 330a. Если граничная плоскость $z=0$ имеет скорость U, параллельную оси x, то вместо формулы (3) будем иметь

$$u = \frac{h-z}{h}U - \frac{z(h-z)}{2\mu}\frac{dp}{dx}, \tag{9}$$

---

[1]) Указания литературы см. в примечании на стр. 111.

[2]) Stokes, Mathematical Proof of the Identity of the Stream-Lines obtained by means of a Viscous Film with those of a Perfect Fluid moving in Two Dimensions, Brit. Ass. Rep., 1898, стр. 143 (Papers, V, 278).

и общий расход через плоскость, перпендикулярную к оси x, на единицу ширины будет равен

$$\int_0^h u\,dz = \frac{1}{2}hU - \frac{h^3}{12\mu}\frac{dp}{dx}. \tag{10}$$

Эти формулы приближенно верны также в том случае, когда расстояние h между обеими плоскостями есть переменная величина, если только значение градиента $\frac{dh}{dx}$ будет мало, а также и тогда, когда обе поверхности кривые, если только значение h всюду мало по сравнению с радиусом кривизны. В случае цилиндрических поверхностей за координату x можно взять длину дуги кривой поперечного сечения.

Приведенные выше результаты с указанным обобщением находят важное применение в теории смазки; эта теория основана Осборном Рейнольдсом в его классической работе [1]). То обстоятельство, что две параллельные или приблизительно параллельные плоскости могут, несмотря на большое нормальное давление, с очень небольшим сопротивлением трения скользить одна по другой, если только между ними находится слой вязкой жидкости, было, конечно, давно известно. Задача заключалась только в том, чтобы объяснить, как это в практических случаях автоматически выполняется, несмотря на давление. Оказывается, что расположение двух поверхностей должно быть таким, чтобы промежуточное пространство между ними имело переменную толщину и чтобы относительное движение все время стремилось бы переносить смазывающее вещество от более толстых частей промежуточного слоя к более тонким.

Простой типичный случай представляет собой скольжение колодки по плоскости. Так как значение имеет только относительное движение, то мы будем считать, что движется плоскость ($z=0$), в то время как колодка находится в покое. Для простоты примем далее, что обе поверхности в направлении оси y не ограничены, так что движение жидкости будет плоским. Пусть нижняя поверхность колодки ограничена прямыми $x=0$ и $x=a$. Мы будем ее представлять себе плоской, но слегка наклоненной, и поэтому положим

$$h = h_1 + mx,\quad h_2 = h_1 + ma, \tag{11}$$

где m — величина малая.

Так как расход через все плоскости, перпендикулярные к оси x, должен быть одинаковым, то на основании равенства (10) имеем

$$h^3\frac{dp}{dx} = 6\mu U(h - h_0), \tag{12}$$

причем значение h_0 соответствует максимуму величины p. Отсюда следует

$$\frac{dp}{dh} = \frac{6\mu U}{m}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{h_0}{h^3}\right), \tag{13}$$

$$p = \frac{6\mu U}{m}\left(-\frac{1}{h} + \frac{h_0}{2h^2} + C\right). \tag{14}$$

[1]) См. примечание 2 на стр. 720.

Если мы определим постоянные h_0 и C таким образом, чтобы имело место равенство $p=0$ при $h=h_1$ и $h=h_2$, то найдем

$$h_0=\frac{2h_1h_2}{h_1+h_2}, \tag{15}$$

$$p=\frac{6\mu Ua}{h_1^2-h_2^2}\cdot\frac{(h_1-h)(h-h_2)}{h^2}. \tag{16}$$

Прибавление постоянной к p, конечно, не меняет существенно результатов.

Тотчас же видно следующее: если значение U, как мы и будем предполагать, положительно, то положительное давление в слое возможно только в том случае, когда $h_1>h_2$; это значит, что промежуточный слой должен суживаться в направлении скорости U, как это и было указано выше.

Для полного давления получаем выражение

$$P=\int_0^a p\,dx=\frac{1}{m}\int_{h_1}^{h_2} p\,dh=\frac{6\mu Ua^2}{(k-1)^2h_2^2}\left(\ln k-\frac{2(k-1)}{k+1}\right), \tag{17}$$

где $k=\frac{h_1}{h_2}$. Сопротивление же от вязкости на движущейся плоскости будет иметь значение

$$F=-\int_0^a \mu\frac{du}{dz}\,dx=\frac{\mu U}{m}\int_{h_1}^{h_2}\left(\frac{4}{h}-\frac{3h_0}{h^2}\right)dh=$$

$$=\frac{\mu Ua}{(k-1)h_2}\left(4\ln k-\frac{6(k-1)}{k+1}\right). \tag{18}$$

Рейнольдсом было найдено, а Рэлеем подтверждено[1]), что результирующее давление P, рассматриваемое как функция от k, имеет максимум приблизительно при $k=2{,}2$. При этом получается

$$P=0{,}16\,\frac{\mu Ua^2}{h_2^2},\quad F=0{,}75\,\frac{\mu Ua}{h_2}. \tag{19}$$

Коэфициент трения $\frac{F}{P}$ имеет порядок величины $\frac{h_2}{a}$ и может быть сделан поэтому очень малым.

Координата $(\bar{x})$ центра давления определяется формулой

$$P\bar{x}=\int_0^a xp\,dx=\frac{1}{m^2}\int_{h_1}^{h_2}(h-h_1)\,p\,dh=\frac{kPa}{k-1}-\frac{1}{2m^2}\int_{h_1}^{h_2}h^2\frac{dp}{dh}\,dh=$$

$$=\frac{kPa}{k-1}-\frac{3\mu Ua^3}{(k-1)^2h_2^2}\left(1-\frac{2k}{k^2-1}\ln k\right), \tag{20}$$

или

$$\frac{\bar{x}}{\frac{1}{2}a}=\frac{2k}{k-1}-\frac{k^2-1-2k\ln k}{(k^2-1)\ln k-2(k-1)^2}. \tag{21}$$ [2])

---

[1]) Rayleigh, Notes on the Theory of Lubrication, Phil. Mag. (6), XXXV, 1 (1918) (Papers, VI, 523).

[2]) Rayleigh, см. выше. Для $k=2{,}2$ эта формула дает $\bar{x}=0{,}580\,a$.

Применение уравнения (13) к случаю вала, вращающегося (несколько эксцентрично) в неподвижных подшипниках, имеется в работах, указанных в примечании [1]).

Если же течение происходит как в направлении оси x, так и в направлении оси y, то кроме равенства (10) имеем еще равенство

$$\int_0^h v\,dz = \frac{1}{2}hV - \frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial y}; \tag{22}$$

уравнение непрерывности в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_0^h v\,dz = 0 \tag{23}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 6\mu\left\{\frac{\partial}{\partial x}(hU) + \frac{\partial}{\partial y}(hV)\right\}. \tag{24}$$

Мичелл приложил это уравнение к случаю прямоугольной колодки конечной ширины, скользящей по плоскости [2]).

§ 331. Рассмотрим далее установившееся течение жидкости по круглой цилиндрической трубе.

Если направить ось z по оси трубы и принять, что скорость всюду параллельна оси z и есть функция расстояния (r) от оси, то касательное напряжение в плоскости, перпендикулярной к r, будет равно $\mu\frac{\partial w}{\partial r}$. Рассматривая цилиндрический слой жидкости с граничными радиусами r и $r+\delta r$ и длиной l, получим, что разность касательных напряжений на обеих цилиндрических поверхностях дает тормозящую силу

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial r}\cdot 2\pi r l\right)\delta r.$$

Вследствие установившегося характера движения эта сила должна уравновешиваться разностью нормальных давлений на плоских концах слоя.

Так как $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, то разность этих нормальных давлений должна быть равна

$$(p_1 - p_2)\,2\pi r\,\delta r,$$

где p_1 и p_2 — значения величины p (среднего давления) на обоих концах. Отсюда следует

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) = -\frac{p_1 - p_2}{\mu l}\cdot r. \tag{1}$$

---

[1]) Reynolds, см. выше; Sommerfeld, Zeitschrift f. Math., I, 97 (1904); Harrison, Camb. Trans., XXII, 39 (1913) и XXII, 373 (1920). См. также A. G. Michell, Mechanical Properties of Fluids, London, 1923, стр. 134; Stanton, Friction, London, 1923, стр. 93. Сборник „Гидродинамическая теория смазки", Москва, 1934.

[2]) Michell, Zeitschr f. Math., LIII, 123 (1905). Извлечения из этого весьма изящного исследования находятся в обеих только что названных книгах.

Если мы затем будем искать для сил, действующих на прямоугольную площадку, результирующую составляющую в направлении радиуса, то получим $\frac{\partial p}{\partial z}=0$, что означает, что среднее давление по всему поперечному сечению оказывается для каждого сечения трубы постоянным.

Интеграл уравнения (1) есть

$$w=-\frac{p_1-p_2}{4\mu l}r^2+A\ln r+B. \tag{2}$$

Так как скорость на оси должна быть конечной, то мы должны иметь $A=0$; если мы теперь определим B из условия, что на стенке трубы не должно быть скольжения, то получим

$$w=\frac{p_1-p_2}{4\mu l}(a^2-r^2). \tag{3}$$

Эта формула дает для расхода через произвольное поперечное сечение значение

$$\int_0^a w\cdot 2\pi r\,dr=\frac{\pi a^4}{8\mu}\cdot\frac{p_1-p_2}{l}. \tag{4}$$

Мы приняли для краткости, что течение происходит только под действием давления. Если к этому добавляется еще внешняя сила X, действующая параллельно длине трубки, то поток окажется равным

$$\frac{\pi a^4}{8\mu}\left(\frac{p_1-p_2}{l}+\varrho X\right). \tag{5}$$

Практически сила X представляет обычно составляющую силы тяжести в направлении длины трубы.

Формула (4) заключает в себе как раз те законы, которые экспериментально нашел Пуазейль [1]) при своих исследованиях, относящихся к течению воды по капиллярным трубкам, а именно, что время истечения данной массы жидкости прямо пропорционально длине трубки, обратно пропорционально разности давлений на обоих концах и обратно пропорционально четвертой степени диаметра.

Этот последний результат в особенности важен, так как он представляет решающее доказательство того, что при этих опытах не происходило никакого заметного скольжения жидкости вдоль стенки. Если бы мы приняли коэфициент скольжения равным β, как указано в § 327, то условие на граничной поверхности имело бы вид

$$-\mu\frac{\partial w}{\partial r}=\beta w$$

или

$$w=-\lambda\frac{\partial w}{\partial r}, \tag{6}$$

---

[1]) Poiseuille, Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. Comptes Rendus, XI, XII (1840—1841). Mém. des Sav. Étrangers, IX (1846).

если положить $\lambda = \frac{\mu}{\beta}$. Это соотношение определяет постоянную B в равенстве (2) таким образом, что

$$w = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l}\ (a^2 - r^2 + 2\lambda a). \tag{7}$$

Если отношение $\frac{\lambda}{a}$ мало, то это равенство дает практически тот же закон распределения скорости, как в случае трубы радиуса $a + \lambda$ при гипотезе прилипания. Соответствующее же значение расхода оказывается равным

$$\frac{\pi a^4}{8\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l} \left(1 + 4\frac{\lambda}{a}\right). \tag{8}$$

Если бы в случае очень узких трубок в опытах Пуазейля ($a = 0{,}0015$ *см*) значение λ оказалось больше, чем очень малая доля радиуса a, то необходимо должно было бы обнаружиться отклонение от закона четвертой степени диаметра, между тем как в действительности закон выполняется очень точно. Этого достаточно, чтобы исключить возможность таких значений λ, как 0,235 *см*, а также значения были получены Гельмгольцем и Пнотровским на основании описанных в названных уже работах опытов их над крутильными колебаниями металлического шара, наполненного водой [1]).

Так как гипотезу прилипания можно считать в настоящее время вполне установленной, то сравнение формулы (4) с опытами дает прямой способ определять значение коэфициента μ для различных жидкостей [2]).

Из равенств (3) и (4) следует, что скорость деформации сдвига вблизи от стенки равна $4\frac{w_0}{a}$, где w_0 обозначает среднюю скорость в поперечном сечении.

В качестве числового примера приведем рассмотренный Пуазейлем случай, когда в трубе диаметром 0,01134 *см* была получена средняя скорость, равная 126,6 *см/сек*. Это дает соотношение $\frac{4w_0}{a} = 89\,300$, если за единицу времени взять секунду.

Для значений w_0, которые превосходят некоторую границу, зависящую от отношения между диаметром трубы и коэфициентом вязкости, рассмотренная здесь прямолинейная форма течения становится неустойчивой для всех возмущений, превосходящих некоторое значение (см. § 365). Результаты §§ 330, 331, а также многие последующие вычисления подвержены тем же ограничениям.

§ 332. Приведем теперь некоторые теоретические результаты для некруговых поперечных сечений.

1. Решение для канала с поперечным сечением в форме *кольца* можно легко получить из выражения (2) предыдущего параграфа, если удержать

---

[1]) Более полное изложение этого вопроса находится в работе Whetham, On the alleged Slipping at the Boundary of a Liquid in Motion, Phil. Trans., A, CLXXXI, 559 (1890).

[2]) При практическом применении этого способа требуется поправка, учитывающая отклонение от теоретического закона вблизи концов трубки; см. Stanton, Friction, стр. 15.

коэфициент A. Таким образом, находим при граничных условиях $w=0$ при $r=a$ и $r=b$

$$w=\frac{p_1-p_2}{4\mu l}\left\{a^2-r^2+\frac{b^2-a^2}{\ln\frac{b}{a}}\ln\frac{r}{a}\right\}; \tag{1}$$

это дает для расхода значение

$$\int_a^b w\cdot 2\pi r\,dr=\frac{\pi}{8\mu}\cdot\frac{p_1-p_2}{l}\left\{b^4-a^4-\frac{(b^2-a^2)^2}{\ln\frac{b}{a}}\right\}. \tag{2}$$

2. Гринхилл [1]) указал на то, что аналитические условия рассматриваемой задачи оказываются подобными тем, которые определяют движение идеальной жидкости во вращающемся призматическом сосуде с поперечным сечением той же формы (§ 72).

Если направим ось z параллельно оси трубы и предположим, что w есть функция только x и y, то уравнения в случае установившегося движения приведутся к виду

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial y}=0,\\ &\mu\Delta_1 w=\frac{\partial p}{\partial z},\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где

$$\Delta_1=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Обозначая через P постоянный градиент давления $\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right)$, будем иметь

$$\Delta_1 w=-\frac{P}{\mu} \tag{4}$$

при условии, что на границе $w=0$.

Подставляя теперь выражение $\psi-\frac{1}{2}\omega(x^2+y^2)$ вместо w и 2ω вместо $\frac{P}{\mu}$, мы воспроизведем условия названного выше параграфа. Этим и доказывается отмеченная выше аналогия.

В случае эллиптического сечения с полуосями a, b положим

$$w=C\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right), \tag{5}$$

что удовлетворяет уравнению (4), если

$$C=\frac{P}{2\mu}\cdot\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}. \tag{6}$$

Отсюда секундный расход жидкости будет равен

$$\iint w\,dx\,dy=\frac{P}{4\mu}\cdot\frac{\pi a^3b^3}{a^2+b^2}. \tag{7}^{2})$$

---

[1]) Greenhill, On the Flow of a Viscous Liquid in a Pipe or Channel, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XIII, 43 (1881).

[2]) Этот результат и соответствующие результаты для других форм поперечного сечения, повидимому, получил в 1868 г. Буссинеск; см. Hicks, Brit. Ass. Rep., 1882, стр. 63.

Эта величина относится к расходу жидкости в круглой трубе с такой же площадью поперечного сечения, как $2ab:(a^2+b^2)$. Для небольших значений эксцентриситета e эта дробь отличается от *единицы* на величину порядка e^4. Поэтому поперечные сечения могут иметь довольно разнообразную форму без того, чтобы расход менялся значительно, если только площадь поперечного сечения остается неизменной. Даже если $a:b=8:7$, то и тогда расход уменьшается меньше, чем на 1%.

§ 333. Рассмотрим теперь несколько простых случаев установившегося вращательного движения.

Обратимся сначала к случаю вращения вокруг оси z, когда угловая скорость есть функция расстояния (r) от оси. Полагая

$$u=-\omega y, \quad v=\omega x, \tag{1}$$

находим, что скорости растяжения в направлении радиуса-вектора и в перпендикулярном к радиусу направлении равны нулю, в то время как скорость сдвига в плоскости xy равна $r\frac{d\omega}{dr}$. Тогда момент касательных сил, действующих на цилиндрическую поверхность радиуса r, относительно его оси z на единицу длины последней будет равен $\mu r\frac{d\omega}{dr}\cdot 2\pi r\cdot r$. Так как движение установившееся, то жидкость, заключенная между двумя сооснымн цилиндрами, не может ничего ни потерять, ни выиграть в отношении момента количеств движения, а это значит, что приведенное здесь выражение не должно зависеть от r.

Это дает зависимость

$$\omega=\frac{A}{r^2}+B. \tag{2}$$

Если жидкость простирается в бесконечность, а внутренняя граница образована поверхностью твердого цилиндра радиуса a, вращающегося с угловой скоростью ω_0, то будем иметь

$$\frac{\omega}{\omega_0}=\frac{a^2}{r^2}. \tag{3}$$

Момент сил трения поэтому будет равен

$$-4\pi\mu a^2\omega_0. \tag{4}$$

Если бы жидкость снаружи была ограничена поверхностью неподвижного цилиндра радиуса b, соосного с первым, то мы нашли бы

$$\omega=\frac{a^2}{r^2}\cdot\frac{b^2-r^2}{b^2-a^2}\cdot\omega_0; \tag{5}$$

этот результат дает для момента сил трения

$$-4\pi\mu\cdot\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}\cdot\omega_0. \tag{6}$$[1]

[1]) Эта задача в первый раз, но не вполне точно, была решена Ньютоном, Principia, 2-я книга, предложение 51. Приведенные здесь результаты в существенном принадлежат Стоксу, см. выше, стр. 723, 726.

Эти формулы можно применить также к тому случаю, когда внешний цилиндр вращается, а внутренний находится в покое, если только изменить смысл величин a и b. Опыты в этом направлении провели Маллок [1]), Кутт [2]) и другие, причем момент сил трения на внутреннем цилиндре измерялся кручением подвешенной проволоки или другими аналогичными способами.

О результатах этих опытов мы скажем позднее (§ 366а) [3]).

§ 334. Решение, подобное изложенному в предыдущем параграфе, однако, с тем ограничением, что оно должно относиться к бесконечно малым движениям, может быть получено и для случая установившегося движения жидкости, окружающей шар, который равномерно вращается около одного из своих диаметров. Возьмем начало в центре шара, направим ось z по оси вращения и положим

$$u = -\omega y, \quad v = \omega x, \quad w = 0, \tag{1}$$

где угловая скорость ω — функция только радиуса-вектора r. Если мы положим

$$P = \int \omega r\, dr, \tag{2}$$

то выражения (1) могут быть написаны в виде

$$u = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad w = 0; \tag{3}$$

после подстановки этих выражений в уравнения (4) § 328 оказывается, что этим уравнениям можно удовлетворить, полагая

$$p = \text{const.}, \quad \Delta P = \text{const.}, \tag{4}$$

если только пренебречь членами второго порядка по отношению к скоростям. Второе из уравнений (4) может быть написано в виде

$$\frac{d^2P}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dP}{dr} = \text{const.} \text{ или } r\frac{d\omega}{dr} + 3\omega = \text{const.} \tag{5}$$

Отсюда следует

$$\omega = \frac{A}{r^3} + B. \tag{6}$$

Если жидкость простирается в бесконечность и в бесконечности находится в покое и если ω_0 обозначает угловую скорость вращающегося шара ($r = a$), то имеем

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{a^3}{r^3}. \tag{7}$$

---

[1]) Mallok, Determination of the Viscosity of Water, Proc. Roy. Soc., XLV, 126 (1888); Experiments on Fluid Viscosity, Phil. Trans., A, CLXXXVII, 41.

[2]) Couette, Études sur le frottement des liquides. Ann. de chimie et phys., XXI, 433 (1890).

[3]) Некоторые случаи видонзмененной задачи, связанной с вращением круглого цилиндра, рассматривались Jeffery, Proc. Roy. Soc., A. cl. 169 (1922) и Frazer, Phil. Trans., CCXXV, 93 (1925).

Если же внешняя граница представляет собой неподвижный шар радиуса b, концентрический с первым, то решение принимает вид

$$\omega = \frac{a^3}{r^3} \cdot \frac{b^3 - r^3}{b^3 - a^3} \cdot \omega_0. \tag{8}$$

Тормозящий момент, действующий на шар, можно прямо вычислить при помощи формул § 326 или, пожалуй, еще проще посредством функции рассеяния § 329. Для рассеяния энергии в единицу времени без труда получаем выражение

$$\mu \iiint (x^2 + y^2) \left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2 dx\, dy\, dz = \frac{8}{3}\, \pi\mu \int_a^b r^4 \left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2 dr =$$

$$= 8\pi\mu\, \frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3}\, \omega_0^2. \tag{9}$$

Если обозначить через N вращающий момент, который должен быть приложен к шару, чтобы поддерживать его вращение, то выражение (9) должно быть эквивалентно $N\omega_0$; отсюда следует

$$N = 8\pi\mu\, \frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3}\, \omega_0 \tag{10}$$

или для случая, соответствующего выражению (7), когда $b = \infty$,

$$N = 8\pi\mu a^3 \omega_0. \tag{11}$$[1]

Отбрасывание членов второго порядка в этой задаче уменьшает ее практическое значение в большей степени, чем это можно было ожидать. Нетрудно показать, что предположение, которое лежит в основе этого приближения, сводится к тому, что отношение $\frac{\omega_0 a^2}{\nu}$ должно быть мало. Полагая $\nu = 0{,}018$ (вода) и $a = 10$, находим, что скорость на экваторе должна быть мала по сравнению с значением $0{,}0018$ (*см/сек*) [2].

Если принять во внимание члены второго порядка, то установившееся движение рассматриваемого рода становится невозможным. Шар действует при этом как центробежный вентилятор, т. е. движение на некотором расстоянии от шара представляет собой течение наружу от экватора и внутрь по направлению к полюсам, накладываемое на вращательное движение [3].

В том случае, к которому относятся формулы (8) и (10), условие применимости приближенного метода заключается в том, что выражение

$$\frac{\omega_0 a^2}{\nu} \left(1 - \frac{b^3}{a^3}\right) \tag{12}$$

---

[1]) Kirchhoff, Mechanik, лекция 26.

[2]) Ср. Rayleigh, On the Flow of Viscous Liquids, especially in two Dimensions, Phil. Mag. (4), XXXVI, 354 (1893) (Papers, IV, 78).

[3]) Stokes, см. выше, стр. 723.

должно быть малым, причем предполагается, что значения a и b не отличаются сильно друг от друга [1]).

§ 334a. Некоторые простые задачи неустановившегося движения можно решить при помощи аналогии с теорией теплопроводности (см. § 328) [2]).

1. Рассмотрим, например, случай „ламинарного" движения, когда течение происходит в параллельных плоскостях, скорость во всех точках каждой такой плоскости имеет одно и то же значение и во всем объеме жидкости она имеет одно и то же направление. При подходящем выборе осей мы будем иметь $v=0$, $w=0$, в то время как u — функция только координаты z. Уравнения (4) § 328 удовлетворяются тогда при $p=\text{const}$. и

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,. \tag{1}$$

Уравнение (1) по форме тождественно с уравнением движения тепла в прямолинейном проводнике, так что известные результаты этой задачи могут быть тотчас же перенесены на наш случай.

Предположим, например, что жидкость в направлении оси z в обе стороны простирается в бесконечность и что в начальный момент имеем $u=\pm U$, причем нужно брать верхний или нижний знак, смотря по тому, будет ли координата z положительной или отрицательной. Это соответствует случаю двух сред, прилегающих друг к другу, когда они в начальный момент имеют различные температуры. Если мы воспользуемся известным решением этой задачи, то получим

$$u=\frac{2U}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\theta} e^{-\theta^2}\,d\theta, \tag{2}$$

где верхний предел есть

$$\theta=\frac{z}{\sqrt{4\nu t}}\,. \tag{3}$$

Легко проверить, что решение (2) действительно удовлетворяет уравнению (1) и $u\to\pm U$ при $t\to 0$.

---

[1]) Опыты по определению вязкости воздуха были произведены в этом направлении Zemplèn [Ann. d. Phys. (4), XXIX, 869 (1909) и XXXVIII, 71 (1912)] с тем только различием, что вращался *внешний* шар; момент N вращающей пары измерялся кручением проволоки, на которой был подвешен внутренний шар. Цемплен находит, что формула, аналогичная формуле (10), дает пригодные результаты для большой области значений $\frac{\omega_0 a^2}{\nu}$, и замечает при этом, что такого рода критерии могут быть использованы только для указания порядка величин, но не для указания точных соотношений. С этим следует согласиться; однако, нужно заметить, что для рассматриваемого случая критерий уместно будет взять скорее в форме (12).

[2]) Этой аналогией воспользовался Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XI, 57 (1880) (Papers, I, 474) и многие более поздние авторы, как, например, G. I. Taylor, Aeronautical Research Committee, R. & M. 598 (1918) и K. Terazawa, Japanese Journ. of Phys., 1, 7 (1922).

отсюда следует $m=1$, $s=-n$, $r=2-n$, так что должно быть

$$p_{rz} \text{ пропорционально } \varrho w_0^2 \left(\frac{\nu}{w_0 a}\right)^n. \tag{4}$$

Обобщая этот результат, получаем формулу

$$p_{rz} = \varrho w_0^2 \cdot f\left(\frac{w_0 a}{\nu}\right), \tag{5}$$ [1])

Подставляя $n=1$ в соотношение (4), получим закон Пуазейля для прямолинейного течения. Если же подставить $n=0$, то получим формулу, которую обычно применяют в гидравлике в случае турбулентного течения в трубе, диаметр которой превосходит известную границу, именно

$$p_{rz} = k\varrho w_0^2, \tag{6}$$

где k — числовая постоянная, зависящая от свойства поверхности.

В качестве грубого среднего значения для случая воды, движущейся по гладкой железной трубе, мы можем взять $k=0{,}0025$ [2]).

Более полную эмпирическую формулу для p_{rz}, учитывающую также влияние диаметра, дал Дарси на основании очень большого числа наблюдений над течением воды в водопроводных трубах [3]).

Нужно заметить следующее: если бы сопротивление было точно пропорционально квадрату скорости, то оно не должно было бы зависеть от вязкости и от диаметра трубы. Это непосредственно следует из формулы (5) [4]).

Рейнольдс и некоторые другие наблюдатели нашли, что более хорошее совпадение с опытами получится, если в формуле (4) дать n значение, отличное от нуля. Было предложено значение $n=\frac{1}{4}$, в то время как Рейнольдс принимал значение $n=0{,}277$. Наиболее подходящее значение для показателя зависит, повидимому, от степени гладкости поверхности трубы, и по всей вероятности любая формула вида (4) имеет лишь ограниченную возможность применения.

---

[1]) Rayleigh, On the Question of the Stability of the Flow of Fluids, Phil. Mag. (5), XXXIV, 59 (1892) (Papers, III, 575).

Формула (5) экспериментально была проверена для очень различных условий и для таких различных жидкостей, как вода и воздух. При этом оказалось, что сопротивление пропорционально $\varrho_0 w_0^2$, если значение $\frac{\nu}{w_0 a}$ остается тем же самым. См. Stanton and Pannell, Similarity of Motion in Relation to the Surface Friction of Fluids, Phl. Trans. A, CCXIV, 199 (1913); Blasius, Das Ahnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen, Zeitschr. d. Ver. deutscher Ingenieure, (1912), стр. 639.

[2]) Rankine, Applied Mechanics, § 638; Unwin, Encyc. Britann. 11-е изд. „Hydraulics".

[3]) Darcy, Recherches expérimentales rélatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux, Paris (1855). Формула Дарси приводится в работах Ранкина и Унвина.

[4]) Rayleigh, см. выше.

но он все же решался [1]) для случая постоянной силы, такой, как сила тяжести, причем пластинка предполагалась вертикальной. Оказывается, что в этом случае не существует „конечной предельной скорости", ее асимптотическое значение будет

$$\frac{g\sigma}{\varrho}\sqrt{\frac{t}{\pi\nu}}, \tag{8}$$

где σ — масса единицы площади пластинки. Случай пластинки конечной ширины в направлении движения был бы совершенно отличным от рассматриваемого случая.

3. Предположим, что частицы жидкости движутся по окружностям вокруг общей оси, причем скорость есть функция расстояния r от этой оси.

Если эту ось взять за ось z, то, очевидно, будем иметь

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}$$

и вместе с тем на основании уравнений (8) § 328

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \nu\Delta_1\zeta, \tag{9}$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Интегрируя по площади круга радиуса r, получаем

$$\frac{d}{dt}\int_0^r \zeta\cdot 2\pi r\,dr = \nu\int\int\Delta_1\zeta\,dx\,dy = \nu\frac{\partial\zeta}{\partial r}\cdot 2\pi r. \tag{10}$$

Отсюда, диференцируя по r, будем иметь

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right),$$

а это уравнение тождественно с уравнением радиального распространения тепла в двух измерениях [2]).

Предположим, например, что вначале мы имели изолированный вихрь с напряжением $\varkappa$, совпадающий с осью z. Термическая аналогия представляет в данном случае распространение тепла в неограниченной среде [3]) от мгновенного линейного источника; решеине в этом случае имеет вид

$$\zeta = \frac{\varkappa}{4\pi\nu t}\,e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}. \tag{12}$$

---

[1]) Boggio, Rend. dell. Accad. d. Lincei, XVI 1907); Rayleigh, Phil. Mag. (6), XXI, 697 (1911) (Papers, VI, 29).

[2]) Carslaw, Conduction of Heat, Cambridge, 1921, стр. 113.

[3]) Carslaw, стр. 152.

Удостовериться в том, что это решение удовлетворяет уравнению (11), можно путем диференцирования. Это решение дает для циркуляции вдоль окружности радиуса r значение

$$\int_0^r \zeta \cdot 2\pi r\, dr = \varkappa\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right), \tag{13}$$

которое при $t \to 0$ стремится к предельному значению $\varkappa$. Скорость же будет равна

$$q = \frac{\varkappa}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right). \tag{14}$$

Когда t возрастает от 0 до ∞, то это значение убывает от $\frac{\varkappa}{2\pi r}$ до 0. Значение вихря, наоборот, возрастает (для $r > 0$) от нуля до своего наибольшего значения и потом асимптотически приближается к нулю.

4. Предположим далее, что в момент времени $t = 0$ на поверхность покоящейся жидкости глубины h начинает действовать равномерное тангенциальное напряжение f.

Если поместить начало координат на дне слоя, то условия, которые должны удовлетворяться помимо уравнения (1), будут иметь вид

$$u = 0 \quad \text{при} \quad t \to 0,$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} = f \quad \text{при} \quad z = h.$$

Положим

$$u = \frac{fz}{\mu} + u', \tag{15}$$

где первый член представляет асимптотическое решение ($t \to \infty$). Уравнение (1) и условия $u' = 0$ при $z = 0$ и $\frac{\partial u'}{\partial z} = 0$ при $z = h$ удовлетворяются рядом

$$u' = \sum A_m \sin mz e^{-\nu m^2 t}, \tag{16}$$

если

$$mh = \frac{1}{2}(2s + 1)\pi \tag{17}$$

и $s = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Мы должны теперь определить коэфициенты A_m так, чтобы равенство

$$\frac{fz}{\mu} + \sum A_m \sin mz = 0 \tag{18}$$

удовлетворялось тождественно. Для этого можно или применить обычный способ Фурье или прямо воспользоваться известным разложением

$$\theta = \frac{4}{\pi}\left\{\sin\theta - \frac{1}{3^2}\sin 3\theta + \frac{1}{5^2}\sin 5\theta - \ldots\right\}, \tag{19}$$

которое имеет силу от $\theta = -\frac{1}{2}\pi$ до $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Окончательно для u получим выражение

$$u = \frac{hf}{\mu}\left\{\frac{z}{h} - \sin kze^{-\nu k^2 t} + \frac{1}{3^2}\sin 3kzl^{-9\nu k^2 t} - \ldots\right\}, \qquad (20)$$

где $k = \frac{1}{2}\frac{\pi}{h}$.

Вычисления такого рода неоднократно производились с целью выяснить влияние ветра в образовании морских течений. Однако, если мы подставим числовые значения ν и h, то увидим, что согласно этой формуле к окончательному состоянию можно приближаться чрезвычайно медленно. Так, например, для $\nu = 0{,}018$, $h = 10^5$ коэфициент при $\sin kz$ в выражении (20) уменьшится в отношении $\frac{1}{e}$ лишь по истечении промежутка времени

$$t = \frac{1}{\nu k^2} = \frac{4h^2}{\pi^2 \nu} = 7140 \text{ лет!}$$

В действительности соотношения очень сильно изменятся благодаря турбулентности. Мы получим картину, лучше соответствующую действительности, если заменим μ „коэфициентом турбулентного трения" (см. § 366b) [1]).

5. В качестве видоизменения этой задачи рассмотрим установившиеся течения, которые могли бы быть вызваны, если принять во внимание вращение земли [2]).

Возьмем начало координат на свободной поверхности, а ось z направим по вертикали вверх. Если ω — составляющая угловой скорости Земли в направлении вертикали, то, предполагая, что условия по отношению к координатам x и y одинаковы и что движение уже сделалось установившимся, будем иметь равенства

$$-2\omega v = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad 2\omega u = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \qquad (21)$$

Оба эти уравнения можно соединить в одно

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(u + iv) = \frac{2i\omega}{\nu}(u + iv). \qquad (22)$$

Обозначая

$$\frac{\omega}{\nu} = \beta^2 \qquad (23)$$

---

[1]) Исключительная медленность диффузии строго ламинарного движения была замечена еще Helmholtz, Über atmospherische Bewegungen, Sitzb. d. Berl. Akad., 1888, стр. 649 (Wiss. Abh., III, 292).

См. также Hough, On the influence of Viscosity on Waves and Currents, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXVIII, 264 (1896).

[2]) Ekman, On the influence of the earth's rotation on ocean currents, Arkiv f. matematik, II (1905). Эта работа содержит также другие интересные исследования.

и считая, что глубина практически бесконечна, получим

$$u+iv=Ae^{(1+i)\beta z}. \tag{24}$$

Условие, что при $z=0$ должно иметь место равенство

$$\mu\frac{\partial u}{\partial z}=f,$$

дает

$$(1+i)\beta A=\frac{f}{\mu};$$

отсюда следует

$$u+iv=\frac{(1-i)f}{2\mu\beta}e^{(1+i)\beta z} \tag{25}$$

или

$$u=\frac{f}{\sqrt{2}\mu\beta}e^{\beta z}\cos\left(\beta z-\frac{1}{4}\pi\right),$$

$$v=\frac{f}{\sqrt{2}\mu\beta}e^{\beta z}\sin\left(\beta z-\frac{1}{4}\pi\right). \tag{26}$$

Движение практически ограничивается слоем, глубина которого имеет порядок величины β^{-1}.

Направление течения на поверхности отклоняется на 45° вправо (в северном полушарии) от направления силы. Общее же количество движения на единицу площади поверхности будет равно

$$\int_{-\infty}^{0}\varrho(u+iv)\,dz=-\frac{if}{2\mu\beta^2}=-\frac{if}{2\omega\varrho}, \tag{27}$$

а направление этого вектора будет перпендикулярно к направлению силы.

Здесь следует опять заметить, что эти результаты только тогда имеют практическое значение, когда величина μ заменена коэфициентом турбулентного трения. При обычном значении μ величина β^{-1} для воды была бы только порядка 20 *см*.

§ 335. Если не принимать во внимание члены инерции, то можно исследовать движение вязкой несжимаемой жидкости в весьма общем виде при помощи сферических функций.

Удобнее будет рассмотреть сначала общее решение следующей системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}\Delta u'&=0,\\ \Delta v'&=0,\\ \Delta w'&=0,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{2}$$

Функции u', v', w' можно разложить в ряды по объемным сферическим функциям. Очевидно, что в этих разложениях многочлены степени n, которые мы будем обозначать u'_n, v'_n, w'_n, каждой тройкой в отдельности должны удовлетворять уравнению (2). Уравнения (1) могут быть поэтому написаны в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v'_n}{\partial x}-\frac{\partial u'_n}{\partial y}\right)&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u'_n}{\partial z}-\frac{\partial w'_n}{\partial x}\right),\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w'_n}{\partial y}-\frac{\partial v'_n}{\partial z}\right)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v'_n}{\partial x}-\frac{\partial u'_n}{\partial y}\right),\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u'_n}{\partial z}-\frac{\partial w'_n}{\partial x}\right)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w'_n}{\partial y}-\frac{\partial v'_n}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Отсюда следует

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial w'_n}{\partial y}-\frac{\partial v'_n}{\partial z}&=\frac{\partial \chi_n}{\partial x},\\
\frac{\partial u'_n}{\partial z}-\frac{\partial w'_n}{\partial x}&=\frac{\partial \chi_n}{\partial y},\\
\frac{\partial v'_n}{\partial x}-\frac{\partial u'_n}{\partial y}&=\frac{\partial \chi_n}{\partial z},
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где χ_n — функция от x, y, z; из этих соотношений далее получается $\Delta\chi_n=0$, так что χ_n — объемная сферическая функция степени n.

Из равенств (4) получаем далее

$$z\frac{\partial \chi_n}{\partial y}-y\frac{\partial \chi_n}{\partial z}=x\frac{\partial u'_n}{\partial x}+y\frac{\partial u'_n}{\partial y}+z\frac{\partial u'_n}{\partial z}+$$
$$+u'_n-\frac{\partial}{\partial x}(xu'_n+yv'_n+zw'_n) \tag{5}$$

и два других аналогичных уравнения.

Из уравнений (1) и (2) будем иметь теперь

$$\Delta(xu'_n+yv'_n+zw'_n)=0, \tag{6}$$

так что можно написать

$$xu'_n+yv'_n+zw'_n=\varphi_{n+1}, \tag{7}$$

где φ_{n+1} — объемная сферическая функция степени $n+1$. После этого уравнение (5) может быть написано в виде

$$(n+1)u'_n=\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x}+z\frac{\partial \chi_n}{\partial y}-y\frac{\partial \chi_n}{\partial z}. \tag{8}$$

Множитель $n+1$ можно, не уменьшая общности, отбросить, и тогда мы получим решение рассматриваемой системы уравнений в виде

$$\left.\begin{aligned} u' &= \sum\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial x} + z\frac{\partial\chi_n}{\partial y} - y\frac{\partial\chi_n}{\partial z}\right), \\ v' &= \sum\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial y} + x\frac{\partial\chi_n}{\partial z} - z\frac{\partial\chi_n}{\partial x}\right), \\ w' &= \sum\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial z} + y\frac{\partial\chi_n}{\partial x} - x\frac{\partial\chi_n}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где сферические функции φ_n и χ_n произвольны [1]).

§ 336. Если отбросить члены инерции, то уравнения движения вязкой жидкости при отсутствии внешних сил приведутся к виду

$$\left.\begin{aligned} \mu\,\Delta u &= \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \mu\,\Delta v &= \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \mu\,\Delta w &= \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

После диференцирования получаем

$$\Delta p = 0, \tag{3}$$

так что функция p может быть разложена в ряд по объемным сферическим функциям

$$p = \sum p_n. \tag{4}$$

Отдельные члены решения, представляя из себя сферические функции в виде различных алгебраических многочленов, будут независимы друг от друга. Чтобы получить в решении уравнений (1) члены, зависящие от p_n, положим

$$\left.\begin{aligned} u &= Ar^2\frac{\partial p_n}{\partial x} + Br^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\frac{p_n}{r^{2n+1}}, \\ v &= Ar^2\frac{\partial p_n}{\partial y} + Br^{2n+3}\frac{\partial}{\partial y}\frac{p_n}{r^{2n+1}}, \\ w &= Ar^2\frac{\partial p_n}{\partial z} + Br^{2n+3}\frac{\partial}{\partial z}\frac{p_n}{r^{2n+1}}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $r^2 = x^2+y^2+z^2$. Члены, умноженные на B, на основании §§ 81, 83 представляют собою объемные сферические функции степени $n+1$.

[1]) Ср. Borchardt, Untersuchungen über die Elastizität fester Körper unter Berücksichtigung der Wärme, Berl. Monatsber., 9 янв. 1873 (Gesammelte Werke, Берлин, 1888, стр. 245). Исследование в тексте взято из работы автора, On the Oscillations of a Viscous Spheroid, Proc. Lond. Math. Soc., (1), XIII, 51 (1881).

Далее, имеем

$$\Delta\left(r^2\frac{\partial p_n}{\partial x}\right)=r^2\Delta\frac{\partial p_n}{\partial x}+4\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial p_n}{\partial x}+\frac{\partial p_n}{\partial x}\Delta r^2=$$

$$=2(2n+1)\frac{\partial p_n}{\partial x}.$$

Уравнения (1) будут удовлетворяться, если положить

$$A=\frac{1}{2(2n+1)\mu}. \tag{6}$$

Теперь, подставляя (5) в уравнение (2), найдем

$$2nA-(n+1)(2n+3)B=0,$$

откуда следует

$$B=\frac{n}{(n+1)(2n+1)(2n+3)\mu}. \tag{7}$$

В таком случае общее решение системы уравнений (1) и (2) может быть написано в виде

$$\left.\begin{aligned}
u&=\frac{1}{\mu}\sum\left\{\frac{r^2}{2(2n+1)}\frac{\partial p_n}{\partial x}+\frac{nr^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{p_n}{r^{2n+1}}\right\}+u',\\
v&=\frac{1}{\mu}\sum\left\{\frac{r^2}{2(2n+1)}\frac{\partial p_n}{\partial y}+\frac{nr^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)}\frac{\partial}{\partial y}\frac{p_n}{r^{2n+1}}\right\}+v',\\
w&=\frac{1}{\mu}\sum\left\{\frac{r^2}{2(2n+1)}\frac{\partial p_n}{\partial z}+\frac{nr^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)}\frac{\partial}{\partial z}\frac{p_n}{r^{2n+1}}\right\}+w',
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где функции u', v', w' выражаются формулами (9) предыдущего параграфа [1]).

Формулы (8) дают

$$xu+yv+zw=\frac{1}{\mu}\sum\frac{nr^2}{2(2n+3)}p_n+\sum n\varphi_n. \tag{9}$$

Если обозначим через ξ, η, ζ компоненты вихря, то для них найдем

$$\left.\begin{aligned}
\xi&=\frac{1}{\mu}\sum\frac{1}{(n+1)}\left(y\frac{\partial p_n}{\partial z}-z\frac{\partial p_n}{\partial y}\right)+\sum(n+1)\frac{\partial\chi_n}{\partial x},\\
\eta&=\frac{1}{\mu}\sum\frac{1}{(n+1)}\left(z\frac{\partial p_n}{\partial x}-x\frac{\partial p_n}{\partial z}\right)+\sum(n+1)\frac{\partial\chi_n}{\partial y},\\
\zeta&=\frac{1}{\mu}\sum\frac{1}{(n+1)}\left(x\frac{\partial p_n}{\partial y}-y\frac{\partial p_n}{\partial x}\right)+\sum(n+1)\frac{\partial\chi_n}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

---

[1]) Это исследование взято с некоторыми изменениями из различных источников. Ср. Thomson und Tait, § 736; Borchardt см. выше; Oberbeck, Über stationäre Flüssigkeits bewegungen mit Berücksichtigung der inneren Reibung, Crelle, LXXXI, 62 (1876).

Из этих выражений получаем

$$x\xi + y\eta + z\zeta = \sum n(n+1)\chi_n. \tag{11}$$

Компоненты напряжения на поверхности шара радиуса r на основании равенств (4) § 325 будут выражаться формулами

$$p_{rx} = \frac{x}{r} p_{xx} + \frac{y}{r} p_{xy} + \frac{z}{r} p_{xz}, \ldots, \ldots \tag{12}$$

Подставляя значения величин p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} из формул (5), (6) § 326, найдем

$$\left.\begin{aligned} rp_{rx} &= -xp + \mu\left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right)u + \mu\frac{\partial}{\partial x}(xu + yv + zw), \\ rp_{ry} &= -yp + \mu\left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right)u + \mu\frac{\partial}{\partial y}(xu + yv + zw), \\ rp_{rz} &= -zp + \mu\left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right)w + \mu\frac{\partial}{\partial z}(xu + yv + zw). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Эти формулы, конечно, являются общими. В рассматриваемом же здесь случае, подставляя значения u, v, w из формул (8) и пользуясь соотношением

$$xp_n = \frac{r^2}{2n+1}\left(\frac{\partial p_n}{\partial x} - r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{p_n}{r^{2n+1}}\right), \tag{14}$$

получим после несложных преобразований

$$rp_{rx} = \sum\left\{\frac{n-1}{2n+1}r^2\frac{\partial p_n}{\partial x} + \frac{2n^2+4n+3}{(n+1)(2n+1)(2n+3)}r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\frac{p_n}{r^{2n+1}}\right\} + \\ + 2\mu\sum(n-1)\frac{\partial\varphi_n}{\partial x} - \mu\sum(n-1)\left(y\frac{\partial\chi_n}{\partial z} - z\frac{\partial\chi_n}{\partial y}\right). \tag{15}$$

Соответствующие выражения для rp_{ry} и rp_{rz} получим в результате круговой перестановки букв.

§ 337. Результаты §§ 335, 336 можно применить к решению ряда задач, в которых граничные условия относятся к поверхности шара. Наиболее интересные задачи относятся к следующим двум случаям: в первом имеем всюду

$$xu + yv + zw = 0 \tag{1}$$

и поэтому

$$p_n = 0, \quad \varphi_n = 0:$$

во втором имеем

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 0 \tag{2}$$

и потому

$$\chi_n = 0.$$

1. Рассмотрим установившееся течение несжимаемой жидкости вокруг неподвижного шара. Если возьмем начало координат в центре шара и ось x параллельно направлению течения, то граничные условия будут иметь вид

$$u=0,\quad v=0,\quad w=0 \text{ для } r=a \ (a-\text{радиус шара})$$

и

$$u=U,\quad v=0,\quad w=0 \text{ для } r=\infty.$$

Вихревые линии представляют собою, очевидно, окружности с центрами на оси x, плоскости которых перпендикулярны к этой оси, так что условие (2) будет выполняться. Далее уравнение (9) § 336 в связи с условием, которое должно выполняться в бесконечности, показывает, что в отношении функций p_n и φ_n мы должны ограничиться сферическими функциями только порядков 0 и 1 и, следовательно, случаями $n=0$, $n=1$, $n=-2$. Кроме того, очевидно, мы должны иметь $p_1=0$. Полагая затем

$$\left.\begin{aligned} p_{-2}&=A\frac{x}{r^3},\\ \varphi_1&=Ux,\\ \varphi_{-2}&=B\frac{x}{r^3}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

мы найдем

$$\left.\begin{aligned} u&=U+\left(B-\frac{Ar^2}{6\mu}\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3}+\frac{2A}{3\mu r},\\ v&=\left(B-\frac{Ar^2}{6\mu}\right)\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{r^3},\\ w&=\left(B-\frac{Ar^2}{6\mu}\right)\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{r^3}; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

эти выражения дают

$$xu+yv+zw=\left(U-\frac{2B}{r^3}+\frac{A}{\mu r}\right)x. \tag{5}$$

Далее из формул (15) § 336 или непосредственно из формул (13) § 336 получается

$$\left.\begin{aligned} p_{rx}&=-\frac{x}{r}p_0+\left(Ar-\frac{6\mu B}{r}\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3}-\frac{A}{r^2},\\ p_{ry}&=-\frac{y}{r}p_0+\left(Ar-\frac{6\mu B}{r}\right)\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{r^3},\\ p_{rz}&=-\frac{z}{r}p_0+\left(Ar-\frac{6\mu B}{r}\right)\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{r^3}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Условие отсутствия скольжения на поверхности $r=a$ дает уравнения

$$\left.\begin{aligned} U+\frac{2A}{3\mu a}&=0,\\ B-\frac{Aa^2}{6\mu}&=0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

откуда получаем

$$\left.\begin{aligned} A&=-\frac{3}{2}\mu Ua,\\ B&=-\frac{1}{4}Ua^3. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Составляющие напряжения на этой поверхности получат поэтому следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} p_{rx} &= -\frac{x}{a}\,p_0 + \frac{3}{2}\,\mu\,\frac{U}{a}, \\ p_{ry} &= -\frac{y}{a}\,p_0,\quad p_{rz} = -\frac{z}{a}\,p_0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Если обозначить через δS элемент поверхности, то получим

$$\iint p_{rx}\,dS = 6\pi\mu U a,\quad \iint p_{ry}\,dS = 0,\quad \iint p_{rz}\,dS = 0. \tag{10}$$

Равнодействующая, приложенная к шару, имеет поэтому направление положительной оси x и равна $6\pi\mu a U$.

Формулы (4) принимают теперь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} u &= U\left(1 - \frac{a}{r}\right) + \frac{1}{4}\,Ua\,(r^2 - a^2)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{x}{r^3}, \\ v &= \frac{1}{4}\,Ua\,(r^2 - a^2)\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{x}{r^3}, \\ w &= \frac{1}{4}\,Ua\,(r^2 - a^2)\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{x}{r^3}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Характер движения короче всего можно выразить посредством функции тока Стокса (§ 94). Так как скорость в радиальном направлении равна

$$U\left(1 - \frac{3}{2}\,\frac{a}{r} + \frac{1}{2}\,\frac{a^3}{r^3}\right)\cos\theta, \tag{12}$$

то поток ($2\pi\psi$) сквозь окружность, перпендикулярную к оси x и с центром на этой оси, радиус которой стягивает угол θ с вершиной в центре шара, будет определяться из формулы

$$\psi = -\frac{1}{2}\,U\left(1 - \frac{3}{2}\,\frac{a}{r} + \frac{1}{2}\,\frac{a^3}{r^3}\right) r^2 \sin^2\theta. \tag{13}$$

Если сообщить жидкости и шару скорость $-U$ в направлении оси x, то мы получим случай движения шара с постоянной скоростью в жидкости, покоящейся в бесконечности. Функция тока в этом случае будет иметь вид

$$\psi = \frac{3}{4}\,Uar\left(1 - \frac{1}{3}\,\frac{a^2}{r^2}\right)\sin^2\theta. \tag{14}^1)$$

На фиг. 81 показаны линии тока ($\psi = \text{const.}$) в этом случае для ряда равноотстоящих друг от друга значений функции ψ. Обращает на себя внимание резкое отличие картины этого случая от случая идеальной жидкости, представленного на стр. 138, но не следует забывать, что основные положения в обоих случаях совершенно различны. В прежнем случае преобладающее значение имела инерция, а внутреннее трение не принималось во внимание; в настоящем же случае все обстоит как раз наоборот.

Расположение линий тока указывает на то, что присутствие твердой внешней стенки даже на расстоянии многих диаметров шара в значитель-

---

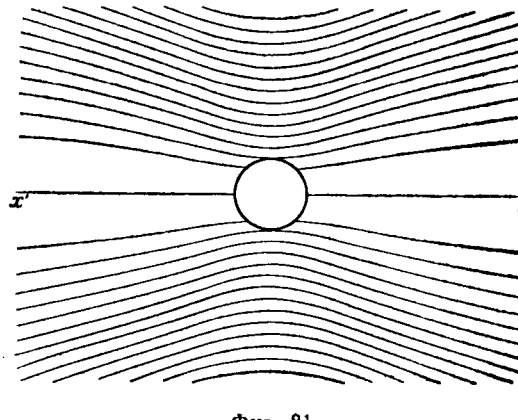
[1]) Эта задача в первый раз была решена Стоксом при помощи функции тока; см. § 338.

ной степени изменило бы результаты. Сопротивление при этом конечно возросло бы [1]).

Если через P обозначить силу, которая должна действовать на шар в отрицательном направлении по оси x, чтобы уравновесить сопротивление жидкости, то будем иметь

$$P = 6\pi\mu a U. \tag{15}$$

Следует заметить, что на основании формулы (14) как количество движения, так и энергия жидкости оказываются бесконечно большими [2]). Рассмотренное здесь установившееся движение можно было бы поэтому полностью получить в результате действия постоянной силы, если бы эта сила действовала на шар на всем пути бесконечной длины.



Фиг. 81.

Все исследование было основано на предположении, что в основных уравнениях (4) § 328 можно было пренебречь инерционными членами $u\dfrac{\partial u}{\partial x}, \ldots$ по сравнению с величинами $\nu\Delta u \ldots$ Из равенств (11) легко тогда получить, что значение Ua должно быть мало по сравнению с ν [3]). Это условие можно всегда выполнить, если значения U или a сделать достаточно малыми; однако, в случае легко подвижных жидкостей, таких, как вода, это условие сильно ограничивает скорости или размеры, которые практически должны быть чрезвычайно малыми. Так, в случае шара с радиусом в 1 *мм*, движущегося в воде ($\nu = 0{,}018$), скорость должна быть значительно меньше, чем 0,18 *см/сек* [4]).

---

[1]) Медленное движение шара вблизи твердой плоской стенки было исследовано Лоренцом, Abhandlungen über theoretische Physik, Leipzig, 1907, I, 23. Вильямс в интересной работе разобрал при помощи метода, изложенного в § 338 этой книги, случай внешней границы в виде концентрической шаровой поверхности и сравнил результаты с опытом (Phil. Mag. (6), XXIX, 526 (1915)]. Падение шара по оси вертикальной трубки, наполненной несжимаемой жидкостью, исследовал Ладенбург, Ann. d. Phys., XXIII, 447 (1907) и Факсен, Arkiv. f. matematik, XVII (1923). Последний из названных авторов разобрал также случай движения шара между плоскими параллельными стенками. Ann. d Phys., LXVIII, 90 (1922).

[2]) Rayleigh, Phil. Mag. (5), XXI, 374 (примечания) (1886) (Papers, II, 480).

[3]) Величина $\dfrac{Ua}{\nu}$, которая предполагается здесь малой, является безразмерной и следовательно, не зависит от выбора основных единиц. Она может быть названа „числом Рейнольдса" рассматриваемой задачи; см. в конце § 366.

[4]) Rayleigh, см. выше, стр. 738. Относительно экспериментальных исследований по этому вопросу см. Allen, The Motion of a Sphere in a Viscous Fluid, Phil. Mag. (5), L, 323, 519 (1900); Arnold, Phil. Mag. (6), XXII, 755 (1911); Williams, см. выше.

Мы могли бы применить формулу (15) к вычислению „предельной скорости" вертикального падения шара в жидкости [1]). Сила P в этом случае равна разности между весом шара и гидростатической подъемной силой, именно

$$P=\frac{4}{3}\pi(\varrho'-\varrho)a^3g, \tag{16}$$

где ϱ обозначает плотность жидкости, а ϱ' — среднюю плотность шара. Это дает

$$U=\frac{2}{9}\frac{\varrho'-\varrho}{\mu}ga^2. \tag{17}$$

Как уже было установлено, это равенство справедливо только в том случае, когда значение $\frac{Ua}{\nu}$ мало. Для частицы песка, падающей в воде, мы можем приближенно принять

$$\varrho'=2\varrho,\quad \nu=0{,}018,\quad g=981,$$

откуда следует, что значение a должно быть мало по сравнению с 0,0114 *см*. При этих условиях для предельной скорости падения будем иметь значение $U=12100a^2$.

Для капли воды, падающей в воздухе, имеем $\varrho'=1$, $\varrho=0{,}00129$, $\mu=0{,}00017$. В этом случае предельная скорость будет $U=1\,280\,000a^2$ при условии, что значение a мало по сравнению с 0,066 *см*.

2. В случае *жидкого* шара мы должны принять во внимание как внешнее, так и внутреннее движение [2]). Предположим прежде всего, что на жидкость окружающую шар, не действуют внешние силы, в то время как на жидкость, заключенную в шаре, действует сила $-K$ на единицу объема.

Формулы ( ) § 336 будут иметь силу для области внутри шара, если положить

$$p=p'+Kx, \tag{18}$$

где p' — истинное давление. Если далее положить

$$p_1=A'x,\quad \varphi_1=B'x, \tag{19}$$

то формулы (8) названного параграфа дают для внутреннего движения

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{A'r^5}{30\mu'}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3}+\frac{A'r^2}{6\mu'}+B',\\ v&=\frac{A'r^5}{30\mu'}\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{r^3},\\ w&=\frac{A'r^5}{30\mu'}\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{r^3}; \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

отсюда следует

$$xu+yv+zw=\left(\frac{A'r^2}{10\mu'}+B'\right)x. \tag{21}$$

---

[1]) Stokes. см. выше, стр. 7 6.

[2]) Эта задача была решена Рибчинским, Bull. Acad. d. Sciences de Cracovie, 1 1 , стр. 40, и, независимо от него, Адамаром, Comptes Pendus, CLII, 1735 (1911). Эти литературные указания взяты из работы Смолуховского, On the Practical Applicability of Stokes'Law of Resistance . . ., Proc. of Math. Congress, Cambridge (1912), II, 192.

Так как

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= -\frac{1}{3}r^5\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3}+\frac{1}{3}r^2,\\ xy &= -\frac{1}{3}r^5\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{r^3},\\ xz &= -\frac{1}{3}r^5\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{r^3}, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

то находим далее

$$\left.\begin{aligned} p_{rx} &= -\frac{x}{r}p_0+\left(\frac{3}{10}A'-\frac{1}{3}K\right)r^4\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3}+\frac{1}{3}Kr,\\ p_{ry} &= -\frac{y}{r}p_0+\left(\frac{3}{10}A'-\frac{1}{3}K\right)r^4\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{r^3},\\ p_{rz} &= -\frac{z}{r}p_0+\left(\frac{3}{10}A'-\frac{1}{3}K\right)r^4\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{r^3}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Соответствующие формулы для внешнего пространства имеют такой же вид, как формулы (4) и (6).

Если мы выразим то обстоятельство, что радиальная скорость исчезает при $r=a$, то получим

$$\frac{A}{\mu a}-\frac{2B}{a^3}+U=0, \qquad \frac{A'a^2}{10\mu'}+B'=0. \tag{24}$$

Непрерывность скорости требует, кроме того, чтобы

$$-\frac{Aa^2}{6\mu}+B=\frac{A'a^5}{3\mu'}. \tag{25}$$

Если сравнить формулы (6) и (23), то непрерывность напряжения потребует выполнения равенств

$$\left.\begin{aligned} Aa-\frac{6\mu B}{a} &= \frac{3}{10}A'a^4-\frac{1}{3}Ka^4,\\ A &= -\frac{1}{3}Ka^3. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Мы будем иметь, таким образом, если значение K дано, пять уравнений для определения постоянных A, B, A', B', U. Решая эти уравнения, находим:

$$U=\frac{2}{3}\frac{Ka^2}{\mu}\cdot\frac{\mu+\mu'}{2\mu+3\mu'}. \tag{27}$$

Полная сила, которая должна действовать на шар в отрицательном направлении по оси x, для того чтобы шар оставался неподвижным в потоке, должна быть равна

$$\frac{4}{3}\pi a^3K=6\pi a\mu U\cdot\frac{2\mu+3\mu'}{3\mu+3\mu'}. \tag{28}$$

Внутреннее движение определяется формулой

$$\psi=-\frac{1}{2}B'\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)r^2\sin^2\theta, \tag{29}$$

где

$$B'=-\frac{Ka^2}{6\mu+9\mu'}. \tag{30}$$

Если положим $\mu'=\infty$, то опять придем к результатам, которые мы получили для случая твердого шара.

Чтобы сделать результаты приложимыми к тому случаю, когда движение происходит под действием силы тяжести, направленной по оси x в отрицательную сторону, мы должны положить

$$K=g(\varrho'-\varrho), \tag{31}$$

где ϱ' обозначает плотность жидкости, заполняющей шар. Предельная скорость дается тогда формулой (28). Если $\varrho'<\varrho$, то значение U отрицательно; это показывает, что шар должен *подниматься* в окружающей его жидкости. Для пузырька газа, поднимающегося в воде, мы можем с достаточной точностью положить $\varrho'=0$, $\mu'=0$, откуда следует равенство

$$U=-\frac{1}{3}\frac{g\varrho a^2}{\mu}. \tag{32}$$

3. Мы получим видоизменение задачи, относящейся к твердому шару, если предположим, что жидкость скользит по поверхности, следуя эмпирическому закону, указанному в § 327.

Формулы (6) дают для нормальных напряжений на поверхности сферы радиуса r выражение

$$-p_0-3A\frac{x}{r^3}+12\mu B\frac{x}{r^5}; \tag{33}$$

три составляющие этой величины на основании формул (14) § 336 могут быть написаны в виде

$$\left.\begin{aligned}
&-p_0\frac{x}{r}+\left(Ar-\frac{4\mu B}{r}\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3}-\frac{A}{r^2}+\frac{4\mu B}{r^4},\\
&-p_0\frac{y}{r}+\left(Ar-\frac{4\mu B}{r}\right)\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{r^3},\\
&-p_0\frac{z}{r}+\left(Ar-\frac{4\mu B}{r}\right)\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{r^3}.
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Вычитая эти величины из выражений (6), найдем для составляющих *касательного* напряжения значения

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{2\mu B}{r}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3}-\frac{4\mu B}{r^4},\\
&-\frac{2\mu B}{r}\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{r^3},\\
&-\frac{2\mu B}{r}\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{r^3}.
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

На граничной поверхности $r=a$ скорость в направлении радиуса должна исчезать, а выражения в формулах (4) будут тогда представлять компоненты тангенциальной скорости. Мы должны поэтому иметь

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{2\mu B}{a}=\beta\left(B-\frac{Aa^2}{6\mu}\right),\\
&-\frac{4\mu B}{a^4}=\beta\left(U+\frac{2A}{3\mu a}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

где β обозначает коэфициент трения скольжения. Отсюда получаем

$$A=-\frac{3}{2}\mu Ua\cdot\frac{2\mu+\beta a}{3\mu+\beta a},\quad B=-\frac{\beta Ua^4}{12\mu+4\beta a}; \tag{37}$$

если примем во внимание равенство (5), то увидим, что эти выражения удовлетворяют тому условию, что радиальная скорость равна нулю.

