М.А.ЛАВРЕНТЬЕВ, Б.В.ШАБАТ

ПРОБЛЕМЫ ГИДРОДИНАМИКИ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

М. А. ЛАВРЕНТЬЕВ, Б. В. ШАБАТ

ПРОБЛЕМЫ ГИДРОДИНАМИКИ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973

532
Л 13
УДК 532.5

Проблемы гидродинамики и их математические модели. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1973 г.

Основная цель книги — описание различных гидродинамических эффектов, а также их качественное и количественное объяснение при помощи соответствующих математических моделей. Имеется много постановок задач, еще не получивших решения. Большое место уделено различным приложениям (кумуляция, направленный взрыв, сварка металлов взрывом, проблема цунами, принципы движения рыб и др.).

Илл. — 160. Библ. 110 назв.

Михаил Алексеевич Лаврентьев, Борис Владимирович Шабат

Проблемы гидродинамики и их математические модели

М., 1973 г., 416 стр. с илл.

Редакторы *П. П. Мосолов, Ф. И. Кизнер*
Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод* Корректоры *О. А. Бутусова, Л. Н. Боровина*

Сдано в набор 1/X 1972 г. Подписано к печати 14/II 1973 г. Бумага 84×108¹/₃₂, тип. № 1. Физ. печ. л. 13. Условн. печ. л. 21,84. Уч.-изд. л. 19,95. Тираж 10 000 экз. Т-03760. Цена книги 1 р. 50 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
«Союзполиграфпрома» при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

Л $\frac{0223-1719}{042(02)-73}$ 43-72

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 6

Глава I. **Математические модели жидкой среды** 9

§ 1. Несжимаемая невязкая жидкость 10
Основные уравнения. Потенциальность. Установившиеся движения. Плоское движение. Осесимметрическое движение. Движение с заданной завихренностью. Граничные условия.

§ 2. Сжимаемость 21
Основные уравнения. Упрощающие предположения. Плоские установившиеся течения. Уравнение для потенциала. Звуковой барьер. Характеристики. Мелкая вода.

§ 3. Вязкая несжимаемая жидкость 35
Уравнения Навье—Стокса. Диссипация энергии. Граничные условия. Учет вязкости. Уравнение Гельмгольца.

§ 4. Размерностный подход 41
Размерности. π-теорема. Автомодельность. Удар струи о плоскость. Сфера в вязкой жидкости. Диффузия вихревой нити.

Литература 49

Глава II. **Основной математический аппарат** 50

§ 5. Комплексные числа и их обобщения 50
Плоские векторы. Три типа комплексных чисел. Модуль и аргумент. Многомерный случай.

§ 6. Дифференцирование комплексных функций 56
Производная. Аналитичность. Примеры. Особые точки.

§ 7. Физический и геометрический смысл аналитичности 61
Комплексный потенциал. Физический смысл особых точек. Конформные отображения. Квазиконформные отображения. Интерпретация h-аналитичности.

§ 8. Свойства аналитических функций 71
Степенные ряды. Свойство открытости. Интегрирование. Физическая интерпретация. Интегральная формула Коши.

§ 9. Гармонические функции 80
Связь с аналитическими функциями. Задача Дирихле. Связь с конформными отображениями.

Литература 87

Глава III. **Конформные и квазиконформные отображения** 88

§ 10. Задача Римана 88
Существование и единственность. Примеры. Течение в канале. Обтекание тел.

§ 11. Нелинейные квазиконформные отображения 96
Обобщение понятия квазиконформности. Производные системы.

§ 12. Вариационные принципы 104
Основной принцип. Количественные уточнения. Другие области. Граничные производные. Узкие полосы. Сильно эллиптические системы.

§ 13. Приближенные методы 115
Численные методы. Вариационные методы. Пристрелочный метод. Обобщения.
Литература 125
Глава IV. **Качественные модели сверхзвуковых течений** 127
§ 14. Гиперболические конформные отображения 127
Условия отобразимости. Области типа полуплоскости. Области типа полосы. Влияние вариации границы.
§ 15. Модель уравнений газовой динамики 136
Классические уравнения. Выбор модели. Геометрия модели.
§ 16. Примеры сверхзвуковых задач 145
Течение в канале. Обтекание угла.
§ 17. Задачи с переходом через скорость звука 149
Задача о сопле. Сверхзвуковые включения. Задача о склейке.
Литература 161
Глава V. **Плоские задачи** 162
§ 18 Парадоксы в схеме идеальной жидкости 162
Парадокс подъемной силы. Условие Чаплыгина. Пространственный случай.
§ 19. Течения с постоянной завихренностью 167
Движения с точечными вихрями. Постоянная завихренность. Свойства течений.
§ 20. Задачи со свободными границами 173
Задача Кирхгофа. Волны в тяжелой жидкости. Учет нелинейности. Волна Стокса.
§ 21. Модель Кирхгофа и другие модели 182
Классические модели. Новые модели.
§ 22. Склеивание вихревых и потенциальных течений . . . 187
Обтекание пластинки. Задача о склейке. Обтекание выпуклых тел. Обтекание траншеи. Заключительное замечание.
Литература 199
Глава VI. **Пространственные задачи** 200
§ 23. Движения с осевой симметрией 200
Общие замечания. Метод источников. Задачи обтекания. Узкие трубы.
§ 24. Пространственные движения 209
Трудности пространственного случая. Элементарные решения. Метод источников.
§ 25. Модельные задачи 215
Вариационные принципы. Узкие слои. Гармонические отображения. Системы из трех уравнений.
§ 26. Гидродинамические задачи 224
Течения, близкие к плоским. Вариационные принципы. Течения в узких слоях. Задачи со свободной границей. Две задачи.
Литература 234
Глава VII. **Струи** 235
§ 27. Струи конечной ширины 235
Струи с завихренными зонами. Косой удар струи о прямую. Обтекание тел струями. Задача о затопленной струе. Два гидродинамических эффекта.
§ 28. Пространственные задачи о струях 247
Задача о встречных струях. Задача о вихрях. Вращение жидкости в сосуде. Пространственные задачи.
§ 29. Кумулятивные струи 257
Опыт Покровского. Кумулятивные заряды. Физические предпосылки. Расчетная схема. Теория пробивания. Формирование кумулятивной струи. Пределы применимости теории.
Литература 270

Глава VIII. **Неустановившиеся движения** 271

§ 30. Постановка задачи 271
Потенциальные движения. Задачи со свободными границами. Устойчивость.

§ 31. Подводный взрыв 279
Схлопывание пузыря. Шары Бьёркнесов. Парадокс при подводном взрыве. Сферическая кумуляция. Проблема султана. Взрыв в воздухе.

§ 32. Пробивание при космических скоростях 293
Одномерный случай. Пространственный случай. Обобщение метода.

§ 33. Загадки движения рыб 302
Качественная картина движения. Движение в твердом канале. Движение в воде.

§ 34. Распространение волн и проблема цунами 309
Влияние рельефа дна. Общая характеристика волноводов. Достаточные условия. Асимптотика волн. Простейшая модель цунами. Задача краткосрочного прогноза. Однозначное предсказание. Распознавание цунами.

Литература 333

Глава IX. **Вихри** 334

§ 35. Кольцевые вихри 334
Вихри в идеальной жидкости. Влияние вязкости. Турбулентная вязкость. Уравнения Гельмгольца. Автомодельная задача. Модельная задача. Сравнение с экспериментом.

§ 36. Перенос примесей 348
Турбулентная диффузия. Автомодельная задача. Дымовые кольца.

§ 37. Формирование и движение вихрей 351
Вихри в воздухе. Вихри в воде. Падение капель. Вихревое облако атомного взрыва. Вихревая модель турбулентности. Снижение сопротивления.

Литература 362

Глава X. **Динамическая неустойчивость** 363

§ 38. Неустойчивость стержней 364
Статическая и динамическая потери устойчивости. Задача Эйлера. Динамическая постановка.

§ 39. Механизм разрушения 371
Вероятностный подход. Модельные задачи. Задача о трещинах. Устойчивость. Влияние масштаба взрыва на размер осколков.

§ 40. Равновесия в жидких средах 378
Ртуть над водой. Образование волн. Устойчивость струй. Взрыв в воде.

Литература 386

Глава XI. **Взрыв** 387

§ 41. Взрыв в грунте 387
Импульсная постановка. Сосредоточенный заряд. Шнуровые заряды.

§ 42. Направленный взрыв 392
Расположение зарядов. Закон подобия.

§ 43. Камуфлетный взрыв 397
Паковка. Задача о расширении полости. Приближенное решение. Замечания.

§ 44. Сварка взрывом 401
Простейшая схема. Соударение струй под малым углом. Волнообразование. Форма колебаний. Выделение энергии. Затопленная струя.

Литература 416

ПРЕДИСЛОВИЕ

Гидродинамика — одна из древнейших наук, снова (в который уже раз!) переживающая сейчас свою молодость. Причин этому немало. Первой и главной причиной является использование возможностей, которые открылись в связи с развитием электронных вычислительных машин. Стали доступными не только расчеты, ранее немыслимые из-за их сложности, но и эксперименты нового типа — эксперименты на вычислительных машинах, имеющие ряд преимуществ по сравнению с натурными.

Второй причиной служит значительное расширение арсенала математических средств, применяемых в гидродинамике. Наряду с усовершенствованием старых методов появились новые методы теории функций комплексного переменного и теории уравнений с частными производными, рассчитанные на гидродинамические приложения. Все более и более широкое применение находят методы функционального анализа и современной дифференциальной геометрии.

Третья причина — научно-техническая революция наших дней, бурное развитие техники, широкий размах исследований в изучении макро- и микромира. В результате сейчас перед гидродинамикой встает много новых задач.

В обширной литературе по гидродинамике эта книга занимает особое место. Ее нельзя рассматривать ни как учебник для начинающих, ни как монографию для специалистов. В первых главах книги коротко излагаются физические основы гидродинамики и элементы математических методов, в ней применяемых. Изложение здесь часто имеет характер обзора, за доказательствами следует обращаться к курсам гидродинамики и уравнений с частными производными, цитируемым в

списках литературы в конце глав. Особенно часты ссылки на книгу авторов «Методы теории функций комплексного переменного», изд. 3-е, «Наука», М., 1965, которая сокращенно обозначается буквами Л. и Ш. Остальную часть книги составляет описание отдельных задач из разных разделов гидродинамики, нисколько не претендующее на полноту охвата этих разделов.

В прошлом веке и начале нашего трактаты по гидродинамике в основном состояли из длинных выкладок с использованием элементарных и специальных функций. По образному выражению одного из современных американских гидродинамиков С. Голдстайна, за этими выкладками никак нельзя было увидеть саму воду, нельзя представить, что она мокрая. Да и сейчас пишется немало работ, содержащих сложные и пространные результаты точной теории решений дифференциальных уравнений гидродинамики, весьма далекие от действительности. На наш взгляд, практическая ценность этих работ существенно снижается простым замечанием, что сами-то уравнения гидродинамики лишь весьма приближенно отражают многие важные физические явления. Поэтому некоторые результаты так называемой точной теории по бессмысленности напоминают выкладки с огромным числом знаков над величинами, только очень грубо приближающими точные.

В этой книге нет длинных выкладок и громоздких теорий. Основная ее установка такова: большинство интересных физических процессов столь сложно, что при современном состоянии науки очень редко удается создавать их универсальную теорию, действующую во все время и на всех участках рассматриваемого процесса. Вместо этого нужно посредством экспериментов и наблюдений постараться понять ведущие факторы, которые в тот или иной отрезок времени управляют процессом на том или ином участке. Выделив эти факторы, следует абстрагироваться от других, менее существенных, и для данного участка и данного отрезка времени построить возможно более простую математическую схему (модель процесса), которая учитывает лишь выделенные факторы.

В ряде случаев в решения таких локальных задач нужно ввести поправки, учитывающие второстепенные,

но также существенные факторы. Этот учет производится при помощи дополнительных алгоритмов, действующих на решения модельных задач. Для получения общей картины процесса теперь остается только склеить решения отдельных локальных задач. Эта склейка производится при помощи достаточно общих соображений, таких, как непрерывность поля скоростей и др. Следует отметить, что описанная общая схема решения задач гидродинамики достаточно хорошо приспособлена для организации машинного счета.

Цель книги — познакомить научную молодежь, начинающую заниматься гидродинамикой, с некоторыми интересными и еще мало изученными явлениями из необъятного запаса, которым располагает эта наука. Для некоторых из этих явлений удается построить математические модели, объясняющие их и качественно и количественно, другие еще ждут объяснения. Поэтому наряду с законченными результатами в книге много гипотез и постановок проблем. Авторы считают, что их цель удалась, если эти проблемы заинтересуют читателей и какие-либо из них будут решены.

Некоторые из новых рассматриваемых в книге результатов получены научными сотрудниками Института гидродинамики Сибирского отделения АН СССР. При написании § 34 были существенно использованы материалы, подготовленные Р. М. Гариповым, § 44 — А. А. Дерибасом, §§ 38—43 — В. М. Кузнецовым и гл. I и IX — Б. А. Луговцовым. Этим лицам авторы выражают свою глубокую благодарность.

Мы весьма благодарны Л. И. Седову, который внимательно просмотрел рукопись и сделал существенные замечания, учет которых позволил улучшить изложение ряда мест. Мы благодарны также редактору книги П. П. Мосолову за его труд и сделанные им замечания.

М. А. Лаврентьев,
Б. В. Шабат

Новосибирск—Москва

Глава I

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЖИДКОЙ СРЕДЫ

Напомним некоторые основные понятия динамики непрерывной среды. Движение среды, заполняющей некоторый объем, считается заданным, если в любой момент времени t можно определить (т. е. вычислить с любой заданной точностью) поле скоростей частиц среды $V(x, t)$ в любой точке x объема. В ряде случаев это общее определение нуждается в некоторых уточнениях. Границы области, занятой движущейся средой, могут меняться со временем; они могут быть неизвестны заранее и должны определяться вместе с полем скоростей по некоторым условиям; границы могут появляться в процессе движения, когда, например, внутри среды образуются каверны или возникают ударные волны.

Кроме поля скоростей должны, вообще говоря, определяться также и другие величины, характеризующие состояние среды: плотность $\rho(x, t)$, давление $P(x, t)$, температура $T(x, t)$ и т. д., в зависимости от конкретной задачи.

Для математического описания движения сплошной среды необходимо создать подходящую математическую модель явления. При этом, как правило, учитывают только самые необходимые свойства среды и пренебрегают остальными, ибо чем шире постановка, тем труднее построить математическую модель, поддающуюся изучению, тем меньше получается конкретных результатов и тем труднее сопоставить теорию с экспериментом. Правильный выбор модели часто обеспечивает успех решения задачи.

§ 1. Несжимаемая невязкая жидкость

Основные уравнения. В некоторых вопросах сжимаемость среды оказывается несущественной, и ею можно пренебречь. В этом случае движение невязкой жидкости в отсутствии внешних сил описывается следующими *уравнениями Эйлера*:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}, \nabla)\boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} P + \boldsymbol{F}. \tag{2}$$

Первое из этих уравнений представляет собой математическую запись условия несжимаемости, а второе является собственно уравнением движения: в левой его части стоит ускорение $\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{V}}{dt}$ движущихся частиц, а в правой — действующие на них силы: гидродинамические $\left(-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} P\right)$ и внешние $(\boldsymbol{F})$.

Система (1) — (2) уравнений с частными производными имеет еще весьма общий характер, и в силу этого ее применения ограничиваются сравнительно узким кругом задач гидродинамики. Более содержательные приложения мы получим, если наложим на рассматриваемые движения некоторые дополнительные условия. Перечислим несколько таких условий.

Потенциальность. Предположим, что жидкость находится в потенциальном силовом поле, т. е. действующие на нее внешние силы $\boldsymbol{F}$ имеют потенциал U:

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U \tag{3}$$

(например, жидкость находится в поле тяжести, направленном по оси z — тогда $U = -gz$). Тогда оказывается справедливой теорема, согласно которой циркуляция Γ вектора скорости по произвольному замкнутому «жидкому» контуру (т. е. замкнутой линии, состоящей из одних и тех же частиц жидкости; при фиксированном t любой контур в пространстве является жидким контуром) в процессе движения остается постоянной:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\oint_l (\boldsymbol{V}, d\boldsymbol{x}) = 0.$$

Из этого следует, что если движение возникает из состояния покоя, то циркуляция по произвольному замкнутому «жидкому» контуру тождественно равна нулю. Отсюда в силу формулы Стокса, по которой

$$\oint_l (\boldsymbol{V},\, d\boldsymbol{x}) = \int_S (\operatorname{rot} \boldsymbol{V},\, \boldsymbol{n})\, dS,$$

где S — поверхность, натянутая на контур l, и в силу произвольности поверхности S можно заключить, что во все время движения

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{V} = 0. \tag{4}$$

Величина $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{V}$ называется *завихренностью* и определяет угловую скорость вращения элементарного объема жидкости. Уравнение (4) есть, таким образом, условие отсутствия вращения.

Как известно, (4) представляет собой необходимое и достаточное условие потенциальности поля скоростей [1]), т. е. существования скалярной функции $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ — потенциала скоростей, такой, что

$$\boldsymbol{V} = \operatorname{grad} \varphi \tag{5}$$

(здесь, как и в (3), градиент берется только по пространственным координатам $\boldsymbol{x}$).

Условие потенциальности приводит к значительным упрощениям. Прежде всего, из (5) видно, что скорость вполне определяется потенциалом, так что вместо векторной искомой функции $\boldsymbol{V}$ нам достаточно найти скалярную φ. Далее, подставляя (5) в (1), мы видим, что φ по пространственным переменным удовлетворяет *уравнению Лапласа*:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{6}$$

т. е. является *гармонической функцией*. Свойства гармонических функций хорошо изучены и широко используются в гидродинамике.

---

[1]) Условие (4) является необходимым и достаточным только в односвязных областях; для произвольных областей это верно только локально, в окрестности каждой точки.

Роль уравнения (2) сводится теперь к определению зависимости функции φ от времени и определению давления P. Но условие потенциальности позволяет упростить и это уравнение. В самом деле, пользуясь известной из векторного анализа формулой

$$(\boldsymbol{V}, \nabla)\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{V}] + \operatorname{grad}\frac{v^2}{2} \tag{7}$$

(в которой у нас сейчас $\boldsymbol{\omega} = 0$), где $v = |\boldsymbol{V}|$ — величина вектора скорости, а также формулами (3) и (5), мы можем записать уравнение (2) в виде

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} - U\right) = 0.$$

Отсюда получается так называемый *интеграл Коши — Лагранжа*:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} - U = \Phi(t), \tag{8}$$

где Φ — некоторая функция времени; он заменяет уравнение движения (2).

Установившиеся движения. Однако и упрощения, обусловленные предположением о потенциальности, оказываются еще недостаточными, особенно если нужно получить не только качественные, но и количественные результаты. Дальнейшее упрощение мы получим, если предположим, что движение *установившееся*, т. е. что поле скоростей не зависит от времени. Тогда уравнение Лапласа (6) полностью описывает скорости, а соотношение (8) примет вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} - U = \text{const}, \tag{9}$$

в котором оно называется *интегралом Бернулли*.

Таким образом, задача полностью свелась к отысканию той гармонической функции, которая соответствует условиям задачи. Интеграл Бернулли является теперь конечным (а не дифференциальным) соотношением, которое связывает величину скорости с давлением; потенциал U внешнего поля сил в обычных задачах известен.

Плоское движение. И все же запас гармонических функций столь велик, что отыскание той из них, которая отвечает условиям задачи, обычно бывает затруд-

нительным. Поэтому лишь очень немногие пространственные задачи гидродинамики удается решить до конца.

Значительно легче решаются *плоские задачи*, к которым приходят, делая дополнительное предположение о том, что поле скоростей плоскопараллельно. Это означает, что существует направление $\boldsymbol{N}$ такое, что все скорости поля ему перпендикулярны, причем во всех

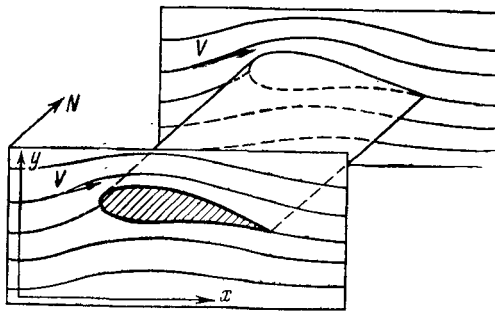


Рис. 1.

плоскостях, перпендикулярных $\boldsymbol{N}$, картина поля одинакова (так что при сдвиге в направлении $\boldsymbol{N}$ поля совпадают, рис. 1). Такое поле полностью описывается полем скоростей в одной из плоскостей, перпендикулярных $\boldsymbol{N}$. Будем считать, что направление $\boldsymbol{N}$ совпадает с направлением оси z и обозначим через V_x и V_y соответственно компоненты вектора скорости $\boldsymbol{V}$ по осям x и y. Тогда условия несжимаемости и потенциальности, т. е. уравнения (1) и (4), примут вид

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial V_x}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial x}=0. \tag{10}$$

Потенциал скоростей φ будет гармонической функцией двух переменных, т. е. будет удовлетворять двумерному уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0, \tag{11}$$

и компоненты скорости будут выражаться через него так:

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{12}$$

Первое уравнение (10) показывает, что выражение $-V_y\,dx + V_x\,dy$ является (локально) точным дифференциалом некоторой функции $\psi(x, y)$, так что

$$-V_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \tag{13}$$

Очевидно, направление касательной к линии $\psi(x, y) = \text{const}$, которое определяется из равенства $d\psi = -V_y dx + V_x dy = 0$, совпадает с направлением вектора скорости $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{V_y}{V_x}\right.$, см. рис. 1$\left.\right)$, поэтому линии уровня $\psi = \text{const}$ являются векторными линиями поля скоростей. При установившемся движении эти линии совпадают с траекториями движущихся частиц, т. е. с линиями тока, и потому ψ называется *функцией тока*. Из второго уравнения (10) видно, что ψ, как и φ, является гармонической функцией, а сравнение (12) и (13) показывает, что эти функции связаны соотношениями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{14}$$

Функции, связанные такими соотношениями, называются *сопряженными гармоническими*[1]).

Существенные упрощения, вносимые предположением о том, что движение — плоское, объясняются следующими двумя обстоятельствами: 1) функция тока, в терминах которой формулируются многие задачи, естественно вводится в плоском случае, а в пространственном ее введение затруднительно; 2) потенциал и функция тока в плоских задачах образуют в совокупности аналитическую функцию[2]), а теория таких функций

[1]) Гармоничность каждой из функций φ и ψ автоматически следует из (14): продифференцируйте первое уравнение по x, второе по y и сложите — получите $\Delta\varphi = 0$; продифференцируйте первое по y, второе по x и вычтите — получите $\Delta\psi = 0$.

[2]) Читатель, незнакомый с этим понятием, может узнать о нем в следующей главе.

очень хорошо развита как с качественной, так и с количественной стороны.

Применение схемы плоского движения далеко не ограничивается плоскопараллельными полями скоростей — она применяется для приближенного описания существенно более общих ситуаций. Например, ей можно пользоваться при изучении обтекании крыла самолета на значительной части его длины (теория крыла бесконечного размаха), лишь у концов крыла эта схема перестает действовать и нуждается в уточнениях.

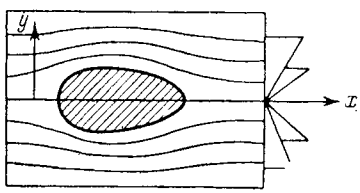


Рис. 2.

Осесимметрическое движение. Движение называется *осесимметрическим*, если все векторы скорости лежат в полуплоскостях, проходящих через некоторую прямую, называемую осью симметрии, причем во всех таких полуплоскостях картина поля одинакова (рис. 2). Поле скоростей осесимметрического движения полностью описывается плоским полем в любой из таких полуплоскостей.

Ось симметрии мы примем за ось x, а расстояние до оси обозначим через y, через V_x и V_y обозначим, соответственно, координаты вектора скорости в этой системе. Условия несжимаемости и потенциальности имеют в ней вид

$$\frac{\partial (yV_x)}{\partial x} + \frac{\partial (yV_y)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} = 0. \tag{15}$$

Из второго уравнения следует, что выражение $V_x\,dx + V_y\,dy$ является (локально) точным дифференциалом функции φ, которая называется потенциалом скоростей. Мы имеем

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{16}$$

причем из первого уравнения (15) видно, что φ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \tag{17}$$

которое представляет собой уравнение Лапласа, записанное в цилиндрических координатах[1]), так что φ является гармонической функцией декартовых координат.

Согласно первому уравнению (15) выражение $-yV_y\,dx + yV_x\,dy$ (также локально) является точным дифференциалом функции ψ, которая называется функцией тока. Мы имеем

$$V_x = \frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{18}$$

откуда, как и в плоском случае, получается, что линии уровня $\psi = \text{const}$ являются линиями тока. Функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \tag{19}$$

которое уже не является уравнением Лапласа, так что ψ в декартовых координатах — не гармоническая функция. Функция тока и потенциал связаны соотношениями

$$y\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad y\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{20}$$

Таким образом, осесимметрические движения во многом аналогичны плоским. Из отмеченных выше двух преимуществ плоского движения первое сохраняется для них полностью, а второе только частично: качественную теорию решений системы дифференциальных уравнений (20) построить удается довольно полно, а количественная теория далеко не так развита, как для решений системы (14), т. е. аналитических функций.

Движение с заданной завихренностью. Как мы видели, существование потенциала скоростей φ является следствием предположения об отсутствии завихренности, т. е. о том, что $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} V = 0$. В силу известного тождества $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi \equiv 0$ справедливо и обратное — для потенциальных течений завихренность равна 0.

При изучении ряда важных гидродинамических явлений схема потенциальных движений оказывается неприменимой и ее заменяют схемой движения с заданной завихренностью $\boldsymbol{\omega}$. Предполагая по-прежнему, что жид-

[1]) См., например, В. С. Владимиров [2], стр. 53.

кость несжимаема, а внешние силы, на нее действующие, имеют потенциал U, мы вводим так называемую *функцию Лэмба*

$$H = \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} - U \tag{21}$$

($v = |\boldsymbol{V}|$ — величина скорости, P — давление, ρ — плотность). Тогда, применяя к уравнению движения (2) формулу (7), мы можем переписать это уравнение в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{V}] = -\operatorname{grad} H, \tag{22}$$

в котором оно называется *уравнением в форме Лэмба.* В такой форме уравнение движения удобно применять к движениям с заданной завихренностью.

Остановимся на случае плоского движения. Здесь вектор завихренности

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{V} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

направлен перпендикулярно к плоскости течения и вполне характеризуется скалярной величиной

$$\omega = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}, \tag{23}$$

которую в этом случае мы и будем называть завихренностью. Предположим еще, что движение установившееся, тогда, подставив $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$ в уравнение Лэмба (22), мы можем переписать его в виде двух скалярных равенств

$$\omega V_x = \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad -\omega V_y = \frac{\partial H}{\partial y}.$$

Если ввести функцию тока ψ по формулам (13) и приравнять смешанные производные функции H, то получится тождество

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \tag{24}$$

из которого видно, что величина ω должна принимать постоянные значения на линиях уровня $\psi = \text{const}$, т. е. зависеть только от ψ:

$$\omega = \omega(\psi). \tag{25}$$

В приложениях вид этой зависимости обычно считается известным.

Вводя функцию тока в (23), мы получим, что эта функция удовлетворяет уравнению с частными производными

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\omega(\psi). \tag{26}$$

Если функция $\omega(\psi)$ не линейна, то уравнение (26) также является нелинейным и в силу этого оно весьма трудно для исследования. В случае постоянной правой части это уравнение легко сводится к уравнению Лапласа (см. гл. V этой книги).

Аналогичную ситуацию мы имеем и в случае движений с осевой симметрией. И здесь завихренность характеризуется скалярной величиной ω, которая в принятых выше обозначениях (x — координата вдоль оси симметрии, y — расстояние до этой оси) имеет вид (23). Тождество (24) заменяется тождеством

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega}{y}\right)\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\omega}{y}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \tag{24'}$$

из которого видно, что

$$\omega = y\omega_1(\psi), \tag{25'}$$

где ω_1 — некоторая функция. Функция тока удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = -y^2\omega_1(\psi). \tag{26'}$$

Граничные условия. Вернемся к схеме потенциального движения. Решение задач гидродинамики в этой схеме сводится к отысканию решения уравнения с частными производными (6), удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям, которые и отражают специфику задачи. Изучение свойств решений этого уравнения, не связанных с такими дополнительными

условиями, может лишь прояснить общие свойства потенциальных течений, а вся тяжесть решения конкретных задач падает на формулировку этих условий и построение решения, которое им удовлетворяет.

Дополнительные условия бывают двух родов: начальные и граничные; причем начальные условия нужно ставить только при изучении неустановившихся движений, для установившихся они не ставятся. Начальные условия сводятся к заданию в исходный момент времени (обычно $t = 0$) области D_0, занятой жидкостью, и распределения потенциала в этой области

$$\varphi(\boldsymbol{x}, 0) = f(\boldsymbol{x}). \tag{27}$$

Заданная функция f должна в D_0 удовлетворять уравнению Лапласа, т. е. быть гармонической в D_0.

Дальнейшее движение определяется граничными условиями, которые задаются на границе Γ_t области течения D_t для любого момента $t \geqslant 0$. Во многих задачах Γ_t делится на три части (см. рис. 3): твердая неподвижная граница Γ_1, подвижная твердая граница Γ_2 и свободная граница Γ_3. Выпишем граничные условия, которые соответствуют этим частям.

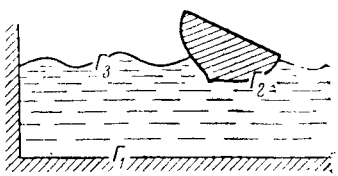


Рис. 3.

а) Твердые подвижные границы. Пусть уравнение такой границы будет $F(\boldsymbol{x}, t) = 0$; функция F считается заданной. Скорость движения границы в направлении нормали к ней равна

$$U_n = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial t}}{|\operatorname{grad} F|},$$

где градиент, как всегда у нас, берется по пространственным переменным. Для твердых границ принимается еще *условие непроницаемости*, согласно которому U_n должна совпадать с нормальной (по отношению к границе) составляющей скорости движения жидкости, т. е. с величиной

$$V_n = \left(\operatorname{grad}\varphi, \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}\right).$$

Таким образом, граничное условие в рассматриваемом случае имеет вид: для всех x и t, удовлетворяющих уравнению $F(x, t) = 0$, где F — заданная функция, должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\operatorname{grad}\varphi,\ \operatorname{grad} F) = 0. \tag{28}$$

б) Твердые неподвижные границы можно рассматривать как частный случай подвижных, когда функция F не зависит от t. Соответствующее граничное условие имеет, следовательно, вид: для всех x, удовлетворяющих уравнению $F(x) = 0$, и для всех t должно выполняться соотношение

$$(\operatorname{grad}\varphi,\ \operatorname{grad} F) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \tag{29}$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная в направлении нормали к границе.

в) Свободные границы. Форма таких границ заранее не задается, условие же (28) (или (29), если рассматриваемая граница неподвижна) сохраняется как кинематическое условие с неизвестной функцией F. Зато обычно считают, что на свободной поверхности постоянно давление P (равное атмосферному, если речь идет об открытых водоемах). На основании интеграла Коши — Лагранжа (8) это приводит к дополнительному соотношению, выполняемому на свободной границе:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\operatorname{grad}\varphi|^2 - U = \text{const}; \tag{30}$$

здесь U — потенциал внешних сил, действующих на границу (функцию Φ из правой части (8) можно включить в φ как несущественное слагаемое).

В случае установившегося движения границы не зависят от t, поэтому на твердых (известных) участках должно выполняться граничное условие (29), а на свободных участках — то же условие (29) с неизвестной функцией F и еще условие (30), в котором отсутствует член с $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

Для плоского или осесимметрического установившегося движения граничные условия особенно хорошо

формулируются в терминах функции тока. В самом деле, для таких движений линии тока $\psi = \text{const}$ и линии $\varphi = \text{const}$ взаимно ортогональны[1]), и кроме того, из равенства нулю производной $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ по какому-либо направлению l следует, что равна нулю производная $\frac{\partial\psi}{\partial m}$ в направлении m, перпендикулярном l [2]). Поэтому вдоль всей границы течения условие $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ можно заменить условием $\frac{\partial\psi}{\partial s} = 0$, где производная берется в направлении границы. Но последнее условие эквивалентно тому, что вдоль всей границы $\psi = \text{const}$, т. е. что *граница является одной из линий тока.*

Такая простая формулировка граничных условий в плоских и осесимметрических задачах и составляет одно из тех двух упрощающих обстоятельств, о которых говорилось выше.

§ 2. Сжимаемость

При движениях жидкости с большими скоростями, сравнимыми со скоростью распространения звука в этой жидкости, становится существенной ее сжимаемость. Плотность жидкости ρ уже не является постоянной и ее следует считать одной из искомых функций. Задача существенно усложняется, появляются принципиально новые явления, отсутствующие в случае несжимаемости.

Основные уравнения. Условие несжимаемости $\operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0$ заменяется теперь более общим уравнением

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{V}) = 0, \tag{1}$$

---

[1]) Действительно, и из (14) и из (20) следует, что

$$(\operatorname{grad}\varphi,\ \operatorname{grad}\psi) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0.$$

[2]) Действительно, если α — угол направления l с осью x, то $\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\sin\alpha$, а $\frac{\partial\psi}{\partial m} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}\sin\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cos\alpha$; теперь утверждение получается сразу, если использовать (14) или (20).

уравнение движения пишется по-старому:

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}, \nabla)\boldsymbol{V} + \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} P = 0 \tag{2}$$

и появляется новое, термодинамическое уравнение

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + (\boldsymbol{V}, \nabla)S = 0. \tag{3}$$

Последнее уравнение выражает условие отсутствия теплообмена между частицами среды: энтропия S каждой частицы постоянна, т. е. полная производная энтропии по времени $\left(\text{равная } \frac{\partial S}{\partial t} + (\boldsymbol{V}, \nabla)S\right)$ равна 0.

Однако система (1) — (3) еще недостаточна для описания процессов, происходящих в сжимаемых средах. К ней нужно добавить соотношение, связывающее величины P, ρ и S, которое называется *уравнением состояния среды*

$$P = P(\rho, S). \tag{4}$$

Это соотношение является следствием общих законов термодинамики, а конкретный вид зависимости определяется свойствами среды. Например, для среды, называемой идеальным газом, эта зависимость имеет вид

$$P = e^{\frac{S}{c_v}} \rho^{\gamma}, \tag{5}$$

где постоянная $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ (отношение теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме) называется показателем адиабаты Пуассона.

Упрощающие предположения. Одним из таких предположений является условие *изэнтропичности* — движение таково, что во всем объеме, занятом средой, энтропия $S = \text{const}$. Для изэнтропических движений уравнение (3) выполняется автоматически, а из (4) следует, что давление зависит только от плотности. Процессы, обладающие последним свойством, называются *баротропными*.

Для изэнтропических течений, как и для течений несжимаемой жидкости, оказывается справедливой теорема о постоянстве циркуляции скорости по произвольному замкнутому жидкому контуру. Из нее следует, что

имеет смысл рассматривать изэнтропические потенциальные течения сжимаемой жидкости.

Следует, однако, отметить, что в определенных условиях в сжимаемых жидкостях, в отличие от несжимаемых, даже при гладких начальных условиях могут образоваться так называемые *сильные разрывы* — поверхности, на которых гидродинамические величины (например, плотности и давления) меняются скачком. Из термодинамических соображений, а также из законов сохранения импульса и энергии следует, что при прохождении частицы через такой разрыв ее энтропия меняется скачком и изэнтропичность нарушается. При возникновении сильных разрывов перестает быть справедливой и теорема о сохранении циркуляции, в которой условие изэнтропичности является существенным. Таким образом, появление сильных разрывов нарушает наши упрощающие предположения.

Тем не менее класс изэнтропических потенциальных течений сжимаемой жидкости достаточно широк и часто встречается в приложениях.

Плоские установившиеся течения. Теория существенно упрощается, если в дополнение к предположениям об изэнтропичности и потенциальности предположить, что движение является плоским и установившимся. Тогда уравнение неразрывности (1) примет вид

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y}=0, \tag{6}$$

добавится условие отсутствия завихренности

$$\frac{\partial V_x}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial x}=0, \tag{7}$$

а уравнение движения (2) заменится интегралом Бернулли

$$\frac{1}{2}(V_x^2+V_y^2)+\int\limits_{\rho_0}^{\rho}\frac{dP}{\rho}=\text{const} \tag{8}$$

(мы пренебрегаем внешними силами — при больших скоростях они несущественны). Второе слагаемое

$$Q(\rho)=\int\limits_{\rho_0}^{\rho}\frac{dP}{\rho}$$

называется энтальпией среды; так как $\operatorname{grad} Q(\rho) = \frac{P'(\rho)}{\rho} \operatorname{grad} \rho = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P$, то интеграл (8) получается из уравнения движения (12) точно так же, как и в случае несжимаемой жидкости.

Для идеального газа (при постоянной энтропии S)

$$Q(\rho) = \frac{\gamma P}{\gamma - 1} = \frac{c^2}{\gamma - 1},$$

где $c^2 = \frac{dP}{d\rho} = \gamma e^{\frac{S}{c_v}} \rho^{\gamma-1}$ — квадрат скорости распространения звука в этом газе, и интеграл Бернулли принимает вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \text{const}; \tag{9}$$

скорость звука, таким образом, оказывается функцией от скорости v движения газа. Отсюда сразу получается вывод, принципиально отличающий движения идеального газа от движений несжимаемой жидкости, — в случае газа скорость движения не может превышать некоторой величины v_m, зависящей от свойств этого газа, при которой скорость звука оказывается равной нулю. Постоянная в правой части (9) равна, очевидно, $\frac{v_m^2}{2}$ (максимальная скорость достигается при $c = 0$), и если теперь в это соотношение подставить выражение c^2 через ρ, то после простых преобразований мы получим

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{v^2}{v_m^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \tag{10}$$

Это соотношение можно рассматривать как интеграл Бернулли для идеального газа; постоянная ρ_0 равна плотности неподвижного газа (при $v = 0$), она, как и v_m, зависит от свойств этого газа.

Очевидно, что и в общем случае установившихся потенциальных течений в баротропных средах из интеграла Бернулли (8) можно найти ρ как известную функцию от $v = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$. Если подставить эту зависимость в (6), то все сведется к решению системы двух дифферен-

циальных уравнений первого порядка (6) и (7) относительно двух неизвестных функций V_x и V_y. В отличие от случая несжимаемой жидкости эта система нелинейна[1]), что и является главной причиной дополнительных затруднений, возникающих при отказе от несжимаемости.

Уравнение для потенциала. Продолжаем описание плоских движений, сохранив сделанные выше предположения. Из соотношения (7) следует существование потенциала скоростей φ, так что

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{11}$$

а из (6) — существование функции тока ψ, для которой

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho V_y, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho V_x. \tag{12}$$

Линии уровня $\psi = \text{const}$ по-прежнему служат линиями тока, и эти линии по-прежнему ортогональны линиям равного потенциала $\varphi = \text{const}$. Сравнивая (11) и (12), мы получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{13}$$

в которой ρ есть известная функция скорости $v = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}$. Если положить $\rho \equiv 1$, она перейдет в систему (14) предыдущего параграфа, описывающую плоские движения несжимаемой жидкости.

Из системы (13) можно исключить функцию ψ, получится уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0,$$

или

$$\rho\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{d\rho}{dv}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{d\rho}{dv}\frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{14}$$

---

[1]) Нелинейность системы (6)—(7) вызвана тем, что в нее входит зависимость $\rho = \rho\left(\sqrt{V_x^2 + V_y^2}\right)$.

Далее, дифференцируя по ρ интеграл Бернулли (8), мы найдем

$$\frac{d\rho}{dv} = -\frac{\rho v}{P'(\rho)} = -\frac{\rho v}{c^2}, \tag{15}$$

а из формулы $v = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$ [1]) получим, что $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{v}(\varphi_x\varphi_{xx} + \varphi_y\varphi_{yy})$ и $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{v}(\varphi_x\varphi_{xy} + \varphi_y\varphi_{yy})$. Подставляя это в уравнение (14), мы после простых преобразований приведем его к виду

$$(c^2 - \varphi_x^2)\varphi_{xx} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + (c^2 - \varphi_y^2)\varphi_{yy} = 0. \tag{16}$$

В случае несжимаемой жидкости ему соответствует уравнение Лапласа, которое получается из (16), если в последнем положить скорость звука $c = \infty$ (для этого надо разделить обе части уравнения на c^2 и положить всюду $\frac{1}{c^2} = 0$). Уравнение (16) относится к так называемым квазилинейным уравнениям второго порядка — линейным относительно старших производных, т. е. производных второго порядка.

Звуковой барьер. Очень существенным обстоятельством является то, что уравнение (16) может менять тип. Тип квазилинейного дифференциального уравнения

$$A\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{17}$$

(A, B, C — известные функции x, y, φ, φ_x и φ_y) определяется квадратической формой

$$A\eta^2 - 2B\xi\eta + C\xi^2 \tag{18}$$

— если эта форма сохраняет знак, то говорят, что уравнение (17) — *эллиптического типа*, а если она меняет знак, то (17) называют уравнением *гиперболического типа*. Но форма (18), очевидно, имеет тот же знак, что и квадратный трехчлен $Ak^2 - 2Bk + C$ (мы положили $\frac{\eta}{\xi} = k$), а последний меняет или сохраняет знак в

[1]) Здесь и далее мы пользуемся сокращенными обозначениями для частных производных.

зависимости от того, есть у него действительные корни или их нет. Таким образом, тип уравнения (17) определяется знаком дискриминанта $\Delta = AC - B^2$: при $\Delta > 0$ оно эллиптического типа, а при $\Delta < 0$ — гиперболического.

Для уравнения (16) дискриминант

$$\Delta = (c^2 - \varphi_x^2)(c^2 - \varphi_y^2) - \varphi_x^2\varphi_y^2 = c^2(c^2 - v^2),$$

следовательно, оно эллиптическое при дозвуковых скоростях ($v < c$) и гиперболическое при сверхзвуковых ($v > c$) — *переход через скорость звука сопровождается переменой типа этого уравнения.*

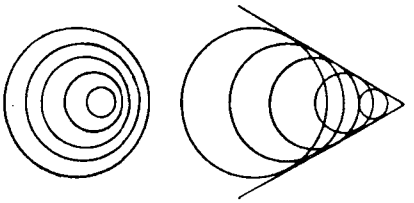
Перемена типа дифференциального уравнения принципиально меняет свойство его решений и это отражает тот факт, что характер движения в сжимаемых средах резко меняется при переходе через скорость звука. Некоторые явления при этом заменяются прямо противоположными. Рассмотрим, например, так называемый *расход* $W = \rho v$ — произведение плотности среды на скорость. В силу интеграла Бернулли плотность среды является функцией от скорости, значит, и расход тоже; пользуясь формулой (15), мы находим

$$\frac{dW}{dv} = v\frac{d\rho}{dv} + \rho = \rho\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Отсюда видно, что при дозвуковых режимах расход растет при увеличении скорости, а при сверхзвуковых, наоборот, падает. Можно указать и другие явления, резко меняющиеся при переходе через скорость звука. Легко понять, как важно это обстоятельство для пилота, ведущего самолет со скоростью, близкой к звуковой, — ведь одно и то же его действие при дозвуковых и сверхзвуковых режимах может привести к прямо противоположным результатам!

Характеристики. Одно из наиболее существенных отличий сверхзвуковых и дозвуковых режимов среды связано с различным характером распространений в них локальных возмущений. Именно, при дозвуковых скоростях возмущения распространяются по всему пространству, а при сверхзвуковых — лишь внутри некоторого сектора.

Качественную причину этого понять нетрудно, если учесть, что возмущения в среде распространяются со скоростью звука. Представим себе, что среда неподвижна, а источник возмущений прямолинейно движется со скоростью v. Если $v < c$, то источник двигается медленнее, чем производимые им возмущения, и картина возмущений будет такой, как изображено на рис. 4, *а*. Если же $v > c$, то источник будет опережать возмущения, и мы получим картину, изображенную на рис. 4, *б*.



а) *б)*

Рис. 4.

То же самое, конечно, будет происходить, если источник возмущений неподвижен, а среда движется с дозвуковой или сверхзвуковой скоростью. Так как мы ограничиваемся установившимися движениями, то мы должны предположить, что в дозвуковом случае возмущения уже заняли все пространство, а в сверхзвуковом — весь сектор с вершиной в точке возмущения; вне сектора движение не возмущено. Границы этого сектора — линии, отделяющие возмущенную зону от невозмущенной, называются *характеристиками*, они играют фундаментальную роль при изучении сверхзвуковых течений. В дозвуковых течениях характеристик нет.

Характеристики очень естественно появляются и в теории уравнений с частными производными. Для уравнений эллиптического типа вида (17) оказывается справедливой теорема единственности, по которой всякое их решение, обращающееся в нуль в каком-либо кружке, тождественно равно нулю. Но для гиперболических уравнений это не так: существуют решения, которые равны нулю в некоторой зоне и отличны от нуля в другой.

Оказывается, далее, что линия раздела этих двух зон не может быть произвольной. В самом деле (если решение гладкое, что́ мы предполагаем), на этой линии должны обращаться в нуль и решение φ и обе его частные производные φ_x и φ_y. Вообще говоря, для уравнений второго порядка задание на линии значений ре-

шения и его первых производных (так называемая задача Коши) однозначно определяет это решение. Но наша линия раздела является исключением: существуют по крайней мере два решения с теми же данными $\varphi = \varphi_x = \varphi_y = 0$ — само решение φ и функция $\varphi \equiv 0$. Таким образом, линии раздела надо искать среди тех кривых, на которых задача Коши имеет неединственное решение.

Выясним, что это за кривые, в случае квазилинейного уравнения (17). Зададим на некоторой кривой γ: $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, где τ — параметр, данные Коши:

$$\varphi = u(\tau), \quad \varphi_x = p(\tau), \quad \varphi_y = q(\tau). \tag{19}$$

Эти данные должны быть согласованы, т. е. удовлетворять соотношению, которое получается дифференцированием по τ тождества $u(\tau) = \varphi[x(\tau), y(\tau)]$:

$$\dot{u} = p\dot{x} + q\dot{y}$$

(точкой обозначается дифференцирование по параметру). Задача Коши (19) имеет единственное решение, если по заданным величинам (19) и по уравнению (17) вдоль γ можно однозначно определить производные старших порядков решения φ.

Посмотрим, как обстоит дело со вторыми производными φ_{xx}, φ_{xy} и φ_{yy}. Эти величины должны удовлетворять уравнению (17) и еще двум соотношениям, которые получаются дифференцированием по τ тождеств $\varphi_x[x(\tau), y(\tau)] = p(\tau)$ и $\varphi_y[x(\tau), y(\tau)] = q(\tau)$:

$$\begin{aligned} A\varphi_{xx} + 2B\varphi_{xy} + C\varphi_{yy} &= D, \\ \dot{x}\varphi_{xx} + \dot{y}\varphi_{xy} &= \dot{p}, \\ \dot{x}\varphi_{xy} + \dot{y}\varphi_{yy} &= \dot{q}. \end{aligned}$$

Полученная система может оказаться неразрешимой или разрешимой неоднозначно лишь в случае, когда ее определитель равен 0, т. е. когда

$$A\dot{y}^2 - 2B\dot{x}\dot{y} + C\dot{x}^2 = 0. \tag{20}$$

Нетрудно видеть, что если вдоль кривой γ левая часть (20) не обращается в нуль, то вдоль этой кривой однозначно определяются не только вторые, но и все высшие производные решения φ, а тогда по формуле

Тейлора в окрестности γ однозначно определится и само решение. Если же вдоль γ удовлетворяется соотношение (20), то эта процедура либо невыполнима, либо неопределенна. В последнем случае мы получим, в частности, линии раздела, отделяющие зоны, в которых решение тождественно равно 0, от зон, в которых оно отлично от нуля (рис. 5).

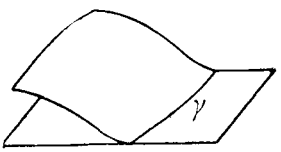


Рис. 5.

Кривые γ, удовлетворяющие уравнению (20) в каждой своей точке, называются *характеристиками* уравнения (17). Если положить $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, то (20) будет квадратным уравнением, определяющим наклон характеристики. Мы видим, что для уравнений эллиптического типа ($AC - B^2 > 0$) действительных характеристик не существует, а для уравнений гиперболического типа ($AC - B^2 < 0$) через каждую точку проходят две характеристики [1]).

Для уравнения потенциала (16), в частности, характеристики определяются уравнением

$$(c^2 - \varphi_x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\varphi_x\varphi_y\frac{dy}{dx} + (c^2 - \varphi_y^2) = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\varphi_x\varphi_y \pm c\sqrt{v^2 - c^2}}{c^2 - \varphi_x^2}. \tag{21}$$

В соответствии с только что сказанным, при дозвуковых режимах ($v < c$) характеристик нет, а при сверхзвуковых режимах через каждую точку области течения проходит по две характеристики (их наклон определяется компонентами скорости φ_x и φ_y). Если обозначить через θ угол наклона вектора скорости к оси x, а через α — так

---

[1]) Сказанное нуждается в уточнении: для линейных уравнений, где A, B и C зависят лишь от x и y, направления характеристик действительно определяются точкой (x, y). Но для квазилинейных уравнений, где коэффициенты могут зависеть еще от φ и φ_x, φ_y, характеристики зависят не только от точки, но и от рассматриваемого решения φ.

называемый *угол Маха*, который определяется соотношением

$$\sin\alpha = \frac{c}{v} \tag{22}$$

(он имеет смысл лишь при сверхзвуковых скоростях), то формулу (21) можно переписать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin\theta\cos\theta \pm \sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\theta} = \operatorname{tg}(\theta \mp \alpha). \tag{23}$$

Отсюда видно, что в каждой точке сверхзвуковой зоны вектор скорости служит биссектрисой угла между характеристиками, величина которого равна удвоенному углу Маха 2α (рис. 6). Отсюда и из формулы (22) видно также, что скорость движения каждой из характеристик в направлении нормали к ней, $V_n = v\sin\alpha$, равна скорости звука c — это и понятно, ибо характеристики представляют собой фронты распространения возмущений, а возмущения в среде распространяются со скоростью звука.

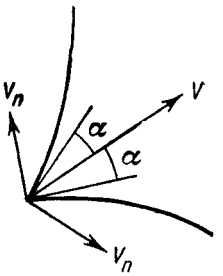


Рис. 6.

Мелкая вода. Укажем еще задачу на потенциальные течения несжимаемой жидкости, в которой также появляются уравнения гиперболического типа. Рассмотрим неустановившееся плоское движение в неглубоком водоеме с твердым дном $y = -h(x)$ и со свободной граничной поверхностью $y = \eta(x, t)$; координаты вектора скорости $V_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $V_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ будем здесь обозначать через u и v соответственно.

Отметим сначала, что имеет место соотношение

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h(x)}^{\eta(x,\,t)} u(x, y, t)\,dy. \tag{24}$$

В самом деле, по правилам дифференцирования интегралов, зависящих от параметра

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\eta} u\,dy = u(x, \eta, t)\frac{\partial\eta}{\partial x} + u(x, -h, t)\,h' + \int_{-h}^{\eta}\frac{\partial u}{\partial x}\,dy.$$

Но на свободной поверхности и на дне выполняются, соответственно, граничные условия

$$y=\eta(x,\ t):\quad \frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\eta}{\partial x}u-v=0,$$

$$y=-h(x):\qquad\qquad uh'+v=0.$$

Подставляя это в предыдущее равенство, мы найдем

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-h}^{\eta}u\,dy=-\frac{\partial\eta}{\partial t}+v(x,\ \eta,\ t)-v(x,\ -h,\ t)+\int\limits_{-h}^{\eta}\frac{\partial u}{\partial x}\,dy=$$

$$=-\frac{\partial\eta}{\partial t}+\int\limits_{-h}^{\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy;$$

последний интеграл равен нулю в силу условия несжимаемости, и мы получаем (24).

В теории мелкой воды делается предположение о том, что давление в жидкости совпадает с гидростатическим, т. е. что оно пропорционально глубине

$$P=g\rho[\eta(x,\ t)-y]+p_0, \tag{25}$$

где p_0 — постоянное атмосферное давление. Подставляя это в уравнение движения, мы найдем для первой координаты скорости

$$\frac{du}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=-g\frac{\partial\eta}{\partial x}, \tag{26}$$

откуда видно, что $\frac{du}{dt}$ не зависит от y. С учетом этого замечания из (24) мы получаем

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(\eta+h)u. \tag{27}$$

Введем величину

$$\bar{P}=\int\limits_{-h}^{\eta}P\,dy=\frac{g\rho}{2}(\eta+h)^2$$

(мы воспользовались формулой (25)) и обозначим $\tilde{\rho}=(\eta+h)\rho$; тогда

$$\bar{P}=\frac{g}{2\rho}\tilde{\rho}^2=k\tilde{\rho}^2,$$

где k — постоянная для данной жидкости. Это соотношение формально можно рассматривать как уравнение адиабаты с показателем $\gamma = 2$ (ср. с формулой (5)). Если подставить величины $\bar{P}$ и $\bar{\rho}$ в уравнения (26) и (27) и учесть еще, что $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}$, то эти уравнения перепишутся в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}u)}{\partial x} = 0. \tag{28}$$

По форме они совпадают с уравнениями неустановившегося одномерного движения газа. Скорость распространения возмущений в нашей среде — это будут волны на поверхности водоема — определяется, как «скорость звука»

$$c = \sqrt{\frac{d\bar{P}}{d\bar{\rho}}} = \sqrt{g(\eta + h)}. \tag{29}$$

Возвращаясь к переменным η и u, мы можем записать систему (26)—(27) в виде

$$\eta_t = \left(\frac{u^2}{g} - \eta - h\right)u_x + \frac{u}{g}u_t - h'u, \tag{30}$$

$$-\eta_x = \frac{u}{g}u_x + \frac{1}{g}u_t.$$

В теории уравнений с частными производными доказывается (см., например, [3]), что тип системы

$$\eta_t = au_x + bu_t + \ldots, \quad -\eta_x = du_x + cu_t + \ldots$$

(многоточие означает члены, не содержащие производных) определяется знаком дискриминанта

$$\Delta = ac - \left(\frac{b+d}{2}\right)^2.$$

Для системы (30) этот дискриминант отрицателен:

$$\Delta = \frac{1}{g}\left(\frac{u^2}{g} - \eta - h\right) - \frac{u^2}{g} = -\frac{\eta + h}{g}.$$

Следовательно, эта система — гиперболического типа.

Система (30) нелинейна и потому не очень проста для исследования. Существенно упрощает (линеаризирует) ее предположение о том, что величины u и η малы

вместе с производными. Тогда можно пренебречь членами второго порядка малости (такими, как u^2, ηu_x и т. д.) и система приближенно заменится такой линейной системой:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -h\frac{\partial u}{\partial x} - h'u = -\frac{\partial (hu)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{31}$$

Из этой системы легко исключается функция u и для высоты слоя жидкости η получается уравнение

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = 0. \tag{32}$$

Если дно водоема ровное ($h = \text{const}$), то (32) сведется к простейшему уравнению гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0. \tag{33}$$

Общее решение этого уравнения очень легко выписывается через две произвольные функции

$$\eta = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t), \tag{34}$$

где $c_0 = \sqrt{gh}$; функции f_1 и f_2 определяются через начальные и граничные условия.

Формула (34) дает решение в виде суммы двух волн, движущихся со скоростью $\pm c_0$, а функции f_1 и f_2 определяют форму этой волны. Характеристиками системы (31) служат прямые $x \pm c_0 t = \text{const}$; они определяют фронт волны (и, в частности, отделяют зону покоя от возмущенной зоны, если функции f_1 и f_2 отличны от нуля только на конечном интервале, как это обычно бывает). Каждый читатель, несомненно, видел такие характеристики на мелкой воде — когда поливают асфальт, по ним распространяются возмущения от маленьких бугорков. Более подробно о свойствах решений уравнения (33) будет говориться в следующей главе.

В заключение отметим еще одно обстоятельство. Грубое приближение (линеаризация), которое мы применили к системе (30), привело нас к выводу, что волны распространяются с постоянной скоростью $c_0 = \sqrt{gh}$. Более тонкий анализ показал бы, однако, что для этой скорости справедлива формула (29), $c = \sqrt{g(h + \eta)}$, из которой предыдущая получается при $\eta = 0$. А из фор-

мулы (29) следует такой важный вывод — в мелкой воде верхние участки волны, для которых возвышение η больше, движутся с большей скоростью, чем нижние. Этот вывод объясняет явление опрокидывания волн при набегании их на берег (рис. 7), его наблюдал каждый, кто был на море.

Математически явление опрокидывания волн дает пример решения уравнения с частными производными, которое имеет особенности. В теории уравнений доказывается, что линейные эллиптические уравнения с гладкими коэффициентами могут иметь лишь гладкие решения. Поэтому появление негладких (разрывных или с разрывными производными) решений наблюдается лишь у гиперболических или нелинейных уравнений. Решения с особенностями, аналогичные опрокидыванию волн, играют большую роль в сверхзвуковой газовой динамике (ударные волны, скачки уплотнения). О них мы немного поговорим в гл. IV; при дозвуковых скоростях такие решения невозможны.

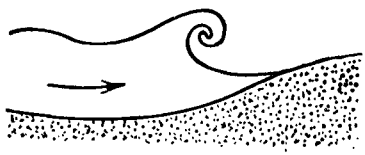


Рис. 7.

В заключение отметим, что если от рассмотренной здесь плоской задачи перейти к пространственной, то в тех же упрощающих (линеаризирующих) предположениях для высоты слоя жидкости $\zeta = \zeta(x, y, t)$ вместо (32) мы получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\right\} = 0. \qquad (35)$$

Это приближенное уравнение называют *акустическим.*

§ 3. Вязкая несжимаемая жидкость

Очень многие практические задачи, связанные с движением жидкости в трубах и каналах или с движением твердых тел в жидкости, нельзя решить без учета вязкости жидкости. Здесь мы очень коротко коснемся некоторых вопросов, связанных с вязкостью.

Уравнения Навье — Стокса. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости (в отсутствии внешних

массовых сил) имеют вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}, \nabla)\boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} P + \nu \Delta \boldsymbol{V}, \tag{2}$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости — постоянная, характеризующая среду, а $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа. Уравнение (1) — обычное условие несжимаемости, а уравнение (2) следует из *основного закона динамики*, по которому $\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} T$, где $T = (T_{ij})$ — так называемый тензор напряжений [1]), и из *закона Стокса*, согласно которому тензор напряжений выражается через тензор скоростей деформации $D = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$ по формуле

$$T_{ij} = -P\delta_{ij} + \rho\nu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right); \tag{3}$$

здесь $i, j = 1, 2, 3$, координаты x, y, z обозначаются соответственно через x_1, x_2, x_3, а компоненты скорости — через V_1, V_2, V_3, δ_{ij} — символ Кронеккера, равный 1 при $i = j$ и 0 при $i \neq j$ (подробности можно найти, например, в книге Серрина [4], стр. 222).

Таким образом, уравнение Навье—Стокса (2) отличается от соответствующего ему в случае невязкой жидкости уравнения Эйлера (2) из § 1 членом $\nu\Delta\boldsymbol{V}$, содержащим вторые производные вектора скорости.

Диссипация энергии. Выясним, как меняется с течением времени кинетическая энергия объема V, движущегося вместе с вязкой жидкостью. Скорость изменения этой энергии, дифференцируя под знаком интеграла и

---

[1]) Симметрия тензора напряжений следует из закона изменения момента количества движения сплошной среды; $\operatorname{div} T$ представляет собой вектор с координатами $(\operatorname{div} T)_i = \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$.

пользуясь основным законом динамики, можно записать в виде

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\rho}{2}\int_V V^2\,dv = \rho\int_V \left(\boldsymbol{V}, \frac{d\boldsymbol{V}}{dt}\right)dv = \int_V (\boldsymbol{V}, \operatorname{div} T)\,dv. \quad (4)$$

Воспользуемся теперь соотношением

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{V}\cdot T) = T\cdot D + (\boldsymbol{V}, \operatorname{div} T),$$

справедливым для произвольного симметричного тензора T; в нем $T\cdot D = \sum\limits_{i,\,j=1}^{3} T_{ij}D_{ij}$ означает свертку тензоров T и D. Пользуясь им и применяя формулу Гаусса — Остроградского, мы можем переписать (4) в виде

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \operatorname{div}(\boldsymbol{V}\cdot T)\,dv - \int_V T\cdot D\,dv = \int_S (\boldsymbol{V}, T\boldsymbol{n})\,dS - \int_V T\cdot D\,dv, \quad (5)$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе S объема V. Так как $T\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}$ — вектор напряжений, действующих на S, то первый член в правой части (5) представляет собой суммарную мощность поверхностных сил. Второй член дает величину диссипации энергии, равную работе в единицу времени сил напряжения, затраченной на деформацию самого объема.

Пользуясь законом Стокса (3), по которому $T\cdot D = -PID + 2\rho\nu D\cdot D$, где $I = (\delta_{ij})$ — единичный тензор, а также несжимаемостью жидкости, вследствие которой $I\cdot D = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,\,j=1}^{3}\delta_{ij}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) = \operatorname{div}\boldsymbol{V} = 0$, мы можем переписать выражение диссипации энергии в виде

$$Q = 2\rho\nu\int_V D\cdot D\,dv = \frac{\rho\nu}{2}\int_V \sum_{i,\,j=1}^{3}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)^2 dv. \quad (6)$$

Эта величина выражает количество механической энергии объема, которое за единицу времени переходит в тепловую энергию.

Граничные условия. В соответствии с увеличением порядка дифференциального уравнения при переходе к случаю вязкой жидкости увеличивается и число граничных условий. Так, на твердых неподвижных границах в теории невязкой жидкости ставится одно условие непроницаемости $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{n}) = 0$, а в теории вязкой жидкости — три (скалярных) условия

$$\boldsymbol{V} = 0. \tag{7}$$

Это — так называемое *условие прилипания*, оно оправдывается многочисленными экспериментами и отражает тот факт, что между поверхностью твердого тела и вязкой жидкостью существуют силы молекулярного сцепления.

На движущихся твердых границах условие прилипания сводится к условию совпадения скоростей жидкости и соответствующих точек поверхности. На свободной граничной поверхности должен обращаться в нуль вектор напряжений:

$$T \cdot \boldsymbol{n} = 0, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{n}$ — вектор нормали к поверхности, и кроме того, должно выполняться кинематическое условие, согласно которому нормальная составляющая вектора скорости совпадает со скоростью перемещения поверхности в направлении своей нормали.

Учет вязкости. Уравнение Навье—Стокса значительно сложнее для исследования, чем уравнение Эйлера, и даже приближенный счет на вычислительных машинах при решении некоторых задач для этого уравнения оказывается затруднительным. С другой стороны, для обычных сред (таких, как воздух или вода) коэффициент вязкости ν является малой величиной, и казалось бы, что для таких сред пренебрежение вязким членом (т. е. замена уравнения Навье — Стокса уравнением Эйлера) не должно приводить к существенным ошибкам.

Однако это не так, и причиной тому является различие граничных условий для уравнений Эйлера и Навье—Стокса. Граничное условие непроницаемости в схеме невязкой жидкости приводит к ряду парадоксов — например, к отсутствию сопротивления при движении тела в жидкости (о таких парадоксах пойдет речь в гл. V).

Но условие прилипания при отбрасывании вязкого члена становится переопределенным, и ему нельзя удовлетворить.

В силу этого условие прилипания фактически приводит к тому, что несмотря на малость ν, в тонком слое вблизи границы градиенты скорости оказываются очень большими. Но тогда вязкие члены становятся по величине сравнимыми с остальными членами уравнения (2), и пренебрежение ими уже незаконно. Действие сил вязкости в пограничном слое приводит к отрыву этого слоя

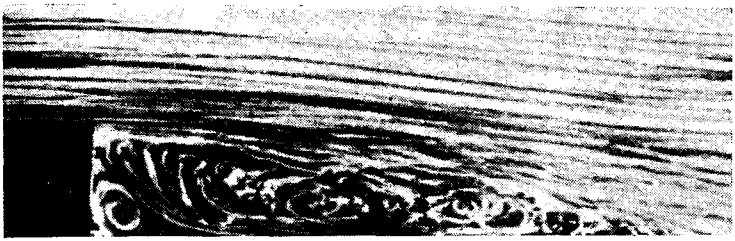


Рис. 8.

от граничной поверхности и в целом течение становится существенно отличным от того, которое получается в схеме невязкой жидкости.

В ряде важных задач вследствие отрыва пограничного слоя за обтекаемым телом создаются зоны с замкнутыми линиями тока и отличной от нуля завихренностью (рис. 8). Причина этого прежняя — граничные условия прилипания. Потенциальное (безвихревое) движение всегда удовлетворяет уравнению Навье—Стокса, ибо если скорость $\boldsymbol{V}$ является градиентом гармонической функции φ, то очевидно, что $\Delta \boldsymbol{V} = 0$, и тогда достаточно взять $P = -\rho\left(\varphi_t + \frac{1}{2}|\operatorname{grad}\varphi|^2\right)$. Поэтому безвихревое движение вязкой жидкости динамически возможно. Но так как безвихревое движение не может удовлетворять условиям прилипания, то в вязкой жидкости непременно должны образовываться вихри.

Трудности, возникающие при изучении движения вязкой жидкости в точной постановке, заставляют искать

более простые математические модели, которые могли бы служить в качестве первого приближения к действительности. Одной из таких моделей является модель, в которой движение в некоторых зонах считается потенциальным, а в других имеет заданную завихренность. В гл. V и IX мы увидим, что этот способ учета вязкости позволяет решить ряд важных задач.

Малая толщина пограничного слоя и большие градиенты скорости в нем послужили основой, на которой Л. Прандтль развил приближенную теорию интегрирования уравнений Навье—Стокса и построил теорию пограничного слоя. Эта теория позволяет рассчитывать течение в пограничном слое и определять касательные напряжения на поверхности тела. Однако она справедлива только до точки отрыва пограничного слоя и не дает возможности, например, вычислить полное сопротивление, испытываемое телом (за исключением случаев, когда отрыва погранслоя не происходит). В настоящее время вообще не существует теории, по которой можно рассчитать сопротивление тела, движущегося в жидкости.

Проблема изучения движения вязкой жидкости существенно осложняется еще одним обстоятельством — при больших значениях безразмерного параметра

$$\mathrm{Re} = \frac{v \cdot l}{\nu}, \tag{9}$$

называемого *числом Рейнольдса* (здесь v — характерная величина скорости, а l — характерный размер), движение становится турбулентным. Для описания турбулентных движений не существует полной системы уравнений, и потому в каждой конкретной задаче приходится делать дополнительные предположения, основанные на экспериментах.

Уравнение Гельмгольца. В заключение приведем одну форму уравнения движения вязкой жидкости, в которую явно входит завихренность. Эта форма будет нам нужна в следующих главах.

Применим к обеим частям уравнения Навье—Стокса операцию rot; мы получим уравнение

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{V}, \nabla)\boldsymbol{V} = \nu \Delta \boldsymbol{\omega}, \tag{10}$$

в котором, как всегда, $\omega = \operatorname{rot} V$. Далее еще раз воспользуемся формулой из векторного анализа

$$(V, \nabla)V = [\omega, V] + \operatorname{grad}\frac{v^2}{2}$$

($v = |V|$ — величина скорости), согласно которой

$$\operatorname{rot}(V, \nabla)V = \operatorname{rot}[\omega, V], \tag{11}$$

ибо rot от градиента гладкой функции равен нулю. Правую часть можно раскрыть по формуле двойного векторного произведения и правилу действия оператора ∇ на произведение:

$$[\nabla, [\omega, V]] = (V, \nabla)\omega + \omega(\nabla, V) - V(\nabla, \omega) - (\omega, \nabla)V.$$

Теперь учтем условие несжимаемости (1) и тождество $\operatorname{div}\operatorname{rot} \equiv 0$, тогда средние члены в последней формуле исчезнут и мы получим

$$\operatorname{rot}[\omega, V] = (V, \nabla)\omega - (\omega, \nabla)V.$$

Подставляя это в (11), а затем в (10), мы и придем к *уравнению Гельмгольца*

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + (V, \nabla)\omega = (\omega, \nabla)V + \nu\Delta\omega. \tag{12}$$

Отметим еще, что в плоском случае, где завихренность имеет лишь одну отличную от нуля компоненту ($\omega = \omega k$), первый член в правой части (12) исчезает и это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + u\frac{\partial\omega}{\partial x} + v\frac{\partial\omega}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right), \tag{13}$$

где u и v — компоненты вектора скорости.

§ 4. Размерностный подход

Во многих задачах механики можно получить полезную информацию, если использовать соображения, основанные на анализе размерностей величин, существенных для рассматриваемой задачи. Здесь мы кратко опишем, как это делается, отсылая за подробностями к книге Л. И. Седова [6].

Размерности. Пусть выбрана некоторая система основных величин $E_1, \ldots, E_n$, через которые выражаются остальные величины, рассматриваемые в той или иной теории, и для этих основных величин пусть выбраны единицы измерения. Пусть некоторая величина выражается через $E_1, \ldots, E_n$ так, что при изменении величины E_1 в λ_1 раз, $\ldots$, E_n в λ_n раз величина p изменяется в π раз, причем

$$\pi = \lambda_1^{\delta_1}, \ldots, \lambda_n^{\delta_n}, \tag{1}$$

где $\delta_1, \ldots, \delta_n$ — некоторые числа. Тогда говорят, что величина p в системе единиц $E_1, \ldots, E_n$ имеет *размерность* $E_1^{\delta_1}, \ldots, E_n^{\delta_n}$ и записывают это в виде

$$[p] = E_1^{\delta_1}, \ldots, E_n^{\delta_n}. \tag{2}$$

Так, в механике обычно пользуются системой единиц CGS, в которой за основные величины приняты длина L (в *см*), масса M (в *г*) и время T (в *сек*). В этой системе, например, скорость, ускорение, плотность, давление и энергия имеют размерности

$$[v] = \frac{L}{T}, \quad [w] = \frac{L}{T^2}, \quad [\rho] = \frac{M}{L^3},$$

$$[p] = \frac{M}{T^2 L}, \quad [E] = \frac{ML^2}{T^2}.$$

Функциональные связи между величинами, которые определяются в результате исследования математической модели явления или экспериментально, должны сохраняться при любом изменении масштабов единиц для основных величин. Это требование можно выразить еще и так: пусть размерная величина p является функцией других размерных величин $p_1, \ldots, p_m$:

$$p = f(p_1, \ldots, p_m); \tag{3}$$

тогда для этой функции должно выполняться соотношение

$$[p] = [f]. \tag{4}$$

Требование сохранения размерности, несмотря на его большую общность, дает повод к высказываниям о ха-

рактере зависимости f, которые в ряде задач могут оказаться весьма полезными.

π-теорема. Пусть среди размерных величин $p_1, \ldots, p_m$ первые k величин ($k \leqslant m$) имеют независимые размерности. Это означает, что размерность ни одной из этих k величин нельзя выразить в виде произведения размерностей других величин (из них же) в некоторых степенях. Число k величин с независимыми размерностями не может превышать числа n основных единиц. (Например, размерности скорости $\frac{L}{T}$, ускорения $\frac{L}{T^2}$ и давления $\frac{M}{LT^2}$ независимы, а размерности плотности $\frac{M}{L^3}$, скорости $\frac{L}{T}$ и давления $\frac{M}{LT^2}$ — зависимы.)

Пусть теперь k является наибольшим числом величин с независимыми размерностями в группе $p_1, \ldots, p_m$, так что размерности $p_{k+1}, \ldots, p_m$ можно выразить через $[p_1], \ldots, [p_k]$. Поэтому можно составить безразмерные комбинации

$$\pi_1 = \frac{p_{k+1}}{p_1^{\beta_1^{(1)}} \ldots p_k^{\beta_k^{(1)}}}, \quad \ldots, \quad \pi_{m-k} = \frac{p_m}{p_1^{\beta_1^{(m-k)}} \ldots p_k^{\beta_k^{(m-k)}}}. \tag{5}$$

Предположим, что величина p выражается через $p_1, \ldots, p_m$ по формуле (3) и, значит, можно составить безразмерную комбинацию

$$\pi = \frac{p}{p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}}. \tag{6}$$

Тогда *зависимость* (3) *равносильна следующей зависимости между безразмерными величинами*:

$$\pi = F(\pi_1, \ldots, \pi_{m-k}). \tag{7}$$

Это утверждение известно под названием π-теоремы. Его доказательство можно найти в книге Л. И. Седова [6]. Преимущество зависимости (7) перед (3) в меньшем числе независимых переменных: в (3) их m, а в (7) $m - k$. В ряде задач это преимущество оказывается решающим. В частности, если $k = m$, то соображениями, основанными на размерности,

величина p определяется с точностью до постоянного множителя:

$$p = Cp_1^{a_1} \dots p_m^{a_m}, \tag{8}$$

который находится или экспериментально, или в процессе решения соответствующей математической задачи.

Выбор k параметров с независимыми размерностями из m параметров, определяющих величину p, можно производить разными способами. При этом вид функции F в π-теореме, конечно, меняется, но число независимых переменных всегда снижается с m до $m - k$.

Автомодельность. В задачах механики искомые величины, как правило, являются функциями времени t, координат x, y, z и некоторых постоянных величин $a_1, \dots, a_m$, существенных для данной задачи,

$$p = f(t, x, y, z, a_1, \dots, a_m). \tag{9}$$

Число основных единиц, как мы говорили, в этих задачах равно 3.

Пусть в результате приведения зависимости (9) к безразмерному виду мы получаем, что безразмерная искомая величина зависит только от комбинаций

$$\frac{x}{bt^\beta}, \quad \frac{y}{bt^\beta}, \quad \frac{z}{bt^\beta}, \tag{10}$$

где b — постоянная, $[b] = LT^{-\beta}$, и еще от некоторых постоянных безразмерных комбинаций. Задачи, в которых это происходит, называются *автомодельными*.

В автомодельных задачах число независимых переменных снижается на 1: вместо x, y, z и t мы имеем три величины (10), и тем самым эти задачи упрощаются. Особенно существенное упрощение из-за автомодельности достигается в задачах, в которых искомая функция зависит от времени и только от одной пространственной координаты — здесь вместо уравнений с частными производными мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение.

В заключение приведем несколько примеров применения размерностного подхода.

Удар струи о плоскость. Пусть струя невязкой несжимаемой жидкости плотности ρ, которая в бесконечности имеет радиус r и скорость V, ударяет о плоскость,

наклоненную к оси струи под углом α (рис. 9). Требуется найти силу $\boldsymbol{F}$, с которой струя действует на плоскость. Давление вне струи мы считаем равным 0 и пренебрегаем силой тяжести. Так как жидкость невязкая, то $\boldsymbol{F}$ будет направлена перпендикулярно плоскости, и остается найти ее величину F. Эта величина определяется параметрами ρ, V, r и α, т. е. имеет вид

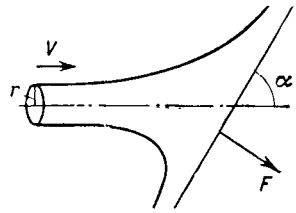


Рис. 9.

$$F = F(\rho, V, r, \alpha). \qquad (11)$$

Анализ размерностей позволяет конкретизировать вид этой зависимости. Действительно, $[F] = \frac{ML}{T^2}$, и комбинация $\rho V^2 r^2$ также имеет размерность силы, следовательно, $\frac{F}{\rho V^2 r^2}$ является безразмерной величиной. Так как размерности ρ, V и r^2 независимы, то на основании π-теоремы зависимость (11) можно заменить такой:

$$F = \rho V^2 r^2 f(\alpha). \qquad (12)$$

Вид функции f можно определить либо решая соответствующую задачу, либо опытным путем. Переход от зависимости (11) к (12) сильно сокращает число опытов, ибо теперь ρ, V и r можно считать постоянными и менять лишь угол α.