Результирующая сила, действующая на шар, на основании формул (6) будет равна

$$X=\int\int p_{rx}\,dS=-4\pi A=6\pi\mu\,Ua\cdot\frac{2\mu+\beta a}{3\mu+\beta a}. \qquad (38)^{1})$$

Для $\beta=\infty$ полученная формула согласуется с (15). Если бы β была равна нулю, то результирующая сила была бы равна $4\pi\mu\,aU$.

4. Задача о вращении шара в неограниченной жидкости будет решена; если положим

$$\left.\begin{aligned} u&=z\frac{\partial\chi_{-2}}{\partial y}-y\frac{\partial\chi_{-2}}{\partial z},\\ v&=x\frac{\partial\chi_{-2}}{\partial z}-z\frac{\partial\chi_{-2}}{\partial x},\\ w&=y\frac{\partial\chi_{-2}}{\partial x}-x\frac{\partial\chi_{-2}}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

где

$$\chi_{-2}=\frac{Az}{r^3} \qquad (40)$$

и ось z — ось вращения. На граничной поверхности $r=a$ должны иметь место равенства

$$u=-\omega y,\quad v=\omega x,\quad w=0,$$

если через ω обозначить угловую скорость шара. Отсюда получаем $A=\omega a^3$; ср. § 334.

§ 338. Задачи, относящиеся к тому случаю, когда течение около шара происходит в плоскостях, проходящих через ось симметрии, решались обычно, как это сделал в первый раз Стокс, при помощи функции тока ψ. Следует поэтому кратко изложить этот способ.

Положим

$$y=\widetilde{\omega}\cos\vartheta,\qquad z=\widetilde{\omega}\sin\vartheta$$

и соответственно

$$\left.\begin{aligned} v&=\nu\cos\vartheta,\quad w=\nu\sin\vartheta,\\ \xi&=0,\quad \eta=-\omega\sin\vartheta,\quad \zeta=\omega\cos\vartheta; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

тогда будем иметь

$$\begin{aligned}\Delta\eta&=-\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial\widetilde{\omega}^2}+\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial}{\partial\widetilde{\omega}}+\frac{\partial^2}{\widetilde{\omega}^2\,\partial\vartheta^2}\right]\omega\sin\vartheta=\\ &=-\sin\vartheta\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial\widetilde{\omega}^2}+\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial}{\partial\widetilde{\omega}}-\frac{1}{\widetilde{\omega}^2}\right]\omega=\\ &=-\frac{\sin\vartheta}{\widetilde{\omega}}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial\widetilde{\omega}^2}-\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial}{\partial\widetilde{\omega}}\right]\widetilde{\omega}\omega \end{aligned} \qquad (2)$$

аналогично

$$\Delta\zeta=\frac{\cos\vartheta}{\widetilde{\omega}}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial\widetilde{\omega}^2}-\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial}{\partial\widetilde{\omega}}\right]\widetilde{\omega}\omega. \qquad (3)$$

---

[1]) Basset, Hydrodynamics, II, 271.

Для случая установившегося движения на основании уравнений (1) § 336 получим

$$\Delta\eta=0,\quad \Delta\zeta=0$$

и, следовательно,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial\widetilde{\omega}^2}-\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial}{\partial\widetilde{\omega}}\right]\widetilde{\omega}\omega=0 \tag{4}$$

или, если подставить значение ω из формулы (2) § 161,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial\widetilde{\omega}^2}-\frac{1}{\widetilde{\omega}}\frac{\partial}{\partial\widetilde{\omega}}\right]^2\psi=0. \tag{5}$$

Для тех случаев, когда граничные поверхности суть сферы, мы полагаем

$$x=r\cos\theta,\quad \widetilde{\omega}=r\sin\theta. \tag{6}$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial\widetilde{\omega}}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{r\partial\theta},$$

то получаем

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\psi=0. \tag{7}$$

а это и есть уравнение, данное Стоксом.

Уравнение это удовлетворится функцией

$$\psi=\sin^2\theta f(r), \tag{8}$$

если

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{2}{r^2}\right]^2 f(r)=0; \tag{9}$$

решение последнего уравнения есть

$$f(r)=\frac{A}{r}+Br+Cr^2+Dr^4. \tag{10}$$

В случае равномерного течения в бесконечности должно удовлетворяться равенство $\psi=-\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta$ при $r=\infty$, откуда следует

$$D=0,\quad C=-\frac{1}{2}U. \tag{11}$$

Если обозначим составляющие скорости в направлении радиуса-вектора и в перпендикулярном к нему направлении соответственно через v_r и v_θ, то будем иметь

$$\left.\begin{aligned} v_r&=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{r\partial\theta}=U\cos\theta-2\left(\frac{A}{r^3}+\frac{B}{r}\right)\cos\theta,\\ v_\theta&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}=-U\sin\theta-\left(\frac{A}{r^3}-\frac{B}{r}\right)\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Скорости удлинения в направлениях r и θ и в направлении, перпендикулярном к этим двум направлениям, найдем сложением скоростей удлинений, соответствующих составляющим v_r и v_θ в отдельности; в результате получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_r}{\partial r}=2\left(\frac{3A}{r^4}+\frac{B}{r^2}\right)\cos\theta,\\ &\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}+\frac{v_r}{r}=-\left(\frac{3A}{r^4}+\frac{B}{r^2}\right)\cos\theta,\\ &\frac{v_r}{r}+\frac{v_\theta}{r\operatorname{tg}\theta}=-\left(\frac{3A}{r^4}+\frac{B}{r^2}\right)\cos\theta; \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

скорость же сдвига в плоскости r, θ будет равна

$$\frac{\partial v_r}{r\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}=\frac{6A}{r^4}\sin\theta. \tag{14}$$

Для значения вихря получаем выражение

$$\omega=\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}-\frac{\partial v_r}{r\partial\theta}=-\frac{2B\sin\theta}{r^2}. \tag{15}$$

Силу, действующую на шар, можно определить или непосредственно из формул для напряжений или, что будет еще проще, из выражения для скорости рассеяния энергии. Из формул (13) и (14) следует, что функция Φ в формуле (8) § 329 принимает в данном случае вид

$$\Phi=12\mu\left(\frac{3A}{r^4}+\frac{B}{r^2}\right)^2\cos^2\theta+36\,\mu\,\frac{A^2}{r^8}\sin^2\theta. \tag{16}$$

Чтобы найти полное значение скорости рассеяния энергии в жидкости, мы должны умножить это выражение на $2\pi r\sin\theta\cdot r\delta\theta\,\delta r$ и проинтегрировать от $\theta=0$ до $\theta=\pi$ и от $r=a$ до $r=\infty$.

В результате получим

$$16\pi\mu\left(\frac{3A^2}{a^5}+\frac{2AB}{a^3}+\frac{B^2}{a}\right). \tag{17}$$

Согласно гипотезе прилипания для $r=a$ получим из формул (12)

$$A=-\frac{1}{4}Ua^3,\quad B=\frac{3}{4}Ua; \tag{18}$$

следовательно, для ψ будем иметь выражение

$$\psi=-\frac{1}{2}U\left(1-\frac{3}{2}\frac{a}{r}+\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\right)r^2\sin^2\theta \tag{19}$$

или, если предположить, что шар движется со скоростью $-U$ в жидкости, покоящейся в бесконечности, то выражение

$$\psi=\frac{3}{4}Uar\left(1-\frac{1}{3}\frac{a^2}{r^2}\right)\sin^2\theta, \tag{20}$$

как и в формуле (14) § 337.

Силу $-P$, которая должна быть приложена к шару, чтобы поддерживать его движение, мы найдем, если приравняем скорость рассеяния энергии значению PU. Подставляя в выражение (17) значения A и B из формул (18), получим для силы P, как и выше, выражение

$$P=6\pi\mu\,aU. \tag{21}$$

Если имеет место скольжение и β — коэфициент трения при скольжении, то при первоначальной постановке задачи, когда шар является неподвижным, условия, которые должны выполняться при $r=a$, принимают вид

$$v_r=0,\quad \beta v_\theta=\mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{r\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r}\right). \tag{22}$$

Подставляя в эти равенства соответствующие выражения из формул (12) и (14), находим

$$\left.\begin{aligned} A&=-\frac{1}{4}Ua^3:\left(1+\frac{3\mu}{\beta a}\right),\\ B&=\frac{3}{4}Ua\left(1+\frac{2\mu}{\beta a}\right):\left(1+\frac{3\mu}{\beta a}\right). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

В этом случае происходит еще дополнительное рассеяние энергии вследствие трения скольжения на поверхности шара; значение этого рассеяния, отнесенное к единице площади, равно βv_θ^2. Интегрируя по поверхности шара, получим на основании равенств (22) и (14)

$$\frac{96\pi\mu^2 A^2}{\beta a^6}. \tag{24}$$

Если сложим выражения (17) и (24) и подставим значения для A и B из формул (23), то найдем, полагая полное рассеяние равным PU,

$$P = 6\pi\mu a U \cdot \frac{\beta a + 2\mu}{\beta a + 3\mu}. \tag{25}$$

что согласуется с результатом Бассе [(38), § 337].

§ 339. Решение задачи об установившемся движении эллипсоида в вязкой жидкости можно выразить при помощи потенциала притяжения твердых тел; при этом предполагается, что эллипсоид однородный и плотность его равна *единице*.

Возьмем уравнение эллипсоида в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \tag{1}$$

тогда потенциал притяжения для внешней точки по формуле Дирихле [1]) будет равен

$$\Omega = \pi abc \int_\lambda^\infty \left(\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 \right) \frac{d\lambda}{D}, \tag{2}$$

где

$$D = \{ (a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda) \}^{1/2}, \tag{3}$$

и нижний предел есть положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1. \tag{4}$$

Эта формула дает

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Omega}{\partial x} &= 2\pi\alpha x, \\ \frac{\partial\Omega}{\partial y} &= 2\pi\beta y, \\ \frac{\partial\Omega}{\partial z} &= 2\pi\gamma z, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

---

[1]) Dirichlet, Crelle, XXXII, 80 (1846) (Werke, II, 11); см. также Kirchhoff, Mechanik, лекция 18, и Thomson und Tait (2 изд.), § 494 m.

где

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= abc\int_{\lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)D},\\ \beta &= abc\int_{\lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)D},\\ \gamma &= abc\int_{\lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)D}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Положим далее

$$\chi = abc\int_{\lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{D}; \tag{7}$$

в § 114 было показано, что эта функция удовлетворяет уравнению $\Delta\chi = 0$.

Если жидкость движется относительно эллипсоида, предполагаемого неподвижным, в направлении оси x с общей скоростью U, то мы положим [1])

$$\left.\begin{aligned} u &= A\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} + B\left(x\frac{\partial\chi}{\partial x} - \chi\right) + U,\\ v &= A\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial y} + Bx\frac{\partial\chi}{\partial y},\\ w &= A\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial z} + Bx\frac{\partial\chi}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Эти выражения удовлетворяют уравнению непрерывности вследствие соотношений

$$\Delta\Omega = 0, \quad \Delta\chi = 0$$

и в бескоиечности, очевидно, дают значения $u = U$, $v = 0$, $w = 0$. Далее из них получаем

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= 2B\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2},\\ \Delta v &= 2B\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y},\\ \Delta w &= 2B\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

так что уравнения (1) § 336 будут удовлетворены, если положить

$$p = 2B\mu\frac{\partial\chi}{\partial x} + \text{const}. \tag{10}$$

Остается еще показать, что при подходящем выборе постоянных A и B на поверхности (1) будут иметь место равенства u, v, $w = 0$.

Условия $v = 0$, $w = 0$ требуют, чтобы

$$\left[2\pi A\frac{d\alpha}{d\lambda} + B\frac{d\chi}{d\lambda}\right]_{\lambda=0} = 0 \quad \text{или} \quad 2\pi\frac{A}{a^2} + B = 0. \tag{11}$$

[1]) Oberbeck, см. выше, стр. 747.

При помощи этого соотношения условие $u=0$ приводится к виду

$$2\pi A\alpha_0 - B\chi_0 + U = 0, \tag{12}$$

где значки внизу обозначают, что нижние пределы в интегралах (6) и (7) должны быть равны нулю. Отсюда получаются равенства

$$\pi A = -\frac{1}{2}Ba^2, \quad B = \frac{U}{\chi_0 + \alpha_0 a^2}. \tag{13}$$

На большом расстоянии r от начала координат будем иметь

$$\Omega = -\frac{4}{3}\frac{\pi abc}{r}, \quad \chi = \frac{2abc}{r};$$

отсюда путем сравнения с уравнениями (4) § 337 получается, что возмущение таково, как если бы оно было вызвано шаром радиуса R, причем R определяется равенством

$$\frac{3}{4}UR = 2abcB \quad \text{или} \quad R = \frac{8}{3}\frac{abc}{\chi_0 + \alpha_0 a^2}. \tag{14}$$

Сопротивление, испытываемое эллипсоидом, оказывается таким образом равным

$$6\pi\mu RU. \tag{15}$$

В случае кругового диска, движущегося в направлении, перпендикулярном к плоскости диска, будем иметь $a=0$, $b=c$ и, следовательно, $\alpha_0=2$, $\chi_0=\pi ac$, так что

$$R = \frac{8c}{3\pi} = 0{,}85\,c.$$

Если же диск движется в своей плоскости, то получим

$$R = \frac{16c}{9\pi} = 0{,}566\,c\ ^{1}).$$

§ 340. Как видоизменение задачи предшествующего параграфа мы можем исследовать установившееся движение жидкости в поле заданных сил, не изменяющихся с временем.

Опуская члены второго порядка, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + X + \nu\Delta u = 0, \\ -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + Y + \nu\Delta v = 0, \\ -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + Z + \nu\Delta w = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

---

1) Другими предельными случаями будут круговой цилиндр и бесконечно длинное плоское лезвие; каждое из этих тел может быть расположено против течения либо концом, либо боковой стороной. Эти случаи были исследованы A. Berry и Miss. L. M. Swain, Proc. Roy. Soc., A, CII, 766 (1923). Скорость в бесконечности в этом случае не обращается в нуль, а становится логарифмически бесконечно большой. Ср. § 3 3.

Отсюда получаем уравнение

$$\Delta \frac{p}{\varrho} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}, \tag{3}$$

которому можно удовлетворить, полагая

$$\frac{p}{\varrho} = -\frac{1}{4\pi} \iiint \left(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'} \right) \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r}, \tag{4}$$

где

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}. \tag{5}$$

Если силы ограничены определенной областью своего действия, то при интегрированиии по частям получим

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{1}{4\pi} \iiint \left(X' \frac{\partial}{\partial x'} + Y' \frac{\partial}{\partial y'} + Z' \frac{\partial}{\partial z'} \right) \frac{1}{r}\, dx'\,dy'\,dz' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \iiint \left(X' \frac{\partial}{\partial x} + Y' \frac{\partial}{\partial y} + Z' \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{r}\, dx'\,dy'\,dz'. \tag{6}$$

В частности, в случае изолированной силы в начале координат, полагая

$$P = \varrho \iiint X'\,dx'\,dy'\,dz', \quad Q = \varrho \iiint Y'\,dx'\,dy'\,dz',$$

$$R = \varrho \iiint Z'\,dx'\,dy'\,dz', \tag{7}$$

будем иметь

$$p = -\frac{1}{4\pi} \left(P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{r}. \tag{8}$$

К этому мы должны присоединить какое-то решение уравнения $\Delta p = 0$.

Всюду за исключением начала мы теперь будем иметь

$$\Delta u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \Delta v = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \Delta w = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{9}$$

Если мы подставим значение p из (8), то можем применить способ интеграции § 336, полагая $n = -2$. Тогда получим

$$\mu u = \frac{r^2}{24\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{r} + \frac{P}{6\pi r} \tag{10}$$

и аналогичные формулы для v, w.

Если к правой части (8) присоединить слагаемое

$$Ax + By + Cz, \tag{11}$$

то соответствующее слагаемое в выражении μu, согласно § 336, при $n = 1$, будет иметь вид

$$A' + \frac{1}{6} Ar^2 - \frac{1}{30} r^5 \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + C \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{r}. \tag{12}$$

Полное решение тогда получится сложением выражений (10) и (12).

Так, например, если мы имеем неподвижную сферу радиуса $r = b$, то

$$A = \frac{5P}{4\pi b^3}, \quad A' = -\frac{3P}{8\pi b} \tag{13}$$

и, следовательно,

$$6\pi\mu u = \frac{P}{r}\left(1 - \frac{9r}{4b} + \frac{5r^3}{4b^3}\right) + \\ + \frac{r^2}{4}\left(1 - \frac{r^3}{b^3}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}. \qquad (14)$$

Если мы положим $b = \infty$, то получим

$$6\pi\mu u = \frac{P}{r} + \frac{r^2}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}. \qquad (15)$$

Полагая $P = -6\pi\mu Ua$, $Q = 0$, $R = 0$, получим формулы, согласующиеся с результатами § 337 для больших значений r/a.

§ 341. Аналогичную задачу на плоскости удобнее будет рассмотреть с помощью функции тока.

Полагая

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (1)$$

в уравнениях

$$X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta_1 u = 0, \quad Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta_1 v = 0 \qquad 2)$$

и исключая p, будем иметь

$$\nu\Delta_1\Delta_1\psi = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad (3)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \qquad (4)$$

Отсюда получим

$$\Delta_1\psi = \frac{1}{2\pi\nu}\int\int\left(\frac{\partial X'}{\partial y'} - \frac{\partial Y'}{\partial x'}\right)\ln r\, dx'\, dy' + \chi, \qquad (5)$$

где

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \qquad (6)$$

и χ есть решение уравнения $\Delta_1\chi = 0$.

Если мы допустим, что силы X, Y обращаются в нуль вне некоторой области, то, интегрируя по частям, получим

$$\Delta_1\psi = -\frac{1}{2\pi\nu}\int\int\left(X'\frac{\partial}{\partial y'} - Y'\frac{\partial}{\partial x'}\right)\ln r\, dx'\, dy' + \chi = \\ = \frac{1}{2\pi\nu}\int\int\left(X'\frac{\partial}{\partial y} - Y'\frac{\partial}{\partial x}\right)\ln r\, dx'\, dy' + \chi. \qquad (7)$$

В частности, в случае силы, сконцентрированной на малой площадке в начале координат, полагая

$$P = \varrho\int\int X'\, dx'\, dy', \quad Q = \varrho\int\int Y'\, dx'\, dy', \qquad (8)$$

будем иметь

$$\Delta_1\psi = \frac{1}{2\pi\mu r^2}(Py - Qx) + \chi. \qquad (9)$$

Например, предположим, что жидкость заключена в неподвижной границе $r=a$ и подвержена действию силы в начале. Соответственная форма уравнения (9) в полярных координатах будет

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=\frac{P\sin\theta}{2\pi\mu r}+Ar\sin\theta. \tag{10}$$

Отсюда после интегрирования получим

$$\psi=\frac{P}{4\pi\mu}(r\ln r+A'r^3+Br)\sin\theta. \tag{11}$$

На границе $r=a$ мы должны иметь $\psi=\text{const.}$, $\frac{\partial\psi}{\partial r}=0$; следовательно,

$$\ln a+A'a^2+B=0,\quad 1+\ln a+3A'a^2+B=0, \tag{12}$$

или

$$A'=-\frac{1}{2a^2},\qquad B=-\ln a+\frac{1}{2}. \tag{13}$$

Таким образом, окончательно

$$\psi=\frac{Pr}{4\pi\mu}\left\{\ln\frac{r}{a}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\right\}\sin\theta. \tag{14}$$

Необходимо заметить, что полученная формула не может дать определенных результатов для $a=\infty$.

Возвращаясь к общей формуле (7) и полагая

$$F=\varrho\iint X'\ln r\,dx'\,dy',\quad G=\varrho\iint Y'\ln r\,dx'\,dy', \tag{15}$$

получим

$$\Delta_1\psi=\frac{1}{2\pi\mu}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial x}\right)+\chi. \tag{16}$$

Так как имеют место равенства

$$\Delta_1F=2\pi\varrho X,\quad \Delta_1G=2\pi\varrho Y, \tag{17}$$

то из (2) будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\right)+\mu\frac{\partial\chi'}{\partial x},\\ \frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\right)+\mu\frac{\partial\chi'}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где χ' — фуикция, сопряженная с χ, т. е.

$$\frac{\partial\chi'}{\partial x}=-\frac{\partial\chi}{\partial y},\quad \frac{\partial\chi'}{\partial y}=\frac{\partial\chi}{\partial x}. \tag{19}$$

Тогда получаем

$$p=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\right)+\chi'+\text{const.} \tag{20}$$

Имеет место замечательная аналогия между теорией плоского установившегося движения вязкой жидкости и теорией изгиба упругой пластинки [1]). Если w обозначает нормальное смещение в последней названной задаче, то имеем [2])

$$A\Delta_1^2 w=Z+\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y},$$

---

[1]) Rayleigh, On the Flow of Viscous, Fluids, especially in Two Dimensions, Phil. Mag. (5), XXXVI, 354 (1893) (Papers, IV, 78). В нашем тексте эта аналогия несколько расширена.

[2]) Lamb, Proc. Lond. Math. Soc., XXI, 77.

где Z представляет нормальную силу на единицу площади, а L, M суть компоненты момента внешней пары, отнесенной к единице длины, вдоль прямых, параллельных x, y; наконец, A есть постоянная, зависящая от упругих свойств и толщины. Если мы положим $Z=0$, то аналогия с уравнением (3) будет полной; моменты L, M соответствуют силам X, Y, а смещение w — функции тока ψ, так что линии равных смещений деформируемой пластинки будут тождественны с линиями тока. Так как в гидродинамической задаче на неподвижной границе мы имеем $\psi=\text{const.}$, $\frac{\partial\psi}{\partial n}=0$, то пластинка в упругой задаче должна предполагаться неподвижно защемленной по краю. Так, например, формула (14) соответствует случаю круглой пластинки, защемленной по краям и подверженной действию пары, сконцентрированной в начале, плоскость которой перпендикулярна пластинке.

Эта аналогия дает возможность составить хорошее представление об общем характере распределения скорости в тех случаях, когда действительное вычисление было бы очень трудным [1]).

Мы не можем больше задерживаться на задачах того типа, который по указанным выше причинам имеет ограниченное применение, кроме случая жидкостей с большой вязкостью. Поэтому мы можем здесь лишь указать на математически очень изящные исследования, которые были выполнены для стационарного вращения эллипсоида [2]) и для потока в канале, ограниченном однополостным гиперболоидом вращения [3]).

§ 342. Формула Стокса для сопротивления, испытываемого медленно движущимся шаром, получила применение в физических исследованиях, имеющих фундаментальное значение; исследования эти имели целью определить величину маленькой водяной капли и на основании этого оценить число капелек, содержащихся в облаке заданной массы [4]). По этой причине условия применимости этой формулы были подробно разобраны как с экспериментальной [5]), так и с теоретической стороны.

Мы видели (§ 328), что точные уравнения движения могут быть написаны в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}-v\zeta+w\eta=X-\frac{\partial\chi'}{\partial x}+\nu\Delta u, \tag{1}$$

где

$$\chi'=\frac{p}{\varrho}+\frac{1}{2}q^2. \tag{2}$$

---

[1]) Некоторые интересные приложения были указаны Рэлеем в названной выше работе.

[2]) Edwardes, Quart. Journ. Math., XXVI, 70, 157 (1892); Jeffery, On the Steady Rotation of a Solid of Revolution in a Viscous Fluid. Proc. Lond. Math. Soc. (2), XIV, 327 (1915).

[3]) Sampson, см. выше, стр. 158.

[4]) Townsend, Camb. Proc., IX, 244 (1897); J. J. Thomson, Phil. Mag. (5), XLVI, 528 (1898); см. также его Conduction of Electricity through Gases, Cambridge (1903), стр. 120. Взаимодействие частиц в облаке было исследовано Cunningham, Proc. Roy. Soc., A, LXXXIII, 357 (1910) и Smoluchowski, см. выше, стр. 752.

[5]) См. указанные на стр. 751 работы Allen и Arnold.

Отсюда можно заключить, что распределение скоростей, удовлетворяющее определенным условиям рассматриваемой задачи в предположении, что члены второго порядка отброшены, будет так же иметь место и в случае сохранения этих членов, если только ввести добавочные фиктивные силы

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= w\eta - v\zeta, \\ Y_1 &= u\zeta - w\xi, \\ Z_1 &= v\xi - u\eta, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и в то же время допустить, что давление уменьшено на величину $\frac{1}{2}\varrho q^2$. Эти добавочные силы всюду направлены перпендикулярно к линиям тока и к вихревым линиям, а их напряжение равно

$$R_1 = q\,\omega \sin\vartheta, \tag{4}$$

где ϑ обозначает угол между направлением скорости q и осью вихря ω [1]).

На основании сравнения величин фиктивных добавочных сил с силами вязкости

$$\nu\Delta u, \quad \nu\Delta v, \quad \nu\Delta w, \tag{5}$$

можно сделать некоторое заключение о законности того приближения, при котором инерционные члены отбрасываются.

В случае формул Стокса (11) § 337, для установившегося течения жидкости около неподвижного шара, мы имеем

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{3}{2}\frac{Uaz}{r^3}, \quad \zeta = -\frac{3}{2}\frac{Uay}{r^3}, \tag{6}$$

а, следовательно, для более удаленных частей жидкости, где $u = U$, $v = 0$, $w = 0$, будем иметь в конце концов

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = -\frac{3}{2}\frac{U^2ay}{r^3}, \quad Z_1 = -\frac{3}{2}\frac{U^2az}{r^3}. \tag{7}$$

С другой стороны, для сил вязкости (5) мы находим следующие выражения

$$\frac{3}{2}\nu Ua\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r}, \quad \frac{3}{2}\nu Ua\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\frac{1}{r}, \quad \frac{3}{2}\nu Ua\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\frac{1}{r}. \tag{8}$$

Отношение первых сил ко вторым имеет порядок $\frac{Ur}{\nu}$ и неограниченно растет вместе с r, как бы ни было мало значение U. На этом основании формулы рассматриваемого решения не применимы для точек, которые значительно удалены от шара. Так как, однако, как добавочные фиктивные силы, так и силы вязкости в этих частях

[1]) Rayleigh, On the Flow of Viscous Fluids, especially in Two Dimensions, Phil Mag. (5), XXXVI, 354 (1893) (Papers, IV, 78).

жидкости сами по себе относительно малы, то отсюда еще с необходимостью не следует, что характер движения в непосредственной близости от шара будет существенно различаться. Для точек вблизи шара фиктивные силы приближаются к нулю, в то время как силы вязкости имеют порядок $\frac{\nu U a}{r^3}$.

Это критическое исследование принадлежит проф. Озеену[1]) (Упсала), который ввел в исследование этого вопроса новый интересный момент, полагая $U+u$ вместо u и отбрасывая члены второго порядка относительно u, v, w. Эти последние символы обозначают теперь составляющие скорости, которые останутся, если всей системе сообщить скорость $-U$. Уравнения гидродинамики принимают тогда вид

$$\left.\begin{aligned} U\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta u,\\ U\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\Delta v,\\ U\frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta w, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{10}$$

Инерционные члены оказываются, таким образом, до некоторой степени принятыми во внимание; следует, однако, заметить, что хотя в бесконечности, где u, v, $w=0$, приближение благодаря этому несомненно улучшилось, зато на поверхности шара, где теперь $u=-U$, оно несколько ухудшилось. Мы рассмотрим этот вопрос позднее.

Интеграцию уравнений (9) и (10) в рассматриваемом случае можно выполнить просто[2]). Прежде всего имеем

$$\Delta p=0; \tag{11}$$

мы получим частное решение системы (9), (10), если положим

$$p=\varrho U\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \tag{12}$$

$$u=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad w=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{13}$$

где функция φ должна удовлетворять уравнению

$$\Delta\varphi=0. \tag{14}$$

---

[1]) Oseen, Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik, Arkiv för matematik,..., кн. VI, № 29 (1910). Это же замечание независимо от Озеена сделал и Ф. Нётер, Über den Gültigkeitsbereich der Stokes'schen Widerstandsformel, Zeitschr. f. Math. u. Phys., LXII (1911).

[2]) Приведенный в тексте способ интеграции отличается от метода проф. Озеена; способ этот вместе с относящейся к нему интерпретацией взят из работы автора: On the Uniform Motion of a Sphere through a Viscous Fluid, Phil. Mag. (6), XXI, 112 (1911).

Решение будет полным, если положим

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + u', \\ v &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} + v', \\ w &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} + w', \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где функции u', v', w' должны удовлетворять уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \left(\Delta - 2k\frac{\partial}{\partial x}\right)u' &= 0, \\ \left(\Delta - 2k\frac{\partial}{\partial y}\right)v' &= 0, \\ \left(\Delta - 2k\frac{\partial}{\partial z}\right)w' &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

и уравнению

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0. \tag{17}$$

Мы положили здесь для краткости

$$k = \frac{U}{2\nu}. \tag{18}$$

Так как вихревые линии суть окружности, имеющие ось x в качестве общей оси, то можем положить

$$\xi = 0, \quad \eta = -\frac{\partial\chi}{\partial z}, \quad \zeta = \frac{\partial\chi}{\partial y}, \tag{19}$$

где функция χ зависит только от переменных x и $\widetilde{\omega}$ ($\widetilde{\omega}$ — расстояние от оси x). Из уравнений (16) следует, что должно удовлетворяться уравнение

$$\left(\Delta - 2k\frac{\partial}{\partial x}\right)\chi = 0, \tag{20}$$

причем мы можем, очевидно, прибавить к функции χ функцию, зависящую только от x. Отсюда следуют уравнения

$$\left.\begin{aligned} 2k\frac{\partial u'}{\partial x} = \Delta u' &= \frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y} = -\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} - 2k\frac{\partial\chi}{\partial x}, \\ 2k\frac{\partial v'}{\partial x} = \Delta v' &= \frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial z} = \frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y}, \\ 2k\frac{\partial w'}{\partial x} = \Delta w' &= \frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Мы получим таким способом решение в виде

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial x} - \chi, \\ v' &= \frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial y}, \\ w' &= \frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

в чем легко можно убедиться.

Уравнение (20) можно написать в виде

$$(\Delta - k^2)\, e^{-kx}\chi = 0; \tag{23}$$

решение этого уравнения хорошо известно, простейшая форма его есть $e^{-kx}\chi = C\dfrac{e^{-kr}}{r}$; ср. § 289. Если мы воспользуемся этой формой, то окончательно получим

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial x} - \chi, \\ v &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial y}, \\ w &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

где

$$\chi = \frac{Ce^{-k(r-x)}}{r}. \tag{25}$$

Так как функция φ, очевидно, должна содержать только зональные функции отрицательной степени, то полагаем

$$\varphi = \frac{A_0}{r} + A_1\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} + A_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r} + \dots \tag{26}$$

Для малых значений kr будем иметь

$$\chi = C\left(\frac{1}{r} - k + \frac{kx}{r} + \dots\right), \tag{27}$$

что дает

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial x} - \chi &= -\frac{C}{2k}\left(\frac{4}{3}\frac{k}{r} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} + \frac{1}{3}kr^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r} + \dots\right), \\ \frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial y} &= -\frac{C}{2k}\left(-\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r} + \frac{1}{3}kr^2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\frac{1}{r} + \dots\right), \\ \frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial r} &= -\frac{C}{2k}\left(-\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} + \frac{1}{3}kr^2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\frac{1}{r} + \dots\right). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Соотношения

$$u = -U,\quad v = 0,\quad w = 0,$$

которые должны иметь место при $r = a$, будут приближенно удовлетворяться, если принять

$$C = \frac{3}{2}Ua,\quad A_0 = \frac{3}{2}\nu a,\quad A_1 = -\frac{1}{4}Ua^3; \tag{29}$$

необходимо заметить, что условие применимости этого приближения заключается опять в том, что значение ka, или число Рейнольдса $\dfrac{Ua}{\nu}$, должно быть мало.

Чтобы найти распределение скоростей вблизи шара, мы можем воспользоваться формулами (26) и (28) со значениями постоянных, данными в формулах (29). Результат оказывается тождественным с формулами (11) § 337, если только мы примем во внимание измененный смысл компоненты u. Сопротивление, испытываемое шаром, имеет поэтому то же самое значение ($6\pi\mu aU$), как и в теории Стокса [1]).

Те же самые результаты получатся из рассмотрения функции тока ψ, которая имеет сравнительно простой вид. Если предположим, что шар движется, а жидкость в бесконечности находится в покое, то скорость в направлении радиуса будет равна

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial r}-\chi\cos\theta, \tag{30}$$

где θ обозначает угол между радиусом-вектором и осью x. Отсюда следует

$$\psi=r^2\int_0^\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial r}+\chi\cos\theta\right)\sin\theta\,d\theta. \tag{31}$$

Если мы подставим соответствующие значения из формул (25), (26) и (29) и выполним интеграцию, то получим

$$\psi=\frac{3}{2}\nu a(1+\cos\theta)\left\{1-e^{-kr(1-\cos\theta)}\right\}-\frac{1}{4}\frac{Ua^3}{r}\sin^2\theta. \tag{32}$$

Для малых значений kr отсюда получается в согласии с формулой (14) § 337

$$\psi=\frac{3}{4}Ua\left(r-\frac{1}{3}\frac{a^2}{r}\right)\sin^2\theta. \tag{33}$$

В других отношениях движение сильно отличается от того, которое дается формулой Стокса. Во-первых, линии тока, как впервые заметил Озеен, уже не будут симметричными относительно плоскости $x=0$ и само движение перестает быть обратимым. Во-вторых, значение вихря оказывается равным

$$\omega=-\frac{\partial\chi}{\partial\widetilde{\omega}}=\frac{3}{2}Ua(1+kr)\frac{\widetilde{\omega}}{r^3}e^{-k(r-x)} \tag{34}$$

и потому, если принять во внимание показательный множитель, перестает быть заметным всюду за исключением той области, которая ограничена более или менее отчетливо поверхностью параболоида с фокусом в точке O, где величина $k(r-x)$ имеет сравнительно небольшое постоянное значение. Эту область можно в данном случае назвать „хвостом", хотя она заключает в себе также некоторую

[1]) Более точные приближенные способы находятся в работе Озеена Arkiv. f. matem., IX (1913) и в работе Amer. J. Math., XXXVIII, 81 (1916).

часть области и впереди шара. Скорость (u, v, w) в удаленных частях жидкости для больших значений r и для точек, лежащих вне хвоста, имеет стремление принять чисто радиальное направление, как если бы движение получалось от источника мощности $4\pi A_0$ или $6\pi\nu a$, помещенного в начале координат. Этот источник компенсируется направленным внутрь потоком в хвосте; таким образом, для точек, лежащих вдоль оси хвоста с правой стороны, где $x = r$, имеем

$$u = -\frac{3}{2}\frac{Ua}{r} + \frac{1}{2}\frac{Ua^3}{r^3}. \tag{35}$$

Эта формула представляет скорость, направленную по движению шара (если представлять шар движущимся); значение этой скорости оказывается в конце концов обратно пропорциональным первой степени расстояния вместо того, чтобы быть обратно пропорциональным квадрату расстояния.

Остается теперь еще оценить степень точности приближения, которое дают полученные результаты в различных частях поля. Для этого нам нужно опять сравнить добавочные силы, которые были бы необходимы для того, чтобы сделать решение точным, с силами вязкости. Первые определяются формулами (3), но уже с новыми значениями для u, v, w, а изменение давления равно

$$\frac{1}{2}\varrho(u^2 + v^2 + w^2). \tag{36}$$

Это выражение будет постоянным $\left(= \frac{1}{2}\varrho U^2\right)$ на поверхности шара и не оказывает поэтому влияния на результирующую силу, действующую на шар.

Для удаленных точек, лежащих вне хвоста, мы можем пренебречь членами, зависящими от χ в выражениях (24), и потому окончательно будем иметь

$$u = \frac{3}{2}\nu a\frac{x}{r^3}, \quad v = \frac{3}{2}\nu a\frac{y}{r^3}, \quad w = \frac{3}{2}\nu a\frac{z}{r^3}. \tag{37}$$

Далее из формулы (34) получаем

$$\left.\begin{aligned} \xi = 0, \quad \eta &= \frac{3}{2}Uka\frac{z}{r^2}e^{-k(r-x)}, \\ \zeta &= -\frac{3}{2}Uka\frac{y}{r^2}e^{-k(r-x)}. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Отсюда следует

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{9}{8}U^2a^2\frac{\widetilde{\omega}^2}{r^5}e^{-k(r-x)}, \\ Y_1 &= -\frac{9}{8}U^2a^2\frac{xy}{r^5}e^{-k(r-x)}, \\ Z_1 &= -\frac{9}{8}U^2a^2\frac{xz}{r^5}e^{-k(r-x)}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Результирующая этих составляющих есть

$$R_1 = \frac{9}{8} U^2 a^2 \frac{\widetilde{\omega}}{r^4} e^{-k(r-x)}, \tag{40}$$

она лежит в плоскости, проходящей через ось x, и направлена перпендикулярно к радиусу-вектору. Силы же вязкости определяются из формул (24) и (25). Если мы удержим только те члены, которые имеют наибольший порядок при больших значениях r, то получим

$$\left.\begin{aligned} \nu\Delta u &= -\nu k^2 C \frac{\widetilde{\omega}^2}{r^3} e^{-k(r-x)}, \\ \nu\Delta v &= -\nu k^2 C \frac{y(r-x)}{r^3} e^{-k(r-x)}, \\ \nu\Delta w &= -\nu k^2 C \frac{z(r-x)}{r^3} e^{-k(r-x)}. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Из формул (29) следует, что отношение значений (39) к значениям (41) имеет порядок величины $\frac{1}{kr} \cdot \frac{a}{r}$. Приближение в этой части потока оказывается, таким образом, вполне удовлетворительным.

Для точек, лежащих внутри хвоста, где значение $k(r-x)$ мало, из формулы (32) для больших значений отношения $\frac{r}{a}$ получается

$$u = -\frac{3}{2} \frac{Ua}{r}, \quad v = 0, \quad w = 0, \tag{42}$$

а из формулы (34) будем иметь приближенно

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{3}{2} U k a \frac{z}{r^2}, \quad \zeta = -\frac{3}{2} U k a \frac{y}{r^2}. \tag{43}$$

Эти значения дают

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = \frac{9}{4} U^2 k a^2 \frac{y}{r^3}, \quad Z_1 = \frac{9}{4} U^2 k a^2 \frac{z}{r^3}. \tag{44}$$

Силы же вязкости приближенно будут выражаться в виде

$$\nu\Delta u = 2\nu k C \frac{x}{r^3}, \quad \nu\Delta v = 2\nu k C \frac{y}{r^3}, \quad \nu\Delta w = 2\nu k C \frac{z}{r^3}. \tag{45}$$

Отношение величин (44) и (45) имеет порядок величины ka.

Вблизи поверхности шара приближенно имеем $u = -U$, $v = 0$, $w = 0$, а потому, на основании равенств (3) и (19),

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = -U \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad Z_1 = -U \frac{\partial \chi}{\partial z} \tag{46}$$

или, имея в виду формулы (27) и (29),

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = \frac{3}{2} U^2 a \frac{y}{r^3}, \quad Z_1 = \frac{3}{2} U^2 a \frac{z}{r^3}. \tag{47}$$

Эти величины имеют порядок $\frac{U^2}{a}$. Силы вязкости получаются из формул (24) и (27); они будут равны

$$\left.\begin{aligned} \nu\Delta u &= \frac{3}{2}\nu U a\,\frac{3x^2-r^2}{r^5}, \\ \nu\Delta v &= \frac{3}{2}\nu U a\,\frac{3xy}{r^5}, \\ \nu\Delta w &= \frac{3}{2}\nu U a\,\frac{3xz}{r^5}. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Эти составляющие имеют результирующую порядка величины $\frac{\nu U}{a^2}$. Следовательно, отношение рассматриваемых величин оказывается равным $\frac{Ua}{\nu}$, а эта величина предполагалась малой. Мы видим, таким образом, что хотя приближение здесь и менее совершенно, чем по теории Стокса, все же оно может считаться достаточным.

§ 343. Если бы мы попытались теперь определить на основании уравнений (1) § 336 установившееся движение, вызываемое движением *цилиндра* с постоянной скоростью в неограниченной жидкости, то оказалось бы невозможным удовлетворить всем условиям [1]). Стокс обратил внимание на это обстоятельство и дал ему следующее объяснение: „Давление, производимое цилиндром на жидкость, постоянно стремится увеличить то количество жидкости, которое цилиндр захватывает с собой, в то время как внутреннее трение жидкости на некотором расстоянии от цилиндра, наоборот, стремится уменьшить это количество жидкости. В случае шара оба эти влияния в конце концов нейтрализуют друг друга, и движение становится установившимся. В случае же цилиндра приращение количества жидкости, увлекаемой цилиндром, постоянно превышает потерю, вызванную трением окружающей жидкости, и количество увлекаемой жидкости постоянно растет по мере того, как цилиндр движется дальше“ [2]).

Если же по примеру Озеена (§ 342) учесть частично инерционные члены, то рассматриваемая задача становится возможной, и для сопротивления получится определенное значение [3]).

Гидродинамические уравнения удовлетворяются в этом случае решениями вида

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial x} - \chi, \\ v &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

[1]) См. замечание, следующее за уравнением (14) § 341.

[2]) Stokes, Camb. Trans., IX (1850) (Papers, III, 65).

[3]) Проф. Бэрстоу воспользовался обычной приближенной теорией и для того случая, когда круговой цилиндр движется в канале с параллельными стенками, получил определенную формулу для сопротивления. Proc. Roy. Soc., A, C, 394 (1922).

и

$$p=\varrho U\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \tag{2}$$

при условии, что функции φ и χ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta_1\varphi=0 \tag{3}$$

и

$$\left(\Delta_1-2k\frac{\partial}{\partial x}\right)\chi=0. \tag{4}$$

Пригодное в этом случае решение уравнения (4) имеет вид

$$\chi=Ce^{kx}\int_0^\infty e^{-kr\,\mathrm{ch}\,\omega}\,d\omega. \tag{5}$$

Для определенного интеграла имеем разложения [1])

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-kr\,\mathrm{ch}\,\omega}\,d\omega &= -\left(\gamma+\ln\frac{1}{2}kr\right)I_0(kr)+\frac{k^2r^2}{2^2}+\\ &+s_2\frac{k^4r^4}{2^2\cdot4^2}+s_3\frac{k^6r^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\ldots=\\ &=\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}e^{-kr}\left\{1-\frac{1^2}{8kr}+\frac{1^2\cdot3^2}{1\cdot2\cdot(8kr)^2}-\ldots\right\};\end{aligned} \tag{6}$$

последняя форма разложения представляет полусходящийся ряд и применяется для больших значений kr.

Для малых значений kr будем иметь

$$\chi=-C(1+kx)\left(\gamma+\ln\frac{1}{2}kr\right), \tag{7}$$

откуда получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial x}-\chi &= -\frac{C}{2k}\left\{k\left(\frac{1}{2}-\gamma-\ln\frac{1}{2}kr\right)+\right.\\ &\left.+\frac{\partial}{\partial x}\ln r-\frac{1}{2}kr^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln r+\ldots\right\},\\ \frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial y} &= -\frac{C}{2k}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\ln r-\frac{1}{2}kr^2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\ln r+\ldots\right\}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Если еще положить

$$\varphi=A_0\ln r+A_1\frac{\partial}{\partial x}\ln r+\ldots, \tag{9}$$

---

[1]) Вывод этого разложения аналогичен соответствующему выводу § 194; ср. Watson, стр. 80, 202. Определенный интеграл есть бесселева функция „второго рода" от мнимого аргумента. В руководстве Ватсона имеются таблицы для этой функции, и обозначена она через $K_0(kr)$.

то найдем, что условия $u=-U$, $v=0$, $w=0$ при $r=a$ будут удовлетворены, если положить приближенно

$$C=\frac{2U}{\frac{1}{2}-\gamma-\ln\left(\frac{1}{2}ka\right)},\quad A_0=-\frac{C}{2k},\quad A_1=\frac{1}{4}Ca^2. \tag{10}$$

Поэтому вблизи цилиндра имеют место равенства

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{1}{2}C\left\{\gamma-\frac{1}{2}+\ln\frac{1}{2}kr+\frac{1}{2}(r^2-a^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln r\right\},\\ v&=\frac{1}{4}C(r^2-a^2)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\ln r. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Вихрь определится тогда выражением

$$\zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=Ce^{kz}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty e^{-kr\operatorname{ch}\omega}\,d\omega,$$

которое для больших значений kr принимает вид

$$\zeta=-kC\frac{y}{r}\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\,e^{-k(r-x)}. \tag{12}$$

Общее истолкование этих формул в основных чертах совпадает с тем, что мы имели в случае шара (§ 342).

Чтобы вычислить силу, с которой жидкость действует на цилиндр, мы должны проинтегрировать выражение

$$\begin{aligned} rp_{rx}&=\left(-p+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)x+\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)y=\\ &=-px+\mu r\frac{\partial u}{\partial r}+\mu\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

по углу θ от 0 до 2π. При этом интегралы от произведений различных тригонометрических функций будут обращаться в нуль. Первый же член в выражении (13), если положить $r=a$, будет давать

$$-\varrho UA_0\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta=-\pi\varrho UA_0=\pi\mu C. \tag{14}$$

Второй член после подстановки выражения для u из формулы (11) дает также значение $\pi\mu C$. Наконец, третий член при нашей степени приближения дает результат, равный нулю. Окончательное значение сопротивления на единицу длины получается, таким образом, равным

$$2\pi\mu C=\frac{4\pi\mu U}{\frac{1}{2}-\gamma-\ln\left(\frac{1}{2}ka\right)}. \tag{15}$$

Эти расчеты подчинены, как и в случае § 342, условию, что значения величины ka или $\frac{Ua}{2\nu}$ должны быть малыми [1]).

Следует заметить, что значение выражения (15) не очень быстро изменяется при изменении a. Так, например, при $ka=\frac{1}{10}$ значение этого выражения равно $4{,}31\,\mu U$, а при $ka=\frac{1}{20}$ это значение равно $3{,}48\,\mu U$.

§ 343а. Линеаризированные уравнения Озеена (9) § 342 послужили отправной точкой многих исследований. Необходимо только заметить, что, если даже и считать эти уравнения приемлемыми все же граничные условия при этом удовлетворяются только приближенно. Озеен, продолжая приближение, установил следующую формулу [2]) для сопротивления шара

$$6\pi\mu Ua\left(1+\frac{3}{8}R\right), \tag{16}$$

где $R=\frac{Ua}{\nu}$. Он также исследовал и случай эллипсоида [3]), при этом нашел поправку к результату Обербека (§ 339). Последняя задача включает в себе случай эллиптического цилиндра, рассмотренный независимо Бэрстоу [4]) и другими, а также Харрисоном и Файлоном [5]). Формула для сопротивления на единицу длины, данная последними авторами, имеет следующий вид:

$$\frac{4\pi\mu U}{\frac{a}{a+b}-\gamma-\ln\left\{\frac{1}{4}k(a+b)\right\}}. \tag{17}$$

При этом цилиндр предполагался помещенным симметрично и a обозначает ту полуось, которая параллельна направлению потока. Если мы положим $b=a$, то воспроизведем результат для круглого

---

[1]) Приведенное в тексте исследование взято из работы автора, указанной на стр. 766.

Формула (15) при достаточно малых значениях $\frac{Ua}{\nu}$ хорошо согласуется с опытами; см. Wieselsberger, Phys. Zeitschr. (1921), стр. 321.

[2]) Oseen, Arkiv f. matem., IX (1913); также Burgess, Amer. I. Math., XXXVIII, 81 (1916). Приближенное решение продолжено в виде ряда по степеням числа Рейнольдса, Goldstein, Proc. Roy. Soc., A, CXXIII, 225 (1929).

[3]) Oseen, Arkiv f. matem. u. phys. XXIV (1915). Изложение этого вопроса и многих других исследований в этой связи дано в его Гидродинамике, Leipzig (1927).

[4]) L. Bairstow, B. M. Cave, E. O. Lenz, Phil. Trans, A, CCXXIII, 383 (1923). В этой же работе рассматривался и случай цилиндра произвольного сечения. В ней же проведено сравнение с экспериментальными результатами для случая круглого сечения в той степени, в какой это было возможно сделать.

[5]) Harrison, Camb. Trans., XXIII, 71 (1924); Filon, Proc. Roy. Soc., A, CXIII, 7 (1926) и Phil. Trans., A, CCXXVII, 93 (1927).

сечения. Если же $b=0$, то будем иметь случай пластинки, расположенной параллельно потоку. Точное решение для круглого цилиндра аналитически было исследовано Факсеном [1]). Тот же автор исследовал [2]) на основе уравнений Озеена движение шара как вдоль оси трубы, так и параллельно неподвижной плоскости и между параллельными стенками, а также сравнил в той мере, в которой это было возможно сделать, полученные результаты с экспериментальными результатами.

Некоторые другие более проблематичные исследования, основанные на тех же уравнениях, будут прореферированы позднее (§ 371b).

§ 344. Гельмгольц и Кортевег установили некоторые интересные общие теоремы, относящиеся к рассеянию энергии при установившемся движении жидкости под действием постоянных внешних сил. Эти теоремы выведены в предположении, что инерционные члены в уравнениях движения отброшены.

1. Рассмотрим движение в области, ограниченной произвольной замкнутой поверхностью Σ; пусть u, v, w обозначают составляющие скорости этого движения и $u+u'$, $v+v'$, $w+w'$ — соответствующие компоненты другого произвольного движения, которое подчинено только тому условию, что значения u', v', w' на поверхности Σ должны обращаться в нуль. На основании выражения (3) § 329 значение рассеяния в варьированном движении оказывается равным

$$\iiint \Big\{ (p_{xx}+p'_{xx})(a+a') + \ldots + \ldots + \\ + (p_{yz}+p'_{yz})(f+f') + \ldots + \ldots \Big\} dx\,dy\,dz; \qquad (1)$$

штрихи в обозначениях указывают на то, что нужно брать те значения, которые принимают соответствующие функции, если вместо u, v, w подставлены u', v', w'. Формулы (2) и (3) § 326 показывают, что для несжимаемой жидкости имеет место равенство

$$p_{xx}a' + p_{yy}b' + p_{zz}c' + p_{yz}f' + p_{zx}g' + p_{xy}h' = \\ = p'_{xx}a + p'_{yy}b + p'_{zz}c + p'_{yz}f + p'_{zx}g + p'_{xy}h, \qquad (2)$$

так как каждая часть этого равенства — симметрическая функция величин a, b, c, f, g, h и a', b', c', f', g', h'. Отсюда и из § 329 видно, что выражение (1) приводится к виду

$$\iiint \Phi\,dx\,dy\,dz + 2\iiint (p_{xx}a' + p_{yy}b' + p_{zz}c' + \\ + p_{yz}f' + p_{zx}g' + p_{xy}h')\,dx\,dy\,dz + \iiint \Phi'\,dx\,dy\,dz.$$

Второй интеграл можно написать в виде

$$\iiint \left(p_{xx}\frac{\partial u'}{\partial x} + p_{xy}\frac{\partial u'}{\partial y} + p_{xz}\frac{\partial u'}{\partial z} + \ldots + \ldots \right) dx\,dy\,dz;$$

---

[1]) Faxén, K. Soc. d. Wiss., Upsala (1926).

[2]) Faxén, Dissertation, Upsala, 1921; Ann. d. Physik (4), LXVIII, 89 (1922); Arkiv f. matem., XVII (1923), XVIII (1924), XIX (1925).

если обратим внимание на то, что значения u', v', w' обращаются в нуль на границе, то в результате интегрирования по частям получим

$$-\iiint\left\{u'\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{xz}}{\partial z}\right)+\ldots+\ldots\right\}dx\,dy\,dz$$

или

$$\iiint\left\{u'\left(\frac{\partial p}{\partial x}-\mu\Delta u\right)+\ldots+\ldots\right\}dx\,dy\,dz. \tag{3}$$

До сих пор на u, v, w не накладывалось никаких ограничений, кроме того, что они должны были удовлетворять уравнению непрерывности. Если же значения u, v, w удовлетворяют уравнениям движения, в которых инерционные члены отброшены, а именно уравнениям вида

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\Delta u-\varrho\frac{\partial\Omega}{\partial x}=0, \tag{4}$$

где Ω — однозначный потенциал внешних сил, то интеграл (3) на основании формулы (4) § 42 обращается, в силу уравнения непрерывности, в нуль.

При этих условиях значение рассеяния в варьированном движении будет равно

$$\iiint\Phi\,dx\,dy\,dz+\iiint\Phi'\,dx\,dy\,dz \tag{5}$$

или $2(F+F')$. А это показывает, что значение рассеяния при варьированном движении превосходит рассеяние установившегося движения на существенно положительную величину $2F'$, представляющую рассеяние в движении (u', v', w').

Другими словами: если инерционными членами можно пренебречь, то установившееся движение жидкости, возникающее под действием постоянных сил, имеющих однозначный потенциал, характеризуется тем свойством, что рассеяние в этом движении для каждой области оказывается меньше, чем рассеяние во всяком другом движении с теми же самыми значениями u, v, w на границе.

Отсюда следует, что при заданной на границе скорости при одних и тех же предположениях в данной области оказывается возможным только *один* вид установившегося движения [1]).

Рэлей [2]) обратил внимание на то, что интеграл (3) обращается в нуль и соответственно этому значение рассеяния обращается в минимум также при несколько расширенных условиях.

В самом деле, интеграл (3) можно заменить интегралом

$$-\mu\iiint(u'\Delta u+v'\Delta v+w'\Delta w)\,dx\,dy\,dz, \tag{6}$$

а это выражение исчезает, если имеют место равенства

$$\Delta u=\frac{\partial H}{\partial x},\quad \Delta v=\frac{\partial H}{\partial y},\quad \Delta w=\frac{\partial H}{\partial z}, \tag{7}$$

где H — однозначная функция от x, y, z. Это условие, являющееся чисто кинематическим, имеет следствием равенства

$$\Delta\xi=0,\quad \Delta\eta=0,\quad \Delta\zeta=0, \tag{8}$$

---

[1]) Helmholtz, Zur Theorie der stationären Ströme in reibenden Flüssigkeiten, Verh. d. naturhist-med. Vereins, 30, Okt. (1868) (Wiss. Abh., 1, 223).

[2]) Rayleigh, On the Motion of a Viscous Fluid, Phil. Mag. (6), XXVI, 776 (1913) (Papers VI, 187).

и наоборот. При таких условиях сюда будет относиться случай установившегося движения между параллельными плоскостями, при котором (§ 330) имеют место формулы

$$u = A + Bz + Cz^2, \quad v = 0, \quad w = 0 \tag{9}$$

и также случай кругового движения между соосными цилиндрами (§ 333). Следует заметить, что для справедливости высказанной теоремы не является необходимым, чтобы движение, представляемое компонентами u, v, w, было медленным или чтобы это движение было вообще динамически возможно как установившееся движение; необходимо только, чтобы были выполнены соотношения (7) и уравнение непрерывности. Например, для каждого движения между концентрическими сферами рассеяние необходимо оказывается бо́льшим, чем найденное в § 334 значение, и потому необходимый для поддержания движения момент вращающей пары N должен превосходить данное там значение.

2. Если величины u, v, w относятся к произвольному движению в заданной области, то имеем

$$2\dot{F} = \iiint \dot{\Phi}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= 2\iiint (p_{xx}\dot{a} + p_{yy}\dot{b} + p_{zz}\dot{c} + p_{yz}\dot{f} + p_{zx}\dot{g} + p_{xy}\dot{h})\, dx\, dy\, dz, \tag{10}$$

так как формула (2) сохраняет свою силу, если штрихи будут заменены точками.

Этот интеграл можно преобразовать так же, как и в предшествующем случае.

Если мы предположим, что $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$ обращаются в нуль на границе Σ, то для случая медленного движения получим

$$\dot{F} = -\iiint \left\{ \dot{u}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}\right) + \ldots + \ldots \right\} dx\, dy\, dz =$$

$$= -\varrho \iiint (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)\, dx\, dy\, dz +$$

$$+ \varrho \iiint (X\dot{u} + Y\dot{v} + Z\dot{w})\, dx\, dy\, dz. \tag{11}$$

В том случае, когда внешние силы имеют однозначный потенциал, второй интеграл в формуле (11) обращается в нуль, поэтому будем иметь

$$\dot{F} = -\varrho \iiint (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)\, dx\, dy\, dz. \tag{12}$$

Это выражение существенно отрицательно, так что функция F постоянно убывает. Это убывание прекратится лишь тогда, когда будут иметь место равенства $\dot{u} = 0$, $\dot{v} = 0$, $\dot{w} = 0$, т. е. когда движение сделается установившимся.

Следовательно, если скорости на граничной поверхности Σ удерживаются постоянными, то движение внутри поверхности стремится сделаться установившимся. Получающееся в конце концов установившееся движение оказывается поэтому устойчивым постольку, поскольку оно единственное [1]).

---

[1]) Korteweg, On a General Theorem of the Stability of the Motion of a Viscous Fluid, Phil. Mag. (5), XVI, 112 (1883).

Рэлей [1]) показал, что это предложение может быть распространено на всякую динамическую систему, не обладающую потенциальной энергией, если ее кинетическая энергия T и функция рассеяния F представляют квадратические функции обобщенных скоростей с постоянными коэфициентами.

В том случае, когда внешние силы не имеют однозначного потенциала или когда мы на граничной поверхности задаем вместо определенных значений скоростей определенные значения напряжений, высказанные теоремы должны быть несколько видоизменены. Избыток рассеяния над удвоеиной работой, производимой в единицу времени внешними силами (включая и напряжения на границе), стремится к определенному минимуму, который будет достигнут только тогда, когда движение сделается устаиовившимся [2]).

Периодическое движение.

§ 345. Исследуем теперь влияние вязкости в различных задачах, относящихся к малым колебаниям.

Мы начнем с рассмотрения случая „ламинарного" движения, так как он позволит объяснить некоторые важные вопросы без сложных математических вычислений. Если мы предположим, что $v=0$, $w=0$ и u есть функция только координаты y, то уравнения (4) § 328 потребуют, чтобы имели место равенства

$$p = \text{const}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{1}$$

Последнее уравнение имеет тот же вид, как и уравнение линейного распространения тепла. В случае простого гармонического колебания с множителем времени $e^{i(\sigma t+\varepsilon)}$ будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{i\sigma}{\nu} u; \tag{2}$$

решение этого уравнения есть

$$u = Ae^{(1+i)\beta y} + Be^{-(1+i)\beta y}, \tag{3}$$

где

$$\beta = \left(\frac{\sigma}{2\nu}\right)^{1/2}. \tag{4}$$

Мы предположим прежде всего, что жидкость находится с положительной стороны плоскости xz и движение вызывается заданным колебанием

$$u = ae^{i(\sigma t+\varepsilon)} \tag{5}$$

твердой стенки, совпадающей с плоскостью xz. Если жидкость в положительном направлении по оси y простирается в бесконечность,

---

[1]) Rayleigh, см. выше, стр. 777.
[2]) Ср. Helmholtz, см. выше, стр. 777.

то присутствие первого члена в выражении (3) должно быть исключено, и мы получаем, определяя постоянный коэфициент B из граничного условия (5),

$$u = ae^{-(1+i)\beta y + i(\sigma t + \varepsilon)} \tag{6}$$

или, если возьмем только действительную часть,

$$u = ae^{-\beta y}\cos(\sigma t - \beta y + \varepsilon); \tag{7}$$

это соответствует заданному на границе движению [1])

$$u = a\cos(\sigma t + \varepsilon). \tag{8}$$

Формула (7) представляет волну поперечных колебаний, которая распространяется от границы внутрь со скоростью $\frac{\sigma}{\beta}$ и амплитуда которой очень быстро убывает, уменьшаясь на протяжении одной длины волны в отношении $e^{-2\pi}$, т. е. $\frac{1}{535}$.

Линейная величина β^{-1} имеет большое значение во всех задачах, относящихся к колебательному движению, при котором не происходит изменения плотности, так как она показывает, как далеко в жидкость проникает действие вязкости. В случае воздуха ($\nu = 0{,}13$) значение этой величины равно 0,21 $P^{1/2}$ *см*, где P — период колебания в секундах. Для воды соответствующее значение равно 0,072 $P^{1/2}$. Мы будем иметь скоро другие примеры того факта, что влияние вязкости распространяется лишь на небольшое расстояние от поверхности того тела, которое совершает малые колебания с достаточно большой частотой. Подобный же результат можно высказать и относительно свободной поверхности жидкости, находящейся в волновом движении.

Замедляющая сила, действующая на единицу площади твердой стенки, будет равна

$$-\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0} = \mu\beta a\{\cos(\sigma t + \varepsilon) - \sin(\sigma t + \varepsilon)\} =$$
$$= \varrho\nu^{1/2}\sigma^{1/2}a\cos(\sigma t + \varepsilon + \tfrac{1}{4}\pi). \tag{9}$$

Своего наибольшего значения эта сила достигает в тот момент времени, который предшествует моменту прохождения колеблющейся плоскости через ее среднее положение на $\frac{1}{8}$ периода [2]).

---

[1]) Stokes, см. выше, стр. 726.

[2]) Исследования, относящиеся к тому случаю, когда пластинка испытывает не только простые гармонические колебания, имеются в работах Stokes, см. выше Basset, Quart. Journ. Math. (1910) и Rayleigh, On the Motion of Solid Bodies through a Viscous Fluid, Phil. Mag. (6), XXI, 697 (1911) (Papers VI, 29). См. также Havelock, Phil. Mag. (6), XLII, 620 (1921);

На рассмотренное выше вынужденное колебание можно наложить любое свободное колебание, допускаемое системой. Если положить

$$u \text{ пропорционально } A\cos my + B\sin my \tag{10}$$

и подставить в уравнение (1), то получится

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nu m^2 u; \tag{11}$$

отсюда получим решение

$$u = \sum (A\cos my + B\sin my)\, e^{-\nu m^2 t}. \tag{12}$$

Допустимые значения m и значения отношения $A:B$ определяются, как правило, из граничных условий. Остальные же произвольные постоянные можно определить по методу Фурье через начальные данные.

В случае жидкости, простирающейся от $y=-\infty$ до $y=+\infty$, допустимыми оказываются все действительные значения m. Решение, выраженное через начальные данные, в этом случае можно сейчас же получить на основании теоремы Фурье [(4) § 238]. Таким путем будем иметь

$$u = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dm \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\cos m(y-\lambda)\, e^{-\nu m^2 t} d\lambda, \tag{13}$$

если

$$u = f(y) \tag{14}$$

есть произвольное распределение скоростей в начальный момент.

Интегрирование по m можно выполнить на основании известной формулы

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}. \tag{15}$$

Таким образом находим

$$u = \frac{1}{2(\pi\nu t)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\lambda)^2}{4\nu t}} f(\lambda)\, d\lambda. \tag{16}$$

Отсюда можно получить решение (2) § 334а.

§ 346. Если жидкость не простирается в бесконечность, а ограничена неподвижной твердой стенкой $y=h$, то, чтобы найти движение, которое получится в результате вынужденных колебаний плоскости $y=0$, необходимы будут оба члена в выражении (3); граничные условия дают в этом случае

$$A+B=a, \quad Ae^{(1+i)\beta h} + Be^{-(1+i)\beta h} = 0, \tag{17}$$

откуда

$$u = a\,\frac{\operatorname{sh}(1+i)\beta(h-y)}{\operatorname{sh}(1+i)\beta h}\, e^{i(\sigma t+\varepsilon)}, \tag{18}$$

что легко можно проверить. Отсюда для замедляющей силы, действующей на единицу поверхности колеблющейся плоскости, получаем выражение

$$-\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0}=\mu(1+i)\beta a\coth(1+i)\beta h\cdot e^{i(\sigma t+\varepsilon)}. \qquad (19)$$

Действительную часть этого выражения можно привести к следующему виду:

$$\sqrt{2}\mu\beta a\frac{\operatorname{sh}2\beta h\cos(\sigma t+\varepsilon+\frac{1}{4}\pi)+\sin 2\beta h\sin(\sigma t+\varepsilon+\frac{1}{4}\pi)}{\operatorname{ch}2\beta h-\cos 2\beta h}. \qquad (20)$$

Если значение βh сравнительно велико, то это выражение будет эквивалентно выражению (9), в то время как для малых значений βh оно приводится к виду

$$\frac{\mu a}{h}\cos(\sigma t+\varepsilon), \qquad (21)$$

как и следовало ожидать.

Этот пример содержит как частный случай теорию видоизмененного Максвеллом [1]) метода Кулоиа [2]) для исследования вязкости жидкостей при помощи вращательных колебаний кругового диска в его собственной (горизоитальиой) плоскости.

Присоединение неподвижных параллельных дисков на небольшом расстоянии от первоначального диска вверху и внизу значительно увеличивает влияние трения.

Типы свободиых колебаний выражаются формулой (12) при условии, что $u=0$ при $y=0$ и $y=h$. Это условие дает $A=0$ и $mh=s\pi$, где s — целое число. Соответствующие коэфициенты затухания получатся, полагая $\tau=\frac{1}{\nu m^2}$.

§ 347. В качестве следующего примера рассмотрим случай горизонтальной силы

$$X=f\cos(\sigma t+\varepsilon), \qquad (1)$$

действующей всюду одинаково на неограниченную массу воды постоянной глубины h.

Уравнение (1) § 345 заменится теперь уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+X. \qquad (2)$$

Если поместим начало координат в какой-либо точке на дне, то граничные условия получают вид $u=0$ при $y=0$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ при $y=h$; последнее условие выражает то обстоятельство, что на свободную

[1]) Maxwell, см. выше, стр. 720.
[2]) Coulomb. Mém. de l'Inst., III (1800).

поверхность не действует касательная сила. Заменяя выражение (1) выражением

$$X = fe^{i(\sigma t+\varepsilon)}, \tag{3}$$

получим

$$u = -\frac{if}{\sigma}\left\{1 - \frac{\operatorname{ch}(1+i)\beta(h-y)}{\operatorname{ch}(1+i)\beta h}\right\} e^{i(\sigma t+\varepsilon)}, \tag{4}$$

если, как и выше, $\beta = \left(\frac{\sigma}{2\nu}\right)^{1/2}$.

Если значение βh велико, то выражение в фигурных скобках практически приводится к одному первому члену для всех тех точек, высота которых от дна превосходит сравнительно небольшое кратное от β^{-1}. Мы будем иметь, таким образом, если возьмем действительную часть,

$$u = \frac{f}{\sigma}\sin(\sigma t + \varepsilon). \tag{5}$$

Это показывает, что вся масса жидкости, за исключением слоя у поверхности дна, колеблется в точности так же, как свободная материальная точка, причем влияние вязкости оказывается незаметным. Для точек, лежащих вблизи от поверхности дна, формула (4) принимает вид

$$u = -\frac{if}{\sigma}(1 - e^{-(1+i)\beta y})\, e^{i(\sigma t+\varepsilon)} \tag{6}$$

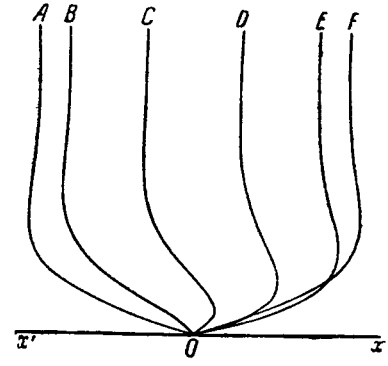
или, если отбросим мнимую часть,

$$u = \frac{f}{\sigma}\sin(\sigma t+\varepsilon) - \frac{f}{\sigma}e^{-\beta y}\sin(\sigma t - \beta y + \varepsilon). \tag{7}$$

Это выражение можно было бы прямо найти как решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям, что $u = 0$ для $y = 0$ и

$$u = \frac{f}{\sigma}\sin(\sigma t + \varepsilon)$$

для больших значений βy.



Фиг. 82.

Кривые A, B, C, D, E, F на фиг. 82 представляют последовательные формы, которые принимает одна и та же жидкая линия через промежутки в $\frac{1}{10}$ периода. Чтобы дополнить этот ряд кривых, нужно еще присоединить зеркальные изображения кривых E, D, C, B по отношению к вертикали, проходящей через точку O. Всю систему кривых можно представлять себе как последовательные проекции некоторой, подходящим образом вы-

бранной спирали, которая равномерно вращается около вертикальной оси, проходящей через точку O. Размер фигуры по вертикали равен длине волны $\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)$ ламинарного возмущения.

В качестве числового примера отметим, что при $\nu = 0{,}0178$ и $\frac{2\pi}{\sigma} = 12$ часам получится $\beta^{-1} = 15{,}6$ *см*. Это еще раз показывает, насколько мало должно быть непосредственное влияние вязкости на морские приливы. И не подлежит никакому сомнению, что то рассеяние энергии вследствие „приливного трения", какое наблюдается в действительности, следует отнести, главным образом, за счет вихревого движения, возникающего благодаря преувеличенным приливным течениям в узких каналах и в мелкой воде (ср. § 365).

Если значение βh мало, то действительная часть выражения (4) дает

$$u = \frac{f}{2\nu} y(2h - y)\cos(\sigma t + \varepsilon). \tag{8}$$

Скорость имеет таким образом одинаковую фазу с силой и обратно пропорциональна ν.

§ 348. Чтобы определить влияние вязкости на свободные волны в глубокой воде, мы можем поступить следующим образом.

Если вязкостью пренебрегать, то в качестве решения мы получим

$$\varphi = ace^{ky}\cos k(x - ct), \tag{1}$$

$$u = kace^{ky}\sin k(x - ct), \quad v = -kace^{ky}\cos k(x - ct), \tag{2}$$

$$\eta = a\sin k(x - ct), \tag{3}$$

где η — возвышение поверхности, а c — скорость волны. Этот вид движения может иметь место даже и при наличии вязкости, если только на предполагаемую свободную поверхность будут действовать силы

$$\left.\begin{aligned} p_{yy} &= -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = -p - 2\mu k^2 ac\cos k(x - ct), \\ p_{yx} &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2\mu k^2 ac\sin k(x - ct). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Работа этих сил в единицу времени будет равна

$$p_{yy}v + p_{yx}u = pkac\cos k(x - ct) + 2\mu k^3 a^2 c^2; \tag{5}$$

среднее значение этой работы равно $2\mu k^3 a^2 c^2$. Последнее выражение, очевидно, должно представлять скорость рассеяния энергии в свободном движении, выражаемом формулами (2), как в этом можно убедиться, производя вычисления по какой-либо формуле § 329. Среднее же значение кинетической энергии на единицу поверхности

равно $\frac{1}{4}\varrho kc^2a^2$. Полная энергия равна удвоенному среднему значению энергии, т. е.

$$\frac{1}{2}\varrho kc^2a^2.$$

Следовательно, при отсутствии сил на поверхности получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\varrho kc^2a^2\right) = -2\mu k^3c^2a^2 \tag{6}$$

или

$$\frac{da}{dt} = -2\nu k^2a, \tag{7}$$

откуда следует

$$a = a_0e^{-2\nu k^2t}. \tag{8}$$

Для „модуля" затухания τ получаем отсюда выражение $\tau = \frac{1}{2\nu k^2}$, или, если введем длину волны (λ),

$$\tau = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\nu}. \tag{9}$$ [1])

Для случая воды эта формула дает

$$\tau = 0{,}712\,\lambda^2 \text{ сек.},$$

если значение λ выражено в сантиметрах. Отсюда следует, что капиллярные волны очень быстро затухают благодаря вязкости, между тем как для волн длиной в один метр значение τ оказывается равным приблизительно двум часам.

Этот метод основывается на предположении, что значение $\sigma\tau$ достаточно велико; $\sigma\,(=kc)$ обозначает здесь частоту. В легкоподвижных жидкостях, как, например, вода, это условие выполняется для всех длин волн за исключением чрезвычайно малых. Если глубина жидкости меньше половины длины волны, то данный метод оказывается неприменимым по другой причине. Так как сопротивление скольжению по поверхности дна практически оказывается бесконечно большим, то рассеяние энергии нельзя больше вычислять так, как если бы движение было свободным от вихрей [2]).

Чтобы иллюстрировать образование и поддержание волн ветром, приведенные выше вычисления могут быть видоизменены. Очень мало вероятно, чтобы действие ветра даже на просто гармонический

---

[1]) Stokes, см. выше, стр. 723 и Papers III, 74. (По недосмотру в оригинальных вычислениях значение τ оказалось вдвое меньшим).

[2]) По той же причине метод оказывается неприложимым и к исследованию колебаний жидкостей, налегающих друг на друга (§ 231); ср. Harrison, Proc. Lond. Math. Soc. (2), VI, 396. VII, 107 (1908). „Модуль" затухания оказывается пропорциональным $\nu^{-1/2}$ вместо того, чтобы быть пропорциональным ν^{-1} (ср. § 364).

профиль волны могло бы представляться какой-нибудь простой формулой [1]). Однако, пренебрегая тангенциальным действием, которое, повидимому, имеет второстепенное значение, мы можем нормальное давление представить в виде ряда Фурье по синусам и косинусам кратных от $k(x-ct)$, и тогда будет очевидно, что только та составляющая будет входить в итог всех работ за полный период, которая имеет вид

$$\Delta p = C\cos k(x-ct). \tag{10}$$

Уравнение (6) тогда заменится уравнением

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\varrho k c^2 a^2\right) = \frac{1}{2}kc\alpha C - 2\mu k^3 c^2 a^2, \tag{11}$$

или

$$\frac{da}{dt} = \frac{C}{2\varrho c} - 2\nu k^2 a. \tag{12}$$

Амплитуда будет, следовательно, возрастать или уменьшаться в зависимости от того, будет ли

$$C \gtrless 4\mu k^2 c a. \tag{13}$$

В одной работе [2]) д-р Жефрей предполагает, что давление относительного ветра на перемещающийся профиль волны может быть грубо представлено выражением

$$\beta\varrho'(U-c)^2\frac{\partial\eta}{\partial x}, \tag{14}$$

где U — скорость ветра, ϱ' — плотность воздуха и β — числовой коэфициент, лежащий между 0 и 1 и, вероятно, меньший $^1/_2$. Это эквивалентно допущению

$$C = \beta\varrho'(U-c)^2 k a$$

в формуле (13). Если мы пренебрежем капиллярностью, то $c^2 = \frac{g}{k}$ и критерий принимает форму

$$(U-c)^2 c \gtrless \frac{4\nu\varrho g}{\beta\varrho'}. \tag{15}$$

При данном ветре наименьшее значение левой части будет при $c = \frac{1}{3}U$; таким образом, наименьший ветер, который может поддерживать волны при нашем допущении, будет иметь скорость

$$U = 3\left(\frac{\nu g\varrho}{\beta\varrho'}\right)^{1/3}. \tag{16}$$

Если мы примем $\nu = 0{,}0178$, $g = 981$, $\frac{\varrho'}{\varrho} = 0{,}00129$, $\beta = 0{,}3$, то получим $U = 107$, $\lambda = 8{,}1$ в сантиметрах и секундах. Некоторые наблюдения Жефрея подтверждают порядок величины наименьшей скорости ветра.

---

[1]) Я надеюсь, что будут опубликованы кратко результаты тех экспериментов, которые были начаты покойным Стантоном и которые относятся к рассматриваемому вопросу.

[2]) Jeffreys, Proc. Roy. Soc., A. CVII. 189 (1924); CX, 241 (1925).

§ 349. Непосредственное вычисление влияния вязкости на волны в воде можно выполнить следующим способом.

Если ось y направить вертикально вверх и предположить, что движение происходит в двух измерениях x, y, то будем иметь уравнения

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} - g + \nu \Delta v \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Эти уравнения удовлетворяются решениями вида

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gy, \tag{4}$$

если функции φ и ψ будут удовлетворять уравнениям

$$\Delta_1 \varphi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \Delta_1 \psi, \tag{5}$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Чтобы определить „нормальные колебания", являющиеся по отношению к x периодическими с заданной длиной волны $\frac{2\pi}{k}$, возьмем множитель, зависящий от времени, в виде e^{nt}, а множитель, зависящий от длины, в виде e^{ikx}. Тогда решения уравнений (5) будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= (Ae^{ky} + Be^{-ky})\, e^{ikx+nt}, \\ \psi &= (Ce^{my} + De^{-my})\, e^{ikx+nt}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где

$$m^2 = k^2 + \frac{n}{\nu}. \tag{7}$$

Условия на границе дадут уравнения, достаточные для определения характера различных форм колебаний и для определения соответствующих значений n.

В случае бесконечной глубины одно из этих условий требует, чтобы движение было конечным при $y = -\infty$. Если мы сначала

исключим те случаи, когда m имеет чисто мнимые значения, то необходимо будет положить $B=0$ и $D=0$, причем под m будем теперь подразумевать тот корень уравнения (7), действительная часть которого положительна. Тогда будем иметь

$$\left.\begin{aligned} u &= -(ikAe^{ky} + mCe^{my})\, e^{ikx+nt}, \\ v &= -(kAe^{ky} - ikCe^{my})\, e^{ikx+nt}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Если через η обозначить возвышение свободной поверхности, то должно иметь место соотношение $\frac{\partial \eta}{\partial t} = v$. Из этого уравнения, предполагая, что начало отсчета y находится на невозмущенном уровне, получим выражение для η

$$\eta = -\frac{k}{n}(A - iC)\, e^{ikx+nt}. \tag{9}$$

Если обозначить через T_1 поверхностное натяжение, то условия для напряжений на поверхности в первом приближении, очевидно, будут иметь вид

$$p_{yy} = T_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad p_{xy} = 0, \tag{10}$$

так как наклон поверхности жидкости к горизонтальной плоскости можно считать бесконечно малым.

Имеем

$$p_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad p_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right); \tag{11}$$

отсюда и из формул (4) и (9) следует, что на свободной поверхности должны иметь место равенства

$$\frac{p_{yy}}{\varrho} - T' \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (g + T'k^2)\eta + 2\nu \frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$= -\frac{1}{n}\left\{(n^2 + 2\nu k^2 n + gk + T'k^3) A - i(gk + T'k^3 + 2\nu kmn) C\right\}, \tag{12}$$

$$\frac{p_{xy}}{\varrho} = -\left\{2i\nu k^2 A + (n + 2\nu k^2) C\right\}, \tag{13}$$

где $T' = \frac{T_1}{\varrho}$, причем следует еще подразумевать множитель e^{ikx+nt}.

Подставляя выражения для p_{yy} и p_{xy} в условия (10) и исключая отношение $A : C$, получаем

$$(n + 2\nu k^2)^2 + gk + T'k^3 = 4\nu^2 k^3 m. \tag{14}$$

Если исключим m при помощи формулы (7), то придем к биквадратному уравнению относительно n, но допустимыми могут быть

при этом только те корни, которые дают положительное значение для действительной части левой половины уравнения (14) и вместе с тем оставляют положительной действительную часть m.

Полагая для краткости

$$\left.\begin{aligned} gk + T'k^3 &= \sigma^2, \quad \frac{\nu k^2}{\sigma} = \theta, \\ n + 2\nu k^2 &= x\sigma, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

приведем названное биквадратное уравнение к виду

$$(x^2+1)^2 = 16\theta^3(x-\theta). \tag{16}$$

Легко показать, что это уравнение всегда имеет два корня (оба комплексные), которые не подчиняются только что установленному ограничению, и два других допустимых корня, которые будут действительными или комплексными, смотря по величине отношения θ. Если обозначим через λ длину волны и через $c\left(=\frac{\sigma}{k}\right)$ скорость волн при отсутствии трения, то получим

$$\theta = \frac{\nu k}{c} = \frac{2\pi\nu}{c\lambda}. \tag{17}$$

Обозначая через c_m минимальную скорость волн (§ 267), получим для воды $\frac{2\pi\nu}{c_m} = 0{,}0048$ *см*, так что, если исключить очень малые длины волн, θ будет представлять малую величину. Пренебрегая квадратом θ, получим $x = \pm i$ и

$$n = -2\nu k^2 \pm i\sigma. \tag{18}$$

Условие $p_{xy} = 0$ показывает, что

$$\frac{C}{A} = -\frac{2i\nu k^2}{n + 2\nu k^2} = \mp\frac{2\nu k^2}{\sigma}; \tag{19}$$

эта величина при тех же условиях оказывается очень малой. Таким образом, приближенно движение можно считать невихревым с потенциалом скоростей

$$\varphi = Ae^{-2\nu k^2 t + ky + i(kx \pm \sigma t)}. \tag{20}$$

Полагая $a = \mp\frac{kA}{\sigma}$, можем приближенно написать уравнение (9) свободной поверхности, если возьмем действительную часть в виде

$$\eta = ae^{-2\nu k^2 t}\cos(kx \pm \sigma t). \tag{21}$$

Скорость волн есть $\frac{\sigma}{k}$ или $\left(\frac{g}{k} + T'k\right)^{1/2}$, как в § 267, и закон затухания совпадает с тем, который в предыдущем параграфе был получен другим способом [1]).

[1]) Аналогичные результаты получил Basset, Hydrodynamics, II, §§ 520—522 (1888), который исследовал также случай конечной глубины. Отсылаем также к работе Hough, см. выше, стр. 743, где исследуется случай водяного слоя, ограниченного двумя концентрическими сферами.

Чтобы ближе исследовать характер движения, возникающего под влиянием вязкости, вычислим значение ω вихря для произвольной точки жидкости. Это значение определяется формулой

$$\omega = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} = \Delta_1\psi = \frac{n}{\nu}\psi = \frac{n}{\nu}\, Ce^{my + ikx + nt}. \tag{22}$$

На основании формул (7) и (18) приближенно будем иметь

$$m = (1 \pm i)\beta, \text{ где } \beta = \left(\frac{\sigma}{2\nu}\right)^{1/2}.$$

Пользуясь теми же обозначениями, как и выше, получим

$$\omega = \mp 2\sigma k a e^{-2\nu k^2 t + \beta y} \cos\{kx \pm (\sigma t + \beta y)\}. \tag{23}$$

Это выражение очень быстро убывает в направлении от поверхности жидкости вниз в согласии с термической аналогией, указанной в § 328. В соответствии с колебательным характером движения знак вихря, распространяющегося от поверхности внутрь, будет то и дело меняться, так что колебания оказываются незаметными на глубине порядка $\frac{2\pi}{\beta}$, так же как колебания температуры на земной поверхности незаметны на глубине нескольких метров.

В случае очень вязкой жидкости, такой как патока или смола, θ может принимать большие значения даже и при значительной длине волны. Допустимые корни уравнения (16) при этом оба оказываются действительными. Один из них, очевидно, приближенно равен 2θ, а если мы продолжим приближение, то найдем

$$x = 2\theta - \frac{1}{2\theta} + \ldots;$$

отсюда на основании формул (15) следует, если пренебречь капиллярностью,

$$n = -\frac{g}{2k\nu}. \tag{24}$$

Другой действительный корень приближенно равен $1{,}09\theta$, и в этом случае получаем выражение

$$n = -0{,}91\,\nu k^2. \tag{25}$$

Первый из этих корней оказывается более важным. Он представляет медленное возвращение жидкости к состоянию равновесия, когда поверхность жидкости горизонтальна. Быстрота этого возвращения зависит от соотношения между силой тяжести (которая пропорциональна $g\varrho$) и вязкостью жидкости μ, так как влияние инерции оказывается при этом незаметным. Из соотношений (7) и (15) следует, что приближенно можно положить $m = k$, так что с некоторым приближением движение можно считать свободным от вихрей[1]).

[1]) Ср. Tait, Note on Ripples in a Viscous Liquid, Proc. R. S. Edin., XVII, 110 (1890) (Scientific Papers, Cambridge (1898–1900), II, 313).

Характер движения, отвечающего формуле (25), с другой стороны, зависит по своей продолжительности и от соотношения инерции (ϱ) и вязкости (μ), влияние же тяжести будет незначительным. Оно замирает очень быстро.

Приведенное здесь исследование дает самый главный вид нормальных колебаний с заданной длиной волны, допускаемый системой. Мы знаем a priori, что должно существовать еще бесконечное число других видов колебаний. Эти колебания соответствуют чисто мнимым значениям m и имеют менее продолжительный характер. Если вместо выражений (6) возьмем решения в виде

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= Ae^{ky}\, e^{ikx+nt}, \\ \psi &= (C\cos m'x + D\sin m'y)\, e^{ikx+nt} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

вместе с равенством

$$m'^2 = -k^2 - \frac{n}{\nu} \tag{27}$$

и проведем исследование тем же способом, как это было сделано выше, то найдем

$$\left.\begin{aligned} (n^2 + 2\nu k^2 n + gh + T'k^3)\, A - i\,(gk + T'k^3)\, C - 2i\nu km'nD = 0, \\ 2ik^2 A + (k^2 - m'^2)\, C = 0. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Каждое действительное значение m' оказывается в этом случае допустимым, и уравнения (28) определяют отношения $A:C:D$; соответствующее значение n есть

$$n = -\nu\,(k^2 + m'^2). \tag{29}$$

В каждой из этих форм движения плоскость xy оказывается разделенной в горизонтальном и вертикальном направлениях на ряды до известной степени прямоугольных ячеек; в каждой из этих ячеек жидкость совершает циркуляционное движение, постепенно приходя в состояние покоя, по мере того как первоначальное количество движения расходуется вследствие вязкости.

При помощи соответствующего наложения различных нормальных колебаний возможно представить затухание любого произвольного начального возмущения.

§ 350. Уравнения (12) и (13) предыдущего параграфа дадут нам возможность при помощи соответственно подобранных сил на поверхности более близко рассмотреть вопрос об образовании волн в воде и поддержании их против действия вязкости.

Если внешние силы p'_{yy}, p'_{xy}, будучи заданными, содержат множитель e^{ikx+nt}, где k и n имеют наперед заданные значения, то названные уравнения определяют значения A и C, а следовательно, на основании формулы (9) и значения η. Мы находим, таким образом,

$$\left.\begin{aligned} \frac{p'_{yy}}{g\varrho\eta} &= \frac{(n^2 + 2\nu k^2 n + \sigma^2)\, A - i\,(\sigma^2 + 2\nu kmn)\, C}{gk\,(A - iC)}, \\ \frac{p'_{xy}}{g\varrho\eta} &= \frac{n}{gk}\,\frac{2i\nu k^2 A + (n + 2\nu k^2)\, C}{A - iC}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где величина σ^2, как и выше, подставлена вместо $gk + T'k^3$.

Исследуем прежде всего действие чисто тангенциальной силы. Если положить $p'_{yy}=0$, то получим

$$\frac{p'_{xy}}{g\varrho\eta}=\frac{in}{gk}\,\frac{(n+2\nu k^2)^2-\sigma^2-4\nu^2k^3m}{n+2\nu k^2-2\nu km}. \tag{3}$$

По причинам, уже изложенным выше, мы будем считать значения $\frac{\nu k^2}{\sigma}$ и $\frac{\nu km}{\sigma}$ малыми; в этом случае возвышение будет больше всего тогда, когда приближенно будем иметь $n=\pm i\sigma$. Чтобы найти силу, необходимую для поддержания ряда волн заданной амплитуды, движущихся в положительном направлении оси x, положим $n=-i\sigma$. Это предположение дает приближенное равенство

$$\frac{p'_{xy}}{g\varrho\eta}=\frac{4\nu k\sigma}{g} \quad\text{или}\quad p'_{xy}=4\mu k\sigma\eta. \tag{4}$$

Сила, таким образом, на гребнях действует в направлении движения, а во впадинах в противоположном направлении, меняя свой знак в узлах. Сила, распределенная таким же образом, но с меньшей интенсивностью по отношению к высоте волны, чем это требует формула (4), только замедлила бы процесс затухания волн вследствие вязкости, но не устранила бы его полностью. Сила противоположного знака ускорила бы процесс затухания.

Случай чисто нормальной силы может быть исследован подобным же способом. Если $p'_{xy}=0$, то будем иметь соотношение

$$\frac{p'_{yy}}{g\varrho\eta}=\frac{(n+2\nu k^2)^2+\sigma^2-4\nu^2k^3m}{gk}. \tag{5}$$

Читатель легко может убедиться сам, что при отсутствии вязкости это равенство согласуется с результатами § 242. Если положить $n=-i\sigma$, то с тем же самым приближением, как и выше, получим

$$p'_{yy}=-4i\mu k\sigma\eta. \tag{6}$$

Следовательно, система волн

$$\eta=a\sin(kx-\sigma t) \tag{7}$$

может поддерживаться без возрастания или затухания давлением, распределенным по поверхности по закону

$$p'=\text{const.}+4\mu ka\sigma\cos(kx-\sigma t). \tag{8}$$

При этом оказывается, что давление имеет наибольшее значение на заднем склоне волны и наименьшее значение на переднем склоне [1]).

Если мы обратим внимание на фазы частиц жидкости, движущихся по круговым траекториям и лежащих в разных частях профиля волны,

---

[1]) Это согласуется с результатом, данным в конце § 242; впрочем, там диссипативные силы были другого рода.

то сразу же увидим, что рассмотренные выше силы, все равно, будут ли они нормальными или тангенциальными, действуют на все частицы, лежащие в данный момент на поверхности, в основном в направлении самого их движения.

Благодаря нерегулярному вихреобразующему характеру ветра, дующему над неровной поверхностью воды, трудно высказать какие-либо соображения, кроме самых общих, относительно того, каким образом ветер возбуждает и поддерживает волны. Нетрудно, однако, видеть, что ветер стремится вызвать поверхностные силы как раз рассмотренного выше рода. Если воздух движется в том же направлении, в каком движется фронт волн, но с большею скоростью, то на задних склонах волн будет наблюдаться избыток давления, а на выступающих гребнях будет преобладать тангенциальное усилие. Общее действие этих сил проявится в виде поверхностного течения, а остальная часть результирующей силы, будет ли она нормальной или тангенциальной, в основном будет иметь тот же характер, какой мы предположили выше. Таким образом, мы будем иметь некоторое стремление к увеличению амплитуды волн в такой, однако, степени, чтобы рассеяние могло полностью компенсироваться работой, произведенной поверхностными силами. Подобным же образом амплитуда волн, движущихся быстрее ветра или против ветра, будет все время уменьшаться [1]).

Выше (§ 267) было показано, что при совместном действии сил тяжести и капиллярных сил для волновой скорости имеется минимум, равный 23,2 *см/сек*, или 835 *м/час*. Поэтому скорость ветра должна во всяком случае превышать это значение, чтобы быть в состоянии поддерживать волны против действия вязкости [2]).

Приведем здесь некоторые наблюдения Скотта Рёсселя [3]).

„Допустим, что наблюдатель начинает наблюдения при полном безветрии, когда поверхность воды спокойна и отражает окружающие предметы, как зеркало. Это состояние поверхности не изменяется при легком дуновении воздуха; при скорости, меньшей, чем половина мили в час ($8^1/_2$ дюймов в секунду), гладкость отражающей поверхности не нарушается заметным образом. Можно хорошо видеть, что легкий порыв ветра, проносящийся вдоль поверхности, на одно мгновение коробит поверхность зеркала; но после того, как этот порыв замрет, поверхность становится такою же гладкою, как и прежде. Если же воздух движется со скоростью около одной мили в час, то поверхность воды оказывается уже не в состоянии отражать вполне ясно; проводя наблюдения в этих условиях, можно заметить, что уменьшение отражательной способности зависит от наличия той мелкой ряби поверхностного слоя, которую образуют волны *третьего порядка* (капиллярные волны)... Эта первая стадия возмущения отличается тою особенностью, что явление прекращается почти одновременно с прекращением возмущающей причины; поэтому место, защищенное от непосредственного действия ветра, остается спокойным, так как волны третьего порядка не

[1]) Ср. Airy, Tides and Waves, §§ 265—272; Stokes, Camb. Trans. IX, 62 (Papers, III, 74); Rayleigh, см. выше, стр. 328.
[2]) W. Thomson, см. выше стр. 574.
[3]) Russell, см. выше стр. 528.

обладают способностью самостоятельно двигаться на значительное расстояние, если только на них непрерывно не действует первоначальная возмущающая сила. Такое состояние указывает на действующую в данный момент силу, а не на ту силу, которая уже прекратила свое действие. До тех пор пока продолжается это состояние, оно придает воде темную окраску, которую моряки привыкли рассматривать как признак присутствия ветра и часто как предвестницу усиления ветра.

„Второе состояние волнового движения наблюдается тогда, когда скорость ветра, дующего над спокойной до того поверхностью воды, возрастает до двух миль в час. В этом случае начинается образование малых волн равномерно по всей поверхности воды; эти волны суть волны второго порядка, они покрывают поверхность воды с значительной закономерностью. Капиллярные волны размываются гребнями этих волн, но они еще ютятся во впадинах и на передних склонах волн. Правильность распределения по поверхности этих волн второго порядка есть нечто замечательное; волны начинаются с амплитуды приблизительно в один дюйм и с длины волны около двух дюймов; они делаются все больше по мере возрастания скорости или продолжительности ветра; примыкающие друг к другу волны соединяются в одну волну; гребни растут, и если ветер усиливается, волны делаются остроконечными и образуются, таким образом, волны *„второго порядка"* (гравитационные волны) [1]). Размеры этих волн все возрастают, одновременно с их размерами растет и та глубина, на которую распространяется это движение; все бо́льшая и бо́льшая часть поверхности покрывается волнами приблизительно одинаковой величины".

Эта цитата сохранена из наших прежних изданий по той причине, что она очень ярко описывает явления, но численные оценки, относящиеся к первому появлению волн, требуют некоторого уточнения. В частности, начальная длина волны несомненно слишком велика для того, чтобы волна могла подойти под название „капиллярной".

§ 351. Успокаивающее действие масла на волны, повидимому, происходит благодаря *изменениям* в поверхностном натяжении вследствие растяжений и сокращений загрязненной поверхности воды [2]). Поверхностное натяжение чистой воды оказывается больше, чем сумма натяжений на поверхностях раздела между маслом и воздухом и между маслом и водой, так что брошенная на поверхность воды капля масла постепенно растягивается в тонкую пленку. Когда слой масла достаточно тонок, скажем, когда его толщина не превосходит двух миллионных долей миллиметра, тогда оказывается, что натяжение не является больше постоянным; натяжение возрастает, когда толщина благодаря растяжению уменьшается, и наоборот. Из фиг. 51 на стр. 458 можно легко усмотреть, что в случае волн колебаний произвольная часть свободной поверхности будет иметь стремление по очереди сокращаться или растягиваться, смотря по тому, находится ли эта часть поверхности выше среднего уровня или ниже его. Возникающие благодаря этому изменения в натяжении вызывают изменяющееся по направлению касательное усилие, действующее на воду, благодаря чему скорость рассеяния энергии увеличивается.

---

[1]) Волна *„первого порядка"* Скотта Ёсселя была рассмотрена в § 252 под названием „одиночной волны".

[2]) Reynolds, On the Effect of Oil in destroying Waves on the Surface of Water, Brit. Ass. Rep. (1880) [Papers, I, 409]; Aitken, On the Effect of Oil on a Stormy Sea, Proc. Roy. Soc. Edin., XII, 56 (1883).

Выведенные выше формулы дают возможность до некоторой степени подтвердить эти рассуждения вычислением.

Прежде всего ясно, что действие квазиупругого слоя масла оказывается тем больше, чем короче длина волны; если длина волны достаточно мала, то поверхность практически нерастяжима, и горизонтальная составляющая скорости на поверхности благодаря этому будет равна нулю. Мы будем предполагать, что это условие выполняется.

Внутреннее движение воды определяется формулами (8) § 349, но определение постоянных в этом случае производится из других условий. Условие для нормального напряжения оказывается таким же, как в названном параграфе, и дает соотношение

$$(\alpha^2 + 2\nu k^2\alpha + \sigma^2)\, A - i\,(\sigma^2 + 2\nu k m\alpha)\, C = 0, \tag{1}$$

где

$$\sigma^2 = gk + T'k^2 \tag{2}$$

и T' относится уже к полному натяжению слоя масла. Вместо условия, что касательное напряжение должно обращаться в нуль, имеем теперь условие

$$u = 0 \quad \text{при} \quad y = 0; \tag{3}$$

это условие дает

$$ikA + mC = 0. \tag{4}$$

Исключая отношение $A : C$, получаем

$$m(\alpha^2 + \sigma^2) - k\sigma^2 = 0 \tag{5}$$

или, если исключим m посредством уравнения

$$m^2 = k^2 + \frac{\alpha}{\nu}, \tag{6}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\nu} + k^2\right)(\alpha^2 + \sigma^2)^2 - k^2\sigma^4 = 0. \tag{7}$$

Это уравнение имеет несущественный корень $\alpha = 0$, а другие корни оказываются также непригодными, так как, будучи подставлены в равенство (5), они дают для действительной части m отрицательные значения. Для малых значений выражения $\frac{\nu k^2}{\sigma}$ эти корни в первом приближении можно принять равными $\alpha = \pm i\sigma$, а во втором приближении равными

$$\alpha = \pm i\sigma - \frac{\nu^{1/2} k \sigma^{1/2}}{2\sqrt{2}}, \tag{8}$$

причем поправка на частоту σ колебаний отброшена. Модуль затухания оказывается при этом равным

$$\tau = \frac{2\sqrt{2}}{\nu^{1/2} k \sigma^{1/2}}. \tag{9}$$

Отношение этого значения к значению $\left(\frac{1}{2\nu k^2}\right)$, которое было получено в предположении, что поверхностное натяжение *постоянно*, равно $4\sqrt{2}\left(\frac{\nu k^2}{\sigma}\right)^{1/2}$, а эта величина по предположению мала [1]).

[1]) Это исследование сокращено по сравнению с тем, как оно было выполнено во втором издании этой книги.

§ 352. Задачи о периодическом движении в трех измерениях, относящиеся к *сферическим поверхностям*, можно исследовать в общем виде следующим образом.

Выразим прежде всего общее решение системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}(\Delta + h^2)\,u' &= 0,\\ (\Delta + h^2)\,v' &= 0,\\ (\Delta + h^2)\,w' &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

в сферических функциях. Эта задача представляет обобщение задачи, разобранной в § 335. Рассмотрим сначала только те случаи, для которых значения u', v', w' в начале координат конечны.

Решения естественно распадаются на два различных класса. Если обозначим через r радиус-вектор, то типичное решение первого класса представится в виде

$$\left.\begin{aligned}u' &= \psi_n(hr)\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\chi_n,\\ v' &= \psi_n(hr)\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\chi_n,\\ w' &= \psi_n(hr)\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\chi_n,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где χ_n — объемная сферическая функция положительной степени n, а ψ_n определяется как в (7) § 292. Легко показать, что выражения (3) действительно удовлетворяют уравнениям (1) и (2).

Следует отметить, что это решение дает зависимость

$$xu' + yv' + zw' = 0. \tag{4}$$

Типичное решение второго класса имеет вид

$$\left.\begin{aligned}u' &= (n+1)\psi_{n-1}(hr)\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} - n\psi_{n+1}(hr)\,h^2 r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}},\\ v' &= (n+1)\psi_{n-1}(hr)\frac{\partial \varphi_n}{\partial y} - n\psi_{n+1}(hr)\,h^2 r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}},\\ w' &= (n+1)\psi_{n-1}(hr)\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} - n\psi_{n+1}(hr)\,h^2 r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}},\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где φ_n — объемная сферическая функция положительной степени n. Коэфициенты при $\psi_{n-1}(hr)$ и $\psi_{n+1}(hr)$ в этих выражениях — объемные сферические функции степеней $n-1$ и $n+1$ соответственно, так что уравнения (1) удовлетворяются. Чтобы проверить, что уравнение (2) также будет удовлетворяться, воспользуемся формулами приведения § 292

$$\psi_n'(\zeta) = -\zeta\psi_{n+1}(\zeta), \tag{6}$$

$$\zeta\psi_n'(\zeta) + (2n+1)\psi_n(\zeta) = \psi_{n-1}(\zeta). \tag{7}$$

Формулы (5) на основании формул приведения (6) и (7) дают соотношение

$$xu' + yv' + zw' = n(n+1)(2n+1)\psi_n(hr)\varphi_n. \tag{8}$$

Полагая

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}, \\ \eta' &= \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}, \\ \zeta' &= \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

находим в случае решений первого класса

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= -\frac{1}{2n+1}\left\{(n+1)\psi_{n-1}(hr)\frac{\partial \chi_n}{\partial x} - n\psi_{n+1}(hr)\,h^2 r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\chi_n}{r^{2n+1}}\right\}, \\ \eta' &= -\frac{1}{2n+1}\left\{(n+1)\psi_{n-1}(hr)\frac{\partial \chi_n}{\partial y} - n\psi_{n+1}(hr)h^2 r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\chi_n}{r^{2n+1}}\right\}, \\ \zeta' &= -\frac{1}{2n+1}\left\{(n+1)\psi_{n-1}(hr)\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - n\psi_{n+1}(hr)h^2 r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\chi_n}{r^{2n+1}}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Эти выражения дают

$$x\xi' + y\eta' + z\zeta' = -n(n+1)\psi_n(hr)\chi_n. \tag{11}$$

В случае же решений второго класса будем иметь выражения

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= -(2n+1)h^2\psi_n(hr)\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi_n, \\ \eta' &= -(2n+1)h^2\psi_n(hr)\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi_n, \\ \zeta' &= -(2n+1)h^2\psi_n(hr)\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_n \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

и, следовательно, соотношение

$$x\xi' + y\eta' + z\zeta' = 0. \tag{13}$$

При выводе этих результатов были использованы уравнения (6) и следующие формулы, имеющие силу для каждой функции χ_n:

$$\left.\begin{aligned} x\chi_n &= \frac{r^2}{2n+1}\left(\frac{\partial \chi_n}{\partial x} - r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\chi_n}{r^{2n+1}}\right), \\ y\chi_n &= \frac{r^2}{2n+1}\left(\frac{\partial \chi_n}{\partial y} - r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\chi_n}{r^{2n+1}}\right), \\ z\chi_n &= \frac{r^2}{2n+1}\left(\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\chi_n}{r^{2n+1}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Чтобы показать, что мы получим *полное* решение системы уравнений (1) и (2), если сложим решения типа (3) и (5) для всех целых значений n и для всех возможных форм сферических функций φ_n и χ_n, заметим прежде всего, что названные уравнения имеют следствиями соотношения

$$(\Delta + h^2)(xu' + yv' + zw') = 0, \tag{15}$$

$$(\Delta + h^2)(x\xi' + y\eta' + z\zeta') = 0. \tag{16}$$

Из § 292 непосредственно следует, что полное решение обоих этих уравнений, при условии, что скорости в начале координат должны быть конечными, будет содержаться в равенствах (8) и (11), если мы обобщим эти равенства тем, что будем подразумевать в обеих частях знак суммирования $\sum$ по отношению к n. Если теперь значения выражений

$$xu' + yv' + zw'$$

и

$$x\xi' + y\eta' + z\zeta'$$

заданы внутри произвольной области, то значения u', v', w' вполне определяются из уравнения (2). В самом деле, если предположить, что существуют две различные системы значений u', v', w' и u'', v'', w'', удовлетворяющие всем заданным условиям, то, полагая

$$u_1 = u' - u'', \quad v_1 = v' - v'', \quad w_1 = w' - w'',$$

получим

$$\left.\begin{aligned} xu_1 + yv_1 + zw_1 &= 0, \\ x\xi_1 + y\eta_1 + z\zeta_1 &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Если под u_1, v_1, w_1 мы будем понимать составляющие скорости частиц жидкости, то первое из уравнений (17) показывает, что линии тока образуют замкнутые кривые, лежащие на системе концентрических сферических поверхностей. А тогда „циркуляция“ (§ 31) для каждой такой линии имеет конечное отличное от нуля значение. Но, с другой стороны, второе уравнение на основании § 32 показывает, что циркуляция для каждой замкнутой кривой, лежащей на одной из названных сферических поверхностей, равна нулю. Оба эти заключения только в том случае совместимы друг с другом, когда u_1, v_1, w_1 равны нулю.

Таким образом, в рассматриваемой здесь задаче всякий раз, когда функции φ_n и χ_n будут определены из соотношений (8) и (11), значения u', v', w' будут однозначно определяться из формул (3) и (5).

Если рассматриваемая область ограничена *изнутри* сферической поверхностью, то условие конечности при $r = 0$ не должно больше

иметь место, и мы имеем еще дополнительную систему решений, в которой в согласии с § 292 функции $\psi_n(\zeta)$ заменены через $\Psi_n(\zeta)$ [1]).

§ 353. Уравнения малых движений несжимаемой жидкости в случае отсутствия внешних сил имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta w, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Если мы предположим, что u, v, w все изменяются со временем по закону $e^{\alpha t}$, то уравнения (1) могут быть написаны в виде

$$\left.\begin{aligned} (\Delta + h^2)\, u &= \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ (\Delta + h^2)\, v &= \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ (\Delta + h^2)\, w &= \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где

$$h^2 = -\frac{\alpha}{\nu}. \tag{4}$$

Из уравнений (2) и (3) получаем

$$\Delta p = 0. \tag{5}$$

---

[1]) Здесь было использовано усовершенствование, введенное Ляво м, The Free and Forced Vibrations of an Elastic Spherical Schell containing a given Mass of Liquid, Proc. Lond. Math. Soc., XIX, 170 (1888).

Само исследование с некоторыми незначительными изменениями в обозначениях взято из следующих работ автора: On the Oscillations of a Viscous Spheroid, Proc. Lond. Math. Soc., XIII, 51 (1881); On the Vibrations of an Elastic Sphere, Proc. Lond. Math. Soc., XIII, 189 (1882); On the Motion of a Viscous Fluid contained in a Spherical Vessel, Proc. Lond. Math. Soc., XVI, 27 (1884). Рассматриваемый здесь метод с тех пор применялся автором этой книги и другими авторами к решению многих физических задач. Долго не замечали, что Клебш в своей работе, указанной на стр. 138, 641 Über die Reflexion an einer Kugelfläche, в основных чертах дал тот же метод. То обстоятельство, что Клебш (по собственному признанию) не достиг главной цели своего исследования, которая заключалась в том, чтобы рассмотреть одну задачу физической оптики независимо от предположений „геометрической" теории, вероятно способствовало тому, что эта работа несправедливо была оставлена без внимания. Аналитические трудности, которые Клебш считал непреодолимыми в случае, когда длина волны мала по отношению к большому кругу сферы, тождественны с теми, которые были указаны на стр. 653.

Поэтому равенства

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{h^2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ v &= \frac{1}{h^2\mu}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ w &= \frac{1}{h^2\mu}\frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

представляют частное решение уравнений (3) и (2), а общее решение имеет вид

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{h^2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + u', \\ v &= \frac{1}{h^2\mu}\frac{\partial p}{\partial y} + v' \\ w &= \frac{1}{h^2\mu}\frac{\partial p}{\partial z} + w', \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где величины u', v', w' определяются из условий, указанных в предыдущем параграфе.

Поэтому решения в сферических функциях, подчиненные условию быть конечными в начале координат, распадаются на два класса.

Решения первого класса имеют вид

$$p = \text{const.},$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \psi_n(hr)\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\chi_n, \\ v &= \psi_n(hr)\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\chi_n, \\ w &= \psi_n(hr)\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\chi_n, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

причем

$$xu + yv + zw = 0. \tag{9}$$

Решения второго класса имеют вид

$$p = p_n,$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{h^2\mu}\frac{\partial p_n}{\partial x} + (n+1)\psi_{n-1}(hr)\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} - n\psi_{n+1}(hr)\,h^2 r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}, \\ v &= \frac{1}{h^2\mu}\frac{\partial p_n}{\partial y} + (n+1)\psi_{n-1}(hr)\frac{\partial \varphi_n}{\partial y} - n\psi_{n+1}(hr)\,h^2 r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}, \\ w &= \frac{1}{h^2\mu}\frac{\partial p_n}{\partial z} + (n+1)\psi_{n-1}(hr)\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} - n\psi_{n+1}(hr)\,h^2 r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

причем

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 0, \tag{11}$$

где ξ, η, ζ обозначают составляющие вихря в точке (x, y, z). Символы χ_n, φ_n, p_n обозначают объемные сферические функции соответствующих степеней.

Составляющие напряжения на поверхности шара радиуса r определяются, как и в § 336, формулами

$$\left.\begin{aligned} rp_{rx} &= -xp+\mu\left(r\frac{\partial}{\partial r}-1\right)u+\mu\frac{\partial}{\partial x}(xu+yv+zw),\\ rp_{ry} &= -yp+\mu\left(r\frac{\partial}{\partial r}-1\right)v+\mu\frac{\partial}{\partial y}(xu+yv+zw),\\ rp_{rz} &= -zp+\mu\left(r\frac{\partial}{\partial r}-1\right)w+\mu\frac{\partial}{\partial z}(xu+yv+zw). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

В случае решений первого класса без труда находим

$$\left.\begin{aligned} rp_{rx} &= -xp+P_n\left(y\frac{\partial\chi_n}{\partial z}-z\frac{\partial\chi_n}{\partial y}\right),\\ rp_{ry} &= -yp+P_n\left(z\frac{\partial\chi_n}{\partial x}-x\frac{\partial\chi_n}{\partial z}\right),\\ rp_{rz} &= -zp+P_n\left(x\frac{\partial\chi_n}{\partial y}-y\frac{\partial\chi_n}{\partial x}\right), \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где

$$P_n=\mu\left\{hr\,\psi_n'(hr)+(n-1)\,\psi_n(hr)\right\}. \tag{14}$$

Чтобы получить соответствующие формулы для решений второго класса, заметим прежде всего, что члены с p_n дают

$$\begin{aligned} -xp_n+\frac{1}{h^2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}-1\right)\frac{\partial p_n}{\partial x}+\frac{n}{h^2}\frac{\partial p_n}{\partial x} &= \\ =\left\{\frac{2(n-1)}{h^2}-\frac{r^2}{2n+1}\right\}\frac{\partial p_n}{\partial x}+\frac{r^{2n+3}}{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{p_n}{r^{2n+1}}. \end{aligned} \tag{15}$$

Для остальных же членов получаем

$$\begin{aligned} \left(r\frac{\partial}{\partial r}-1\right)u' &= (n+1)\left\{hr\,\psi_{n-1}'(hr)+(n-2)\,\psi_{n-1}(hr)\right\}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}- \\ &-n\left\{hr\,\psi_{n+1}'(hr)+n\psi_{n+1}(hr)\right\}h^2r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}} \end{aligned} \tag{16}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(xu'+yv'+zw') &= n(n+1)(2n+1)\frac{\partial}{\partial x}\psi_n(hr)\,\varphi_n= \\ &=n(n+1)\left\{\psi_{n-1}(hr)\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}+\psi_{n+1}(hr)\,h^2r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}\right\}. \end{aligned} \tag{17}$$

При этом были произведены различные упрощения на основании формул (6), (7), (14) § 352. Из полученных формул и из соображений симметрии следует

$$\left.\begin{aligned} rp_{rx} &= A_n \frac{\partial p_n}{\partial x} + B_n r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_n}{r^{2n+1}} + C_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \\ &\quad + D_n r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}, \\ rp_{ry} &= A_n \frac{\partial p_n}{\partial y} + B_n r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{p_n}{r^{2n+1}} + C_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + \\ &\quad + D_n r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}, \\ rp_{rz} &= A_n \frac{\partial p_n}{\partial z} + B_n r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \frac{p_n}{r^{2n+1}} + C_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} + \\ &\quad + D_n r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{2(n-1)}{h^2} - \frac{r^2}{2n+1}, \\ B_n &= \frac{r^2}{2n+1}, \\ C_n &= \mu(n+1)\{hr\psi'_{n-1}(hr) + 2(n-1)\psi_{n-1}(hr)\}, \\ D_n &= -\mu n h^2 r^2 \{hr\psi'_{n+1}(hr) - \psi_{n+1}(hr)\}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

§ 354. После того как общие формулы нами установлены, применение их к частным задачам не представляет большого труда.

1. Рассмотрим прежде всего затухающее движение вязкой жидкости, заключающейся в неподвижном сосуде сферической формы.

Граничные условия имеют вид

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0 \tag{1}$$

для $r = a$, если a — радиус шара. В случае колебаний первого вида, выражающихся формулами (8) § 353, эти условия будут удовлетворены, если положить

$$\psi_n(ha) = 0. \tag{2}$$

Все корни этого уравнения действительны, и соответствующие значения модуля затухания τ определяются формулой

$$\tau = -\frac{1}{\alpha} = \frac{a^2}{\nu}(ha)^{-2}. \tag{3}$$

Тип колебаний при $n = 1$ имеет характер вращательного движения. Уравнение (2) принимает в этом случае вид

$$\operatorname{tg} ha = ha; \tag{4}$$

наименьший корень этого уравнения есть $ha = 4{,}493$. Отсюда следует

$$\tau = 0{,}0495 \frac{a^2}{\nu}.$$

В случае воды $\nu = 0{,}018$ *см*^{2}/*сек* и

$$\tau = 2{,}75\, a^2 \text{ сек.},$$

если a выражено в сантиметрах.

Формы колебаний второго класса определяются формулами (10) § 353. Условия на поверхности в этом случае равносильны тому, что должны в отдельности обращаться в нуль при $r = a$ следующие три функции от x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \frac{1}{h^2\mu}\frac{\partial p_n}{\partial x} + (n+1)\,\psi_{n-1}(ha)\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} - n\psi_{n+1}(ha)\,h^2 r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}, \\ \mathfrak{v} &= \frac{1}{h^2\mu}\frac{\partial p_n}{\partial y} + (n+1)\,\psi_{n-1}(ha)\frac{\partial \varphi_n}{\partial y} - n\psi_{n+1}(ha)\,h^2 r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}, \\ \mathfrak{w} &= \frac{1}{h^2\mu}\frac{\partial p_n}{\partial z} + (n+1)\,\psi_{n-1}(ha)\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} - n\psi_{n+1}(ha)\,h^2 r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Эти функции в том виде, как они здесь написаны, представляют собой суммы объемных сферических функций и должны поэтому удовлетворять уравнениям

$$\Delta\mathfrak{u} = 0, \quad \Delta\mathfrak{v} = 0, \quad \Delta\mathfrak{w} = 0 \quad (6)$$

и, так как они конечны внутри сферы и исчезают на границе, то на основании § 40 должны исчезать всюду. А тогда, составляя уравнение

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

получим

$$\psi_{n+1}(ha) = 0. \quad (8)$$

Так как далее

$$x\mathfrak{u} + y\mathfrak{v} + z\mathfrak{w} = 0 \quad (9)$$

для $r = a$, то будем иметь

$$\frac{1}{h^2\mu}\,p_n + (n+1)(2n+1)\,\psi_n(ha)\,\varphi_n = 0, \quad (10)$$

если воспользуемся формулами (6), (7) § 352. Уравнение (10) определяет отношение $p_n : \psi_n$ [1]).

В случае $n = 1$ уравнение (8) имеет вид

$$\operatorname{tg} ha = \frac{3ha}{3 - h^2a^2}; \quad (11)$$

наименьший корень этого уравнения есть $ha = 5{,}764$, откуда следует

$$\tau = 0{,}0301\,\frac{a^2}{\nu}.$$

По поводу метода комбинирования различных решений, имеющего целью представить затухание произвольного начального движения, мы отсылаем к названной на стр. 799 работе автора.

2. Рассмотрим теперь случай полой сферической оболочки, которая заполнена жидкостью и колеблется около вертикального диаметра [2]).

[1]) Другой способ применения граничных условий был дан в § 361.

[2]) Этот случай в первый раз был исследован, но другим способом, Гельмгольцем, см. выше, стр. 721.

Вынужденные колебания жидкости будут, очевидно, колебаниями первого класса при $n=1$. Если ось z совпадает с вертикальным диаметром оболочки, то находим, подставляя $\chi_1 = Cz$ в выражения (8) § 353,

$$u = C\psi_1(hr)\,y, \quad v = -C\psi_1(hr)\,x, \quad w = 0. \tag{12}$$

Если через ω обозначить угловую скорость оболочки, то граничное условие дает

$$C\psi_1(ha) = -\omega. \tag{13}$$

Оказывается, что все частицы, лежащие на поверхности сферы радиуса r, концентрической с граничной сферой, в каждый момент времени вращаются как целое с угловой скоростью

$$\frac{\psi_1(hr)}{\psi_1(ha)}\omega. \tag{14}$$

Если мы примем, что

$$\omega = \alpha e^{i(\sigma t+\varepsilon)}, \tag{15}$$

и положим

$$h^2 = -\frac{i\sigma}{\nu} = (1-i)^2\beta^2, \tag{16}$$

где, как в § 345,

$$\beta^2 = \frac{\sigma}{2\nu}, \tag{17}$$

то выражение (14) для угловой скорости при помощи формулы

$$\psi_1(\zeta) = \frac{\sin\zeta}{\zeta^2} - \frac{\cos\zeta}{\zeta^2} \tag{18}$$

может быть разложено на свои действительную и мнимую части.

Если вязкость настолько мала, что величина βa будет довольно значительна, то для точек вблизи поверхности получим, удерживая только важнейшие члены,

$$\psi_1(hr) = -\frac{1}{2h^2r^2}\,e^{(1+i)\beta r}, \tag{19}$$

и потому выражение (14) для угловой скорости будет иметь вид

$$\alpha\frac{a^2}{r^2}\,e^{-\beta(a-r)}\,e^{i\{\sigma t+\beta(r-a)+\varepsilon\}}; \tag{20}$$

действительная часть этого выражения есть

$$\alpha\frac{a^2}{r^2}\,e^{-\beta(a-r)}\cos\{\sigma t+\beta(r-a)+\varepsilon\}. \tag{21}$$

Как и в случае ламинарного движения (§ 345), это выражение представляет систему волн, движущихся от поверхности внутрь с быстро убывающей амплитудой.

Если, наоборот, вязкость очень велика, то значение βa будет мало, и выражение (14) приближенно может быть написано в виде

$$\omega\cos(\sigma t+\varepsilon), \tag{22}$$

если отбросить мнимую часть. Это показывает, что жидкость в данном случае движется вместе с шаром как одно твердое тело.

Составляющие напряжения на поверхности сферы определяются формулами (13) § 353. В рассматриваемом случае формулы эти приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned} p_{rx} &= -\frac{x}{a}\,p + \mu C h\psi_1'(ha)\,y, \\ p_{ry} &= -\frac{y}{a}\,p - \mu C h\psi_1'(ha)\,x, \\ p_{rz} &= -\frac{z}{a}\,p. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Если обозначить через δS элемент граничной поверхности, то эти силы на основании формулы (13) и формулы (6) § 352 дадут момент

$$N = -\iint (xp_{ry} - yp_{rx})\,dS = C\mu h\psi_1'(ha)\iint (x^2+y^2)\,dS = \\ = \frac{8}{3}\pi\mu a^3 \frac{h^2a^2\psi_2(ha)}{\psi_1(ha)}\omega. \tag{24}$$

В случае малой вязкости, когда значение βa велико, найдем, обращаясь к формулам (8) § 292 и полагая $ha = (1-i)\beta a$, что приближенно будет иметь место равенство

$$2i\psi_n(ha) = \left(-\frac{d}{\zeta\,d\zeta}\right)^n \frac{e^{i\zeta}}{\zeta}, \tag{25}$$

где $\zeta = (1-i)\beta a$. Это дает

$$N = -\frac{8}{3}\pi\mu a^3 (1+i)\,\beta a\omega. \tag{26}$$

Если мы примем во внимание в формуле (15) множитель, зависящий от времени, то выражение (26) будет равносильно следующему:

$$N = -\frac{4}{3}\pi\varrho a^5 (\beta a)^{-1}\frac{d\omega}{dt} - \frac{8}{3}\pi\mu a^3 (\beta a)\,\omega. \tag{27}$$

Первый член эквивалентен небольшому увеличению массы шара; второй же член дает силу трения, пропорциональную скорости.

§ 355. Общие формулы §§ 352, 353 можно далее применить также для того, чтобы исследовать влияние вязкости на малые колебания жидкой массы относительно своей сферической формы. Главный результат этого исследования можно, однако, получить более просто, применяя метод § 348.

Из § 262 получается, что если пренебречь вязкостью, то потенциал скоростей можно написать в виде

$$\varphi = A\frac{r^n}{a^n} S_n \cdot \cos(\sigma t + \varepsilon), \tag{1}$$

где S_n — поверхностная сферическая функция. Это дает для удвоенной кинетической энергии, заключенной внутри сферы радиуса r, выражение

$$\varrho\iint \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,r^2 d\widetilde{\omega} = \varrho n a\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1}\iint S_n^2\,d\widetilde{\omega}\cdot A^2\cos^2(\sigma t+\varepsilon), \tag{2}$$

где $\delta\widetilde{\omega}$ обозначает элемент телесного угла; отсюда для полной энергии получаем выражение

$$T = \frac{1}{2}\varrho n a\iint S_n^2\,d\widetilde{\omega}\cdot A^2\cos^2(\sigma t+\varepsilon). \tag{3}$$

Потенциальная энергия должна быть поэтому равна

$$V=\frac{1}{2}\varrho na\iint S_n^2\,d\widetilde{\omega}\cdot A^2\sin^2(\sigma t+\varepsilon), \tag{4}$$

и полная энергия получается равной

$$T+V=\frac{1}{2}\varrho na\iint S_n^2\,d\widetilde{\omega}\cdot A^2. \tag{5}$$

Далее на основании формулы (12) § 329 рассеяние энергии в сфере радиуса r в предположении, что движение свободно от вихрей, оказывается равным

$$\mu\iint\frac{\partial q^2}{\partial r}r^2\,d\widetilde{\omega}=\mu r^2\frac{\partial}{\partial r}\iint q^2\,d\widetilde{\omega}. \tag{6}$$

Заметим, что

$$r^2\iint q^2\,d\widetilde{\omega}=\frac{\partial}{\partial r}\iint\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r}r^2\,d\widetilde{\omega}, \tag{7}$$

так как каждая часть равенства после умножения на $\varrho\,\delta r$ представляет удвоенную кинетическую энергию жидкости, заключенной между двумя сферическими поверхностями радиусов r и $r+\delta r$. Поэтому из формулы (2) следует

$$\iint q^2\,d\widetilde{\omega}=\frac{n(2n+1)}{a^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n-2}\iint S_n^2\,d\widetilde{\omega}\cdot A^2\cos^2(\sigma t+\varepsilon).$$

Подставляя это выражение в формулу (6) и полагая $r=a$, получаем выражение для полного рассеяния

$$2F=2n(n-1)(2n+1)\frac{\mu}{a}\iint S_n^2\,d\widetilde{\omega}\cdot A^2\cos^2(\sigma t+\varepsilon); \tag{8}$$

среднее значение этой величины в единицу времени равно

$$2\overline{F}=n(n-1)(2n+1)\frac{\mu}{a}\iint S_n^2\,d\widetilde{\omega}\cdot A^2. \tag{9}$$

Если влияние вязкости представляется постепенным изменением коэфициента A, то должно быть

$$\frac{d}{dt}(T+V)=-2\overline{F}; \tag{10}$$

отсюда получаем, подставляя из формул (5) и (9),

$$\frac{dA}{dt}=-(n-1)(2n+1)\frac{\nu}{a^2}A. \tag{11}$$

Это показывает, что A пропорционально $e^{-\frac{t}{\tau}}$, где

$$\tau=\frac{1}{(n-1)(2n+1)}\frac{a^2}{\nu}. \tag{12}$$ [1])

Наиболее замечательным является то свойство этого результата, что вязкость такой величины, как она обычно встречается в природе, лишь в очень

[1]) Lamb, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XIII, 61, 64 (1881).

малой степени влияет на колебания шара, размеры которого не очень велики. Для шара такой величины, как Земля, и с коэфициентом кинематической вязкости таким, как у воды, получим в системе *CGS*

$$a=6{,}37\cdot 10^8,\quad \nu=0{,}0178,$$

и, следовательно, значение τ для гравитационных колебаний наибольшего периода ($n=2$) окажется равным

$$\tau=1{,}44\cdot 10^{11}\text{ лет.}$$

Даже при значении $\mu=1{,}3\cdot 10^8 g$, которое Дарвин[1]) нашел для вязкости смолы вблизи температуры замерзания, получим для модуля затухания самых медленных колебаний, полагая $g=980$, значение

$$\tau=180\text{ часам;}$$

при этом имеется в виду, что шар имеет размеры земли, плотность воды и вязкость смолы. Так как это значение все еще достаточно велико по сравнению с найденным в § 262 периодом колебаний в $1^h34'$, то получается, что такого рода шар колебался бы почти в точности так же, как идеальная жидкость.