Сфера в вязкой жидкости. В несжимаемой вязкой жидкости с коэффициентом вязкости ν и плотностью ρ движется с постоянной скоростью V сфера радиуса r; требуется найти силу сопротивления F, действующую на сферу.

В этой задаче

$$F = F(\rho, V, \nu, r), \qquad (13)$$

но из размерностных соображений, аналогичных тем, которые проводились в предыдущей задаче, эту зависимость можно заменить другой:

$$F = \rho V^2 r^2 f(\mathrm{Re}), \qquad (14)$$

где $\mathrm{Re} = \frac{Vr}{\nu}$ — число Рейнольдса.

Определение вида функции f является важной и трудной задачей гидродинамики. В полном объеме она еще не решена, так что с теоретической точки зрения размерностный подход к успеху не привел. Но с точки зрения экспериментальных исследований достигнуто серьезное преимущество — вместо функции четырех переменных теперь нужно исследовать функцию одного переменного $f(\mathrm{Re})$.

Диффузия вихревой нити. Приведем, наконец, пример автомодельной задачи, которую благодаря размерностным соображениям удается решить полностью. Пусть в вязкой жидкости в момент времени $t=0$ имеется распределение скоростей, соответствующее прямолинейной вихревой нити; требуется найти распределение скоростей в следующие моменты.

Примем вихревую нить за ось x и введем цилиндрические координаты (x, r, θ); координаты вектора скорости в этой системе обозначим через V_x, V_r и V_θ. В начальный момент во всех плоскостях, перпендикулярных оси x, поле скоростей одинаково и имеет вид

$$V_r = 0, \quad V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad V_x = 0, \tag{15}$$

где Γ — некоторая постоянная, характеризующая интенсивность вихревой нити [1]). Из соображений симметрии ясно, что характер поля сохранится во все время движения: V_r и V_x останутся равными нулю, а V_θ будет зависеть от r и t.

Удобно вместо скорости рассмотреть завихренность поля, которая в этой задаче будет характеризоваться скалярной величиной $\omega(r, t)$ — скорость через нее выражается. В самом деле, по формуле Стокса, примененной к кругу радиуса r с центром на оси x, мы получаем

$$V_\theta = \frac{1}{r}\int_0^r \omega(\rho, t)\rho\, d\rho \tag{16}$$

(ρ — переменная интегрирования).

---

[1]) Это поле описывается плоским полем точечного вихря, о котором будет говориться в следующей главе (см. § 7).

Изменение завихренности описывается уравнением Гельмгольца (3) § 3, которое в нашем случае имеет вид [1])

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right), \tag{17}$$

и следующим начальным условием: при $t = 0$ функция $\omega(r, 0)$ равна 0 всюду, кроме точки $r = 0$, где она бесконечна, причем

$$2\pi \int_0^\infty \omega(r, 0) r \, dr = \Gamma \tag{18}$$

(так что $\omega(r, 0)$ является обобщенной функцией).

Перейдем к рассмотрению размерностных соображений. Из характера задачи ясно, что, кроме переменных r и t, завихренность зависит еще от двух параметров ν и Γ, так что

$$\omega = \omega(r, t, \nu, \Gamma). \tag{19}$$

Размерности величин, сюда входящих, таковы:

$$[\omega] = \frac{1}{T}, \quad [r] = L, \quad [t] = T,$$

$$[\nu] = \frac{L^2}{T}, \quad [\Gamma] = \frac{L^2}{T}.$$

Среди четырех величин r, t, ν и Γ имеется только две с независимыми размерностями, например t и ν. При таком выборе мы можем составить три безразмерные комбинации: ωt, $\frac{r}{\sqrt{\nu t}}$, $\frac{\Gamma}{\nu}$ и на основании π-теоремы заменить (19) зависимостью

$$\omega = \frac{1}{t} \Omega \left(\frac{r}{\sqrt{\nu t}}, \frac{\Gamma}{\nu} \right). \tag{20}$$

Мы видим, что задача является автомодельной, и уравнение с частными производными (17) в ней можно заменить обыкновенным дифференциальным уравнением.

---

[1]) Мы воспользовались выражением для оператора Лапласа в цилиндрических координатах.

Для этого мы вводим переменное $\xi = \frac{r}{\sqrt{\nu t}}$ и из (20) выражаем производные ω по времени и координате (зависимость от параметра $\frac{\Gamma}{\nu}$ мы для простоты не пишем):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{1}{t^2}\left[\Omega(\xi) + \frac{\xi}{2}\Omega'(\xi)\right],$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{r}{\nu t^2 \xi}\Omega'(\xi), \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} = \frac{1}{\nu t^2}\Omega''(\xi).$$

Подставляя это в (17), получаем для функции Ω обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\Omega'' + \left(\frac{1}{\xi} + \frac{\xi}{2}\right)\Omega' + \Omega = 0. \tag{21}$$

Нетрудно видеть, что соотношение (18) остается справедливым в любой момент времени t (для этого достаточно проинтегрировать (17) по всей плоскости (r, t), предполагая, что ω вместе с производными достаточно быстро убывает на бесконечности). В автомодельных переменных это соотношение принимает вид

$$2\pi \int_0^\infty \Omega(\xi)\,\xi\,d\xi = \frac{\Gamma}{\nu}. \tag{22}$$

Решением уравнения (21), удовлетворяющим условию (22), является

$$\Omega = \frac{\Gamma}{4\pi\nu} e^{-\frac{\xi^2}{4}},$$

и, следовательно, решением исходной задачи является

$$\omega = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}. \tag{23}$$

Так происходит изменение (диффузия) завихренности в нашей задаче. По формуле (16) можно найти и закон изменения скоростей

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right). \tag{24}$$

Задача решена полностью.

Литература

1. Л. И. Седов, Механика сплошной среды, тт. 1, 2, «Наука», М., 1970.
2. В. С. Владимиров, Уравнения математической функции, изд. 2-е, «Наука», М., 1971.
3. Р. Курант, Уравнения с частными производными, «Мир», М., 1964.
4. Дж. Серрин, Математические основы классической механики жидкости, ИЛ, М., 1963.
5. Л. Берс, Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, ИЛ, М., 1961.
6. Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике, изд. 7-е, М., 1972.

Глава II

ОСНОВНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

Здесь мы введем понятия, на которых строится математическое описание плоских движений идеальной жидкости или идеального газа. Они относятся к теории аналитических и обобщенных аналитических функций.

§ 5. Комплексные числа и их обобщения

Плоские движения особенно просты для математического описания потому, что плоские векторы допускают хорошую алгебраизацию. Дело в том, что действия над векторами делятся на две группы. Первую группу составляют действия сложения и умножения на число, которые определяются покоординатно и не зависят от размерности векторов. Так, суммой двух n-мерных векторов $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ называется вектор

$$x+y=(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n),$$

а произведение вектора $x=(x_1, \ldots, x_n)$ на число (скаляр) λ называется вектор

$$\lambda x=(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Вторую группу составляет действие умножения векторов. Рассматриваемые в векторной алгебре скалярное и векторное умножения с алгебраической точки зрения неудовлетворительны, потому что первое из них выводит из класса векторов (скалярное произведение двух векторов $(x, y)=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$ — скаляр, а не вектор), а второе не допускает обратного действия (деление на вектор не определено).

Плоские векторы. Случай двумерных (плоских) векторов составляет приятное исключение. Для таких векторов можно определить умножение, полностью сохраняющее свойства этого действия. Проанализируем различные возможности определения произведения двух плоских векторов $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$. Пользуясь действиями первой группы, мы можем представить эти векторы как суммы

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2,$$

где $x_k = x_k \cdot 1$ — вектор, направленный по оси x, а iy_k — вектор, направленный по оси y (здесь $k = 1, 2$, символами 1 и i обозначены единичные векторы осей x и y).

Мы будем вводить умножение так, чтобы соблюдался распределительный закон (закон раскрытия скобок) и переместительный закон, поэтому должно выполняться соотношение

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) + i^2 y_1 y_2.$$

Умножение не должно выводить из рассматриваемого класса плоских векторов, поэтому $i^2 = i \cdot i$ нужно считать равным какому-либо вектору, пусть

$$i^2 = \alpha + i\beta.$$

Таким образом, по определению мы полагаем

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 + \alpha y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1 + \beta y_1 y_2). \qquad (1)$$

Легко видеть, что при любых α и β так определенное умножение удовлетворяет переместительному, сочетательному и распределительному закону и что при $y_2 = 0$ оно совпадает с умножением вектора z_1 на число $z_2 = x_2$, а при $y_1 = y_2 = 0$ — с обычным умножением действительных чисел $(z_1 z_2 = x_1 x_2)$.

Остается выяснить вопрос о выполнимости обратного действия — деления, для чего, как известно из алгебры, достаточно существования у каждого вектора $a + ib \neq 0$ обратного к нему вектора $z = x + iy$ такого, что $(a + ib)(x + iy) = 1$. Согласно (1) последнее равенство переписывается в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} ax + \alpha by &= 1, \\ bx + (a + \beta b) y &= 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

определитель которой $\Delta = a^2 + ab\beta - \alpha b^2 = \left(a + \frac{\beta}{2} b\right)^2 - \left(\alpha + \frac{\beta^2}{4}\right) b^2$.

Обозначим

$$\varkappa = \alpha + \frac{\beta^2}{4}; \qquad (3)$$

мы видим, что плоскость (α, β) параболой $\varkappa = 0$, т. е. $\alpha = -\frac{\beta^2}{4}$ (рис. 10), делится на три части. В первой из них (I), где $\varkappa < 0$, определитель Δ представляет собой сумму квадратов и обращается в нуль лишь при $a = b = 0$. В этой части, следовательно, допустимо деление на все векторы, отличные от нуля. Вторую часть (II) составляют точки параболы $\varkappa = 0$, для них $\Delta = \left(a + \frac{\beta}{2} b\right)^2$ обращается в нуль в точках (a, b) прямой $a + \frac{\beta}{2} b = 0$, которая проходит через начало координат и параллельна касательной к параболе в фиксированной точке (α, β). В третьей части (III), где $\varkappa > 0$, определитель $\Delta = \left(a + \frac{\beta}{2} b\right)^2 - (\sqrt{\varkappa}\, b)^2$ обращается в нуль на двух прямых, также проходящих через начало: $a + \left(\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\varkappa}\right) b = 0$.

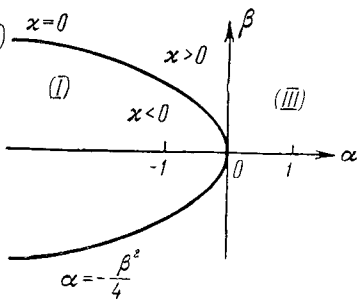


Рис. 10.

Если определитель $\Delta = 0$, то система (2) разрешима относительно x и y не при любых a и b, а соответствующая однородная система $ax + \alpha by = 0$, $bx + (a + \beta b) y = 0$ имеет ненулевые решения. Последнее означает, что существуют *делители нуля* — отличные от нуля векторы $a + ib$ и $x + iy$, произведение которых равно 0.

Три типа комплексных чисел. Таким образом, если мы определим произведение двух векторов по формуле (1), то в зависимости от расположения точки $i^2 = \alpha + i\beta$ на плоскости мы получим три типа алгебраических систем.

(I) i^2 лежит внутри параболы ($\varkappa < 0$). Система образует алгебраическое поле, обратный элемент существует у любого элемента, отличного от нуля, и следовательно, допустимо деление на любой отличный от нуля вектор. Такие системы векторов мы будем называть *эллиптическими комплексными числами*. Простейшей из них является обычная система комплексных чисел, для которой $i^2 = -1$ (т. е. $\alpha = -1$, $\beta = 0$) и которую мы будем называть *канонической*. Можно показать, что любая эллиптическая система алгебраически изоморфна канонической системе (т. е. между этими системами существует взаимно однозначное соответствие, которое сумму векторов переводит в сумму, а произведение — в произведение).

(II) i^2 лежит на параболе $\varkappa = 0$. Такие системы мы будем называть *параболическими комплексными числами*. В каждой такой системе есть делители нуля, которые располагаются на прямой $x + \frac{\beta}{2} y = 0$; деление на остальные числа возможно. Параболические системы комплексных чисел изоморфны *канонической* системе, для которой $i^2 = 0$ (т. е. $\alpha = \beta = 0$) и делители нуля располагаются на оси y.

(III) i^2 лежит вне параболы ($\varkappa > 0$), системы называются *гиперболическими комплексными числами*. В каждой из них есть делители нуля, располагающиеся на паре прямых $x + \left(\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\varkappa}\right) y = 0$, деление на остальные числа возможно. Гиперболические системы изоморфны *канонической* системе, для которой $i^2 = 1$ (т. е. $\alpha = 1$, $\beta = 0$) и делители нуля располагаются на биссектрисах координатных осей $y = \pm x$.

Модуль и аргумент. Начнем с обычной (т. е. простейшей эллиптической) системы комплексных чисел. Наряду с представлением $z = x + iy$ комплексного числа в декартовых координатах мы можем рассматривать его представление в полярных координатах

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi). \tag{4}$$

Число $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа z, а угол φ, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, — его *аргументом*. Модуль

определяется однозначно (мы рассматриваем неотрицательные значения корня), а аргумент — лишь с точностью до слагаемого, которое представляет собой целое кратное 2π (число $z=0$ вовсе не имеет аргумента). Стандартные обозначения для этих величин таковы: модуль числа z обозначается символом $|z|$, а аргумент — символом $\operatorname{Arg} z$; символом $\arg z$ обозначается какое-либо одно из значений $\operatorname{Arg} z$, так что $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Полярные координаты комплексного числа удобны для выполнения действий умножения и деления. Нетрудно показать, что при умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \qquad (5)$$

аналогично

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \qquad (6)$$

(мы считаем, что z_1 и z_2 не равны нулю).

Число $\bar{z} = x - iy$, у которого модуль равен $|z|$, а аргумент равен $-\arg z$, называется *сопряженным* к комплексному числу $z = x + iy$. Очевидно, $z\bar{z} = |z|^2$.

Понятие сопряженности, а также модуля и аргумента, можно распространить на обобщенные системы комплексных чисел. Именно, условимся в общем случае, когда произведение определяется формулой (1), называть *сопряженным* к комплексному числу $z = x + iy$ число $\bar{z} = x + \beta y - iy$. Тогда произведение

$$z\bar{z} = x^2 + \beta xy - \alpha y^2 = \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 - \varkappa y^2 \qquad (7)$$

всегда является действительным числом, а делители нуля определяются условием $z\bar{z} = 0$.

Чтобы оправдать принятые выше названия обобщенных комплексных систем (в дальнейшем эти названия получат и другое обоснование), заметим, что геометрическим местом точек z, для которых $z\bar{z} = 1$, для эллиптических систем является эллипс (в каноническом случае — окружность $x^2 + y^2 = 1$), для гиперболических — гипербола (в каноническом случае равнобочная:

$x^2 - y^2 = 1$), а для параболических — пара параллельных (в каноническом случае слившихся) прямых.

В дальнейшем основную роль будут играть эллиптические и гиперболические системы комплексных чисел; случай параболических систем является промежуточным. Для простоты письма мы будем рассматривать только канонические системы, для которых соответственно $i^2 = -1$ и $i^2 = 1$.

Покажем, как вводится модуль и аргумент для гиперболических комплексных чисел. Пусть $|x| > |y|$; тогда мы полагаем $r = |z| = \sqrt{z\bar{z}}$, выбираем $\varphi = \arg z$ так, что $\operatorname{th}\varphi = \frac{y}{x}$ (значение φ определяется однозначно), и получаем вместо (4)

$$z = r(\operatorname{ch}\varphi + i\operatorname{sh}\varphi). \tag{8}$$

Нетрудно проверить, что при умножении гиперболических комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. При $|x| = |y|$, т. е. $z\bar{z} = 0$, модуль считается равным нулю, а аргумент не определяется; при $|x| < |y|$ можно положить $|z| = \sqrt{-z\bar{z}}$, а $\arg\varphi = \operatorname{arth}\frac{x}{y}$, тогда вместо (8) будем иметь $z = r(\operatorname{sh}\varphi + i\operatorname{ch}\varphi)$.

Покажем еще, как в канонических системах выполнить деление, если пользоваться декартовыми координатами:

Эллиптическая система	Гиперболическая система
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{x_2^2 - y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 - y_2^2}$

(9)

(мы умножаем числитель и знаменатель дроби на $\bar{z}_2$; в эллиптическом случае предполагается, что $z_2 \neq 0$, а в гиперболическом, — что z_2 не является делителем нуля).

Многомерный случай. Возможности обобщения алгебры векторов на размерности выше двух чрезвычайно ограничены. В алгебре есть теорема Фробениуса, согласно которой система эллиптических комплексных чисел является единственным (с точностью до изоморфизма) расширением поля действительных чисел с

сохранением всех законов сложения и умножения. Если отказаться от переместительного закона, то появится еще одна возможность — четырехмерные векторы (система кватернионов), а если пожертвовать и сочетательным, то еще одна — восьмимерные векторы (октавы Кели). Других возможностей построить умножение векторов, хорошо сочетающееся со сложением, нет. В частности, нельзя построить и хорошей алгебраической системы для трехмерных векторов, и это обстоятельство сильно затрудняет решение пространственных задач гидродинамики.

§ 6. Дифференцирование комплексных функций

Производная. Пусть в области D плоскости (x, y) задана пара дифференцируемых функций двух переменных:

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y); \tag{1}$$

мы будем рассматривать ее как функцию $w = f(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, принимающую комплексные значения $w = u + iv$.

Для таких функций естественно ввести понятие *производной* в точке $z \in D$ как предела

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \tag{2}$$

где комплексное число $h = h_1 + ih_2$ стремится к нулю (т. е. $h_1 \to 0$ и $h_2 \to 0$) произвольным образом, лишь бы только $h \neq 0$ в эллиптическом и $h\bar{h} \neq 0$ в гиперболическом случае.

Легко видеть, что дифференцируемости функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ недостаточно для существования производной $f'(z)$. В самом деле, дифференцируемость функций (1) означает возможность выделения из их приращений главной линейной части

$$\begin{aligned} u(z+h) - u(z) &= u_x h_1 + u_y h_2 + \alpha, \\ v(z+h) - v(z) &= v_x h_1 + v_y h_2 + \beta, \end{aligned} \tag{3}$$

где $u_x, \ldots, v_y$ — частные производные в точке $z = x + iy$, а α и β — малые высшего порядка относительно $\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$. Если подставить эти выражения в (2), то

будет видно, что в общем случае предел $\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$ зависит от способа приближения h_1 и h_2 к 0, т. е. не существует в смысле принятого нами определения (в котором требуется существование предела при произвольном стремлении h к 0).

Мы придем к дополнительным условиям, необходимым для существования $f'(z)$, если потребуем совпадения пределов при двух различных способах стремления h к нулю: а) в направлении оси x, когда $h = h_1$, $h_2 = 0$ и б) в направлении оси y, когда $h = h_2 i$, $h_1 = 0$. Сравнивая эти пределы, мы получим

$$f'(z) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{u_x h_1 + \alpha + i(v_x h_1 + \beta)}{h_1} = \lim_{h_2 \to 0} \frac{u_y h_2 + \alpha + i(v_y h_2 + \beta)}{i h_2},$$

т. е. $u_x + i v_x = \frac{1}{i}(u_y + i v_y)$. В эллиптическом случае, когда $\frac{1}{i} = -i$, это условие приводит к уравнениям

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x, \tag{4}$$

а в гиперболическом, когда $\frac{1}{i} = i$, — к уравнениям

$$u_x = v_y, \quad u_y = v_x. \tag{5}$$

Легко проверить, что эти соотношения и достаточны для существования $f'(z)$ при условии дифференцируемости функций u и v, т. е. что при их выполнении предел (2) существует независимо от способа приближения h к 0.

Аналитичность. Таким образом, комплексная дифференцируемость (т. е. существование производной f') оказывается более ограничительным требованием, чем обычная дифференцируемость функций u и v. Мы скоро увидим, однако, что дополнительные ограничения, связанные с комплексной дифференцируемостью, имеют естественный геометрический и физический смысл. Именно эти ограничения и приводят к созданию аппарата, хорошо описывающего плоские течения жидкости.

Функции, имеющие производную $f'(z)$ в каждой точке области D, называются *аналитическими* в этой области, если мы имеем дело с обычными комплексными числами; в случае гиперболической системы мы будем

называть их *гиперболически аналитическими*, или, короче, *h-аналитическими*. Уравнения (4) и (5) называют соответственно условиями аналитичности и h-аналитичности. Первые из них называют еще *условиями Коши — Римана*.

Примеры. Хотя условия аналитичности и h-аналитичности довольно ограничительны (например, такая простая функция, как $f(z) = x + 2iy$, не является ни аналитической, ни h-аналитической), им все же удовлетворяет весьма большой запас функций. Приведем примеры таких функций.

1) Полиномы

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, \tag{6}$$

где a_k — произвольные комплексные постоянные, а $z^k = \underbrace{z \ldots z}_{k \text{ раз}}$. Здесь произведения могут пониматься как в эллиптическом, так и в гиперболическом смысле, например,

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

(в обычном смысле) или

$$z^2 = x^2 + y^2 + 2ixy$$

(в гиперболическом смысле). В обеих случаях производная

$$P'(z) = a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1} \tag{7}$$

существует для всех комплексных z.

2) Рациональные дроби

$$R(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n} \tag{8}$$

аналитичны всюду, где знаменатель отличен от нуля (и h-аналитичны, где знаменатель не является делителем нуля). Легко видеть, что производная вычисляется по той же формуле, что и в действительном анализе.

3) Показательная функция. По определению в эллиптическом случае полагаем

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \tag{9}$$

а в гиперболическом

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y), \tag{10}$$

Прямой подсчет показывает, что эти функции удовлетворяют условиям (4) или соответственно (5) во всей плоскости z и что для них сохраняется обычная формула дифференцирования $(e^z)' = e^z$.

4) Логарифм определяется как функция, обратная показательной. В эллиптическом случае, полагая $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ и $w = u + iv$, мы находим из соотношения $e^w = z$ по формуле (9): $u = \log r$, $v = \varphi$. Значение φ определено лишь с точностью до целого кратного 2π, поэтому и логарифм оказывается многозначным:

$$w = \operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z. \tag{11}$$

Выделяя одно какое-либо значение аргумента, мы выделяем и одно значение логарифма:

$$\log z = \log|z| + i \arg z. \tag{12}$$

Если в окрестности точки $z_0 \neq 0$ выделить какую-нибудь однозначную и непрерывную ветвь аргумента (обозначим ее через $\arg z$), то соответствующая однозначная ветвь логарифма $\log z = \log|z| + i \arg z$ окажется аналитической функцией; в этом смысле $\operatorname{Log} z$ называют *многозначной аналитической функцией*. Заметим, что производная логарифма не зависит от выбора ветви и всегда равна $\frac{1}{z}$; в этом смысле можно говорить, что (многозначный) логарифм имеет (однозначную) производную:

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{Log} z) = \frac{1}{z}. \tag{13}$$

В гиперболическом случае, ограничиваясь числами $z = x + iy$ с $|x| > |y|$, мы получим, что логарифм определяется той же формулой (12), в которой теперь $|z| = \sqrt{x^2 - y^2}$, а $\arg z = \operatorname{arth}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\log\frac{x+y}{x-y}$. Это — однозначная h-аналитическая функция с производной, равной $\frac{1}{z}$ (деление — гиперболическое).

5) Тригонометрические функции в эллиптическом случае просто выражаются через показательную, например,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

(для комплексных z мы принимаем эти формулы за определение). Они также аналитичны во всей плоскости и для них сохраняются обычные формулы дифференцирования. В гиперболическом случае аналогично выражаются $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$.

Особые точки. И в теории, и в приложениях весьма важную роль играют точки, в которых нарушается аналитичность (или h-аналитичность) функций; такие точки называются *особыми*. Приведем примеры изолированных особых точек аналитических функций — это простейшие особые точки, которые обладают окрестностями, свободными от других особенностей функции. Такие точки бывают двух родов: однозначного и многозначного характера.

Особые точки однозначного характера делятся на *полюсы*, при приближении к которым функция стремится к бесконечности, и *существенные особенности*, при приближении к которым функция не имеет ни конечного, ни бесконечного предела. Примером полюса служит точка $z = 0$ для любой функции $\frac{1}{z^n}$, где n — целое положительное число, примером существенной особенности — та же точка для функции $e^{\frac{1}{z}}$ (при $z \to 0$ справа по действительной оси эта функция стремится к бесконечности, а слева — к нулю).

Особые точки многозначного характера называются еще *точками ветвления*. Они характеризуются тем, что в их окрестности нельзя выделить однозначных и непрерывных ветвей рассматриваемой функции. Примером такой особенности является точка $z = 0$ для функций $w = \sqrt[n]{z}$, где n — целое число, большее 1 (точка ветвления конечного порядка), и для функции $w = \operatorname{Log} z$ (точка ветвления бесконечного порядка, или логарифмическая точка ветвления). При полном однократном обходе окружности $|z| = r$ аргумент φ числа

$z = re^{i\varphi}$ меняется на 2π, так что $\arg \sqrt[n]{z} = \frac{\varphi}{n}$ изменится на $\frac{2\pi}{n}$ и функция $\sqrt[n]{z}$ придет к другому своему значению; лишь n-кратный обход этой окружности приведет к начальному значению функции. Для логарифма однократный обход такой окружности меняет на 2π мнимую часть этой функции, а каждый новый обход в том же направлении будет снова добавлять к функции значение $2\pi i$ — двигаясь по окружности в одну сторону, мы никогда не вернемся к начальному значению.

§ 7. Физический и геометрический смысл аналитичности

Комплексный потенциал. Пусть в некоторой плоской области имеется установившееся течение идеальной несжимаемой жидкости. Как отмечалось в первой главе, условия отсутствия источников и вихрей в этой области обеспечивают существование в ней двух функций — потенциала скоростей $\varphi(x, y)$ и функции тока $\psi(x, y)$. Линии уровня $\psi(x, y) = \text{const}$ совпадают с линиями тока (траекториями движущихся частиц), а линии $\varphi(x, y) = \text{const}$ ортогональны к ним (рис. 11). Через производные этих функций выражаются координаты вектора скорости:

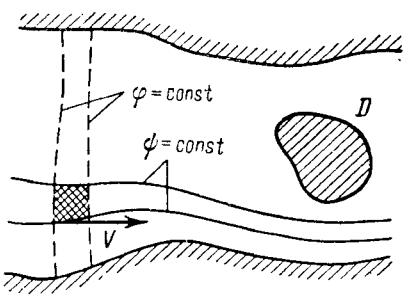


Рис. 11.

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{1}$$

Мы видим, что эти соотношения являются условиями аналитичности в области D функции комплексного переменного

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \tag{2}$$

которая называется *комплексным потенциалом* течения. Верно и обратное: любую аналитическую в области D функцию $f(z)$ можно трактовать как комплексный потенциал некоторого установившегося течения идеальной

несжимаемой жидкости без источников и вихрей. Таким образом, условия аналитичности имеют прямую гидродинамическую интерпретацию — они эквивалентны указанным условиям на течения.

Зная комплексный потенциал течения, мы можем найти все связанные с этим течением величины. В частности, вектор скорости в произвольной точке z области течения выражается комплексным числом

$$\boldsymbol{V} = V_x + iV_y = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \psi}{\partial x} = \overline{f'(z)}, \qquad (3)$$

сопряженным к производной комплексного потенциала.

Производная f' аналитической функции f также является аналитической функцией (см. следующий параграф), а комплексно сопряженная к аналитической функция называется *антианалитической* (такие функции, очевидно, удовлетворяют условиям Коши — Римана с измененными знаками). Формула (3) показывает, следовательно, что поля скоростей течений, удовлетворяющие принятым выше условиям, описываются антианалитическими функциями.

В дальнейшем мы увидим, что и граничные условия, которые возникают в задачах гидродинамики, для рассматриваемых течений естественно выражаются через комплексный потенциал. Так как теория аналитических функций очень хорошо развита, то мы получаем мощный математический аппарат для решения задач гидродинамики таких течений.

Физический смысл особых точек. Простую гидродинамическую интерпретацию допускают также изолированные особые точки аналитических функций.

1) Источник. Рассмотрим плоское поле скоростей, инициированное единственным точечным источником [1]), который расположен в начале координат $z = 0$. Из соображений симметрии ясно, что вектор скорости имеет вид $\boldsymbol{V} = \lambda(|z|)z$, где $\lambda > 0$. Поток этого вектора через любую окружность $|z| = r$ равен

$$N = \int\limits_{|z|=r} V_n\, ds = \lambda(r)\, r \cdot 2\pi r,$$

[1]) Точечный источник нужно представлять себе как точку, из которой в окружающее пространство постоянно подается жидкость и в окрестности которой других источников нет.

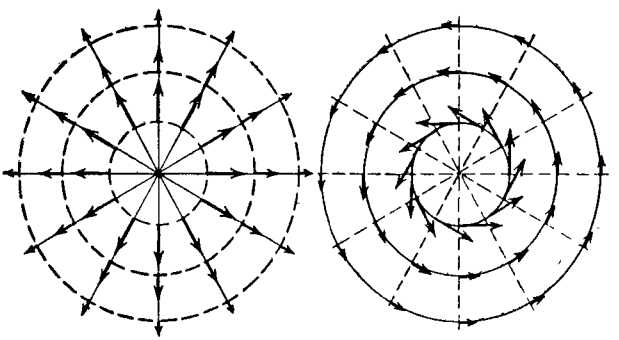
откуда $\lambda(r) = \frac{N}{2\pi r^2}$, причем N — постоянная величина, она характеризует обильность источника. Таким образом, вектор скорости течения

$$\boldsymbol{V} = \frac{Nz}{2\pi |z^2|} = \frac{N}{2\pi \bar{z}}, \tag{4}$$

а его комплексный потенциал (он находится из формулы (3) интегрированием, несущественное постоянное слагаемое мы отбрасываем)

$$f(z) = \frac{N}{2\pi} \operatorname{Log} z. \tag{5}$$

На рис. 12, *а* приведены линии тока (сплошные) и линии равного потенциала (пунктирные) этого течения.



а) *б)*

Рис. 12.

2) Вихрь. Точно так же находятся вектор скорости и комплексный потенциал плоского течения, инициированного единственным точечным вихрем, который расположен в начале координат:

$$V = \frac{\Gamma i}{2\pi \bar{z}}, \quad f(z) = \frac{\Gamma i}{2\pi} \operatorname{Log} z. \tag{6}$$

Постоянная Γ характеризует интенсивность вихря. На рис. 12, *б* приведены линии тока и равного потенциала течения.

Можно рассматривать также точечный вихреисточник, который представляет собой объединение в одной точке и источника, и вихря. Если вихреисточник расположен в начале координат, а его интенсивность характеризуется комплексным числом $c = N + i\Gamma$, то вектор скорости и комплексный потенциал течения, им инициированного, получится из (4), (5) и (6) сложением:

$$\boldsymbol{V} = \frac{c}{2\pi\bar{z}}, \qquad f(z) = \frac{c}{2\pi}\operatorname{Log} z. \tag{7}$$

Мы видим, таким образом, что логарифмическая точка ветвления комплексного потенциала физически интерпретируется как вихреисточник, расположенный в этой точке.

3) Диполь. Рассмотрим совокупность источника и стока обильностей $\pm N$, расположенных соответственно в точках $z_1 = -h$ и $z_2 = 0$. Комплексный потенциал течения получается из формулы (5) и ее обобщения, когда источник располагается в точке $z = -h$, сложением:



Рис. 13.

$$f_h(z) = \frac{N}{2\pi}\operatorname{Log}(z+h) - \frac{N}{2\pi}\operatorname{Log} z.$$

Пусть теперь $h \to 0$ и одновременно $N \to \infty$, так что Nh стремится к конечной величине p. Предельное образование, которое при этом получается (слияние источника и стока возрастающей интенсивности), называется точечным диполем с моментом p.

Комплексный потенциал течения, инициированного диполем, находится из предыдущей формулы предельным переходом:

$$f(z) = \lim_{h\to 0} \frac{Nh}{2\pi} \frac{\operatorname{Log}(z+h) - \operatorname{Log} z}{h} = \frac{p}{2\pi}(\operatorname{Log} z)' = \frac{p}{2\pi z}. \tag{8}$$

На рис. 13 изображены линии тока и линии равного потенциала поля точечного диполя.

Можно рассматривать также точечные особенности, которые получаются слиянием диполей с возрастающими моментами. Так, из предыдущей формулы мы получаем для слияния диполей, расположенных в точках $z_1 = -h$, $z_2 = 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{q}{2\pi h}\left(\frac{1}{z+h} - \frac{1}{z}\right) = -\frac{q}{2\pi z^2},$$

слияние таких особенностей дает степень z^3 в знаменателе и т. д. Особенности такого типа называются точечными мультиполями.

Мы видим, что полюсы комплексного потенциала интерпретируются как точечные мультиполи.

Конформные отображения. Выясним теперь геометрический смысл условий аналитичности функции $f = u + iv$. Как мы уже говорили, из них вытекает ортогональность линий уровня u и v, что выражается условием ортогональности градиентов этих функций:

$$(\nabla u, \nabla v) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{9}$$

Из тех же условий вытекает равенство модулей этих градиентов:

$$|\nabla u|^2 = |\nabla v|^2 \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2. \tag{10}$$

Чтобы понять геометрический смысл последнего условия, будем рассматривать функцию (2) как отображение f области D на некоторое множество D^* плоскости $w = u + iv$. Величина $|\nabla u|$ означает тогда растяжение в направлении, ортогональном к линии уровня $u(x, y) = \text{const}$, т. е. растяжение линии $v(x, y) = \text{const}$, и аналогично $|\nabla v|$ обозначает растяжение линии $u(x, y) = \text{const}$. Условие (10) выражает, следовательно, равенство этих растяжений. Таким образом, (9) и (10) вместе показывают, что при отображении f, осуществляемом аналитической функцией, бесконечно малые квадраты, образованные линиями $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, преобразуются также в бесконечно малые квадраты (рис. 14).

Это высказывание можно уточнить, если вместо отображения f рассмотреть его главную линейную часть

(дифференциал) в точке z_0, т. е. линейное преобразование

$$\begin{aligned} u - u_0 &= u_x(x - x_0) + u_y(y - y_0), \\ v - v_0 &= v_x(x - x_0) + v_y(y - y_0), \end{aligned} \tag{11}$$

(здесь $u_0 + iv_0 = f(z_0)$, а частные производные $u_x, \ldots, v_y$ берутся в точке z_0). В общем случае, когда функции u и v лишь дифференцируемы в смысле действительного

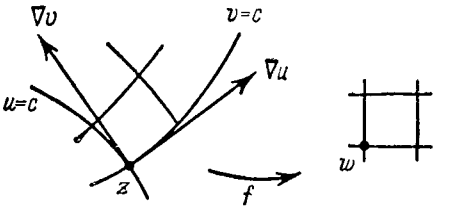


Рис. 14.

анализа, это преобразование (если оно не вырождено, т. е. его определитель

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x \tag{12}$$

отличен от нуля в точке z_0) переводит квадраты в параллелограммы. Если же f — аналитическая функция, то, как видно из (9) и (10), оно преобразует квадраты снова в квадраты, т. е. сводится к повороту с растяжением.

Из условия (9) вытекает, что $\frac{u_x}{v_y} = -\frac{u_y}{v_x}$; обозначая это отношение через k, мы найдем из (10), что $k^2 = 1$. При $k = 1$ мы получим $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, т. е. условия аналитичности; если же $k = -1$, то получим $u_x = -v_y$, $u_y = v_x$, т. е. условия антианалитичности (аналитической будет функция $\bar{f} = u - iv$, сопряженная с f), в этом случае якобиан отображения $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = -(u_x^2 + u_y^2)$ отрицателен. Таким образом, условие аналитичности при $f'(z_0) \neq 0$ в точности сводится к условиям положительности якобиана и сохранения бесконечно малых квадратов.

Взаимно однозначные отображения, обладающие этими свойствами, называются *конформными*. Они со-

храняют форму бесконечно малых фигур, т. е. их дифференциал в каждой точке области сводится к подобному преобразованию (растяжению с поворотом). Мы видим, что условие аналитичности геометрически означает конформность отображения f во всех точках, где $f'(z) \neq 0$. В тех же точках, где $f'(z) = 0$, дифференциал отображения f вырождается и конформность нарушается.

Нетрудно видеть, что конформность отображения f можно выразить также условием, что его дифференциал (11) сохраняет углы или сохраняет окружности — каждое из этих условий приводит к тому, что (11) сводится к повороту с растяжением.

Квазиконформные отображения. Имея в виду применения к более общим задачам о течениях сжимаемой жидкости, которые будут рассмотрены в дальнейших главах, мы приведем здесь обобщение понятия конформности. Это обобщение получится, если вместо условия сохранения бесконечно малых окружностей мы рассмотрим условие преобразования одного семейства подобных и подобно расположенных эллипсов в другое такое же семейство.

Запишем такое семейство эллипсов с центром в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ уравнением

$$\gamma(x - x_0)^2 - 2\beta(x - x_0)(y - y_0) + \alpha(y - y_0)^2 = ph^2, \quad (13)$$

где h — малая полуось эллипса, $p \geqslant 1$ — отношение полуосей, а коэффициенты выражаются через p и угол θ наклона большой полуоси эллипсов к оси x по формулам

$$\alpha = p\cos^2\theta + \frac{1}{p}\sin^2\theta,$$

$$\beta = \left(p - \frac{1}{p}\right)\sin\theta\cos\theta, \quad \alpha\gamma - \beta^2 = 1,$$

$$\gamma = p\sin^2\theta + \frac{1}{p}\cos^2\theta$$

(рис. 15). Пусть в плоскости w задано аналогичное семейство с уравнением

$$\gamma_1(u - u_0)^2 - 2\beta_1(u - u_0)(v - v_0) + \alpha_1(v - v_0)^2 = p_1h_1^2. \quad (14)$$

Как показывают выкладки, условие того, что дифференциал отображения $f = u + iv$ преобразует эллипсы семейства (13) в эллипсы семейства (14), записывается

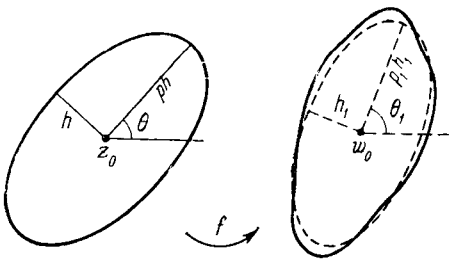


Рис. 15.