Это исследование не содержит никаких специальных предположений относительно характера сил, которые обусловливают образование сферической формы. Поэтому полученный результат имеет место также в случае колебаний жидкого шарика под действием поверхностного натяжения граничной плеики. Модуль затухания для наиболее медленного колебания водяного шарика, выраженный в секундах, равен $\tau=11{,}2a^2$, если a измерено в сантиметрах.

Применяя тот же метод к пузырьку воздуха сферической формы, найдем

$$\tau=\frac{1}{(n+2)(2n+1)}\left|\frac{a^2}{\nu}\right., \tag{13}$$

где ν — коэфициент вязкости окружающей жидкости. Если эта жидкость — вода, то имеем для $n=2$ $\tau=2{,}8a^2$.

Формула (12) естественно включает в себя случай волн на плоской поверхности. Если значение n очень велико, то, полагая $\lambda=\frac{2\pi a}{n}$, находим в согласии с § 348

$$\tau=\frac{\lambda^2}{8\pi^2\nu}. \tag{14}$$

Все полученные результаты предполагают, что $2\pi\tau$ превосходит период в значительное число раз.

Прямо противоположный предельный случай, когда вязкость настолько велика, что движение становится апериодическим, можно исследовать методами §§ 335, 336, если пренебречь влиянием инерции. Для случая очень вязкого шара, который под действием тяготения асимптотически стремится возвратиться к сферической форме, получается

$$\tau=\frac{2(n+1)^2+1}{n}\,\frac{\nu}{ga}; \tag{15}$$

---

[1]) Darwin, On the Bodily Tides of Viscous and Semi-Elastic Spheroids...; Phil. Trans., CLXX, 1 (1878).

этот результат впервые был получен Дарвином (см. выше). В случае системы одинаковых параллельных волн на плоскости получается

$$\tau=\frac{4\pi\nu}{g\lambda}; \tag{16}$$

ср. (24) § 349.

§ 356. Задачи периодического движения жидкости в пространстве между двумя концентрическими сферами требуют для своего разбора еще дополнительных решений уравнений § 353, где p имеет вид p_{-n-1}, и функции $\psi_n(hr)$, заключающиеся в дополнительных функциях u', v', w', заменены через $\Psi_n(hr)$.

Если радиус второго шара бесконечно велик, то задача упрощается благодаря условию, что жидкость в бесконечности должна находиться в покое. В § 292 было показано, что функции $\psi_n(\zeta)$, $\Psi_n(\zeta)$ обе содержатся в выражении

$$\left(\frac{d}{\zeta\,d\zeta}\right)^n\frac{Ae^{i\zeta}+Be^{-i\zeta}}{\zeta}. \tag{1}$$

В рассматриваемом случае мы имеем $\zeta=hr$, где h определяется формулою (4) § 353; при этом мы будем предполагать ради определенности, что для h нужно взять такое значение, которое делает положительной действительную часть ih. Условие, что в бесконечности не должно быть движения, требует, чтобы $A=0$, и потому мы будем иметь дело только с функцией

$$f_n(\zeta)=\left(-\frac{d}{\zeta\,d\zeta}\right)^n\frac{e^{-i\zeta}}{\zeta}. \tag{2}$$

В названном параграфе было разъяснено, что рекуррентные формулы для $f_n(\zeta)$ остаются теми же, как и для функций $\psi_n(\zeta)$ и $\Psi_n(\zeta)$; поэтому общее решение уравнений малых периодических движений вязкой жидкости для области, лежащей вне шара, будет дано непосредственно формулами (8), (10) § 353, если написать p_{-n-1} вместо p_n и $f_n(hr)$ вместо $\psi_n(hr)$.

1. Вращательные колебания шара, окруженного неограниченной жидкой массой, содержатся в решениях первого класса при $n=1$. Полагая $\chi_1=Cz$, как в п. 2 § 354, находим

$$u=Cf_1(hr)\,y,\quad v=-Cf_1(hr)\,x,\quad w=0 \tag{3}$$

и условие

$$Cf_1(ha)=-\omega, \tag{4}$$

где a — радиус шара и ω — его угловая скорость, относительно которой мы предполагаем, что она задана формулой

$$\omega=\alpha e^{i(\sigma t+\varepsilon)}. \tag{5}$$

Подставляя $h=(1-i)\beta$, где $\beta=\left(\frac{\sigma}{2\nu}\right)^{1/2}$, находим, что частицы, лежащие на концентрической сфере радиуса r, движутся вместе как целое с угловой скоростью

$$\frac{f_1(hr)}{f_1(ha)}\,\omega=\frac{\alpha a^3}{r^3}\,\frac{1+ihr}{1+iha}\,e^{-\beta(r-a)}\cdot e^{i\{\sigma t-\beta(r-a)+\varepsilon\}}, \tag{6}$$

где значения $f_1(hr)$, $f_1(ha)$ подставлены из формул (15) § 292. Действительная часть выражения (6) есть

$$\frac{a}{1+2\beta a+2\beta^2a^2}\,\frac{a^3}{r^3}\,e^{-\beta(r-a)}\,[\,\{\,1+\beta(a+r)+2\beta^2ar\,\}\cos\{\,\sigma t-\beta(r-a)+\varepsilon\}-$$
$$-\beta(r-a)\sin\{\,\sigma t-\beta(r-a)+\varepsilon\,\}\,], \qquad (7)$$

что соответствует угловой скорости шара

$$\omega=\alpha\cos(\sigma t+\varepsilon). \qquad (8)$$

Момент пары, действующей на шар, находится таким же способом, как и в § 354:

$$N=-\frac{8}{3}\pi\mu a^3\omega\,\frac{h^3a^3f_1'(ha)}{f_1(ha)}=-\frac{8}{3}\pi\mu a^3\omega\,\frac{3+3iha-h^2a^2}{1+iha}. \qquad (9)$$

Подставляя $ha=(1-i)\,\beta a$ и разделяя действительную и мнимую части, находим

$$N=-\frac{8}{3}\pi\mu a^3\omega\,\frac{(3+6\beta a+6\beta^2a^2+2\beta^3a^3)+2i\beta^3a^3(1+\beta a)}{1+2\beta a+2\beta^2a^2}. \qquad (10)$$

Это выражение равносильно следующему:

$$N=-\frac{8}{3}\pi\varrho a^5\,\frac{1+\beta a}{1+2\beta a+2\beta^2a^2}\,\frac{d\omega}{dt}-\frac{8}{3}\pi\mu a^3\,\frac{3+6\beta a+6\beta^2a^2+2\beta^3a^3}{1+2\beta a+2\beta^2a^2}\,\omega. \qquad (11)$$

Истолковать этот результат можно так же, как и формулу (27) § 354. [1])

Когда период $\frac{2\pi}{\sigma}$ имеет бесконечно большое значение, то выражение (11) в согласии с формулой (11) § 334 приводится к виду

$$N=-8\pi\mu a^3\omega. \qquad (12)$$

2. Рассмотрим теперь случай сферического маятника, совершающего колебания в безграничной жидкой массе, которую мы будем считать несжимаемой. Поместим начало координат в среднем положении центра шара и расположим ось x в направлении колебаний.

Тогда условия, которые должны выполняться на границе, примут вид

$$u=U,\quad v=0,\quad w=0 \qquad (13)$$

при $r=a$ (радиус), если через U обозначим скорость шара. Очевидно, что мы должны будем использовать только решения второго класса. Формулы (10) § 353 при замене ψ_n через f_n дадут

$$xu+yv+zw=-\frac{n+1}{h^2\mu}\,p_{-n-1}+n(n+1)(2n+1)f_n(hr)\,\varphi_n. \qquad (14)$$

Из сравнения с формулами (13) видно, что это выражение должно содержать сферические функции только *первого порядка*. Поэтому принимаем $n=1$ и полагаем

$$p_{-2}=\frac{Ax}{r^3},\quad \varphi_1=Bx. \qquad (15)$$

---

[1]) Другую трактовку этой задачи дал Кирхгоф, Mechanik, лекция XXVI.

Отсюда следует

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{A}{h^2\mu}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3} + 2Bf_0(hr) - Bf_2(hr)\,h^2r^5\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3}, \\ v &= \frac{A}{h^2\mu}\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{r^3} - Bf_2(hr)\,h^2r^5\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{r^3}, \\ w &= \frac{A}{h^2\mu}\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{r^3} - Bf_2(hr)\,h^2r^5\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{r^3}. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Условия (13) будут, следовательно, выполнены, если положить

$$\left.\begin{aligned} A &= \mu h^4 a^5 f_2(ha)\,B, \\ 2f_0(ha)\,B &= U. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Движение, очевидно, будет симметричным относительно оси x и лучше всего может быть представлено при помощи функции тока. Из формул (14) и (16) находим

$$xu + yv + zw = -\frac{2A}{h^2\mu}\frac{x}{r^3} + 6Bf_1(hr)\,x =$$

$$= -\frac{Ux}{f_0(ha)}\left\{\frac{h^2a^5}{r^3}f_2(ha) - 3f_1(hr)\right\}, \qquad (18)$$

или, после подстановки из формул (15) § 292,

$$xu + yv + zw =$$

$$= \left\{\left(1 - \frac{3i}{ha} - \frac{3}{h^2a^2}\right)\frac{a^3}{r^3} + 3\left(\frac{i}{hr} + \frac{1}{h^2r^2}\right)\frac{a}{r}e^{-ih(r-a)}\right\}Ux. \qquad (19)$$

Полагая $x = r\cos\theta$, придем к следующему представлению функции тока ψ § 94

$$\psi = -\frac{1}{2}Ua^2\sin^2\theta\left\{\left(1 - \frac{3i}{ha} - \frac{3}{h^2a^2}\right)\frac{a}{r} + \frac{3}{ha}\left(i + \frac{1}{hr}\right)e^{-ih(r-a)}\right\}. \qquad (20)$$

Если положить

$$U = ae^{i(\sigma t + \varepsilon)} \qquad (21)$$

и вместе с тем $h = (1-i)\beta$, где $\beta = \left(\frac{\sigma}{2\nu}\right)^{1/2}$, то найдем, отбрасывая мнимую часть выражения (20),

$$\psi = -\frac{1}{2}a^2a^2\sin^2\theta\left[\left\{\left(1 + \frac{3}{2\beta a}\right)\cos(\sigma t + \varepsilon) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{3}{2\beta a}\left(1 + \frac{1}{\beta a}\right)\sin(\sigma t + \varepsilon)\right\}\frac{a}{r} - \frac{3}{2\beta a}\{\cos\{\sigma t - \beta(r-a) + \varepsilon\} +$$

$$\left. + \left(1 + \frac{1}{\beta r}\right)\sin\{\sigma t - \beta(r-a) + \varepsilon\}\}e^{-\beta(r-a)}\right]. \qquad (22)$$

На достаточно большом расстоянии от шара преобладающей оказывается та часть возмущения, которая выражена членами первой строки этой формулы. Эта часть свободна от вихрей и отличается только амплитудой и фазой от движения, производимого шаром, совершающим колебания в идеальной жидкости (§§ 92, 93). Члены во второй строке имеют ту же форму, с которой мы уже встречались при рассмотрении ламинарного движения (§ 345).

Чтобы вычислить результирующую силу X, действующую на шар, возвратимся назад к формулам (18) § 353. Если мы сделаем подстановку в эти

формулы из формул (15) и удержим в выражениях для p_{rx} только постоянные члены, так как сферические функции порядка, отличного от нуля, при интегрировании по поверхности шара дают нуль, то получим

$$X=\int\int p_{rx}dS=4\pi\left(B_{-2}\frac{A}{a}+C_1Ba^2\right), \tag{23}$$

где на основании формул (19) § 353

$$B_{-2}=-\frac{1}{3}a^2,\quad C_1=2\mu haf_0'(ha). \tag{24}$$

Поэтому на основании формул (17) получаем

$$\begin{aligned}X&=\frac{2\pi\mu Uha^2}{f_0(ha)}\left\{2f_0'(ha)-\frac{1}{3}h^3a^3f_2(ha)\right\}=\\&=2\pi\mu Uh^2a^3\left(\frac{1}{3}-\frac{3i}{ha}-\frac{3}{h^2a^2}\right)=\\&=-2\pi\varrho a^3\sigma U\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2\beta a}\right)i+\frac{3}{2\beta a}\left(1+\frac{1}{\beta a}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{25}$$

Это выражение равносильно следующему

$$X=-\frac{4}{3}\pi\varrho a^3\left(\frac{1}{2}+\frac{9}{4\beta a}\right)\frac{dU}{dt}-3\pi\varrho a^3\sigma\left(\frac{1}{\beta a}+\frac{1}{\beta^2a^2}\right)U. \tag{26}$$

Первый член дает поправку на инерцию шара. Эта поправка по величине составляет

$$\frac{1}{2}+\frac{9}{4\beta a}$$

часть вытесненной шаром жидкости, вместо $\frac{1}{2}$, как это имело место в случае идеальной жидкости (§ 92). Второй член дает результирующую силу трения, пропорциональную скорости [1]).

Если период $\frac{2\pi}{\sigma}$ сделается бесконечно большим, то формула (26) приведется к виду

$$X=-6\pi\varrho\nu aU, \tag{27}$$

так как $\beta^2=\frac{\sigma}{2\nu}$; этот результат находится в согласии с формулой (15) § 337.

§ 357. Прибавим еще несколько замечаний по поводу задач в двух измерениях, аналогичных задачам §§ 354, 356.

---

[1]) Эта задача в первый раз была решена Стоксом, но несколько другим способом, см. выше, стр. 726. Другие способы решения можно найти у О. Е. Мейера, Über die pendelnde Bewegung einer Kugel unter dem Einflusse der inneren Reibung des umgebenden Mediums, Crelle, LXXIII (1871). Kirchhoff, Mechanik, XXVI.

Более общий случай, когда скорость шара есть произвольная функция времени, был исследован Basset, On the Motion of a Sphere in a Viscous Liquid, Phil. Trans., CLXXIX, 43 (1887); Hydrodynamics, гл. XXII. Вопрос этот получил упрощение в новых работах Picciati и Boggio; см. Basset, Quart. J. of Math. XLI, 369 (1910) и Rayleigh, см. выше, стр. 741. См. также Havelock, Phil Mag. (6), XLII, 628 (1921).

Если пренебречь членами второго порядка, то уравнения примут вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta_1 u,\\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta_1 v,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Как и в § 349, эти уравнения удовлетворятся решениями вида

$$\left.\begin{aligned}u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y},\\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и

$$p = \varrho\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{3}$$

если предположить, что

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1\varphi &= 0,\\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \nu\Delta_1\psi.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

1. Таким способом можно найти, что затухающее движение жидкости, заключенной в неподвижном круговом цилиндре, при произвольных начальных условиях может быть представлено в полярных координатах комбинацией функций

$$\Psi = \left\{\frac{J_s(kr)}{J_s(ka)} - \frac{r^s}{a^s}\right\}(A\cos s\theta + B\sin s\theta)\,e^{-\nu k^2 t}, \tag{5}$$

если Ψ — функция тока § 59. Условие, что нормальная составляющая скорости на граничной поверхности ($r=a$) равна нулю, здесь уже выполнено; касательная же составляющая скорости $\frac{\partial \Psi}{\partial r}$ будет исчезать в том случае, когда

$$ka\,J_s'(ka) - sJ_s(ka) = 0;$$

это условие на основании формулы (5) § 303 равносильно условию

$$J_{s+1}(ka) = 0. \tag{6}$$

Последнее уравнение определяет допустимые значения для k и вместе с тем значения для модуля затухания $\tau = \frac{1}{\nu k^2}$ [1]).

В случае симметрии имеем $s=0$. Наименьший корень функции $J_1(ka)$ есть $ka = 3{,}832$; это дает

$$\tau = 0{,}0681\,\frac{a^2}{\nu}.$$

---

[1]) Этот результат взят из работы автора, On the Motion of a Viscous Fluid contained in a Spherical Vessel, упомянутой на стр. 799. Случай $s=0$ разобрал Stearn, On some Cases of the Varying Motion of a Viscous Fluid, Quart. Journ. Math., XVII, 90 (1880).

Подставляя в случае воды значение $\nu = 0{,}014$ *CGS*, находим $\tau = 4{,}9a^2$ сек., где a выражено в сантиметрах.

Для $s = 1$ наименьший корень есть $ka = 5{,}135$; отсюда следует

$$\tau = 0{,}0379\,\frac{a^2}{\nu}$$

или, для воды, $\tau = 2{,}7a^2$.

2. В случае периодического движения с множителем, зависящим от времени, в виде $e^{i\sigma t}$ будем иметь на основании формул (4)

$$(\Delta_1 + h^2)\,\psi = 0, \tag{7}$$

если

$$h^2 = -\frac{i\sigma}{\nu} \quad \text{или} \quad h = (1-i)\,\beta, \quad \beta = \left(\frac{\sigma}{2\nu}\right)^{1/2}. \tag{8}$$

Решение уравнения (7) в полярных координатах содержит функции Бесселя с комплексным аргументом $(1-i)\beta r$. Выбор подходящих функций в различных случаях и приведение результатов к практически удобному виду наталкивается на некоторые трудности [1]). Ввиду того что необходимые для этого вычисления очень длинны, а задачи эти представляют все же меньший интерес по сравнению с теми, которые относятся к границам сферической формы, мы ограничимся здесь тем, что отошлем читателя к оригинальным работам Стокса [2]).

Вязкость в газах.

§ 358. Если принять во внимание изменения плотности, то наиболее общее предположение относительно „среднего давления" p, которое мы можем сделать в случае идеального газа, не впадая в противоречие с ранее сделанными гипотезами, можно выразить в виде

$$p = R\varrho\theta - \mu'(a+b+c), \tag{1}$$

где θ — абсолютная температура, R — постоянная, зависящая от природы газа, и μ' — второй коэфициент вязкости [3]). Мы не имеем, однако, никаких опытных данных для точного определения значения μ'; согласно кинетической теории газов должно было бы иметь место равенство $\mu' = 0$ [4]); мы для простоты и примем это предположение. Если же мы захотим удержать в формулах μ', то нужные для этого исправления легко будет сделать.

---

[1]) Исследования § 194 требуют некоторого пересмотра в случае, когда аргумент *комплексный*. Формулы (4), (5), (6) сохраняют свою силу, если только действительная часть аргумента положительна [что можно обеспечить выбором значения h в уравнении (8)], но диференцирование расположенных по иисходящим и восходящим степеням рядов (13) и (20) представляет некоторые особенности. В частности, результаты, которые получаются от приравнивания соответственно действительных и мнимых частей, требуют проверки.

[2]) Stokes, см. выше, стр. 726. См. также Watson, Theory of Bessel Functions, стр. 201.

[3]) Ср. Kirchhoff, Vorlesungen über die Theorie der Wärme, Leipzig, (1894), лекция 11. Stokes (Papers, III, 136).

[4]) Maxwell, см. выше, стр. 720.

В § 329 было показано, что работа, произведенная в промежутке времени δt внутренними силами, которые действуют на грани элемента $\delta x\,\delta y\,\delta z$ и изменяют как его объем, так и форму, равна

$$-p(a+b+c)\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,\delta t+\Phi\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,\delta t, \tag{2}$$

где

$$\Phi=-\frac{2}{3}\mu(a+b+c)^2+\mu(2a^2+2b^2+2c^2+f^2+g^2+h^2). \tag{3}$$

Далее на основании уравнения (3) § 7 имеем

$$a+b+c=-\frac{1}{\varrho}\frac{D\varrho}{Dt}=\varrho\frac{D\mathrm{v}}{Dt} \tag{4}$$

где v — объем единицы массы.

Отсюда, обозначая через E внутреннюю энергию единицы массы и через $\frac{DQ}{Dt}$ количество тепла, которое жидкая частица получает в единицу времени от соседних частиц благодаря теплопроводности или излучению, имеем следующее уравнение энергии единицы объема

$$\frac{DE}{Dt}\varrho=-p\frac{D\mathrm{v}}{Dt}\varrho+\Phi+\frac{DQ}{Dt}. \tag{5}$$

Количество тепла в единицу времени, которое в действительности должно быть получено, чтобы вызвать соответствующие изменения плотности и температуры, по законам термодинамики должно быть равно

$$\frac{DQ'}{Dt}=p\frac{D\mathrm{v}}{Dt}\varrho+\frac{DE}{Dt}\varrho. \tag{6}$$

Из сравнения формул (5) и (6) получаем

$$\frac{DQ'}{Dt}=\frac{DQ}{Dt}+\Phi. \tag{7}$$

Таким образом, кроме приращения тепла вследствие теплопроводности и пр., в частице возбуждается еще тепло в количестве Φ на единицу объема и единицу времени, конечно, за счет других форм энергии.

Если выражение (3) напишем в виде

$$\Phi=\frac{2}{3}\mu\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}+\mu(f^2+g^2+h^2), \tag{8}$$

то увидим, что Φ существенно положительно и что, кроме того, Φ может обратиться в нуль только в том случае, когда имеем

$$a=b=c \quad \text{и} \quad f=g=h=0,$$

т. е., когда деформация жидкости представляет одинаковое по всем направлениям расширение или сжатие. Заключение, что в этом случае не происходит никакого рассеяния энергии, основывается естественно на том предположении, что μ' в формуле (1) равно нулю.

§ 359. Сделаем теперь несколько замечаний о влиянии вязкости на звуковые волны. Чтобы быть последовательным, необходимо принять также одновременно во внимание и теплопроводность, влияние которой выражается величинами того же порядка [1]); однако сначала мы по примеру Стокса [2]) исследуем влияние одной только вязкости.

В случае плоских волн в неограниченной в поперечном направлении среде будем иметь на основании уравнений (2), (3) § 328, предполагая, что ось x имеет направление распространения волн, и пренебрегая членами второго порядка в выражении для скорости,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3}\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Обозначая через s коэфициент уплотнения, получим, как в § 277, уравнение непрерывности

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{2}$$

а уравнение физического состояния можно написать, пренебрегая влиянием теплопроводности, в виде

$$p = p_0 + c^2\varrho_0 s, \tag{3}$$

где c обозначает скорость звука при отсутствии вязкости. Исключая p и s, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4}{3}\nu\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t}. \tag{4}$$

Чтобы применить это уравнение к случаю вынужденных волн, предположим, что в плоскости $x = 0$ поддерживается колебание

$$u = ae^{i\sigma t}. \tag{5}$$

Если решение уравнения (4) взять в виде

$$u = ae^{i\sigma t + mx}, \tag{6}$$

то найдем

$$m^2\left(c^2 + \frac{4}{3}i\nu\sigma\right) = -\sigma^2; \tag{7}$$

отсюда следует

$$m = \pm\frac{i\sigma}{c}\left(1 - \frac{4}{3}i\frac{\nu\sigma}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{8}$$

Пренебрегая квадратом величины $\frac{\nu\sigma}{c^2}$ и имея в виду нижний знак, получим из последнего равенства

$$m = -\frac{i\sigma}{c} - \frac{3}{2}\frac{\nu\sigma^2}{c^3}. \tag{9}$$

---

[1]) Это было отмечено в первый раз Кирхгофом, Über den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung, Pogg. Ann., CXXXIV, 177 (1868) (Ges. Abh., I, 540).

[2]) Stokes, см. выше, стр. 33 (Papers, I, 100).

Если мы подставим это выражение в равенство (6) и удержим только действительную часть, то получим для волн, движущихся в положительном направлении оси x,

$$u = ae^{-\frac{x}{l}} \cos\sigma\left(t - \frac{x}{c}\right), \tag{10}$$

где

$$l = \frac{3}{2}\frac{c^3}{\nu\sigma^2}. \tag{11}$$

Амплитуда, таким образом, убывает по мере движения волн как показательная функция, ее убывание происходит тем быстрее, чем больше оказывается значение σ. Скорость волн, если пренебречь членами, порядок которых по отношению к $\frac{\nu\sigma}{c^2}$ выше первого, не подвергается влиянию вязкости.

Линейная величина l дает расстояние, на котором амплитуда убывает до $\frac{1}{l}$ своего первоначального значения. Обозначая через λ длину волны $\left(\frac{2\pi c}{\sigma}\right)$, получим

$$\frac{2}{3}\frac{\nu\sigma}{c^2} = \frac{\lambda}{2\pi l}; \tag{12}$$

в вычислениях, которые произведены выше, предполагается, что эта дробь — малая величина.

В случае воздушных волн мы имеем $c = 3{,}32 \cdot 10^4$, $\nu = 0{,}132$ *CGS* и потому

$$\frac{\nu\sigma}{c^2} = \frac{2\pi\nu}{\lambda c} = 2{,}50\lambda^{-1} \cdot 10^{-5}, \quad l = 9{,}56\lambda^2 \cdot 10^3,$$

где λ выражено в сантиметрах. Влияние на амплитуду оказывается совершенно незначительным, за исключением очень малых длин волн.

Чтобы определить затухание *свободных* волн с произвольной заданной наперед длиной волны $\frac{2\pi}{k}$, положим

$$u = ae^{ikx+nt}; \tag{13}$$

подставляя это выражение в уравнение (4), получим

$$n^2 + \frac{4}{3}\nu k^2 n = -k^2c^2. \tag{14}$$

Если пренебречь квадратом величины $\frac{\nu k}{c}$, то получится

$$n = -\frac{2}{3}\nu k^2 \pm ikc. \tag{15}$$

Отсюда, удерживая действительную часть, будем иметь

$$u = ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos k(x \pm ct), \tag{16}$$

где

$$\tau = \frac{3}{2\nu k^2}. \tag{17}$$

§ 360. Если принять во внимание теплопроводность, то уравнение движения (1) и уравнение непрерывности (2) останутся теми же, физические же соотношения должны быть изменены.

Количество теплоты, необходимое для того, чтобы вызвать малые изменения объема v и (абсолютной) температуры θ единицы массы газа, определяется формулой

$$\delta Q = p\,\delta v + C_v\,\delta\theta = \left\{(\gamma - 1)\frac{\theta_0}{v_0}\,\delta v + \delta\theta\right\} C_v, \tag{18}$$

где C_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме. Умножая это выражение на $\varrho_0\,\delta x$, массу единицы площади тонкого слоя, и разделяя на ∂t, мы получим то количество теплоты, которое должно подводиться к слою в единицу времени. Приравнивая это количество теплоты величине $k\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\,\delta x$, где k — коэфициент теплопроводности, получим [1])

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + (\gamma - 1)\frac{\theta_0}{v_0}\frac{\partial v}{\partial t} = \nu'\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}, \tag{19}$$

причем

$$\nu' = \frac{k}{\varrho_0 C_v}, \tag{20}$$

т. е. ν' — „термометрическая“ теплопроводность [2]).

Соотношение между p, ϱ, θ есть

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho\theta}{\varrho_0\theta_0}. \tag{21}$$

Полагая

$$\varrho = \varrho_0(1 + s), \quad \theta = \theta_0(1 + \eta) \tag{22}$$

и пренебрегая членами второго порядка относительно s и η, уравнения (19) и (21) можно привести к виду

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} - (\gamma - 1)\frac{\partial s}{\partial t} = \nu'\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \tag{23}$$

и

$$p = p_0(1 + s + \eta). \tag{24}$$

Подставляя далее значение p в уравнение (1), получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -b^2\frac{\partial s}{\partial x} - b^2\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{4}{3}\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{25}$$

[1]) Теплота, образующаяся благодаря вязкости (как это разъяснено в § 358), здесь не принимается во внимание, так как она выражается малыми членами второго порядка.

[2]) Maxwell, Theory of Heat, гл. XVIII. Если бы излучение было значительным, то в уравнение (19) вошел бы еще член, пропорциональный $\theta - \theta_0$. Ср. Stokes, Phil. Mag. (5), I, 305 (1851) (Papers ,III, 142); см. также Rayleigh, Theory of Sound, § 247.

где $b=\left(\frac{p_0}{\varrho_0}\right)^{1/2}$ — выражение для скорости звука, данное Ньютоном (§ 278).

После исключения s посредством формулы (2) находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b^2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\,\partial t}+\frac{4}{3}\nu\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t} \tag{26}$$

и

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+(\gamma-1)\frac{\partial u}{\partial x}=\nu'\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\,. \tag{27}$$

Мы получили, таким образом, систему двух совместных дифференциальных уравнений для определения u и η.

Предполагая теперь, что величины u и η обе пропорциональны выражению

$$e^{i\sigma t+mx},$$

получим

$$\left.\begin{aligned}(\sigma^2+m^2b^2+\tfrac{4}{3}i\nu\sigma m^2)\,u-i\sigma m b^2\eta=0,\\ (\gamma-1)\,mu+(i\sigma-\nu' m^2)\,\eta=0;\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

отсюда следует

$$\sigma^3+\left\{c^2\sigma+\left(\frac{4}{3}\nu+\nu'\right)i\sigma^2\right\}m^2+\nu'\left(ib^2-\frac{4}{3}\nu\sigma\right)m^4=0, \tag{29}$$

если подставить c^2 вместо γb^2.

Мы убеждаемся, что $m=\pm\frac{i\sigma}{c}$ для $\nu=0$, $\nu'=0$. Точно так же $m=\pm\frac{i\sigma}{b}$ для $\nu=0$, $\nu'=\infty$, так как условия в данном случае практически будут изотермическими. Далее, если значение σ очень велико, в то время как $\nu=0$, мы снова будем иметь $m=\pm\frac{i\sigma}{c}$ независимо от значения ν'; ср. § 278.

Согласно кинетической теории газов Максвелла имеем

$$\nu'=\frac{5}{2}\nu, \tag{30}$$

но в дальнейшем мы будем только предполагать, что ν' и ν суть величины одного и того же порядка.

Мы видели, что отношение $\frac{\nu\sigma}{c^2}$ в случае обыкновенных звуковых волн мало. Корни полученного выше квадратного уравнения относительно m^2 могут быть поэтому приближенно выражены в виде

$$m_1^2=-\frac{\sigma^2}{c^2}\,,\quad m_2^2=\frac{i\sigma c^2}{\nu' b^2}=\frac{i\gamma\sigma}{\nu'}\,. \tag{31}$$

Более точное значение первого из этих корней есть

$$m_1^2=-\frac{\sigma^2}{c^2}\left[1-\left\{\frac{4}{3}\nu+\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)\nu'\right\}\frac{i\sigma}{c^2}\right]; \tag{32}$$

отсюда следует

$$m_1 = \pm\left(\frac{i\sigma}{c} + \frac{1}{l}\right), \tag{33}$$

где

$$l = \frac{c^3}{\left\{\frac{2}{3}\nu + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)\nu'\right\}\sigma^2}. \tag{34}$$

Для полного решения находим при $x > 0$ приближенные значения

$$\left.\begin{aligned} u &= A_1 e^{i\sigma t + m_1 x} + A_2 e^{i\sigma t + m_2 x}, \\ \eta &= \frac{\gamma - 1}{c} A_1 e^{i\sigma t + m_1 x} + \frac{m_2}{i\sigma} A_2 e^{i\sigma t + m_2 x}, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

где значения m_1 и m_2 выбраны так, что их действительные части отрицательны. Произвольные постоянные A_1 и A_2 дают возможность представить заданные наперед периодические изменения u и η в плоскости $x = 0$.

Для обыкновенных частот отношение $\frac{m_2 c}{\sigma}$ велико, и потому отношение $\frac{A_2}{A_1}$, как оно определено на основании термических условий в плоскости $x = 0$, обычно оказывается малым. Второй член в выражении для u в этом случае даже вблизи от начала координат не представляется достаточно важным, а для довольно больших значений x он и в любом случае оказывается совершенно несущественным по сравнению с первым членом. Назначение этого члена заключается в том, чтобы представить чисто местное влияние периодического источника тепла, находящегося в начале координат.

Если возьмем для ν' значение (30) и положим $\frac{c^2}{b^2} = \gamma = 1{,}40$, то из формулы (34) будет видно, что значение l вследствие теплопроводности уменьшится в отношении 0,65.

Исследования этого параграфа в существенном были выполнены Кирхгофом [1]), который рассмотрел также влияние расходящихся сферических волн и распространение звуковых волн в узкой трубке. Последняя задача стоит в связи с хорошо известными опытами Кундта.

§ 360a. Ранее уже было сделано замечание о влиянии вязкости в теории звуковых волн установившегося типа, § 284. Если принять в расчет только вязкость, а теплопроводностью пренебречь, то теория становится довольно простой, и о ней следует сказать несколько слов ради применения (только один раз в этой книге) принципов, изложенных в § 358.

[1]) Kirchhoff, см. выше, стр. 815. Эти исследования воспроизведены в книге Рэлея, Theory of Sound, 2-е изд., §§ 348—350.

Будем рассматривать установившееся движение, тогда уравнение движения принимает вид

$$\varrho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3}\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Полагая, как и в § 284, $\varrho u = m$ или $u = mv$, где v — объем единицы массы, можно это уравнение представить в виде

$$m^2 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3}\mu m \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Отсюда имеем

$$p + m^2 v = p_0 + m^2 v_0 + \frac{4}{3}\mu m \frac{\partial v}{\partial x} = p_1 + m^2 v_1 + \frac{4}{3}\mu m \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (3)$$

так как $\frac{\partial v}{\partial x}$ обращается в нуль на границах волны.

Следовательно, если Q — теплота, поглощаемая единицей массы для перехода к какому-либо состоянию, то будем иметь согласно (12) § 284

$$(\gamma - 1)\frac{\partial Q}{\partial x} = v \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial v}{\partial x} =$$
$$= \gamma \left\{p_0 + m^2 v_0 - m^2 v + \frac{4}{3}\mu m \frac{\partial v}{\partial x}\right\} \frac{\partial v}{\partial x} +$$
$$+ v \left\{-m^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{4}{3}\mu m \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}. \quad (4)$$

Теплота, образующаяся благодаря вязкости в единицу времени на единицу массы, с одной стороны, согласно § 358, будет равна $\frac{4}{3}\mu v \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$. С другой, — она должна быть равна $u \frac{\partial Q}{\partial x}$, а потому имеем

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{4}{3}\mu m \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2, \quad (5)$$

так как $u = mv$. Подставляя в (4), найдем

$$\gamma (p_0 + m^2 v_0) \frac{\partial v}{\partial x} - (\gamma + 1) m^2 v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{4}{3}\mu m \frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0. \quad (6)$$

Интегрируя это в пределах, для которых $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, и разделив на $v_1 - v_0$, будем иметь

$$\gamma (p_0 + m^2 v_0) = \frac{1}{2}(\gamma + 1) m^2 (v_0 + v_1). \quad (7)$$

Следовательно, уравнение (6) можно написать в виде:

$$\frac{1}{2}(\gamma + 1) m (v_0 + u_1 - v) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{4}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0. \quad (8)$$

Первый интеграл этого уравнения, выбранный так, чтобы для $v=v_0$ иметь $\frac{dv}{dx}=0$, представляется в виде

$$\frac{4}{3}\mu v\frac{dv}{dx}+\frac{1}{2}(\gamma+1)(v-v_1)(v_0-v)=0. \tag{9}$$

Отсюда с точностью до аддитивной постоянной будем иметь

$$x=\frac{8\mu}{3(\gamma+1)m(v_0-v_1)}\{v_1\ln(v-v_1)-v_0\ln(v_0-v)\}, \tag{10}$$

где m определяется из (7). Здесь уже нет ограничений на величину отношения $\frac{v_0}{v_1}$ [1]).

Если в (10) мы положим $v=av_0+\beta v_1$, где $\alpha+\beta=1$, то значение x отличается только постоянной от следующего

$$\frac{8\mu}{3(\gamma+1)m}\cdot\frac{v_1\ln\alpha-v_0\ln\beta}{v_0-v_1}. \tag{11}$$

Например, если положить $\alpha=0{,}9$, $\beta=0{,}1$, а затем $\alpha=0{,}1$, $\beta=0{,}9$, то разность между двумя значениями x будет

$$\frac{8\mu}{3(\gamma+1)m}\cdot\frac{v_0+v_1}{v_0-v_1}\ln 9. \tag{12}$$

Так, если $v_0=2v_1$, то из (7) и из других числовых данных в конце § 284 найдем $m=68{,}3$. Полагая $\mu=0{,}00018$, будем иметь значение выражения (12) равным $1{,}98\cdot10^{-5}$ *см*.

§ 360b. Рэлей [2]) применил принципы § 360 для объяснения поглощения звука пористыми телами. Для целей общего исследования мы можем упростить вопрос, учитывая только одну вязкость.

Имея в виду формулу (5) § 347, мы заключаем, что если жидкость находится в колебательном движении вблизи плоской стенки под действием периодической силы X, то задерживающая касательная сила, действующая на жидкость и относящаяся к единице площади, будет равна

$$-\mu\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0}=-(1-i)\frac{\mu\beta}{\sigma}e^{i(\sigma t+\epsilon)}=-(1-i)\frac{\mu\beta}{\sigma}X. \tag{1}$$

Этот результат получен в предположении несжимаемости жидкости, но в качестве приближения он применим и в рассматриваемом случае, когда длина волны оказывается большой в сравнении с другими входящими в рассмотрение линейными величинами. Одна из этих линейных величин

---

[1]) Исследование заимствовано из работы Рэлея, указанной на стр. 601.

[2]) Rayleigh, On Porous Bodies in relation to Sound, Phil. Mag. (5), XVI, 181 (1883) (Papers, II, 220); Theory of Sound, § 351. См. также Lamb, Dynamical Theory of Sound, London (1910), стр. 192.

есть $\beta^{-1}=\left(\frac{2\nu}{\sigma}\right)^{1/2}$; она представляет меру того, насколько далеко проникает в жидкость тормозящее влияние вязкости [1]).

Если формулу (1) применить к тому случаю, когда волны движутся в трубе или между двумя параллельными стенками, то силу X (на единицу массы) можно заменить через $-\frac{\partial p}{\varrho_0 \partial x}$. Мы рассмотрим случай трубы и предположим на мгновение, что значение β^{-1} мало по сравнению с радиусом a; вычисляя силу, действующую на жидкость, занимающую длину δx стенки, получим

$$\pi\varrho_0 a^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\pi a^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + (1-i)\frac{\nu\beta}{\sigma}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\, 2\pi a,$$

где $\bar{u}$, $\bar{p}$ обозначают средние значения скорости и давления в поперечном сечении. Так как $\sigma = 2\nu\beta^2$, то это уравнение можно написать в виде

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\left(1-\frac{1-i}{\beta a}\right)\frac{\partial p}{\varrho_0 \partial x}. \tag{2}$$

Мы имеем также

$$\bar{p} = p_0 + c^2\varrho_0\bar{s}, \quad \frac{\partial \bar{s}}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \tag{3}$$

где $\bar{s}$ — коэфициент уплотнения. Отсюда получаем, исключая $\bar{s}$,

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \left(1-\frac{1-i}{\beta a}\right) c^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}. \tag{4}$$

Мы уже предположили, что $\bar{u}$ пропорционально $e^{i\sigma t}$. Полагая поэтому

$$\bar{u} = Ce^{i\sigma t + mx}, \tag{5}$$

получим

$$m^2 = -\frac{\sigma^2}{c^2}\left(1-\frac{1-i}{\beta a}\right)^{-1}$$

или

$$m = \pm\frac{i\sigma}{c}\left(1+\frac{1-i}{2\beta a}\right), \tag{6}$$

так как $\frac{1}{\beta a}$ по предположению мало. Эту формулу можно написать в виде

$$m = \pm\left(\frac{i\sigma}{c'}+\frac{1}{l'}\right), \tag{7}$$

---

[1]) Полагая $\nu = 0{,}132$ и обозначая через $N = \frac{\sigma}{2\pi}$ частоту получим $\beta^{-1} = 0{,}207\, N^{-1/2}$ *см*.

где

$$c' = c\left(1 - \frac{1}{2\beta a}\right), \quad l' = \frac{ac}{\nu\beta}. \tag{8}$$ [1]

Отсюда, если возьмем нижний знак и напишем равенство (5) в действительной форме, получим

$$\bar{u} = Ce^{-\frac{x}{l'}} \cos\sigma\left(t - \frac{x}{c'}\right). \tag{9}$$

Для $\nu' = 0$ формула (34) § 360 дает значение $l = \frac{3}{2}\frac{c^3}{\nu\sigma^2}$. От сюда следует приближенное уравнение

$$\frac{l'}{l} = \frac{2}{3}\frac{\sigma^2 a}{\beta c^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{\beta a}, \tag{10}$$

где λ — длина волны. Скорость затухания волн при их движении в трубе оказывается, таким образом, значительно больше, чем в открытом пространстве, если только длина волны сравнима с длиною окружности поперечного сечения или больше ее.

Если труба настолько узка, что радиус имеет тот же порядок, что и β^{-1}, то характер движения оказывается другим. Трение оказывает теперь значительно большее влияние на колеблющуюся жидкость, а инерция жидкости становится несущественной. Среднее значение $\bar{u}$ скорости в данном случае связано с градиентом среднего давления практически формулой (4) § 331; поэтому

$$\bar{u} = -\frac{a^2}{8\mu}\frac{d\bar{p}}{dx}. \tag{11}$$

Отсюда следует, если иметь в виду формулы (3),

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{c^2a^2}{8\nu}\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}. \tag{12}$$

Это уравнение тождественно по форме с уравнением линейного распространения тепла.

Подставляя значение $\bar{u}$ из формулы (5), получим

$$m = \pm(1+i)q, \tag{13}$$

если обозначить

$$q^2 = \frac{4\nu\sigma}{c^2a^2} = \frac{2\sigma^2}{\beta^2a^2c^2}. \tag{14}$$

Отсюда для действительной части, принимая во внимание нижний знак, получим выражение

$$\bar{u} = Ce^{-qx}\cos(\sigma t - qx). \tag{15}$$

---

[1]) Гельмгольц в 1863 г. дал (без доказательства) формулы, равносильные приведенным в тексте; см. Wiss. Abh., I, 484. В цитате, приведенной Кирхгофом имеется ошибка.

Фаза повторяется всякий раз, как x возрастает на $\frac{2\pi}{q}$, амплитуда же убывает на этом расстоянии в отношении $e^{-2\pi}$ или $\frac{1}{535}$. Отношение этого интервала к длине волны λ в открытом пространстве равно

$$\frac{2\pi}{q\lambda} = \frac{\beta a}{\sqrt{2}\lambda}; \tag{16}$$

эта величина при сделанных предположениях представляет малую дробь.

Когда звуковая волна падает на поверхность твердого тела, пронизанного большим числом узких каналов, то часть звуковой энергии теряется благодаря описанному здесь рассеянию в этих каналах.

Промежуточные отверстия в портьерах и коврах действуют подобным же образом, и в этом заключается причина того, почему такого рода предметы ослабляют эхо в комнате; некоторая часть энергии теряется также при каждом отражении. Следует заметить, что только благодаря действию настоящих диссипативных сил, таких, как трение и теплопроводность, оказывается возможным, чтобы звук в замкнутом помещении совершенно прекратился.

§ 361. В исследованиях, которыми мы будем теперь заниматься, мы для простоты оставим в стороне тепловые процессы. На основании предшествующих исследований мы можем заключить, что от этого *порядок величины* членов, представляющих действие рассеяния, не изменится.

Общие уравнения звуковых волн, подверженных действию вязкости, на основании уравнений (2) § 328 будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta w + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{2}$$

Если обозначить через s коэфициент уплотнения, то уравнение непрерывности получит вид

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \tag{3}$$

а уравнение физического состояния будет

$$p = p_0 + \varrho_0 c^2 s, \tag{4}$$

где c — скорость звука при отсутствии вязкости.

Исключая p и ϑ, получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \nu \Delta u - \left(c^2 + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial s}{\partial x},\\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \nu \Delta v - \left(c^2 + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial s}{\partial y},\\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \nu \Delta w - \left(c^2 + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial s}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Из уравнений (5) и (3) после диференцирования получаем

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \left(c^2 + \frac{4}{3}\nu\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta s. \tag{6}$$

Если множитель, зависящий от времени, положить равным $e^{i\sigma t}$, то уравнение (6) примет вид

$$(\Delta + k^2)\, s = 0, \tag{7}$$

где

$$k^2 = \frac{\sigma^2}{c^2 + \frac{4}{3} i\nu\sigma}, \tag{8}$$

в то время как уравнения (5) могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned}(\Delta + h^2)\, u &= (k^2 - h^2)\frac{\partial \varphi}{\partial x},\\ (\Delta + h^2)\, v &= (k^2 - h^2)\frac{\partial \varphi}{\partial y},\\ (\Delta + h^2)\, w &= (k^2 - h^2)\frac{\partial \varphi}{\partial z},\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где

$$h^2 = -\frac{i\sigma}{\nu} \tag{10}$$

и

$$\varphi = -\frac{i\sigma s}{k^2}. \tag{11}$$

Эти уравнения удовлетворятся решениями вида

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{12}$$

если φ — какое-либо решение уравнения (7).

В частности, в случае волн, расходящихся по поверхности сферы радиуса $r = a$, когда на самой поверхности поддерживается заданная радиальная скорость $e^{i\sigma t}$, имеем

$$\varphi = A f_0(kr)\, e^{i\sigma t} \tag{13}$$

при условии

$$-kA f_0'(ka) = 1. \tag{14}$$

Отсюда следует

$$\varphi = -\frac{f_0(kr)}{kf_0'(ka)}\, e^{i\sigma t} \tag{15}$$

или, если написать в более полном виде,

$$\varphi = \frac{a^2}{1+ika}\,\frac{e^{i(\sigma t - kr + ka)}}{r}. \tag{16}$$

Мы видели в § 359, что даже в случае звуковых частот отношение $\frac{\nu\sigma}{c^2}$ чрезвычайно мало, так что с большим приближением можно написать

$$k = \frac{\sigma}{c}\left(1 - \frac{2}{3}\,\frac{i\nu\sigma}{c^2}\right). \tag{17}$$

Истолкование формулы (16) как в отношении незначительного влияния вязкости на скорость волн, так и в отношении ослабления самих волн по мере своего распространения благодаря вязкости в этом случае то же самое, как и при движении в одном измерении, § 359. Оказывается, что на расстоянии очень большого числа длин волн ослабление волн вследствие вязкости незаметно по сравнению с тем ослаблением, которое происходит благодаря сферическому расхождению волн.

Если движение не симметрично относительно начала, то решение уравнений (7) и (9) можно дополнить исследованием, помещенным в § 352. Таким образом, для случая расходящихся волн получаем решения вида

$$\left.\begin{aligned}
u &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (n+1)\, f_{n-1}(hr)\,\frac{\partial\chi_n}{\partial x} - \\
&\quad - n f_{n+1}(hr)\, h^2 r^{2n+3}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\chi_n}{r^{2n+1}}, \\
v &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (n+1)\, f_{n-1}(hr)\,\frac{\partial\chi_n}{\partial y} - \\
&\quad - n f_{n+1}(hr)\, h^2 r^{2n+3}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\chi_n}{r^{2n+1}}, \\
w &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} + (n+1)\, f_{n-1}(hr)\,\frac{\partial\chi_n}{\partial z} - \\
&\quad - n f_{n+1}(hr)\, h^2 r^{2n+3}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\chi_n}{r^{2n+1}},
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где

$$\varphi = f_n(kr)\,\varphi_n, \tag{19}$$

а функции φ_n, χ_n суть объемные сферические функции положительной степени n [1]).

[1]) Решения „первого класса" с рассматриваемой здесь точки зрения представляют меньший интерес.

Эти формулы дают

$$xu+yv+zw= \\ =-\{krf_n'(kr)+nf_n(kr)\}\varphi_n+n(n+1)(2n+1)f_n(hr)\chi_n \quad (20)$$

и

$$\left.\begin{aligned} yw-zv&=-f_n(kr)\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi_n+ \\ &+(2n+1)\{hrf_n'(hr)+(n+1)f_n(hr)\}\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\chi_n, \\ zu-xw&=-f_n(kr)\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi_n+ \\ &+(2n+1)\{hrf_n'(hr)+(n+1)f_n(hr)\}\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)\chi_n, \\ xv-yu&=-f_n(kr)\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_n+ \\ &+(2n+1)\{hrf_n'(hr)+(n+1)f_n(hr)\}\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)\chi_n, \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

причем в этом случае были применены рекурентные формулы § 292.

По причине, указанной выше, мы можем с достаточной точностью считать k действительным и равным $\frac{\sigma}{c}$. Что же касается h, то мы положим, как и в § 345,

$$h=(1-i)\beta, \quad \text{где} \quad \beta=\sqrt{\frac{\sigma}{2\nu}}. \quad (22)$$

Члены в выражениях (18), содержащие χ_n, будут поэтому заключать в себе множитель $e^{-\beta r}$ и, следовательно, будут очень малы на расстояниях r, бóльших по сравнению с линейной величиной β^{-1}, значение которой для воздуха, например, равно приблизительно $0{,}21\sqrt{N}$ *см*, если N обозначает число колебаний в секунду (§ 345). Движение будет поэтому практически свободным от вихрей уже на расстоянии, равном сравнительно небольшому кратному величины β^{-1}, и потенциал скоростей будет определяться формулой (19). Заметим также, что отношение $\frac{ka}{\beta a}$, приблизительно равное $\sqrt{\frac{\nu\sigma}{2c^2}}$, следует считать малым.

Чтобы применить формулы к случаю шара, который совершает колебания в направлении, параллельном оси x, со скоростью

$$U=e^{i\sigma t}, \quad (23)$$

подставим в формулы (18) $n=1$ и положим

$$\varphi_1=A_1x, \quad \chi_1=B_1x. \quad (24)$$

Условия

$$u=U, \quad v=0, \quad w=0 \quad (25)$$

которые должны выполняться на поверхности $r=a$, дают на основании соотношений (20) и (21)

$$-\{kaf_1'(ka)+f_1(ka)\}A_1+6f_1(ha)B_1=1, \tag{26}$$

$$-f_1(ka)A_1+3\{haf_1'(ha)+2f_1(ha)\}B_1=1; \tag{27}$$

отсюда следует

$$\left.\begin{aligned} A_1&=-\frac{haf_1'(ha)}{haf_1'(ha)\{kaf_1'(ka)+f_1(ka)\}+2f_1(ha)kaf_1'(ka)},\\ B_1&=\frac{\frac{1}{3}kaf_1'(ka)}{haf_1'(ha)\{kaf_1'(ka)+f_1(ka)\}+2f_1(ha)kaf_1'(ka)}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Если сделаем подстановку из формул (15) § 292, то получим

$$\left.\begin{aligned} A_1&=-\frac{(3+3iha-h^2a^2)k^3a^3e^{iha}}{k^2a^2(1+iha)+(2+2ika-k^2a^2)h^2a^2},\\ B_1&=\frac{\frac{1}{3}(3+3ika-k^2a^2)h^3a^3e^{iha}}{k^2a^2(1+iha)+(2+2ika-k^2a^2)h^2a^2}. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

В удаленных точках движение практически свободно от вихрей и имеет потенциал скоростей

$$\varphi=A_1f_1(kr)\,xe^{i\sigma t}. \tag{30}$$

Для акустики наиболее интересен тот случай, когда радиус шара a велик по сравнению с величиной β^{-1}. Если мы удержим только наивысшую степень ha в формулах (29), то первая из этих формул получит вид

$$A_1=\frac{k^3a^3e^{ika}}{2+2ika-k^2a^2}, \tag{31}$$

т. е. точно такой, как если бы мы пренебрегли вязкостью с самого начала (§ 295). Это показывает, что заключения Стокса, касающиеся влияния бокового движения при сообщении колебаний газу, в основном не подвергаются изменениям из-за вязкости. Следует впрочем заметить, что боковое движение воздуха, находящегося в соприкосновении с колеблющейся поверхностью, изменяет свой характер и может даже изменить направление на прямо противоположное, но это влияние вязкости распространяется лишь на слой, толщина которого имеет порядок величины β^{-1}, и если β^{-1} мало по сравнению с размерами тех частей, на которые поверхность разделяется узловыми линиями, то общие рассуждения § 294 сохраняют свою силу.

С другой стороны, в случае очень медленных колебаний или когда радиус препятствия очень мал, т. е. в тех случаях, когда значение βa не велико, значение ka необходимо должно быть мало, и потому на основании формул (29) и (22) будем иметь приближенно

$$A_1=\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2\beta a}\right)-\frac{3i}{4\beta a}\left(1+\frac{1}{\beta a}\right)\right\}k^3a^3. \tag{32}$$

Это согласуется с формулой (22) § 356. На расстояниях r, малых по сравнению с длиной волны, но довольно больших по сравнению с β^{-1}, дви-

жение на самом деле практически происходит так, как если бы жидкость была несжимаема.

§ 362. Мы будем теперь исследовать отражение плоских волн от сферического препятствия. Это тот же вопрос, что был разобран в § 297, только теперь должна быть принята во внимание вязкость. Мы будем предполагать, что окружность препятствия мала по сравнению с длиной волны, так что значение ka будет малым [1]).

На основании § 296 мы можем положить потенциал скоростей падающих волн равным

$$\varphi = e^{ikx} = \psi_0(kr) + 3ik r \psi_1(kr)\cos\theta + \dots, \tag{1}$$

где θ обозначает обычную угловую координату, а множитель $e^{i\sigma t}$ или e^{ikct} подразумевается. Из § 297 следует, что члены, содержащие сферические функции порядка выше первого, могут быть отброшены. Для малых значений kr равенство (1) принимает вид

$$\varphi = 1 - \frac{1}{6}k^2r^2 + \dots + ikx + \dots \tag{2}$$

Мы будем предполагать сначала, что шар неподвижен. Скорость на поверхности шара, соответствующая только потенциалу скоростей (2), складывается главным образом из радиальной составляющей $\frac{1}{3}k^2a$ и из составляющей $-ik$, параллельной направлению оси x. Если мы изменим направления этих составляющих на противоположные, то потенциал отраженных волн φ' на расстояниях r, бо́льших по сравнению с β^{-1}, получим, складывая выражения (16), (30) § 361, умноженные на подходящие коэфициенты.

Таким образом, получим

$$\varphi' = -\frac{1}{3}\frac{k^3a^3e^{ika}}{1+ika} f_0(kr) + (H+iK) f_1(kr)\, kr\cos\theta + \dots, \tag{3}$$

где

$$H+iK = iA_1 = -\frac{(3+3iha-h^2a^2)\, ik^3a^3e^{ika}}{k^2a^2(1+iha)+(2+2ika-k^2a^2)\, h^2a^2}; \tag{4}$$

Главный интерес настоящего исследования заключается в том, чтобы определить ту скорость, с которой энергия отчасти рассеивается вследствие вязкости, отчасти отделяется от последовательности первоначальных волн благодаря присутствию препятствия. Чтобы достичь этой цели, мы должны выразить φ и φ' в действительной форме. Предполагая, что это уже сделано, напишем

$$q = \frac{\partial\varphi}{\partial r^x}, \quad q' = \frac{\partial\varphi'}{\partial r}; \tag{5}$$

где q, q' — направленные внутрь радиальные скорости, происходящие соответственно от первичных и вторичных волн, на расстояниях, значения которых велики по сравнению с β^{-1}; p, p' пусть будут соответствующие давления, именно

$$p = \varrho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad p' = \varrho_0\frac{\partial\varphi'}{\partial t}. \tag{6}$$

---

[1]) Эта задача и соответствующая ей задача в двух измерениях были разобраны Sewell, On the Extinction of Sound in a Viscous Atmosphere by Small Obstacles .. . , Phil. Trans., A CCX, 239 (1910). Я несколько изменил и сократил способ исследования.

Работа, произведенная в единицу времени на поверхности шара радиуса r давлением, действующим на заключенный внутри воздух, выражается поверхностным интегралом

$$\iint (p+p')\,(q+q')\,dS. \tag{7}$$

Так как механическая энергия в замкнутом пространстве остается постоянной, то среднее значение этого интеграла представляет энергию, рассеянную благодаря трению жидкости. К этому добавим еще работу, израсходованную на образование отраженных волн, именно

$$-\iint p'q'\,dS. \tag{8}$$

Далее член

$$\iint pq\,dS \tag{9}$$

представляет работу, израсходованную в одних первоначальных волнах, при отсутствии препятствия. Поэтому общее количество энергии первоначальных волн, теряющееся в единицу времени благодаря присутствию препятствия, оказывается равным среднему за промежуток времени значению интеграла

$$\iint (pq'+p'q)\,dS, \tag{10}$$

распространенного по поверхности шара очень большого радиуса.

При составлении суммы $pq'+p'q$ нам нужно будет иметь в виду только такие члены, которые содержат пространственные сферические функции одинакового порядка. Кроме того, так как k должно быть действительным, то окончательный результат в части, касающейся сферических функций *нулевого* порядка, должен быть таким, как и при отсутствии вязкости. Если выразить этот результат через поток энергии в первоначальных волнах, то будем иметь на основании формул (7), (11) § 297

$$\frac{4}{9}\,k^4a^4\cdot\pi a^2. \tag{11}$$

Мы можем поэтому ограничиться рассмотрением сферических функций *первого* порядка. Если возьмем действительные части выражений (1) и (3), умноженные на $e^{i\sigma t}$, то получим на основании формулы (14) § 292

$$\varphi = -3kr\psi_1(kr)\cos\theta\cdot\sin\sigma t, \tag{12}$$

$$\varphi' = (H\cos\sigma t - K\sin\sigma t)\,kr\Psi_1(kr)\cos\theta + (H\sin\sigma t + K\cos\sigma t)\,kr\psi_1(kr)\cos\theta. \tag{13}$$

Это дает

$$p = -3\varrho_0\sigma kr\psi_1(kr)\cos\theta\cdot\cos\sigma t, \tag{14}$$

$$p' = -\varrho_0\sigma\,(H\sin\sigma t + K\cos\sigma t)\,kr\Psi_1(kr)\cos\theta + \varrho_0\sigma\,(H\cos\sigma t - K\sin\sigma t)\,kr\psi_1(kr)\cos\theta, \tag{15}$$

$$q = -3k\,\{kr\psi_1'(kr)+\psi_1(kr)\}\cos\theta\cdot\sin\sigma t, \tag{16}$$

$$q' = k\,(H\cos\sigma t - K\sin\sigma t)\,\{kr\Psi_1'(kr)+\Psi_1(kr)\}\cos\theta + k\,(H\sin\sigma t + K\cos\sigma t)\,\{kr\psi_1'(kr)+\psi_1(kr)\}\cos\theta. \tag{17}$$

Отсюда следует

$$\left.\begin{aligned} pq'+p'q = {} & \\ = {} & \frac{3}{2}\,\varrho_0\sigma k^3r^2H\,\{\psi_1'(kr)\,\Psi_1(kr) - \psi_1(kr)\,\Psi_1'(kr)\}\cos^2\theta \\ & + \text{члены, зависящие от } \cos 2\sigma t,\ \sin 2\sigma t. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Так как $\iint \cos^2\theta\, dS = \frac{4}{3}\pi r^2$, то среднее значение той части интеграла (10), которая зависит от сферических функций первого порядка, равно

$$2\pi\varrho_0 ck^3r^4H\{\psi_1'(kr)\Psi_1(kr) - \psi_1(kr)\Psi_1'(kr)\} = 2\pi\varrho_0 cH; \tag{19}$$

причем при приведении было использовано соотношение (19) § 292.

Если значение βa велико, то мы можем ожидать, что влиянием вязкости можно пренебречь. В самом деле, на основании формулы (4) имеем

$$H + iK = \frac{ik^3a^3e^{ika}}{2 + 2ika - k^2a^2}. \tag{20}$$

Оценивая это для малых значений ka, получаем

$$H = \frac{1}{12}k^6a^6, \tag{21}$$

а результат, заключающийся в формуле (19), через поток энергии $\left(\frac{1}{2}\varrho_0 k^2 c\right)$ первоначальных волн представится в виде

$$\frac{1}{3}k^4a^4\cdot\pi a^2. \tag{22}$$

Складывая выражения (11) и (22), мы воспроизведем результат (12) § 297, который там был получен значительно более простым способом.

Если, с другой стороны, значение a имеет порядок β^{-1} или меньший, чем β^{-1}, то вследствие малости ka будем иметь

$$H + iK = \frac{1}{2}\, i\left(1 - \frac{3i}{ka} - \frac{3}{k^2a^2}\right)k^3a^3 =$$
$$= \frac{3k^3a^3}{4\beta a}\left(1 + \frac{1}{\beta a}\right) + \frac{ik^3a^3}{2}\left(1 + \frac{3}{2\beta a}\right). \tag{23}$$

Потеря энергии, выраженная через поток энергии в первоначальных волнах, оказывается тогда равной

$$\frac{4\pi c^2 H}{k^2} = \frac{3ka}{\beta a}\left(1 + \frac{1}{\beta a}\right)\cdot\pi a^2. \tag{24}$$

Выражением (11) в сравнении с полученным выражением можно вполне пренебречь.

Если a мало в сравнении с β^{-1}, то результат приближенно можно написать в виде

$$\frac{6\nu}{ca}\cdot\pi a^2. \tag{25}$$

Часть падающей энергии, которая теряется в этом случае, оказывается обратно пропорциональной радиусу шара. Общее же количество потерянной энергии прямо пропорционально радиусу [1]). Для воздуха при 0° C имеем

$$\frac{6\nu}{ca} = 2{,}39\cdot10^{-5}\cdot a^{-1},$$

если значение a выражено в сантиметрах.

---

[1]) Числовые результаты для ряда значений βa, полученные с большим приближением, имеются в работе Ш в е л л я.

§ 363. Полученные только что результаты представляют интерес в связи с распространением звука в тумане. Можно считать, что висящая в воздухе капелька воды при падении на нее воздушных волн практически, если она не очень мала, находится в покое, так как инерция ее велика по сравнению с инерцией равного объема воздуха. Если же радиус уменьшается, то инерция убывает, как a^3, в то время как поверхность, на которую действует трение, убывает, как a^2; поэтому нужно ожидать, что в конце концов будет достигнуто такое состояние, при котором капелька будет просто двигаться вместе с колеблющимся воздухом туда и сюда, и потеря энергии будет поэтому очень мала или ее совсем не будет.

Чтобы ближе исследовать это обстоятельство, представим себе, что шар может двигаться совершенно свободно. Скорость на его поверхности в области отраженных волн слагается из радиальной скорости $-\frac{1}{3}k^2a$, как и раньше, и из скорости $ik+\frac{d\xi}{dt}$ или $i(k+\sigma\xi)$, параллельной оси x, где ξ обозначает перемещение центра шара из своего среднего положения. Мы должны поэтому вместо формул (24) § 361 написать

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= i(k+\sigma\xi)\,A_1 x,\\ \chi_1 &= i(k+\sigma\xi)\,B_1 x,\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

где A_1, B_1 имеют значения, определяемые формулами (29) § 361.

Непосредственное вычисление напряжений на поверхности шара несколько утомительно, но его можно избежать, рассматривая количество движения. Оказывается, что при этом способе мы встретимся только с сферическими функциями *первого* порядка. Положим поэтому для падающих и отраженных волн на некотором удалении соответственно

$$\varphi = \ldots + 3ikr\psi_1(kr)\cos\theta + \ldots, \tag{27}$$

$$\varphi' = \ldots + i(k+\sigma\xi)\,A_1 r f_1(kr)\cos\theta + \ldots \tag{28}$$

Вычислим скорость изменения количества движения жидкости, заключающейся между шаром и концентрической с ним сферой, радиус которой велик по сравнению с β^{-1}. Первичные волны дают

$$-i\sigma\varrho_0\iiint\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = 4\pi\varrho_0\sigma k\{r^3\psi_1(kr) - a^3\psi_1(ka)\}. \tag{29}$$

Что же касается вторичных волн, то первый член в выражении для u в формуле (18) § 361 дает

$$-i\sigma\varrho_0\iiint\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \frac{4}{3}\pi\varrho_0\sigma(k+\sigma\xi)\,A_1\{r^3 f_1(kr) - a^3 f_1(ka)\}. \tag{30}$$

Остальная часть содержит χ_1 и дает

$$-2\sigma\varrho_0(k+\sigma\xi)\,B_1\int_0^r f_0(hr)\,4\pi r^2\,dr = -8\pi\varrho_0\sigma(k+\sigma\xi)\,B_1\{r^3 f_1(hr) - a^3 f_1(ha)\}; \tag{31}$$

где первый член в фигурных скобках может быть отброшен, так как он благодаря входящему в него множителю $e^{-\beta r}$ в конце концов стремится к нулю. Скорость изменения количества движения самого шара будет равна

$$-\frac{4}{3}\pi\varrho_1 a^3\sigma^2\xi, \tag{32}$$

где ϱ_1 обозначает плотность шара.

Движение вблизи поверхности сферы большого радиуса можно в конце концов рассматривать как безвихревое движение, и результирующее давление на этой поверхности можно поэтому считать равным

$$-\int\int (p+p')\cos\theta\, dS = -i\sigma\varrho_0\int\int (\varphi+\varphi')\cos\theta\, dS =$$
$$= 4\pi\varrho_0\sigma k r^3\psi_1(kr) + \frac{4}{3}\pi\varrho_0\sigma\,(k+\sigma\xi)\,A_1 r^3 f_1(kr). \tag{33}$$

Приравнивая общую скорость изменения количества движения результирующему давлению, получим

$$\varrho_0 k\psi_1(ka) + \frac{1}{3}\varrho_0\,(k+\sigma\xi)\,A_1 f_1(ka) -$$
$$-2\varrho_0\,(k+\sigma\xi)\,B_1 f_1(ha) + \frac{1}{3}\varrho_1\sigma\xi = 0. \tag{34}$$

Это равенство вследствие соотношения (26) § 361 приводится к виду

$$\varrho_0 k\psi_1(ka) - \frac{1}{3}\varrho_0\,(k+\sigma\xi)\,\{1+kaf_1'(ka)\,A_1\} + \frac{1}{3}\varrho_1\sigma\xi = 0; \tag{35}$$

отсюда следует

$$-\frac{\sigma\xi}{k} = 1 - \frac{\varrho_1 - 3\varrho_0\psi_1(ka)}{\varrho_1 - \varrho_0 - \varrho_0 kaf_1'(ka)\,A_1}. \tag{36}$$

Эта формула дает отношение перемещения шара к перемещению воздуха, который при отсутствии шара занимал бы его место.

Если бы можно было пренебречь вязкостью, то мы имели бы $ha=\infty$. Отсюда, если ka мало, находим приближенно

$$A_1 = \frac{1}{2}(ka)^3, \quad -kaf_1'(ka) = 3(ka)^{-3}. \tag{37}$$

Названное выше отношение оказывается, таким образом, равным, как в формуле (21) § 298,

$$1 - \frac{\varrho_1 - \varrho_0}{\varrho_1 + \frac{1}{2}\varrho_0}. \tag{38}$$

Если, с другой стороны, a имеет порядок β^{-1} или меньший, чем β^{-1}, то на основании формулы (4) § 362 будем иметь

$$A_1 = \left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2\beta a}\right) - \frac{3i}{4\beta a}\left(1+\frac{1}{\beta a}\right)\right\} k^3a^3, \tag{39}$$

причем высшие степени величины ka отброшены. Для малых значений βa это приводится приближенно к виду

$$A_1 = -\frac{3ik^3a^3}{4\beta^2a^2}; \tag{40}$$

формула (36) переходит теперь в следующую:

$$-\frac{\sigma\xi}{k}=1-\left\{1-\frac{9}{4}\,\frac{i\varrho_0}{(\varrho_1-\varrho_0)\beta^2a^2}\right\}^{-1}. \tag{41}$$

Если β^2a^2, будучи само по себе малым, все же велико в сравнении с $\frac{\varrho_0}{\varrho_1-\varrho_0}$, то выражение (41) мало, и шар остается приблизительно в покое, так как инерция в этом случае все еще имеет преобладающее значение.

Но если β^2a^2 мало по сравнению с $\frac{\varrho_0}{\varrho_1-\varrho_0}$, то отношение (41) приближается к *единице*, и шарик движется в этом случае вместе с воздухом.

Полагая $\frac{\varrho_0}{\varrho_1}=0{,}00129$, $\nu=0{,}132$, получаем из соответствующего условия, что радиус a должен быть мал по отношению к величине

$$1{,}10\cdot10^{-2}\cdot N^{-\frac{1}{2}}\ см,$$

где N обозначает частоту воздушных волн. Для частоты 256 значение a должно быть поэтому порядка 0,001 *мм*.

Чтобы вычислить потерю энергии, мы должны предположить, что выражение (28) аналогично выражению (3) приведено к виду

$$\varphi'=\ldots+(H'+iK')\,f_1(kr)\,kr\cos\theta+\ldots \tag{42}$$

Тогда результат, до тех пор пока мы ограничиваемся сферическими функциями первого порядка, примет вместо (19) вид

$$2\pi\varrho_0cH'.$$

Для определения H' имеем приближенное уравнение

$$H'+iK'=i\left(1+\frac{\sigma\xi}{k}\right)A_1=\frac{iA_1\{\varrho_1-3\varrho_0\psi_1(ka)\}}{\varrho_1-\varrho_0-\varrho_0kaf_1'(ka)\,A_1}=$$
$$=\frac{iA_1(\varrho_1-\varrho_0)}{\varrho_1-\varrho_0+3\varrho_0\,\frac{A_1}{k^3a^3}}. \tag{44}$$

Если вязкостью можно пренебречь или если значение βa велико, то будем иметь приближенно

$$A_1=\frac{1}{2}\,k^3a^3-\frac{1}{12}\,ik^6a^6, \tag{45}$$

и, следовательно,

$$H'=\frac{1}{12}\left(\frac{\varrho_1-\varrho_0}{\varrho_1+\frac{1}{2}\,\varrho_0}\right)^2\cdot k^6a^6. \tag{46}$$

Энергия, выделенная от первичных волн, будучи выражена через энергию этих волн, будет равна

$$\left\{\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\left(\frac{\varrho_1-\varrho_0}{\varrho_1+\frac{1}{2}\,\varrho_0}\right)^2\right\}k^4a^4\cdot\pi a^2, \tag{47}$$

причем в это выражение вошла часть энергии, представляемая формулой (11), происходящая от сопротивления шара сжатию. Полагая $\frac{\varrho_1}{\varrho_0}=\infty$, приходим снова к результату (12) § 297.

Если же, наоборот, значение βa мало, то приближенный способ становится утомительным, но, очевидно, что если радиус настолько мал, что шарик просто увлекается воздухом в его колебательном движении, то можно пренебречь рассеянием энергии, происходящим от членов первого порядка, и потому полное рассеяние энергии практически определяется в этом случае формулой (11) § 362.

§ 364. Чтобы исследовать влияние вязкости на колебания воздуха, заключенного в сосуде сферической формы, нужно заменить функции f_n, входящие в формулы (18) § 361, через ψ_n, так как скорость в начале координат конечна.

Формулы (20) и (21) § 361 показывают в этом случае, что на границе $r=a$ должны иметь место равенства

$$-\{ka\psi_n'(ka)+n\psi_n(ka)\}\varphi_n+n(n+1)(2n+1)\psi_n(ha)\chi_n=0 \qquad (1)$$

и

$$-\psi_n(ka)\varphi_n+(2n+1)\{ha\psi_n'(ha)+(n+1)\psi_n(ha)\}\chi_n=0. \qquad (2)$$

Из этих уравнений получается

$$ka\psi_n'(ka)\varphi_n+n(2n+1)ha\psi_n'(ha)\chi_n=0. \qquad (3)$$

Отсюда следует

$$\frac{ka\psi_n'(ka)+n\psi_n(ka)}{ka\psi_n'(ka)}=-\frac{(n+1)\psi_n(ha)}{ha\psi_n'(ha)}. \qquad (4)$$

Если мы положим, что значение a велико по сравнению с β^{-1}, то нам нужно будет только определить поправку, которую следует ввести в результаты § 293, 1; там было показано, что при отсутствии вязкости значение ka удовлетворяет уравнению

$$\zeta\psi_n'(\zeta)+n\psi_n(\zeta)=0. \qquad (5)$$

Положим в соответствии с этим

$$ka=\zeta+\varepsilon, \qquad (6)$$

где ζ удовлетворяет уравнению (5) и ε предполагается малым. Левая часть уравнения (4) получит тогда на основании уравнения (10) § 292 следующий вид:

$$\frac{\zeta\psi_n''(\zeta)+(n+1)\psi_n'(\zeta)}{-n\psi_n(\zeta)}\cdot\varepsilon=\frac{(n+1)\psi_n'(\zeta)+\zeta\psi_n(\zeta)}{n\psi_n(\zeta)}\cdot\varepsilon=$$
$$=\frac{\zeta^2-n(n+1)}{n\zeta}\cdot\varepsilon.$$

Правая часть на основании формул (8) § 292 приводится к виду

$$-\frac{n+1}{ha}\operatorname{tg}\left(ha+\frac{1}{2}n\pi\right),$$

так как согласно предположению значение ha велико. Кроме того, если положить

$$ha=(1-i)\,\beta a,$$

то будет иметь место приближенное уравнение

$$\operatorname{tg}\left(ha+\frac{1}{2}\,n\pi\right)=-i.$$

Отсюда следует

$$\varepsilon=\frac{n\,(n+1)\,\zeta}{\zeta^2-n\,(n+1)}\cdot\frac{-1+i}{2\beta a}\,. \tag{7}$$

Так как в наши формулы нужно еще ввести зависящий от времени множитель e^{ikct}, то действительная часть выражения (7) указывает на незначительное уменьшение частоты. Мнимая же часть показывает, что модуль затухания колебаний равен

$$\tau=\frac{\zeta^2-n\,(n+1)}{n\,(n+1)\,\zeta}\cdot\frac{2\beta a^2}{c}=\frac{\zeta^2-n\,(n+1)}{n\,(n+1)\sqrt{\zeta}}\cdot\sqrt{\frac{2a^3}{\nu c}}\,, \tag{8}$$

так как приближенно имеем

$$\beta=\sqrt{\frac{c\zeta}{2\nu a}}\,.$$

В случае $n=1$ мы имеем для самого медленного из нормальных колебаний $\zeta=2{,}081$ и вместе с тем

$$\tau=1{,}143\sqrt{\frac{a^3}{\nu c}}\,.$$

Если положить $c=3{,}32\cdot10^4$, $\nu=0{,}132$, то из этой формулы получим $\tau=0{,}0173\,a^{3/2}$. Нельзя, однако, забывать, что эти числовые оценки лежат намного ниже истинных значений, так как тепловые процессы при этом оставлялись без внимания.

Предшествующее исследование неприложимо к случаю *радиальных* колебаний. Если $n=0$, то имеют место формулы (12) § 361 вместе с формулой

$$\varphi=C\psi_0\,(kr) \tag{9}$$

и граничное условие дает соотношение

$$\psi_0'\,(ka)=0. \tag{10}$$

Если ka — корень этого уравнения, то на основании формулы (17) § 361 имеем приближенное равенство

$$\sigma=kc\left(1+\frac{2}{3}\,\frac{i\nu k}{c}\right). \tag{11}$$

Модуль затухания в этом случае будет равен

$$\tau=\frac{3a^2}{2\nu}\cdot(ka)^{-3}. \tag{12}$$

Следует заметить, что отношение выражения (8) к выражению (12) имеет порядок $\sqrt{\frac{ac}{\nu}}$, если не обращать внимание на числовые множители. Во всех случаях, для которых наши приближенные методы имеют силу, это отношение велико, так что благодаря только одной вязкости радиальные колебания гасятся на много медленнее, чем те колебания, для

которых значение n больше нуля. Этот результат можно легко объяснить. В самом деле, в случае колебаний последнего рода то условие, что жидкость не должна скользить вдоль стенок сосуда, дает для слоев газа, расположенных ближе к поверхности, более значительную деформацию частиц и соответственно с этим большее значение для рассеяния энергии.

Метод функции рассеяния, который мы применяли в § 348 к случаю волн в воде, можно было бы приложить к выводу формулы (12) для *радиальных* колебаний; однако, для $n>0$ этот метод привел бы к неверному результату, так как лежащее в основе его условие, что движение лишь в незначительной степени зависит от вязкости, не выполняется вблизи от граничной поверхности.

Для самого медленного радиального колебания мы имеем $ka=4{,}493$ отсюда следует

$$\tau = 0{,}0743\,\frac{a^2}{\nu}\,.$$

В случае воздуха при 0° С эта формула дает $\tau = 0{,}56\,a^2$ [1]).

Турбулентное движение.

§ 365. Остается теперь обратить внимание на нерассмотренный до сих пор наиболее трудный вопрос нашего предмета

Уже было указано, что отбрасывание членов второго порядка $\left(u\frac{du}{dx}\right.$ и т. д.$\left.\right)$ очень ограничивает приложимость многих из полученных нами выше результатов к жидкостям, обладающим обыкновенной степенью подвижности. В тех случаях, когда скорости или линейные размеры не очень малы, можно установить, насколько это позволяет наблюдение, что действительное движение значительно отклоняется от того движения, которое представляют наши формулы. Если, например, твердое тело обтекаемой формы движется в жидкости, то в слое жидкости, прилегающем к телу, возникает нерегулярное вихревое движение, и за телом образуется цепочка вихрей, тогда как на некотором расстоянии по сторонам движение оказывается сравнительно спокойным и однообразным.

Указанная здесь недостаточность математического анализа не относится к случаям *прямолинейного* течения, такого, как мы исследовали в §§ 330, 331; но даже и здесь наблюдение показывает, что теоретически возможные движения практически при известных условиях становятся неустойчивыми.

Рейнольдс [2]) произвел очень тщательные экспериментальные исследования течения жидкости по трубе с круговым сечением по-

---

[1]) Этот параграф с небольшими изменениями взят из указанной на стр. 799 работы автора.

[2]) Reynolds, An Experimental Investigation of the Circumstances which determine whether the Motion of Water shall be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels, Phil. Trans., CLXXIV, 935 (1883) (Papers, II, 51). Исторический обзор этих исследований и относящиеся к этому соображения более ранних авторов можно найти в работе Книбса, Proc. Roy. Soc., N. S. W., XXXI, 314 (1897). В частности в этой работе есть ссылки на Гагена, Berl. Abh., 1854, стр. 17.

средством введения в течение окрашенных жидких струек. Опыты Рейнольдса показали, что пока средняя скорость w_0 в сечении не превосходит некоторой границы, зависящей от диаметра трубы и свойств жидкости, движение протекает спокойно, в согласии с законом Пуазейля; случайные возмущения быстро сглаживаются, и *режим* течения оказывается совершенно устойчивым. Если же w_0, постепенно возрастая, переходит упомянутую границу, то течение становится все более чувствительным к маленьким возмущениям; но все же, если соблюдать большую осторожность и предохранять поток от возмущений, то плавный прямолинейный характер движения еще может поддерживаться в течение некоторого промежутка времени, пока, наконец, не будет достигнуто такое положение, после которого спокойное движение становится уже невозможным. После того как прямолинейный *режим* окончательно прекращается, движение становится совершенно беспорядочным, труба оказывается заполненной переплетающимися струйками, которые все время меняют свою форму и пересекают трубу в различных направлениях. Рейнольдс из соображений размерности сделал заключение, что „верхняя критическая скорость", т. е. верхняя граница средней скорости для плавного прямолинейного движения, должна быть пропорциональна $\frac{\nu}{D}$, где D обозначает диаметр трубы и ν — кинематический коэфициент вязкости.

Так как размерность ν равна L^2T^{-1}, то это выражение и на самом деле представляет единственную возможную комбинацию, имеющую размерность скорости. В результате своих опытов Рейнольдс дал для критической скорости формулу

$$U=\frac{P}{BD}, \tag{1}$$

где P — множитель, представляющий изменение вязкости воды с температурой (по стоградусной шкале) в том виде, как его нашел Пуазейль, именно

$$P=(1+0{,}03368\,\theta+0{,}00022099\,\theta^2)^{-1}$$

и $B=43{,}79$; за единицу длины здесь взят метр.

Если пересчитать этот результат на сантиметры, положить $P=\frac{\nu}{\nu_\theta}$ и взять значение для ν_0, данное на стр. 721, то для критического отношения получится значение

$$\frac{w_0D}{\nu}=12830. \tag{2}$$

Зависимость критической скорости от ν была проверена путем изменения температуры [1]).

[1]) Пропорциональность между критической скоростью и кинематическим коэфициентом вязкости ν была установлена для широкого интервала температур Барнесом и Кокером, Proc. R. S., LXXIV, 341 (1904).

Позднейшие наблюдатели получили для числовой постоянной в формуле (2) более высокие значения; многое здесь зависит от того, насколько удается избежать возмущений [1]).

§ 366. Одновременно с изменением характера движения происходит также и изменение зависимости между градиентом давления $\left(-\frac{dp}{dz}\right)$ и средней скоростью w_0.

Пока сохраняется прямолинейная форма движения, градиент, как это было найдено Пуазейлем, пропорционален w_0, но как только движение становится беспорядочным, турбулентным [2]), градиент возрастает быстрее; во многих случаях он возрастает, с бóльшим или меньшим приближением, примерно, как w_0^2. Это более быстрое возрастание сопротивления без сомнения обусловлено воздействием пульсаций, благодаря которым к стенкам подходят все новые и новые массы жидкости, движущиеся с сравнительно большей скоростью, благодаря чему растет скорость деформации $\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)$, далеко превосходя то значение, при котором еще возможно правильное „ламинарное" движение [3]).

Рейнольдс нашел, что переход от линейного закона сопротивления к закону сопротивления при турбулентном течении происходит при определенном значении $\frac{w_0 D}{\nu}$. Так как при такого рода опытах едва ли можно избежать возмущающих влияний, то соответствующее значение w_0 следует рассматривать как нижнюю критическую скорость и отличать ее от той, о которой шла речь в § 365. Результат Рейнольдса равносилен соотношению

$$\frac{w_0 D}{\nu} = 2030. \tag{3}$$

Зависимость от ν, как и выше, была проверена путем изменения температуры [4]).

Некоторые указания на возможные формы закона касательного сопротивления на единицу поверхности стенки трубы можно получить из соображений размерности. Предполагая, что p_{rz} пропорционально $\varrho^m \nu^n w_0^r a^s$, мы должны иметь

$$ML^{-1}T^{-2} = (ML^{-3})^m (L^2T^{-1})^n (LT^{-1})^r L^s;$$

---

[1]) Ср. Barnes and Coker (см. выше) и Ekman, Arkiv för Matem., VI (1910). Опыты Экмана были произведены при помощи оригинальной аппаратуры Рейнольдса.

[2]) Этот очень выразительный термин был введен лордом Кельвином.

[3]) Ср. Stokes, Papers, I, 99.

[4]) Значения этого нижнего критического числа Рейнольдса, близкие к 2000, были получены из различных экспериментов, см., например, Coker and Clement, Phil. Trans. A, CCI, 45 (1902).

отсюда следует $m=1$, $s=-n$, $r=2-n$, так что должно быть

$$p_{rz} \text{ пропорционально } \varrho w_0^2 \left(\frac{\nu}{w_0 a}\right)^n. \tag{4}$$

Обобщая этот результат, получаем формулу

$$p_{rz} = \varrho w_0^2 \cdot f\left(\frac{w_0 a}{\nu}\right), \tag{5}$$ [1])

Подставляя $n=1$ в соотношение (4), получим закон Пуазейля для прямолинейного течения. Если же подставить $n=0$, то получим формулу, которую обычно применяют в гидравлике в случае турбулентного течения в трубе, диаметр которой превосходит известную границу, именно

$$p_{rz} = k\varrho w_0^2, \tag{6}$$

где k — числовая постоянная, зависящая от свойства поверхности.

В качестве грубого среднего значения для случая воды, движущейся по гладкой железной трубе, мы можем взять $k=0{,}0025$ [2]).

Более полную эмпирическую формулу для p_{rz}, учитывающую также влияние диаметра, дал Дарси на основании очень большого числа наблюдений над течением воды в водопроводных трубах [3]).

Нужно заметить следующее: если бы сопротивление было точно пропорционально квадрату скорости, то оно не должно было бы зависеть от вязкости и от диаметра трубы. Это непосредственно следует из формулы (5) [4]).

Рейнольдс и некоторые другие наблюдатели нашли, что более хорошее совпадение с опытами получится, если в формуле (4) дать n значение, отличное от нуля. Было предложено значение $n=\frac{1}{4}$, в то время как Рейнольдс принимал значение $n=0{,}277$. Наиболее подходящее значение для показателя зависит, повидимому, от степени гладкости поверхности трубы, и по всей вероятности любая формула вида (4) имеет лишь ограниченную возможность применения.

---

[1]) Rayleigh, On the Question of the Stability of the Flow of Fluids, Phil. Mag. (5), XXXIV, 59 (1892) (Papers, III, 575).

Формула (5) экспериментально была проверена для очень различных условий и для таких различных жидкостей, как вода и воздух. При этом оказалось, что сопротивление пропорционально $\varrho_0 w_0^2$, если значение $\frac{\nu}{w_0 a}$ остается тем же самым. См. Stanton and Pannell, Similarity of Motion in Relation to the Surface Friction of Fluids, Phl. Trans. A, CCXIV, 199 (1913); Blasius, Das Ahnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen, Zeitschr. d. Ver. deutscher Ingenieure, (1912), стр. 639.

[2]) Rankine, Applied Mechanics, § 638; Unwin, Encyc. Britann. 11-е изд. „Hydraulics".

[3]) Darcy, Recherches expérimentales rélatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux, Paris (1855). Формула Дарси приводится в работах Ранкина и Унвина.

[4]) Rayleigh, см. выше.

Блазиус, на основании сопоставления тщательно проведенных экспериментов над турбулентным течением в *гладких* трубах, дает для градиента давления формулу вида $\frac{1}{2}\lambda\varrho\frac{w_0^2}{D}$, где $\lambda = 0{,}316\left(\frac{\nu}{w_0 D}\right)^{1/4}$ и D — диаметр. Так как

$$\pi D p_{rz} = -\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\pi}{4}D^2,$$

то это дает

$$p_{rz} = 0{,}027\,\varrho w_0^2\left(\frac{\nu}{w_0 D}\right)^{1/4}. \tag{7}$$

Рэлей обратил внимание на то, что вид функции f в формуле (5) можно определить при помощи опытов, в которых изменяется только ν. Опыты, повидимому, указывают на то, что функция f с возрастанием значения $\frac{w_0 D}{\nu}$ стремится к определенному предельному значению, так что формула (6) есть в некотором роде асимптотический закон сопротивления [1]).

Если мы будем рассматривать формулу (6) как формулу, выражающую результаты наблюдений, то сейчас же можно получить одно интересное заключение. Возьмем ось z в направлении общего течения и обозначим через $\overline{w}$ *среднюю* (по отношению к времени) скорость в произвольной точке пространства; тогда на граничной поверхности будем иметь

$$\mu\frac{\partial\overline{w}}{\partial n} = k\varrho w_0^2,$$

если обозначим через w_0 общую скорость течения и через δn элемент нормали. Если мы введем линейную величину l, определенную равенством

$$\frac{w_0}{l} = \frac{\partial\overline{w}}{\partial n},$$

то l будет измерять расстояние между двумя плоскостями, движущимися с относительною скоростью w_0 в упорядоченном ламинарном движении, при котором должны иметь место те же самые касательные напряжения.

Таким образом, находим

$$w_0 l = \frac{\nu}{k}. \tag{8}$$

Если положим, например, $\nu = 0{,}018$, $w_0 = 300$ *см/сек*, $k = 0{,}0025$, то получим $l = 0{,}024$ *см* [2]). Малость полученного значения для l указывает на то обстоятельство, что при турбулентном течении жидкости значение $\overline{w}$ на очень небольшом протяжении от стенок быстро убывает до нуля [3]).

---

[1]) Stanton, Friction, Лондон (1923), стр. 55.

[2]) Cp. W. Thomson, Phil. Mag. (5), XXIV, 277 (1887).

[3]) Это и в действительности было найдено экспериментально Дарси, см. выше.

Распределение средней скорости ($\overline{w}$) по поперечному сечению исследовал Стантон [1]) при помощи опытов над течением воздуха в слегка шероховатых трубах, для которых было установлено, что имеет место закон пропорциональности сопротивления квадрату скорости.

На небольшом протяжении от стенок скорость изменяется приблизительно по параболическому закону

$$\overline{w} = \overline{w}_c\left(1 - \beta\frac{r^2}{a^2}\right), \tag{9}$$

где $\overline{w}_c$ обозначает среднюю скорость на оси и β — некоторая постоянная. В некоторых из своих более поздних опытов [2]) он подтверждает справедливость того мнения, что в непосредственной близости от стенки существует область строго ламинарного течения. Толщина этого слоя в рассмотренных случаях оказалась равной некоторой доле миллиметра.

§ 366a. В указанной на стр. 737 экспериментальной установке Маллока и Кутта мы имели другую простую форму установившегося движения, которую значительно легче подвергнуть экспериментальному исследованию. Когда внутренний цилиндр был в покое, то Маллок нашел, что представляемое формулой (5) § 333 установившееся движение до тех пор оставалось устойчивым, пока угловая скорость внешнего цилиндра не превосходила известную границу, и определенно становилось неустойчивым, когда скорость переходила через другую более высокую границу. В промежуточном интервале наблюдалась чувствительность к возмущениям, большая, чем в случае трубы [3]).

В том же случае, когда внешний цилиндр оставался в покое, оказалось, что установившееся движение было неустойчивым при всевозможных угловых скоростях внутреннего цилиндра. Эти заключения нуждаются в уточнении в свете последующих работ, но тем не менее названные опыты интересны как первая попытка экспериментального исследования случая турбулентного движения, происходящего не в трубе.

Влияние несимметричного, но происходящего в двух измерениях возмущения было исследовано математически Гаррисоном [4]) методами Рейнольдса и Орра (§ 369). Он определял наибольшее значение относительной угловой скорости цилиндра, совместимое с устойчивостью по отношению к возмущениям указанного рода.

---

[1]) Stanton, Proc. Roy. Soc. A, LXXXV, 366 (1911).

[2]) Stanton, Proc. Roy. Soc. A, XCVII, 413 (1920); см. выше Friction, стр. 30.

[3]) См. одно письмо Кельвина, которое цитирует Рэлей, Phil. Mag. (6), XXVIII (1914) (Papers, VI, 266).

[4]) Harrison, Camb. Trans., XXII, 425 (1920) и Proc. Camb. Phil. Soc., XX, 455 (1921).

Вопрос этот снова был исследован математически и экспериментально Тэйлором [1]), который и получил вполне определенные результаты. Отправляясь из устойчивого состояния и постепенно увеличивая отношение угловых скоростей, Тэйлор нашел, что неустойчивость проявляется в форме трехразмерного, вначале стационарного возмущения, симметричного относительно оси вращения, но периодически повторяющегося вдоль прямой, параллельной оси. Если спроектировать линии тока на плоскость меридиана, то эта проекция даст систему вихрей, расположенных в прямоугольных клетках, причем направления вращений попеременно противоположны. Если цилиндры вращаются в одном и том же направлении, то каждая такая клетка простирается на все радиальное расстояние между ними; в противоположном же случае она примыкает к внешнему цилиндру, и сами вихри много слабее, чем в первом случае.

Было доказано как теоретически, так и экспериментально, что, если внутренний цилиндр остается неподвижным, установившееся движение оказывается устойчивым при всех тех угловых скоростях внешнего цилиндра, которые имели место в опытах. Когда неподвижным оставался внешний цилиндр, тогда устойчивость наблюдалась при достаточно малых угловых скоростях внутреннего цилиндра. Во всех случаях угловая скорость, при которой движение становилось неустойчивым, была строго определенной.

§ 366b. Неоднократно указывалось, что в тех случаях, когда скорости не очень малы или пространственные размеры сильно сокращены, вычисления, основывающиеся на предположении прямолинейного течения, такие, как в § 330, приводят к результатам, находящимся в резком противоречии с опытом. Если бы, например, в случае, рассмотренном в § 334a, п. 3, мы захотели подставить вместо μ обычное значение этого коэфициента для воды, то оказалось бы, что должно пройти очень много времени, пока действие поверхностных сил распространится на сравнительно небольшую глубину. В действительности же благодаря возникновению пульсаций происходит обмен количеств движения между соседними слоями жидкости.

Картина здесь примерно оказывается такой же, как и в максвелловой теории газов, с той только разницей, что здесь речь идет о „молярных", а не о молекулярных количествах движения, т. е. о количествах движения элементарных частиц жидкости, рассматриваемой как непрерывная среда.

Начиная с Рейнольдса [2]), многие авторы предлагали, чтобы учесть эти обстоятельства, ввести вместо μ коэфициент $\bar{\mu}$ „молярной", „механической", „турбулентной" вязкости. Это значит, что мы должны

---

[1]) Taylor, Stability of a Viscous Liquid contained between Two Rotating Cylinders, Phil. Trans. A, CCXXIII, 289 (1922).

[2]) Reynolds, см. выше, стр. 837 (1886) (Papers, II, 236).

считать составляющие тангенциального напряжения в плоскости, перпендикулярной к оси Oz, равными

$$\bar{\mu}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad \bar{\mu}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z},$$

где $\bar{u}$, $\bar{v}$ — *средние* значения величин u, v в рассматриваемой точке за небольшой промежуток времени. Этим мы отказываемся от всякой попытки отдельно проследить за имеющими место быстрыми изменениями скорости и ограничиваемся лишь учетом среднего, в указанном выше смысле, эффекта.

Этот коэфициент $\bar{\mu}$, естественно, нельзя рассматривать как физическую постоянную, характеристическую для жидкости. Его значение в большой мере будет зависеть от вида и масштаба рассматриваемого движения, и будет часто меняться довольно значительно при переходе от одной части жидкости к другой. Этот коэфициент нельзя, таким образом, знать a priori, хотя иногда оценка его и возможна на основании аналогий; его находят путем сравнения вычислений с опытами. Значение этого коэфициента до некоторой степени может служить мерой степени турбулентности при рассматриваемых обстоятельствах.

Если, например, в опытах Стантона, цитированных на стр. 842, рассматривать силы, действующие на единицу длины воздушного цилиндра радиуса r, то будем иметь

$$\bar{\mu}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\cdot 2\pi r = \frac{\partial p}{\partial z}\pi r^2, \tag{1}$$

где $\frac{\partial p}{\partial z}$ обозначает градиент давления вдоль трубы. Далее из формулы (6) следует

$$2\pi a k \varrho w_0^2 = -\frac{\partial p}{\partial z}\cdot \pi a^2, \tag{2}$$

а отсюда имеем

$$\frac{\bar{\mu}}{r}\frac{\partial \bar{w}}{\partial r} = -\frac{kr}{a}w_0^2. \tag{3}$$

Следовательно, получаем

$$\frac{\bar{\mu}}{\varrho} = \frac{k w_0^2 a}{2\beta \bar{w}_c}. \tag{4}$$

Это дает значение для $\bar{\mu}$, одинаковое для всего поперечного сечения и пропорциональное среднему значению скорости в сечении и радиусу. Полагая[1])

$$\bar{w}_c = 1500, \quad w_0 = 1125, \quad a = 2{,}5, \quad k = 0{,}0025, \quad \beta = 0{,}5,$$

получим

$$\frac{\bar{\mu}}{\varrho} = 5{,}3 \quad \text{или} \quad \bar{\mu} = 0{,}0068.$$

---

[1]) Приводимые здесь данные имеют тот же порядок, как и в опытах Стантона.

Значительно большие значения, чем можно было ожидать, получаются в тех случаях, когда движение совершается в достаточно больших масштабах [1]).

§ 366c. Подобными же рассуждениями можно воспользоваться, чтобы найти закон, по которому изменяется [2]) ветер с изменением высоты над поверхностью земли, если, как и в аналогичной задаче § 334a, п. 5, принять во внимание вращение Земли. Положим, что ось z направлена вверх противоположно кажущемуся направлению силы тяжести, и оси x и y вращаются вокруг оси Oz с угловой скоростью ω, равной проекции на Oz угловой скорости вращения Земли. Если мы будем считать движение относительно этих осей установившимся, положим $w=0$, и отбросим горизонтальные градиенты величин u и v, то на основании уравнений (1) § 203 будем иметь [3])

$$\left.\begin{aligned} -2\omega v &= -\frac{\partial p}{\varrho\,\partial x}+\bar{\nu}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\\ 2\omega u &= -\frac{\partial p}{\varrho\,\partial y}+\bar{\nu}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},\\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z}+g\varrho, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\nu=\frac{\bar{\mu}}{\varrho}$. Предположим теперь, что градиент давления вблизи начала постоянен и определяется равенствами

$$-\frac{\partial p}{\varrho\,\partial x}=0, \qquad -\frac{\partial p}{\varrho\,\partial y}=f. \tag{2}$$

В таком случае имеем

$$\bar{\nu}\frac{\partial^2}{\partial z^2}(u+iv)-2i\omega(u+iv)=-if. \tag{3}$$

Если положить

$$\beta^2=\frac{\omega}{\bar{\nu}}, \qquad \frac{f}{2\omega}=V, \tag{4}$$

то решение, конечное при $z=\infty$, будет иметь вид

$$u+iv=V+Ce^{-(1+i)\beta z}. \tag{5}$$

На большой высоте имеем $u=V$, $v=0$; это есть параллельный изобарам „градиентный ветер", который преобладал бы, если бы не было трения.

---

[1]) Ср. Jeffreys, On Turbulence in the Ocean, Phil. Mag. (6), XXXIX, 578 (1920).

[2]) G. I. Taylor, Eddy Motion in the Atmosphere, Phil. Trans. A, CCXV, 1 (1915).

[3]) Черточки для обозначения средних во времени значений u, v и p здесь опущены, так как в них нет необходимости.

Допустим, что направление ветра у поверхности земли ($z=0$) составляет с положительным направлением оси x угол α, так что

$$u_0+iv_0=V_0e^{i\alpha}. \tag{6}$$

В таком случае имеем

$$\left.\begin{aligned} u&=V+e^{-\beta z}\{V_0\cos(\alpha-\beta z)-V\cos\beta z\},\\ v&=\quad e^{-\beta z}\{V_0\sin(\alpha-\beta z)+V\sin\beta z\}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Мы можем принять, что у поверхности земли тангенциальные напряжения имеют одинаковые направления со скоростями, или

$$\frac{\partial u}{\partial z}:\frac{\partial v}{\partial z}=u:v \quad \text{при } z=0. \tag{8}$$

Отсюда получается после соответствующих приведений

$$V_0=V(\cos\alpha-\sin\alpha). \tag{9}$$

Подставляя из формулы (9) в равенства (7), получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{u}{V}&=1-\sin\alpha\{\cos(\alpha-\beta z)+\sin(\alpha-\beta z)\}e^{-\beta z},\\ \frac{v}{V}&=\quad\sin\alpha\{\cos(\alpha-\beta z)-\sin(\alpha-\beta z)\}e^{-\beta z}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Высоты, на которых ветер по направлению совпадает с „градиентным ветром", определяются условием $v=0$ или

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta z)=1. \tag{11}$$

Уравнение (9) показывает, что должно быть $\alpha<\frac{1}{4}\pi$, так что первое значение z, удовлетворяющее уравнению (11), определяется формулой

$$z=\frac{\left(\alpha+\frac{3}{4}\pi\right)}{\beta}. \tag{12}$$

Сравнение теоретических и опытных результатов дает для кинематического коэфициента $\bar{\nu}$ турбулентной вязкости значение порядка 10^5 в системе *CGS*.

§ 367. Хотя по этому вопросу и было много написано, однако теоретическое объяснение для неустойчивости линейного течения, имеющей место в действительности при установленных в §§ 365, 366 условиях, равно, как и объяснение того, каким образом беспорядочные пульсации поддерживаются несмотря на действие вязкости, остается все еще не установленным. Мы можем попытаться дать здесь лишь краткий обзор различных попыток, которые были предприняты для выяснения этого вопроса.

Рэлей исследует в ряде работ [1]) устойчивость различных форм установившегося движения, допускаемых вязкостью при бесконечно малых возмущениях. Хотя вязкость в возмущенном движении и не принимается во внимание, все же можно ожидать, что результаты работ Рэлея прольют некоторый свет на этот вопрос, за исключением, впрочем, тех случаев, в которых преобладающее значение имеет влияние границ. Это исключение тем не менее очень существенно.

Так как метод достаточно прост, а результаты представляют интерес сами по себе, то мы можем изложить коротко задачу для двух измерений.

Предположим, что в результате небольшого возмущения установившегося ламинарного движения

$$u = U, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

где U — функция только y, мы имеем

$$u = U + u', \quad v = v', \quad w = 0. \tag{1}$$

Уравнение непрерывности получит вид

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Динамические уравнения (4) § 146 приводятся к условию постоянства вихря $\frac{D\zeta}{Dt} = 0$ или

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (U + u')\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v'\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

где

$$\zeta = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{dU}{dy}. \tag{4}$$

Отсюда следует, если пренебречь членами второго порядка относительно u', v',

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\right) - \frac{d^2U}{dy^2}v' = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь периодическое относительно x возмущение и положим, что u', v' пропорциональны $e^{ikx+i\sigma t}$.

Из уравнений (2) и (5) следует

$$iku' + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \tag{6}$$

и

$$i(\sigma + kU)\left(ikv' - \frac{\partial u'}{\partial y}\right) - \frac{d^2U}{dy^2}v' = 0. \tag{7}$$

Исключая u', получаем

$$(\sigma + kU)\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} - k^2 v'\right) - \frac{d^2U}{dy}kv^1 = 0; \tag{8}$$

это есть основное уравнение.

---

[1]) Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc., X, 4 (1879), XI, 57 (1880), XIX, 67 (1887), XXVII, 5 (1895); Phil. Mag. (5), XXXIV, 59, 177 (1892); (6) XXVI, 6001 (1913) (Papers, I, 361, 374, III, 575, 594, IV, 203).

Если $\frac{dU}{dy}$ испытывает разрыв при каком-нибудь значении y, то уравнение (8) должно быть заменено через

$$(\sigma + kU)\,\Delta\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right) - \Delta\left(\frac{dU}{dy}\right) kv' = 0, \tag{9}$$

где Δ обозначает разность соответствующих величин на обеих сторонах плоскости разрыва. Уравнение (9) получается из уравнения (8) интегрированием по y, причем разрыв рассматривается как предел бесконечно быстрого изменения. Это уравнение можно также получить из условия непрерывности давления или как условие того что на граничной поверхности (смещенной) не должно быть скольжения.

На неподвижной границе должно быть $v' = 0$.

1. Предположим, что слой жидкости с равномерной завихренностью, ограниченный в невозмущенном состоянии плоскостями $y = \pm h$, помещен между двумя массами жидкости, находящимися в безвихревом движении; скорость при этом предполагается всюду непрерывной. Этот случай представляет интересное видоизменение задачи, рассмотренной в § 234.

Положим, что

$$\begin{aligned} U &= \mathfrak{u} \quad \text{для} \quad y > h, \\ U &= \frac{\mathfrak{u}y}{h} \quad \text{для} \quad h > y > -h, \\ U &= -\mathfrak{u} \quad \text{для} \quad y < -h, \end{aligned}$$

и заметим, что $\frac{d^2U}{dy^2} = 0$ всюду, за исключением поверхностей раздела, так что уравнение (8) приведется к виду

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} - k^2 v' = 0. \tag{10}$$

Соответствующие решения этого уравнения будут

$$\left.\begin{aligned} v' &= Ae^{-ky} && \text{для } y > h; \\ v' &= Be^{-ky} + Ce^{ky} && \text{для } h > y > -h; \\ v' &= De^{ky} && \text{для } y < -h. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Непрерывность v' требует, чтобы выполнялись условия

$$\left.\begin{aligned} Ae^{-kh} &= Be^{-kh} + Ce^{kh}, \\ De^{-kh} &= Be^{kh} + Ce^{-kh}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

При помощи этих соотношений уравнение (9) дает

$$\left.\begin{aligned} 2(\sigma + k\mathfrak{u})\,Ce^{kh} - \frac{\mathfrak{u}}{h}(Be^{-kh} + Ce^{kh}) &= 0, \\ 2(\sigma - k\mathfrak{u})\,Be^{kh} + \frac{\mathfrak{u}}{h}(Be^{kh} + Ce^{-kh}) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Исключая отношение $B:C$, получим

$$\sigma^2 = \frac{\mathfrak{u}^2}{4h^2}\{(2kh-1)^2 - e^{-4kh}. \tag{14}$$

Для малых значений kh эта формула дает $\sigma^2 = -k^2u^2$, как и в случае одной плоскости разрыва (§ 234). Для больших же значений kh получающееся значение $\sigma = \pm ku$ указывает на устойчивость. Отсюда следует, что вопрос относительно устойчивости при возмущениях с длиной волны λ зависит от отношения $\frac{\lambda}{2h}$. Для функции в фигурных скобках в правой части формулы (14) Рэлей составил таблицы. Оказывается, что неустойчивость наступает примерно при $\frac{\lambda}{2h} > 5$ и становится наибольшей при $\frac{\lambda}{2h} = 8$.

2. Далее Рэлей исследовал в названных работах различные случаи течений между параллельными стенками с целью пролить больше света на условия устойчивости для прямолинейного течения в трубе. Главный результат этих исследований заключается в следующем: если $\frac{d^2U}{dy^2}$ не меняет свой знак, другими словами, если кривая с абсциссой y и с ординатой U всюду искривлена в одну и ту же сторону, то движение устойчиво. Так как, однако, в возмущенном движении предполагалось наличие скольжения у стенок, то возникает сомнение, в какой мере эти заключения справедливы для тех случаев, для которых условие отсутствия всякого скольжения является основным.

3. Введение уравнения (10) вместо уравнения (8) в том случае, когда $\frac{d^2U}{dy^2} = 0$, равносильно предположению, что вектор вихря ζ должен быть таким же, как и при невозмущенном движении, так как при таком предположении имеют место равенства

$$\frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{\partial v'}{\partial x} = ikv', \tag{15}$$

а это вместе с равенством (16) и приводит к уравнению (10).

Нужно, однако, обратить внимание на следующее: если $\frac{d^2U}{dy^2} = 0$, то уравнение (8) при некотором частном значении y может также удовлетворяться вследствие равенства $\sigma + kU = 0$. Мы можем, например, предположить, что на плоскости $y = 0$ расположен тонкий слой с бесконечно малым дополнительным завихрением.

Тогда, предполагая, что жидкость не ограничена, будем иметь

$$v' = Ae^{\mp ky + i(\sigma t + kx)}, \tag{16}$$

причем нужно взять верхний или нижний знак, смотря по тому, положительно y или отрицательно. Условие (9) будет тогда выполняться вследствие равенств

$$\sigma + kU_0 = 0, \quad \Delta\left(\frac{dU}{dy}\right) = 0, \tag{17}$$

где U_0 обозначает значение U при $y = 0$.

Так как наложение одинаковой для всех частиц скорости в направлении оси x не изменяет задачу, то мы можем положить $U_0 = 0$ и вместе с тем $\sigma = 0$. Возмущенное движение оказывается установившимся; другими словами первоначальная форма течения по отношению к возмущениям рассматриваемого вида находится (с точностью до малых величин второго порядка) в *безразличном* состоянии [1]).

---

[1]) Ср. W. Thomson, On a Disturbing Infinity in Lord Rayleigh's solution for Waves in a plane Vortex Stratum, Brit. Ass. Rep., 1880, стр. 492 (Papers, IV, 186) и ответ Рэлея, Proc. Lond. Math. Soc., XXVII, 5 (Papers, IV, 203).

§ 368. Кельвин поставил перед собой трудную задачу непосредственно исследовать устойчивость ламинарного движения, принимая во внимание вязкость [1]). Он рассмотрел следующие частные случаи: 1) течение под давлением между неподвижными параллельными стенками (см. § 330), 2) равномерное движение сдвига между двумя параллельными плоскостями, из которых одна движется с постоянной скоростью относительно другой, предполагаемой неподвижною, и 3) движение потока по наклонно плоскому дну. Его общее заключение таково: ламинарное течение во всех случаях устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям, но становится неустойчивым, когда возмущения переходят за известную границу; эти границы устойчивости оказываются тем теснее, чем меньше вязкость. Само исследование является достаточно трудным и в некоторых частях оно встретило возражения со стороны Рэлея [2]) и Орра. Последнему мы обязаны детальным рассмотрением всей задачи [3]). Большинство авторов, которые занимались этими проблемами, склонялось, однако, считать приведенное выше заключение вероятным, хотя еще и строго недоказанным. Следует отметить, что оно совпадает и с приведенными в §§ 365, 366 наблюдениями Рейнольдса и других.

В случае равномерного движения сдвига между параллельными плоскостями $y=0$, $y=h$, из которых первая неподвижна, исследование начинается с того, что для невозмущенного движения принимается

$$u=\beta y,\quad v=0,\quad w=0, \tag{1}$$

а для возмущенного движения

$$u=\beta y-\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad w=0. \tag{2}$$

Вихрь при этом получается равным

$$\zeta=-\beta+\Delta_1\psi. \tag{3}$$

Третье из уравнений (8) § 328 дает

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\nu\Delta_1\zeta. \tag{4}$$

Подставляя в это уравнение соотношения (2) и пренебрегая членами второго порядка по отношению к ψ, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\beta y\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta_1\psi=\nu\Delta_1^2\psi. \tag{5}$$

---

[1]) Kelvin, Rectilinear Motion of Viscous Fluid between two Parallel Planes, Phil. Mag. (5), XXIV, 188 (1887); Broad River flowing down an Inclined Plane Bed., Phil. Mag. (5), XXIV, 272 (1887) (Papers, VI, 321).

[2]) Rayleigh, см. выше, стр. 847.

[3]) Orr, The Stability or Instability of the Steady Motions of a Perfect Liquid and of a Viscous Liquid, Proc. Roy. Irish. Acad., XXVII, 9, 69 (1906 до 1907).

Если мы возьмем возмущение в виде $e^{i(\sigma t + kx)}$, то будем иметь

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \left\{k^2 + \frac{i(\sigma + k\beta y)}{\nu}\right\} S, \tag{6}$$

где

$$S = \Delta_1 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - k^2 \psi, \tag{7}$$

причем показательная функция как множитель опущена.

Так как условия (1) должны иметь место и на границе, то должно быть $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ или

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \tag{8}$$

для $y = 0$ и для $y = h$.

Если обозначим через S полное решение уравнения (6), то интеграция уравнения (7) по методу „вариации постоянных" дает

$$\psi = \frac{1}{2k}\left\{e^{ky}\int e^{-ky} S\, dy - e^{-ky}\int e^{ky} S\, dy\right\}, \tag{9}$$

а отсюда следует

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{2}\left\{e^{ky}\int e^{-ky} S\, dy + e^{-ky}\int e^{ky} S\, dy\right\}. \tag{10}$$

Благодаря неопределенным интегралам войдут, конечно, еще две произвольные добавочные постоянные кроме двух, уже содержащихся в S.

Условия (8) будут выполнены для $y = 0$, если мы возьмем в качестве нижнего предела для интеграла значение нуль. Условия для $y = h$ приведутся к виду

$$\int_0^h e^{-kh} S\, dy = 0, \quad \int_0^h e^{kh} S\, dy = 0. \tag{11}$$

Если положим теперь

$$S = C_1 S_1 + C_2 S_2, \tag{12}$$

где S_1, S_2 — два независимых решения уравнения (6), то после исключения произвольных постоянных C_1; C_2 будем иметь уравнение

$$\int_0^h e^{ky} S_1\, dy \cdot \int_0^h e^{-ky} S_2\, dy - \int_0^h e^{-ky} S_1\, dy \cdot \int_0^h e^{ky} S_2\, dy = 0, \tag{13}$$

которое получили Орр [1]) и позднее независимо от него Зоммерфельд [2]). Это уравнение определяет значения σ, когда k дано. Для устойчивости существенно, чтобы, если $\sigma = p + iq$, q было положительным.

Если положить

$$k^2 + \frac{i(\sigma + k\beta y)}{\nu} = \left(\frac{k\beta}{\nu}\right)^{3/2} \eta, \tag{14}$$

то уравнение (6) примет вид

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} + \eta S = 0; \tag{15}$$

---

[1]) Orr, см. выше, стр. 850.

[2]) Sommerfeld, Atti del IV. Congr. intern. dei matematici, Рим, 1909, II, 116.

это уравнение интегрируется рядами [1]). Таким способом получим

$$S = A_1\left\{1 - \frac{\eta^3}{2\cdot 3} + \frac{\eta^6}{2\cdot 5\cdot 3\cdot 6} - \frac{\eta^9}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 3\cdot 6\cdot 9} + \dots\right\} + \\ + A_2\eta\left\{1 - \frac{\eta^3}{3\cdot 4} + \frac{\eta^6}{3\cdot 6\cdot 4\cdot 7} - \frac{\eta^9}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 4\cdot 7\cdot 10} + \dots\right\} \quad (16)$$

или

$$S = B_1\eta^{1/2} J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\eta^{3/2}\right) + B_2\eta^{1/2} J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\eta^{3/2}\right) \quad (17)$$

в обозначениях бесселевых функций [2]).

Дальнейшее исследование проблемы представляет трудности. Оно было значительно продвинуто Орром и в более позднее время Рэлеем [3]); в работах последних авторов имеются также и дальнейшие литературные указания.

Профессор Соутвелл совсем недавно в своем исследовании этого вопроса [4]), отправляясь от уравнения (5), предположил снова $\sigma = p + iq$, так что множитель, зависящий от времени, представлялся в виде $e^{-qt+i(pt+kx)}$, и затем приступил к тому, чтобы показать, что если $p = 0$, т. е. если возмущение не носит характера колебаний, то допустимые значения q необходимо должны быть положительными, и пока это будет иметь место, движение сдвига будет устойчиво. Он изучил, далее, характер соответствующих видов затухания и иллюстрировал их целым рядом интересных рисунков относительных линий тока.

§ 369. Рейнольдс в своей замечательной работе [5]) рассматривает общую задачу с другой точки зрения. Он предполагает, что турбулентное движение уже имеет место, и старается установить критерий, на основании которого можно решить, возрастает турбулентность, убывает, или остается стационарной.

Для этой цели скорость (u, v, w) разлагается на две составляющие. Положим на момент

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{\tau}\int_{t-1/2\,\tau}^{t+1/2\,\tau} u\,dt, \\ \bar{v} &= \frac{1}{\tau}\int_{t-1/2\,\tau}^{t+1/2\,\tau} v\,dt, \\ \bar{w} &= \frac{1}{\tau}\int_{t-1/2\,\tau}^{t+1/2\,\tau} w\,dt, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

---

[1]) Cp. Stokes, Camb. Trans., X, 106 (1857) (Papers, IV, 77).

[2]) По поводу связи уравнения (15) с уравнением Риккати и с уравнением Бесселя см. Forsyth, Differential Equations, § 111.

[3]) Rayleigh, Stability of Viscous Fluid Motion, Phil. Mag. (6), XXVIII (1914); On the Stability of the Simple Shearing Motion of a Viscous Incompressible Fluid, Phil. Mag. (6), XXX, 329 (1915) (Papers, VI, 266, 341).

[4]) Southwell, Phil. Trans. A, CCIX, 205 (1930).

[5]) Reynolds, On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion, Phil. Trans. A, CLXXVI, 123 (1894) (Papers, II, 535).

так что $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ представляют осредненные значения u, v, w в точке (x, y, z) за промежуток времени от $t-\frac{1}{2}\tau$ до $t+\frac{1}{2}\tau$. С другой стороны, мы можем рассматривать и осредненные значения в момент t по некоторому объему (например, по шару), окружающему точку (x, y, z); тогда будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \overline{u} &= \frac{1}{S}\iiint u\,dx\,dy\,dz, \\ \overline{v} &= \frac{1}{S}\iiint v\,dx\,dy\,dz, \\ \overline{w} &= \frac{1}{S}\iiint w\,dx\,dy\,dz \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

или, кроме того, мы можем образовать еще двойное осредненное значение: по времени для моментов внутри некоторого интервала τ и по объему для точек внутри некоторой области S. Действительные скорости в каждом случае будут выражаться формулами

$$\left.\begin{aligned} u &= \overline{u} + u', \\ v &= \overline{v} + v' \\ w &= \overline{w} + w', \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где u', v', w' могут быть названы компонентами [1]) турбулентного движения. Эти формулы тем самым предполагают, что

$$\overline{u'} = 0, \quad \overline{v'} = 0, \quad \overline{w'} = 0, \qquad (4)$$

где черта над буквами показывает, что имеются в виду осредненные значения, составленные по одному из указанных выше способов.

Для простоты будем принимать определение осредненного значения, установленное формулами (1).

Рейнольдс исходит из динамических уравнений, взятых в виде

$$\left.\begin{aligned} &\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = \varrho X + \frac{\partial}{\partial x}(p_{xx} - \varrho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(p_{yx} - \varrho uv) + \frac{\partial}{\partial z}(p_{zx} - \varrho uw), \\ &\cdots\cdots\cdots

несущей с собой свое собственное количество движения. Поток проекции на ось x количества движеиия через единичные площадки, перпендикулярные к Ox, Oy, Oz, равен соответственно $\varrho u \cdot u$, $\varrho v \cdot u$, $\varrho w \cdot u$. Если мы составим разность потоков количества движения через противоположные грани элемента $\delta x\, \delta y\, \delta z$, то и получим изменение за единицу времени слагающей по оси x количества движения в виде

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\varrho u\, \delta y\, \delta z \cdot u)\, \delta x - \frac{\partial}{\partial y}(\varrho v\, \delta z\, \delta x \cdot u)\, \delta y - \frac{\partial}{\partial z}(\varrho w\, \delta x\, \delta y \cdot u)\, \delta z.$$

Составим теперь осредненное значение каждого члена уравнений (5), используя соотношения (3). Мы будем предполагать, что без существенной ошибки можно положить осредненные значения величин $\overline{u}$, $\overline{uu'}$, $\overline{vv'}$, $\overline{uw}$ . . . соответственно равными $\overline{u}$, 0, 0, 0, . . . Хотя такое предположение и не вполне точно, однако, оно допустимо в тех случаях, когда колебания u, v, w около их средних значений в течение промежутка времени τ достаточно часты. Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} \overline{uu} &= \overline{u}\,\overline{u} + \overline{u'u'}, \\ \overline{uv} &= \overline{u}\,\overline{v} + \overline{u'v'}, \\ \overline{uw} &= \overline{u}\,\overline{w} + \overline{u'w'}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Таким способом получим

$$\left.\begin{aligned} \varrho \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = \varrho X &+ \frac{\partial}{\partial x}(\overline{p}_{xx} - \varrho\overline{u}\,\overline{u} - \varrho\overline{u'u'}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}(\overline{p}_{yx} - \varrho\overline{uv} - \varrho\overline{u'v'}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}(\overline{p}_{zx} - \varrho\overline{uw} - \varrho\overline{u'w'}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

между тем как уравнение непрерывности дает

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0. \tag{9}$$

Уравнения (8) и (9) суть уравнеиия осредненного движения [1]). Следует заметить, что эти уравнения движения примут ту же форму, что и точные уравнения (5), если только мы введем добавочные компоненты напряжения

$$P_{xx} = -\varrho\overline{u'u'}, \quad P_{yx} = -\varrho\overline{u'v'}, \quad P_{zx} = -\varrho\overline{u'w'}. \tag{10}$$

Эти формулы несколько напоминают объяснение вязкости в газах, данное Максвеллом (см. выше).

---

[1]) Или скорее „осредненного от среднего движения", пользуясь выражением Рейнольдса. Он применяет выражение „осредненное движеиие" для системы скоростей (u, v, w), чтобы отличить рассматриваемое движение от „молекулярного движения". Турбулентное движение (u', v', w') он называет „относительным средиим движением".

Уравнения (8) в силу соотношения (9) могут быть написаны в виде

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varrho\overline{u}=\\&=\varrho X+\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{p}_{xx}-\varrho\overline{u'u'}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{p}_{yx}-\varrho\overline{u'v'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{p}_{zx}-\varrho\overline{u'w'}\right).\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

Умножая эти уравнения последовательно на $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ и складывая, получим

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{2}\varrho\left(\overline{u}^2+\overline{v}^2+\overline{w}^2\right)=\varrho\left(X\overline{u}+Y\overline{v}+Z\overline{w}\right)+\\&+\overline{u}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{p}_{xx}-\varrho\overline{u'u'}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{p}_{yx}-\varrho\overline{u'v'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{p}_{zx}-\varrho\overline{u'w'}\right)\right\}+\\&+\overline{v}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{p}_{xy}-\varrho\overline{v'u'}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{p}_{yy}-\varrho\overline{v'v'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{p}_{zy}-\varrho\overline{v'w'}\right)\right\}+\\&+\overline{w}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{p}_{xz}-\varrho\overline{w'u'}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{p}_{yz}-\varrho\overline{w'v'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{p}_{zz}-\varrho\overline{w'w'}\right)\right\}.\end{aligned}\qquad(12)$$

Предположим, прежде всего, что внешних сил X, Y, Z нет, и применим уравнение (12) к области, ограниченной неподвижными стенками, на которых u, v, w и вместе с тем также все $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ исчезают. Если положить

$$T_0=\frac{1}{2}\varrho\iiint\left(\overline{u}^2+\overline{v}^2+\overline{w}^2\right)dx\,dy\,dz,\qquad(13)$$

то получим после нескольких интегрирований по частям

$$\frac{dT_0}{dt}=-\iiint\Phi_0\,dx\,dy\,dz+\iiint\Psi\,dx\,dy\,dz,\qquad(14)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_0=&\,\overline{p}_{xx}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{p}_{yy}\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}+\overline{p}_{zz}\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}+\\&+\overline{p}_{yz}\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{v}}{\partial z}\right)+\overline{p}_{zx}\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}\right)+\overline{p}_{xy}\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\right)=\\&=\mu\left\{2\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}\right)^2+\right.\\&\left.+\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{v}}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\right)^2\right\}\end{aligned}\qquad(15)$$

и

$$\begin{aligned}\Psi=\varrho\left\{\right.&\overline{u'u'}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{v'v'}\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}+\overline{w'w'}\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}+\\&+\overline{v'w'}\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{v}}{\partial z}\right)+\overline{w'u'}\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}\right)+\overline{u'v'}\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\right)\left.\right\}.\end{aligned}\qquad(16)$$

Формула (14) представляет скорость изменения энергии осредненного движения $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$. Первый член в правой части представляет рассеяние, происходящее только от одного осредненного движения, и является величиной, существенно отрицательной. Второй же член представляет работу, которую производят фиктивные напряжения (10) в единицу времени.

Если теперь обозначим через T истинную кинетическую энергию, то можем на основании уже сделанного предположения считать

$$\overline{T} = T_0 + \overline{T}', \tag{17}$$

где

$$T' = \frac{1}{2}\varrho \iiint (u'^2 + v'^2 + w'^2)\, dx\, dy\, dz, \tag{18}$$

т. е. T' — кинетическая энергия пульсационного движения. При помощи метода § 344 можно показать, что при рассматриваемом предположении неподвижности границ, вдоль которых имеет место прилипание, полное рассеяние в среднем равно сумме рассеяний, происходящих от осредненного движения и от пульсационного движения. Поэтому имеем

$$\frac{d\overline{T}}{dt} = -\iiint \Phi_0\, dx\, dy\, dz - \iiint \overline{\Phi}'\, dx\, dy\, dz, \tag{19}$$ [1]

где

$$\Phi' = \mu\left\{2\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2\right\}. \tag{20}$$

Из сравнения с формулой (14) получается

$$\frac{d\overline{T}'}{dt} = -\iiint \overline{\Phi}'\, dx\, dy\, dz - \iiint \Psi\, dx\, dy\, dz. \tag{21}$$

Знак выражения в правой части показывает, будет ли средняя энергия $\overline{T}'$ пульсационного движения (u', v', w') возрастать или убывать.

Первый интеграл, который только один содержит коэфициент вязкости μ, существенно отрицателен; второй интеграл зависит от инерции жидкости и, смотря по обстоятельствам, может быть положительным или отрицательным.

Если в расчет будут приняты внешние силы X, Y, Z и если скорости u, v, w на границе рассматриваемой области не обязательно должны исчезать, то уравнение (14) потребует поправки, а именно добавления членов, которые частью выражают передачу кинетической энергии осредненного движения границам, частью представляют работу, которую производят силы X, Y, Z, и, наконец, работу, которую производят на границе области средние напряжения $\overline{p}_{xx}, \overline{p}_{yx}, \overline{p}_{zx}, \ldots$ и фиктивные напряжения $P_{xx}, P_{yx}, P_{zx}, \ldots$

Уравнение же (21) требует добавления только одного члена, который выражает переход энергии турбулентного движения через границу.

Вывод замечательных формул (14) и (21) и только что намеченные преобразования их при сделанных предположениях кажутся безукоризненными. Однако, при приложении этих формул к действительным случаям

---

[1] Следует заметить, что мы, собственно говоря, принимаем здесь, что диференциал δt элемента времени имеет тот же порядок величины, как и взятый в определениях (1) интервал τ. Способ, примененный в тексте, позволяет избежать рассмотрения некоторых очень длинных уравнений, которые встречаются в оригинале.