в виде системы двух уравнений, связывающих частные производные отображения:

$$\begin{aligned} v_y &= au_x + bu_y, \\ -v_x &= du_x + cu_y, \end{aligned} \tag{15}$$

коэффициенты которой выражаются через коэффициенты уравнений эллипсов по формулам

$$a = \frac{\alpha}{\alpha_1}, \quad b = \frac{\beta + \beta_1}{\alpha_1}, \quad d = \frac{\beta - \beta_1}{\alpha_1}, \quad c = \frac{\gamma}{\alpha_1}. \tag{16}$$

Обратно, любую систему вида (15), для которой

$$A = ac - \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 > 0, \tag{17}$$

можно рассматривать как условие преобразования друг в друга семейств эллипсов, коэффициенты уравнений которых определяются через коэффициенты системы по формулам

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a}{\sqrt{A}}, & \beta &= \frac{b+d}{2\sqrt{A}}, & \gamma &= \frac{c}{\sqrt{A}}, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{\sqrt{A}}, & \beta_1 &= \frac{b-d}{2\sqrt{A}}, & \gamma_1 &= \frac{ac-bd}{\sqrt{A}}. \end{aligned} \tag{18}$$

В частности, если оба семейства эллипсов являются окружностями, т. е. $\alpha = \alpha_1 = \gamma = \gamma_1 = 1$, а $\beta = \beta_1 = 0$, то будем иметь $a = c = 1$, $b = d = 0$, и система (15) превратится в условия конформности. Поэтому отобра-

жения, осуществляемые решениями систем вида (15), называются *квазиконформными отображениями.* Задавая различным образом коэффициенты системы (15), мы будем получать различные классы квазиконформных отображений. В наиболее простом случае коэффициенты задаются как известные функции точки $z = x + iy$ (линейные системы). Для приложений особенно интересен случай, когда коэффициенты являются заданными функциями от $|\nabla u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$, — о нем мы будем говорить в следующей главе.

Интерпретация *h*-аналитичности. Система

$$u_x = v_y, \quad u_y = v_x, \tag{19}$$

выражающая условия h-аналитичности, не принадлежит только что рассмотренному типу систем, ибо для нее не выполняется неравенство (17). Можно было бы интерпретировать h-аналитичность как конформность, только не в обычной евклидовой, а в некоторой специальной «гиперболической» метрике. Однако мы не будем этого делать, а ограничимся указанием других связей.

Если в плоскости (x, y) ввести новые оси координат (ξ, η), повернутые относительно старых на 45°, т. е. положить $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, то в новых переменных система (19) перепишется так:

$$u_\xi = v_\xi, \quad u_\eta = -v_\eta.$$

Отсюда видно, что $u - v$ зависит лишь от η, а $u + v$ — лишь от ξ. Вводя функции, выражающие эти зависимости, и возвращаясь к старым переменным x и y, мы найдем общее представление h-аналитических функций:

$$u = \varphi(x + y) + \psi(x - y), \quad v = \varphi(x + y) - \psi(x - y), \tag{20}$$

где φ и ψ — произвольные функции.

Это представление обнаруживает простоту устройства h-аналитических функций и показывает, что их теория вполне элементарна. Она далеко не так глубока, как теория обычных аналитических функций. Это же представление выявляет связь h-аналитических функций с волновыми процессами.

Чтобы найти эту связь, будем представлять одну из независимых координат, скажем, y, как время и

рассмотрим одну из функций, комбинациями которых являются h-аналитические функции, скажем, $\psi(x-y)$. Эта функция сохраняет постоянные значения на прямых $x-y=\text{const}$. Двигаться по такой прямой — это значит перемещаться со скоростью 1 в положительном направлении оси x (ведь y у нас означает время, и закон нашего движения записывается так: $x=y+x_0$, где постоянная x_0 — значение x в начальный момент $y=0$). При этом значение ψ не меняется, т. е. если представить распределение значений ψ как некоторую волну, то при нашем перемещении мы движемся вместе с фронтом распространения этой волны (рис. 16). Точно так

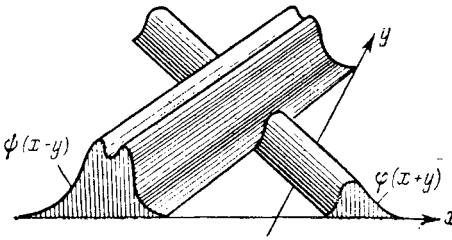


Рис. 16.

же $\varphi(x+y)$ можно представлять как волну, движущуюся в отрицательном направлении оси x со скоростью 1 (т. е. по закону $x=-y+x_0$). Через комбинации этих двух волн и выражаются h-аналитические функции.

Система (19) является простейшей системой двух уравнений с частными производными первого порядка *гиперболического типа*. Такие системы описывают волновые процессы и характеризуются наличием двух семейств линий, по которым распространяются процессы; эти линии и называются *характеристиками* системы. Для системы (19) характеристиками служат два семейства прямых: $x+y=\text{const}$ и $x-y=\text{const}$. (Заметим, что характеристики $y=\pm x$, проходящие через начало координат, служат и геометрическим местом делителей нуля для соответствующей (14) гиперболической системы комплексных чисел.)

С гиперболической системой (19) мы встретимся, когда будем рассматривать модельные задачи для сверх-

звуковых течений газа. Сейчас мы расстанемся с ней, чтобы подробнее познакомиться с ее антиподом — системой (1), простейшей системой *эллиптического типа*, которая описывает течения несжимаемой жидкости.

§ 8. Свойства аналитических функций

Класс аналитических функций весьма широк. Это видно, например, из следующей теоремы:

Если ряд из функций, аналитических в области D, сходится равномерно в этой области, то его сумма также является аналитической в D функцией.

Степенные ряды. Рассмотрим, в частности, степенной ряд

$$c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots = f(z). \qquad (1)$$

Известно, что если он сходится в какой-либо точке $z_0 \neq 0$, то он сходится, и притом равномерно в любом круге $|z| \leqslant r$, где r — произвольное число, меньшее $|z_0|$, и что областью его сходимости всегда является некоторый круг $|z| < R$. Так как члены степенного ряда аналитичны во всей плоскости, то по цитированной теореме сумма такого ряда будет аналитической в круге его сходимости.

С другой стороны, можно доказать, что если некоторая функция f аналитична в окрестности какой-либо точки $z = a$, то в некотором круге $|z - a| < R$ с центром в этой точке она разлагается в сходящийся степенной ряд:

$$f(z) = c_0 + c_1 (z - a) + \ldots + c_n (z - a)^n + \ldots \qquad (2)$$

Таким образом, аналитичность функции в окрестности некоторой точки оказывается эквивалентной ее разложимости в степенной ряд с центром в этой точке.

Теории степенных рядов посвящено много исследований и она оказалась сильным аппаратом как для изучения свойств аналитических функций, так и для приближенного решения прикладных задач. Заметим, однако, что здесь речь идет о локальных свойствах и задачах, т. е. об изучении свойств функций в окрестности некоторой точки, — для глобального изучения

функций в областях, отличных от кругов, аппарат степенных рядов не годится.

Отметим несколько свойств аналитических функций, которые вытекают из их представимости степенными рядами. Во-первых, любой степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз, поэтому аналитические функции обладают производными всех порядков. Отсюда следует, что разложения аналитических функций в степенной ряд совпадают с их разложениями по формуле Тейлора:

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\ldots \quad (3)$$

В частности, справедливы известные разложения элементарных функций

$$\begin{aligned} e^z &= 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots, \\ \sin z &= z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots, \\ \cos z &= 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots, \\ \log(1+z) &= z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots \end{aligned} \quad (4)$$

(первые три из них сходятся во всей плоскости, четвертое — лишь в круге $|z|<1$, его сходимость лимитируется точкой $z=-1$, в которой $\log(1+z)$ теряет аналитичность).

Далее отметим, что каждая не тождественно равная нулю аналитическая функция обращается в нуль как некоторая целая степень: если $f(a)=0$, то найдется номер $n\geqslant 1$ такой, что в окрестности точки a

$$f(z)=c_n(z-a)^n+\ldots=(z-a)^n\varphi(z), \quad (5)$$

где $c_n\neq 0$ и $\varphi(z)=c_n+c_{n+1}(z-a)+\ldots$ — аналитическая функция, не обращающаяся в нуль в некоторой окрестности a (последнее вытекает из того, что $\varphi(a)=c_n\neq 0$, и из непрерывности функции φ). Такое целое число n называется *порядком нуля* функции f в точке a.

Свойство открытости. Из формулы (5) вытекает, что непостоянная аналитическая функция каждую внутрен-

нюю точку ее области определения переводит во внутреннюю точку множества ее значений (в самом деле, $f(z)-f(a)$ в окрестности $z=a$ ведет себя, с точностью до малых высших порядков, как целая степень $(z-a)^n$, а целая степень обладает этим свойством). Последнее свойство называется свойством *открытости* отображения. Из него вытекает, что непостоянные аналитические отображения всегда преобразуют области в области.

Из условий аналитичности видно, что якобиан аналитического отображения $f=u+iv$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2,$$

т. е. он равен квадрату модуля производной $|f'(z)|^2$. Следовательно, он всегда неотрицателен, а обращается в нуль лишь там, где $f'(z)=0$. По теореме о неявных функциях, известной из анализа, в точках, где якобиан отличен от 0, отображение f локально взаимно однозначно. Как мы видели выше, в нулях производной $f(z)-f(a)$ локально ведет себя как целая степень $(z-a)^n$, $n>1$. Последние точки называются *критическими* точками отображения f; можно доказать, что множество таких точек изолировано в области аналитичности функции, т. е. не имеет предельных точек внутри этой области.

Описанное локальное поведение характеризует аналитические отображения. Можно доказать, что если некоторое непрерывное отображение f локально взаимно однозначно в плоской области D всюду, кроме изолированных точек, в которых оно имеет характер целой степени, то существует непрерывное и взаимно однозначное преобразование D, которое преобразует f в аналитическую функцию. Отметим еще, что гиперболически аналитические отображения обладают в известном смысле противоположными свойствами. В самом деле, как видно из формул (15) предыдущего раздела, их якобиан $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}=4\varphi'(x+y)\psi'(x-y)$ может менять знак на характеристиках; даже простейшие из них не обладают свойством открытости (например, гиперболический квадрат $w=(x+iy)^2=x^2+y^2+2ixy$ преобразует внутреннюю точку $z=0$ в граничную точку $w=0$

множества образов, ибо при этом отображении всегда $u = x^2 + y^2 \geqslant 0$).

Простым следствием свойства открытости является важный *принцип максимума модуля*: если модуль аналитической в области D функции f достигает максимума во внутренней точке D, то эта функция постоянна. В самом деле, если функция f непостоянна, то по этому свойству в окрестности любой точки a из D она принимает все значения из некоторой окрестности точки $f(a)$, в том числе и такие значения, модуль которых больше $|f(a)|$, т. е. значение $|f(a)|$ не может быть максимальным.

Интегрирование. Опишем теперь коротко теорию интегрирования аналитических функций. Понятие интеграла по кривой γ, лежащей в комплексной плоскости, можно ввести для любой комплексной функции f, определенной на γ. Для этого нужно разбить γ на конечное число частей точками $z_0 = a, z_1, \ldots, z_n = b$ (a и b — концы γ), на каждом отрезке (z_k, z_{k+1}) кривой γ произвольно выбрать точку ζ_k и взять предел суммы

$$\lim \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) = \int_\gamma f(z)\,dz \qquad (6)$$

в предположении, что все $|z_{k+1} - z_k|$ стремятся к нулю. Легко видеть, что если $f = u + iv$, то этот интеграл выражается через криволинейные интегралы от действительных функций:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy. \qquad (7)$$

Как доказывается в анализе, эти интегралы существуют, если кривая γ — кусочно гладкая, а функция f непрерывна на ней.

Выясним специфику случая, когда кривая интегрирования лежит в области аналитичности функции. Для этого вспомним теорему из анализа, по которой криволинейный интеграл

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$$

от функций, непрерывно дифференцируемых в односвязной области D, не зависит от вида кривой γ и полностью определяется ее концами в том и только том случае, когда подынтегральное выражение является точным дифференциалом, т. е. всюду в D удовлетворяется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Но для первого из интегралов в правой части (7) это условие имеет вид $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, т. е. совпадает со вторым условием аналитичности, а для второго $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ и совпадает с первым условием аналитичности.

Таким образом, справедлива следующая основополагающая *теорема Коши*: если функция f аналитична в односвязной области D, то интеграл от f по любой кривой γ, лежащей в D, зависит лишь от концов, но не от вида γ, или, что эквивалентно, интеграл от f по любому замкнутому контуру γ, лежащему в D, равен нулю:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0. \tag{8}$$

Заметим, что это свойство также характеризует аналитические функции: если некоторая функция f непрерывна в области D и ее интеграл по любому замкнутому контуру, лежащему в D, равен 0, то f аналитична в D.

Непосредственным следствием теоремы Коши является возможность построения для аналитических функций понятия первообразной. В самом деле, если функция f аналитична в односвязной области D, то по теореме Коши в D определена функция

$$F(z) = \int_a^z f(\zeta)\,d\zeta, \tag{9}$$

где a — произвольная фиксированная точка D (интеграл не зависит от пути, поэтому мы не указываем кривой, по которой он берется). По элементарным

свойствам интегралов, которые вытекают прямо из определения (6), имеем

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta,$$

откуда видно, что существует производная $F'(z)=f(z)$. Мы видим, что функция (9) оказалась аналитической в области D и что ее производная равна подынтегральной функции. Функция F и называется *первообразной* функции f.

Доказывается, что две первообразные одной и той же функции в одной и той же области могут отличаться лишь постоянным слагаемым, а отсюда обычным образом вытекает *формула Ньютона — Лейбница*, выражающая интеграл через первообразную:

$$\int_{a}^{b} f(z)\,dz=F(b)-F(a). \tag{10}$$

Физическая интерпретация. Описанные основные факты интегрального исчисления аналитических функций имеют прямую гидродинамическую интерпретацию. Пусть в односвязной области D задано течение идеальной несжимаемой жидкости без источников и вихрей. Как мы видим, величина, комплексно сопряженная скорости течения, выражается аналитической в D функцией — производной комплексного потенциала:

$$V_x-iV_y=f'(z).$$

Согласно формуле (7)

$$\int_{\gamma} f'(z)dz=\int_{\gamma} V_x\,dx+V_y\,dy+i\int_{\gamma}-V_y\,dx+V_x\,dy. \tag{11}$$

Здесь первый интеграл справа берется от скалярного произведения векторов $\boldsymbol{V}=V_x+iV_y$ и $dz=dx+idy$ (касательного вектора к кривой γ); он равен сумме касательных составляющих вектора скорости:

$$\Gamma=\int_{\gamma}(\boldsymbol{V},\,dz)=\int_{\gamma} V_s\,ds. \tag{12}$$

Точно так же второй интеграл берется от скалярного произведения вектора $\boldsymbol{V}$ и вектора $dn = -i\,dz = dy - i\,dx$, который получается из dz поворотом на 90° по часовой стрелке (рис. 17), т. е. вектора нормали к γ; он равен сумме нормальных составляющих вектора $\boldsymbol{V}$:

$$N = \int_{\gamma} (\boldsymbol{V}, dn) = \int_{\gamma} V_n\, ds. \quad (13)$$

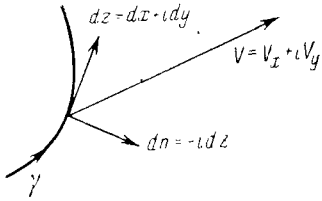


Рис. 17.

Физически этот интеграл означает количество жидкости, протекающей за единицу времени через кривую γ в направлении нормали dn, — так называемый *расход* жидкости.

Подынтегральные выражения в (12) и (13) равны, соответственно, дифференциалам потенциальной функции и функции тока:

$$V_x dx + V_y dy = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = d\varphi,$$

$$-V_y dx + V_x dy = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi,$$

поэтому интегралы равны приращениям этих функций, и (11) можно переписать в виде

$$\Gamma + iN = \int_{\gamma} f'(z)\, dz = f(b) - f(a), \quad (14)$$

где a и b — концы γ. Мы получили физическую интерпретацию формулы Ньютона — Лейбница.

Пусть γ — замкнутая кривая, лежащая в односвязной области течения с описанными выше свойствами. Теорема Коши, примененная к производной комплексного потенциала течения, сводится к утверждению, что для этой кривой

$$\Gamma = 0, \qquad N = 0. \quad (15)$$

Первое из этих равенств выражает отсутствие циркуляции и показывает, что течение не является закрученным на γ — положительные и отрицательные значения касательной составляющей скорости на γ компенсируют

друг друга. Второе равенство выражает равенство нулю расхода на γ, оно показывает, что секундное количество жидкости, втекающей в γ, равно количеству жидкости, вытекающей из него. Такова физическая интерпретация теоремы Коши.

Интегральная формула Коши. Подчеркнем, что условие односвязности в теореме Коши существенно—если область течения D имеет дырку, как на рис. 18, то интеграл по замкнутому контуру γ, охватывающему эту дырку, не обязан равняться нулю. (Это физически очевидно: в дырке могут находиться источники и вихри, а потому циркуляция и расход на γ могут быть отличными от нуля.) Легко, однако, понять, что при непрерывной деформации γ внутри области D величина интеграла не меняется. Мы проверим этот факт в его простейшей математической постановке: пусть область D ограничена двумя кусочно гладкими кривыми γ_0 и γ_1, которые обходятся в одинаковом направлении (скажем, против часовой стрелки), и функция f аналитична в какой-нибудь области, содержащей замыкание D (так называется область вместе с ее границей); мы покажем, что в этих условиях

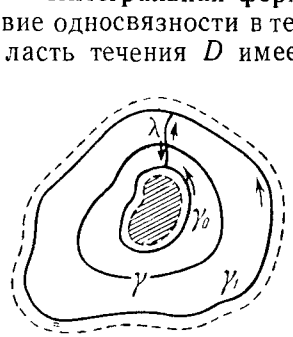


Рис. 18.

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz. \tag{16}$$

Для доказательства соединим γ_0 и γ_1 гладкой линией λ, расположенной в D, и обозначим через D' односвязную область, которая получится, если удалить λ из D. Граница D' состоит из γ_1, кривой γ_0, проходимой в отрицательном направлении, и кривой λ, проходимой дважды в противоположных направлениях (рис. 18). По теореме Коши интеграл по полной границе D' равен нулю, но по элементарным свойствам интегралов он равен

$$\int_{\text{гр. } D'} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz - \int_{\gamma_0} f\,dz + \int_{\lambda} f\,dz - \int_{\lambda} f\,dz.$$

Последние два слагаемых сокращаются, и мы получаем формулу (16). Отметим, что формула (16) остается справедливой и тогда, когда f аналитична лишь в области D (а не в более широкой области, как считалось выше), но непрерывно продолжается на границы γ_0 и γ_1.

Простым следствием доказанного свойства является следующий фундаментальный факт, известный под названием *интегральной формулы Коши*: пусть функция f аналитична в односвязной области D, ограниченной кусочно гладкой кривой γ, и непрерывно продолжается на границу; тогда значение f в любой точке z области определяется через ее граничные значения по формуле

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}. \tag{17}$$

Подынтегральная функция (мы рассматриваем ее в зависимости от переменной ζ при фиксированной z) аналитична не всюду в D, ибо знаменатель в ее выражении обращается в нуль в точке $\zeta=z$; поэтому теорема Коши к ней неприменима. Но мы можем воспользоваться формулой (16), применив ее к области D, из которой исключен малый кружок с центром в точке z радиуса r. По этой формуле

$$\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\int\limits_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}, \tag{18}$$

где γ_r — окружность $|\zeta-z|=r$.

Вводя на γ_r параметр $\varphi=\arg(\zeta-z)$, меняющийся от 0 до 2π, мы найдем, что на ней $\zeta-z=re^{i\varphi}$, $d\zeta=ire^{i\varphi}d\varphi$, следовательно, интеграл в правой части (18)

$$\int\limits_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=i\int\limits_{0}^{2\pi}f(\zeta)\,d\varphi.$$

В силу непрерывности f на γ_r имеем $f(\zeta)=f(z)+\alpha(\zeta)$, где $\alpha(\zeta)$ равномерно по φ стремится к 0 при $r\to 0$, поэтому предел этого интеграла при $r\to 0$ равен $2\pi i f(z)$. С другой стороны, из (18) видно, что этот интеграл не зависит от r, и значит, он равен $2\pi i f(z)$ — формула (17) доказана.

Интегральная формула Коши имеет богатые следствия, из которых мы укажем сейчас только одно. Возьмем произвольную точку z, в окрестности которой функция f аналитична, и применим эту формулу к окружности γ_r радиуса r с центром в z. Полагая на γ_r, как и выше, $\zeta - z = re^{i\varphi}$, мы найдем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi})\, d\varphi. \qquad (19)$$

Эта формула показывает, что аналитические функции очень правильно устроены — их значение в каждой точке равно среднему арифметическому значению на достаточно малой окружности с центром в этой точке (*теорема о среднем*). Из нее можно снова получить принцип максимума модуля, о котором мы говорили выше.

§ 9. Гармонические функции

Связь с аналитическими функциями. Аналитические функции тесно связаны с гармоническими функциями от двух переменных, т. е. с решениями двумерного уравнения Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (1)$$

В самом деле, дифференцируя первое из условий аналитичности

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

по x, а второе по y и приравнивая смешанные производные $\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial x}$, мы найдем, что функция u — действительная часть аналитической функции — является гармонической функцией. Точно так же доказывается, что и мнимая часть аналитической функции является функцией гармонической.

С другой стороны, для каждой гармонической в о д н о с в я з н о й области D функции u можно найти другую гармоническую в D функцию v, которая называется *сопряженной гармонической* к u и вместе с которой u удовлетворяет системе (2), так что $f = u + iv$ будет

аналитической в D. В самом деле, в силу уравнения (1) выражение $-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$ в односвязной области является точным дифференциалом некоторой функции v, которая и является искомой. Таким образом, сопряженные гармонические функции находятся простым интегрированием.

Из свойств аналитических функций можно выводить соответствующие свойства функций гармонических (при желании можно поступать и наоборот). Так, мы можем утверждать, что каждая гармоническая функция бесконечно дифференцируема. Из формулы (19) предыдущего параграфа отделением действительных частей мы получаем теорему о среднем для гармонических функций:

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+re^{i\varphi})\,d\varphi, \tag{3}$$

где r столь мало, что круг $\{|\zeta-z|<r\}$ принадлежит области гармоничности u.

Эта теорема является одним из основополагающих фактов теории гармонических функций. Из нее, в частности, получается важный *принцип экстремума*: непостоянная гармоническая в области D функция не может достигать внутри D ни максимума, ни минимума.

Задача Дирихле. Принцип экстремума показывает, что гармоническая в области D и непрерывно продолжающаяся в замыкание $\bar{D}$ функция полностью определяется своими значениями на границе. Действительно, пусть существуют две такие функции u_1 и u_2 с одинаковыми граничными значениями. Тогда их разность u_1-u_2 будет гармонической в D и непрерывной в $\bar{D}$ функцией, равной нулю всюду на границе. По свойствам непрерывных функций u_1-u_2 должна достигать и максимума и минимума где-то в $\bar{D}$, а по принципу экстремума это должно происходить на границе. Но там $u_1-u_2\equiv 0$, следовательно, и максимум и минимум u_1-u_2 в $\bar{D}$ оба равны нулю. Таким образом, $u_1-u_2\equiv 0$, т. е. $u_1\equiv u_2$ всюду в D.

Возникает естественная задача восстановления гармонической в области функции по ее граничным

значениям. Эта задача является основной в теории гармонических функций и ее приложениях и называется *задачей Дирихле*. Вот как она формулируется:

На границе γ области D задана функция $u(\zeta)$, требуется найти гармоническую в D и непрерывную в $\bar{D}$ функцию $u(z)$ так, чтобы в каждой точке $\zeta \in \gamma$ она принимала заданные значения $u(\zeta)$.

Приведенное выше рассуждение показывает, что задача Дирихле не может иметь двух различных решений, т. е. доказывает единственность решения этой задачи. Более тонким и сложно доказываемым фактом является существование решения задачи Дирихле. Впрочем, для ряда простейших областей существование решения можно доказать прямой конструкцией.

Пусть, например, D представляет собой единичный круг. Предположим сначала, что задача решена и мы нашли гармоническое продолжение $u(z)$ заданной на окружности функции $u(\zeta)$. Тогда мы можем построить сопряженную с ней гармоническую функцию $v(z)$ и к аналитической в круге функции $f = u + iv$ применить интегральную формулу Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}. \tag{4}$$

Постараемся преобразовать правую часть этой формулы так, чтобы ее действительная часть содержала лишь известные граничные значения u и не зависела от v. Для этого возьмем точку $\frac{1}{\bar{z}}$ и, заметив, что она не принадлежит единичному кругу (ибо у нас $|z| < 1$ и, следовательно, $\left|\frac{1}{\bar{z}}\right| > 1$), воспользуемся теоремой Коши, по которой

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - \frac{1}{\bar{z}}} = 0.$$

Теперь мы вычтем это равенство из предыдущего, предварительно подсчитав, что

$$\frac{1}{\zeta - z} - \frac{\bar{z}}{\zeta\bar{z} - 1} = \frac{\bar{\zeta}}{1 - \bar{\zeta}z} + \frac{\bar{z}}{1 - \zeta\bar{z}} = \frac{\bar{\zeta}(1 - |z|^2)}{|1 - \zeta\bar{z}|^2}$$

(у нас $\zeta\bar{\zeta} = |\zeta|^2 = 1$) и что при $|\zeta| = 1$ мы имеем $\zeta = e^{it}$, $d\zeta = i\zeta\, dt$; мы получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta)\, \frac{1 - |z|^2}{|1 - \zeta\bar{z}|^2}\, dt.$$

Наша цель достигнута, ибо справа при $f(\zeta)$ теперь стоит действительный множитель. Отделяя в последней формуле действительные части, мы получим так называемый *интеграл Пуассона*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it})\, \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t - \varphi) + r^2}\, dt \quad (z = re^{i\varphi}). \tag{5}$$

Прямой оценкой можно доказать, что он и решает задачу Дирихле для круга — при любой непрерывной на окружности функции $u(e^{it})$ определяет гармоническую в круге функцию $u(z)$ с заданными граничными значениями.

Преобразованием формулы Коши (4), похожим на описанное, можно получить также *интеграл Шварца*, который восстанавливает аналитическую в единичном круге функцию $f(z)$ по граничным значениям ее действительной части:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta)\, \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, dt + iC \qquad (\zeta = e^{it}); \tag{6}$$

эта задача, очевидно, решается с точностью до мнимой постоянной.

Такую же задачу для полосы $\{0 < y < 1\}$ решает формула

$$f(z) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ u_0(t) \operatorname{cth} \frac{\pi(t - z)}{2} + u_1(t) \operatorname{th} \frac{\pi(t - z)}{2} \right\} dt + iC, \tag{7}$$

где u_0 и u_1 обозначают, соответственно, значения действительной части f на нижней и верхней границах полосы.

Связь с конформными отображениями. Между гармоническими и аналитическими функциями имеется еще

одна связь — гармоничность сохраняется при аналитических преобразованиях. Это выражается следующей теоремой: если функция $u(z)$ гармонична в области D, а функция $\varphi(w)$ аналитична в области Δ и принимает там значения из D, то сложная функция $u[\varphi(w)] = U(w)$ гармонична в Δ. Теорема доказывается прямым подсчетом, по которому оператор Лапласа

$$\Delta U(w) = \Delta u(z) \cdot |\varphi'(w)|^2. \tag{8}$$

В частности, гармоничность сохраняется при конформных отображениях, которые представляют собой взаимно однозначные аналитические преобразования.

Связь теории гармонических функций с теорией конформных отображений проявляется также в связи соответствующих граничных задач. Основной граничной задачей теории конформных отображений служит следующая *задача Римана*:

Заданы две односвязные области D и Δ; требуется построить функцию $w = f(z)$, реализующую конформное отображение одной из этих областей на другую.

Эту задачу мы обсудим в следующей главе, а здесь лишь укажем ее связь с задачей Дирихле. Прежде всего, если для некоторой области D мы умеем решать задачу Римана и, следовательно, знаем ее конформное отображение f на единичный круг $\Delta = \{|w| < 1\}$, то мы можем решать для этой области и задачу Дирихле. В самом деле, если граница области D является простой непрерывной кривой (что мы и предположим), то, как доказывается в теории конформных отображений, f продолжается до непрерывного и взаимно однозначного отображения $\bar{D}$ на $\bar{\Delta}$. Поэтому на единичной окружности $|\omega| = 1$ мы можем рассматривать обратную к f функцию f^{-1} и с ее помощью перенести на эту окружность заданные граничные значения: $U(\omega) = u[f^{-1}(\omega)]$. Теперь по этим значениям мы можем при помощи интеграла Пуассона построить гармоническую в круге $|w| < 1$ функцию

$$U(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\omega) \frac{1 - |w|^2}{|1 - \omega\bar{w}|^2} \, d\tau \qquad (\omega = e^{i\tau}).$$

Остается вернуться к переменной z и воспользоваться сохранением гармоничности при конформных отображениях; мы получим искомое решение:

$$u(z) = U[f(z)].$$

Во многих случаях оказывается полезным обратный ход — построение конформного отображения области D на единичный круг при помощи решения в D задачи Дирихле. Зададимся точкой $z_0 \in D$, которую искомое отображение f переводит в центр круга $w = 0$ (рис. 19).

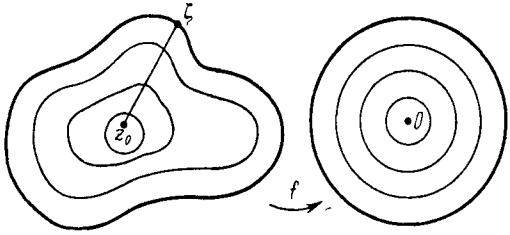


Рис. 19.

В ней функция f должна иметь нуль, и притом первого порядка, ибо в окрестности нулей высшего порядка аналитическая функция не взаимно однозначна (она имеет там характер степени). Поэтому в окрестности z_0 функция f должна иметь тейлоровское разложение вида

$$f(z) = c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots,$$

где $c_1 = f'(z_0) \neq 0$. Отсюда следует, что функция $\dfrac{f(z)}{z - z_0} = c_1 + c_2(z - z_0) + \ldots$ аналитична в точке z_0, а в остальных точках D она и подавно аналитична. Нигде в области D эта функция не обращается в 0, потому что числитель дроби равен 0 лишь при $z = z_0$, но там эта функция равна $c_1 \neq 0$. Но тогда логарифм этой функции аналитичен в D, а значит, его действительная часть, т. е. функция

$$u(z) = \log \frac{|f(z)|}{|z - z_0|}, \tag{9}$$

должна быть гармонической в D.

Теперь уже нетрудно понять замысел проведенных построений: ведь если f отображает D на единичный

круг, то $|f(z)|$ должен равняться 1 на границе D, а значит, еще не зная самого конформного отображения, мы знаем граничные значения функции (9), они равны

$$u(\zeta) = \log \frac{1}{|\zeta - z_0|} \tag{10}$$

и определяются геометрической формой границы области и выбранной точкой z_0 (рис. 19). Чтобы найти искомое конформное отображение, нужно, следовательно, выполнить следующие операции: 1) по известным граничным значениям (10) построить гармоническую в D

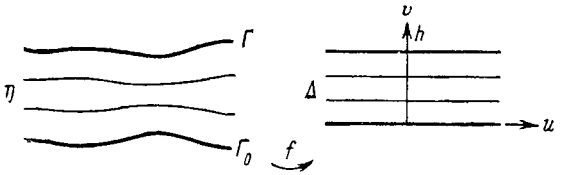


Рис. 20.

функцию $u(z)$ (задача Дирихле), 2) найти функцию $v(z)$, гармонически сопряженную с u (интегрирование). Теперь мы знаем функцию

$$g(z) = u(z) + iv(z) = \log \frac{f(z)}{z - z_0},$$

откуда искомое отображение находится по формуле

$$f(z) = (z - z_0)e^{g(z)}. \tag{11}$$

Хочется обратить внимание на некоторые тонкости, связанные с построенным решением. Из конструкции видно, что функция f аналитична в D и что на границе D ее модуль равен 1. Однако остается еще доказать, что эта функция взаимно однозначно отображает D на единичный круг. Это можно сделать прямой (но отнюдь не простой) проверкой. Если же у нас есть уверенность, что наша задача разрешима (т. е. мы умеем доказывать теорему существования конформного отображения D на круг), то такая проверка излишня — проведенные выше рассуждения показывают, что если искомое отображение есть, то оно непременно восстанавливается по формуле (11).

В заключение заметим, что задача конформного отображения криволинейной полосы $D = \{y_0(x) < y < y(x)\}$ на прямолинейную полосу $\Delta = \{0 < v < h\}$ с нормировкой $f(\pm\infty) = \pm\infty$ сводится к задаче Дирихле еще проще. Из геометрических соображений (рис. 20) ясно, что гармоническая функция $v = \operatorname{Im} f$ на нижней границе Γ_0 полосы D должна принимать значение $v \equiv 0$, а на верхней границе Γ — значение $v \equiv h$, кроме того, функция v должна быть ограниченной $(0 \leqslant v \leqslant h)$. Таким образом, искомую гармоническую функцию v мы знаем на всей границе области D, исключая бесконечные точки $x = \pm\infty$. Можно доказать, что эта обобщенная задача Дирихле имеет и притом единственное решение v в классе ограниченных гармонических функций. Интегрированием мы найдем сопряженную гармоническую к v функцию u (с точностью до постоянного слагаемого) и тогда $f = u + iv$ будет искомым конформным отображением.

Литература

1. А. И. Маркушевич, Краткий курс теории аналитических функций, «Наука», М., 1965.
2. М. А. Евграфов, Аналитические функции, «Наука», М., 1965.
3. Б. В. Шабат, Введение в комплексный анализ, «Наука», М., 1969.
4. М. А. Лаврентьев, Вариационый метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, Изд-во АН СССР, М., 1962.
5. Л. И. Волковыский, Квазиконформные отображения, Львов, 1954.
6. Л. Альфорс, Лекции по теории квазиконформных отображений, ИЛ, М., 1969.

Глава III

КОНФОРМНЫЕ И КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Здесь мы подробнее расскажем о геометрических методах теории аналитических и обобщенных аналитических функций, которыми больше всего будем пользоваться в приложениях.

§ 10. Задача Римана

Об этой основной граничной задаче теории конформных отображений уже говорилось в предыдущей главе. Она заключается в построении конформного отображения одной области на другую.

Существование и единственность. Начнем с замечания, что достаточно научиться конформно отображать произвольную односвязную область на круг, и тогда мы сможем отображать конформно друг на друга любые две такие области.

Это замечание основано на двух простых свойствах конформных отображений: 1) отображение f^{-1}, обратное и конформному отображению f, и 2) сложное отображение $f \circ g$, составленное из двух конформных отображений f и g (т. е. отображение $w = f[g(z)]$), снова являются конформными отображениями. Свойства ясны из определения конформного отображения как взаимно однозначного аналитического преобразования и из правил дифференцирования обратных и сложных функций.

Имея эти свойства, обосновать сделанное замечание совсем нетрудно: если функции f_1 и f_2 конформно отображают соответственно области D_1 и D_2 на единичный

круг U, то функция $f = f_2^{-1} \circ f_1$ будет отображать D_1 на D_2 (рис. 21).

Задача Римана решена до конца в начале этого столетия. Оказалось, что любую односвязную область, граница которой состоит более, чем из одной точки, можно конформно отобразить на единичный круг. В этом состоит знаменитая *теорема Римана*, которую он сформулировал еще в 1851 г., подкрепил физическими соображениями, но не доказал (точнее, его доказательство имело существенный пробел).

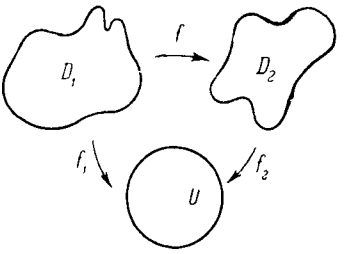


Рис. 21.

Займемся вопросом о том, насколько определена задача Римана, сколько решений она имеет при заданных областях D_1 и D_2. Согласно замечанию, для решения этого вопроса достаточно выяснить, сколькими способами можно конформно отобразить единичный круг $\{|z| < 1\}$ на себя. Нетрудно проверить, что при любом комплексном a, $|a| < 1$, и любом действительном числе θ функция

$$w = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \tag{1}$$

конформно отображает круг на себя (в самом деле, при $|z| = 1$ имеем $\frac{1}{z} = \bar{z}$ и, следовательно, $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = \frac{1}{|z|}\left|\frac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}}\right| = 1$, т. е. (1) преобразует единичную окружность в себя; кроме того, оно взаимно однозначно, ибо уравнение (1) однозначно разрешимо относительно z, и переводит точку a круга в его центр). Отображение (1) зависит от трех действительных параметров — двух координат точки a, переходящей в центр круга, и числа θ, изменение которого означает поворот круга относительно центра.

Можно доказать, что формула (1) содержит все конформные отображения единичного круга на себя. Это означает, что тремя действительными параметрами и исчерпывается произвол в решении задачи Римана:

конформное отображение одной области на другую определится однозначно, если задать соответствие трех пар граничных точек (положение точки на границе задается одним параметром) или соответствие одной пары внутренних точек (два параметра) и еще одной пары граничных точек (один параметр). Такие условия, однозначно определяющие отображение — они называются *условиями нормировки* — могут иметь различный вид, но каждый раз эти условия должны определять три параметра.