следует всегда иметь в виду те предположения и ограничения относительно характера турбулентного движения, которые были сделаны.

Приведем здесь некоторые следствия из формулы (21) [1]). Прежде всего относительная величина членов в правой части не изменится, если изменить знаки при u', v', w' или умножить эти величины на произвольный постоянный множитель. Устойчивость заданного состояния осредненного движения не должна поэтому зависеть от абсолютной величины возмущения. С другой стороны, некоторые комбинации u', v', w' кажутся более благоприятными для устойчивости, чем другие. Так, например, в случае возмущенного ламинарного движения, параллельного оси Ox и происходящего между двумя твердыми плоскими стенками $y=\pm b$, формула (16) приводится к виду

$$\Psi=\varrho\overline{u'v'}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}, \tag{22}$$

так что будут иметь стремление возрастать те возмущения, в которых для $y>0$ преобладают комбинации u', v' с одинаковыми знаками. Это указывает на стремление к выравниванию скоростей в различных слоях. Далее, относительное значение второго члена правой части формулы (21), от которого только и зависит возрастание $\bar{T}'$ становится тем больше, чем больше значения скоростей деформаций $\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}$, ... в осредненном движении. Здесь-то мы и получаем указание на причину того, почему данный вид осредненного движения начинает нарушаться лишь в тот момент, когда будет достигнута определенная критическая скорость.

Если мы применим (видоизмененные) формулы к течению в цилиндрической трубе постоянного сечения при условии, что градиент давления $\left(-\frac{d\bar{p}}{dx}\right)$ равен нулю, то получим

$$\frac{dT_0}{dt}=\varrho X\pi a^2-2\pi\int_0^a\Phi_0 r\,dr+2\pi\int_0^a\Psi r\,dr \tag{23}$$

и

$$\frac{d\bar{T}'}{dt}=-\int\int\bar{\Phi}'\,dy\,dz-2\pi\int_0^a\Psi r\,dr, \tag{24}$$

где

$$\Phi_0=\mu\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}\right)^2,\quad \Psi=\varrho\overline{u'q'}\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}. \tag{25}$$

Рассматриваемая здесь область лежит между двумя поперечными сечениями трубы (с площадью πa^2), находящимися друг от друга на расстоянии *единицы длины*; ось x совпадает с осью трубы и q обозначает составляющую скорости, перпендикулярную к этой оси. При этом, конечно, предполагается, что $\bar{q}=0$ и $\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}=0$, так что осредненное состояние для каждого сечения трубы во всех отношениях одно и то же. Условия установившегося движения мы получим, если члены в правой части формул (23) и (24) положим равными нулю.

Рейнольдс подробно рассматривает задачу для двух измерений, а именно, тот случай, когда течение, параллельное оси x, происходит между двумя неподвижными стенками $y=\pm b$. Он предполагает в согласии с § 330, что $\bar{u}$

---

[1]) Ср. Lorentz, Über die Entstehung turbulenter Flüssigkeitsbewegungen und über den Einfluss dieser Bewegungen bei der Strömung durch Röhren, Abh. über theoret. Physik, Leipzig, 1907, 1, 43. Эта работа представляет в исправленном виде работу, опубликованную в 1897 г.

изменяется по закону $b^2 - y^2$, и старается найти для потока минимум, совместимый с условием $\frac{d\overline{T'}}{dt} = 0$; но за всем, что относится к этому исследованию, мы отсылаем к оригинальной статье. Рейнольдс получает следующий результат: критическое значение отношения $\frac{u_0 b}{\nu}$, где u_0 — осредненное значение $\overline{u}$ в интервале $y = \pm b$, должно превосходить значение 258 [1]).

Сопротивление жидкостей.

§ 370. Сопротивление жидкостей имеет значение во многих практических вопросах, например, в вопросах, относящихся к движению судов, к полету снарядов и к действию ветра на сооружения. Хотя вопрос о сопротивлении жидкостей благодаря своему значению для авиации разрабатывался в последнее время с возросшей энергией, все же наши знания в этой области все еще имеют, главным образом, эмпирический характер.

Мы видели следующее: если изолированное тело движется в идеальной жидкости в некотором удалении от границы (если последняя вообще существует), то не происходит никакой потери энергии; если в частности движение жидкости начинается из состояния покоя и, следовательно, является движением невихревым и нециклическим, то влияние его может быть вполне охарактеризовано изменением массы твердого тела [2]) (§§ 92, 117).

Первая попытка при помощи точных теоретических рассуждений получить результат, менее противоречащий обычному опыту, содержится в исследованиях Кирхгофа и Рэлея, относящихся к плоской задаче о движении плоской пластинки (§§ 76, 77). Следует заметить, что движение жидкости в такого рода задачах уже нельзя считать совершенно свободным от вихрей, так как поверхность разрыва равносильна вихревому слою (§ 151).

Помимо того факта, что вязкость здесь не учитывается, эта теория встречает еще то возражение, что следующая за пластинкой неограниченная масса „мертвой воды“ должна обладать бесконечно большой кинетической энергией, и потому, а также и по другим соображениям, необходимо будет признать, что методы Гельмгольца

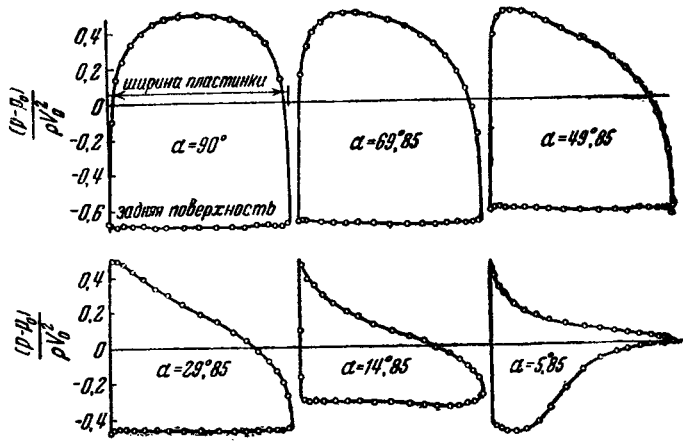
---

[1]) Другой результат получил Sharpe, On the Stäbility of the Motion of a Viscous Liquid, Trans, Amer. Math. Soc., VI, 496 (1905), который исследовал также течение в цилиндрических трубах. Эта задача, так же как задача равномерного движения сдвига между параллельными плоскостями, подробнее была рассмотрена Орром, см. выше, стр. 850. Расхождения в числовых результатах происходят, повидимому, от разницы в формах рассматривавшихся возмущений. Последняя из названных задач рассматривалась также Лоренцом (см. выше).

[2]) Отсутствие сопротивления в собственном смысле авторами континента часто обозначается как „парадокс Даламбера“. Рэлей показал способом последовательных приближений, что этот парадокс имеет место также и в случае сжимаемой (идеальной) жидкости, пока скорость переноса остается меньше, чем скорость звука, Phil. Mag. (6), XXXII, 1 (1916).

и Кирхгофа собственно можно применять только к случаю *свободной* поверхности, такой, как струя[1]).

Вычисления Кирхгофа и Рэлея дают верный результат, что сопротивление пропорционально квадрату скорости, как это и требуется на основе их допущений по теореме импульсов[2]) и как это подтверждается внутри некоторых пределов и практикой, но распределение давления по поверхности пластинки оказывается совершенно различным. Имеется не только избыток давления на передней стороне, но и недостаток давления, или подсос, на задней; оба обстоятельства способствуют увеличению общего сопротивления. Эти результаты иллюстрируются на прилагаемых диаграммах (фиг. 83)[3]),



Фиг. 83.

где ордината указывает распределение давления и подсоса по ширине пластинки при различных углах α наклона ее к направлению потока.

Были попытки со стороны некоторых авторов распространить методы Кирхгофа на случай криволинейной пластинки[4]), но по указанной выше причине они имели малое значение для практических вопросов.

§ 370a. Двойная цепочка вихрей с противоположными направлениями вращений, следующая в хвосте за вытянутой (в поперечном направлении) пластинкой или вообще за цилиндрическим телом, изображалась

---

[1]) Kelvin, Nature, I, 524 (1894) (Papers, IV, 215).

[2]) Ср. Newton, Principia, lib. II, prop. 33.

[3]) Из работы Fage и Johannsen, On the Flow of Air behind on Inclined Flat Plate of Infinite Span, Aeronautical Research Committee, R. and M. № 1104 (Proc. Roy. Soc., CXVI, 170 (1927). За некоторыми более ранними измерениями можно отослать к Стантону, On the Resistance of Plane Surfaces in a Uniform Current of Air, Proc. Inst. Civ. Eng., CLVI, 78 (1904); Эйффель, La Résistance de l'Air, Paris (1910).

[4]) Ссылки были даны на стр. 133.

многими исследователями, и иногда очень удачно, с помощью фотографии[1]). При некоторой, достаточно умеренной скорости вихри последовательно отделяются с двух сторон тела, и общее расположение вихрей оказывается аналогичным тому случаю шахматного расположения, который был исследован Карманом (§ 156); исключение составляло только то обстоятельство, что вихри не являлись концентрированными в точках, что принималось для упрощения исследования. Эти исследования и послужили основой теории сопротивления для плоского случая. Предполагая движение всюду, за исключением изолированных вихрей, безвихревым, Карман из рассмотрения количеств движения выводит формулу[2])

$$\frac{\varrho k b}{a}(U-2V)+\frac{\varrho k^2}{2\pi a}, \tag{1}$$

где U обозначает скорость тела относительно жидкости, а остальные обозначения те же, что и в § 156. В частности V обозначает скорость цепочки вихрей относительно невозмущенной жидкости. В устойчивом случае мы нашли, что

$$\frac{b}{a}=0{,}281,\quad k=\sqrt{8}\cdot Va. \tag{2}$$

Если мы подставим эти значения в (1), то все еще останутся неизвестными отношение $\frac{V}{U}$ и зависимость между b (или a) и размерами препятствия. Формула (1) только тогда становится полной формулой сопротивления, когда эти неизвестные будут как-то определены. В силу диффундирующей природы реальных вихрей точное наблюдение их затруднено, но все же оно было выполнено Карманом для воды и Фаге для воздуха.

Прежде чем оставить эту тему, следует указать, что и для объяснения многих явлений акустики мы должны обращаться к образованию двойной цепочки вихрей. Известным примером является тот характерный звук, который вызывается действием порыва ветра на деревья. Здесь мы имеем образование при соответствующих условиях тонов[3]) различной силы. В аэронавтике мы встречаемся с завыванием тросов аэропланов[4]) и ревом пропеллера различной силы.

---

[1]) Например, Ahlborn, Ueber den Mechanismus des hydrodynamischen Widerstandes, Hamburg (1902); Bénard, Comptes Rendus, CXLVII, 839 (1908); Kármán and Rubach, Phys. Zeitschr. (1913), стр. 49; Prandtl, The generation of vortices..., London (1927); Rosenhead, Proc. Roy. Soc. A, CXXIX, 115 (1930).

[2]) Независимое вычисление проф. Synge, Proc. Roy. Irish. Acad., XXXVI, A, 95 (1929) в предположении существования только „полубесконечной" цепочки вихрей приводит к аналогичному результату. Соответствующая формула для случая движения жидкости между параллельными стенками получена Rosenhead и (приближенно) Glauert, см. выше, стр. 288.

[3]) Rayleigh, Phil. Mag. (6), VI, 29 (1915) (Papers, VI, 315).

[4]) Relf, Phil. Mag. (6) XLII, 173 (1921).

На основе рассмотрения размерностей Рэлей заметил, что частота тона N, производимого воздухом, набегающим на цилиндрический провод диаметра D, должна удовлетворять формуле типа

$$N = \frac{U}{D} f\left(\frac{\nu}{UD}\right). \tag{3}$$

Эмпирическая же формула, которую он построил на основании некоторых наблюдений Струхаля, имеет вид

$$\frac{ND}{U} = 0{,}195\left(1 - \frac{20{,}1\nu}{UD}\right). \tag{4}$$

Теперь мы можем сравнить этот результат с частотой, с которой вихри отделяются от круглого цилиндра в потоке воды по наблюдениям Кармана. Его результаты для двух различных скоростей эквивалентны формулам

$$N = 0{,}207\,\frac{U}{D} \text{ и } 0{,}198\,\frac{U}{D}.$$

Фаге, экспериментируя в воздухе, нашел, что для значительного интервала скоростей частота вихрей, отделяющихся с одного края *плоского лезвия*, перпендикулярного к потоку, может быть представлена хорошо согласующейся с наблюдениями формулой

$$N = 0{,}146\,\frac{U}{D},$$

где D — ширина лезвия. Аналогичные наблюдения Кармана для воды дают числовой множитель в пределах от 0,139 до 0,145.

§ 370b. Единственный случай, когда действие *равномерного*[1]) потока идеальной жидкости на погруженное в него тело дает результирующую силу, есть случай плоского контура с циркуляцией вокруг него. Эта результирующая сила есть подъемная сила, перпендикулярная к скорости потока и равная на единицу длины

$$L = k\varrho U, \tag{1}^{2})$$

где U — скорость потока, а k — циркуляция. Эта теорема, содержание которой совершенно не зависит от вида и размера поперечного сечения, и составляет основу современной теории подъемной силы крыла аэроплана[3]). Доказательство этой теоремы было уже дано отдельно в § 72b, но важность этого вопроса может оправдать включение дополнительного доказательства, которое имеет менее искусственный характер.

---

[1]) Необходимость такого ограничения иллюстрировалась в §§ 72b, 143.

[2]) Kutta, см. выше, стр. 102; теорема была дана в неопубликованной диссертации в 1902 г. Первое опубликованное сообщение принадлежит Жуковскому (1906).

[3]) Lanchester, Aerodynamics, London (1907); Prandtl, Gött. Nachr. math. phys. Classe (1918), (1919).

Если (u, v) суть составляющие скорости жидкости, исчезающие в бесконечности, то формула для давления представляется в виде

$$\frac{p}{\varrho} = \text{const.} - \frac{1}{2}\{(u-U)^2+v^2\}, \tag{2}$$

так как движение относительно тела является установившимся. Предполагая, что l, m суть направляющие косинусы внешней нормали к элементу δs контура поперечного сечения, результирующую давлений на тело в направлении оси x получим в виде

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}\varrho\int(u^2+v^2)\,l\,ds - \varrho U\int ul\,ds = \\ &= -\varrho\iint\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx\,dy - \varrho U\int ul\,ds = \\ &= \varrho\int(lu+mv)\,u\,ds - \varrho U\int ul\,ds. \end{aligned} \tag{3}$$

Мы здесь опускаем два криволинейных интеграла, взятых по бесконечно большому контуру; они обращаются в нуль, так как скорость в бесконечности имеет порядок $\frac{1}{r}$, где r — расстояние от начала.

Таким же способом мы найдем

$$Y = \varrho\int(lu+mv)\,v\,ds - \varrho U\int um\,ds. \tag{4}$$

Но на поверхности контура мы имеем

$$lu+mv = lU, \tag{5}$$

следовательно, $X=0$ и

$$Y = \varrho U\int(lv-mu)\,ds = \varrho kU. \tag{6}$$

Случай эллиптического цилиндра, который содержит в себе как предельную форму случай плоской пластинки, может быть исследован на основании формулы, данной в конце § 72. При указанных там обозначениях давления жидкости на эллиптический цилиндр с полуосями a и b (когда $\omega=0$) приводятся к силе

$$X = -\pi\varrho kV,\quad Y = \pi\varrho kU \tag{7}$$

и к паре

$$N = -\pi\varrho UV(a^2-b^2). \tag{8}$$

§ 371. Замечательно то, что формула

$$R = k\varrho U^2 \tag{1}$$

для сопротивления на единицу поверхности [§ 366 (6)] с приблизительно тем же значением коэфициента k имеет силу для обширного класса случаев турбулентного течения вдоль неподвижной граничной поверхности большой протяженности. Она, например, применима для трения ветра, дующего[1]) над ровной поверхностью, и для сопротивления морского дна приливным течениям. Основываясь на этом, Тэйлор в своей интересной работе[2]) вычислил по известным ско-

[1]) G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. A, XCII, 196 (1915).

[2]) Taylor, см. выше, стр. 710 и Monthly Notices R. A. S., LXXX, 308 (1920).

ростям течения скорость рассеяния энергии в Ирландском море. Эту скорость можно также вычислить совершенно другим способом, а именно по скоростям и высотам приливных течений в северном и южном проходах при входе и выходе и по работе, произведенной силами притяжения луны. Результаты обоих этих способов вычисления были порядка $3\cdot10^{17}$ эргов в секунду. Жеффрей [1]) на основании тех же соображений произвел оценку приливного рассеяния для всего океана и получил при этом результат $2{,}2\cdot10^{19}$. Рассеяние же, которое оказывается необходимым, чтобы объяснить ускорение среднего движения луны, равно $1{,}41\cdot10^{19}$.

Что же касается полного сопротивления жидкости (или газа, когда сжатие его незначительно) при поступательном движении в соответствующих направлениях подобных между собою тел произвольной формы, то на основании рассмотрения размерностей можно притти к формуле вида

$$F=\varrho U^2l^2f\left(\frac{Ul}{\nu}\right), \tag{2}$$

где l обозначает какую-либо длину, определяющую размеры тела (например, радиус в случае шара). Приблизительная пропорциональность U^2, найденная во многих случаях, указывает на то, что в этих случаях функция f оказывается приблизительно постоянной и что сопротивление поэтому почти не зависит от вязкости. Как и в рассмотренных ранее случаях, это не означает, что вязкость не оказывает никакого влияния; это влияние сказывается наряду с сопротивлением скольжению на поверхности в установлении того *режима*, который в конце концов в действительности наступает.

Формула (2) служит основанием метода, при помощи которого определяют силы, действующие на воздушный корабль или крыло аэроплана, по опытам над уменьшенною моделью в аэродинамической трубе. Множитель $f\left(\frac{Ul}{\nu}\right)$ представляет в действительности то, что определяется как коэфициент сопротивления. Если значение числа Рейнольдса $\frac{Ul}{\nu}$ взять одинаковым как в случае модели, так и в случае натуральных размеров, то силы будут пропорциональны соответствующим значениям ϱU^2l^2.

Относительная малость линейных размеров l в модели может компенсироваться до некоторого предела увеличением скорости U или, как это делается в трубах больших скоростей, применением сильно сжатого воздуха, так как для газа при данной температуре значение ν обратно пропорционально плотности.

Возрастание коэфициента сопротивления от нуля носит произвольный характер; с некоторого момента он начинает уменьшаться и затем возрастать, обнаруживая несомненное стремление к постоянному значению.

---

[1]) Jeffreys, Phil. Trans. A, CCXXI, 239 1920).

Форма тела наименьшего сопротивления может быть определена лишь опытным путем. При обычном очертании воздушного корабля, профиль которого тупой спереди и суживается к концу, центральные линии тока плотно прилегают к профилю, и турбулентность оказывается заметной только в тонком слое около поверхности тела и в кильватере. Подобная „обтекаемая" форма, как ее называют, применяется также и для поперечных сечений аэропланных стоек и троссов.

Метод „размерностей", который был использован в §§ 365, 366, может быть представлен в иной форме[1]). Возьмем одно из динамических уравнений движения несжимаемой жидкости, например,

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta u, \tag{3}$$

и представим себе другое состояние движения той же или другой жидкости, отличающееся только масштабами линейных размеров и времени. Отличая штрихами буквы, относящиеся к этому состоянию, мы полагаем, что x', y', z' находятся в постоянном отношении соответственно к x, y, z, а t' — в постоянном отношении к t. Члены в том уравнении, которое соответствует уравнению (3), будут отличаться все от соответствующих членов уравнения (3) на один и тот же множитель только тогда, когда будут существовать следующие равенства отношений:

$$\frac{u'}{t'}:\frac{u}{t}=\frac{u'^2}{x'}:\frac{u^2}{x}=\frac{p'}{\varrho' x'}:\frac{p}{\varrho x}=\frac{\nu' u'}{x'^2}:\frac{\nu u}{x^2}. \tag{4}$$

Эти равенства эквивалентны

$$u':u=\frac{x'}{t'}:\frac{x}{t};\ p':p=\varrho' u'^2:\varrho u^2;\ \frac{u'x'}{\nu}=\frac{ux}{\nu}. \tag{5}$$

Уравнение неразрывности будет, очевидно, также удовлетворено новыми переменными. Мы заключаем отсюда, что видоизмененное состояние движения будет динамически возможным при условии, что значения чисел Рейнольдса $\frac{Ul}{\nu}$ будут одинаковыми, где U и l будут представлять соответственно характерную скорость и характерный линейный размер. Тогда давления в соответствующих точках будут пропорциональны ϱU^2, а силы на соответствующие площадки — $\varrho U^2 l^2$.

Пограничный слой.

§ 371a. Совершенно ясно, что всякая рациональная теория сопротивления должна также учитывать и то абсолютное сопротивление, которое тело противопоставляет скольжению жидкости вдоль его

---

[1]) Ср. Helmholtz, Berl. Ber., июнь 26, 1873 (Wiss. Abh., I, 158), где приведены некоторые интересные применения принципов динамического подобия.

поверхности. С другой стороны, небольшого наблюдения достаточно, чтобы заметить, что переход от скорости на поверхности к скорости жидкости вблизи нее часто совершается на очень коротком расстоянии. В самом деле, когда тело достаточно плавной формы, такое, как шар или цилиндр, или крыло аэроплана, движется в такой подвижной жидкости, как вода, со скоростью, значительно превышающей те скорости, которые имелись в виду в исследованиях §§ 337—343, то оказывается, что вихри сосредоточиваются почти только в узкой полоске вдоль передней части поверхности и в хвосте. К изучению этой переходной области как с математической, так и с экспериментальной стороны и были направлены в течение некоторого времени усилия многих исследователей. Конечно, здесь не предполагается существование определенной поверхности раздела между слоем и прилегающей жидкостью, ибо сам переход должен быть непрерывным, но обычно бывает возможно указать предел, и зачастую очень тесный, внутри которого этот переход полностью практически завершается.

Для последующего удобнее представлять тело покоющимся, а жидкость обтекающей его со скоростью U, постоянной до тех пор, пока она не претерпевает возмущений от присутствия тела.

Условия будут наиболее простыми, если рассматривать плоскую задачу о пластинке или плоскости, помещенных по потоку. Пограничный слой здесь начинается в самом переднем крае или вблизи него и постепенно утолщается с возрастанием расстояния (x) от края. До тех пор пока местное число Рейнольдса $\frac{Ux}{\nu}$ будет ниже некоторого предела (приблизительно порядка 10^5), движение внутри слоя будет установившимся и часто обозначается как „ламинарное“ в том смысле, что линии тока будут итти почти параллельно поверхности. Когда же этот предел будет превзойден, тогда слой становится турбулентным, и его толщина возрастает значительно быстрее.

Ламинарное течение в слое изучалось математически различными авторами. Точные уравнения установившегося движения, а именно

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\varrho\,\partial x}+\nu\Delta_1 u,\\ u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\varrho\,\partial y}+\nu\Delta_1 v_1 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \qquad (2)$$

едва ли могут быть подвергнуты разрешению, если не прибегать к различным возможным упрощениям.

Возьмем начало на переднем крае, а ось x вдоль пластинки в направлении течения. Так как v сравнительно мало, то второе уравнение показывает, что p практически не зависит от y. Затем мы пренебрегаем $\frac{\partial p}{\partial x}$, так как оно обращается в нуль для больших зна-

чений y, где поток не возмущается присутствием пластинки. Далее, так как $u\frac{\partial u}{\partial x}$ обращается в нуль на поверхности пластинки, то значением $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ внутри пограничного слоя можно пренебречь по сравнению со значением $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Уравнения (1), таким образом, приводятся к одному уравнению

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{3}$$

к которому, конечно, надо присоединить уравнение (2). Эти рассуждения и составляют исходную точку зрения работы Прандтля и Блазиуса [1]). Эти приближения более подробно были разъяснены Блазиусом; в конечном счете они могут быть проверены в получаемых решениях. Пограничные же условия представлялись в виде $u=0$, $v=0$ для $y=0$ и $u=U$ для $y\to\infty$.

После несколько сложных вычислений Блазиус для тангенциального напряжения на пластинку получает следующий результат:

$$(p_{xy})_{y=0}=0{,}332\,\varrho U^2\sqrt{\frac{\nu}{Ux}}. \tag{4}$$

Предполагается, конечно, что условия для ламинарного движения в слое выполнены, т. е. что значение $\frac{Ux}{\nu}$ не превышает ранее указанного предела. Если это имеет место для всей ширины (l) пластинки, то полное сопротивление одной ее стороны будет равно

$$\int_0^l p_{xy}\,dx=0{,}664\,U^{3/2}l\sqrt{\frac{\nu}{Ul}}; \tag{5}$$

следовательно, это сопротивление пропорционально $U^{3/2}$.

Несколько иным путем подошел к этому вопросу Карман [2]). Он вычислил изменение количества движения в направлении оси x в области, ограниченной пластинкой ($y=0$), двумя соседними ординатами кривой

$$y=\eta(x), \tag{6}$$

---

[1]) Prandtl, Über Flüssigkeitsbewegung mit kleiner Reibung (1904), перепечатано в Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik..., Göttingen (1927); Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung (Dissertation), Leipzig (1907). Интересное независимое рассмотрение вопроса смотреть у R. Mises, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., VII, 425 (1927).

[2]) Kármán, Abh. des aerodynamischen Instituts, Aachen (1921).

которая представляет границу пограничного слоя, и прилегающей дугой этой кривой.

На фиг. 84 имеем

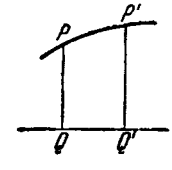
$$QQ' = \delta x,\ PQ = \eta,\ P'Q' = \eta + \delta\eta.$$

Поток количества движения через грань $P'Q'$ превосходит такой же поток через грань PQ на величину

$$\frac{d}{dx}\int_0^\eta \varrho u^2\, dy \cdot \delta x.$$

Далее, поток протекающей жидкости через $P'Q'$ превосходит такой же поток через PQ на величину

$$\frac{d}{dx}\int_0^\eta \varrho u\, dy \cdot \delta x,$$



Фиг. 84.

и эта величина в точности должна быть равна количеству жидкости, протекшей в единицу времени внутрь слоя через PP', где скорость почти равна U и параллельна оси x. Следовательно, полное изменение количества движения в единицу времени через все границы области будет

$$\left\{\frac{d}{dx}\int_0^\eta \varrho u^2\, dy - U\frac{d}{dx}\int_0^\eta \varrho u\, dy\right\}\delta x.$$

Эта величина должна быть приравнена тем силам, которые действуют в направлении оси x на жидкость, занимающую в данный момент рассматриваемую область. Они составляются из компоненты давления

$$-\frac{dp}{dx}\eta\,\delta x$$

и силы трения на самой пластинке

$$-\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}\delta x.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{d}{dx}\int_0^\eta u^2\, dy - U\frac{d}{dx}\int_0^\eta u\, dy = -\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx} - \nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}, \qquad (7)$$

которое и представляет „интегральное соотношение" Кармана [1]). Следует заметить, что до сих пор кривая (6) могла быть проведена, как угодно внутри той области, где переход от скорости нуль на пластинке до скорости U потока полностью завершается. Таким образом, это уравнение еще ничего не говорит о „толщине" пограничного слоя или о характере его изменения с x. Для последнего мы должны будем сделать более или менее правдоподобное предположение о распределении скорости u внутри интервала от 0 до η, благодаря чему результат по необходимости будет зависеть до некоторой степени от сделанного частного предположения. При этом должны быть удовлетворены условия: $u=U$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ для $y=\eta$ и $u=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ для $y=0$; последнее условие вытекает из уравнения (3). Эти условия могут быть удовлетворены, например, функцией

$$u=U\sin\frac{\pi y}{2\eta}. \tag{8}$$

Подставляя в (7), где член $\frac{\partial p}{\partial x}$ должен быть опущен, мы найдем

$$\frac{d\eta}{dx}=\frac{\pi^2}{4-\pi}\,\frac{\nu}{U\eta}, \tag{9}$$

и, следовательно,

$$\eta=4{,}80\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \tag{10}$$

в предположении, что слой начинается у переднего края.

Тогда получаем

$$(p_{xy})_{y=0}=\frac{\pi}{2}\,\frac{\mu U}{\eta}=0{,}328\,\varrho U^2\sqrt{\frac{\nu}{Ux}}, \tag{11}$$

что хорошо приближается к результату (4) Блазиуса.

Принятое частное допущение дает

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\pi U y}{2\eta^2}\cos\frac{\pi y}{2\eta}\,\frac{d\eta}{dx},$$

откуда

$$v=U\,\frac{d\eta}{dx}\left\{\frac{y}{\eta}\sin\frac{\pi y}{2\eta}-\frac{2}{\pi}\left(1-\cos\frac{\pi y}{2\eta}\right)\right\}. \tag{12}$$

---

[1]) Оно может быть также получено из уравнения (1) с помощью интегрирования по y от 0 до η с учетом уравнения неразрывности. Так, будем иметь

$$\int_0^\eta\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy=\int_0^\eta u\frac{\partial u}{\partial x}+[uv]\Big|_0^\eta-\int_0^\eta u\frac{\partial v}{\partial y}\,dy=$$

$$=\int_0^\eta\frac{\partial(u^2)}{\partial x}\,dy+U(v)_\eta=\int_0^\eta\frac{\partial(u^2)}{\partial x}\,dy+U\int_0^\eta\frac{\partial v}{\partial y}\,dy=\int_0^\eta\frac{\partial}{\partial x}(u^2-Uu)\,dy.$$

Последняя часть эквивалентна левой части уравнения (7).

§ 371b. Если нетурбулентный поток набегает на тело с непрерывной кривизной, то в области перед телом, вблизи по крайней мере передней части поверхности, движение остается, несомненно, безвихревым и имеет в общем тот же характер, который указан на фигурах 13 и 29[1]). В частности, имеется центральная линия тока, примыкающая к телу в передней „точке застоя", характеризуемой нулевой скоростью. Здесь начинается пограничный слой, который, будучи ламинарным, стелется по поверхности с обеих сторон до некоторого расстояния; в случае круглого цилиндра, например, он даже доходит до 70 или 80° от точки застоя. В случае же крыла аэроплана он может распространяться почти до задней кромки. Обстоятельства, конечно, меняются в зависимости от формы тела, а также от скорости U потока. Обычно встречается такая точка, в которой слой становится турбулентным и отрывается от поверхности, оставляя между собой и телом область сильной турбулентности с возвратным потоком вдоль поверхности.

Плоский случай был изучен теоретически Блазиусом и другими при помощи криволинейных координат: дуги s профиля и нормали n, проведенной от поверхности внутрь жидкости. Уравнения, принятые для пограничного слоя, тогда принимают вид

$$u\frac{\partial u}{\partial s}+v\frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial p}{\varrho\,\partial s}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial n}=0, \tag{14}$$

причем эффектом от кривизны мы пренебрегаем[2]). Мы пренебрегаем попрежнему величиной $\frac{\partial p}{\partial n}$, но величина $\frac{\partial p}{\partial s}$ здесь уже не обращается в нуль, как это предполагалось в случае плоской пластинки. В безвихревой области вблизи поверхности имеет место уравнение Бернулли

$$\frac{p}{\varrho}+\frac{1}{2}U^2=\text{const.}, \tag{15}$$

и, следовательно,

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s}=U\frac{\partial U}{\partial s}. \tag{16}$$

Положение точки на поверхности, в которой происходит „отрыв" слоя, определяется из условия $\frac{\partial u}{\partial n}=0$.

---

[1]) Сравнение результатов экспериментальных измерений нормальных давлений в различных точках вытянутого эллипсоида вращения с теоретическими данными, вычисленными в §§ 104, 105, было выполнено R. Iones. Phil. Trans. A, CCXXVI, 231 (1927). Когда эллипсоид был направлен острым концом к потоку, совпадение получилось очень хорошим почти по всей длине.

[2]) Сравнить то, что получится при $r\to\infty$ в уравнениях § 328a в полярных координатах.

Блазиус в названной работе применил эти уравнения к случаю цилиндра (произвольной формы сечения), расположенного симметрично по отношению к скорости потока, и затем далее более подробно рассмотрел частный случай кругового сечения. При установившемся *режиме* было найдено, что отрыв происходит где-то около 90° от передней точки застоя. С другой стороны, если цилиндр приходит в движение из состояния покоя либо внезапно, либо с постоянным ускорением, отрыв начинается при 180° и затем переходит вперед. В последнем случае он установил формулу для сопротивления, обусловленного отчасти нормальными давлениями, а отчасти тангенциальными напряжениями [1]).

Эти вычисления выполнены с замечательным аналитическим искусством, но все же результаты нуждаются в некотором уточнении в силу того допущения, что скорость U вне пограничного слоя такая же, как если бы жидкость свободно скользила вдоль поверхности. Строгой точности на самом деле для этого не требуется. Последующие авторы принимали для U то алгебраическое выражение от s — дуги профиля, которое можно поставить в соответствие с экспериментальными значениями p [2]).

В приведенных выше исследованиях §§ 337, 342 и др. предполагалось, что число Рейнольдса $\left(R=\frac{Ul}{\nu}\right)$ не превосходит очень малое числовое значение. В тех же случаях, которые мы теперь рассматриваем, напротив, значения R могут быть очень большими и в силу линейных размеров, и в силу малой кинематической вязкости обыкновенных жидкостей. В связи с этим очень интересный вопрос поставил Озеен: каков будет предельный характер движения жидкости в любом данном случае, если $\nu \to 0$ или $R \to \infty$? Конечно, нельзя будет ожидать, что в этом случае будет иметь место совпадение с тем результатом, который мы получим, когда *с самого начала* предположим $\nu = 0$.

Вопрос этот кажется очень трудным и почти безнадежным, если исходить из точных уравнений гидродинамики. Озеен же взял за основу линеаризированные уравнения (6) § 342, но здесь мы встречаем a priori то затруднение, что сами эти уравнения получены в результате пренебрежения квадратичными членами, что, как известно, можно делать только в случаях, когда число Рейнольдса очень мало. Поэтому они едва ли могут быть приняты без каких-либо опасений в качестве основы для установления того, что будет в случае реальной жидкости, когда R неограниченно возрастает.

Если оставить это в стороне, то исследования Озеена имеют значительный математический интерес. Они не могут быть здесь воспроиз-

---

[1]) Аналогичные вычисления для трехмерного случая тела вращения, ось которого совпадает с направлением потока, были выполнены Boltze, Göttingen (1908) (Dissertation). Подробное применение сделано для шара.

[2]) Pohlhausen, Abh. d. aerodynam. Inst. Aachen (1921); Goldstein, Camb. Proc., XXVI, 1 (1930).

ведены [1]), но на общих заключениях можно коротко остановиться Рассматривая, например, установившееся перемещение тела в неограниченной массе жидкости, он нашел, что решение в той цилиндрической области, которую уже прорезало само тело (и которую мы можем на момент называть „хвостом"), будет иметь совершенно другой аналитический характер, чем в остальной безграничной области. Во всей последней области движение оказывается безвихревым, и жидкость, следовательно, плавно скользит вдоль передней стороны тела. В хвосте, напротив, нет скольжения на задней стороне поверхности, и движение является вихревым (но не чисто „турбулентным"). Вдоль той цилиндрической поверхности, где смыкаются эти две области, имеет место непрерывность нормальной компоненты скорости и разрыв тангенциальной компоненты, сопровождающийся недопустимым разрывом давления. Аналитическое решение в этом направлении было получено Цейлоном [2]) для частных случаев круглого цилиндра, круглого диска и полусферы, перемещающейся вперед либо искривленной частью, либо плоским дном; при этом автор прибегает к некоторым искусственным приемам с целью избежания того недопустимого разрыва, который был указан выше. Как и требуется, результаты дают почти адэкватную картину того, что имеет место в действительных случаях. В частности для давлений обнаруживается тот факт, что теоретическое распределение давлений по передней части цилиндра находится в общем согласии с экспериментальными данными. Это и должно получаться почти для всякой приемлемой конфигурации безвихревого движения в примыкающей области (ср. § 371a). Но точка, в которой хвост отделяется от тела, граница хвоста и его внутреннее строение совершенно отличны от того, что наблюдается в действительности. Еще более сильное расхождение, несомненно, будет обнаруживаться, если этот метод применить к дирижаблю или к крылу аэроплана [3]).

§ 371c. Когда мы переходим к рассмотрению *турбулентного* движения вокруг тела, обозначения u, v должны пониматься в некотором статистическом смысле, как, например, осредненные по времени за очень короткий интервал. Отмечая этот измененный смысл обозначений, как и в § 369, черточкой над соответствующими буквами, перепишем уравнение (7) § 371a в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\eta \bar{u}^2\,dy - U\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\eta \bar{u}\,dy = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\eta - \nu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)_{y=0}. \qquad (1)$$

---

[1]) Полное изложение дано со ссылками в руководстве, цитированном выше, на стр. 775.

[2]) Zeilon, On potential problems in the theory of fluid resistance, Stockholm (1924). См. также добавление Цейлона к книге Озеена, упомянутой выше, на стр. 775.

[3]) Я нашел, что аналогичная критика, но еще с бóльшими подробностями была высказана F. Noether, Handb. d. phys. u. techn. Mechanik, Leipzig (1928), стр. 792.

Здесь же следует заметить, что среднее значение $(\overline{u^2})$ от квадрата скорости не тождественно значению квадрата средней скорости $(\bar{u})$. Это различие, каково бы ни было его практическое значение, не отмечалось авторами работ по рассматриваемому вопросу. Тогда, как можно заметить, если скорость турбулентного потока определяется комбинацией трубки Пито с трубкой статического давления (§ 24), эта комбинация вернее всего показывает скорость „среднего квадрата".

На основе уравнения (1) были сделаны попытки рассмотреть случаи турбулентного течения, но всякий раз требовалось по необходимости какое-либо предположение о распределении средней скорости в пограничном слое или другие эквивалентные допущения. Принимаемая обычно формула

$$\frac{\bar{u}}{U} = \left(\frac{y}{\eta}\right)^n \tag{2}$$

нуждалась в уточнении, так как она обращает $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ либо в нуль, либо в бесконечность при $y \to 0$, за исключением того недопустимого случая, когда $n = 1$ [1]).

Здесь мы находимся уже на границах теории. Дальнейшие наши знания по этой части предмета могут быть извлечены из эксперимента, и за этим необходимо будет обращаться к опубликованным работам различных аэродинамических лабораторий. Литература эта очень обширна и непрерывно увеличивается в своем объеме; она не может быть изложена здесь в сжатом виде.



Фиг. 85.

К ранее рассмотренному вопросу о подъемной силе крыла аэроплана можно добавить одно замечание. Характер обтекания *идеальной* жидкостью крыла аэроплана показан на фиг. 85, причем показана только одна центральная линия тока, но представление о полной картине может быть составлено из фиг. 18 на стр. 110. Реальная жидкость не может обтекать подобным способом в силу наличия сопротивления скольжению, а из-за этого получается бесконечная скорость и, следовательно, бесконечное отрицательное давление на остром конце задней кромки. Предположение наличия тонкого пограничного слоя, устраняя эти бесконечности, не улучшает значительно

[1]) Формула, свободная от этого недостатка, например,

$$y = \frac{\bar{u}}{a} + \left(\eta - \frac{U}{a}\right)\left(\frac{\bar{u}}{U}\right)^n,$$

где

$$a = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)_{y \to 0},$$

принималась в работе Hegge (при $n = 7$), Publications of the Delft aeronautical laboratory, № 6 (1924).

общей картины; влияние вязкости, а следовательно, и образование вихрей вблизи острой кромки слишком велико, чтобы им можно было пренебречь.

Но если на безвихревое движение фиг. 85 наложить циркуляцию в направлении вращения часовой стрелки, то возможно последнюю подобрать так, что скорость на задней кромке будет конечной [1]). В этом случае элементарные струйки с обеих сторон встречаются и сходят плавно с кромки, без разрыва. Результат показан на фиг. 86; теперь становится возможным уяснить, как можно мысленно представить себе поведение реальной жидкости при помощи введения пограничного слоя и тонкого хвоста.



Фиг. 86.

Несмотря на попытки, которые были сделаны, пока еще не вполне легко чисто логическим путем обнаружить те стадии, которые должны быть пройдены, прежде чем установится указанная выше картина, после того, как начнется относительное движение [2]). К счастью, на помощь нам приходят некоторые прекрасные эксперименты [3]) с малыми моделями в канале. Вначале образуется вихрь с вращением против часовой стрелки и отделяется от кромки, затем он переходит в поток по течению, вызывая дополнительную циркуляцию вокруг крыла с противоположным вращением. С обеих сторон поверхности сползают пограничные слои и заполняют хвост вихрями с противоположными вращениями, которые постепенно диффундируют и погашают друг друга.

Влияние сжимаемости.

§ 371d. Течение сжимаемой жидкости вокруг препятствия, повидимому, впервые математически изучалось Рэлеем [4]). Принимая адиабатический закон, будем иметь

$$\frac{c^2}{c_0^2} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\gamma-1}, \qquad (1)$$

где c обозначает скорость звука, соответствующую местному значению ϱ, а значок нуль относится к невозмущенной части потока. Далее, если движение является безвихревым, то из § 24а будем иметь

$$q^2 - U^2 = \frac{2}{\gamma-1}(c_0^2 - c^2). \qquad (2)$$

---

[1]) Это показано на примере в § 70, в случае дуги круга.

[2]) Однако должна быть сделана ссылка на исследование Jeffreys Proc. Roy. Soc. A, CXXVIII, 376 (1930).

[3]) Prandtl, см. выше, стр. 860; Walker, Aeronautical Research Comm., R. and M., 1402 (1932). (Сообщения об экспериментах, проведенных под руководством проф. B. M. Jones и W. S. Farren).

[4]) Rayleigh, Phil. Mag. (6), XXXII, I (1916) (Papers, VI, 402).

Отсюда получаем

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{d(c^2)}{c^2} = -\frac{1}{2c^2}d(q^2). \tag{3}$$

Уравнение неразрывности § 7 при установившемся движении принимает вид

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2c^2}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial(q^2)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial(q^2)}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial(q^2)}{\partial z}\right\}, \tag{4}$$

где c выражается через q формулой (2).

Для плоского случая это уравнение в полярных координатах представляется в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = \frac{1}{2c^2}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial(q^2)}{\partial r} + \frac{\partial\varphi}{r\,\partial\theta}\frac{\partial(q^2)}{r\,\partial\theta}\right\}, \tag{5}$$

где

$$q^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{r\,\partial\theta}\right)^2. \tag{6}$$

Последнее уравнение и было применено Рэлеем к течению вокруг круглого цилиндра. Вначале в правую часть уравнения (5) он подставляет значения φ и q, соответствующие случаю несжимаемости, и затем интегрирует уравнение. Оказывается, что в этом первом приближении не появляется результирующая сила сопротивления цилиндра, и легко заметить, что это будет иметь место и далее по мере продолжения процесса, ибо значения q^2 будут всегда симметричными по отношению к плоскости, проходящей через ось цилиндра под прямым углом к направлению потока.

Однако, это заключение справедливо при условии сходимости получаемых последовательных приближений, а имеются данные, более чем достаточные, что это не имеет места для случая, когда значение $\frac{U}{c_0}$ превышает некоторый предел. Оставляя пока этот вопрос в стороне, легко распространить метод Рэлея на случай цилиндра с произвольной формой сечения, включая также и эффект циркуляции[1]). Если бы c было равно бесконечности, то значение φ на большом расстоянии стремилось бы к виду

$$\varphi_1 = -Ur\cos\theta + \frac{k\theta}{2\pi}, \tag{7}$$

где начало r взято в непосредственной близости от самого препятствия, а начальная линия θ параллельна общему направлению потока. Мы принимаем это выражение как первое приближение и подставляем его в правую часть уравнения (5). Мы можем также, для совмест-

[1]) Lamb, Aeronautical Research. Comm., R. and M., 1156 (1928).

ности, в следующем приближении заменить величину c ее постоянным значением (c_0) в бесконечности. Из формулы (7) получим

$$q_1^2 = U^2 + \frac{kU}{\pi r}\sin\theta, \tag{8}$$

$$\frac{\partial (q_1^2)}{\partial r}\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial (q_1^2)}{r\,\partial\theta}\frac{\partial \varphi_1}{r\,\partial\theta} = \frac{kU^2}{\pi r^2}\sin 2\theta, \tag{9}$$

оставляя только те члены, которые надо будет рассмотреть при возрастании r до бесконечности. Подставляя в (5), интегрируя и принимая во внимание условия в бесконечности, будем иметь для удаленных областей

$$\varphi = -Ur\cos\theta + \frac{k\theta}{2\pi} - \frac{kU^2}{8\pi c_0^2}\sin 2\theta. \tag{10}$$

Здесь опущены те дополнительные члены, которые содержат только отрицательные степени от r и, следовательно, не могут влиять на последующие вычисления сил. Отсюда с достаточным приближением получаем радиальную и трансверсальную составляющие скорости

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = U\cos\theta, \quad -\frac{\partial \varphi}{r\,\partial\theta} = -U\sin\theta - \frac{k}{2\pi r} + \frac{kU^2}{4\pi c_0^2 r}\cos 2\theta; \tag{11}$$

следовательно,

$$q^2 = U^2 + \frac{kU}{2\pi r}\left(1 - \frac{U}{2c_0^2}\cos 2\theta\right)\sin\theta. \tag{12}$$

Составляющие же скорости, параллельная и перпендикулярная к потоку, будут представляться в виде

$$\left.\begin{aligned} u &= U + \frac{k}{2\pi r}\left(1 - \frac{U^2}{2c_0^2}\cos 2\theta\right)\sin\theta, \\ v &= -\frac{k}{2\pi r}\left(1 - \frac{U^2}{2c_0^2}\cos 2\theta\right)\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Силы, действующие на препятствие, могут теперь быть определены из видоизмененного потока в бесконечности так, как это сделано в оригинальном доказательстве теоремы Кутта-Жуковского. Изменение количества движения в единицу времени в направлении, перпендикулярном к направлению потока, массы жидкости, заключенной в какой-то момент внутри круга бесконечно большого радиуса r, согласно формулам (10) и (13), будет равно

$$\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)\varrho v r\,d\theta = -\frac{1}{2}k\varrho_0 U\left(1 - \frac{U^2}{4c_0^2}\right). \tag{14}$$

Кроме того, из (3) имеем

$$\ln\frac{\varrho}{\varrho_0} = \int_q^U \frac{d(q^2)}{2c_0^2} = \frac{U^2 - q^2}{2c_0^2}, \tag{15}$$

а следовательно, согласно с принятым приближением,

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = 1 + \frac{U^2 - q^2}{2c_0^2}. \tag{16}$$

Так как для больших значений r плотность стремится к значению ϱ_0, то мы можем положить

$$p = p_0 + c_0^2(\varrho - \varrho_0) = p_0 - \frac{k\varrho_0 U}{2\pi r}\left(1 + \frac{U^2}{2c_0^2}\cos 2\theta\right)\sin\theta. \tag{17}$$

Следовательно, перпендикулярная к направлению потока результирующая сил давлений, приложенных к окружающей массе жидкости, будет равна

$$-\int_0^{2\pi} p \sin\theta r\, d\theta = \frac{1}{2} k\varrho_0 U\left(1 + \frac{U^2}{4c_0^2}\right). \tag{18}$$

При сравнении с формулой (14) мы и получаем, что „подъемная" сила, перпендикулярная к потоку, дается известной формулой Жуковского

$$L = k\varrho_0 U, \tag{19}$$

причем ошибка приближения оказывается (почти) порядка $\left(\frac{U}{c_0}\right)^4$. По-прежнему очень легко показать, что при данном приближении сопротивление равно нулю.

Формула (19) была впервые обобщена на случай сжимаемой жидкости Глауэртом[1]). Его исследование предполагает ограниченность величины отношения $\frac{U}{c_0}$ без точного указания предела, лишь бы оно не превышало единицы. Полученные им формулы для движения в бесконечности эквивалентны выражению

$$\varphi = -Ur\cos\theta + \frac{k}{2\pi}\operatorname{arctg}\left\{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c_0^2}}\operatorname{tg}\theta\right\}, \tag{20}$$

которое можно сравнить с формулой (10).

§ 371е. Чтобы изучить, при каких пределах будет возможно установившееся движение сжимаемой жидкости около препятствия данной формы, проф. Тэйлор прибег к электрическому методу, отличающемуся от метода § 60а только тем, что толщина проводящего слоя берется переменной.

Кинематические условия плоского потенциального установившегося движения содержатся в равенствах

$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \varrho u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \varrho v = \frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{1}$$

---

[1] Glauert, Proc. Roy. Soc. A, CXVIII, 113 (1927).

Уравнения же электрического тока в проводящем слое переменной толщины h будут

$$\sigma f = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \sigma g = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad hf = -\frac{\partial W}{\partial y}, \quad hg = \frac{\partial W}{\partial x}, \tag{2}$$

где (f, g) есть плотность тока, σ — удельное сопротивление, V — электрический потенциал и W — функция тока. Эти два ряда равенств будут тождественно совпадать, если положить

$$\varphi = V, \quad \psi = W, \quad u = \sigma f, \quad v = \sigma g, \quad \varrho u = hf, \quad \varrho v = hg, \tag{3}$$

причем равенства (3) включают в себя $h = \varrho\sigma$; иначе мы можем положить

$$\varphi = W, \quad \psi = -V, \quad u = -hg, \quad v = hf, \quad \varrho u = -\sigma g, \quad \varrho v = \sigma f, \tag{4}$$

откуда следует $h = \frac{\sigma}{\varrho}$. До сих пор соответствие было чисто кинематическим, кроме того, должно удовлетворяться условие (2) § 371d. Отсюда, при первой форме аналогии, мы должны иметь

$$\frac{h}{h_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0} = \left\{1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{U^2}{c_0^2} \left(\frac{q^2}{U^2} - 1\right)\right\}^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \tag{5}$$

где значок нуль относится к областям, в которых течение почти не возмущено. Фиксируя значение $\frac{U}{c_0}$, вначале из эксперимента с электропроводящим слоем постоянной толщины находим распределение значений $\frac{q}{U}$. Найденные значения подставляются в формулу (5) и таким способом определяется исправленное значение h, затем в сосуде изменяется дно в соответствии с полученным значением h, процесс повторяется, и так далее. За полными подробностями мы можем отослать к оригинальным работам [1]).

В случае течения около круглого цилиндра проф. Тэйлор нашел что последовательные конфигурации очень быстро сходятся для значений $\frac{U}{c_0}$, меньших, чем 0,45, и перестают сходиться после этого предела.

Вторая аналогия была применена в случае сечения крыла аэроплана при наличии циркуляции, подобранной так, чтобы избежать бесконечной скорости на задней кромке. В этом случае найденный предел сходимости составляет $\frac{U}{c_0} = 0{,}58$.

§ 371f. Следует указать и иную форму уравнений сжимаемой жидкости. Если мы допустим, что движение является только установившимся и необязательно будет потенциальным, то для случая двух измерений будем иметь (§ 165)

$$u \frac{\partial \chi}{\partial x} + v \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

[1]) Taylor a. Shearman, Proc. Roy. Soc. A, CXXI, 194 (1928); Taylor, Journal of the Lond. Math. Soc., v. 224 (1390).

где

$$\chi = \int \frac{dp}{\varrho} + \frac{1}{2} q^2. \tag{2}$$

Отсюда

$$\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{d\varrho} \left(u \frac{\partial \varrho}{\partial x} + v \frac{\partial \varrho}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial (q^2)}{\partial x} + v \frac{\partial (q^2)}{\partial y} \right) = 0. \tag{3}$$

Полагая $\frac{dp}{d\varrho} = c^2$ и используя уравнение неразрывности, будем иметь

$$c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial (q^2)}{\partial x} + v \frac{\partial (q^2)}{\partial y} \right) = 0 \tag{4}$$

или, наконец,

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{uv}{c^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{5}$$

В случае безвихревого движения это последнее уравнение принимает вид

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{2uv}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \tag{6}$$

что эквивалентно уравнению Рэлея (5) § 371d.

Уравнение (6) обращается в линейное уравнение, если мы прибегнем к „принципу двойственности“ [1]) и будем рассматривать u и v как независимые переменные. Полагая

$$\Phi = ux + vy - \varphi, \tag{7}$$

мы найдем

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{2uv}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} + \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = 0. \tag{8}$$

Некоторые интересные замечания о характере задач, связанных с этим уравнением, были сделаны Батеманом [2]).

§ 371g. Если мы принимаем во внимание сжимаемость, то формулу (2) § 371 следует несколько изменить. Обозначим через k коэфициент объемной упругости; тогда по методу размерностей легко придти к формуле

$$F = \varrho U^2 l^2 f\left(\frac{Ul}{\nu}, \ \varrho \frac{U^2}{k} \right). \tag{1}$$

Если U мало в сравнении со скоростью звука в газах, т. е. в сравнении со значением $\sqrt{\frac{k}{\varrho}}$, то эта формула приближается к уже рассмотренному виду

$$F = \varrho U^2 l^2 f\left(\frac{Ul}{\nu}, \ 0 \right). \tag{2}$$

---

[1]) Forsyth, Differential Equatons, § 242.
[2]) Bateman, Proc. Roy. Soc. A, CXXV, 598 (1929).

Закон сопротивления, изменяющегося пропорционально квадрату скорости, достаточно хорошо оправдывается на опыте в случае снарядов, движущихся в воздухе со скоростью, не превышающей примерно 250 метров в секунду. Если же скорость приближается к скорости звука или превосходит ее, то, как и следовало ожидать, закон сопротивления видоизменяется. В этом случае, кроме сопротивления, обусловленного трением, возникает еще волновое сопротивление, подобное тому, о котором говорилось в § 249.

Если $U > c_0$, где c_0 обозначает обыкновенную скорость звука, то образуется волна (приблизительного) разрыва, как это видно из фотографий, полученных Махом, Бойсом [1]) и др. Формулы Ранкина (§ 284), справедливые для этого случая, Рэлей [2]) применил для вычисления давления у носа снаряда.

Предполагая, что задача приведена к случаю установившегося движения, рассмотрим движение на линии симметрии. При этом должны быть рассмотрены две стадии. Если обозначить через q относительную скорость воздуха, то впереди волны будем иметь, например, $q = U$ и $p = p_0$, $\varrho = \varrho_0$. Соответствующие значения непосредственно за волной обозначим через q_1, p_1, ϱ_1. Отсюда, если положить в уравнениях (14) и (15) § 284 $m = q\varrho$, будем иметь

$$\varrho_1 q_1^2 = \frac{1}{2}(\gamma - 1)\, p_1 + \frac{1}{2}(\gamma + 1)\, p_0, \tag{3}$$

$$\varrho_0 U^2 = \frac{1}{2}(\gamma + 1)\, p_1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\, p_0. \tag{4}$$

Так как $c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\varrho_0}$, то второе уравнение дает

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1}\frac{U^2}{c_0^2} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \tag{5}$$

и определяет таким образом $\frac{p_1}{p_0}$.

Далее, скорость воздуха в промежутке от задней стороны волны до носовой части снаряда непрерывно падает от q_1 до 0. Поэтому на основании формулы (1) § 25 имеем

$$q_1^2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{p_2}{\varrho_2} - \frac{p_1}{\varrho_1}\right) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_1}{\varrho_1}\left\{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right\}, \tag{6}$$

где p_2, ϱ_2 относятся к носу снаряда. Подставляя вместо $\frac{\varrho_1 q_1^2}{p_1}$ выражение этой величины из уравнения (3), получаем

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{(\gamma+1)^2}{4\gamma} + \frac{\gamma^2 - 1}{4\gamma}\frac{p_0}{p_1}. \tag{7}$$

---

[1]) Boys, Nature, XLVII, 440 (1893).
[2]) Rayleigh, см. выше, стр. 601.

Эта формула в соединении с уравнением (5) и дает искомое значение p_2.

Принимая $\gamma = 1{,}41$, получим

$$\frac{p_2}{p_0} = 1{,}90, \quad 5{,}67 \quad 11{,}7 \quad 20{,}7$$

для случаев $\frac{U_0}{c_0} = 1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4.$

Обратно, этот способ можно применить для того, чтобы измерить скорости воздуха, превосходящие скорость звука. Отношение $\frac{p_2}{p_0}$ находят из отсчетов по трубке Пито, направленной отверстием против потока, и трубки „статического давления". Уравнение (7) определяет тогда значение отношения $\frac{p_1}{p_0}$, а отсюда находят U при помощи формулы (5). Таким способом Стантон измерил скорости, превосходящие скорость звука в два-три раза, и нашел, что эти измерения очень точно совпадают с другими независимыми и тщательно выполненными экспериментальными определениями [1]).

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

ВРАЩАЮЩИЕСЯ МАССЫ ЖИДКОСТИ.

§ 372. Содержание этой главы имеет свое начало в исследованиях о фигуре земли, которые были начаты еще Ньютоном и Маклореном и далее продолжены большой французской школой математиков, находившейся в расцвете в конце 18 и в начале 19-го столетий. В позднейшее время теория вращающихся жидких масс получила значительное развитие главным образом благодаря трудам Томсона и Тэта, Пуанкаре, Дарвина и Джинса.

Задача заключается в том, чтобы найти возможные формы относительного равновесия однородной гравитирующей жидкой массы, вращающейся с постоянной угловой скоростью около неподвижной оси, и затем определить устойчивость или неустойчивость такого рода форм.

Примем ось вращения за ось z и возьмем начало в центре масс, который, очевидно, должен лежать на этой оси. Если обозначить через ω угловую скорость вращения, то компоненты ускорения в точке

---

[1]) Stanton, Rep. of the Nat. Phys. Lab. for., 1921, стр. 146.

(x, y, z) будут равны $-\omega^2 x, -\omega^2 y, 0$, и уравнения движения приведутся к виду

$$\left.\begin{aligned} -\omega^2 x &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ -\omega^2 y &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ 0 &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где Ω обозначает потенциальную энергию на единицу массы. Отсюда следует

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) - \Omega + \text{const.} \tag{2}$$

На свободной поверхности мы должны иметь $p = \text{const}$.

Некоторые общие свойства форм равновесия были указаны Пуанкаре и Лихтенштейном.

Прежде всего, если внешнее давление равно нулю [1]), то для всякой заданной жидкости существует верхний предел для угловой скорости. Рассматривая произвольную область внутри жидкости, на основании формулы (3) § 42 будем иметь

$$\iint \frac{\partial p}{\partial n}\, dS = -\iiint \Delta p\, dx\, dy\, dz = 2\varrho(2\pi\varrho - \omega^2)\iiint dx\, dy\, dz, \tag{3}$$

где $\frac{\partial p}{\partial n}$ обозначает градиент p в направлении *внутренней* нормали, и ϱ выражено в „астрономической" мере [2]).

Применяя эту формулу к какой-либо малой сферической области, мы увидим, что давление во внутренней точке не может иметь минимума, если $\omega^2 < 2\pi\varrho$, и не может иметь максимума, если $\omega^2 > 2\pi\varrho$. Если же давление на границе обращается в нуль, то в первом случае оно нигде внутри не может быть отрицательным, а во втором случае нигде не может быть положительным. В промежуточном случае $\omega^2 = 2\pi\varrho$ имеем $\Delta p = 0$ во всех точках внутри жидкости и $p = 0$ на границе, а потому повсюду $p = 0$ (§ 40).

Отсюда следует, что в жидкости, которая не может выдерживать растягивающие усилия, существует верхняя граница для угловой скорости, равная $\sqrt{2\pi\varrho}$ [3]). Если взять плотность равною средней плотности земли, т. е. положить $\varrho = \frac{3}{4}\pi g a$, то наибольшее значение для ω, выраженное через угловую скорость ω_0 вращения земли, получится из формулы

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{3}{2}\frac{g}{\omega_0^2 a} = 433.$$

---

[1]) Вскоре будет показано, что это ограничение является излишним.

[2]) Это определяет, конечно, специальную единицу и для давления.

[3]) Poincaré, Bull. Astr. (1885); Figures d'Équilibre, Париж (1902), стр. 11. В тексте дано несколько измененное доказательство.

Кратчайший возможный период оказывается поэтому равным 1 ч. 7 мин.

Далее, форма равновесия необходимо должна быть симметричной относительно плоскости, проходящей через центр масс и перпендикулярной к оси вращения [1]). Представим себе жидкую массу составленной из колонн, параллельных оси z, с бесконечно малым поперечным сечением. Центры масс этих колонн будут лежать на некоторой поверхности (которая, однако, может состоять из различных отдельных частей). Если бы эта поверхность была неплоской, то на ней нашлась бы точка M, для которой z имеет наибольшее значение; пусть PQ есть отрезок в жидкости, параллельный оси Oz, который обоими концами лежит на граничной поверхности и в точке M делится пополам, и пусть $|z_P| > |z_Q|$. Из теории притяжения прямой линии легко получается, что значение потенциала (потенциальной энергии) на единицу массы, обусловленное воздействием какой-либо элементарной колонны, в точке P не может быть меньше, чем в точке Q, а будет, как правило, больше. А тогда получаем, что для всего потенциала имеет место неравенство $\Omega_P > \Omega_Q$ и вместе с тем на основании уравнения (2) $p_P < p_Q$, что противоречит допущению.

До сих пор предполагалось, что точки P и Q отличны друг от друга. Если же они совпадают, то из подобных соображений найдем, что в случае отсутствия плоскости симметрии для точки M должно было бы иметь место неравенство $\frac{\partial \Omega}{\partial z} > 0$ и вместе с тем $\frac{\partial p}{\partial z} < 0$, причем точка M теперь уже принадлежала бы свободной поверхности. Но если касательная плоскость в точке M параллельна оси Oz, то в ней должно было бы быть $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$, тогда как если M была бы особой точкой свободной поверхности, то все пространственные производные p обращались бы в нуль.

Заметим между прочим, что как следствие предыдущих рассуждений получается, что при отсутствии вращения *каждая* плоскость, проходящая через центр тяжести, должна быть плоскостью симметрии. Мы получаем, таким образом, простое доказательство того предложения, что единственная форма равновесия однородной жидкой массы, находящейся под действием сил собственного притяжения, есть шар [2]).