Примеры. Укажем несколько простейших примеров конформных отображений.

1) Отображение внешности круга на себя. Функцию (1) можно рассматривать также как отображающую внешность U, т. е. область $\{|z| > 1\}$, на себя; в бесконечность она переводит точку $a^* = \frac{1}{\bar{a}}$, которая называется симметричной с a относительно единичной окружности $\{|z| = 1\}$.

2) Верхняя полуплоскость $\{y > 0\}$ на круг $\{|w| < 1\}$ тоже отображается дробнолинейной функцией:

$$w = e^{i\theta} \frac{z - a}{z - \bar{a}}, \tag{2}$$

здесь a — произвольная точка верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} a > 0$), она переводится при отображении (2) в

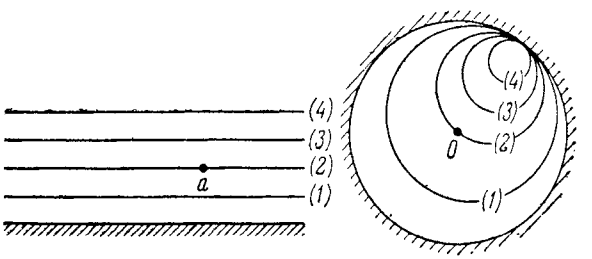


Рис. 22.

центр круга; $w = e^{i\theta}$ — точка окружности, в которую переходит бесконечная точка плоскости z (предел правой части (2) при $z \to \infty$, очевидно, равен $e^{i\theta}$). На рис. 22 показано, во что переходят прямые $y = h$ — это окружности, касающиеся единичной в точке $e^{i\theta}$.

3) Внешность единичного круга на внешность отрезка $[-1, 1]$ отображается так называемой *функцией Жуковского*

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right). \tag{3}$$

Окружности $\{|z| = r\}$, $r > 1$, переходят при этом в эллипсы с полуосями $a = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$, $b = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)$ и с

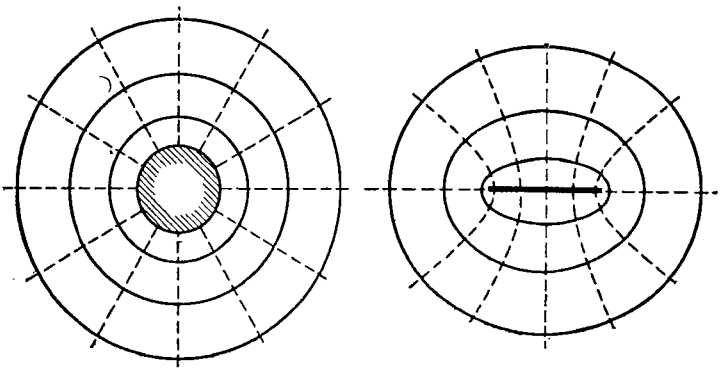


Рис. 23.

фокусами ± 1, а лучи $\arg z = \text{const}$ — в дуги гипербол, ортогональных к эллипсам (рис. 23).

4) Полоса $\left\{-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right\}$ на единичный круг отображается функцией

$$w = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \operatorname{tg} z. \tag{4}$$

Вертикальные прямые и горизонтальные отрезки при этом переходят в «меридианы» и «параллели» (рис. 24).

5) Верхняя полуплоскость с выброшенным круговым сегментом на верхнюю полуплоскость при нормировке $w(\infty) = \infty$, $|w'(\infty)| = 1$ отображается функцией

$$w = \frac{a\pi}{\pi - \alpha}\left\{1 - \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{\frac{\pi}{\pi - \alpha}}\right\}^{-1} + c, \tag{5}$$

где a и α — параметры сегмента (рис. 25), а c — действительная постоянная (отметим, что наши условия нормировки задают лишь два действительных параметра, поэтому третий остается произвольным).

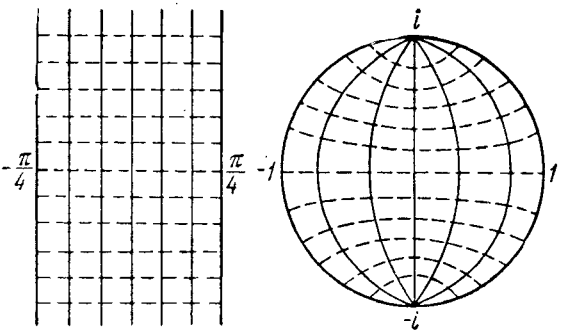


Рис. 24.

Для приложений эта формула слишком громоздка. При малых a и α, пользуясь первыми членами тейлоровских разложений, ее можно заменить приближенной формулой

$$w \approx z + \frac{a^2\alpha}{6\pi z} + \text{const.} \quad (6)$$



Рис. 25.

Можно еще заметить, что $\frac{a^2\alpha}{6}$ с точностью до малых высших порядков дает площадь σ выброшенного сегмента, поэтому (6) переписывается в виде

$$w \approx z + \frac{\sigma}{\pi z} + \text{const.}$$

6) Круг с выброшенной малой луночкой на круг отображается также достаточно громоздко записывающейся функцией. Приближенную формулу для такого отображения при условии, что площадь выброшенной луночки мала, можно записать так:

$$w \approx z\left\{1 + \frac{\sigma}{2\pi}\,\frac{1 + ze^{-i\alpha}}{1 - ze^{-i\alpha}}\right\}; \quad (7)$$

здесь $e^{i\alpha}$ — вершина луночки или (с той же точностью) другая ее точка.

7) Такая же приближенная формула для отображения полосы $\{0 < y < 1\}$ с выброшенной луночкой малой площади σ на полосу $\{0 < v < 1\}$ имеет вид

$$w \approx z + \frac{\sigma}{2} \operatorname{th} \frac{\pi (z - a)}{2} + \text{const}, \tag{8}$$

где a — абсцисса одной из точек луночки; $\operatorname{th} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$ — гиперболический тангенс.

Течение в канале. Уменье решать задачу Римана определяет успех решения некоторых задач гидродинамики. Мы проиллюстрируем это на классических примерах задач обтекания тел установившимися потоками идеальной несжимаемой жидкости. Придется, конечно, предполагать, что тела имеют форму бесконечных цилиндров (с произвольными направляющими линиями), чтобы можно было воспользоваться схемой плоского движения.

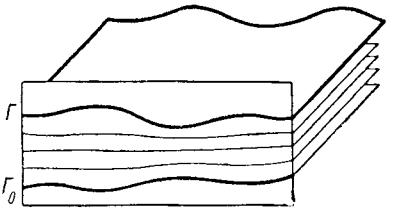


Рис. 26.

Пусть нужно найти течение в канале со стенками, которые перпендикулярны к некоторой плоскости и пересекают ее по двум бесконечным кривым Γ_0 и Γ без общих точек (рис. 26), причем скорости течения параллельны этой плоскости и на всех перпендикулярах к ней одинаковы. Поле скоростей в канале описывается плоским полем в полосе D, ограниченной кривыми Γ_0 и Γ.

Как мы видели в предыдущей главе, предположение об отсутствии в потоке источников и вихрей приводит к выводу о существовании комплексного потенциала — аналитической в D функции $f = u + iv$. Найти течение — значит найти эту функцию.

Поток должен обтекать стенки канала, т. е. каждая из кривых Γ_0 и Γ должна быть линией тока $v = \text{const}$, это дает граничное условие задачи. Мы можем задать

еще расход потока h, который, как показано в прошлой главе, равен

$$\int_{\gamma} (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{n})\, ds = v(\zeta_1) - v(\zeta_0), \tag{9}$$

где γ — линия с концами $\zeta_0 \in \Gamma_0$ и $\zeta_1 \in \Gamma$, т. е. любое поперечное сечение потока. Так как потенциал нас интересует с точностью до постоянного слагаемого, мы можем считать, что $v = 0$ на Γ_0 и $v = h$ на Γ.

В такой постановке задача еще очень неопределенна. Например, для случая, когда D является прямой полосой $\{0 < y < h\}$, ее решением служит любая функция

$$f(z) = z + \lambda e^{\frac{\pi n z}{h}}$$

при любых действительных λ и целых n (мнимая часть $y + \lambda e^{\frac{\pi n x}{h}} \sin\frac{\pi n y}{h}$ обращается в нуль при $y = 0$ и $y = h$). Чтобы поставить задачу более четко, придется предположить, что ширина полосы остается ограниченной в бесконечности, наложить на Γ_0 и Γ некоторые условия гладкости и рассматривать лишь течения с ограниченной скоростью на бесконечности. Можно доказать, что при этих дополнительных ограничениях решением задачи будет лишь конформное отображение f области D на полосу $\{0 < y < h\}$ с нормировкой $f(\pm\infty) = \pm\infty$. Это отображение определено с точностью до (действительного) постоянного слагаемого, которое не существенно, т. е. задача обтекания в принятых ограничениях решается однозначно. Ее решение, таким образом, сведено к решению задачи Римана.

Обтекание тел. Рассмотрим еще задачу обтекания тела неограниченным потоком с заданной скоростью на бесконечности. Теорема Римана позволяет свести задачу к частному случаю, когда тело представляет собой круговой цилиндр, т. е. к задаче построения потока во внешности круга. В самом деле, пусть φ — конформное отображение внешности D замкнутого контура Γ на внешность круга $\Delta = \{|w| > R\}$ с нормировкой $\varphi(\infty) = \infty$, $|\varphi'(\infty)| = 1$ (нормировка содержит три действительных параметра). Пусть f — комплексный по-

тенциал некоторого течения в Δ со скоростью в бесконечности V_∞, тогда $f \circ \varphi$ будет комплексным потенциалом течения в D с той же скоростью в бесконечности, ибо $|(f \circ \varphi)'| = |f'(\infty)| \cdot |\varphi'(\infty)| = |f'(\infty)|$. Очевидно, что и любое течение в D может быть получено из некоторого течения в Δ, так что задачи действительно эквивалентны.

Простейшее решение задачи обтекания круга радиуса R с заданной скоростью V_∞ на бесконечности дает функция

$$f(z) = V_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right). \tag{10}$$

Поле скоростей здесь симметрично относительно оси x, точкой разветвления потоков служит $z = -R$, а точкой слияния $z = R$. Можно, не меняя величины скорости в бесконечности, поместить там точечный вихрь. Тогда мы получим циркуляционное обтекание круга с комплексным потенциалом

$$f(z) = V_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right) - \omega i \operatorname{Log} z, \tag{11}$$

где $\omega = \dfrac{\Gamma}{2\pi}$ — постоянная, характеризующая интенсивность вихря.

Под влиянием циркуляции точки разветвления и слияния потока (так называемые *критические точки*) сместятся. В самом деле, в этих точках скорость течения очевидно равна нулю, следовательно, они находятся из уравнения

$$f'(z) = V_\infty\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) - \frac{\omega i}{z} = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем

$$z_{\text{кр}} = \frac{1}{2V_\infty}\left(\omega i \pm \sqrt{4R^2V_\infty^2 - \omega^2}\right). \tag{12}$$

При $\omega < 2RV_\infty$ имеем $|z_{\text{кр}}| = R$, т. е. обе критические точки лежат на обтекаемой окружности, их аргументы равны соответственно

$$\varphi_0 = \arcsin\frac{\omega}{2RV_\infty}, \qquad \varphi_1 = \pi - \varphi_0.$$

В частности, при $\omega = 0$ имеем $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \pi$, т. е. критические точки совпадают с концами диаметра: $z_{кр} = \pm R$ (этот случай бесциркуляционного обтекания мы отметили выше). Циркуляция стремится сблизить эти точки — при возрастании ω они поднимаются и при $\omega = 2RV_\infty$ сливаются в одну. Дальнейшее возрастание ω приводит к тому, что одна из критических точек

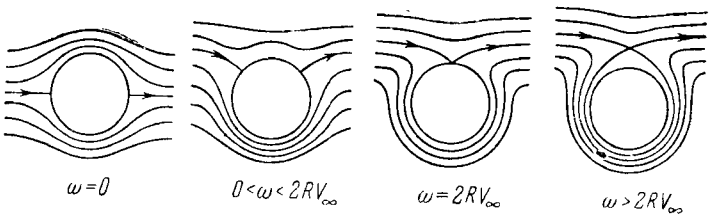


Рис. 27.

сдвигается в поток [1]) и образуются замкнутые линии тока (рис. 27). О физическом смысле этого явления мы будем говорить в гл. V в связи с парадоксами в схеме идеальной жидкости.

§ 11. Нелинейные квазиконформные отображения

Обобщение понятия квазиконформности. Как уже говорилось в первой главе, возрастание скоростей течения приводит к необходимости учета сжимаемости, а значит (при изучении плоских задач), к замене системы Коши — Римана нелинейной системой двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными и двумя искомыми функциями:

$$v_x = -\rho u_y, \qquad v_y = \rho u_x, \tag{1}$$

где ρ — известная функция от величины скорости $V = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$.

Рассмотрим произвольную систему такого вида

$$\begin{aligned} F_1(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) &= 0, \\ F_2(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

[1]) При $\omega > 2RV_\infty$ имеем $|z_{кр}| = \frac{1}{2V_\infty}\left(\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4R^2V_\infty^2}\right)$ и одна из $z_{кр}$ лежит внутри круга $|z| < R$, а другая вне его.

и назовем *квазиконформным отображением*, соответствующим этой системе, любое взаимно однозначное ее решение $f = u + iv$ в некоторой области D плоскости $z = x + iy$.

Роль теоремы Римана в решении задач обтекания потоками несжимаемой жидкости делает заманчивой перспективу распространения этой теоремы на общие квазиконформные отображения. Однако в такой общей постановке теорема не может быть верной. В самом деле, рассмотрим, например, систему

$$v_x = -\frac{u_y}{u_x^2 + u_y^2}, \qquad v_y = \frac{u_x}{u_x^2 + u_y^2}, \tag{3}$$

похожую на систему уравнений газовой динамики и отличающуюся от системы Коши — Римана лишь множителем $\rho = \dfrac{1}{u_x^2 + u_y^2}$ в правых частях. Легко видеть, что эта система эквивалентна двум уравнениям

$$u_x v_x + u_y v_y = 0, \qquad u_x v_y - u_y v_x = 1.$$

Второе из них показывает, что любое квазиконформное отображение, соответствующее системе (3), сохраняет площади областей (якобиан отображения равен 1). Поэтому области с различной площадью оказываются заведомо неотобразимыми друг на друга.

И тем не менее оказалось возможным выделить весьма широкий класс систем вида (2) (содержащий уравнения газовой динамики при дозвуковых режимах), на которые теорема Римана распространяется. Для выделения этого класса мы перепишем систему (2) в другом виде, заменив четыре участвующие в ней частные производные u_x, u_y, v_x и v_y четырьмя другими величинами, которые элементарно через них выражаются. Эти величины называются *характеристиками отображения*. Они служат параметрами параллелограмма, который дифференциал отображения f преобразует в единичный квадрат с основанием, наклоненным под углом β $(0 \leqslant \beta < 2\pi)$ к оси u; характеристики, конечно, зависят от β. В качестве таких характеристик выбираются

(рис. 28): 1) сторона p_β, отвечающая основанию квадрата, 2) высота q_β, 3) угол θ_β при основании, 4) угол α_β основания с осью x.

При $\beta = 0$ параллелограмм соответствует единичному квадрату, образованному линиями $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$ (линиями тока и линиями равного потенциала), и характеристики приобретают простой физический смысл: p — величина, обратная скорости, q — величина, обратная расходу, α — угол наклона скорости к оси x (через p, q, ... обозначаются характеристики p_β, q_β, ... при $\beta = 0$).

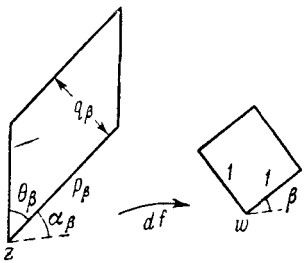


Рис. 28.

Подставляя в (2) выражения частных производных через характеристики, мы получим систему двух уравнений, которые назовем *уравнениями в характеристиках*. Первое требование, налагаемое на системы, носит формальный характер и состоит в том, что уравнения в характеристиках можно разрешить относительно q_β и θ_β, т. е. записать их в виде

$$\begin{aligned} q_\beta &= \Phi_1(x, y, u, v, p_\beta, \alpha_\beta), \\ \theta_\beta &= \Phi_2(x, y, u, v, p_\beta, \alpha_\beta). \end{aligned} \tag{4}$$

Второе требование геометрическое, оно состоит в том, чтобы характеристический параллелограмм не вырождался и чтобы его высота росла вместе с основанием. Оно формулируется так: существуют постоянные k_1, $0 < k_1 < \pi$, и $k_2 > 0$ такие, что при всех значениях переменных и всех β

$$k_1 \leqslant \theta_\beta \leqslant \pi - k_1, \qquad \frac{\partial q_\beta}{\partial p_\beta} \geqslant k_2. \tag{5}$$

Системы (2), удовлетворяющие этим двум требованиям, называются *сильно эллиптическими*.

При $\beta = 0$ последнее требование сводится к тому, что расход $\frac{1}{q}$ растет при возрастании скорости $\frac{1}{p}$. Как говорилось в гл. I, это — характеристическое свой-

ство дозвуковых газовых течений; условие сильной эллиптичности является его естественным обобщением.

Доказано (см. М. А. Лаврентьев [4]), что на квазиконформные отображения, осуществляемые решениями сильно эллиптических систем, распространяются многие основные факты теории конформных отображений. В том числе для них справедлива обобщенная теорема Римана, по которой любую односвязную область можно квазиконформно отобразить на каноническую область (круг, полосу и т. п.). Отсюда, в частности, вытекает, что теоремы существования решений задач обтекания тел потоками идеальной несжимаемой жидкости распространяются на случай газовых потоков, в которых ни внутри области, ни на границе не достигается скорость звука.

Особое значение имеют уравнения в характеристиках (4) при $\beta = 0$:

$$\begin{aligned} q &= q(x, y, u, v, p, \alpha), \\ \theta &= \theta(x, y, u, v, p, \alpha). \end{aligned} \tag{6}$$

Для случая уравнений газовой динамики (1) эти уравнения имеют очень простой вид:

$$q = q(p), \qquad \theta \equiv \frac{\pi}{2}; \tag{7}$$

первое из них выражает газовый режим — зависимость расхода газа $W = \frac{1}{q}$ от его скорости $V = \frac{1}{p}$, а второе показывает, что характеристический параллелограмм является прямоугольником. Напомним, что если течение адиабатно, т. е. давление P пропорционально некоторой степени плотности ρ^γ, $\gamma > 1$, то

$$W = V\left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} V^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

(см. гл. I). Переходя к обратным величинам $p = \frac{1}{V}$ и $q = \frac{1}{W}$ и обозначая еще $\alpha = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}}$, мы получим

зависимость

$$q = p\left(1 - \frac{\alpha^2}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2\alpha^2}}, \tag{8}$$

график которой изображен на рис. 29.

Движение определено лишь при $p > \alpha$ (когда скорость течения не достигает максимально возможной для данного газа скорости $\frac{1}{\alpha}$). При значении $p = p_s = \sqrt{1 + \alpha^2}$, которое соответствует скорости звука, график имеет минимум. Участок $\alpha < p < p_s$, где $q' < 0$, соответствует сверхзвуковым течениям, участок $p > p_s$, где $q' > 0$, — дозвуковым. График имеет асимптоту $q = p$, так что при больших p (малых скоростях) мы имеем $q \approx p$, характеристический прямоугольник близок к квадрату, а отображение близко к конформному.

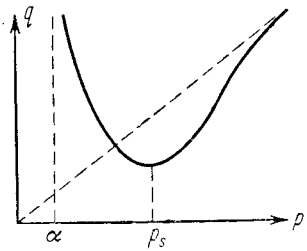


Рис. 29.

Производные системы. При исследовании нелинейных классов квазиконформных отображений важную роль играют так называемые *производные системы*. Смысл их введения состоит в следующем. Вместо неизвестных функций u и v будем рассматривать новые переменные

$$\tau = \log \frac{1}{p}, \qquad \alpha = -\frac{v_x}{v_y}, \tag{9}$$

характеризующие величину и направление скорости течения (p и α, как и раньше, обозначают характеристики p_β и α_β при $\beta = 0$); плоскость переменных τ и α называют плоскостью годографа. Доказано (М. А. Лаврентьев [4]), что эти переменные, рассматриваемые в зависимости от u и v, удовлетворяют системе

$$\frac{\partial \tau}{\partial v} = a_1 \frac{\partial \tau}{\partial u} + a_2 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + a_3, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = b_1 \frac{\partial \tau}{\partial u} + b_2 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + b_3, \tag{10}$$

коэффициенты которой выражаются через уравнения в

характеристиках (6) по формулам

$$a_1 = \frac{\partial q}{\partial p}\operatorname{ctg}\theta - \frac{\partial \theta}{\partial p}\frac{q}{\sin^2\theta},$$

$$a_2 = \frac{1}{p}\left(-\frac{\partial q}{\partial \alpha}\operatorname{ctg}\theta + \frac{\partial \theta}{\partial \alpha}\frac{q}{\sin^2\theta} + q\right),$$

$$b_1 = -\frac{\partial q}{\partial p}, \quad b_2 = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial q}{\partial \alpha} + q\operatorname{ctg}\theta\right), \tag{11}$$

$$a_3 = -\left(\frac{1}{p}\frac{\partial q}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial s}\right)\operatorname{ctg}\theta + \left(\frac{1}{p}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial s}\right)\frac{q}{\sin^2\theta},$$

$$b_3 = \frac{1}{p}\frac{\partial q}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial s},$$

где $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha$ — производная в направлении основания характеристического параллелограмма (скорости течения). Система (10) и называется *производной системой* системы (2).

Более простой вид производная система имеет для систем, уравнения в характеристиках которых не содержат координат, т. е. записываются так:

$$q = q(p, \alpha), \qquad \theta = \theta(p, \alpha). \tag{12}$$

Для таких систем в уравнениях производной системы (10), очевидно, $a_3 = b_3 = 0$, а остальные коэффициенты зависят лишь от $p = e^{-\tau}$ и α. Поэтому, если в производной системе принять τ и α за независимые переменные, а u и v — за искомые функции, то после простых преобразований она примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = -a_1\frac{\partial v}{\partial \alpha} + a_2\frac{\partial v}{\partial \tau}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \tau} = b_1\frac{\partial v}{\partial \alpha} - b_2\frac{\partial v}{\partial \tau}, \tag{13}$$

т. е. станет линейной системой.

Теория линейных систем развита существенно лучше, чем теория систем нелинейных. Поэтому описанный способ перехода к производным системам оказывается решающим, особенно для граничных задач, которые формулируются в терминах потенциала (u, v) и скорости (τ, α). Примеры таких задач будут встречаться в дальнейших главах.

Рассматриваемый класс систем содержит, в частности, уравнения газовой динамики (1), для которых

уравнения в характеристиках имеют вид (7). В этом случае производная система записывается так:

$$\frac{\partial \tau}{\partial v} = \frac{q(p)}{p}\frac{\partial \alpha}{\partial u}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = -q'(p)\frac{\partial \tau}{\partial u}. \tag{14}$$

Для этого наиболее важного в приложениях случая мы приведем, следуя М. М. Лаврентьеву [7], геометрический вывод производной системы. Рассмотрим криволинейный прямоугольник, переходящий при отображении $f = u + iv$ в малый квадрат со сторонами длины h, параллельными осям u и v; пусть $l \approx ph$ и $m \approx qh$ — его стороны, примыкающие к точке z, а $l + \Delta l$ и $m + \Delta m$ — параллельные им стороны (рис. 30). С точностью до малых высших порядков стороны l и $l + \Delta l$ можно принять за дуги концентрических окружностей; тогда из рис. 30 видно, что

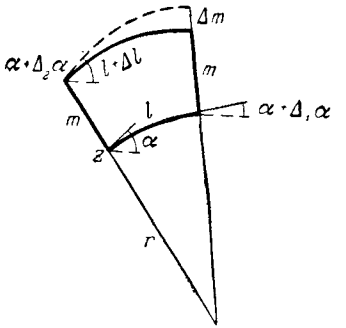


Рис. 30.

$$\frac{l + \Delta l}{l} \approx \frac{r + m}{r},$$

где $r = \frac{1}{k}$ — радиус кривизны дуги l. Но кривизна $k \approx -\frac{\Delta_1 \alpha}{l}$ (у нас на рис. 30 $\Delta_1 \alpha < 0$), следовательно, $\Delta l \approx -m\Delta_1 \alpha$, и подставляя значения $l \approx ph$, $m \approx qh$, деля обе части на h^2 и переходя к пределу при $h \to 0$, мы получим

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -q\frac{\partial \alpha}{\partial u}.$$

Если теперь подставить $p = e^{-\tau}$, то получится первое уравнение (14).

Далее, приращение Δm стороны m происходит за счет приращения $\Delta_2 \alpha$ угла α на участке m, и с точностью до малых высших порядков $\Delta m \approx l\Delta_2 \alpha$. От-

сюда $\frac{\Delta q}{h} \approx p \frac{\Delta_2 \alpha}{h}$ и в пределе при $h \to 0$ мы получаем

$$\frac{\partial q}{\partial u} = p \frac{\partial \alpha}{\partial v}.$$

Подставляя сюда $q = q(p)$ и опять вводя $\tau = -\log p$, получим второе уравнение (14).

Для случая классических уравнений газовой динамики уравнения (14) были другим способом получены С. А. Чаплыгиным и носят его имя. Метод перехода от зависимости $(x, y) \to (u, v)$ к зависимости $(u, v) \to (\tau, \alpha)$ называется *методом годографа*, он получил в гидродинамике и газовой динамике немаловажные применения.

Заметим, что в частном случае несжимаемой жидкости, когда $q(p) \equiv p$ и $q'(p) \equiv 1$, система Чаплыгина, как и исходная система (1), совпадает с системой Коши — Римана. Это и понятно, ибо в этом случае $\tau - i\alpha = \log|f'(z)| + i \arg f'(z)$, где f — комплексный потенциал, является аналитической функцией как от z, так и от $w = f(z)$. Таким образом, переменные (τ, α) и для систем уравнений газовой динамики и в общем случае нелинейных систем вида (2) в известном смысле заменяют производную аналитических функций. Это замечание еще раз подчеркивает важность роли производных систем в общей теории нелинейных квазиконформных отображений.

В заключение несколько слов о трудностях, связанных с применением метода годографа и его обобщения — метода производных систем. Основная трудность состоит в том, что в большинстве задач область в плоскости годографа неизвестна. Далее, уже в простейшем случае несжимаемой жидкости, функция $\operatorname{Log} f'(z)$ имеет особенности в критических точках потоков (где скорость обращается в нуль). Кроме того, переменные (τ, α) рассматриваются в зависимости от (u, v), а не от (x, y) — этот переход требует взаимной однозначности отображения $(x, y) \to (u, v)$. Переход от системы (10) к линейной системе (13) требует взаимной однозначности отображения $(u, v) \to (\tau, \alpha)$. В случае уравнений газовой динамики, а тем более — общих нелинейных систем, проверка этих условий может быть

довольно затруднительной. Математическое изучение всех особенностей, которые встречаются на пути применения метода производных систем, еще далеко не завершено.

§ 12. Вариационные принципы

Эти богатые как математическими, так и механическими приложениями принципы показывают, как меняются конформные (или квазиконформные) отображения при малом изменении отображаемых областей.

Основной принцип. Сформулируем один из таких принципов для случая конформного отображения области типа полосы. Пусть $D = \{y_0(x) < y < y(x)\}$ — область, ограниченная двумя гладкими кривыми Γ_0: $y = y_0(x)$ и Γ: $y = y(x)$, $-\infty < x < \infty$, и f — ее конформное отображение на полосу $\Delta = \{0 < v < 1\}$ с нормировкой $f(\pm\infty) = \pm\infty$. Через Γ_h, $0 < h < 1$, мы обозначим линию уровня v, т. е. кривую, переходящую при отображении f в прямую $v = h$.



Рис. 31.

Основной вариационный принцип утверждает, что если заменить Γ кривой $\tilde{\Gamma}$: $y = \tilde{y}(x)$, расположенной частично или полностью ниже Γ (но выше Γ_0), и через $\tilde{f}$ обозначить конформное отображение области $D = \{y_0(x) < y < \tilde{y}(x)\}$ на ту же полосу Δ с той же нормировкой, то произойдет следующее (рис. 31):

1) все линии уровня опустятся, причем соприкосновение $\tilde{\Gamma}_h$ и Γ_h возможно лишь в случае, когда деформации нет, т. е. $\tilde{y}(x) \equiv y(x)$;

2) в любой точке z_0 линии Γ_0 растяжение возрастет, т. е.

$$|\tilde{f}'(z_0)| \geqslant |f'(z_0)|; \tag{1}$$

3) во всех точках z_0 линии Γ, которые остались недеформированными (если такие есть), растяжение уменьшится:

$$|\tilde{f}'(z_1)| \leqslant |f'(z_1)| \tag{2}$$

(при этом знак равенства в (1) и (2) достигается только при отсутствии деформации);

4) в точках наибольшей деформации, где $y(x) - \tilde{y}(x)$ достигает максимума, растяжение также возрастет: если $z_2 = x_2 + iy(x_2)$ и $\tilde{z}_2 = x_2 + i\tilde{y}(x_2)$ — такие точки, то

$$|\tilde{f}'(\tilde{z}_2)| > |f'(z_2)|. \tag{3}$$

Принцип допускает простую механическую трактовку: при вдавливании одной стенки канала все линии тока прижимаются к противоположной стенке, скорости течения в точках недеформированной стенки и в точках наибольшей деформации возрастут, а в точках первой стенки, оставшихся недеформированными, уменьшатся.

Этот принцип выводится из принципа максимума для гармонических функций. Рассмотрим в $\tilde{D}$ гармонические функции $v = \operatorname{Im} f$ и $\tilde{v} = \operatorname{Im} \tilde{f}$; на Γ_0 и в точках Γ, оставшихся недеформированными, имеем $\tilde{v} = v$, а в точках $\tilde{\Gamma}$, отличающихся от Γ, у нас $\tilde{v} = 1$, а $v < 1$. Таким образом, всюду на границе $\tilde{D}$, а значит, и в этой области

$$\tilde{v}(z) \geqslant v(z); \tag{4}$$

отсюда следует утверждение 1). Утверждения 2) и 3) также получаются из неравенства (4), если заметить, что $|f'(z)|$ на границе можно рассматривать как модуль производной $\frac{\partial v}{\partial n}$ в направлении нормали к граничным кривым, и аналогично — $|\tilde{f}'(z)|$. В самом деле, так как все линии $v = \text{const}$ при деформации опускаются, то на Γ_0 имеем $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} \geqslant \frac{\partial v}{\partial n}$, а в точках Γ, которые

остались на месте, $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} \leqslant \frac{\partial v}{\partial n}$. Доказательство 4) основано на той же идее, но требует некоторых дополнительных построений (см. Л. и Ш., стр. 357).

В такой качественной постановке принцип можно распространить на квазиконформные отображения, осуществляемые решениями сильно эллиптических систем, уравнения в характеристиках которых не содержат координат и имеют вид

$$q = q(p, \alpha), \qquad \theta = \theta(p, \alpha). \tag{5}$$

В частности, мы получим тогда, что описанный выше закон изменения линий тока и скоростей течения в канале при деформации его стенки полностью распространяется на газовые потоки со скоростью, нигде не достигающей скорости звука.

Количественные уточнения. Доказанный принцип допускает и количественное уточнение. Для случая конформных отображений это уточнение получается несложно на основе формулы (8) § 10 для отображения полосы с выброшенной малой луночкой на полосу. Пусть область D близка к полосе $\{0 < y < 1\}$ в том смысле, что ее нижняя граница Γ_0 совпадает с осью x, а верхняя Γ имеет уравнение

$$y = 1 - \delta(x), \tag{6}$$

где $\delta(x)$ мала по абсолютной величине и достаточно быстро стремится к 0 при $|x| \to \infty$ (для приложений достаточно считать, что $\delta(x) \equiv 0$ вне некоторого конечного отрезка). Очевидно, что Γ ниже прямой $y = 1$ там, где $\delta(x) > 0$, и выше, где $\delta(x) < 0$. Приближенно можно считать, что переход от прямолинейной полосы $\{0 < y < 1\}$ к области D совершается в результате выполнения конечного числа локальных вариаций, при каждой из которых граница области меняется лишь на малом отрезке вблизи точки $x = a_k$. Для локальной вариации мы можем воспользоваться формулой (8) § 10, ибо с принятой точностью измененный участок границы можно считать дугой окружности. Складывая эти вариации[1]), получим приближенную формулу для конформ-

[1]) Это можно сделать на основании принципа локализации, о котором пойдет речь на стр. 107.

ного отображения проварьированной полосы $\{0<y<1\}$ на полосу $\{0<v<1\}$:

$$w \approx z + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k}{2} \operatorname{th} \frac{\pi (z - a_k)}{2},$$

где σ_k — площадь проварьированного участка — считается положительной, если мы продавили прямую $y=1$ в окрестности точки a_k вниз, и отрицательной, — если вверх.

В пределе, когда верхняя граница области D представляется кривой (6), сумма заменится интегралом и мы получим приближенную формулу для конформного отображения на полосу $\{0<v<1\}$ области, близкой к этой полосе:

$$f(z) \approx z + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \operatorname{th} \frac{\pi (z - t)}{2}\, dt. \tag{7}$$

Эта формула дает возможность количественно оценить, насколько сдвигаются линии тока при нашей деформации контура. Дифференцируя ее, получим формулу

$$f'(z) \approx 1 + \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi(z-t)}{2}}, \tag{8}$$

по которой можно оценить, насколько при деформации меняются скорости.

Особо отметим, что в случае локальной вариации, когда верхняя граница полосы деформируется лишь в малой окрестности точки $x=a$, влияние такой вариации затухает по мере удаления от места вариации со скоростью e^{-kd}, где $k>0$ — некоторая постоянная, а d — расстояние от проварьированного участка.

Это утверждение называют *принципом локализации*. Для простейшего случая прямолинейной полосы оно вытекает непосредственно из формул (7) и (8); оно имеет место и для произвольных гладких областей типа полосы, причем постоянная k в общем случае зависит от геометрических свойств полосы (точнее, от постоянных, оценивающих снизу и сверху ширину полосы, а

также от верхних оценок для наклона и кривизны ее границ).

Количественные оценки для смещения линий тока и изменения растяжения при вариации границ можно получить и для квазиконформных отображений, осуществляемых решениями сильно эллиптических систем вида (5). В эти оценки, кроме геометрических свойств областей, входят также постоянные, оценивающие сильную эллиптичность системы. Они получаются значительно сложнее, чем в случае конформных отображений, и явные формулы типа (7) и (8) в общем случае написать нельзя.

Отметим, что принцип локализации, по которому влияние локальных вариаций сильно убывает по мере удаления от места вариации, также распространяется на квазиконформные отображения, осуществляемые решениями сильно эллиптических систем.

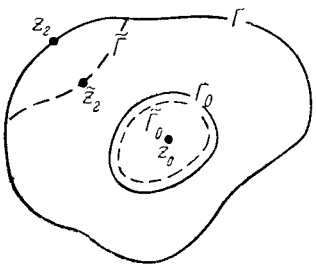


Рис. 32.

Другие области. Вариационные принципы можно получить и для других канонических областей: верхней полуплоскости, круга, внешности круга. Для случая круга, например, вариационный принцип формулируется так. Рассматриваются односвязные области, содержащие фиксированную точку z_0, и их конформные отображения на единичный круг, переводящие эту точку в центр. Через Γ_ρ обозначается линия уровня при отображении f, т. е. прообраз окружности $\{|w| = \rho\}$ при этом отображении; в частности, $\Gamma_1 = \Gamma$ — граница отображаемой области D (рис. 32).

Если продеформировать область D, продавливая границу Γ (или ее участок) внутрь D, то произойдут следующие изменения: 1) все линии уровня сожмутся, т. е. $\tilde{\Gamma}_\rho$ будет лежать внутри Γ_ρ для всех ρ, $0 < \rho < 1$; 2) растяжение в точке z_0 увеличится, т. е будет $|\tilde{f}'(z_0)| > |f'(z_0)|$; 3) в общих точках Γ и $\tilde{\Gamma}$ (если такие есть) растяжение уменьшится: $|\tilde{f}'(z_1)| < |f'(z_1)|$. В дополнительном предположении, что контуры Γ и $\tilde{\Gamma}$

звездны относительно точки z_0, т. е. что они представляются однозначными уравнениями $r = r(\varphi)$ и $r = \tilde{r}(\varphi)$ в полярных координатах с полюсом z_0, можно сделать еще утверждение: 4) в точках наибольшей деформации, где $\frac{\tilde{r}(\varphi)}{r(\varphi)}$ достигает своего минимума $\lambda < 1$, растяжение увеличится: $|\tilde{f}'(\tilde{z}_2)| > \frac{1}{\lambda}|f'(z_2)|$.

Отправляясь от формулы (7) § 10 для отображения на круг круга с выброшенной луночкой, можно, как и выше, получить количественное уточнение этого принципа. Оно основывается на приближенной формуле для конформного отображения на единичный круг областей, близких к кругу по положению и кривизне, т. е. таких, что в полярных уравнениях их границ

$$r = r(\varphi) = 1 - \delta(\varphi), \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \tag{9}$$

имеем $|\delta|$, $|\delta'|$, $|\delta''| < \varepsilon$, где ε достаточно мало. Тогда с точностью до малых порядка выше ε конформное отображение такой области на единичный круг с нормировкой $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ задается формулой

$$f(z) \approx z\left\{1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(t)\,\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,dt\right\}. \tag{10}$$

При помощи дополнительного конформного отображения можно получить и более общий результат. Пусть дана произвольная односвязная область D с дважды гладкой границей Γ, и пусть f — ее конформное отображение на единичный круг с нормировкой $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$. Рассмотрим еще область $\tilde{D}$ с границей $\tilde{\Gamma}$ и для любой точки $\zeta \in \Gamma$ обозначим через $\delta(\zeta)$ отрезок нормали к Γ, заключенный между Γ и $\tilde{\Gamma}$; будем считать $\delta(\zeta) > 0$, если этот отрезок лежит в D, и $\delta(\zeta) < 0$, если он лежит вне D. Будем считать область $\tilde{D}$ близкой к D в том смысле, что для всех точек $\zeta \in \Gamma$ величины $|\delta(\zeta)|$, $|\delta'(\zeta)|$, $|\delta''(\zeta)|$ не превосходят фиксированного малого числа ε. Тогда для отображения $\tilde{D}$ на единичный круг с той же нормировкой $\tilde{f}(z_0) = 0$, $\tilde{f}'(z_0) > 0$

справедлива приближенная формула

$$\tilde{f}(z) \approx f(z)\left\{1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta^*(t)\,\frac{e^{it} + f(z)}{e^{it} - f(z)}\,dt\right\}, \qquad (11)$$

где $e^{it} = f(\zeta)$ и $\delta^*(t) = |f'(\zeta)|\,\delta(\zeta)$.