Мы заключаем также, что точки середин всех параллельных оси вращения хорд свободной поверхности лежат в плоскости, перпендикулярной к этой оси; эту плоскость можно назвать экваториальной

---

[1]) Lichtenstein, Berl. Ber. (1918), стр. 1120. В тексте приведено несколько упрощенное доказательство.

[2]) Carleman, Math. Zeitschr. III, 1 (1918). Принадлежащее Ляпунову доказательство того, что шар есть единственная устойчивая форма, приводит Пуанкаре, Figures d'Équilibre, гл. II.

плоскостью. Тогда каждая прямая, параллельная оси, пересекает свободную поверхность не более, чем в двух точках. Далее следует, что составляющая по оси z притяжения в произвольной внутренней или внешней точке, не лежащей в плоскости симметрии, будет направлена к этой плоскости. В самом деле, теория притяжения однородной прямой линии, на которую мы уже ссылались, показывает, что высказанное положение справедливо для каждой из элементарных колонн, на которые мы мысленно разделили всю жидкость. Из высказанного заключения следует неравенство $\frac{\partial \Omega}{\partial z} > 0$, а тем самым и $\frac{\partial p}{\partial z} < 0$ для всех точек, лежащих с положительной стороны плоскости симметрии. Далее следует, что $\frac{\partial p}{\partial n} > 0$ для всех точек свободной поверхности и что $p > 0$ для всех внутренних точек. Первое из этих положений оказывается несовместимым с равенством (3) тогда, когда $\omega^2 > 2\pi\varrho$. Таким образом, ограничение $\omega < \sqrt{2\pi\varrho}$ имеет место совершенно независимо от каких-либо вопросов о внутренних напряжениях.

Меньший предел для ω был указан Круделем [1]). Его доказательство, слегка видоизмененное, состоит в следующем. Согласно теории притяжения оказывается, что функция, значение которой всюду в жидкости есть $p - p_0$ (где p_0 — давление на границе), а вне есть нуль, может рассматриваться как гравитационный потенциал соответственно распределенной (положительной или отрицательной) массы, а именно с поверхностной плотностью

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial p}{\partial n}$$

вдоль границы и с объемной плотностью

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta p = \frac{\varrho}{2\pi}(2\pi\varrho - \omega^2)$$

всюду внутри. Тогда получаем

$$4\pi(p - p_0) = -\iint \frac{\partial p}{\partial n}\frac{dS}{r} + 2\varrho(2\pi\varrho - \omega^2)\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r}. \qquad (4)$$

Но для внутренних точек имеем

$$\iiint \frac{\varrho\,dx\,dy\,dz}{r} = -\Omega = \frac{p}{\varrho} - \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + \text{const.},$$

следовательно,

$$\frac{2\omega}{\varrho}p = 4\pi p_0 - \iint \frac{\partial p}{\partial n}\frac{dS}{r} - \omega^2(2\pi\varrho - \omega^2)(x^2 + y^2) + \text{const.} \qquad (5)$$

[1]) Crudeli, Accad. d. Lincei, (5), XIX, 666 (1910).

Теперь рассмотрим касательную плоскость, перпендикулярную к оси вращения, именно ту, которая оставляет область, занятую жидкостью, всю по одну сторону от себя, и пусть P есть точка соприкосновения [1]).

Составим теперь производные по внутренней нормали в точке P от обеих частей уравнения (5). Так как, как мы видели, $\frac{\partial p}{\partial n}$ должна быть положительной во всех точках границы, то из теории притяжения и из только что сделанных предположений следует, что производная по нормали от выражения

$$-\iint \frac{\partial p}{\partial n}\frac{dS}{r}$$

в точке P должна быть меньше, чем $2\pi\frac{\partial p}{\partial n}$, и тогда получаем

$$\frac{2\omega^2}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial n} < 2\pi\frac{\partial p}{\partial n}, \tag{6}$$

или $\omega^2 < \pi\varrho$. Это изменяет наименьший возможный период вращения жидкой массы с плотностью, равной средней плотности земли, до значения 1 час 35 мин.

§ 373. Мы переходим теперь к рассмотрению специальных форм и начнем с того случая, когда внешняя граница представляет собою поверхность эллипсоида. Прежде всего напишем некоторые формулы, относящиеся к притяжению эллипсоида.

Потенциал притяжения однородной массы, ограниченной поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

для внутренних точек имеет вид

$$\Omega = \pi\varrho abc\int_0^\infty \left(\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1\right)\frac{d\lambda}{\Delta}, \tag{2}$$ [2])

где

$$\Delta = \{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)\}^{1/2}. \tag{3}$$

Это может быть написано в виде

$$\Omega = \pi\varrho(\alpha_0 x^2+\beta_0 y^2+\gamma_0 z^2-\chi_0), \tag{4}$$

---

[1]) К р у д е л и, кажется, предполагал границу всюду конвексной. Из приведенного доказательства следует, что, повидимому, в этом нет необходимости. Например, кольцевая форма не исключается.

[2]) Указания литературы см. на стр. 758. Знак у Ω по сравнению с обычным способом обозначения изменен.

где, как в § 114,

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= abc\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\Delta}, \\ \beta_0 &= abc\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\Delta}, \\ \gamma_0 &= abc\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\Delta} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и

$$\chi_0 = abc\int \frac{d\lambda}{\Delta}. \tag{6}$$

Потенциальная же энергия притягивающей массы определяется выражением

$$V = \frac{1}{2}\iiint \Omega\varrho\, dx\, dy\, dz, \tag{7}$$

причем интегрирование распространено на весь объем. Подставляя значение Ω из формулы (4), получим

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3}\pi^2\varrho^2 abc\left\{\frac{1}{5}(\alpha_0 a^2+\beta_0 b^2+\gamma_0 c^2)-\chi_0\right\} = \\ &= \frac{2}{3}\pi^2\varrho^2 a^2b^2c^2\int_0^\infty \left\{\frac{1}{5}\left(\frac{a^2}{a^2+\lambda}+\frac{b^2}{b^2+\lambda}+\frac{c^2}{c^2+\lambda}\right)-1\right\}\frac{d\lambda}{\Delta} = \\ &= \frac{2}{3}\pi^2\varrho^2 a^2b^2c^2\int_0^\infty \left\{\frac{2}{5}\lambda d\left(\frac{1}{\Delta}\right)-\frac{2}{5}\frac{d\lambda}{\Delta}\right\} = \\ &= -\frac{8}{15}\pi^2\varrho^2 a^2b^2c^2\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta}. \end{aligned} \tag{8}$$

Это выражение отрицательно, так как нулевая точка отсчета соответствует состоянию бесконечного рассеяния массы. Если в качестве нулевого значения потенциальной энергии мы возьмем потенциал массы, имеющей форму шара с радиусом $R = (abc)^{1/3}$, то должны будем прибавить член

$$\frac{16}{15}\pi^2\varrho^2 R^5. \tag{9}$$

Для эллипсоида вращения интегралы упрощаются. Если эллипсоид сплющенный, то, применяя обозначения § 107, мы можем положить

$$a = b = \frac{(\zeta^2+1)^{1/3}}{\zeta}c \tag{10}$$

и получим [1])

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \beta_0 = (\zeta^2+1)\,\zeta \operatorname{arcctg}\zeta - \zeta^2, \\ \gamma_0 &= 2(\zeta^2+1)(1-\zeta\operatorname{arcctg}\zeta), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$V = \frac{16}{15}\pi^2\varrho^2 R^5\left\{1-\left(\frac{\zeta^2+1}{\zeta^2}\right)^{1/3}\zeta\operatorname{arcctg}\zeta\right\} \tag{12}$$

в предположении, что нулевое значение V отвечает сферической форме. Если обозначить через e эксцентриситет меридиана, то будем иметь

$$e^2 = 1-\frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{\zeta^2+1}, \tag{13}$$

и формулы могут быть тогда переписаны в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \beta_0 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\arcsin e - \frac{1-e^2}{e^2}, \\ \gamma_0 &= \frac{2}{e^2}\left\{1-\sqrt{1-e^2}\,\frac{\arcsin e}{e^2}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$V = \frac{16}{15}\pi^2\varrho^2 R^5\left\{1-(1-e^2)^{1/6}\,\frac{\arcsin e}{e}\right\}. \tag{15}$$

В случае же *вытянутого* эллипсоида положим (§ 103)

$$a = b = \frac{(\zeta^2-1)^{1/2}}{\zeta}c; \tag{16}$$

тогда получим

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \beta_0 = \zeta^2 - (\zeta^2-1)\,\zeta\operatorname{arcctgh}\zeta, \\ \gamma_0 &= 2(\zeta^2-1)(\zeta\operatorname{arcctgh}\zeta - 1), \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$V = \frac{16}{15}\pi^2\varrho^2 R^5\left\{1-\left(\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2}\right)^{1/3}\zeta\operatorname{arcctgh}\zeta\right\}. \tag{18}$$

Отметим также случай бесконечно длинного эллиптического цилиндра. Если в формулах (5) положим $c=\infty$, то получим

$$\alpha_0 = \frac{2b}{a+b}, \quad \beta_0 = \frac{2a}{a+b}, \quad \gamma_0 = 0. \tag{19}$$

Энергия, отнесенная к единице длины цилиндра, будет равна

$$V_1 = \frac{4}{15}\pi^2\varrho^2 a^2 b^2 \log\frac{(a+b)^2}{4ab}. \tag{20}$$

---

[1]) Проще будет положить $c^2+\lambda=(a^2-c^2)u^2$. Тогда результат, предложенный Томсоном и Тэтом (§ 771) и другими авторами, выразится через величину f, обратную величине ζ.

Эллипсоиды Маклорена.

§ 374. Предположим теперь, что эллипсоид, находясь в относительном равновесии, вращается около оси z с угловой скоростью ω. Так как

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) - \Omega + \text{const.}, \tag{1}$$

то поверхности равного давления определяются уравнением

$$\left(\alpha_0 - \frac{\omega^2}{2\pi\varrho}\right)x^2 + \left(\beta_0 - \frac{\omega^2}{2\pi\varrho}\right)y^2 + \gamma_0 z^2 = \text{const.} \tag{2}$$

Для того чтобы одна из них совпадала с внешней поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{3}$$

необходимо, чтобы

$$\left(\alpha_0 - \frac{\omega^2}{2\pi\varrho}\right)a^2 = \left(\beta_0 - \frac{\omega^2}{2\pi\varrho}\right)b^2 = \gamma_0 c^2. \tag{4}$$

В случае эллипсоида вращения ($a=b$) эти условия приводятся к одному, а именно, к условию

$$\left(\alpha_0 - \frac{\omega^2}{2\pi\varrho}\right)a^2 = \gamma_0 c^2. \tag{5}$$

Так как $\frac{a^2}{a^2+\lambda}$ больше или меньше, чем $\frac{c^2}{c^2+\lambda}$, смотря по тому, больше или меньше a, чем c, то из данных в § 373 выражений (5) для α_0 и γ_0 следует, что условие (5) при подходящем выборе ω может быть выполнено для каждого заданного сжатого эллипсоида, но не может быть выполнено для вытянутого эллипсоида. Этот важный результат принадлежит Маклорену [1]).

Подставляя выражения для α_0, γ_0 из формул (11) § 373, приведем условие (5) к виду

$$\frac{\omega^2}{2\pi\varrho} = (3\zeta^2+1)\zeta\,\text{arcctg}\,\zeta - 3\zeta^2 \tag{6}$$

или, в обозначениях § 107, к виду

$$\frac{\omega^2}{2\pi\varrho} = \zeta q_2(\zeta). \tag{7}$$

---

[1]) Maclaurin, см. выше, стр. 386.

Заметим, что значение ω, соответствующее произвольной заданной форме эллипсоида, зависит от плотности ϱ, а не от действительных размеров эллипсоида. Легко усмотреть, что этот результат согласуется с теорией „размерности".

Если обозначим через M общую массу и через H главный момент количеств движения относительно оси вращения, то будем иметь

$$M = \frac{4}{3}\pi\varrho a^2 c, \quad H = \frac{2}{5} Ma^2\omega; \tag{8}$$

отсюда следует

$$\frac{H^2}{M^3R} = \frac{6}{25}\left(\frac{\zeta^2+1}{\zeta^2}\right)^{2/3}\left\{(3\zeta^2+1)\zeta\,\mathrm{arcctg}\,\zeta - 3\zeta^2\right\}; \tag{9}$$

Формула (6) в различных видах исследовалась Симпсоном, Даламбером и (более исчерпывающим образом) Лапласом [1]). Легко можно показать, что правая часть формулы (6) обращается в нуль при $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$; для остальных же значений ζ она конечна и положительна; следовательно, для некоторого промежуточного значения ζ правая часть принимает наибольшее значение. Поэтому при заданной плотности ϱ существует верхний предел для угловых скоростей, при которых эллипсоид вращения будет возможной формой относительного равновесия. Для того чтобы показать, что правые части формул (6) и (7) имеют только один максимум, а следовательно, не имеют минимума, потребовалось бы более подробное исследование.

Лаплас с той же точки зрения исследовал формулу для главного момента количеств движения. Оказывается, что правая часть формулы (9) непрерывно возрастает от 0 до ∞, когда ζ уменьшается от ∞ до 0. Поэтому при заданном объеме определенной жидкости существует одна и только одна форма эллипсоида Маклорена, обладающая заданным наперед главным моментом количеств движения.

Эти вопросы можно также исследовать путем непосредственного вычисления функций, стоящих в правых частях формул (6) и (9). Следующая таблица, содержащая числовые данные для ряда эллипсоидов Маклорена, взята из книги Томсона и Тэта [2]). Единица момента количеств движения в последнем столбце есть $M^{3/2}R^{1/2}$, причем конечно подразумеваются „астрономические" единицы.

---

[1]) Laplace, Mécanique Céleste, кн. 3, гл. III. Дальнейшие указания литературы находятся у Тодгентера, History of the Theories of Attraction..., Лондон, 1873, гл. X, XVI.

[2]) Thomson a. Tait, Natural Philosophy, § 772.

e	$\frac{a}{R}$	$\frac{c}{R}$	$\frac{\omega^2}{2\pi\varrho}$	Момент количества движения
0	1,0000	1,0000	0	0
0,1	1,0016	0,9967	0,0027	0,0255
0,2	1,0068	0,9865	0,0107	0,0514
0,3	1,0159	0,9691	0,1243	0,0787
0,4	1,0295	0,9435	0,0436	0,1085
0,5	1,0491	0,9086	0,0690	0,1417
0,6	1,0772	0,8618	0,1007	0,1804
0,7	1,1188	0,7990	0,1387	0,2283
0,8	1,1856	0,7114	0,1816	0,2934
0,827	1,1973	0,6976	0,1868	0,3035
0,9	1,3189	0,5749	0,2203	0,4000
0,91	1,341	0,5560	0,2225	0,4156
0,92	1,367	0,5355	0,2241	0,4330
0,93	1,396	0,5131	0,2247	0,4525
0,94	1,431	0,4883	0,2239	0,4748
0,95	1,474	0,4603	0,2213	0,5008
0,96	1,529	0,4280	0,2160	0,5319
0,97	1,602	0,3895	0,2063	0,5692
0,98	1,713	0,3409	0,1890	0,6249
0,99	1,921	0,2710	0,1551	0,7121
1,00	∞	0	0	∞

Максимум величины $\frac{\omega^2}{2\pi\varrho}$ есть 0,2247 и соответствует значениям $e=0{,}9299$, $\frac{a}{c}=2{,}7198$. Для каждого меньшего значения $\frac{\omega^2}{2\pi\varrho}$ существует *два* возможных эллипсоида вращения: эксцентриситет одного из них меньше, а другого больше, чем 0,9299.

В случае однородной жидкой массы, плотность которой равна средней плотности земли, имеем

$$\frac{4}{3}\pi\varrho R=980,\quad R=6{,}37\cdot10^8,$$

если за единицы длины и времени взяты сантиметр и секунда. Отсюда получается, что самое быстрое вращение, возможное в случае эллипсоида вращения, имеет период 2 ч. 25 мин.

Если значение ζ велико, то правую часть формулы (7) приближенно можно считать равной $\frac{4}{15}\zeta^{-2}$. Поэтому в случае сжатого эллипсоида вращения, бесконечно мало отличающегося от шара, сжатие будет равно

$$\varepsilon=\frac{a-c}{a}=\frac{1}{2}\zeta^{-2}=\frac{15}{16}\frac{\omega^2}{\pi\varrho}.$$

Обозначая через g силу притяжения на поверхности шара радиуса a с постоянною плотностью, будем иметь

$$g=\frac{4}{3}\pi\varrho a,$$

и, следовательно,

$$\varepsilon = \frac{5}{4}\frac{\omega^2 a}{g}.$$

Если положить $\frac{\omega^2 a}{g} = \frac{1}{289}$, то окажется, что однородная жидкая масса, имеющая такую же величину и плотность, как Земля, должна иметь сжатие, равное $\frac{1}{231}$, чтобы вращаться с тем же периодом, как Земля.

Эллипсоиды Якоби.

§ 375. Чтобы установить, будет ли эллипсоид с тремя *неравными* осями возможной формой относительного равновесия, обратимся снова к условиям (4) § 374. Эти условия равносильны уравнениям

$$(\alpha_0 - \beta_0)\, a^2 b^2 + \gamma_0 c^2 (a^2 - b^2) = 0 \tag{1}$$

и

$$\frac{\omega^2}{2\pi\varrho} = \frac{\alpha_0 a^2 - \beta_0 b^2}{a^2 - b^2}. \tag{2}$$

Подставляя значения α_0, β_0, γ_0 из § 373, приведем условие (1) к виду

$$(a^2 - b^2)\int_0^\infty \left\{ \frac{a^2 b^2}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)} - \frac{c^2}{c^2+\lambda} \right\} \frac{d\lambda}{\Delta} = 0. \tag{3}$$

Если положить первый множитель равным нулю, то придем к случаю эллипсоидов Маклорена, рассмотренному в предыдущем параграфе. Равенство нулю второго множителя дает условие

$$\int_0^\infty \left\{ a^2 b^2 - (a^2 + b^2 + \lambda) c^2 \right\} \frac{\lambda\, d\lambda}{\Delta^3} = 0, \tag{4}$$

которое можно рассматривать как уравнение для определения c через a и b. Если $c^2 = 0$, то все элементы интеграла положительны, а если

$$c^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2},$$

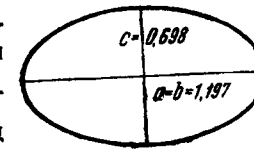
то все элементы отрицательны. Отсюда следует, что существует значение c, меньшее, чем наименьшая из полуосей a и b, для которого рассматриваемый интеграл будет исчезать.

Соответствующее значение ω определяется из формулы (2); это уравнение принимает теперь вид

$$\frac{\omega^2}{2\pi\varrho} = abc \int_0^\infty \frac{\lambda\, d\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)\Delta}, \tag{5}$$

так что значение ω будет действительным. Следует заметить, что отношение $\frac{\omega^2}{2\pi\varrho}$, так же как и выше, зависит только от *формы*, но не от абсолютных размеров эллипсоида [1]).

Уравнения (4) и (5) были тщательно исследованы С. О. Мейером [2]), который показал, что при заданных a и b существует только одно значение c, удовлетворяющее уравнению (4), и далее, что при $a=b=1{,}7161c$ величина $\frac{\omega^2}{2\pi\varrho}$ достигает наибольшего значения (именно 0,1871)[3]). Эллипсоид Якоби совпадает тогда с одной из форм эллипсоида Маклорена. Эта предельная форма, изображенная на фиг. 87, получится, если во втором множителе левой части равенства (3) положить



Фиг. 87.

$$a=b,\quad c^2+\lambda=(a^2-c^2)u^2,\quad c^2=(a^2-c^2)\zeta^2.$$

Таким образом, находим

$$\int_\zeta^\infty \left\{ \left(\frac{1+\zeta^2}{1+u^2}\right)^2 - \frac{\zeta^2}{u^2} \right\} \frac{du}{1+u^2} = 0; \tag{6}$$

отсюда следует

$$\operatorname{arcctg}\zeta = \frac{13\zeta+3\zeta^3}{3+14\zeta^2+3\zeta^4}. \tag{7}$$ [4])

Это уравнение имеет только один конечный корень, именно $\zeta=0{,}7171$; в этом случае для эксцентриситета меридиана получаем значение $e=0{,}8127$.

Так как в общем случае два отношения $a:b:c$ подчинены условию (4), то фактически имеется только один переменный параметр, и эллипсоиды Якоби образуют так называемую „линейную серию".

---

[1]) Возможность эллипсоидальной формы с тремя неравными осями в первый раз высказал Якоби в работе „Über die Figur des Gleichgewichts", Pogg. Ann., XXXIII, 229 (1834) (Werke, II, 17); см. также Liouville, Sur la figure d'une masse fluide homogène, en équilibre, et douée d'un mouvement de rotation, Journ. de l'École Polytechn., XIV, 290 (1834).

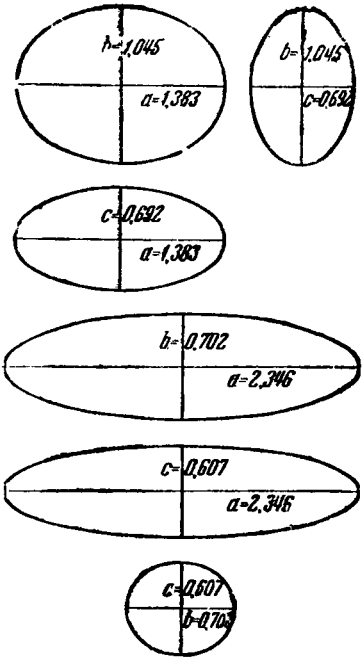
[2]) C. O. Meyer, De aequilibrii formis ellipsoidicis, Crelle, XXIV (1842).

[3]) Согласно Томсону и Тэту наибольшее значение было бы 0,1868. См. таблицу предыдущего параграфа.

[4]) Thomson a. Tait, § 778.

Последовательность фигур в этой серии иллюстрируется следующей таблицей, вычисленной Дарвином [1]).

Оси			$\frac{\omega^2}{2\pi\varrho}$	Момент количества движения
$\frac{a}{R}$	$\frac{b}{R}$	$\frac{c}{R}$		
1,197	1,197	0,698	0,187	0,304
1,216	1,179	0,693	0,187	0,304
1,279	1,123	0,696	0,186	0,306
1,383	1,045	0,692	0,181	0,313
1,601	0,924	0,677	0,166	0,341
1,899	0,811	0,649	0,141	0,392
2,346	0,702	0,607	0,107	0,481
3,136	0,586	0,545	0,067	0,644
5,04	0,45	0,44	0,026	1,016
∞	0	0	0	∞



Фиг. 88.

Когда значения $\frac{\omega^2}{2\pi\varrho}$ уменьшаются, начиная с верхней границы 0,1871, тогда отношение одной из экваториальных осей эллипсоида к полярной оси возрастает, а отношение другой — убывает; предельная форма представляет собою бесконечно длинный круговой цилиндр, вращающийся около оси, перпендикулярной к образующим ($a=\infty$, $b=c$). Фиг. 88 показывает две промежуточные формы; за единицу длины при этом принят радиус R шара, объем которого равен объему эллипсоида.

Следует заметить, что бесконечно длинный эллиптический цилиндр может находиться в относительном равновесии при вращении вокруг своей продольной оси. При помощи формул (19) § 373 можно легко показать, что в этом случае угловая скорость определится из формулы

$$\frac{\omega^2}{2\pi\varrho}=\frac{2ab}{(a+b)^2}. \qquad (8)\ [2])$$

[1]) Darwin, On Jacobi's Figure of Equilibrium for a Rotating Mass of Fluid, Proc. Roy. Soc., XLI, 319 (1886) (Papers, III, 119).

[2]) Matthiessen, Neue Untersuchungen über frei rotirende Flüssigkeiten, Schriften d. Univ. zu Kiel, VI (1859). Эта работа содержит очень полный перечень ранее появившихся исследований в этой области.

Другие специальные формы.

§ 376. Проблема относительного равновесия, в которой эллипсоиды Маклорена и Якоби представляют лишь частные случаи, была предметом большого числа интересных исследований, о которых здесь следует кратко напомнить.

Случай кольца в первый раз был исследован Лапласом [1]) в связи с теорией колец Сатурна.

Предположим, что кольцо есть тело вращения около оси z, и возьмем начало координат в точке пересечения этой оси с экваториальной плоскостью симметрии, относительно которой мы наверное знаем, что она должна существовать (§ 372). Далее, будем предполагать, что поперечное сечение представляет собою эллипс, полуоси которого, параллельные Ox и Oz, соответственно суть a и c. Обозначим через C центр этого поперечного сечения и положим $OC = D$; мы будем предполагать, что оба отношения $\frac{a}{D}$ и $\frac{c}{D}$ малы.

При этих условиях можно считать, что в первом приближении составляющие притяжения в произвольной точке кольца такие же, как в случае бесконечно большого радиуса D, так что в согласии с формулами (19) § 373 мы можем положить

$$\Omega = \pi\varrho\,(\alpha_0 x^2 + \gamma_0 z^2) + \text{const.}, \tag{1}$$

где

$$\alpha_0 = \frac{2c}{a+c}, \quad \gamma_0 = \frac{2a}{a+c}, \tag{2}$$

и начало абсцисс x теперь перенесено в точку C. Уравнение давления для точек поперечного сечения будет в этом случае иметь вид

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{1}{2}\omega^2 (D+x)^2 - \Omega + \frac{S}{\sqrt{(D+x)^2+z^2}} + \text{const.}, \tag{3}$$

где S обозначает массу притягивающего своим центром ядра в точке O. Это выражение можно разложить в ряд в виде

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{1}{2}\omega^2 (D^2 + 2Dx + x^2) - \pi\varrho\,(\alpha_0 x^2 + \gamma_0 z^2) + \\ + \frac{S}{D}\left(1 - \frac{x}{D} + \frac{2x^2 - z^2}{2D^2} - \ldots\right). \tag{4}$$

Если p всюду по поперечному сечению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{5}$$

---

[1]) Laplace, Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne, Mém. de l'Acad. des Sciences, 1789 (1787) (Mécanique Céleste, кн. 3, гл. VI).

остается приблизительно постоянным, то члены с x необходимо приравнять нулю, а коэфициенты при x^2 и z^2 должны будут относиться, как $c^2 : a^2$. Отсюда получаем

$$\omega^2 D^3 = S \tag{6}$$

и

$$a^2\left(\alpha_0 - \frac{3\omega^2}{2\pi\varrho}\right) = c^2\left(\gamma_0 + \frac{\omega^2}{2\pi\varrho}\right). \tag{7}$$

Первое из этих уравнений показывает, что период вращения кольца должен быть равным периоду спутника, находящегося на таком же расстоянии; второе уравнение может быть написано в виде

$$\frac{\omega^2}{2\pi\varrho} = \frac{2ac(a-c)}{(3a^2+c^2)(a+c)}, \tag{8}$$

откуда следует, что экваториальный диаметр должен быть наибольшим.

Выражение в правой части формулы (8) имеет максимум 0,1086, соответствующий значению $\frac{a}{c} = 2{,}594$. Тогда для жидкого кольца, находящегося на заданном расстоянии D от центрального ядра, существует нижняя граница плотности.

Лаплас отмечает, что кольцо такого рода, какое мы рассматриваем здесь, должно было бы быть неустойчивым, даже если бы оно было твердым, а тем более должно быть неустойчивым, когда оно жидкое. В настоящее время вообще принимают, что кольца Сатурна состоят из метеоров.

Если центрального ядра нет или если его масса относительно мала, то притяжение кольца в точках самого кольца можно вычислить с большою степенью точности. В этом случае легко получаем, что поперечное сечение приблизительно должно быть круговым, и угловая скорость должна быть значительно меньше, чем в предыдущем случае. Для $S = 0$ находим приближенно

$$\frac{\omega^2}{2\pi\varrho} = \frac{a^2}{2D^2}\left(\ln\frac{8D}{a} - \frac{5}{4}\right), \tag{9}$$ [1])

если $\frac{a}{D}$ мало.

В справедливости формулы (9) можно убедиться следующим образом. Если возьмем начало координат в центре кольца и введем цилиндрические координаты, то потенциал во внешних точках будет удовлетворять уравнению вида (1) § 100, а именно

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\tilde{\omega}^2} + \frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{\partial\Omega}{\partial\tilde{\omega}} = 0. \tag{10}$$

Если в плоскости поперечного сечения ввести полярные координаты и положить

$$z = r\sin\theta, \quad \tilde{\omega} = D + r\cos\theta, \tag{11}$$

---

[1]) Несколько другой результат получил Маттиссен, см. выше. Формула (9) принадлежит Софье Ковалевской, Astr. Nachr., CXI (1885). Poincaré, см. ниже; Dyson, см. выше, стр. 197. Ср. также Basset, Amer. Journ. Math., XI (1888).

то уравнение (10) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\theta^2}+$$
$$+\frac{1}{D+r\cos\theta}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}\sin\theta\right)=0. \quad (12)$$

Чтобы получить решение, которое должно иметь место для значений r, малых по сравнению с D, примем в качестве первого приближения $\Omega=\Omega_0$, где Ω_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\Omega_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_0}{\partial r}=0. \quad (13)$$

Таким образом, мы получаем

$$\Omega_0=A+B\ln r. \quad (14)$$

В качестве второго приближения возьмем

$$\Omega=\Omega_0+\Omega_1\cos\theta. \quad (15)$$

Подставляя, находим

$$\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_1}{\partial r}-\frac{\Omega_1}{r^2}=-\frac{1}{D}\frac{\partial\Omega_0}{\partial r}=-\frac{B}{Dr}; \quad (16)$$

отсюда получаем

$$\Omega_1=Cr+\frac{C'}{r}-\frac{B}{2D}r\ln r. \quad (17)$$

На расстояниях r, малых по сравнению с D, но больших по сравнению с радиусом поперечного сечения, полученный таким способом результат должен быть близок к потенциалу материальной окружности радиуса D и линейной плотности $\pi\varrho a^2$. Этот потенциал определяется формулой

$$\Omega=-\pi\varrho a^2D\int_0^{2\pi}\frac{d\chi}{\sqrt{r_1^2\cos^2\frac{1}{2}\chi+r_2^2\sin^2\frac{1}{2}\chi}}=-\frac{4\pi\varrho a^2D}{r_2}F_1(k), \quad (18)$$

где r_1 и r_2, как в § 161, обозначают наименьшее и наибольшее расстояния рассматриваемой точки от окружности, а модуль k эллиптического интеграла определяется из равенства

$$k^2=1-\frac{r_1^2}{r_2^2}. \quad (19)$$

Так как это выражение приблизительно равно *единице*, то будем иметь [1])

$$F_1(k)=\ln\frac{4r_2}{r_1}+\frac{1}{4}\frac{r_1^2}{r_2^2}\left(\ln\frac{4r_2}{r_1}-1\right)+\ldots; \quad (20)$$

первый член этого ряда достаточен для наших целей.

В соответствии с применяемыми нами обозначениями положим приближенно

$$r_1=r,\quad r_2=\sqrt{4D^2+4rD\cos\theta+r^2}=2D\left(1+\frac{r}{2D}\cos\theta\right). \quad (21)$$

---

[1]) Cayley, Elliptic Functions, стр. 54.

Тогда получим

$$\Omega = -2\pi\varrho a^2\left(\ln\frac{8D}{r} - \frac{r\cos\theta}{2D}\ln\frac{8D}{r} + \frac{r\cos\theta}{2D}\right). \tag{22}$$

Результат, выраженный формулами (15), (14) и (17), будет все больше приближаться к значению (22), по мере того как r возрастает, но остается еще малым по сравнению с D в предположении, что

$$B = 2\pi\varrho a^2 \qquad C = \frac{\pi\varrho a^2}{D}(\ln 8D - 1). \tag{23}$$

Мы возьмем поэтому в качестве значения внешнего потенциала жидкого кольца для точек, лежащих вблизи поверхности, выражение

$$\Omega = -2\pi\varrho a^2\left\{\ln\frac{8D}{r} - \left(\ln\frac{8D}{r} - 1\right)\frac{r\cos\theta}{2D}\right\} + \frac{C'\cos\theta}{r}. \tag{24}$$

Чтобы найти потенциал во внутренней точке, мы должны заменить правую часть уравнения (12) через $4\pi\varrho$. При помощи того же самого приближенного способа, как и раньше, находим, принимая во внимание условие конечности для $r = 0$,

$$\Omega = \text{const.} + \pi\varrho r^2 + C''r\cos\theta - \frac{\pi\varrho r^3}{4D}\cos\theta. \tag{25}$$

Значения Ω и $\frac{\partial\Omega}{\partial r}$, получаемые из формул (24) и (25), должны быть непрерывными при $r = a$. Это условие дает

$$C'' = \frac{\pi\varrho a^2}{D}\left(\ln\frac{8D}{a} - 1\right), \quad C' = -\frac{\pi\varrho a^4}{4D}. \tag{26}$$

Условие для свободной поверхности требует, чтобы выражение

$$\frac{1}{2}\omega^2(D + r\cos\theta)^2 - \Omega \tag{27}$$

имело постоянное значение для $r = a$. Пренебрегая квадратом величины $\frac{r}{D}$, получаем

$$\omega^2 D = C'' - \frac{\pi\varrho a^2}{4D}. \tag{28}$$

Если подставить сюда значение C'' из формулы (26), то придем к формуле (9).

Дейсон показал, что такого рода кольцо должно быть неустойчивым только по отношению к возмущениям, при которых площадь поперечного сечения изменяется по длине. Кольцо при этом стремится распасться на отдельные части.

Дарвин очень подробно исследовал тот случай [1]), когда две отдельные жидкие массы, находясь в относительном равновесии, вращаются около их общего центра тяжести как две составные части одной двойной звезды.

Если расстояние между обеими массами велико по сравнению с их размерами, то ряд, расположенный по сферическим функциям, через

[1]) Darwin, On Figures of Equilibrium of Rotating Masses of Fluid, Phil. Trans. A, CLXXVIII, 379 (1887) (Papers, III, 135).

который выражается решение, сходится очень быстро; во всех же остальных случаях приближенный способ оказывается довольно утомительным [1]).

Особенно интересный случай, когда одна масса значительно меньше другой, впервые, повидимому, исследовал Рохе в 1847 г. [2]).

Общая задача относительного равновесия.

§ 377. Вопрос о возможных фигурах относительного равновесия вращающейся однородной жидкой массы с более общей точки зрения был рассмотрен Пуанкаре в его знаменитой работе [3]).

Рассмотрим сначала обыкновенную динамическую систему с n степенями свободы, строение которой зависит от переменного параметра λ, так что потенциальная энергия V есть функция от n обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и от λ. Конфигурации равновесия, возможные при заданном значении λ, определяются n уравнениями вида

$$\frac{\partial V}{\partial q_r} = 0; \tag{1}$$

если мы будем изменять λ, то получим одну или несколько „линейных серий" конфигураций равновесия. Каждая из таких серий может быть представлена при помощи кривой в пространстве n измерений, в котором $q_1, q_2, \ldots, q_n$ обозначают декартовы координаты.

Если мы рассмотрим малые отклонения от конфигурации равновесия, то будем иметь

$$V = c_{11}\delta q_1^2 + c_{22}\delta q_2^2 + \ldots + 2c_{12}\delta q_1 \delta q_2 + \ldots, \tag{2}$$

где $c_{11}, c_{22}, c_{12}, \ldots$ суть „коэфициенты устойчивости" (§ 168), определяемые соотношениями

$$c_{rr} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_r^2}, \quad c_{rs} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_s}. \tag{3}$$

При помощи линейного преобразования вариаций $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ выражение (2) можно бесконечным числом способов привести к сумме квадратов: но при любом способе приведения число положительных и число отрицательных коэфициентов по теореме Сильвестера остается неизменным. Коэфициенты в преобразованном выражении мы будем

---

[1]) Подробное изложение задач §§ 374—376 находится в курсе Tisserand, Traité de Mécanique Céleste, Париж, 1889—1896, II.

[2]) См. Darwin, On the Figure and Stability of a Liquid Satellite, Phil. Trans. A, CCVI, 161 (1906) (Papers, III, 436). Относительно приложения к этой задаче метода Пуанкаре отсылаем к работе Schwarzschild, Die Poincaré'sche Theorie des Gleichgewichts..., Ann. d. Münch. Sternwarte, III, 233 (1897) и Jeans, Problems of Cosmogony..., Кембридж, 1919.

[3]) Poincaré, Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, Acta Math., VII, 259 (1885). См. также его Figures d'équilibre. Относительно обзора более ранних исследований и некоторых указаний, встречающихся уже у Ляпунова, см. Lichtenstein, Math. Zeitschr., I, 228 (1918).

называть главными коэфициентами устойчивости. Для того чтобы конфигурация была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все эти коэфициенты были положительными.

При изменении λ различные линейные серии остаются отличными друг от друга, пока дискриминант Δ квадратичной формы (2) не исчезает, т. е. пока не исчезает ни один из главных коэфициентов устойчивости. Если же в то время, когда пробегается некоторая линейная серия, дискриминант Δ при некотором частном значении λ исчезает и меняет знак, то соответствующая конфигурация оказывается „формою бифуркации", т. е. эта конфигурация представляет точку пересечения рассматриваемой линейной серии с другой. Может даже случиться, что при некотором значении λ две линейные серии совпадают, а после этого становятся мнимыми. Если рассматриваемая конфигурация не принадлежит ни к какой другой линейной серии, то мы имеем так называемую „предельную форму" равновесия, и можно показать, что Δ в обеих сериях вблизи от точки соединения имеет различные знаки. Особенно важным оказывается тот случай, когда две серии соединяются и после этого делаются мнимыми, в то время как третья серия непрерывно переходит через эту общую точку.

Высказанные положения можно пояснить на случае системы с одной степенью свободы. Положения равновесия определяются уравнением

$$\frac{\partial V}{\partial q} = 0, \tag{4}$$

из которого можно определить одно или несколько значений q, как функции от λ. Диференцируя уравнение (4) по λ, получаем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\frac{dq}{d\lambda} + \frac{\partial^2 V}{\partial q\,\partial \lambda} = 0. \tag{5}$$

Это уравнение дает для каждой линейной серии одно единственное значение $\frac{dq}{d\lambda}$ и определяет, таким образом, последовательность конфигураций равновесия, за исключением того случая, когда $\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} = 0$. Различные серии оказываются, таким образом, разделенными, пока коэфициент устойчивости не исчезает; если же $\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} = 0$, то $\frac{dq}{d\lambda}$ оказывается бесконечно большим или неопределенным, смотря по тому, отлична от нуля или нет производная $\frac{\partial^2 V}{\partial q\,\partial \lambda}$. В первом случае обе серии вообще совпадают.

Положим

$$\frac{\partial V}{\partial q} = \varphi(\lambda, q) \tag{6}$$

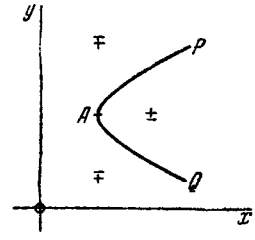
и рассмотрим поверхность

$$z = \varphi(x, y), \tag{7}$$

где x, y, z — обыкновенные декартовы координаты. Кривая $\varphi(x, y)$, отделяющая те части плоскости xy, для которых z положительно, от тех частей, для которых z отрицательно, представляет различные линейные серии форм равновесия. Далее, та часть кривой, для которой градиент $\frac{\partial z}{\partial y}$ положителен,

соответствует устойчивым конфигурациям, а та часть, для которой $\frac{\partial z}{\partial y}$ отрицательно, неустойчивым конфигурациям.

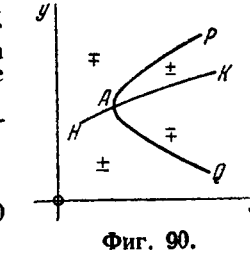
Критические точки $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}=0\right)$ соответствуют условию $\frac{\partial z}{\partial y}=0$; касательная к кривой в этом случае параллельна оси y, в противном случае рассматриваемая точка есть особая точка кривой.



Фиг. 89.

В первом случае, если никакая другая ветвь кривой не проходит через точку касания, мы будем иметь „предельную форму"; без дальнейших рассуждений ясно, что в этой точке имеет место переход от устойчивости к неустойчивости. Этот случай представляет фиг. 89, на которой две серии PA и QA соединяются в предельную форму A. Если к значениям z в соответствующих областях относятся верхние знаки на фиг. 89, то PA соответствует неустойчивым положениям, а QA — устойчивым положениям. Если взять нижние знаки, то результаты получатся обратные.

Если же $\frac{\partial^2 V}{\partial q\,\partial \lambda}=0$ или $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, то мы имеем особую точку. Случай, когда две серии (PA и QA) соединяются и становятся мнимыми, в то время как третья серия (HAK) проходит через общую точку и остается действительной, изображен на фиг. 90. В последней серии имеет место переход от устойчивости к неустойчивости или наоборот, тогда как две другие серии вблизи от точки A будут обе устойчивыми или обе неустойчивыми [1]).



Фиг. 90.

Если мы имеем n степеней свободы, то уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial V}{\partial q_1}=0,\quad \frac{\partial V}{\partial q_2}=0,\ \ldots,\quad \frac{\partial V}{\partial q_n}=0. \tag{8}$$

Мы можем воспользоваться $n-1$ уравнениями, начиная со второго, чтобы выразить $q_2, \ldots, q_n$ через q_1 и λ. Обозначим результат подстановки этих значений в общее выражение для V через $\psi(q_1, \lambda)$. Тогда на основании уравнений (8) будем иметь

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_1}=\frac{\partial V}{\partial q_1}+\frac{\partial V}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial q_1}+\ldots+\frac{\partial V}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial q_1}=\frac{\partial V}{\partial q_1}, \tag{9}$$

---

[1]) В качестве простого примера рассмотрим случай материальной точки, которая может двигаться внутри гладкой изогнутой трубочки (с точками перегиба), лежащей в вертикальной плоскости; положение трубочки в вертикальной плоскости может изменяться в результате вращения вокруг какой-либо оси, перпендикулярной к этой плоскости. Другие примеры доставляют исследования положений равновесия плавающего тела в их зависимости от плотности и исследования, касающиеся устойчивости этих положений равновесия. Случай бруска с квадратным сечением был исследован автором в Статике, Кембридж, 1912, стр. 221, 234.

Случай простого пересечения двух серий, когда обе серии по обе стороны от точки пересечения действительны, можно исследовать подобным же способом.

так что остающееся условие равновесия может быть написано в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_1}=0. \tag{10}$$

Отсюда получаем уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial q_1^2}\frac{\partial q_1}{\partial\lambda}+\frac{\partial^2\psi}{\partial q_1\,\partial\lambda}=0, \tag{11}$$

которое показывает, что последовательность конфигураций равновесия определяется однозначно, за исключением случая $\frac{\partial^2\psi}{\partial q_1^2}=0$. Дальнейший ход доказательства протекает так же, как и раньше, только вместо V нужно подставить ψ. Легко можно показать, что условие $\frac{\partial^2\psi}{\partial q_1^2}=0$ аналитически равнозначно условию $\Delta=0$[1]).

§ 378. Покажем сейчас связь этих рассуждений с теорией относительного равновесия вращающейся системы.

В случае относительного равновесия по отношению к системе осей, вращающейся с постоянной угловою скоростью ω около неподвижной оси, удобнее всего взять условия равновесия в виде

$$\frac{\partial}{\partial q_r}(V-T_0)=0, \tag{1}$$

где V — потенциальная и T_0 — кинетическая энергия системы, когда эта система в заданной конфигурации $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ вращается как твердое тело; ср. § 205. Если мы будем изменять ω, то получим различные линейные серии конфигураций равновесия. Если система, кроме того, подвержена действию диссипативных сил, оказывающих влияние на *относительные* движения, то условие для вековой устойчивости заключается в том, что разность $V-T_0$ должна обращаться в минимум.

Напротив, когда случай, если система свободна, подходит под общую теорию гиростатических систем, тогда для условий равновесия оказывается более удобной форма

$$\frac{\partial}{\partial q_r}(V+K)=0, \tag{2}$$

где K представляет кинетическую энергию системы в предположении, что она вращается как твердое тело в конфигурации $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, и компоненты обобщенных импульсов, соответствующие игнорируемым координатам, остаются постоянными (§ 254). Условие для вековой устойчивости заключается в этом случае в том, что $V+K$ должно иметь минимальное значение. В нашем случае единственная игнорируемая координата, которую мы должны иметь в виду, есть угол, определяющий положение плоскости отсчета, проходящей

[1]) Доказательство с небольшими изменениями взято из руководства Пуанкаре.

через ось вращения и, следовательно, через центр инерции. Соответствующая компонента обобщенного импульса есть момент количеств движения относительно оси; мы будем обозначать этот момент через $\varkappa$. Изменяя $\varkappa$, мы получим различные линейные серии конфигураций равновесия.

В случае вращающейся жидкой массы число обобщенных координат бесконечно велико, все же в некоторых отношениях теория остается неизменной. Предположим на мгновение, что жидкость покрывает твердое вращающееся ядро. Если ядро вынуждено вращаться с постоянной угловой скоростью или (что по существу сводится к тому же) если оно обладает очень большой массой, то мы имеем первую форму задачи; если же, наоборот, ядро свободно, то имеет место вторая форма. Различие между обеими формами исчезает, если мы ограничимся такими возмущениями, которые не оказывают влияния на момент инерции системы относительно оси вращения.

Вторая форма задачи для нашей точки зрения важнее. Мы придем к случаю однородной вращающейся жидкой массы, если примем, что ядро становится бесконечно малым. Для этого случая решение задачи о тносительного равновесия отчасти известно. Прежде всего мы имеем линейную серию эллипсоидов Маклорена, в которой $\frac{a}{R}$ возрастает от 1 до ∞, когда $\varkappa$ изменяется от 0 до ∞ (§ 374). Далее мы имеем две[1]) серии эллипсоидов Якоби, в которых $\frac{a}{b}$ изменяется в одном случае от 1 до ∞, а в другом от 1 до 0, когда $\varkappa$ изменяется от $0{,}304\,M^{3/2}R^{1/2}$ до ∞; a и b обозначают здесь обе экваториальные полуоси (§ 375). Если $\varkappa = 0{,}304\,M^{3/2}R^{1/2}$, то имеет место форма бифуркации и вместе с тем изменение характера устойчивости.

§ 379. В качестве простого приложения предшествующей теории исследуем вековую устойчивость эллипсоида Маклорена для таких эллипсоидальных возмущений, при которых ось вращения остается главной осью[2]).

Пусть ω будет угловая скорость в состоянии равновесия и $\varkappa$ — момент количеств движения.

Если обозначнть через I момент инерции возмущенной системы, то в случае, когда система вращается как твердое тело, угловая скорость будет равна $\frac{\varkappa}{I}$. Отсюда следует

$$V+K=V+\frac{1}{2}\,I\left(\frac{\varkappa}{I}\right)^2=V+\frac{1}{2}\,\frac{\varkappa^2}{I}, \qquad (1)$$

---

[1]) Обе серии содержат одинаковую последовательность геометрических форм; однако, с рассматриваемой здесь точки зрения их следует считать аналитически различными.

[2]) Poincaré, см. выше. Более аналитическое исследование находится у Basset, On the Stability of Maclaurin's Liquid Spheroid, Proc. Camb. Phil. Soc., VIII, 23 (1892).

и условие для вековой устойчивости заключается в том, что это выражение должно быть минимумом. Мы будем предполагать для определенности, что нулевое значение V соответствует состоянию бесконечной протяженности. При всякой другой конфигурации значение V будет отрицательным.

В наших прежних обозначениях имеем

$$I = \frac{1}{5} M(a^2 + b^2), \tag{2}$$

где c — ось вращения. Так как $abc = R^3$, то мы можем положить

$$V + \frac{5}{2} \frac{\varkappa^2}{M(a^2 + b^2)} = f(a, b), \tag{3}$$

где $f(a, b)$ — симметрическая функция обеих независимых переменных a, b. Если мы рассмотрим поверхность, ордината которой есть $f(a, b)$, причем a, b должны рассматриваться как прямоугольные координаты точки на горизонтальной плоскости, то фигуры относительного равновесия будут соответствовать точкам стационарной высоты, и для вековой устойчивости, кроме того, высота должна быть минимумом.

Для $a = \infty$ или $b = \infty$ будет $f(a, b) = 0$. Для $a = 0$ имеем $V = 0$ и $f(a, b)$ пропорционально $\frac{1}{b^2}$; аналогичный результат имеет место для $b = 0$. Если одновременно $a = 0$, $b = 0$, то $f(a, b) = \infty$. Известно, что для любого значения $\varkappa$ всегда существует одна и только одна возможная форма эллипсоида Маклорена. Отсюда, если рассмотрим пересечение названной поверхности с плоскостью симметрии ($a = b$), то заметим, что ордината будет изменяться от ∞ до 0 и будет иметь в этом интервале одно и только одно стационарное значение. Это значение, очевидно, отрицательное и представляет собою минимум [1]).

Поэтому высота в этой точке не может быть максимумом. Более того, так как существует предел для отрицательных значений V (который соответствует тому моменту, когда эллипсоид обращается в шар), то на поверхности всегда существует, по крайней мере одна, конечная точка с минимальной (и притом отрицательной) высотой.

На основании таблиц на стр. 892 получается, что для $\varkappa < 0{,}304\, M^{3/2} R^{1/2}$ существует одна и только одна форма эллипсоидального равновесия, и эта форма есть эллипсоид вращения. Предшествующие рассуждения показывают, что она соответствует точке минимальной высоты и для симметрических эллипсоидальных возмущений вековым образом устойчива.

Если $\varkappa > 0{,}304\, M^{3/2} R^{1/2}$, то имеются три точки стационарной высоты: одна соответствует эллипсоиду Маклорена и лежит в плоскости симметрии, а две другие соответствуют формам Якоби и расположены симметрично по обе стороны этой плоскости. Из топографических соображений тотчас же видим, что высота обеих последних точек должна быть минимумом, а в первой точке не может быть ни максимума, ни минимума. Всякое другое расположение обусловило бы наличие дополнительных точек стационарной высоты.

Окончательный результат исследования можно высказать так: эллипсоид Маклорена при эллипсоидальных возмущениях оказывается вековым образом устойчивым или неустойчивым, смотря по тому, меньше эксцентриситет e или больше, чем 0,8127; таков именно эксцентриситет того эллипсоида вращения, с которого начинается

[1]) Оказывается, что эллипсоид Маклорена для деформаций, при которых поверхность его остается эллипсоидом вращения, всегда устойчив.

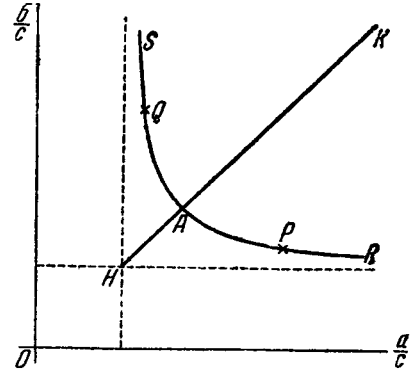
серия Якоби. Эллипсоиды Якоби все устойчивы по отношению к такого рода возмущениям [1]).

Дальнейшее исследование устойчивости эллипсоида Маклорена завело бы нас слишком далеко. Пуанкаре показал, что в этом случае равновесие обладает вековой устойчивостью относительно *всякого* рода возмущений, пока e лежит ниже названного выше предела. Это устанавливается тем, что для эллипсоида вращения с меньшим эксцентриситетом не существует формы бифуркации.

Из рассмотрения „обмена устойчивостей" следует, что серия Якоби вначале вполне устойчива.

§ 380. Пуанкаре исследовал далее коэфициенты устойчивости рядов эллипсоидов Маклорена и Якоби при помощи функций Ламе, чтобы выяснить, какие члены представляют формы бифуркации. Он нашел, что существует бесконечно много форм такого рода, а следовательно, и бесконечно много других линейных серий фигур равновесия. В каждом случае оказывается возможным указать форму членов новой серии в окрестности точки бифуркации. Исследование этого вопроса было продолжено Дарвином [2]) и самим Пуанкаре в более поздней работе [3]).

Наибольший интерес привлек к себе случай первой бифуркации, которая имеет место в серии эллипсоидов Якоби. По Дарвину критическим эллипсоидом оказывается тот, для которого $\frac{a}{R} = 1{,}8858$, $\frac{b}{R} = 0{,}8150$, $\frac{c}{R} = 0{,}6507$. Начиная с этого места, эллипсоиды Якоби оказываются неустойчивыми.



Фиг. 91.

На фиг. 91 [4]), где отношения $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ взяты в качестве координат, прямая HAK представляет серии эллипсоидов Маклорена, отвечающих различным значениям $\varkappa$, тогда как ветви AR и AS представляют серии фигур Якоби. Точка H соответствует случаю шара, для которого $\varkappa = 0$; серия Маклорена от H до

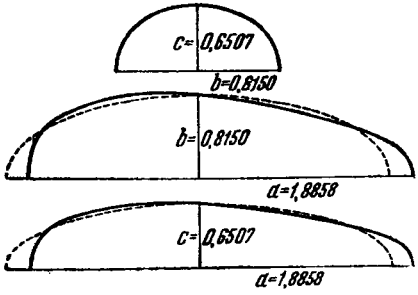
[1]) Этот результат, так же как и предшествующий, был высказан без доказательства Томсоном и Тэтом, Natural Philosophy (2 изд.), § 778″.

[2]) Darwin, On the Pear-chaped Figure of Equilibrium of a Rotating Mass of Liquid, Phil. Trans., A, CXCVIII, 301 (1901) (Papers, III, 288).

[3]) Poincaré, Sur la stabilité des figures pyriformes affectées par une masse fluide en rotation, Phil. Trans. A, CXCVIII, 333 (1901).

[4]) Рисунок построен по таблицам на стр. 889, 892. Набросок находится в книге Пуанкаре.

A устойчива, а далее неустойчива. Точки P, Q обозначают места, в которых эллипсоиды Якоби становятся неустойчивыми. В этих точках ответвляются новые серии. Трудный вопрос об устойчивости этих последних серий был исследован Дарвином, Пуанкаре и Джинсом [1]). Последний из этих авторов пришел к определенному заключению, что эти серии вначале неустойчивы. Первые члены этих новых серий имеют „грушевидную" форму, показанную на фиг. 92. Эти фигуры взяты из только что указанной работы Дарвина.



Фиг 92

Соответствующая плоская задача была исследована Джинсом [2]) при помощи специального метода.

Малые колебания.

§ 381. Малые колебания вращающихся эллипсоидальных масс были исследованы различными авторами.

Простейшие из всех возможных типов возмущений суть те, при которых поверхность жидкой массы остается эллипсоидом, и ось вращения является главной осью этого эллипсоида. В случае эллипсоида Маклорена существует два различных типа возмущений этого рода; при одном из них поверхность жидкой массы остается эллипсоидом вращения, в то время как при другом экваториальные оси становятся неравными, причем одна ось возрастает, а другая убывает, полярная же ось остается неизменной. Риман [3]) показал, что второй тип становится неустойчивым, когда эксцентриситет e меридионального сечения превосходит значение 0,9529. В этом исследовании не принимались во внимание силы трения, и критерий относится к „обыкновенной устойчивости".

В § 379 мы видели, что равновесие становится практически неустойчивым, когда e превосходит значение 0,8127. Периоды обоих римановых типов колебаний (для $e < 0{,}9529$) были вычислены Лявом [4]),

---

[1]) Poincaré, см. выше; Darwin, The Stability of the Pear-shaped Figure of Equilibrium, Phil. Trans. A, CC, 251 (1902) (Papers, III, 317); Jeans, см. выше, стр. 897.

[2]) Jeans, On the Equilibrium of Rotating Liquid Cylinders, Phil. Trans. A, CC, 67 (1902).

[3]) Riemann, Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides, Gött. Abh., IX, 3 (1860) (Werke, стр. 192). См. также Basset, Hydrodynamics, § 367. Риман указывает также, что эллипсоиды Якоби устойчивы по отношению к эллипсоидальным возмущениям (в указанном выше ограниченном смысле).

[4]) Love, On the Oscillations of a Rotating Liquid Spheroid and the Genesis of the Moon, Phil. Mag. (5), XXVII, 254 (1889). Симметрическая форма может быть легко исследована посредством уравнения (23) § 384 этой книги.

который исследовал также колебания в двух измерениях (эллиптического типа) вращающегося эллиптического цилиндра [1]).

В более общей постановке проблема малых колебаний была исследована Пуанкаре [2]). Из § 207 получается, что уравнения малых движений относительно вращающихся осей могут быть написаны в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u &= -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где

$$\psi = \frac{p}{\varrho} + \Omega - \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2) \tag{2}$$

и Ω обозначает потенциал тяготения жидкой массы. Из этих уравнений и из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

следует

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta\psi + 4\omega^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \tag{4}$$

Если мы примем, что u, v, w пропорциональны $e^{i\sigma t}$, то будем иметь

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{i\sigma \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + 2\omega \dfrac{\partial \psi}{\partial y}}{\sigma^2 - 4\omega^2}, \\ v &= \frac{-2\omega \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + i\sigma \dfrac{\partial \psi}{\partial y}}{\sigma^2 - 4\omega^2}, \\ w &= \frac{i}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и, следовательно, на основании уравнения (3) или непосредственно из уравнения (4) получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\sigma^2}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \tag{6}$$

Если положить

$$1 - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} = \tau^2, \quad z = \tau z', \tag{7}$$

---

[1]) Love, On the Motion of a Liquid Elliptic Cylinder under its own Attraction, Quart. Journ. Math., XXIII, 153 (1888).

[2]) См. выше, стр. 897.

то уравнение (6) примет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z'^2}=0. \tag{8}$$

Если уравнение невозмущенного эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{9}$$

то подходящими решениями уравнения (8) будут те, которые содержат эллипсоидальные функции, отвечающие поверхности

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{\frac{c^2}{\tau^2}}=1, \tag{10}$$

которая получается из поверхности (9) при помощи однородной деформации [1]).

На поверхности (9) мы должны иметь $p=\text{const.}$ и, следовательно,

$$\psi=\Omega-\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2). \tag{11}$$

Потенциал Ω возмущенной формы зависит от нормального к поверхности перемещения ζ; эта величина связана с ψ соотношением вида

$$lu+mv+nw=\frac{\partial\zeta}{\partial t}=i\sigma\zeta, \tag{12}$$

причем значения u, v, w на поверхности должны быть взяты из формул (5).

Ход вычислений при этом получается следующий. В предположении, что ζ есть эллипсоидальная поверхностная гармоническая функция, относящаяся к поверхности (9), вычисляется значение Ω на поверхности и подставляется в уравнение (11). Получающееся поверхностное значение ψ выражается затем через эллипсоидальные функции, относящиеся к вспомогательной поверхности (10); соответствующее выражение функции ψ для внутренних точек может быть тогда записано в пространственных эллипсоидальных гармонических функциях. Условие (12) дает затем уравнение для определения σ, и при этом оказывается, что это уравнение всегда алгебраическое.

В случае эллипсоида Маклорена ход вычислений несколько упрощается, так как входящие при этом гармонические функции принадлежат к виду, исследованному в §§ 104, 107. Эта задача исчерпывающим образом была разрешена Брианом [2]), который, в частности,

---

[1]) Оказывается, что для некоторых форм свободных колебаний τ получается мнимым, и потому поверхность (9) для этих случаев есть гиперболоид.

[2]) Bryan, The Waves on a Rotating Liquid Spheroid of Finite Ellipticity, Phil. Trans. A, CLXXX, 187 (1888).

дополнил исследование Римана, показав, что будет иметь место „обыкновенная" устойчивость равновесия, пока эксцентриситет меридиана будет меньше, чем 0,9529.

Эллипсоиды Дирихле.

§ 382. Движение жидкой массы под действием взаимного притяжения ее частиц с меняющейся эллипсоидальной граничной поверхностью в первый раз было исследовано Дирихле [1]). Положив в основу метод Лагранжа, изложенный в § 13, он подверг исследованию целый класс движений, при которых перемещения выражаются как линейные функции координат. Эти исследования на той же основе были продолжены Дедекиндом [2]) и Риманом [3]). Позднее Гринхилль [4]) и другие авторы показали, что некоторые части этой проблемы с большим успехом могут быть исследованы при помощи метода Эйлера.

Рассмотрим прежде всего случай, когда эллипсоид не меняет направления осей и внутреннее движение является потенциальным. Этот случай интересен как пример конечных колебаний жидкой массы около сферической формы.

Выражение для потенциала скоростей было дано в § 110, а именно:

$$\varphi = -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot a}{a}x^2 + \frac{\dot b}{b}y^2 + \frac{\dot c}{c}z^2\right), \tag{1}$$

причем условие постоянства объема представляется в виде

$$\frac{\dot a}{a} + \frac{\dot b}{b} + \frac{\dot c}{c} = 0. \tag{2}$$

Давление на основании (4) § 20 определяется из уравнения

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \Omega - \frac{1}{2}q^2 + F(t); \tag{3}$$

подставляя значение Ω из § 373, получим

$$\frac{p}{\varrho} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\ddot a}{a}x^2 + \frac{\ddot b}{b}y^2 + \frac{\ddot c}{c}z^2\right) - \pi\varrho(\alpha_0 x^2 + \beta_0 y^2 + \gamma_0 z^2) + F(t). \tag{4}$$

---

[1]) Dirichlet, Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik, Gött, Abh., VIII, 3 (1860); Crelle, LVIII, 181 (Werke, II, 263). Эта работа появилась впервые после смерти автора и была издана и расширена Дедекиндом.

[2]) Dedekind, Crelle, LVIII, 217 (1861).

[3]) Riemann, см. выше, стр. 904.

[4]) Greenchill, On the Rotation of a Liquid Ellipsoid about its Mean Axis, Proc. Camb. Phil. Soc., III, 233 (1879); On the general Motion of a liquid Ellipsoid under the Gravitation of its own parts, Proc. Camb Phil. Soc., IV, 4 (1880).