Для случая локальной вариации, когда область $\tilde{D}$ отличается от D лишь в малой окрестности точки $\zeta_0 \in \Gamma$, эту формулу можно записать в виде

$$\tilde{f}(z) \approx f(z)\left\{1 + \frac{\sigma}{2\pi}|f'(\zeta_0)|^2\,\frac{e^{it_0} + f(z)}{e^{it_0} - f(z)}\right\}, \qquad (12)$$

где $e^{it_0} = f(\zeta_0)$ и σ — площадь, заключенная между границами Γ и $\tilde{\Gamma}$. Из нее получается *принцип локализации* в следующей форме: вблизи места вариации вариация конформного отображения пропорциональна проварьированной площади и обратно пропорциональна расстоянию до этого места.

Вариационный принцип и его количественные уточнения, а также принцип локализации можно распространить на квазиконформные отображения, осуществляемые решениями сильно эллиптических систем вида (5).

Граничные производные. При изучении движений жидкости и газа наиболее интересным является определение скорости вблизи границы области течения у обтекаемых тел. Поэтому для приложений особенно важно знать поведение модуля производной отображения на границе отображаемой области. Мы приведем здесь некоторые факты, относящиеся к этому вопросу.

Прежде всего отметим условия, обеспечивающие существование граничной производной. Пусть граница Γ области D дважды гладка в окрестности точки ζ_0 [1]) и такова же граница Γ^* области D^* в окрестности точки ω_0. Тогда производную f' конформного отображения области D на D^* можно непрерывно продолжить на некоторый участок границы Γ, содержащий ζ_0, и на этом

[1]) Это означает, что в окрестности ζ_0 кривую Γ можно представить уравнением вида $\zeta = \zeta(t)$, где t — действительный параметр, $\zeta(t_0) = \zeta_0$ и производные ζ', ζ'' непрерывны в окрестности t_0, причем $\zeta'(t) \neq 0$.

участке $f'(\zeta) \neq 0$ (мы считаем, что $f(\zeta_0) = \omega_0$). Если же ζ_0 — угловая точка Г и в ней смыкаются под углом $\alpha\pi$, $0 < \alpha < 2$ (угол меряется со стороны области, рис. 33), две дважды гладкие граничные дуги, то для конформного отображения D на гладкую в окрестности точки $\omega_0 = f(\zeta_0)$ область мы имеем в окрестности ζ_0:

$$\begin{aligned} f(z) &= a(z-\zeta_0)^{\frac{1}{\alpha}} + o\left(|z-\zeta_0|^{\frac{1}{\alpha}}\right), \\ f'(z) &= \frac{a}{\alpha}(z-\zeta_0)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + o\left(|z-\zeta_0|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right), \end{aligned} \tag{13}$$

где $a \neq 0$. Доказательство этих утверждений можно найти в книге Г. М. Голузина [1].

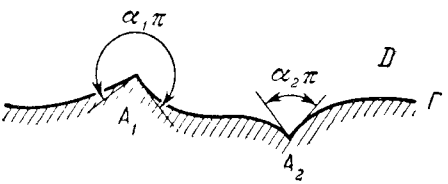


Рис. 33.

Отсюда, в частности, следует, что, если на границе области течения есть угол, направленный в сторону течения, где $1 < \alpha < 2$ (как в точке A_1 на рис. 33), то в этой точке скорость течения бесконечна. В углах, направленных от течения, где $0 < \alpha < 1$ (как в точке A_2 на рис. 33), скорость течения равна нулю.

Покажем теперь, как получать приближенные выражения граничных производных для конформных отображений областей, близких к данной. Остановимся на случае отображения f области $\{0 < y < 1 - \delta(x)\}$, близкой к полосе, на полосу. Нам удобнее рассматривать обратное к f отображение g; с той же точностью, что и в формуле (7), его можно представить в виде

$$g(w) \approx w - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{th}\,\frac{\pi(w-t)}{2}\,dt, \tag{14}$$

а его производную в виде

$$g'(w)\approx 1-\frac{\pi}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(t)\,dt}{\operatorname{ch}^2\dfrac{\pi(w-t)}{2}}. \tag{15}$$

В силу соотношения $\operatorname{ch}\left(\frac{\pi i}{2}+\alpha\right)=i\operatorname{sh}\alpha$ в точках $w=u+i$ граничной прямой $v=1$ имеем $\operatorname{ch}^2\frac{\pi(w-t)}{2}=-\operatorname{sh}^2\frac{\pi(u-t)}{2}$, следовательно, подынтегральная функция при $t=u$ обращается в бесконечность второго порядка, интеграл расходится и формула (15) на прямой $v=1$ неприменима.

Формулу для граничной производной можно получить, если воспользоваться понятием *главного значения* интеграла, т. е. понимать интеграл по оси x от функции φ, обращающейся в бесконечность в некоторой точке a, а в остальном непрерывной, как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx=\lim_{\substack{\mu\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left\{\int\limits_{-\mu}^{a-\varepsilon}\varphi(x)\,dx+\int\limits_{a+\varepsilon}^{\mu}\varphi(x)\,dx\right\}$$

(здесь существенна симметричность пределов интегрирования). В этом смысле, очевидно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\operatorname{cth}\frac{\pi(u-t)}{2}\,dt=2u, \tag{16}$$

и поэтому формулу (14) при $w=u+i$ можно переписать в виде

$$g(w)\approx w-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\delta(t)-\delta(u)]\operatorname{cth}\frac{\pi(u-t)}{2}\,dt-u\delta(u)$$

(мы воспользовались соотношением $\operatorname{th}\left(\frac{\pi i}{2}+\alpha\right)=\operatorname{cth}\alpha$). Отсюда, дифференцируя и снова пользуясь (16), находим нужное выражение для граничной производной

$$g'(w)\approx 1-\delta(u)+\frac{\pi}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(t)-\delta(u)}{\operatorname{sh}^2\dfrac{\pi(t-u)}{2}}\,dt; \tag{17}$$

здесь интеграл существует в смысле главного значения, ибо $\delta(t) - \delta(u)$ при $t = u$ имеет нуль не ниже первого порядка.

Аналогичные формулы, также содержащие интегралы в смысле главных значений, можно получить для граничных производных конформных отображений на другие канонические области.

Узкие полосы. Приведем еще одну формулу для граничной производной конформного отображения криволинейной полосы $D = \{0 < y < y(x)\}$ на прямолинейную полосу $\{0 < v < h\}$. При этом мы будем предполагать, что число h мало, ширина y полосы D имеет порядок h, а производная y' столь мала, что величиной y'^2 можно пренебречь в сравнении с yy''.

В силу принципа локализации приближенное вычисление граничной производной — локальная задача и, следовательно, мы можем заменить отображающую функцию первыми несколькими членами ее тейлоровского разложения. Без ограничения общности будем считать, что точке, в которой мы вычисляем производную, соответствует точка $w = ih$, и запишем приближенное выражение функции, обратной к отображающей:

$$z = \alpha + aw + bw^2 + cw^3. \tag{18}$$

Условие соответствия нижних границ полос — осей u и x — выражается в том, что все коэффициенты этого разложения действительны. Полагая в (18) $w = u + ih$, получим параметрические уравнения границы полосы D:

$$x = \alpha - bh^2 + (a - 3ch^2)\,u + bu^2 + cu^3,$$
$$y = ah - ch^3 + 2bhu + 3chu^2.$$

Коэффициенты разложения (18) мы найдем, приравнивая значения функции y и первых двух производных $y' = \frac{\dot y}{\dot x}$, $y'' = \frac{\ddot y \dot x - \dot x \ddot y}{\dot x^3}$ при $u = 0$ известным значениям y (ширина полосы), y' и y''. Обозначив $a - 3ch^2 = A$, мы найдем

$$a - ch^2 = \frac{y}{h}, \qquad b = \frac{Ay'}{2h}, \qquad 3Ac - 2b^2 = \frac{A^3 y''}{2h},$$

откуда для A получаем квадратное уравнение

$$A^2 + \frac{3+y'^2}{hy''}A - \frac{3y}{h^2y''} = 0. \tag{19}$$

Производная функции (18) в точке $w = ih$ равна

$$\left.\frac{dz}{dw}\right|_{ih} = a - 3ch^2 + 2bih = A(1 + iy'),$$

откуда модуль искомой граничной производной

$$|f'(z_0)| = \frac{1}{\left|\left.\frac{dz}{dw}\right|_{ih}\right|} = \frac{1}{A\sqrt{1+y'^2}}.$$

С принятой точностью в (19) можно пренебречь величиной y'^2, тогда корень этого уравнения, конечный при малых h, будет

$$A = -\frac{3}{2hy''} + \frac{3}{2hy''}\sqrt{1 + \frac{4}{3}yy''} \approx \frac{y}{h}\left(1 - \frac{1}{3}yy''\right)$$

(мы воспользовались приближенным равенством $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8}$, справедливым для малых α). С той же точностью

$$|f'(z_0)| \approx \frac{1}{A} \approx \frac{h}{y}\left(1 + \frac{1}{3}yy''\right). \tag{20}$$

Этой формулой мы будем неоднократно пользоваться.

Сильно эллиптические системы. Мы уже отмечали, что вариационный принцип и принцип локализации распространяются на квазиконформные отображения, осуществляемые решениями сильно эллиптических систем вида (5):

$$q = q(p, \alpha), \qquad \theta = \theta(p, \alpha).$$

Как и в случае конформных отображений, это позволяет оценить растяжение на границах криволинейной полосы D ее квазиконформного отображения на прямолинейную полосу Δ (такое растяжение — аналог модуля граничной производной). При этом предполагается, что ширина полосы D заключена между некоторыми положительными постоянными и что тангенс угла наклона ее границ и их кривизна также ограничены. В оценку граничного растяжения входят геометрические

свойства полосы (границы для ее ширины, наклона и кривизны), а также постоянные k_1 и k_2, характеризующие сильную эллиптичность системы:

$$0 < k_1 < \theta_\beta < \pi - k_1, \quad \frac{\partial q_\beta}{\partial p_\beta} \geqslant k_2 > 0$$

(определение характеристик p_β, q_β и θ_β см. на стр. 98).

Пользуясь этими оценками, можно доказать такую теорему существования (см. М. А. Лаврентьев [4], гл. VI).

Для любой сильно эллиптической системы вида (5) существует соответствующее ей квазиконформное отображение криволинейной полосы $D = \{y_0(x) < y < y(x)\}$ на прямолинейную полосу $\Delta = \{0 < v < h\}$, если ширина D ограничена сверху и снизу, ограничены наклон и кривизна ее границ, а ширина h полосы Δ достаточно мала.

Эта теорема доказывает, в частности, существование в полосе D установившегося течения идеального газа, если расход достаточно мал. При увеличении расхода такое течение будет существовать до тех пор, пока его скорость в какой-либо точке границы не достигнет скорости звука.

§ 13. Приближенные методы

При решении конкретных задач гидродинамики для всех математических моделей (от установившихся движений идеальной жидкости до неустановившихся движений сжимаемой вязкой жидкости — плоских и с осевой симметрией) все большее и большее значение приобретают приближенные решения. За последнее десятилетие в этом направлении достигнуты особенно большие успехи благодаря созданным и освоенным электронно-вычислительным машинам (ЭВМ).

Для большого класса задач гидродинамики разработаны программы для численного решения этих задач на ЭВМ. Сущность метода состоит в редукции граничных задач для уравнений гидродинамики к задачам решения систем алгебраических уравнений, которые получаются, если частные производные заменить их конечноразностными приближениями, а граничные условия — условиями

в конечной системе точек на границе. Создана новая область — машинная математика со своими специфическими приемами редукции «непрерывных» задач к дискретным, оценками точности, контролем в процессе счета. Для «сильно» устойчивых задач машинная математика достигла предельного успеха, однако осталось немало задач механики, где прямое применение числовых методов не приводит к нужным результатам.

Особо важными оказываются проблемы устойчивости решений граничных задач для уравнений — математических моделей движений среды. Большое значение имеют также приемы грубых расчетов, которые могут дать возможность оценки характера искомого решения, а также дать количественную оценку устойчивости задачи.

Приведем краткое описание некоторых приемов приближенного построения конформных отображений.

Численные методы. Как мы видели, построение конформного отображения односвязной области D на канонические области сводится к задаче Дирихле. Поэтому мы остановимся на решении последней задачи: требуется определить гармоническую в D функцию $u(x, y)$, принимающую на границе Γ области заданные значения. Разностный метод решения этой задачи состоит в следующем. В плоскости (x, y) строим сетку квадратов с шагом h и со сторонами, параллельными осям координат. Пусть (x_i, y_j) — один из узлов нашей сетки. Теперь положим в точке (x_i, y_j)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{h^2}[u(x_i + h, y_j) - u(x_i, y_j) + \\ + u(\alpha_i - h, y_j) - u(x_i, y_j)]$$

и аналогично

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2}[u(x_i, y_j + h) - 2u(x_i, y_j) + u(\alpha_i, y_j - h)].$$

Уравнение Лапласа $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ приближенно заменится разностным уравнением

$$u(x_i, y_j) = \frac{1}{4}[u(x_i + h, y_j) + u(x_i - h, y_j) + \\ + u(x_i, y_j + h) + u(x_i, y_j - h)]. \quad (1)$$

Оно отражает основное свойство гармонических функций: значение u в каждом узле есть среднее арифметическое ее значений в соседних узлах. Мы можем выписать это уравнение для всех узлов (x_i, y_j), расположенных внутри области D. Для узлов, расположенных от Г на расстоянии, меньшем h, мы можем считать значение $u(x_i, y_j)$ известным, приравняв его заданному значению u в точке Г, ближайшей к этому узлу. Таким образом, для определения $u(x_i, y_j)$ мы получим систему линейных уравнений.

Доказано, что при непрерывных заданиях u на Г эта система всегда разрешима и при $h \to 0$ величина $u(x_i, y_j)$ стремится к соответствующему значению искомой функции.

Система (1) при малых h содержит большое число неизвестных. Для облегчения ее решения существует несколько приемов. Среди них укажем метод Либмана, который является методом последовательных приближений. По этому методу сначала во всех узлах задаются произвольные значения $u(x_i, y_j)$. Затем последовательно обходятся все узлы, и в каждом из них значения исправляются по формуле (1) через заданные (или уже исправленные) значения в соседних узлах. Этот процесс последовательных исправлений можно облегчить, если изготовить специальные шаблоны с окошечками, в которых видны только нужные значения u. При довольно широких условиях на кривую Г и граничные данные доказано, что при неограниченном повторении обхода узлов с исправлением значений каждая величина $u(x_i, y_j)$ будет стремиться к решению системы (1) при фиксированном h.

Описанный метод приближенного решения задачи Дирихле может быть распространен на линейные уравнения второго порядка как в плоском, так и в пространственном случае. Наряду с задачей Дирихле может быть также рассмотрена задача Неймана, когда на границе Г области D задана нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial n}$, или вообще некоторая линейная комбинация $a(\zeta)\frac{\partial u}{\partial n} + b(\zeta)\frac{\partial u}{\partial s}$. Заметим, что в этих постановках

надо оговорить условия гладкости Γ, а также некоторые дополнительные условия на $\frac{\partial u}{\partial n}$.

Вариационные методы. Эти графоаналитические методы основаны на вариационных принципах теории конформных отображений. Начнем с приближенного решения задачи о конформном отображении ограниченных областей с дважды гладкой границей на единичный круг.

Пусть сначала область D близка к кругу в том смысле, что в полярном уравнении $r = 1 - \delta(\varphi)$ ее границы Γ функция δ вместе с двумя производными не превосходит малое число ε. Как показано в предыдущем параграфе, приближенное с точностью до ε^2 выражение для конформного отображения этой области на единичный круг с нормировкой $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ имеет вид

$$f(z) \approx z\left\{1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(t)\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,dt\right\}. \tag{2}$$

С той же точностью для обратного отображения $g = f^{-1}$ круга $\{|w| < 1\}$ на область D имеем

$$g(w) \approx w\left\{1 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(t)\frac{e^{it}+w}{e^{it}-w}\,dt\right\}. \tag{3}$$

В пределах принятой точности $\frac{g(w)}{w} - 1$ можно заменить на $\log\frac{g(w)}{w}$ и тогда, отделяя в (3) действительные и мнимые части, получим полезные формулы, которые связывают полярные координаты соответствующих друг другу точек $z = re^{i\Phi}$ и $w = \rho e^{i\theta}$:

$$\begin{aligned} r &\approx \rho\left\{1 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(t)\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(t-\theta)+\rho^2}\,dt\right\}, \\ \varphi &\approx \theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(t)\frac{2\rho\sin(t-\theta)}{1-2\rho\cos(t-\theta)+\rho^2}\,dt. \end{aligned} \tag{4}$$

При $\rho = \text{const}$ эти формулы дают параметрические представления линий уровня Γ_ρ — прообразов окружностей $\{|w| = \rho\}$. Вторая из них применима и при $\rho = 1$:

$$\varphi \approx \theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2}\, dt, \tag{5}$$

если интеграл в ней понимать в смысле главного значения. Впрочем, если учесть, что интеграл от $\operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2}$ по отрезку $[0, 2\pi]$ в том же смысле равен нулю, то последнюю формулу можно переписать так, чтобы в ней стоял обычный интеграл:

$$\varphi \approx \theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\delta(t) - \delta(\theta)] \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2}\, dt. \tag{6}$$

В том же § 12 мы показали, что этим способом можно получить приближенные формулы для конформного отображения областей, близких к данной: если область $\tilde{D}$ близка к D в смысле близости второго порядка и f — конформное отображение D на единичный круг с нормировкой $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$, то область $f(\tilde{D})$ близка к кругу, ее отображение f_1 на круг можно найти по формуле (2), а тогда сложная функция $\tilde{f} = f_1 \circ f$ будет отображать $\tilde{D}$ на круг.

Укажем еще процесс приближенного построения конформного отображения на круг областей достаточно широкого класса, основанный на той же идее. Будем предполагать, что граница Γ рассматриваемой области D задается полярным уравнением $r = r(\varphi)$, где функция r ограничена: $0 < r_0 < r(\varphi) < r_1$ и имеет две непрерывные производные.

Фиксируем натуральное число n и построим n кривых

$$r = r_k(\varphi) = 2r_1 - \frac{k}{n}[2r_1 - r(\varphi)], \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Если n достаточно велико, то кривая $r = r_1(\varphi)$ близка к окружности $\{|z| = 2r_1\}$ и по формуле (2) мы сможем построить приближенное конформное отображение f_1 ее внутренности на круг $\{|w| < 1\}$. Кривая $r = r_2(\varphi)$ близка

к $r = r_1(\varphi)$, и описанным выше приемом можно построить отображение f_2 ее внутренности на круг. Поступая так же и дальше, мы через n шагов получим приближенное конформное отображение на круг заданной области D.

Хотя точность этого процесса невелика, он оказывается удобным для прикидочных расчетов и построений конформных отображений на круг ограниченных областей.

Описанные приемы распространяются на отображения полос. Если полоса $D = \{0 < y < 1 - \delta(x)\}$ близка к прямолинейной полосе в смысле близости второго порядка, то ее конформное отображение на полосу $\Delta = \{0 < v < 1\}$ приближенно выражается формулой

$$f(z) \approx z + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \operatorname{th} \frac{\pi(z-t)}{2}\, dt, \tag{7}$$

а обратное отображение — формулой

$$g(w) \approx w - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \operatorname{th} \frac{\pi(w-t)}{2}\, dt \tag{8}$$

(см. предыдущий параграф). Последняя формула справедлива в замкнутой полосе $\{0 \leqslant v \leqslant 1\}$, и полагая в ней $w = u$ и $w = u + i$, мы найдем соответствие точек прямых $v = 0$, $v = 1$ и границ полосы Γ_0, Γ:

$$\begin{aligned} x &\approx u - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \operatorname{th} \frac{\pi(u-t)}{2}\, dt, \\ x &\approx u - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \operatorname{cth} \frac{\pi(u-t)}{2}\, dt; \end{aligned} \tag{9}$$

последний интеграл надо понимать в смысле главного значения.

При помощи этих формул можно, как и выше, находить отображение на Δ полос, близких к таким, отображение которых известно. Можно также построить процесс для приближенного конформного отображения

на $\Delta = \{0 < v < 1\}$ полос $D = \{0 < y < y(x)\}$ достаточно широкого класса, для которых $0 < h_0 \leqslant y(x) \leqslant h_1$ и y', y'' также непрерывны и ограничены.

Фиксируем число n и в полосе $y(x) < y < h_1$ построим n кривых

$$y = y_k(x) = h_1 - \frac{k}{n}[h_1 - y(x)], \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

При достаточно большом n кривая $y = y_1(x)$ близка к прямой $y = h_1$, и для отображения f_1 полосы $\{0 < y < y_1(x)\}$ на Δ можно воспользоваться формулой (7). Функция f_1 преобразует кривую $y = y_2(x)$ в кривую, близкую к прямой $v = 1$, и значит, мы можем найти отображение f_2 полосы $\{0 < y < y_2(x)\}$ на Δ. Продолжая процесс, через n шагов мы получим приближенное конформное отображение заданной полосы D на Δ.

Пристрелочный метод. Этот метод основан на решении так называемых некорректных граничных задач теории уравнений с частными производными. Пусть, например, требуется найти конформное отображение криволинейной полосы $D = \{0 < y < y(x)\}$ на прямолинейную полосу $\Delta = \{0 < v < 1\}$. Мы видим, что эта задача сводится к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \tag{10}$$

которому удовлетворяет функция v. Уравнение Лапласа — эллиптического типа, и задача Дирихле является для него корректной граничной задачей (ее решение существует, единственно и устойчиво, т. е. непрерывно изменяется при изменении граничных данных).

Мы опишем другой метод решения задачи об отображении, который основан на решении не задачи Дирихле, а *задачи Коши* для уравнения Лапласа, в которой на оси x задаются значения не только функции v, но и производной $\frac{\partial v}{\partial y}$. Хотя эта задача является некорректной (она корректна для уравнений гиперболического типа, например, уравнения колебаний струны

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\Big)$, все же метод, на ней основанный, оказывается полезным для приложений.

Для описания метода заметим, что в силу условий Коши — Римана $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, поэтому можно считать, что на оси x заданы значения *растяжения* $\frac{\partial u}{\partial x}$ или обратной к нему величины — характеристики p. Напомним еще, что в случае конформных отображений характеристики p и α связаны соотношениями

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -p\frac{\partial \alpha}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial u} \tag{11}$$

(см. производную систему (14) § 11). Будем также считать, что полоса D асимптотически близка к единичной,

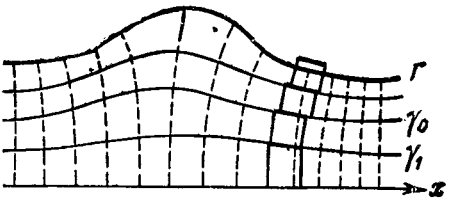


Рис. 34.

т. е. существуют постоянные A и k такие, что для всех x

$$|y(x) - 1| < Ae^{-k|x|}. \tag{12}$$

Перейдем к описанию метода пристрелки. Фиксируем натуральное число n и представим себе, что полоса Δ покрыта сетью квадратов со стороной $h = \frac{1}{n}$. Задача приближенного построения конформного отображения D на Δ с нормировкой $f(\pm\infty) = \pm\infty$ сводится к построению в D сети криволинейных квадратов, которая покрывает D, не выходит за ее пределы и при больших $|x|$ близка к сети прямолинейных квадратов со стороной h.

Зададимся положительными величинами p_k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \lim\limits_{|k|\to\infty} p_k = 1$, и покроем ось x отрезками длины $p_k h$ так, чтобы соседние имели общие концы (рис. 34). Эти отрезки мы примем за основания криво-

линейных квадратов, боковые стороны которых ортогональны к оси x, а верхние наклонены к оси x под углом $\alpha_k^{(1)} = \frac{1}{p_k}(p_{k+1} - p_k)$ — мы использовали разностный аналог второго уравнения (11). Верхние стороны этих квадратов мы сгладим так, чтобы они образовали плавную линию γ_1, при больших $|x|$ близкую к прямой $y = h$.

Над γ_1 построим вторую полосу криволинейных квадратов, боковые стороны которых ортогональны к γ_1, а верхние имеют длины $p_k^{(2)}h$ и наклонены к оси x под углом $\alpha_k^{(2)}$, где

$$p_k^{(2)} = p_k^{(1)} - (\alpha_{k+1}^{(1)} - \alpha_k^{(1)})\, p_k^{(1)}, \qquad \alpha_k^{(2)} = \alpha_k^{(1)} + \frac{p_{k+1}^{(1)} - p_k^{(1)}}{p_k^{(1)}} \tag{13}$$

$(p_k^{(1)} = p_k)$ — мы использовали разностный аналог уравнений (11). Верхние стороны квадратов снова сгладим и получим линию γ_2, при больших $|x|$ близкую к прямой $y = 2h$.

Продолжая этот процесс, через n шагов мы получим линию γ_n и сеть криволинейных квадратов, которая при больших $|x|$ почти точно покрывает соответствующую часть области D. В конечной части некоторые участки линии γ_n в общем случае окажутся выше границы Г области D, а некоторые ниже этой границы. Если квадрат с верхней стороной $p_k^{(n)}$ оказался выше Г, то мы уменьшим соответствующую величину p_k, а если ниже — то увеличим; изменение p_k будем делать пропорционально отклонению верхней стороны квадрата от линии Г.

Таким образом мы получим новое распределение $\tilde{p}_k$ характеристик p и, отправляясь от него, повторим описанный процесс. Он даст новую линию $\tilde{\gamma}_n$ (более близкую к Г, чем γ_n), по которой можно снова ввести поправки к распределению характеристик p_k и т. д. Можно организовать процесс так, чтобы верхние квадраты с данным номером k были попеременно то выше, то ниже линии Г, поэтому метод и называется пристрелочным. При плавных границах Г за несколько приемов можно получить достаточно хорошее приближение к искомому конформному отображению (см. рис. 34).

Обобщения. Пристрелочный метод можно применять также для приближенного построения конформного отображения ограниченных двусвязных областей на круговые кольца. Пусть такая область D ограничена двумя гладкими кривыми Γ_0 (внутренняя граница) и Γ (внешняя) и требуется найти ее конформное отображение на кольцо $\{\rho_0 < |w| < 1\}$. Число ρ_0 не задается, а должно быть определено в процессе решения задачи (см. Л. и Ш., стр. 160); мы можем задать еще точку $\zeta_1 \in \Gamma$, соответствующую точке $w = 1$.

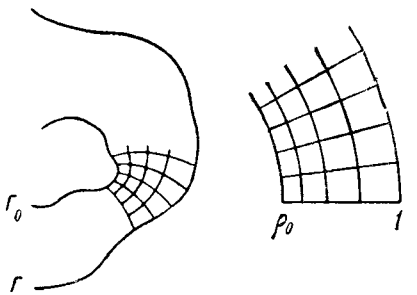


Рис. 35.

Фиксируем натуральное число n и на окружности $\{|w| = 1\}$ построим n криволинейных квадратов, внешние основания которых равны $h = \frac{2\pi}{n}$ (рис. 35). Зададимся положительными величинами p_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, и на Γ построим n криволинейных квадратов, внешние основания которых равны $p_k h$, боковые стороны ортогональны к Γ, а внутренние основания подсчитываются при помощи разностных аналогов системы

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = -\rho\frac{\partial \alpha}{\partial \rho}, \quad \frac{\rho}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \rho} = \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}, \tag{14}$$

которая представляет собой запись производной системы (12) в полярных координатах (ρ, θ) на плоскости w (см. Л. и Ш., стр. 25).

Внутренние основания этих квадратов мы сглаживаем так, чтобы получилась замкнутая кривая γ_1. На γ_1

снова строим кольцо криволинейных квадратов (как раньше строили на Г), получаем кривую γ_2 и продолжаем построение. Через m шагов кривая γ_m будет пересекаться с внутренней границей Γ_0 области D. Тогда мы выберем новое распределение величин p_k, уменьшая их, если соответствующий квадрат попал внутрь Γ_0, и увеличивая в противоположном случае. По этому распределению снова строим сеть криволинейных квадратов, затем еще раз исправляем распределение p_k (при этом можно также уменьшать шаг h), строим новую сеть и т. д. При достаточно большом n, повторяя процесс достаточное число раз, можно получить хорошее приближение искомого конформного отображения.

Метод применим и для построения конформного отображения на круг $\{|w|<1\}$ односвязных ограниченных областей D. Здесь нужно, кроме точки ζ_1, соответствующей $w=1$, задаться еще точкой z_0, соответствующей $w=0$, и организовать процесс так, чтобы боковые стороны квадратов сходились в одну точку z_0. Последнее можно заменить условием, что на предпоследнем шагу кривая γ_{m-1}, сглаживающая внутренние основания квадратов, близка к окружности малого радиуса с центром в точке z_0.

Важным достоинством метода пристрелки является его универсальность. С небольшими изменениями его можно применять для приближенного решения пространственных задач гидродинамики с осевой симметрией, вихревых задач, а также плоских и с осевой симметрией задач газовой динамики.

Например, в случае плоских задач газовой динамики, сводящихся к квазиконформным отображениям на полосу $\{0<v<1\}$, изменение описанного выше процесса состоит лишь в том, что вместо квадратов строятся прямоугольники со сторонами p_kh, q_kh, а система (14) заменяется более общей системой (14) из предыдущего параграфа.

Литература

1. Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, изд. 2-е, «Наука», М., 1966.
2. Р. Курант, Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, ИЛ, М., 1953.

3. В. Коппенфельс и Ц. Штальман, Практика конформных отображений, ИЛ, М., 1963.
4. М. А. Лаврентьев, Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, Изд-во АН СССР, М., 1962.
5. Л. И. Волковыский, Квазиконформные отображения, Львов, 1954.
6. Л. Альфорс, Лекции по квазиконформным отображениям, ИЛ, М., 1968.
7. М. М. Лаврентьев, Об одной краевой задаче для гиперболической системы, Матем. сб. 38(80) : 4 (1956), 451—464.

Глава IV

КАЧЕСТВЕННЫЕ МОДЕЛИ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Сверхзвуковым течениям посвящено большое количество работ как теоретического, так и прикладного характера, в которых решено много важных задач; особенно плодотворным оказалось применение электронных вычислительных машин. Тем не менее многие явления, связанные с движениями со скоростями выше звуковой, остались неисследованными. Особенно мало изучены движения, у которых в одних зонах — скорости дозвуковые, а в других — сверхзвуковые. Здесь мы рассмотрим несколько значительно более простых для исследования моделей систем уравнений с частными производными, на которых видны некоторые явления, присущие уравнениям газовой динамики в сверхзвуковом и переходном режимах.

§ 14. Гиперболические конформные отображения

Мы начнем с краткого описания основных задач, связанных с h-конформными отображениями, которые представляют собой гиперболический аналог обычных конформных отображений. В главе I мы говорили о том, что дозвуковой режим газовых течений характеризуется эллиптичностью, а сверхзвуковой — гиперболичностью соответствующих систем уравнений с частными производными. В то время как конформные отображения связаны с простейшей эллиптической системой — системой Коши — Римана, h-конформные отображения связаны с простейшей гиперболической системой

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Условия отобразимости. Под *h-конформными отображениями* мы будем понимать взаимно однозначные отображения $f = u + iv$, удовлетворяющие системе (1). Как мы видели в гл. II, такие отображения допускают представление вида

$$u = \varphi(x+y) + \psi(x-y), \qquad v = \varphi(x+y) - \psi(x-y), \quad (2)$$

где φ и ψ — произвольные гладкие функции одного переменного. Якобиан таких отображений

$$j(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 4\varphi'(x+y)\psi'(x-y) \qquad (3)$$

может обращаться в нуль лишь на прямых $x \pm y = \text{const}$ — характеристиках системы (1). В отличие от

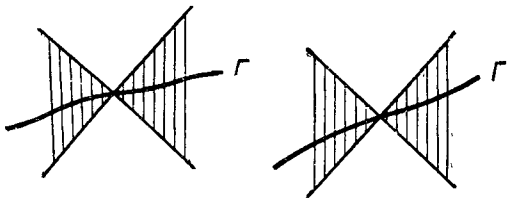


Рис. 36.

системы Коши — Римана якобиан решений системы (1) может менять знак на характеристиках, и тогда эти характеристики будут *линиями ветвления* — картина качественно отличается от аналитических функций, которые могут иметь лишь точки ветвления.

Теорема Римана о существовании конформных отображений на h-конформные отображения не распространяется. Дело в том, что, как видно из формул (2), h-конформные отображения переводят характеристики системы (1) снова в характеристики:

$$u + v = 2\varphi(x+y), \quad u - v = 2\psi(x-y),$$

поэтому при $x \pm y = \text{const}$ мы имеем $u \pm v = \text{const}$. При этом пара горизонтальных характеристических секторов (заштрихованы на рис. 36) в случае положительного якобиана переходит в такую же пару секторов (как на рис. 36), а в случае отрицательного якобиана — в пару вертикальных секторов. Для взаимно однозначных отображений якобиан не может менять знака, по-

этому граница Γ области и граница Γ* ее образа при h-конформном отображении должны быть расположены относительно характеристик все время одинаково (в случае $j \geqslant 0$) или все время различно (если $j \leqslant 0$). Поэтому, например, нельзя h-конформно отобразить круг на полуплоскость, ибо граница круга переходит из одной пары характеристических секторов в другую, а граница полуплоскости все время остается в одной паре секторов.

Области типа полуплоскости. Тем не менее, области, которые одинаково расположены относительно характеристик, оказываются возможным h-конформно отображать друг на друга. Рассмотрим, например, задачу об отображении на полуплоскость области D типа полуплоскости, ограниченной гладкой кривой $\Gamma = \{y = y(x)\}$, для которой всюду $|y'(x)| \leqslant 1$, причем равенство может достигаться лишь в изолированных точках (условие одинаковости расположения относительно характеристик) и, кроме того, Γ при $x \to \pm\infty$ ни с одной стороны не приближается асимптотически к характеристикам.

Мы докажем сейчас, что такую область можно h-конформно отобразить на верхнюю полуплоскость, и притом бесчисленным множеством способов; именно можно еще задать возрастающее и гладкое соответствие точек Γ и действительной оси.

В самом деле, отображение f^{-1}, обратное к искомому, также удовлетворяет системе (1), поэтому его можно представить в виде

$$x = \varphi_1(u+v) + \psi_1(u-v), \quad y = \varphi_1(u+v) - \psi_1(u-v). \quad (4)$$

Пусть еще соответствие точек Γ и оси u задается функцией $x = \lambda(u)$; у нас $\lambda'(u) \geqslant 0$ и равенство может достигаться лишь в изолированных точках. При $v = 0$ мы должны иметь $\lambda(u) = \varphi_1(u) + \psi_1(u)$, $y[\lambda(u)] = \varphi_1(u) - \psi_1(u)$, откуда находим

$$\varphi_1(u) = \frac{1}{2}\{\lambda(u) + y[\lambda(u)]\}, \quad \psi_1(u) = \frac{1}{2}\{\lambda(u) - y[\lambda(u)]\}. \quad (5)$$

Правые части этих формул — известные дифференцируемые функции, а их производные $\frac{1}{2}\{1 \pm y'[\lambda(u)]\}\lambda'(u)$

по условиям неотрица[illegible]ьны и могут обращаться в нуль лишь в изолированных точках. Следовательно, обе эти функции строго возрастают на всей оси u. При $u \to \pm\infty$ они стремятся соответственно к $\pm\infty$, ибо если хоть одна из них стремится к конечному пределу, то, как видно из (5), кривая Γ асимптотически приближается к характеристике.

Поэтому соотношения $x+y=2\varphi_1(u+v)$, $x-y=2\psi_1(u-v)$ можно однозначно обратить, и мы получим $u+v=2\varphi(x+y)$, $u-v=2\psi(u-v)$, где φ и ψ — возрастающие гладкие функции, отображающие всю ось на всю ось. Легко видеть, что определенное при помощи этих функций по формуле (2) отображение и является искомым взаимно однозначным отображением D на полуплоскость $\{v>0\}$ с заданным соответствием границ.

Мы видим, что h-конформные отображения (если они существуют) обладают гораздо большей неопределенностью, чем конформные — вместо соответствия трех граничных точек можно задавать соответствие всей границы. Однако можно указать естественные дополнительные условия, при которых число параметров, определяющих h-конформное отображение, будет такое же, как для конформных отображений.

Именно, предположим, что в принятых выше условиях существует предел при $x \to -\infty$ углового коэффициента касательной к Γ:

$$\lim_{x\to-\infty} y'(x)=a, \quad -1<a\leqslant 1.$$

Тогда функция, отображающая D на $\{v>0\}$, определяется с точностью до двух действительных параметров[1]) условием, что существует предел гиперболической производной $f'(z)=u_x+iv_x$ (см. гл. II) при $x\to-\infty$, независимый от пути, по которому точка $z=x+iy$ удаляется в $-\infty$.

Легко видеть, что условие существования предела f' при $x\to-\infty$ эквивалентно условию существования пределов производных φ_1' и ψ_1' функций (5) при $u\to-\infty$.

---

[1]) Число параметров здесь равно 2, а не 3, ибо бесконечные граничные точки отображаемых областей соответствуют друг другу.

Но на характеристике $u+v=u_0$ имеем $\varphi_1'(u+v)=\varphi_1'(u_0)$, значит, независимый от пути $\lim\limits_{u\to-\infty}\varphi_1'(u)=\varphi_1'(u_0)$ может существовать лишь в том случае, когда $\varphi_1'(u)=k=\text{const}$. Но тогда $\varphi_1(u)=ku+b$ и (5) дает соотношение

$$y[\lambda(u)]+\lambda(u)=2ku+2b,$$

из которого в силу наших предположений однозначно определяется функция $\lambda(u)$. Эта функция монотонно возрастает от $-\infty$ до ∞, когда u меняется от $-\infty$ до ∞. После того, как $\lambda(u)$ найдена, второе уравнение (5) определяет функцию ψ_1, также возрастающую от $-\infty$ до ∞, причем так как $\lambda'(u)=\dfrac{2k}{1+y'(\lambda)}\to\dfrac{2k}{1+a}$ при $u\to-\infty$, то существует

$$\lim_{u\to-\infty}\psi_1'=\lim_{u\to-\infty}\frac{1-y'[\lambda(u)]}{2}\lambda'(u)=k\frac{1-a}{1+a}.$$

Наше утверждение доказано.

Прообразы «линий тока» $v=v_0$ при произвольном h-конформном отображении D на $\{v>0\}$, вообще говоря, сильно пульсируют на бесконечности, так что касательная к ним не имеет предела при $x\to-\infty$. Однако в случае, если касательная к Γ имеет предел при $x\to-\infty$, существуют и отображения, для которых такой пульсации нет (рис. 37), и их оказывается столько же, сколько и конформных отображений.

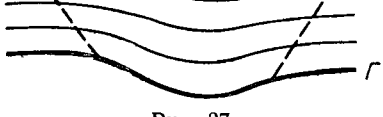


Рис. 37.

Области типа полосы. Аналогично обстоит дело с h-конформными отображениями на полосу $\{0<v<1\}$ областей типа полосы, которые ограничены гладкими кривыми Γ_0: $y=y_0(x)$ и Γ: $y=y(x)$, где функции y_0 и y для всех x, $-\infty<x<\infty$, удовлетворяют условиям

$$y_0(x)<y_1(x),\quad |y_0'(x)|\leqslant 1,\quad |y'(x)|\leqslant 1,$$

причем равенства могут достигаться лишь в изолированных точках.

Любую такую область D, границы которой не приближаются асимптотически к характеристикам, можно h-конформно отобразить на полосу $\{0 < v < 1\}$, причем можно задать соответствие границ на некотором участке Γ_0, зависящем от вида области D.

Для доказательства прежде всего заметим, что Γ_0 можно считать совпадающей с осью x. В самом деле, по предыдущему, область, лежащую выше Γ_0, можно h-конформно отобразить на верхнюю полуплоскость $\{v > 0\}$. Из формул (5) нетрудно вывести, что Γ при этом перейдет в кривую Γ^*: $v = v_*(u)$, для которой $v_*(u) > 0$, $|v'_*(u)| \leqslant 1$ (с равенством в изолированных точках) и которая не приближается асимптотически к характеристикам. Если мы сумеем построить h-конформное отображение на полосу области, ограниченной осью u и кривой Γ^*, то композиция этого и предыдущего отображений будет h-конформно отображать D на полосу.

Итак, пусть $D = \{0 < y < y(x)\}$; будем искать отображение в виде (2). Из условия, что $v \equiv 0$ при $y \equiv 0$, получаем тождество $\varphi(x) \equiv \psi(x)$, и, следовательно, искомое отображение имеет вид

$$u = \varphi(x + y) + \varphi(x - y), \quad v = \varphi(x + y) - \varphi(x - y). \quad (6)$$

Условие соответствия Γ и прямой $v = 1$ приводит к тождеству

$$\varphi[x + y(x)] - \varphi[x - y(x)] \equiv 1. \quad (7)$$

Обозначим $x - y(x) = t(x)$; так как у нас $1 - y'(x) \geqslant 0$ с равенством в изолированных точках, то $t(x)$ строго возрастает и имеет обратную функцию $x = x(t)$, которая, как нетрудно проверить, отображает всю ось на всю ось. Отсюда видно, что определена строго возрастающая на всей оси t функция $x(t) + y[x(t)] = \lambda(t)$, и, следовательно, тождество (7) можно переписать в виде

$$\varphi[\lambda(t)] \equiv \varphi(t) + 1. \quad (8)$$

Покажем, как из этого функционального уравнения определяется функция φ. Рассмотрим последовательность значений λ: $\lambda_0 = 0$, $\lambda_n = \lambda(\lambda_{n-1})$, $n = 0, \pm 1,$

$\pm 2, \ldots$ (рис. 38); так как у нас $\lambda(t) - t = 2y(x) > 0$, то эта последовательность строго возрастает и $\lambda_n \to \pm\infty$ при $n \to \pm\infty$. Зададим теперь на отрезке $[\lambda_0, \lambda_1]$ в качестве φ произвольную гладкую функцию, удовлетворяющую условиям

$$\varphi(\lambda_1) = \varphi(\lambda_0) + 1, \qquad \varphi'(\lambda_1)\lambda'(\lambda_0) = \varphi'(\lambda_0). \tag{9}$$

При t, меняющемся от λ_0 до λ_1, значения $\lambda(t)$ меняются от λ_1 до λ_2, поэтому тождество (8) позволяет продолжить φ на отрезок $[\lambda_1, \lambda_2]$; условия (9) обеспечивают непрерывность и гладкость такого продолжения. Теперь, меняя t на $[\lambda_1, \lambda_2]$, мы таким же способом продолжаем φ на отрезок $[\lambda_2, \lambda_3]$ и т. д. Если менять $\lambda(t)$ на отрезке $[\lambda_0, \lambda_1]$, то t будет меняться на $[\lambda_{-1}, \lambda_0]$ и тождество (8) позволит продолжить φ на этот последний отрезок. Меняя в нем $\lambda(t)$, мы таким способом продолжим φ на $[\lambda_{-2}, \lambda_{-1}]$ и т. д.

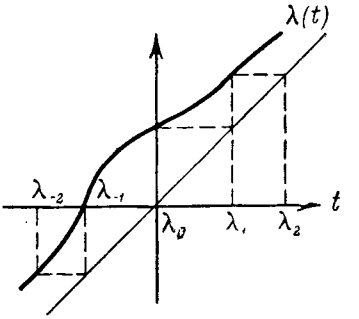


Рис. 38.

Конечно, вместо $[\lambda_0, \lambda_1]$ в качестве начального можно брать любой отрезок $[\lambda_n, \lambda_{n-1}]$. Мы видим, что на таком отрезке функцию φ можно задавать произвольно (с соблюдением условий (9), точнее — их аналога для любого n), а тогда уравнение (8) позволит продолжить эту функцию на всю числовую ось. Если после этого построить отображение по формулам (6), то нетрудно проверить, что оно и будет искомым.

Эта задача, как и предыдущая, оказалась существенно более неопределенной, чем аналогичная задача для конформных отображений: вместо одной действительной постоянной (у нас принята нормировка $f(\pm\infty) = \pm\infty$) она содержит произвол в задании отображения на целом отрезке. Но по-прежнему этот произвол можно снять, если наложить ограничения на асимптотическое поведение отображающей функции, которые сводятся к устранению излишних пульсаций в бесконечности.

Предположим, что Γ при $x \to +\infty$ имеет горизонтальную асимптоту $y = b$, и покажем, что h-конформное

отображение D на полосу $\{0 < v < 1\}$ с точностью до сдвига определяется условием существования предела при $x \to +\infty$ гиперболической производной этого отображения.

Из формул (6) видно, что такой предел существует тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi'(x)$. Чтобы вычислить этот предел, заметим, что для всех x

$$\int_0^{y(x)} \frac{\partial v}{\partial y}\, dy = \int_0^{y(x)} [\varphi'(x+y) + \varphi'(x-y)]\, dy = 1;$$

если существует $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi'(x) = B$, то переходя здесь к пределу под знаком интеграла, получим $2Bb=1$, т. е. $B=\frac{1}{2b}$.

Далее, дифференцируя тождество (7), находим

$$\varphi'[x - y(x)] = \varphi'[x + y(x)] \frac{1 + y'(x)}{1 - y'(x)}. \qquad (10)$$

Заменяя здесь x на x_1 такое, что $x_1 - y(x_1) = x + y(x)$, получаем

$$\varphi'[x + y(x)] = \varphi'[x_1 - y(x_1)] = \varphi'[x_1 + y(x_1)] \frac{1 + y'(x_1)}{1 - y'(x_1)}.$$

Аналогично, заменяя x_1 на x_2 такое, что $x_2 - y(x_2) = x_1 + y(x_1)$, будем иметь

$$\varphi'[x_1 + y(x_1)] = \varphi'[x_2 + y(x_2)] \frac{1 + y'(x_2)}{1 - y'(x_2)}.$$

Продолжая это рассуждение, мы строим последовательность точек x_n:

$$x_0 = x, \quad x_n - y(x_n) = x_{n-1} + y(x_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

выписываем для $k = 2, 3, \ldots, n$ соотношения, аналогичные предыдущим, и объединяя их, находим

$$\varphi'[x - y(x)] = \varphi'[x_n + y(x_n)] \prod_{k=0}^{n} \frac{1 + y(x_k)}{1 - y'(x_k)}.$$

Последовательность x_n, очевидно, неограниченно возрастает. Поэтому если $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi'(x) = \frac{1}{2b}$ существует, то

переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\varphi'[x - y(x)] = \frac{1}{2b} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1 + y'(x_k)}{1 - y'(x_k)}, \qquad (11)$$

причем бесконечное произведение справа сходится. Таким образом, производная $\varphi'(x)$ вполне определена для всех x и, значит, функция φ определена с точностью до постоянного слагаемого. Наше утверждение доказано.

Влияние вариации границы. В предыдущей главе мы говорили о том, что влияние вариации границы отображаемой области на конформное отображение быстро (по экспоненте) убывает по мере удаления от места вариации. Этот эффект лежит в основе вариационных методов и вывода приближенных формул теории конформных отображений. Он присущ решениям не только системы Коши — Римана, но и других систем эллиптического типа.

Легко видеть, однако, что для простейшей системы гиперболического типа — системы (1) эффект не имеет

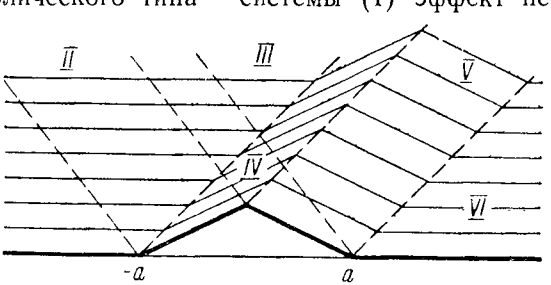


Рис. 39.

места: влияние границы распространяется по характеристикам без затухания внутрь области. Рассмотрим для примера h-конформное отображение на верхнюю полуплоскость области, которая получается из верхней полуплоскости выбрасыванием треугольника (рис. 39). Если ограничиться отображением без пульсаций на бесконечности, то в представлении (4) обратного отображения

$$x = \varphi_1(u + v) + \psi_1(u - v), \qquad y = \varphi_1(u + v) - \psi_1(u - v)$$

одна из функций будет линейной; скажем, $\varphi_1(u) \equiv \frac{u}{2}$. Тогда угловым точкам $x = \pm a$ будут соответствовать точки $u = \pm a$ оси u; условие соответствия оси u и границы области в плоскости (x, y) позволит однозначно определить функцию ψ_1:

$$\psi_1(u) = \begin{cases} \frac{u}{2}, & |u| \geqslant a, \\ \frac{u-2a}{6}, & -a \leqslant u \leqslant \frac{a}{2}, \\ \frac{3u}{2} - a, & \frac{a}{2} \leqslant u \leqslant a. \end{cases}$$

При таком отображении прообразы «линий тока» $v = v_0$ будут выглядеть так, как показано на рис. 39. До первой характеристики $x + y = -a$, выходящей из левой вершины треугольника (зона I), и после второй $x - y = a$, выходящей из правой вершины (зоны VI), они будут прямыми, параллельными оси x, — в этих зонах влияние треугольника не сказывается; то же будет в зонах II и III. В зонах же IV и V «линии тока» будут ломаными; в них влияние границы без затухания распространяется в область.

Эффект распространения влияния границы внутрь области по характеристикам присущ системам гиперболического типа.

§ 15. Модель уравнений газовой динамики

Классические уравнения. Еще раз напомним уравнения плоских установившихся течений идеального газа:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \rho \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1}$$

В них u — потенциальная функция, v — функция тока, а ρ — плотность газа — известная функция величины скорости $V = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$; для адиабатических режимов она имеет вид

$$\rho = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} V^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \tag{2}$$

где γ — постоянная, характеризующая газ $\left(\gamma = \frac{c_p}{c_v}\right.$, отношению теплоемкостей при постоянном давлении и объеме). Вместо (2) газовый режим можно характеризовать также заданием расхода $W = \rho V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ как функции от скорости V; для адиабатических режимов график этой зависимости показан на рис. 40.

Интервал скоростей $0 < V < V_s = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$ соответствует дозвуковым течениям; здесь расход растет вместе со скоростью и система (1) имеет эллиптический тип. Интервал $V_s < V < V_m = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}$ соответствует сверхзвуковым течениям, здесь при росте скорости расход падает и система (1) имеет гиперболический тип. Величина V_m — максимально возможная для данного газа скорость.

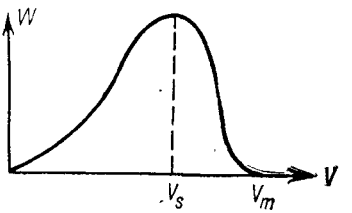


Рис. 40.

Система (1) — нелинейная система уравнений с частными производными. При режиме (2) из нее можно исключить одну из функций, скажем, функцию тока, и тогда для потенциальной функции мы получим квазилинейное уравнение

$$\left(1 - \frac{u_x^2}{c^2}\right) u_{xx} - 2\frac{u_x u_y}{c^2} u_{xy} + \left(1 - \frac{u_y^2}{c^2}\right) u_{yy} = 0, \qquad (3)$$

где $c^2 = \frac{dP}{d\rho} = 1 - \frac{\gamma-1}{2} V^2$ — квадрат скорости звука (P — давление); равенство $V = c$ равносильно $V = V_s$. Естественно, что это уравнение имеет эллиптический тип при $V < V_s$ и гиперболический при $V > V_s$ $\left($его дискриминант $\Delta = \left(1 - \frac{u_x^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{u_y^2}{c^2}\right) - \frac{u_x^2 u_y^2}{c^4} = 1 - \frac{V^2}{c^2}\right)$.

Математическое исследование системы (1) при адиабатическом режиме (2) или — что то же самое — уравнения (3) довольно затруднительно. Поэтому при

изучении качественных вопросов, связанных с течениями газов, естественно попытаться ввести некоторый фиктивный газовый режим так, чтобы, с одной стороны, максимально упростить математический формализм и, с другой стороны, сохранить общий характер явлений.

Выбор модели. Такого рода упрощения впервые сделал С. А. Чаплыгин, который еще в 1902 г. в своей знаменитой работе «О газовых струях» предложил считать плотность зависящей от скорости по закону

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1+V^2}}. \qquad (4)$$

Это соответствует тому, что в формуле (2) показатель адиабаты γ, который по физическому смыслу всегда положителен и даже больше 1, принимается равным -1. Получаемый таким образом фиктивный газ называется *газом Чаплыгина*, соответствующее ему уравнение для потенциала имеет вид

$$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0. \qquad (5)$$

Это — уравнение минимальных поверхностей, т. е. поверхностей, которые имеют наименьшую площадь среди всех поверхностей с данной границей (например, мыльных пленок, натянутых на данный контур). Ему посвящена обширная литература и оно поддается исследованию несколько легче, чем уравнение (3). Однако, во-первых, достигнутое упрощение формализма недостаточно и, во-вторых, модель Чаплыгина отражает лишь дозвуковые течения, перемена типа в ней невозможна. Построены и другие модели, о которых можно прочитать в книге Л. И. Седова [2].

Можно было бы попытаться моделировать систему (1), заменив ее парой простейших систем соответствующего типа: для дозвуковых режимов — системой Коши—Римана, а для сверхзвуковых — системой, описывающей h-аналитические функции. Однако такая модель слишком груба, в ней разрывны основные характеристики течения. Качественные явления газовой динамики существенно лучше отражает модель, предложенная М. А. Лаврентьевым в 1955 г., в которой указанная пара простейших систем моделирует не саму систему

(1), а ее производную систему (см. гл. III). Сверхзвуковая часть модели была рассмотрена в работе М. М. Лаврентьева [7].

Мы введем эту модель, задав следующий фиктивный газовый режим: для дозвуковых течений будем считать газ несжимаемым и положим расход W равным скорости V, а для сверхзвуковых течений положим $\frac{1}{W^2} + \frac{1}{V^2} = 1$, т. е.

$$W = \frac{V}{\sqrt{V^2 - 1}}; \tag{6}$$

для непрерывности придется считать, что «скорости звука» соответствует $V_s = \sqrt{2}$. График зависимости $W = W(V)$ для нашего режима изображен на рис. 41.

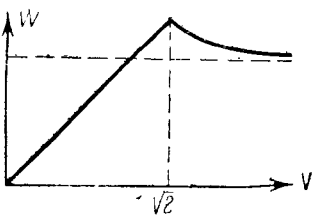


Рис. 41.

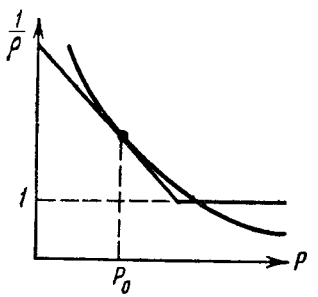


Рис. 42.

Сравнивая его с рис. 40, мы видим, что в окрестности звуковой скорости качественная картина зависимости сохранена. Правда, для очень больших скоростей характер модели иной — для нее максимальная скорость $V_m = \infty$, а расход всегда остается большим 1.

Заметим, что зависимость $\frac{1}{\rho}$ от давления P, которая для адиабатического режима изображается кривой $P = k\rho^\nu$ (см. гл. I), в нашей модели изображается ломаной, состоящей из двух звеньев: касательной к адиабате в точке P_0, где угловой коэффициент касательной к ней равен -1, и горизонтальной прямой $\rho = 1$ (рис. 42). В самом деле, из уравнений движения в форме (8) § 2

для установившихся безвихревых плоских движений

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right),\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

мы получаем $dP=-\rho d\left(\frac{V^2}{2}\right)=-W\,dV$. Отсюда для нашей модели при сверхзвуковых скоростях $(V>\sqrt{2})$ из (5) мы получаем прямую

$$P=C-\sqrt{V^2-1}=C-\frac{1}{\rho}$$

и при надлежащем выборе постоянной интегрирования C эта прямая будет касаться адиабаты в точке P_0. При дозвуковых скоростях $(V<\sqrt{2})$ имеем $W=V$, т. е. $\rho=1$ — на графике мы получаем горизонтальную прямую.

Для нашей модели $\rho=\frac{W}{V}$ равна 1 в дозвуковом режиме (при $V<\sqrt{2}$) и равна $\frac{1}{\sqrt{V^2-1}}$ в сверхзвуковом $(V>\sqrt{2})$, поэтому система (1) для нее имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\quad \text{при}\quad V\leqslant\sqrt{2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt{V^2-1}\,\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\sqrt{V^2-1}\,\frac{\partial v}{\partial x}\ \text{при}\ V>\sqrt{2}. \tag{7}$$

Учитывая, что $V=\sqrt{u_x^2+u_y^2}$, мы можем дифференцированием исключить из этой системы функцию v. Для дозвуковых скоростей $(V<\sqrt{2})$ мы получим обычное уравнение Лапласа

$$u_{xx}+u_{yy}=0, \tag{8_1}$$

а для сверхзвуковых скоростей $(V>\sqrt{2})$ уравнение гиперболического типа

$$(1-u_y^2)u_{xx}+2u_xu_yu_{xy}+(1-u_x^2)u_{yy}=0, \tag{8_2}$$

похожее на (3). Эти уравнения можно объединить, и мы получим

$$u_{xx}+u_{yy}-\delta(u_y^2u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+u_x^2u_{yy})=0, \tag{8}$$

где $\delta=0$ при $u_x^2+u_y^2<2$ и $\delta=1$ при $u_x^2+u_y^2>2$.

Аналогичным образом можно исключить функцию u, и мы получим уравнение для функции тока:

$$v_{xx}+v_{yy}-\frac{\delta}{v_x^2+v_y^2-1}(v_x^2v_{xx}+2v_xv_yv_{xy}+v_y^2v_{yy})=0, \quad (9)$$

где $\delta=0$ при $v_x^2+v_y^2<2$ и $\delta=1$ при $v_x^2+v_y^2>2$; оно также эллиптично при $V<\sqrt{2}$ и гиперболично при $V>\sqrt{2}$.

Рассмотрим теперь производную систему для нашей модели. В гл. III мы отметили, что для системы уравнений газовой динамики она имеет вид

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}=-\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial v}, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial v}=\frac{q'(p)}{p}\frac{\partial p}{\partial u},$$

где $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{u_y}{u_x}$, $p=\frac{1}{V}$, $q=\frac{1}{W}$. В случае нашей модели $q=p$ при $p>\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $q=\sqrt{1-p^2}$ при $p<\frac{1}{\sqrt{2}}$, поэтому производная система запишется так:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha}{\partial u}=-\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial v}, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial v}=\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial u} && \text{при } p>\frac{1}{\sqrt{2}},\\
&\frac{\partial\alpha}{\partial u}=-\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial v}, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial v}=-\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial u} && \text{при } p<\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned} \quad (10)$$

Введем еще функцию от скорости:

$$\beta=\beta(V)=\begin{cases}\log V & \text{при } V<\sqrt{2},\\ \frac{1}{b}\arccos\frac{1}{V} & \text{при } V>\sqrt{2}\end{cases} \quad (11)$$

где коэффициент $b=\frac{\pi}{2\log 2}$ подобран так, чтобы эта функция была непрерывной. Теперь уравнения для производной системы примут вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha}{\partial u}=\frac{\partial\beta}{\partial v}, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial v}=-\frac{\partial\beta}{\partial u} && \text{при } V<\sqrt{2},\\
&\frac{\partial\alpha}{\partial u}=b\frac{\partial\beta}{\partial v}, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial v}=b\frac{\partial\beta}{\partial u} && \text{при } V>\sqrt{2},
\end{aligned} \quad (12)$$

т. е. при дозвуковых скоростях будут совпадать с простейшей эллиптической, а при сверхзвуковых — с простейшей гиперболической системой (точнее, отличаться от нее несущественным постоянным множителем b).

Геометрия модели. Мы будем рассматривать три плоскости: 1) плоскость течения $z = x + iy$, 2) плоскость комплексного потенциала $w = u + iv$ и 3) плоскость годографа скоростей $\omega = Ve^{i\alpha} = \xi + i\eta$. Якобиан отображения $z \to w$

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \rho(u_x^2 + u_y^2) = \rho V^2 = VW$$

всюду неотрицателен, следовательно, оно локально гомеоморфно при $V \neq 0$ и всегда сохраняет ориентацию.

В дозвуковой области функция $w = w(z)$ аналитична, а $\omega = \overline{w'(z)}$ представляет собой антианалитическую функцию. В сверхзвуковой области решения нашей системы допускают простое представление. В самом деле, из формул (12) вытекает, что $\frac{\partial^2\beta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\beta}{\partial v^2} = 0$ при $V > \sqrt{2}$, откуда $\beta = \varphi(u + v) + \psi(u - v)$, где φ и ψ — произвольные функции, а тогда из (12) найдется и α; учитывая еще (11), найдем

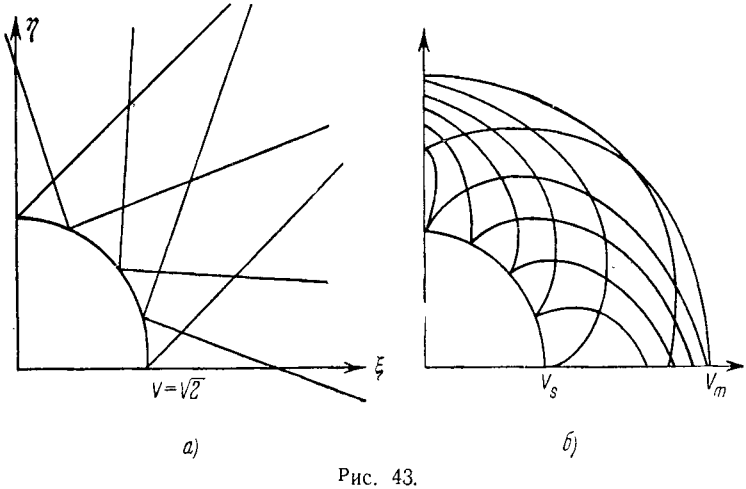
$$\frac{1}{V} = \cos b\{\varphi(u + v) + \psi(u - v)\}, \quad \alpha = b\{\varphi(u+v) - \psi(u-v)\}. \tag{13}$$

В сверхзвуковой зоне существенную роль играют характеристики системы. Для рассматриваемой модели в плоскости потенциала ими служат прямые $u + v = c_1$, $u - v = c_2$, а в плоскости годографа — линии $\frac{1}{V} = \cos\{\alpha - 2b\varphi(c_1)\}$, $\frac{1}{V} = \cos\{\alpha + 2b\psi(c_2)\}$, т. е. также прямые

$$\begin{aligned} &\xi\cos 2b\varphi(c_1) + \eta\sin 2b\varphi(c_1) = 1, \\ &\xi\cos 2b\psi(c_2) - \eta\sin 2b\psi(c_2) = 1. \end{aligned} \tag{14}$$

На линии перехода $V = \sqrt{2}$ характеристики двух семейств ортогональны друг другу, а при увеличении V угол между ними уменьшается (рис. 43, *а*). В классической теории характеристиками в плоскости годографа

являются эпициклоиды, причем на линии перехода характеристики различных систем касаются друг друга (рис. 43, *б*).



а) *б)*

Рис. 43.

Якобианы отображений $w \to \omega$ и $z \to \omega$

$$j = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(V, \alpha)} \frac{\partial(V, \alpha)}{\partial(u, v)} = V \frac{\partial V}{\partial \beta} \begin{vmatrix} \beta_u & \beta_v \\ \alpha_u & \alpha_v \end{vmatrix}$$

и

$$j_1 = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = Jj$$

в дозвуковой зоне равны

$$j = -\left|\frac{d\omega}{dw}\right|^2 = -\left|\frac{w''(z)}{w'(z)}\right|^2, \quad j_1 = -\left|\frac{d\omega}{dz}\right|^2 = -|w''(z)| \quad (15)$$

и обращаются в нуль лишь в изолированных точках. В сверхзвуковой зоне эти якобианы равны

$$\begin{aligned} j &= 4b^2V^2\sqrt{V^2-1}\,\varphi'(u+v)\psi'(u-v), \\ j_1 &= 4b^2V^4\varphi'(u+v)\psi'(u-v); \end{aligned} \quad (16)$$

они могут обращаться в нуль и менять знак на характеристиках.

В сверхзвуковой зоне легко представить через функции φ и ψ отображение $w \to z$ плоскости потенциала на

плоскость течения. Прежде всего, из соотношений

$$u_x^2 + u_y^2 = V^2 = \frac{1}{\cos^2 b(\varphi + \psi)} \quad \text{и} \quad \frac{u_y}{u_x} = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} b(\varphi - \psi)$$

мы находим

$$u_x = \frac{\cos b(\varphi - \psi)}{\cos b(\varphi + \psi)}, \qquad u_y = \frac{\sin b(\varphi - \psi)}{\cos b(\varphi + \psi)},$$

а учитывая, что $\rho = \frac{W}{V} = \operatorname{ctg}(\varphi + \psi)$, из системы (1) получаем

$$v_x = -\frac{\sin b(\varphi - \psi)}{\sin b(\varphi + \psi)}, \qquad v_y = \frac{\cos b(\varphi - \psi)}{\sin b(\varphi + \psi)}.$$

Далее, так как у нас $J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\sin b(\varphi + \psi)\cos b(\varphi + \psi)}$ отличен от нуля, то можно перейти к производным обратных функций $x_u, \ldots, y_v$ и тогда получим

$$x_u + x_v = \cos 2b\varphi, \qquad y_u + y_v = \sin 2b\varphi,$$
$$x_u - x_v = \cos 2b\psi, \qquad y_u - y_v = -\sin 2b\psi.$$

Введем, наконец, новые переменные $u + v = s$, $u - v = t$, так что $x_u + x_v = 2x_s, \ldots$, и тогда интегрированием найдем искомое представление:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left\{\int_0^{u+v} \cos 2b\varphi\, dt + \int_0^{u-v} \cos 2b\psi\, dt\right\} + x_0, \\ y &= \frac{1}{2}\left\{\int_0^{u+v} \sin 2b\varphi\, dt - \int_0^{u-v} \sin 2b\psi\, dt\right\} + y_0. \end{aligned} \tag{17}$$

Для простоты письма можно еще ввести функции

$$C(u) = \int_0^u \cos 2b\varphi(t)\, dt, \qquad C_1(u) = \int_0^u \cos 2b\psi(t)\, dt$$

и аналогично, с заменой cos на sin, функции $S(u)$ и $S_1(u)$, а также положить $x_0 = y_0 = 0$; тогда будем иметь

$$x = \frac{C(u+v) + C_1(u-v)}{2}, \qquad y = \frac{S(u+v) - S_1(u-v)}{2}. \tag{18}$$

Из формул (17) легко получить некоторые сведения о характеристиках в плоскости течения. Именно, вдоль характеристики первого семейства $u+v=c_1$ имеем

$$\frac{dy}{dx}=-\operatorname{tg} 2b\psi\,(2u-c_1)=\operatorname{tg}\alpha_1,$$

а вдоль характеристик второго семейства $u-v=c_2$

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg} 2b\varphi\,(2u-c_2)=\operatorname{tg}\alpha_2.$$

Отсюда и из (13) видно, что направление биссектрисы угла между характеристиками

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=b\,\{\varphi\,(2u-c_2)-\psi\,(2u-c_1)\}=\alpha \qquad (19)$$

совпадает с направлением вектора скорости; угол между скоростью и характеристикой (*угол Маха*) равен

$$\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}=b\,\{\varphi\,(2u-c_2)+\psi\,(2u-c_1)\}=b\beta. \qquad (20)$$

§ 16. Примеры сверхзвуковых задач

Течение в канале. Рассмотрим в принятой модели простейшую задачу о сверхзвуковом течении в канале с плоскими стенками $\{0<y<h\}$. Примем, что функция тока v равна 0 на нижней и 1 на верхней стенке, так что задача сведется к отображению полосы $\{0<y<h\}$ на полосу $\{0<v<1\}$. Из условия обтекания стенок получаем соотношения

$$\alpha=b\,\{\varphi\,(u)-\psi\,(u)\}=0,\quad \alpha=b\,\{\varphi\,(u+1)-\psi\,(u-1)\}=0, \qquad (1)$$

справедливые для всех u, $-\infty<u<\infty$, из которых следует, что $\varphi(u)\equiv\psi(u)$ и что φ — произвольная периодическая с периодом 2 функция. Условие того, что скорость V — сверхзвуковая $(V>\sqrt{2})$, выражается неравенством $\frac{\pi}{4}<b\,[\varphi\,(u+v)+\varphi\,(u-v)]<\frac{\pi}{2}$, которое эквивалентно неравенству

$$\frac{\pi}{8}<b\varphi\,(u)<\frac{\pi}{4},\qquad -\infty<u<\infty.$$

С другой стороны, условие соответствия верхних берегов полос $y(u, 1) \equiv h$ по формуле (18) предыдущего параграфа записывается в виде

$$h = \frac{1}{2}\int_{u-1}^{u+1} \sin 2b\varphi\,(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sin 2b\varphi\,(t)\,dt$$

(мы воспользовались тем, что у нас φ имеет период 2, и известным свойством интегралов от периодических функций). По теореме об оценке интеграла из предыдущего неравенства мы получаем условия для h:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < h < 1\ ^{1}). \qquad (2)$$

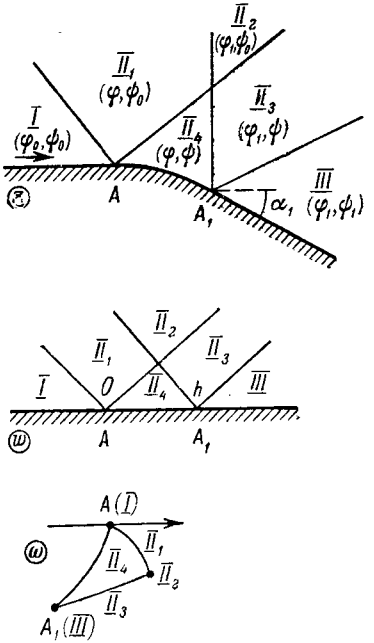


Рис. 44.

Если функция $\varphi \not\equiv \text{const}$, то в силу ее периодичности φ' непременно обращается в нуль, меняя знак; из формулы (16) предыдущего параграфа видно, что тем же свойством обладает и якобиан j отображения $w \to \omega$. В этом случае величина скорости V не может иметь предела в бесконечности (течение пульсирует). Поэтому единственным решением, для которого существует предел скорости в бесконечности (пульсация отсутствует), будет решение с $\varphi = \text{const}$, т. е. поступательное движение газа.

Тот же вывод относится и к течению в полуплоскости $\{y > 0\}$: если потребовать существования предела V на бесконечности, не зависящего от способа удаления точки в бесконечность, то единственным решением за-

[1]) Наличие нижней оценки для h связано с тем, что для нашей модели в сверхзвуковой зоне расход $W \geqslant 1$.

дачи будет поступательное движение, для которого $\varphi = \text{const}$.

В этой же модели задача о сверхзвуковом течении в криволинейном канале $\{0 < y < y(x)\}$ была решена М. М. Лаврентьевым [7]. Эта задача приводится к нелинейному функциональному уравнению, содержащему еще интегралы от неизвестной функции, которое решается методом последовательных приближений. Существование решения доказано в предположении, что $y'(x)$ достаточно быстро убывает при $x \to -\infty$. Как и в простейшем случае прямолинейного канала, единственность доказывается в классе течений, для которых существует предел скорости при $x \to -\infty$.

Обтекание угла. Пусть угол имеет вид, изображенный на рис. 44, причем уравнением участка AA_1 пусть будет $y = f(x)$. Зададим на отрезке $[0, h]$ оси u функцию $x = x(u)$, определяющую соответствие этого отрезка и участка AA_1 границы течения. Тогда на $[0, h]$ определятся функции $y(u) = f[x(u)]$ и

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y'(u)}{x'(u)}, \qquad V = \frac{1}{\cos b\beta} = \frac{1}{\sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2}}, \tag{3}$$

а следовательно, и функции

$$\varphi = \frac{\alpha + b\beta}{2b}, \qquad \psi = \frac{b\beta - \alpha}{2b}, \qquad 0 \leqslant u \leqslant h. \tag{4}$$

Зададимся скоростью $V_0 = \sec b\beta_0 \left(\frac{\pi}{4} < b\beta_0 < \frac{\pi}{2}\right)$ на бесконечности и тогда, ограничиваясь решениями без пульсаций, получим, что в зоне I

$$\varphi = \psi = \frac{\beta_0}{2}, \tag{5}$$

т. е. движение поступательно. В зоне II_1 значение ψ не меняется и остается равным $\psi_0 = \frac{\beta_0}{2}$, но значение φ начинает меняться по закону (4) — движение такого типа называется *простой волной*. В зоне II_2 по-прежнему $\psi = \psi_0$, а функция φ определяется ее значениями на участке границы A_1B_1; снова предполагая, что в зоне III нет пульсаций, мы заключаем, что φ принимает здесь

постоянное значение

$$\varphi_1 = \frac{\alpha_1 + b\beta_1}{2b} \tag{6}$$

(α_1 — угол поворота участка A_1B_1, величина β_1 определяется скоростью поступательного движения в зоне III) — в зоне II_2 мы имеем, таким образом, поступательное движение.

В зоне II_3 значение $\varphi = \varphi_1$, а ψ меняется по закону (4) — здесь мы снова имеем простую волну. В зоне II_4 обе функции φ и ψ меняются по закону (4), и мы имеем сложный поток, и наконец, в зоне III — поступательное движение с $\varphi = \varphi_1$,

$$\psi = \psi_1 = \frac{b\beta_1 - \alpha_1}{2b}. \tag{7}$$

На рис. 44 приведены также образы рассматриваемого течения в плоскости w комплексного потенциала и плоскости годографа ω. Отображение $z \to w$ гомеоморфно, а $z \to \omega$ имеет ряд особенностей: зоны I, III и II_2 поступательного движения переходят в точки, зоны II_1 и II_3 простой волны — в дуги, и лишь зона сложного потока II_4, вообще говоря, преобразуется в область.

Функция $x(u)$, задающая соответствие $[0, h] \to AA_1$, в описанном решении остается произвольной — нужно лишь обеспечить, чтобы скорость V менялась в нужных пределах ($V > \sqrt{2}$), а это достигается простыми ограничениями, на которых мы не останавливаемся. Однако в газовой динамике обычно делают дополнительное предположение о том, что поворот потока в зоне II_4 осуществляется простой волной. Тогда из бесконечного множества решений задачи останутся возможными только два:

а) Простая волна $\varphi = \varphi_0 = \frac{\beta_0}{2}$. Здесь, как видно из первого уравнения (4),

$$\beta = \beta_0 - \frac{\alpha}{b}, \tag{8}$$

а так как α на участке AA_1 убывает, то β возрастает, а с ней возрастает и скорость $V = \frac{1}{\cos b\beta}$ — мы имеем так называемое *течение разрежения*. Соответствие определяется теперь однозначно по формулам, приведенным выше.

б) Простая волна $\psi=\psi_0=\frac{\beta_0}{2}$ — все аналогично случаю а), только скорость убывает, и мы имеем *течение сжатия.*

Если сделать еще предположение, что на первой характеристике AC (рис. 44) режим течения не меняется, то случай б) отпадет и мы будем иметь единственное решение.