Условие, что давление всюду на ограничивающей поверхности

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{5}$$

должно быть одинаковым, приводится поэтому к виду

$$\left(\frac{\ddot a}{a}+2\pi\varrho\alpha_0\right)a^2=\left(\frac{\ddot b}{b}+2\pi\varrho\beta_0\right)b^2=\left(\frac{\ddot c}{c}+2\pi\varrho\gamma_0\right)c^2. \tag{6}$$

Эти уравнения вместе с условием (2) определяют изменения величин a, b, c. Умножая три слагаемых в условии (2) на одинаковые величины (6), получим

$$\dot a\ddot a+\dot b\ddot b+\dot c\ddot c+2\pi\varrho\left(\alpha_0 a\dot a+\beta_0 b\dot b+\gamma_0 c\dot c\right)=0. \tag{7}$$

Подставляя в это уравнение значения α_0, β_0, γ_0 из § 373, можем написать интеграл его в виде

$$\dot a^2+\dot b^2+\dot c^2-4\pi\varrho abc\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\Delta}=\text{const.} \tag{8}$$

Уже было доказано (§ 373), что потенциальная энергия равна

$$V=\text{const.}-\frac{8}{15}\pi^2\varrho^2a^2b^2c^2\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\Delta}\,; \tag{9}$$

из формулы же (1) легко получается, что кинетическая энергия будет равна

$$T=\frac{2}{15}\pi\varrho abc\left(\dot a^2+\dot b^2+\dot c^2\right). \tag{10}$$

Поэтому формула (8) есть не что иное, как уравнение энергии

$$T+V=\text{const.} \tag{11}$$

Если эллипсоид есть эллипсоид вращения ($a=b$), то уравнение (8) вместе с равенством $a^2c=R^3$ достаточно для определения движения. В этом случае получаем

$$\frac{2}{15}\pi\varrho R^3\left(1+\frac{R^3}{2c^3}\right)\dot c^2+V=\text{const.} \tag{12}$$

Характер движения зависит от полной энергии. Если полная энергия меньше, чем потенциальная энергия в состоянии бесконечного рассеяния, то эллипсоид совершает правильные колебания между сплющенной и вытянутой формами с периодом, зависящим от амплитуды; если, наоборот, энергия превосходит это предельное значение, то колебания прекращаются, и эллипсоид стремится к одной из двух предельных форм, а именно: либо к бесконечной материальной линии

совпадающей с осью z, либо к безгранично распространенному во все стороны тонкому слою, совпадающему с плоскостью xy [1]).

Если в случае эллипсоида вращения наложить на потенциальное движение, определяемое формулой (1), равномерное вращение вокруг оси z с угловой скоростью ω, то составляющие скорости, параллельные неподвижным осям, будут равны

$$u=\frac{\dot a}{a}x-\omega y,\quad v=\frac{\dot a}{a}y+\omega x,\quad w=\frac{\dot c}{c}z. \tag{13}$$

Уравнения Эйлера [§ 6 (2)] приводятся в этом случае к виду

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\ddot a}{a}x-\dot\omega y-2\frac{\dot a}{a}\omega y-\omega^2 x=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial\Omega}{\partial x},\\
&\frac{\ddot a}{a}y+\dot\omega x+2\frac{\dot a}{a}\omega x-\omega^2 y=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial\Omega}{\partial y},\\
&\frac{\ddot c}{c}z=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial\Omega}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Первые два уравнения после перекрестного дифереицирования дают

$$\frac{\dot\omega}{\omega}+2\frac{\dot a}{a}=0 \tag{15}$$

или

$$\omega a^2=\omega_0 a_0^2, \tag{16}$$

что и представляет собой выражение теоремы Гельмгольца о том, что „интенсивность" вихря постоянна (§ 146). В силу соотношения (15) уравнения (14) имеют интеграл

$$\frac{p}{\varrho}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\ddot a}{a}-\omega^2\right)(x^2+y^2)-\frac{1}{2}\frac{\ddot c}{c}z^2-\Omega+\text{const}. \tag{17}$$

Если ввести для Ω значение (4) из § 373, то найдем, что давление на поверхности

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{18}$$

будет постоянным при условии

$$\left(\frac{\ddot a}{a}+2\pi\varrho a_0-\omega^2\right)a^2=\left(\frac{\ddot c}{c}+2\pi\varrho\gamma_0\right)c^2. \tag{19}$$

В силу соотношения (15) и условия постоянства объема

$$2\frac{\dot a}{a}+\frac{\dot c}{c}=0 \tag{20}$$

равенство (19) может быть написано в виде

$$2\dot a\ddot a+\dot c\ddot c+2(\omega^2 a\dot a+\omega\dot\omega a^2)+4\pi\varrho a_0 a\dot a+2\pi\varrho\gamma_0 c\dot c=0; \tag{21}$$

[1]) Dirichlet, см. выше, стр. 907. Когда амплитуда колебаний мала, то период должен совпадать с тем, который мы получим, если в формуле (10) § 262 положим $n=2$. Это было подтверждено Хиксом. Proc. Camb Phil. Soc., IV, 309 (1883).

отсюда следует

$$2\dot{a}^2+\dot{c}^2+2\omega^2a^2-4\pi\varrho a^2c\int_0^\infty\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)^{1/2}}=\text{const}. \tag{22}$$

Последнее равенство опять можно рассматривать как уравнение энергии.

Если мы примем c за независимую переменную, то соотношение (22) можно написать в виде

$$\frac{2}{15}\pi\varrho R^3\left\{\left(1+\frac{R^3}{2c^3}\right)\dot{c}^2+\frac{2\omega_0^2a_0^4}{R^3}\dot{c}\right\}+V=\text{const}. \tag{23}$$

При подходящих начальных условиях поверхность будет совершать правильные колебания между двумя крайними формами. Так как в случае вытянутого эллипсоида V возрастает вместе с c, то очевидно, что для вращающегося эллипсоида независимо от начальных условий существует предел возможного удлинения в направлении оси. Напротив, в экваториальной плоскости мы можем иметь неограниченное расширение [1]).

Полагая

$$K=\frac{4}{15}\pi\varrho\omega_0^2a_0^4c, \tag{24}$$

будем иметь условие относительного равновесия, выводя его из уравнения (22), в виде

$$\frac{d}{dc}(V+K)=0, \tag{25}$$

в согласии с (2) § 378. Малые колебания (симметрического типа) около положения равновесия можно исследовать, полагая $c=c_0+c'$, где c_0 есть решение уравнения (25), и рассматривая c' как величину малую.

§ 383. Исследование движении жидкой массы, ограниченной поверхностью эллипсоида переменной формы, было проведено далее Риманом в названной выше работе. Эта проблема явилась с того времени предметом обширной литературы, которую мы отчасти приводим в примечании [2]). Случай, когда эллипсоидальная граничная поверхность имеет неизменную форму, но вращается вокруг главной оси (Oz), может быть исследован очень простым способом [3]).

Если обозначить через u, v, w *относительные* скорости по отношению к системе осей (xy), вращающейся в своей собственной плоскости с постоян-

---

[1]) Dirichlet, см. выше, стр. 907.

[2]) Brioschi. Développements rélatifs au § 3 des Recherches de Dirichlet sur un problème d'Hydrodynamique, Crelle, LIX, 63 (1861); Lipschitz, Reduction der Bewegung eines flüssigen homogenen Ellipsoids auf das Variationsproblem eines einfachen Integrals. . . , Crelle, LXXVIII, 245 (1874); Greenhill, см. выше, стр. 907; Basset, On the Motion of a Liquid Ellipsoid under the Influence of its own Attraction, Proc. Lond. Math. Soc., XVII, 255 (1886) (Hydrodynamics, гл. XV); Tedone, Il moto di un ellipsoide fluido secondo l'ipotesi di Dirichlet, Pisa, 1894; Steklоff, Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible de la forme ellipsoïdale..., Ann. de l'école normale (3), XXVI (1909); Hargreaves, Camb. Trans., XXII, 61 (1914).

[3]) Greenhill, см. выше, стр. 907.

ной угловой скоростью ω, то уравнения движения на основании § 207 [1]) будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{Du}{Dt}-2\omega v-\omega^2 x&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial\Omega}{\partial x},\\ \frac{Dv}{Dt}+2\omega u-\omega^2 y&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial\Omega}{\partial y},\\ \frac{Dw}{Dt}&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial\Omega}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

Если вектор-вихрь ζ, направление которого параллельно оси z, всюду в жидкости имеет постоянное значение, то проекции абсолютной скорости на мгновенные направления осей будут соответственно равны

$$\left.\begin{aligned}u-\omega y&=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\left(\omega-\frac{1}{2}\zeta\right)y-\frac{1}{2}\zeta y,\\ v+\omega x&=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\left(\omega-\frac{1}{2}\zeta\right)x+\frac{1}{2}\zeta x,\\ w&=0,\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

так как все условия, очевидно, будут выполнены, если на равномерное вращение с угловой скоростью $\frac{1}{2}\zeta$ будет наложено безвихревое движение которое получится благодаря вращению твердой эллипсоидальной оболочки с угловой скоростью $\omega-\frac{1}{2}\zeta$ (ср. § 110). Отсюда следуют равенства

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{2a^2}{a^2+b^2}\left(\omega-\frac{1}{2}\zeta\right)y,\\ v&=-\frac{2b^2}{a^2+b^2}\left(\omega-\frac{1}{2}\zeta\right)x,\\ w&=0.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (1) и интегрируя, получаем

$$\frac{p}{\varrho}=\frac{2a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}\left(\omega-\frac{1}{2}\zeta\right)^2(x^2+y^2)+\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)-\\ -\frac{2(b^2x^2+a^2y^2)}{a^2+b^2}\omega\left(\omega-\frac{1}{2}\zeta\right)-\Omega+\text{const}.\tag{4}$$

Отсюда условия на свободной поверхности будут иметь вид

$$\left\{\frac{2a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}\left(\omega-\frac{1}{2}\zeta\right)^2+\frac{1}{2}\omega^2-\frac{2b^2}{a^2+b^2}\omega\left(\omega-\frac{1}{2}\zeta\right)-\pi\varrho\alpha_0\right\}a^2=\\ =\left\{\frac{2a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}\left(\omega-\frac{1}{2}\zeta\right)^2+\frac{1}{2}\omega^2-\frac{2a^2}{a^2+b^2}\omega\left(\omega-\frac{1}{2}\zeta\right)-\pi\varrho\beta_0\right\}b^2=\\ =-\pi\varrho\gamma_0c^2.\tag{5}$$

Это выражение содержит в себе ряд интересных случаев:

1. Полагая $\omega=\frac{1}{2}\zeta$, приходим к условиям для эллипсоида Якоби [§ 374 (5)].

[1]) Можно было бы применить также уравнения § 12, если принять во внимание измененное значение u, v, w.

2. Полагая $\omega = 0$, что означает, что внешняя граница будет неизменной в пространстве, получаем

$$\left\{\pi\varrho\alpha_0 - \frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)^2}\zeta^2\right\}a^2 = \left\{\pi\varrho\beta_0 - \frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)^2}\zeta^2\right\}b^2 = \pi\varrho\gamma_0 c^2. \tag{6}$$

Эти условия равносильны соотношениям

$$(\alpha_0 - \beta_0)\,a^2b^2 + \gamma_0 c^2(a^2 - b^2) = 0 \tag{7}$$

и

$$\frac{\zeta^2}{2\pi\varrho} = \frac{(a^2+b^2)^2}{a^2b^2}\cdot\frac{a^2\alpha_0 - b^2\beta_0}{a^2 - b^2}. \tag{8}$$

Из сравнения с § 375 становится ясным, что c должна быть наименьшей осью эллипсоида и что значение (8) величины $\frac{\zeta^2}{2\pi\varrho}$ положительно.

Траектории частиц определяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{a^2}{a^2+b^2}\zeta y,\\ \dot{y} &= \frac{b^2}{a^2+b^2}\zeta x,\\ \dot{z} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

откуда следует

$$\left.\begin{aligned} x &= ka\cos(\sigma t + \varepsilon),\\ y &= kb\sin(\sigma t + \varepsilon),\\ z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где

$$\sigma = \frac{ab}{a^2+b^2}\zeta, \tag{11}$$

и k, ε — произвольные постоянные.

Эти результаты принадлежат Дедекинду [1]). Ляв заметил, что серии эллипсоидов Дедекинда и Якоби по своей внешней форме тождественны.

3. Пусть $\zeta = 0$, т. е. движение свободно от вихрей. Условия (5) приводятся тогда к виду

$$\left\{\alpha_0 - \frac{(a^2-b^2)(a^2+3b^2)}{(a^2+b^2)^2}\frac{\omega^2}{2\pi\varrho}\right\}a^2 = \left\{\beta_0 - \frac{(b^2-a^2)(3a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}\frac{\omega^2}{2\pi\varrho}\right\}b^2 = \gamma_0 c^2. \tag{12}$$

Эти условия можно заменить соотношениями

$$\alpha_0(3a^2+b^2) + \beta_0(3b^2+a^2)\}\,a^2b^2 - \gamma_0(a^4+6a^2b^2+b^4)\,c^2 = 0 \tag{13}$$

и

$$\frac{\omega^2}{2\pi\varrho} = \frac{(a^2+b^2)^2}{a^4+6a^2b^2+b^4}\cdot\frac{\alpha_0 a^2 - \beta_0 b^2}{a^2-b^2}. \tag{14}$$

Уравнение (13) определяет c через a, b. Предположим, что $a > b$; тогда легко видеть, что левая часть уравнения (13) при $c = a$ отрицательна, а при $c = b$ положительна. Поэтому между a и b имеется такое действительное значение c, для которого условие (13) будет выполняться; значение ω, полученное из уравнения (14), на том же основании, как в § 375, будет в этом случае действительным.

---

[1]) Dedekind, см. выше, стр. 907. См. также Love, On Dedekind's Theorem..., Phil. Mag. (5) XXV, 40 (1888).

4. В случае эллиптического цилиндра, вращающегося вокруг своей оси, условия (5) на основании формул (19) § 373 приводятся к виду

$$\omega^2+\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}\left(\omega-\frac{1}{2}\zeta\right)^2=\frac{4\pi\varrho ab}{(a+b)^2}. \qquad (15)^1$$

Полагая $\omega=\frac{1}{2}\zeta$, получим случай (8) § 375.

Если $\omega=0$, т. е. внешняя граница является установившейся, то будем иметь

$$\zeta^2=4\pi\varrho\,\frac{(a^2+b^2)^2}{ab\,(a+b)^2}. \qquad (16)$$

Когда $\zeta=0$, т. е. когда движение свободно от вихрей, имеем

$$\omega^2=4\pi\varrho\,\frac{ab\,(a^2+b^2)^2}{(a+b)^2\,(a^4+6a^2b^2+b^4)}. \qquad (17)$$

§ 384. Колебания вращающейся эллипсоидальной жидкой массы, заключенной в твердую оболочку, были исследованы различными авторами [2]). Мы будем следовать вначале (с некоторыми дополнениями) очень изящному способу Пуанкаре.

Предполагается, что центр масс и главные оси инерции оболочки и жидкости совпадают, а завихрение жидкости всюду одинаково.

Наложим на движение, определяемое формулами (13) § 146, при котором оболочка предполагается твердой, равномерное вращение (p, q, r); тогда будем иметь при небольшом изменении обозначений

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{a}{c}\,q_1z-\frac{a}{b}\,r_1y+qz-ry,\\ v&=\frac{b}{a}\,r_1x-\frac{b}{c}\,p_1z+rx-pz,\\ w&=\frac{c}{b}\,p_1y-\frac{c}{a}\,q_1x+py-qx. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Компоненты вектора вихря будут поэтому равны

$$\left.\begin{aligned} \xi&=2p+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)p_1,\\ \eta&=2q+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)q_1,\\ \zeta&=2r+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)r_1. \end{aligned}\right\} \qquad (2$$

Кинетическая энергия всей системы будет равна

$$2T=Ap^2+Bq^2+C\,{}^2+A_1p_1^2+B_1q_1^2+C_1r_1^2+2Fpp_1+2Gqq_1+2Hrr_1, \qquad (3)$$

---

[1]) Greenhill, Proc. Camb. Phil. Soc., III, 233 (1879).

[2]) Greenhill, см. выше, стр. 27; Hough, The Oscillations of a Rotating Ellipsoidal Schell containing fluid, Phil. Trans. A, CLXXXVI, 469 (1895), Poincaré, Sur la précession des corps déformables, Bull. Astr., 1910; Basset, Quart. J. of Math., XLV, 223 (1914). Приложение к прецессионным задачам сделал, повидимому, впервые Кельвин (Papers, III, 322 и IV, 129); точное решение принадлежит Гафу и Пуанкаре.

где A, B, C — главные моменты инерции всей системы, в то время как A_1, B_1, C_1, F, G, H относятся только к жидкости; в частности, имеем

$$A_1=\frac{b^2}{c^2}\sum(mz^2)+\frac{c^2}{b^2}\sum(my^2)=\frac{1}{5}\sum(m)\,(b^2+c^2) \quad \text{и т. д.} \tag{4}$$

$$F=\frac{b}{c}\sum(mz^2)+\frac{c}{b}\sum(my^2)=\frac{2}{5}\sum(m)\,bc \quad \text{и т. д.} \tag{5}$$

Суммирование здесь распространяется на всю массу жидкости. Главные же моменты инерции оболочки равны

$$A_0=A-A_1,\quad B_0=B-B_1,\quad C_0=C-C_1. \tag{6}$$

Главный момент количеств движения системы относительно оси Ox равен

$$A_0p+\sum m(yw-zv)=A_0p+\left(p+\frac{c}{b}\,p_1\right)\sum(my^2)+\left(p+\frac{b}{c}\,p_1\right)\sum(mz^2)=$$
$$=Ap+Fp_1=\frac{\partial T}{\partial p}\,. \tag{7}$$

Уравнения движения относительно подвижных осей имеют при этом вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p}-r\frac{\partial T}{\partial q}+q\frac{\partial T}{\partial r}=L,\\&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q}-p\frac{\partial T}{\partial r}+r\frac{\partial T}{\partial p}=M,\\&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r}-q\frac{\partial T}{\partial p}+p\frac{\partial T}{\partial q}=N,\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где L, M, N — главные моменты внешних сил.

Уравнения Гельмгольца (4) § 146 в подвижных осях принимают вид

$$\frac{D\xi}{Dt}-r\eta+q\zeta=\xi\frac{\partial u}{\partial x}+\eta\frac{\partial u}{\partial y}+\zeta\frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{и т. д.;} \tag{9}$$

отсюда после подстановки из формул (1) и (2) получаем

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{a}{c}q_1\zeta-\frac{a}{b}r_1\eta \quad \text{и т. д.;} \tag{10}$$

при этом мы смогли применить обозначение полной производной $\left(\frac{d}{dt}\right)$, так как, согласно предположению, ξ, η, ζ суть функции только времени.

Теперь на основании формул (2) можем написать

$$\frac{1}{5}\sum(m)\,bc\xi=Fp+A_1p_1=\frac{\partial T}{\partial p_1}\,, \tag{11}$$

и уравнения Гельмгольца соответственно этому примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_1}-q_1\frac{\partial T}{\partial r_1}+r_1\frac{\partial T}{\partial q_1}=0,\\&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_1}-r_1\frac{\partial T}{\partial p_1}+p_1\frac{\partial T}{\partial r_1}=0,\\&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r_1}-p_1\frac{\partial T}{\partial q_1}+q_1\frac{\partial T}{\partial p_1}\quad 0.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Подставляя T из формулы (3) в уравнения (8) и (12), получаем следующие две системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(Ap+Fp_1)-r\ (Bq+Gq_1)+q\ (Cr+Hr_1)=L,\\
&\frac{d}{dt}(Bq+Gq_1)-p\ (Cr+Hr_1)+r\ (Ap+Fp_1)=M,\\
&\frac{d}{dt}(Cr+Hr_1)-q\ (Ap+Fp_1)+p\ (Bq+Gq_1)=N,
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(Fp+A_1p_1)+r_1(Gq+B_1q_1)-q_1\ (Hr+C_1r_1)=0,\\
&\frac{d}{dt}(Gq+B_1q_1)+p_1(Hr+C_1r_1)-r_1\ (Fp+A_1p_1)=0,\\
&\frac{d}{dt}(Hr+C_1r_1)+q_1(Fp+A_1p_1)-p_1\ (Gq+B_1q_1)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Мы ограничимся теперь случаем симметрии относительно оси z [1]; тогда будем иметь

$$a=b,\quad A=B,\quad A_1=B_1,\quad C_1=H,\quad F=G. \tag{15}$$

Если теперь главный момент внешних сил относительно оси симметрии будет равен нулю, то будут иметь место уравнения

$$C\frac{dr}{dt}+C_1\frac{dr_1}{dt}+F(pq_1-p_1q)=0, \tag{16}$$

$$C_1\left(\frac{dr}{dt}+\frac{dr_1}{dt}\right)+F(pq_1-p_1q)=0. \tag{17}$$

Отсюда получается $\frac{dr}{dt}=0$, что динамически и непосредственно ясно. Следовательно, имеем

$$r=\text{const.}=\omega \tag{18}$$

и

$$C_1\frac{dr}{dt}+F(pq_1-p_1q)=0. \tag{19}$$

Если имеет место небольшое возмущение из состояния установившегося движения, когда жидкость и твердое тело вращаются вместе как одно тело около оси симметрии, то p, q, p_1, q_1 (вначале для всех случаев) будут малыми величинами. Если пренебречь их произведениями, то величина r_1 на основании уравнения (19) будет постоянной и может считаться малой, так как можно принять, что при установившемся движении она исчезает. При этих упрощениях остальные уравнения системы (13) и (14) приводятся

[1]) Свободные колебания эллипсоида с тремя неравными осями были исследованы Гафом (см. выше), который, однако, предполагал отклонения от шаровой формы малыми.

к уравнениям

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt}+F\frac{dp_1}{dt}+(C-A)\,\omega q-F\omega\, q_1=L,\\ A\frac{dq}{dt}+F\frac{dq_1}{dt}-(C-A)\,\omega p+F\omega p_1=M,\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} F\frac{dp}{dt}+A_1\frac{dp_1}{dt}-C_1\omega q_1=0,\\ F\frac{dq}{dt}+A_1\frac{dq_1}{dt}+C_1\omega p_1=0.\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Для астрономических возмущающих сил можно считать типичными соотношения

$$L=\varkappa\cos\sigma t,\quad M=\varkappa\sin\sigma t. \tag{22}$$

Тогда, полагая

$$p+iq=\tilde{\omega},\quad p_1+iq_1=\tilde{\omega}_1, \tag{23}$$

будем иметь

$$A\frac{d\tilde{\omega}}{dt}+F\frac{d\tilde{\omega}_1}{dt}-i\,(C-A)\;\omega\tilde{\omega}+iF\omega\tilde{\omega}_1=\varkappa e^{i\sigma t}, \tag{24}$$

$$F\frac{d\tilde{\omega}}{dt}+A_1\frac{d\tilde{\omega}_1}{dt}+iC_1\omega\tilde{\omega}_1=0. \tag{25}$$

Для вынужденных колебаний получаем, таким образом,

$$\tilde{\omega}=-\frac{A_1\sigma+C_1\omega}{\Delta(\sigma)}\,i\varkappa e^{i\sigma t}, \tag{26}$$

$$\tilde{\omega}_1=\frac{F\sigma}{\Delta(\sigma)}\,i\varkappa e^{i\sigma t}, \tag{27}$$

где

$$\Delta(\sigma)=\begin{vmatrix} A\sigma-(C-A)\,\omega, & F\,(\sigma+\omega)\\ F\sigma, & A_1\sigma+C_1\omega\end{vmatrix}. \tag{28}$$

Свободные колебания определяются уравнением

$$\Delta(\sigma)=0. \tag{29}$$

Мы, главным образом, рассмотрим тот случай, когда отклонение полости от сферической формы мало. Если бы полость была в точности сферической, то на основании формул (4) и (5) мы имели бы

$$A_1=C_1=F \tag{30}$$

и потому

$$\Delta(\sigma)=C_1\,(\sigma+\omega)\,\{\,A_0\sigma-(C_0-A_0)\,\omega\,\}. \tag{31}$$

Отсюда для колебаний (по отношению к вращающимся осям) мы имели бы

$$\sigma=-\omega\ \text{ и }\ \sigma=\frac{C_0-A_0}{A_0}\,\omega. \tag{32}$$

На основании уравнения (25) первый корень дает $p=0$, $q=0$ и соответствует незначительному постоянному перемещению в пространстве оси вихревого вектора жидкости. Второй корень соответствует свободной „эйлеровой нутации" оболочки, не зависящей в этом случае от наличия жидкости. Равным образом и вынужденные колебания оболочки также не зависят от жидкости.

В общем же случае формула (28) может быть приведена к виду

$$\Delta(\sigma) = A_1(\sigma+\omega)\{A_0\sigma-(C-A)\omega\}+(A_1^2-F^2)\sigma^2+ \\ +\{(C_1-A_1)A_0+C_1A_1-F^2\}\omega\sigma-(C_1-A_1)(C-A)\omega^2. \quad (33)$$

Положим

$$\varepsilon=\frac{C_1-A_1}{A_1}=\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}. \quad (34)$$

Будем предполагать эту величину малой; в таком случае она будет совпадать с эллиптичностью полости согласно обычному определению. Из формул (4) и (5) следует также

$$\frac{C_1A_1-F^2}{C_1A_1}=\varepsilon, \quad \frac{A_1^2-F^2}{A_1^2}=\varepsilon^2. \quad (35)$$

В качестве первого приближения к свободным колебаниям имеем на основании уравнения (33)

$$\sigma=-\omega \quad \text{и} \quad \sigma=\frac{C-A}{A_0}\omega; \quad (36)$$

второй корень показывает, что период свободной эйлеровой нутации оказывается короче в отношении $\frac{A_0}{A}$, чем в том случае, когда вся масса представляет твердое тело, что и следовало ожидать. Приближение можно продолжить, что, однако, не представляет интереса. Влияние малой эллиптичности во всех случаях оказывается незначительным.

Дело меняется в случае вынужденных колебаний, в особенности при большом периоде. Если бы распределение возмущающих сил в пространстве было неизменным, то угловая скорость по отношению к движущимся осям была бы равна $-\omega$. Подставляя $\sigma=-\omega$ в формулы (26) и (28), получаем

$$p+iq=\tilde{\omega}=\frac{\varkappa}{C\omega}ie^{-i\omega t}. \quad (37)$$

Этот результат можно сравнить с формулой для медленной прецессии волчка, которую можно рассматривать теперь уже как частный случай. Полученный результат оказывается совершенно таким же, как если бы масса была во всех отношениях твердой. Следует заметить, что эти рассуждения не зависят от малости ε.

Если, однако, распределение возмущающих сил в пространстве медленно меняется и множитель времени есть e^{int}, то мы должны положить $\sigma=-\omega+n$, и тогда получаем

$$p+iq=-\frac{(C_1-A_1)\omega+A_1n}{\Delta(-\omega+n)}i\varkappa e^{-i(\omega-n)t}. \quad (38)$$

Знаменатель этой дроби можно написать в виде

$$\Delta(-\omega+n)=(A_0A_1+A_1^2-F^2)n^2- \\ -\{C_0A_1-A(C_1-A_1)+C_1A_1-F^2\}n\omega-C(C_1-A_1)\omega^2. \quad (39)$$

Если принять во внимание формулы (34) и (35), то получаем следующий результат: если отношение $\frac{n}{\omega}$ не только вообще мало, но мало именно по сравнению с ε, то формула (38) может быть приближенно написана в виде

$$p+iq=\frac{i\varkappa}{C\omega}e^{-i(\omega-n)t}; \quad (40)$$

а это опять та же формула, которая должна была бы иметь место, если бы жидкость затвердела. Положенное здесь в осиову допущение заключается в том, что отношение (абсолютного) периода $\frac{2\pi}{n}$ возмущающей силы к перноду $\frac{2\pi}{\omega}$ вращения должно быть велико по сравнению с $\frac{1}{\varepsilon}$.

Отсюда следует, что совершенно незиачительное отклонение формы полостн от сферической было бы достаточно, чтобы вынужденные колебания большого пернода практически были бы таковы, как если бы вся масса была твердым телом. Если бы земной шар состоял из твердой оболочкн, охватывающей жидкую массу с эллиптичностью того же порядка $\left(\frac{1}{300}\right)$, как и у внешней поверхности Земли, то указанное выше условие, конечно, с избытком будет выполняться для случая лунно-солнечной прецессии, период которой равеи 26 000 лет. Напротив, влияние жидкого внутреннего ядра на луиную нутацию с периодом в девятнадцать лет было бы заметно, а на солнечную и лунную нутации с периодами в полгода и в четырнадцать дней (соответственно) это влияние было бы даже существенно [1]).

Следует еще добавить, что результаты, заключающиеся в формулах (36), поскольку они относятся к *свободным* колебаниям, основаны на предположенин, что масса оболочки сравнима с массой жидкости. В предельном случае, когда массой оболочки можно пренебречь, имеет место соотношение

$$\Delta(\sigma) = (A_1^2 - F^2)\,\sigma(\sigma+\omega) - C_1(C_1 - A_1)\,\omega^2. \tag{41}$$

Уравнение для определения периодов свободных колебаний будет в этом случае нметь внд

$$(a^2 - c^2)\,\sigma(\sigma+\omega) - 2a^2\omega^2 = 0. \tag{42}$$

Оказывается, что пернолы для $c < a$ или для $c > 3a$ будут действительиы, а для $a < c < 3a$ становятся мнимыми. Это согласуется с наблюденнем Кельвина [2]), согласно которому жидкий гиростат, оболочка которого представляет несколько удлиненный эллипсоид вращения, неустойчив, между тем как сплющеиная форма устойчива.

§ 385. Прецессия жидкого эллипсоида со *свободной поверхностью* также была исследована Пуанкаре; он подтвердил высказывание Кельвина, что если период возмущающих сил достаточно велик, то прецессия практически такова, как если бы масса была твердой. Эта задача значительно труднее, чем предшествующая, так как возмущающие силы вызывают также приливные колебания, и поэтому оказывается необходимым отделить прецессию от деформации, обусловленной этими колебаниями.

Пуанкаре, следуя Дирихле, применяет упомянутый в § 382 метод Лагранжа, но представляет интерес, а также и некоторое преимущество, воспользоваться здесь методом предыдущего параграфа (с необходимыми изменениями).

При том и другом способе вычисление имеет несколько косвенный характер. Представим себе, что граничная поверхность жидкости вначале вынуждена (если это необходимо), благодаря соответствующему

---

[1]) Эти результаты были устаиовлены Кельвином в 1876 г. (Papers, III, 322). Математическое исследование, на котором они основываются, не было опубликовано.

[2]) Kelvin, Papers, IV, 129, 183. Более точный критерий для устойчивости был дан Гринхиллем; см. также Hough, см. выше.

давлению, оставаться эллипсоидом, но при этом размеры его могут меняться. В конце же оказывается, что в этих вынуждающих давлениях нет необходимости (ср. § 382).

Равенства (1) заменятся теперь в соответствии с формулой (5) § 110 следующими:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{a}{c}q_1 z - \frac{a}{b}r_1 y + qz - ry + \frac{\dot a}{a}x,\\ v &= \frac{b}{a}r_1 x - \frac{b}{c}p_1 z + rx - pz + \frac{\dot b}{b}y,\\ w &= \frac{c}{b}p_1 y - \frac{c}{a}q_1 x + py - qx + \frac{\dot c}{c}z, \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

причем изменения осей эллипсоида связаны условием несжимаемости

$$\frac{\dot a}{a} + \frac{\dot b}{b} + \frac{\dot c}{c} = 0. \tag{44}$$

Формула (3) для кинетической энергии изменится благодаря этому добавлением члена

$$\frac{1}{5}\sum (m)(\dot a^2 + \dot b^2 + \dot c^2). \tag{45}$$

Значки у величин A_1, B_1, C_1, определяемых формулами (4), можно теперь отбросить, так как A_0, B_0, $C_0 = 0$.

Составляющие главного момента количеств движения выражаются так же, как в формуле (7), и уравнения движения (13), следовательно, все еще будут иметь силу; при этом следует помнить, что коэфициенты A, B, C, F, G, H не являются уже постоянными, так как они содержат переменные величины a, b, c. Обозначения L, M, N должны естественно включать в себя моменты (если они существуют) вынуждающих давлений на поверхность.

Составляющие вектора-внхря попрежнему определяются формулами (2) и формула (11) остается неизменной; вместо же формул (10) будем нметь

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\dot a}{a}\xi + \frac{a}{c}q_1\zeta - \frac{a}{b}r_1\eta_1 \text{ и т. д.} \tag{46}$$

Отсюда следует, если принять во внимание соотношение (44),

$$\frac{d}{dt}(bc\xi) = abq_1\zeta - car_1\eta \text{ и т. д.} \tag{47}$$

Уравнения Гельмгольца сохраняют согласно с этим вид (12), но коэфициенты в уравнениях (14) будут, конечно, переменными.

Проекции ускорения в произвольной точке жидкости можно получить из формул § 12; например, проекция ускорения на ось x будет равна

$$\frac{\partial u}{\partial t} - rv + qw + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{Dx}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{Dy}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{Dz}{Dt}, \tag{48}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \frac{Dx}{Dt} &= \frac{\dot a}{a}x + \frac{a}{c}q_1 z - \frac{a}{b}r_1 y,\\ \frac{Dy}{Dt} &= \frac{\dot b}{b}y + \frac{b}{a}r_1 x - \frac{b}{c}p_1 z,\\ \frac{Dz}{Dt} &= \frac{\dot c}{c}z + \frac{c}{b}p_1 y - \frac{c}{a}q_1 x. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Проекции ускорения оказываются, таким образом, линейными функциями от x, y, z с коэфициентами, зависящими от t. Условия для интегрируемости гидродинамических уравнений показывают тотчас, что эти функции должны приводиться к виду

$$ax+hy+gz, \quad hx+\beta y+fz, \quad gx+fy+\gamma z. \tag{50}$$

Это можно, хотя и несколько кропотливо, установить при помощи уравнений Гельмгольца (14), которые и представляют на самом деле упомянутые выше условия интегрируемости. Гидродинамические уравнения принимают поэтому вид

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial x} &= ax+hy+gz+\frac{\partial\Omega}{\partial x}+\frac{\partial\Omega'}{\partial x}, \\ -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial y} &= hx+\beta y+fz+\frac{\partial\Omega}{\partial y}+\frac{\partial\Omega'}{\partial y}, \\ -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial z} &= gx+fy+\gamma z+\frac{\partial\Omega}{\partial z}+\frac{\partial\Omega'}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

где P — давление, Ω — потенциал самой эллипсоидальной массы и Ω' — потенциал отдаленных возмущающих тел.

В обозначениях § 373 будем иметь

$$\Omega=\pi\varrho\,(\alpha_0x^2+\beta_0y^2+\gamma_0z^2-\chi_0). \tag{52}$$

Потенциал же возмущающих сил для точек в окрестности начала можно разложить в ряд по сферическим функциям положительной степени. Члены первого порядка не оказывают никакого влияния на движение по отношению к центру масс, в то время как члены порядка выше второго по обыкновению могут быть отброшены. Мы положим поэтому

$$\Omega'=\frac{1}{2}\,(A'x^2+B'y^2+C'z^2+2F'yz+2G'zx+2H'xy), \tag{53}$$

причем коэфициенты, которые представляют известные функции времени, вследствие уравнения $\Delta\Omega'=0$ должны удовлетворять условию $A'+B'+C'=0$.

Уравнения (51) удовлетворятся поэтому решением вида

$$P=\lambda\varrho\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right), \tag{54}$$

если

$$\alpha+2\pi\varrho\alpha_0+A'=\frac{2\lambda}{a^2}, \quad \beta+2\pi\varrho\beta_0+B'=\frac{2\lambda}{b^2}, \quad \gamma+2\pi\varrho\gamma_0+C'=\frac{2\lambda}{c^2}, \tag{55}$$

и

$$f+F'=0, \quad g+G'=0, \quad h+H'=0. \tag{56}$$

Уравнения (14), (44), (55), (56) представляют систему десяти уравнений, связывающих десять зависимых переменных a, b, c, p, q, r, p_1, q_1, r_1, λ с временем.

Следует заметить, что уравнения (56) представляют в точности те уравнения, которые могли бы быть получены из формул (51) и (53) при выражении того обстоятельства, что скорости изменения моментов количеств движения по отношению к фиксированным осям, совпадающим с мгновенными положениями осей эллипсоида, равны соответствующим моментам внешних сил. Уравнения (56) действительно эквивалентны системе (13), причем L, M, N теперь должны относиться только к одним возмущающим силам, так как при том распределении давления, которое дается формулой (54), моменты этих давлений относительно указанных осей будут равны нулю. Нетрудно также и непосредственно показать тождественность уравнений (56) и (13).

Подставим, хотя это и не существенно для наших целей, значения α, β, γ, полученные из (48), в уравнения (55). Тогда, исключая λ, будем иметь

$$\begin{aligned}\ddot{a}a - a^2(q^2+r^2+q_1^2+r_1^2) - 2caqq_1 - 2abrr_1 + 2\pi\varrho a^2\alpha_0 + A'a^2 &= \\ = b\ddot{b} - b^2(r^2+p^2+r_1^2+p_1^2) - 2abrr_1 - 2bcpp_1 + 2\pi\varrho b^2\beta_0 + B'b^2 &= \\ = c\ddot{c} - c^2(p^2+q^2+p_1^2+q_1^2) - 2bcpp_1 - 2caqq_1 + 2\pi\varrho c^2\gamma_0 + C'c^2. &\qquad (57)\end{aligned}$$

Эти уравнения вместе с уравнениями (13), (14) и (44) мы можем рассматривать как нашу основную систему уравнений.

До сих пор мы ничем не пренебрегали, и уравнения были бы, например, приложимы к конечным колебаниям эллипсоида Якоби при существовании потенциала вида (53). Но в случае *малого* возмущения из состояния равномерного вращения вокруг оси z величины p, q, p_1, q_1, r_1 будут малыми, в то время как r будет приблизительно постоянным. Оказывается, что коэфициенты можно рассматривать как постоянные, если пренебречь малыми величинами второго порядка в первых двух уравнениях системы (13) и в первых двух уравнениях системы (14). Изменения мгновенных осей при этом будут независимы от приливной деформации и оказываются точно такими же, как если бы жидкость была заключена в твердую оболочку, массою которой можно пренебречь.

Приливные колебания свободной поверхности, с другой стороны, определяются уравнениями (57) вместе с уравнением (44) и третьими уравнениями систем (13) и (14). Следует заметить, что эти последние два уравнения принимают вид

$$\frac{d}{dt}(Cr+Hr_1) = N, \quad \frac{d}{dt}(Hr+Cr_1) = 0. \qquad (58)$$

Если эллипсоид в невозмущенном состоянии есть эллипсоид вращения вокруг оси z, то уравнения, определяющие прецессию, приводятся, как и раньше, к виду (20) и (21). Кроме того, в астрономических приложениях та часть возмущающего потенциала, которая оказывает влияние на прецессию, состоит из членов вида

$$\Omega' = -kr^2 \sin\theta\cos\theta\cos(\sigma t+\varphi), \qquad (59)$$

где σ приблизительно равно ω; ср. § 219 (1) и стр. 453. В декартовых координатах имеем

$$\Omega' = kz(y\sin\sigma t - x\cos\sigma t). \qquad (60)$$

Это дает

$$L = -k(C-A)\sin\sigma t, \qquad M = -k(C-A)\cos\sigma t, \qquad N = 0. \qquad (61)$$

Таким образом, имеем

$$L + iM = -ik(C-A)e^{-i\sigma t}. \qquad (62)$$

Ход доказательства, которое ведет к заключению, что прецессия при известных условиях оказывается такой же, как в случае твердой массы, таков же, как и в предыдущем параграфе.

Когда возмущающая функция имеет вид (59), то в случае Земли колебания длии полуосей a и c соответствуют суточным приливам.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адамар (Hadamard, J.) 448, 607, 752.
Альборн (Ahlborn) 860
Арган 90.

Барнес (Barnas) 838.
Барнсайд (Barnside) 524.
Бассе (Basset) 168, 197, 229, 243, 780, 789, 811, 901, 913.
Бателан (Bateman) 878.
Бельтрами (Beltrami) 109, 185.
Бернулли (Bernoulli D.) 37, 40, 453.
Берри (Berry, A.) 760.
Берстоу (Bairstow L.) 772, 775.
Бессель (Bessel F) 171.
Блазиус (Blasius H.) 117, 841, 866.
Бобылёв 130, 727.
Боджио (Boggio) 811.
Бойс (Boys) 879.
Больц (Boltze) 870.
Больцман (Boltzmann) 136, 250.
Борда (Borda) 41.
Бриан (Bryan) 147, 228, 906.
Бромвич (Bromwich) 449, 565.
Бургес (Burgess R.) 769.
Буркхардт (Burkhardt) 83.
Буссинеск (Boussinesk) 529.
Бьеркнес (Bjerknes V.) 168, 312.
Бьеркнес (Bjerknes S.) 168, 185, 196.
Бэрд (Baird) 446.

Вайнштейн (Weinstein) 531.
Ванцель (Wantzel) 43.
Ватсон (Watson, G.) 369.
Вебб (Webb) 467.
Вебер (Weber) 31, 621.
Ведербарн (Wedderburn) 475.
Велш (Welsh) 271.
Виглей (Wigley W.) 548.
Вильямс (Williams) 751.
Вин (Wien) 511.
Вуд (Wood) 595.
Вудол (Woodall) 587.

Гадлей (Hadley) 386.
Гамильтон (Hamilton) 478.
Ганземан (Hansemann) 554.
Ганкель (Hankel) 52, 367, 675.
Ганлон (Hanlon) 42.
Гансен (Hansen) 171.
Гаррисон (Harrison) 465, 775, 842.
Гаусс (Gauss) 58, 90, 132.
Гвайтер (Gwyther) 532.
Гейне (Heine) 641.
Гельмгольц (Helmholtz) 38, 74, 98, 120, 243, 251, 253, 260, 306, 468, 534, 623, 721, 743, 776, 803, 823.
Герман (Herman R.) 168.
Герстнер (Gerstner F) 526.
Гильберт (Hilbert) 315, 484.
Глезер (Glaisher) 143, 504.
Гляуэрт (Glauert) 860, 876.
Гобсон (Hobson) 683.
Гогнер (Hogner) 546, 548.
Гольдсброу (Goldsbrough) 341, 412, 443, 444.
Гольдштейн (Goldstein) 364, 409.
Григ (Graig) 215.
Грин (Green G.) 62, 82, 193, 345, 478.
Гринхилл (Greenhill) 133, 217, 222, 281, 467, 735, 907, 918.
Грёбли (Gröbli) 281, 305.
Гуг (Gough) 478, 913.
Гутри (Guthrie) 240.
Гюгоиио (Hugoniot) 44, 607.

Дайсон (Dyson) 197, 307, 896.
Даламбер (d'Alembert J.).
Дарвин (Darwin G.) 317, 355, 427, 430, 446, 453, 807, 892, 896, 903.
Дарси (Darcy) 840.
Дебюи 653.
Девриз (De Vries) 532.
Дедекинд (Dedekind) 907, 912.
Джинс (Jeans) 904.
Джонс (Jones J.) 638.
Джонс (Jones R.) 869.
Динник А. Н. 630.
Дирихле (Dirichlet) 155, 390, 907.
Додсон (Doodson) 349, 385, 453.
Дэ (De K.) 280.
Дюпрез (Duprez) 576.

Джеффрей (Jeffreys) 349, 364, 737, 786, 863, 873.
Жуковский Н. Е. 102, 861.

Зильберштейн 312.
Зоммерфельд (Sommerfeld A.) 83, 448, 675, 851.

Ирншоу (Earnschaw) 352, 601.

Карман (Kàrmàn V.) 283, 860, 866.
Карслоу (Carslaw) 675.
Келланд (Kelland) 322, 559.
Кельвин (Kelvin) 20, 52, 57, 66, 224, 240, 253, 290, 310, 317, 434, 494, 507, 513, 563, 568, 575, 585, 703, 839, 850, 913, 918.
Кирхгоф (Kirchhoff) 57, 120, 128, 136, 200, 205, 218, 224, 250, 289, 554, 627, 654, 809, 815, 819, 858.
Клебш (Clebsch) 195, 312, 641, 799.
Клейн (Klein) 448.
Ковалевская С. 894.
Ковач (Cowan M.) 326, 532.
Кокер (Coker) 838.
Колладон (Colladon) 595.
Кортевег (Korteweg) 532, 776.
Кох (Koch) 721.
Коши (Cauchy) 33, 49, 481, 486, 539.
Крайстл (Chrystal) 349.
Кристоффель (Christoffel) 104, 656.
Крудели (Krudeli) 883.
Кундт 819.
Кутта (Kutta) 102, 861.
Кэли 389.

Лагранж (Lagrange) 15, 33, 85, 319, 323.
Ламб (Lamb H.) 109, 154, 215, 341, 449, 464, 478, 492, 541, 546, 647, 812, 899.
Ламэ (Lamé) 187.
Ланденбург 751.
Лаплас (Laplace) 140, 150, 383, 414, 430, 434, 596, 631, 888, 893.
Лармор (Larmor) 83, 224, 243, 306, 627.
Леви-Чивита(Levi-Civita) 133, 374, 525.
Лежандр (Legendre) 144.
Липшиц (Lipschitz) 173, 371.
Лисем (Leathem) 67, 133.
Лиувиль (Liouville) 617, 891.
Лихтенштейн (Lichtenstein) 304, 881.
Лодж (Lodge A.) 143, 404.
Ломмель (Lommel) 484, 630.
Лоренц (Lorentz) 653, 751, 858.
Ляв (Love) 133, 440, 449, 475, 565, 627, 654, 656, 799, 904, 912.
Ляпунов 448, 882.

Макдональд (Macdonald) 385, 561, 653.
Маклорен (Maclaurin) 386, 887.
Максвелл (Maxwell) 42, 52, 94, 185, 300, 576, 720, 782.
Маллок (Mallok) 737, 842.
Маргулис (Margules) 701, 703.
Маттиссен (Matthiessen L.) 894.
Max 879.
Мейер (Meyer C.) 891.
Мейер (Meyer O.) 811.
Мейер (Meyer W.) 83.
Мелер (Mehler) 171, 369.
Мериан (Merian) 551.
Мизес (Mises) 866.
Митчелл (Michell) 133, 523, 548, 732.
Мортон (Morton W.) 113.

Навье (Navier) 723.
Нейман (Neumann C.) 168, 170.
Нейман (Neumann F.) 146.
Нетер (Noether F.) 766.
Нильсен (Nielsen N.) 369.
Никольсон (Nicholson J.) 653.
Ньютон (Newton J.) 736.

Обербек (Oberbeck) 759.
Озеен (Oseen) 766, 769, 870.
Орр (Orr) 850, 858.
Остроградский 551.

Перрн (Perry) 143.
Планк (Planck) 121.
Покелс (Pockels) 623.
Попов 498.
Прандтль (Prandtle) 860, 866.
Прудман (Proudmann) 294, 349, 385, 407, 447.
Пуазейль (Poiseuille) 720, 733, 839.
Пуанкаре (Poincaré) 320, 365, 445, 653, 881, 897, 903, 905, 913, 918.
Пуассон (Poisson) 34, 361, 371, 471, 481, 486, 492, 539, 617, 723.

Раус (Routh) 243, 281, 390.
Рейнольдс (Reynolds O.) 38, 43, 44, 479, 720, 730, 837, 839, 843, 852, 857.
Рибчинский 752.
Риман (Riemann) 74, 89, 350, 601, 904, 907, 910.
Риц (Ritz) 319.
Розенхед (Rosenhead) 288, 292, 860.
Рэлей (Rayleigh) 44, 58, 128, 171, 328, 346, 361, 371, 446, 478, 498, 521, 524, 529, 568, 585, 591, 597, 608, 623, 634, 639, 643, 653, 678, 739, 777, 821, 841, 847, 858, 861, 873, 879.

Ренкин (Rankine) 85, 162, 526, 604, 608.

Саутвелл (Southwell) 852.
Свейн (Miss Swain L.) 341, 760.
Севелл (Sewell) 829.
Сен-Венан (Saint-Venant) 43, 114, 723.
Сильвестер (Sylvester) 140.
Симпсон (Simpson T.) 888.
Синдж (Synge) 860.
Скотт Рёсселл (Scott Russell) 528, 530, 585, 793.
Сольборн 444.
Стантон (Stanton) 44, 842, 859, 880.
Стефан (Stefan) 160.
Стирн (Stearn) 812.
Стокс (Stokes G.) 33, 43, 48, 52, 115, 155, 161, 166, 257, 260, 309, 326, 359, 371, 467, 478, 494, 521, 558, 597, 606, 613, 636, 723, 736, 750, 811, 815.
Стрейк (Struik) 525.
Стюарт (Stuart F.) 314.

Теразава (Terazawa K.) 493, 541, 739.
Тёплер (Töpler) 136.
Томсон (Thomson W.) 141, 187, 200, 233, 237, 243, 245, 250, 304, 307, 391, 452, 574, 585, 886, 903.
Торричелли (Torricelli) 40.
Тэйлор (Taylor G.) 119, 402, 610, 694, 739, 843, 862, 876.
Тэт (Tait) 141, 200, 233, 237, 243, 391, 453, 886, 903.

Уолтон (Walton) 280.

Фаге (Fage) 859, 860.
Файлон (Filon L.) 775.
Факсен (Faxèn) 751, 776.
Феррел (Ferrel) 434.
Фёппль (Föppl L) 280.
Фойхт (Voigt) 168.
Форсдайк (Forsdyke) 306.
Фосет (Miss Fawcett) 224, 229.
Франклин (Franklin B.) 464.
Фрезер (Frazer) 737.
Фрост (Frost) 58.
Фруд (Froude) 38, 477, 548.

Хавелок (Havelock) 515, 519, 546, 548, 780.
Хаф (Hough) 425, 437, 440, 546, 702, 789, 913.
Хегге (Hegge) 872.
Хевисайд (Heaviside) 263, 376.
Хеле-Шоу (Hele Shaw) 111.
Хидак (Hidak) 364.
Хикс (Hicks W.) 162, 168, 197, 279, 304, 909.
Хилл (Hill) 309.

Цейлон (Zeilon) 871.

Чаплыгин С. А. 117.
Чапман (Chapman) 702.
Чизотти (Cisotti) 120, 133, 512.

Шарп (Sharpe) 858.
Шварц (Schwarz) 104.
Шверд (Schwerd) 633.
Шлемильх (Schlömilch O.) 504.
Штурм (Sturm) 595.

Эверетт (Everett) 597.
Эйлер (Euler) 15, 18.
Экман (Ekman) 549, 839.
Энке (Encke) 740.
Эри (Airy) 326, 329, 336, 350, 430, 434, 460.

Якоби (Jacobi) 150, 187, 891.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Бассейн круглый, 364, 409, 412.
— прямоугольный, 413, 551.

Вектор соленоидальный 311.
Вещество непрерывное 13.
— однородное 13.
Вихрь 49, 252.
— винтовой 307.
— круговой 299, 301.
— прямолинейный 275.
— сферический 309.
Возмущение безвихревое 290.
— начальное произвольное 324.
— постоянное 580.
— эллиптическое 291, 292.
Волна атмосферная 678.
— в неоднородной жидкости 473.
— длинная 320, 322, 325, 558.
— звуковая 815.
— колебательная 532.
— конечной амплитуды 601.
— краевая 558.
— красная 560.
— на глубокой воде 481.
— — горизонтальной плоскости 576.
— — плоской поверхности 570.
Волна одиночная 528, 531.
— плоская 594, 597.
— приливная 315.
— прогрессивная 314, 317, 328, 346.
— расходящаяся 369, 374.
— стоячая 457, 558.
— сферическая 611.
— установившаяся 525, 534, 604.
Волны сферические симметричные 612.
Вращение жидкости 45.
Вязкость 703.
— турбулентная 843.

Глубина критическая 442.

Давление концентрированное 518.
— установившееся 498.
Движение апериодическое 705.
— безвихревое 48, 50, 53, 67, 70, 76, 79, 136.
— безграничной жидкости 182.
— вертикальное 325.
— вихревое 251.
Движение волновое 526.
— длинных волн 326.
— затухающее 802.
— ламинарное 49, 719, 739, 850.
— непрерывное 15.
— неустановившееся 739.
— обратимое 246.
— осредненное 854.
Движение плоское 83.
— прерывное 133.
— стационарное 307.
— турбулентное 839, 854.
— установившееся 36, 213, 223, 328, 728, 736, 760.
— циклическое 82, 225.
Детерминант косой 389.
Диафрагма 69.
Дивергенция 18, 31, 64.
Диполь 78.
Диск круглый тонкий 175, 183.
— эллиптический 190.
Дно гофрированное 511.
Дублет 78.

Жидкость вязкая 716, 802.
— капельная 19, 40.
— несжимаемая 19.
— очень вязкая 790.
— сжимаемая 873.

Завихрение равномерное 293.
Закон адиабатический 607.
— Грина 347.

Изменение движения внезапное 25.
Импульс 202, 227, 271.
Интеграл Френеля 483.
Истечение газа 42.
Источник 78.
— гармонический простой 374.
Источник переменный 375.

Канал переменного поперечного сечения 344, 347.
— постоянного поперечного сечения 337, 339, 340, 341, 348, 555.
— прямолинейный 401.
— эллиптический 364.
Колебание вынужденное 318, 336, 364, 396, 407.

Колебание вынужденное первого рода 425.
— — второго рода 429.
— — третьего рода 431.
— гравитационное 563.
— малое 315, 317, 386, 779.
— нормальное 317, 319.
— поперечное 555.
— свободное 316, 317.
— — первого класса 441.
— — второго класса 441.
— собственное 391.
— цилиндра 662.
— шара 638.
— эллиптическое 317.
Кольцо 893.
— вихревое 302, 305, 306.
Компонент вихря 252.
— нормальный возмущающей силы 316.
Компоненты скорости пульсаций 853.
Контур кратно неприводимый 69.
— простой неприводимый 69.
Конформное отображение 90, 122.
Координаты главные 388.
— нормальные 316.
— параболические 675.
Коэфициент вязкости 719, 721.
— — кинематический 720.
— инерции 178, 316, 388.
— сжатия 40.
— трения скольжения 722.
— турбулентного трения 743.
— уплотнения 594.
Коэфициенты устойчивости главные 316, 388.
Кривая приводимая 54, 68.
— эквипотенциальная 89.
Кривые взаимно переводимые 54, 68.
Крыло аэроплана 872.

Линия вихревая 252.
— тока 34, 89.

Масса присоединенная 155.
Маятник квадрантный 219.
— шаровой 654, 809.
Мера напряжения вихря 253.
Метод Гамильтона 233.
— Кулона 782.
— обобщенных координат 233.
— размерностей 864.
— решения плоских гидрокинетических задач 87.
— сферических функций 137.
Модуль затухания 705.
Мощность источника 78.

Напряжение тангенциальное 13.
Насадка Борда 123.
Натяжение поверхностное 569.
Нить вихревая 252, 277.
Ньютонова скорость звука 596.

Область аперифрактическая 58.
— двусвязная 69.
— n-связная 69.
— односвязная 55, 69.
— перифрактическая 58.
— связная 68.
Оболочка сферическая 152, 633, 803
Ось растяжения 49.
— дублета 78.
— объемной сферической функции 140.
— круговая системы вихревых колец 302.
— системы вихрей 277.
Отверстие эллиптическое 190.
Отражение волн 640, 663.

Пара вихрей 278.
Парадокс Даламбера 858.
Перегородка 69, 637.
Пластинка плоская 126, 128, 858.
— согнутая 130.
Поверхность пограничная неподвижная 20.
— постоянного давления 120.
Поверхность равного потенциала 34.
— раздела 569.
— разрыва 20.
— сферическая 150, 163, 306.
— цилиндрическая 88, 107, 111.
Пограничный слой 865.
Полость сферическая 153.
Полюс поверхностной сферической функции 140.
Постоянная циклическая 72.
— цилиндрическая 88, 107, 111.
Пограничный слой 865.
Полость сферическая 153.
Полюс поверхностной сферической фуикции 140.
Постоянная циклическая 72.
Потенциал гравитационный 383.
— кинетический 234.
— приливообразующих сил 425.
— скоростей 32, 144, 265.
Поток вдоль линии 50.
— через кривую 83.
— — поверхность 56, 261.
Преобразование Вебера 29.
— Клебша 312.
Препятствие произвольное 650.
— сферическое 640, 642, 829.

Препятствие цилиндрическое 513, 515, 663, 668.
Призма равносторонняя 114.
Прилив высокий 352.
— длинного периода 453.
— комбинационный 355.
— лунный 338, 339, 341.
— лунно-солнечный 430.
— малый 445.
— морской внезапный 445.
Прилив полусуточный 454.
— с большим возвышением волны 350.
— солнечный 337.
— суточный 454.
Принцип энергии 37.
Профиль крыла Жуковского 106.
Пузырь сферический 152.

Распределение давлений гармоническое 499.
— — произвольное 500.
— температуры вертикальное 684, 688, 691.
Распространение волн вертикальное 687.
Расширение объемное в данной точке 18.
Решетка 669, 673.
Рябь 575.
Ряд асимптотический 370.
— гипергеометрический 141.

Сектор круговой 363.
Симметрия винтообразная 218.
Система прямолинейных вихрей 289.
Скорость волны 468.
— групповая 477, 479.
— критическая 838.
— массовая 605.
Слой вихревой 267.
— воды кольцеобразный 363.
— — круговой 358, 402.
— — открытый 385.
— — переменной глубины 365.
Слой воды прямоугольный 357.
— — сферический 378.
— жидкости плоский горизонтальный 398.
— криволинейный 135.
— пограничный 865.
Случай двух вихревых колец 305.
— двух вихрей 277.
Сопротивление волновое 519, 547.
Сосуд сферический 802, 835.
— эллипсоидальный 184, 258.
Сток 78.
Столб жидкости цилиндрический 588.
Струя внутри покоящейся жидкости 469.
Сфероид приливный 451.

Тело винтообразно изотропное 218.
— вращения кольцеобразное 228.
— погруженное в неравномерный поток 248.
— с отверстиями 225.
Теорема Грина 62, 65, 75.
— Кельвина 66.
— Лагранжа 32.
— Рэлея 320.
— Торричелли 40.
Теория атомов вихревая 311.
— каналовая 336.
— свободных линий тока 135.
— смазки 730.
Течения, расположенные друг над другом, 467, 472.
Траектория вихря 280.
Труба цилиндрическая круглая 722
Трубка вихревая 252.
— Пито 42.
— тока 36, 56.

Удар 25.
Упругость объемная 19, 594.
Уравнение бесселевых функций 168, 170.
— длинных волн 327.
— зональных сферических функций 141.
— неразрывности 18, 19, 28, 187.
— поверхностных сферических функций 141.
— энергии 22.
Уравнения гиростатической системы 245.
— движения 14, 17, 28, 31.
— — вязкой жидкости 722, 746.
— Лагранжа 234, 316.
— Озеена линеаризированные 766.
— системы вихревых линий 252.
Условие несжимаемости 236.
— стационарного движения 307, 309.
Устойчивость, главные коэфициенты 898.
— вековая или практическая 391.
— движения 221, 448.
— динамических систем 448.
— обыкновенная или кинетическая 391, 449.
— океана 447.

Форма бифуркации 898.
— обтекаемая 864.
— равновесия предельная 898.

Формула Блазиуса 119.
Функции Бесселя 168, 171, 661.
— сферические поверхностные ортогональные 147.
Функция аналитическая 89.
— гармоническая секториальная 147.
— — тессеральная 147.
— диссипативная 711.
— Ламэ 184.
— многозначная 71.
— однозначная 46.
— присоединенная 146.
— сферическая зональная 142, 145, 438.
— — нулевого порядка 152.
— — объемная 138, 171.
— — первого порядка 154.
— — поверхностная 138, 140, 146, 171.
— тока 84, 157.
— циклическая 46, 71, 92.
— цилиндрическая 168.
— Эйлера 142.
— эллипсоидальная 175.

Хвост 769.

Центр реакции 233.
— системы вихрей 277.
Цилиндр круглый 99, 101, 105, 119, 120, 230, 280, 874.
Цилиндр круговой 294, 812.
— с произвольной формой сечения, 116, 119, 874.
— эллиптический 108, 112, 113.
Циркуляция вдоль замкнутой кривой 50.

Частота круговая 317.
Чистое растяжение 49.
Члены гиростатические 711.
— трения 711.

Шар 154, 161, 163, 166, 237, 238, 654, 775.
Широта геоцентрическая 425.
Экран 669, 674.

Эллипсоид 758, 775, 884.
— вращения удлиненный 178, 179.
— Дирихле 907.
— Маклорена 886, 902, 906.
— переменной формы 910.
— с неравными осями 184, 186, 192.
— сжатый или планетовидный 180, 183.
— Якоби 890, 903.
Энергия внутренняя 24.
— поверхностная 569.
— системы вихрей 271.

Опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
21	2 св.	$= \frac{1}{R}\frac{\partial F}{\partial t}$	$= -\frac{1}{R}\frac{\partial F}{\partial t}$
55	20 сн.	$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$	$v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$
84	3 сн.	$v = \frac{\partial \psi}{\partial y}$	$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$
180	5 св.	$(1-\mu)^{1/2}$	$(1-\mu)^{1/2}$
213	1 сн.	Ωp	$\Omega' p$
214	14 св.	$\theta + ry$	$u + ry$
282	строки 6 и 7 снизу следует поменять местами		
317	1 сн.	Немцамилд я	Немцами для
368	2 св.	$\int\left(\frac{1}{\partial t}\right.$	$\int\left(\frac{\partial}{\partial t}\right.$
464	8 св.	$\frac{g}{k}\frac{\varrho-\varrho}{\varrho-\varrho'}$	$\frac{g}{k}\frac{\varrho-\varrho'}{\varrho-\varrho'}$
470	8 св.	$\frac{\varphi+t\psi}{c} =$	$\frac{\varphi+i\psi}{c} =$
474	3 св.	$-\frac{\partial p'}{\partial y} = g\varrho'$	$-\frac{\partial p'}{\partial y} - g\varrho'$
493	17 сн.	$\omega^2 - \frac{gt^2}{4b}$	$\omega^2 = \frac{gt^2}{4b}$
515	9 сн.	$e^{-k(y+t)\,tikx}$	$e^{-k(y+t)+ikx}$
529	1 сн.	стр ...	стр. 328.
654	3 сн.	$= c^2\Delta\varphi$	$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\Delta\varphi$
868	3 сн.	$\int_0^\eta u\frac{\partial u}{\partial x}\,.$	$\int_0^\eta u\frac{\partial u}{\partial x}\,dy$