§ 17. Задачи с переходом через скорость звука

К числу важных и трудных проблем газодинамики относятся проблемы исследования движения, в которых есть как дозвуковые, так и сверхзвуковые зоны. Обычно рассматриваются задачи, в которых сверхзвуковые зоны появляются у стенок — границ потока, или имеется линия, соединяющая границы течения, на которой дозвуковое течение переходит в сверхзвуковое. К числу последних относится и следующая задача.

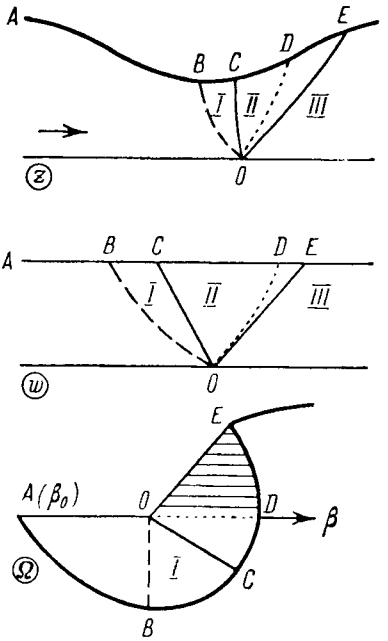


Рис. 45.

Задача о сопле. Пусть имеется симметричная относительно оси x труба (мы рассматриваем плоский случай), которая до некоторого момента сужается, а затем начинает расширяться (рис. 45). Если в ней имеется течение с достаточно большой дозвуковой скоростью V_0 в $-\infty$, то по основному свойству дозвуковых течений сужение трубы приведет к увеличению скорости, она достигнет скорости звука, а после этого расширение трубы (по свойству сверхзвуковых течений) также поведет к увеличению скорости. Так устроены сопла для получения

сверхзвуковых течений. Задача состоит в том, чтобы рассчитать это течение и, в частности, найти линию OB перехода через скорость звука.

Здесь мы приведем некоторые соображения, связанные с решением этой задачи для модели течений, введенной выше. Пусть линия перехода OB в плоскости потенциала задается уравнением $u = \chi(v)$; величины со стороны сверхзвуковой зоны мы будем отмечать чертой сверху.

Мы предполагаем, что линия перехода — гладкая и что вдоль нее скорости дозвукового и сверхзвукового течений склеиваются непрерывно как по величине, так и по направлению. Тогда касательные производные $p = \frac{1}{V}$ и α на линии перехода также будут непрерывными, а это записывается в виде:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial p}{\partial u}\chi' + \frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial u}\chi' + \frac{\partial \bar{p}}{\partial v}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u}\chi' + \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial u}\chi' + \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial v}. \end{aligned} \tag{1}$$

Далее, на линии перехода мы имеем $p = q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, так что основные уравнения (10) § 15 дают

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\,\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \qquad \sqrt{2}\,\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{\partial \alpha}{\partial u}, \\ \sqrt{2}\,\frac{\partial \bar{p}}{\partial u} = -\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial v}, \qquad \sqrt{2}\,\frac{\partial \bar{p}}{\partial v} = -\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial u}. \end{aligned} \tag{2}$$

Используя эти соотношения и предыдущие, после простых преобразований мы получим

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial u} = \frac{\chi'^2 + 1}{\chi'^2 - 1}\frac{\partial p}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial v} = -\frac{\chi'^2 + 1}{\chi'^2 - 1}\frac{\partial \alpha}{\partial v}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{2\chi'}{\chi'^2 - 1}\frac{\partial p}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial u} - \frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{2\chi'}{\chi'^2 - 1}\frac{\partial \alpha}{\partial v}. \tag{4}$$

Отсюда легко заключить, что в рассматриваемой модели переход через скорость звука без разрыва производных модуля или аргумента скорости невозможен. Этот факт отражает особенность нашей модели, он связан с тем, что коэффициенты основных уравнений этой

модели при переходе через скорость звука меняются скачком.

Следующий факт, по-видимому, имеет общий характер; он показывает, как должна располагаться линия перехода через скорость звука в сопле. Именно, в плоскости потенциала, а значит, и в плоскости течения, линия перехода располагается до первой характеристики по направлению течения.

Этот факт следует из того, что на всей линии перехода должно выполняться неравенство

$$\chi'(v) \leqslant -1, \tag{5}$$

причем знак равенства может достигаться лишь в изолированных точках.

Для доказательства (5) заметим, что условие возрастания скорости на линии перехода дает $\frac{\partial p}{\partial u} \leqslant 0$, $\frac{\partial \bar{p}}{\partial u} \leqslant 0$, откуда в силу (2) заключаем, что на этой линии $\frac{\partial \alpha}{\partial v} \leqslant 0$, $\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial v} \geqslant 0$. Из уравнений (3) теперь получаем следующее: если в какой-нибудь точке линии перехода, а значит, и в некоторой ее окрестности, было бы $\chi'^2 < 1$, то в этой окрестности $\frac{\partial \bar{p}}{\partial u} \equiv \frac{\partial p}{\partial u} \equiv 0$, а тогда по (2) и $\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial v} \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial v} \equiv 0$. Из (4) следует, что в нашей окрестности $\frac{\partial \bar{p}}{\partial v} \equiv \frac{\partial p}{\partial v}$ и $\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial u} \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial u}$, т. е. производные p и α остаются непрерывными при переходе через участок линии перехода, а это невозможно по сделанному выше замечанию. Таким образом, на линии перехода всюду $\chi'^2 \geqslant 1$. Равенство может достигаться только в изолированных точках, ибо если бы оно достигалось на каком-либо отрезке, то этот отрезок был бы отрезком характеристики; тогда из наших соотношений следовало бы, что на нем $\alpha = \text{const}$, а это нельзя склеить с дозвуковым режимом [1]).

[1]) В самом деле, тогда на отрезке границы области (дозвуковой зоны) аналитическая функция $pe^{i\alpha}$ была бы постоянной, т. е. дозвуковой поток был бы поступательным, со скоростью, равной скорости звука в нашей модели.

Мы доказали, что на линии перехода всюду либо $\chi' \leqslant -1$, либо $\chi' \geqslant 1$, причем равенство может достигаться лишь на изолированном множестве. Покажем, что второй случай невозможен. В самом деле, дозвуковой режим определяет на линии перехода значения $\bar{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\bar{\alpha}$, а значит, и функции $\varphi(u+v)$, $\psi(u-v)$ на некоторых отрезках $0 \leqslant u+v \leqslant h_1$, $0 \leqslant u-v \leqslant h_2$ $(h_2 < h_1)$. Так как по формулам (13) § 15 на отрезке $[0, h_1]$ оси u должно выполняться условие

$$\alpha = b\{\varphi(u) - \psi(u)\} \equiv 0,$$

то на этом отрезке $\varphi \equiv \psi$. Далее, на этом отрезке функция

$$\bar{p} = \cos 2b\varphi(u) \tag{6}$$

должна убывать, а значит, $\varphi \equiv \psi$ возрастать. Но на линии перехода

$$\varphi(u+v) + \psi(u-v) \equiv \frac{\pi}{4b}, \tag{7}$$

значит, на том ее участке, где $\varphi \equiv \psi$, дифференцирование по v дает

$$\frac{\varphi'(u+v)}{\psi'(u-v)} = \frac{1-\chi'}{1+\chi'}.$$

Если бы на линии перехода было $\chi' > 1$, то из этого равенства следовало бы, что $\varphi'(u+v)$ и $\varphi'(u-v)$ разных знаков, т. е. φ не может возрастать ни на каком отрезке $[0, h]$ оси u. Противоречие доказывает утверждение.

Итак, доказано, что в плоскости w комплексного потенциала линия перехода OB должна располагаться левее первой характеристики OC (см. рис. 45). Так как отображение $z \to w$ локально гомеоморфно, то таков же характер расположения этих линий и в плоскости течения.

Выясним теперь характер отображения плоскости потенциала w на плоскость годографа, которое соответствует течению в симметричном сопле с переходом через скорость звука. В качестве плоскости годографа мы возьмем плоскость переменного $\Omega = \beta + i\alpha$, просто

связанного со скоростью $\omega = Ve^{i\alpha}$. Якобиан j^* отображения $w \to \Omega$ в дозвуковой области равен

$$j^* = -(\beta_u^2 + \alpha_u^2); \tag{8}$$

он здесь всегда неположителен и обращается в нуль лишь в изолированных точках. В сверхзвуковой области этот якобиан

$$j^* \leqslant 4b\varphi'(u+v)\,\psi'(u-v) \tag{9}$$

может обращаться в нуль и менять знак на характеристиках.

Из предыдущего анализа следует, что на линии перехода OB имеем $-h_1 \leqslant u+v \leqslant 0$ и $-h_2 \leqslant u-v \leqslant 0$, где $h_1 < h_2$. Так как у нас

$$\varphi(u+v) = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2b}, \qquad \psi(u-v) = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2b}, \tag{10}$$

причем на линии перехода $\beta = \frac{1}{2}\log 2$, а $\alpha = \tilde{\alpha}$ определяется дозвуковым режимом, то зная дозвуковой режим и вид линии перехода, мы можем определить φ на $[-h_1, 0]$ и ψ на $[-h_2, 0]$.

Будем двигаться по линии перехода от точки B к 0; при этом β остается постоянным, а α возрастает от некоторого отрицательного значения до 0 (как это видно из движения в дозвуковой зоне). Так как при этом возрастают и $u+v$ и $u-v$, то, как видно из (10), функция φ возрастает, а ψ убывает, причем $\varphi(0) = \psi(0) = \frac{\beta}{2} = \frac{\log 2}{4}$.

Эти значения φ и ψ, индуцированные дозвуковым течением, определяют сверхзвуковое течение в зоне I, где $u+v \leqslant 0$ и $u-v \leqslant 0$ (см. рис. 45). Как видно из (9) и только что сделанного вывода, якобиан j^* в этой зоне остается отрицательным, так что отображение $w \to \Omega$ на линии перехода продолжает быть локально гомеоморфным.

При $u \geqslant 0$ из того, что $\alpha \equiv 0$ на оси, и вытекает условие $\varphi(u) \equiv \psi(u)$. На некотором участке $[0, h]$ оси u функция φ должна продолжать возрастать — это следует из (6) и условия возрастания скорости на оси сопла. Предположим сначала, что $h \geqslant 2$, тогда всюду в зоне II, где $0 < u+v < 2$ и $u-v < 0$, имеем $\varphi' > 0$,

$\psi' < 0$, т. е. в этой зоне всюду $j^* < 0$ и на первой характеристике якобиан знака не меняет. В этой зоне должна лежать линия OD, на которой $\alpha = b\{\varphi(u+v) - \psi(u-v)\} = 0$ (отмечена точками на рис. 45). В самом деле, при любом фиксированном v функция α возрастает с ростом u, причем на первой характеристике OC имеем $\alpha = b\{\varphi(0) - \psi(-2v)\} < 0$, а на второй OE имеем $\alpha = b\{\varphi(2v) - \psi(0)\} > 0$. После второй характеристики, в зоне III, где $u+v > 0$ и $u-v > 0$, обе производные φ' и ψ' становятся положительными, следовательно, там $j^* > 0$, т. е. якобиан меняет знак на OE и там у отображения $w \to \Omega$ появляется складка: образ зоны III накладывается на образ зоны II (см. рис. 45). Линия OD, таким образом, служит местом, где нарушается гомеоморфность рассматриваемого отображения. Если $h < 2$, то в зоне II на характеристике $u + v = h$ появится дополнительная складка отображения $w \to \Omega$, якобиан j^* на ней изменит знак.

Отметим, что в многочисленных примерах точных и приближенных решений задачи о симметричном сопле в классической теории (Лайтхилл, Ф. И. Франкль, С. В. Фалькович, Томотико и Тамада и др.) характер перехода через скорость звука именно таков, каким он оказался в нашей модели (при $h \geqslant 2$).

Полного решения задачи о сопле с доказательством существования и выяснением условий, обеспечивающих единственность, пока еще получить не удалось ни для классической теории, ни для упрощенной модели.

Сверхзвуковые включения. Кроме рассмотренного случая перехода через скорость звука в трубах, когда линия перехода пересекает поток от стенки до стенки, в большом числе экспериментов наблюдаются смешанные (до- и сверхзвуковые) течения другого рода. Рассмотрим симметричную трубу с симметричными стенками, движение в которой мы для простоты будем рассматривать в плоской постановке. Если скорость V_∞ течения в бесконечности сравнительно невелика, то движение во всей трубе остается дозвуковым. При увеличении V_∞ в ряде случаев сначала появляются небольшие сверхзвуковые зоны вблизи мест, где трубы сужаются, а в остальной части течение остается дозвуковым.

Приведем математическую постановку задачи, которая возникает в связи с такого рода течениями. Мы сформулируем ее в рамках описанной выше модели смешанных течений.

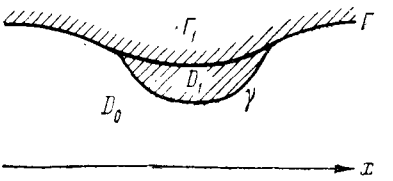


Рис. 46.

Дана область D типа полосы, ограниченная осью x и гладкой кривой Γ с горизонтальной асимптотой. При заданной скорости в бесконечности $V_\infty < \sqrt{2}$ требуется найти область D_1, ограниченную дугой $\Gamma_1 \subset \Gamma$ и дугой $\gamma \subset D$, имеющей общие концы с Γ_1 (рис. 46), так что:

1) в $D_0 = D \setminus \bar{D}_1$ отображение f в плоскость комплексного потенциала определяется системой Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{11}$$

причем скорость $V = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ в бесконечности равна V_∞, а всюду в D_0 не превышает $\sqrt{2}$;

2) в D_1 это же отображение удовлетворяет системе

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{V^2 - 1}\,\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\sqrt{V^2 - 1}\,\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{12}$$

причем всюду $V > \sqrt{2}$;

3) поле скоростей непрерывно всюду в D;

4) отображение f гомеоморфно в D и преобразует D в полосу $\{0 < v < H\}$ с нормировкой $f(\pm\infty) = \pm\infty$.

Напомним, что системы (11) и (12) подобраны так, что их производные системы являются соответственно простейшими системами эллиптического и гиперболического типа.

Для этой задачи можно провести качественное исследование, подобное тому, которое выше было проведено для перехода через скорость звука в сопле. В случае классических уравнений газовой динамики такое исследование было проведено А. А. Никольским и Г. И. Таганов ым [10], которые установили, что в рассматриваемой задаче отображение на плоскость

годографа должно быть взаимно однозначным. Отсюда, в частности, вытекает, что линия перехода γ должна быть строго выпуклой (не может содержать прямолинейных отрезков). Ряд результатов исследований сверхзвуковых течений можно найти в книге Л. И. Седова [2].

Однако в общей постановке сформулированная выше задача до сих пор не решена. Хотелось бы иметь результат, по которому при каких-либо (хотя бы и очень ограничительных) условиях на кривую Г обеспечивалось существование постоянных V_0 и V_1 таких, что при $V_0 < V_\infty < V_1$ в области D существовало единственное течение со сверхзвуковой зоной, примыкающей к Г. Быть может, переход к упрощенной модели уравнений газовой динамики, которая предложена здесь, облегчает математический аппарат (в дозвуковой зоне можно пользоваться теорией конформных отображений, а в сверхзвуковой — простыми представлениями решений, которые даны в § 15), и для этой модели задачу удастся решить.

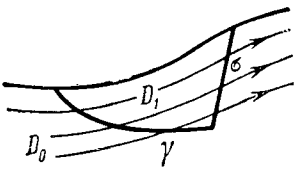


Рис. 47.

Необходимость значительных ограничений на кривую Г видна из исследований Ф. И. Франкля и других, в которых для ряда случаев доказывается невозможность течений с местными сверхзвуковыми зонами без разрыва скоростей. С соображениями такого рода можно ознакомиться по книге Л. Берса [5]. В свете сказанного, естественно наряду с поставленной выше задачей, где поле скоростей остается непрерывным, рассматривать также течения со скачками скорости и давления. Такие течения были рассмотрены в работах Ф. И. Франкля [11] и [12], где граница сверхзвуковой зоны состоит из линий перехода γ и скачка уплотнения σ (рис. 47).

Поясним этот термин. Как известно, у эллиптических уравнений с гладкими коэффициентами и все решения гладкие. Гиперболические уравнения не обладают таким свойством, например, решения уравнений второго порядка с гладкими коэффициентами могут иметь разрывы вторых производных на характеристи-

ках (см., например, Р. Курант и К. Фридрихс [4]). Кроме таких разрывов, называемых *слабыми разрывами*, могут существовать разрывы другого рода, которые называются *скачками*.

Скачки (в двумерном случае, рассматриваемом здесь) представляют собой линии, на которых происходит разрыв скорости, а значит — плотности и давления. Физически они реализуются в виде узких полосок весьма быстрого изменения скоростей, где выступает вязкость как существенный параметр, которым нельзя пренебрегать. Величины разрывов на скачке (т. е. разностей предельных значений после скачка и до него, считая по направлению движения вдоль линий тока) не произвольны, они управляются гидродинамическими и термодинамическими факторами.

Наиболее часто рассматриваются скачки, удовлетворяющие следующим трем условиям: 1) тангенциальная (по отношению к скачку σ) составляющая скорости остается непрерывной при переходе через скачок; 2) остается непрерывным произведение плотности на нормальную составляющую скорости (это требование вытекает из закона сохранения массы); 3) плотность при переходе через скачок может лишь возрастать (следствие второго закона термодинамики). Такие скачки поэтому называются *скачками уплотнения*. При переходе через них скорость движения может, следовательно, лишь упасть, в частности, сверхзвуковое течение может перейти в дозвуковое, но не наоборот. Подробнее о разрывных решениях уравнений газовой динамики можно прочитать в книге Н. Е. Кочина, И. А. Кибеля и Н. В. Розе [1].

Было бы интересно проанализировать течения со сверхзвуковыми зонами, заканчивающимися скачками уплотнения, в рассматриваемой здесь упрощенной модели уравнений газовой динамики. По-видимому, в этой модели можно дать более исчерпывающее исследование, чем в классической.

Задача о склейке. В заключение приведем еще один модельный вариант задачи о смешанном течении, рассмотренный в статье М. А. Лаврентьева [13]. Пусть дана область D типа полосы, ограниченная гладкой кривой Γ_0: $y = y_0(x)$ с горизонтальной асимптотой и

прямой Γ: $y \equiv 1$. Требуется найти кривую γ: $y = y(x)$, $y_0(x) < y(x) < 1$ для $-\infty < x < \infty$, разбивающую D на две области D_0 и D_1 (рис. 48) так, чтобы существовали квазиконформные отображения f_0 и f_1 соответственно D_0 и D_1 на полосы $\Delta_0 = \{-h < v < 0\}$ и $\Delta_1 = \{0 < v < 1\}$, сохраняющие бесконечные точки полос, причем f_0 в D_0 удовлетворяет системе уравнений эллиптического типа, а f_1 в D_1 — системе гиперболического типа; на γ оба отображения должны совпадать. Для простоты формулировок будем обозначать через $D(\gamma_1, \gamma_2)$ область типа полосы, ограниченную снизу кривой γ_1 и сверху γ_2.

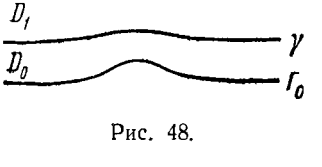


Рис. 48.

Для произвольных систем эта задача, по-видимому, неразрешима. Дело в том, что в эллиптической зоне D_0 влияние локальных вариаций границы γ быстро затухает по мере удаления от места вариации, а в гиперболической зоне D_1 эффект затухания отсутствует (см. §§ 12—14). Это обстоятельство может сделать поставленную задачу неустойчивой и в общем случае неразрешимой.

Из этого затруднения можно найти выход, соответствующий условиям, которые реализуются на практике. Он состоит в учете вязкости, под влиянием которой эффект локальных вариаций затухает по мере удаления от места вариации также и в сверхзвуковых течениях. В модельных постановках вязкость можно учитывать в форме какого-либо сглаживающего процесса, которому следует подвергать решения гиперболических систем.

Например, пусть в описанной выше постановке f_0 — конформное отображение, а f_1 удовлетворяет в D_1 гиперболической системе (12); пусть $V = V(x, y)$ и $\alpha = \alpha(x, y)$ — характеристики отображения f_1, а V_0 и $\alpha_0 = 0$ — предельные значения этих характеристик при $x \to -\infty$. Сглаживающий процесс для отображения f_1 можно организовать, скажем, так. Заменяем характеристики V и α функциями

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x, y) &= V_0 + \{V(\alpha, y) - V_0\} e^{-\delta(\sqrt{x^2+1}-1)(1-y)}, \\ \tilde{\alpha}(x, y) &= \alpha(x, y) e^{-\delta(\sqrt{x^2+1}-1)(1-y)}, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\delta > 0$ — малый параметр. Эти функции мы принимаем, соответственно, за растяжение и наклон прообразов линий тока $v = \text{const}$ и по ним восстанавливаем отображение $\tilde{f}_1$ области $D(\tilde{\gamma}, \Gamma)$ на полосу Δ_1, считая его близким к линейному при больших отрицательных x.

Для этого случая уточненная постановка задачи о склейке такова: найти в области $D = D(\Gamma_0, \Gamma)$ кривую γ так, чтобы сглаженное процессом (13) квазиконформное отображение области $D(\tilde{\gamma}, \Gamma)$ на полосу $\Delta_1 = \{0 < v < 1\}$ и конформное отображение области $D(\Gamma_0, \tilde{\gamma})$ на полосу $\Delta_0 = \{-h < v < 0\}$ совпадали во всех точках кривой $\tilde{\gamma}$, которая получается из γ процессом сглаживания.

Укажем процесс последовательных приближений для решения этой задачи, сходящийся в случае, когда Γ_0 близка к прямой $y = -h$ в том смысле, что $y_0(x) \to -h$ при $|x| \to \infty$ со скоростью $e^{-|x|}$, а $|y_0(x) + h|$, $|y_0'(x)|$ и $|y_0''(x)| \leqslant Kh^2$, где K — постоянное и число h мало. В качестве первого приближения примем за $\gamma = \gamma_1$ ось x. Тогда $f_1^{(1)}(z) \equiv z$, для него $V_1 \equiv 1$, $\alpha \equiv 0$ и сглаживающий процесс не изменяет отображения. При конформном отображении $f_0^{(1)}$ области $D(\Gamma_0, \gamma_1)$ на Δ_0 растяжение $V_0^{(1)}$ на γ_1 будет отличаться от 1 на величину порядка h (см. § 12). В качестве второго приближения для γ примем кривую γ_2 такую, что при конформном отображении $D(\Gamma_0, \gamma_2)$ на Δ_0 растяжение на γ_2 всюду равно 1 (как мы увидим в следующей главе, такая кривая γ_2 существует, единственна и отклоняется от γ_1 на величину порядка h^3).

Далее мы найдем квазиконформное отображение $f_1^{(2)}$ области $D(\gamma_2, \Gamma)$ на Δ_1, сгладим его процессом (13) и тогда на сглаженной кривой $\tilde{\gamma}_2$ растяжение $V_1^{(2)}$ будет отличаться от 1 на величину порядка h^2 и при $|x| \to \infty$ стремиться к 1 по экспоненциальному закону (также будет отличаться от 0 и наклон α). Теперь найдем кривую γ_3, чтобы на ней растяжение конформного отображения $D(\Gamma_0, \gamma_3)$ было равно $V_1^{(2)}$ и т. д. Естественно ожидать, что этот процесс сходится к решению задачи

о склейке, но доказательство, по-видимому, сопряжено с большими трудностями.

В заключение мы приведем общую постановку, которая естественно возникает в связи с рассмотренной выше задачей. В большом количестве явлений, наблюдаемых в гидродинамике, наряду с факторами, управляемыми дифференциальными уравнениями, оказываются весьма существенными и некоторые другие факторы. Поэтому представляется очень заманчивым построение теории классов отображений, описываемых не как решения тех или иных систем уравнений с частными производными, а скажем, заданных аксиоматически, по совокупности характерных свойств.

Например, пусть задан класс E односвязных областей D с гладкими границами, который наряду с каждой областью D_0 содержит и все области, которые получаются из D_0 гладкими малыми деформациями. Пусть еще задан алгоритм $A(D)$, который каждой области $D \in E$ ставит в соответствие единственное при заданном соответствии трех пар граничных точек гомеоморфное отображение f области D на какую-либо каноническую область (круг, полуплоскость или полосу). Алгоритм предполагается непрерывным, т. е. сопоставляющим близким областям D и близкие отображения $f = A(D)$.

Алгоритм A естественно считать *эллиптическим*, если для соответствующих ему отображений $f = A(D)$ справедливы вариационные принципы теории конформных отображений. *Гиперболические* алгоритмы определяются так, чтобы для соответствующих отображений влияние локальных вариаций границы области сказывалось лишь в зонах, ограниченных кривыми, которые называются характеристиками алгоритма. Накладывая на алгоритмы целесообразные дополнительные свойства, можно выделять те или иные классы отображений.

Отображения, соответствующие алгоритмам с определенными свойствами, можно рассматривать как квазиконформные отображения в широком смысле. Развитие такого аксиоматического подхода к теории квазиконформных отображений представляет значительный интерес, как с точки зрения самой теории, так и ее возможных приложений.

Литература

1. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, т. II, Гостехиздат, М., 1948.
2. Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Гостехиздат, М., 1950.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1953.
4. Р. Курант, К. Фридрихс, Сверхзвуковое течение и ударные волны, ИЛ, М., 1951.
5. Л. Берс, Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, ИЛ, М., 1961.
6. А. В. Бицадзе, Уравнения смешанного типа, ВИНИТИ, М., 1959.
7. М. М. Лаврентьев, Об одной краевой задаче для гиперболической системы, Матем. сб., 38(60), 1956, 451—464.
8. Б. В. Шабат, Об аналоге теоремы Римана для гиперболических систем дифференциальных уравнений, Успехи матем. наук, 11 : 3 (69), 1956, 203—206.
9. Б. В. Шабат, О гиперболических квазиконформных отображениях (в сб. «Некоторые вопросы математики и механики», к семидесятилетию М. А. Лаврентьева, Новосибирск, 1970).
10. А. А. Никольский, Г. И. Таганов, Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения, Прикл. матем. и мех., 10 (1946), 481—502.
11. Ф. И. Франкль, К образованию скачков уплотнения в дозвуковых течениях с местными сверхзвуковыми скоростями, Прикл. матем. и мех., 11 (1947), 199—202.
12. Ф. И. Франкль, Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения, Прикл. матем. и мех., 20 (1956), 196—202.
13. М. А. Лаврентьев, Об одной задаче на склеивание, Сибирский матем. журн., 5 : 3 (1964), 603—607.

Глава V

ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ

В предыдущих главах уже не раз говорилось об этих задачах в их классической постановке. Здесь мы продолжим разбор, причем наряду с классическими рассмотрим и некоторые новые задачи.

§ 18. Парадоксы в схеме идеальной жидкости

Парадокс подъемной силы. Напомним, что величина давления в установившемся безвихревом течении идеальной несжимаемой жидкости определяется из интеграла Бернулли:

$$P = A - \frac{\rho}{2} V^2, \tag{1}$$

где A — некоторая постоянная, ρ — плотность жидкости, $V = |\boldsymbol{V}|$ — величина скорости течения (действием сил тяжести мы пренебрегаем). Пользуясь этой формулой, нетрудно вычислить результирующую силу давления, действующую на обтекаемое тело в целом. Так как давление на контур γ направлено внутрь по его нормали, то сила, действующая на элемент $d\zeta$ контура, равна

$$Pi\, d\zeta = Ai\, d\zeta - \frac{\rho}{2} V^2 i\, d\zeta,$$

а результирующая сила, действующая на весь контур:

$$\boldsymbol{F} = X + iY = \int\limits_{\gamma} Pi\, d\zeta = -\frac{\rho i}{2} \int\limits_{\gamma} V^2\, d\zeta \tag{2}$$

(мы учитываем, что интеграл от $d\zeta$ по замкнутому контуру равен нулю). Составляющая X вектора $\boldsymbol{F}$ назы-

вается *лобовым сопротивлением*, а Y — *подъемной силой*.

Преобразуем эту формулу, введя в нее комплексный потенциал f течения. Мы знаем, что вектор скорости $\boldsymbol{V} = \overline{f'(z)}$; учитывая, что в силу условия обтекания контура на нем $\boldsymbol{V} = Ve^{i\varphi}$, где $\varphi = \arg d\zeta$, получаем в точках γ

$$V^2 d\zeta = (\overline{f'(z)})^2 e^{-2i\varphi} d\zeta = (\overline{f'(\zeta)})^2 d\bar{\zeta}.$$

Подставим это в (2) и перейдем к комплексно сопряженным величинам: мы получим классическую формулу С. А. Чаплыгина (1910 г.):

$$\overline{\boldsymbol{F}} = X - iY = \frac{\rho i}{2} \int_\gamma (f'(\zeta))^2 d\zeta. \tag{3}$$

Применим ее к простейшему случаю бесциркуляционного обтекания круглого цилиндра. Здесь комплексный потенциал равен

$$f(z) = V_\infty \left(z + \frac{R^2}{z}\right) \tag{4}$$

(где V_∞ — скорость на бесконечности), а его производная $f'(z) = V_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right)$. Подставляя это в формулу (3), мы приходим к парадоксальному результату: и подъемная сила, и лобовое сопротивление в этой задаче оказываются р а в н ы м и н у л ю!

Как мы сейчас убедимся, парадокс не исчезнет, если мы будем рассматривать бесциркуляционное обтекание произвольного замкнутого контура γ. В самом деле, для любого течения во внешности γ производная комплексного потенциала f' течения должна быть аналитической функцией в этой внешности, а в окрестности бесконечности должна иметь разложение вида

$$f'(z) = \overline{\boldsymbol{V}}_\infty + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{V}_\infty$ — вектор скорости течения в бесконечности.

Интеграл от f' по любому замкнутому контуру, охватывающему γ, равен $\Gamma + iN$, где Γ — циркуляция, а N — поток через этот контур (см. гл. II). В нашем случае,

так как имеется обтекание γ, то $V_n = 0$ вдоль γ и, следовательно,

$$N = \int_\gamma V_n\, ds = 0.$$

С другой стороны, как видно из (5),

$$\int_\gamma f'(z)\, dz = c_{-1} \cdot 2\pi i$$

(так как по теореме Коши интеграл не меняется при изменении контура вне γ, мы можем считать, что он расположен в той области, где (5) уже действует). Сопоставляя эти два факта, мы заключаем, что $c_{-1} = \frac{\Gamma}{2\pi i}$, и интегрируя (5), получаем следующее разложение комплексного потенциала нашего течения в окрестности бесконечности:

$$f(z) = \bar{V}_\infty z + c + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log z - \frac{c_{-2}}{z^2} - \ldots; \qquad (6)$$

здесь c — произвольная постоянная.

Мы видим, что в отсутствии циркуляции ($\Gamma = 0$) при обтекании произвольного контура γ разложение в бесконечности f' и $(f')^2$ не содержит степени $\frac{1}{z}$. Поэтому интеграл в формуле Чаплыгина равен 0, и в этом случае парадокс сохраняется для любого контура.

Условие Чаплыгина. Эти же выкладки показывают, что в случае циркуляционного обтекания произвольного замкнутого контура γ в окрестности бесконечности

$$[f'(z)]^2 = \bar{V}_\infty^2 + \frac{\Gamma \cdot \bar{V}_\infty}{\pi i} \frac{1}{z} + \frac{d_{-2}}{z^2} + \ldots$$

Подставляя это в формулу (3) и переходя к комплексно сопряженным величинам, получим знаменитую теорему Н. Е. Жуковского о подъемной силе (1904 г.)

$$\boldsymbol{F} = i\rho\Gamma \boldsymbol{V}_\infty. \qquad (7)$$

Как мы показали в гл. III, комплексный потенциал циркуляционного обтекания круглого цилиндра $\{|z| = R\}$ равен

$$f(z) = \bar{V}_\infty z + \frac{V_\infty R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log z, \qquad (8)$$

а критические точки потока —

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi R V_\infty}, \qquad \varphi_1 = \pi - \varphi_0 \tag{9}$$

(переход от рассмотренного там случая $V_\infty > 0$ к рассматриваемому здесь элементарен). Общий случай обтекания произвольного контура γ сводится к предыдущему при помощи конформного отображения g внешности γ на внешность окружности $\{|\zeta| = R\}$ с нормировкой $g(\infty) = \infty$, $g'(\infty) = 1$; величина R вполне определяется условиями нормировки. Подставляя в (8) $g(z)$ вместо z, получим комплексный потенциал течения:

$$f(z) = \bar{V}_\infty g(z) + \frac{V_\infty R^2}{g(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log g(z); \tag{10}$$

полученное представление действует во всей внешности контура, а (6) дает разложение этой функции в окрестности бесконечности.

Подсчитаем число параметров, определяющих это решение задачи обтекания. Функция g и радиус R полностью определяются видом обтекаемого контура γ и принятыми условиями нормировки. Вектор скорости в бесконечности V_∞ остается свободным параметром — мы можем задавать его произвольно. Остается выяснить ситуацию с величиной циркуляции Γ. Как видно из (9), эта величина полностью определится, если известен аргумент образа точки разветвления или схода потока при отображении g. В принципе эти точки можно задавать произвольно, так что Γ также является свободным параметром.

Однако в приложениях к авиации дело обстоит не так. Обтекаемый контур — профиль крыла самолета — здесь обычно имеет острую кромку, скажем, точку z_0, с углом между касательными $\alpha\pi$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$, как на рис. 49. Как мы видели в гл. III, из этого вытекает, что производная g' отображающей функции обращается в этой точке в бесконечность. Отсюда, вообще говоря, следует физически невозможный вывод о том, что скорость течения в точке z_0 бесконечно велика.

Этот парадокс проанализировал С. А. Чаплыгин. Он ввел условие, что точка z_0 является точкой схода потока — как показывает простой подсчет, при этом

условии скорость оказывается конечной. В самом деле, в окрестности точки z_0 мы имеем $\zeta = g(z) \approx A(z-z_0)^{\frac{1}{2-\alpha}} + \zeta_0$, и следовательно,

$$\frac{d\zeta}{dz} = g'(z) \approx B(z-z_0)^{\frac{\alpha-1}{2-\alpha}}$$

(A и B — некоторые постоянные, $\zeta_0 = g(z_0)$). Но как видно из решения задачи об обтекании круглого цилиндра в гл. III, производная комплексного потенциала

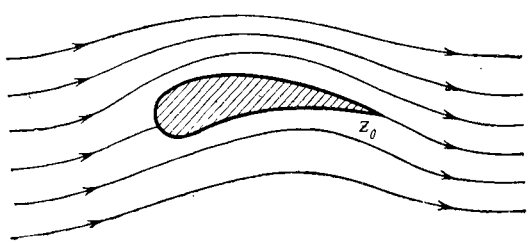


Рис. 49.

$w = w(\zeta)$ имеет в точке ζ_0 нуль первого порядка, т. е. в окрестности этой точки $\frac{dw}{d\zeta} \approx C(\zeta - \zeta_0)$, где C — постоянная. Тогда в окрестности z_0 по правилу дифференцирования сложных функций

$$f'(z) = \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} \approx BC(\zeta - \zeta_0)(z-z_0)^{\frac{\alpha-1}{2-\alpha}} \approx ABC(z-z_0)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}},$$

и эта производная действительно конечна в точке z_0.

Гипотеза Чаплыгина достаточно хорошо оправдывается на опыте. По-видимому, это объясняется тем, что если точка схода не совпадает с острием, то вследствие очень больших скоростей вблизи этой точки при сколь угодно малой вязкости образуются вихри, которые и смещают точку схода к острию (подробнее мы рассмотрим это явление в гл. VII в связи с задачей обтекания тел струями). Следствием гипотезы Чаплыгина является то, что циркуляция Γ перестает быть свободным параметром задачи — ее величина определяется по формуле (9), если точка $\zeta_0 = e^{i\varphi_0}$ известна. Значит, по формуле (7) опре-

делится и величина результатирующей силы, которая действует на крыло:

$$|F| = \rho V_\infty \Gamma.$$

Описанные здесь результаты можно распространить и на задачу обтекания контуров потоками идеального газа при дозвуковых режимах.

Заметим, однако, что проблема устранения парадоксов нулевой подъемной силы (лобового сопротивления) и бесконечности скорости решается значительно труднее в задачах обтекания контуров, которые имеют острые углы, обращенные острием внутрь контура. Здесь схема идеальной жидкости часто дает большое отклонение от действительности. Некоторые из таких задач мы рассмотрим в дальнейшем изложении.

Пространственный случай. В заключение отметим, что способ устранения парадокса нулевой подъемной силы, который был описан выше, в пространственных задачах неприменим. Рассмотрим причину этого на примере обтекания шара. В плоской задаче обтекания круга для устранения парадокса на бесциркуляционное течение мы наложили течение вида $\frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Log} z$, все векторы скорости которого направлены по окружности и имеют постоянную длину. В пространстве аналогичного течения нет — это вытекает из геометрической теоремы, по которой на сфере не существует непрерывного касательного векторного поля отличных от нуля векторов (ее называют теоремой о невозможности причесать ежа). Поэтому в пространственных задачах устранить парадокс описанным выше способом не удается.

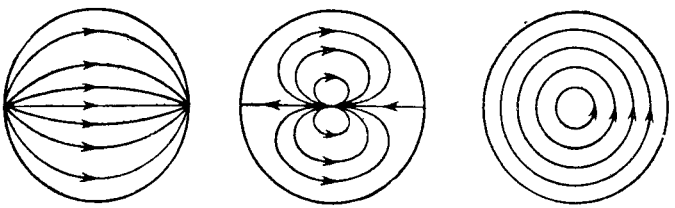
Этот парадокс указывает на недостаточность схемы идеальной жидкости. В действительности при обтекании шара с его поверхности срываются вихри, существенно меняющие распределение давлений.

§ 19. Течения с постоянной завихренностью

Движения с точечными вихрями. Здесь мы рассмотрим некоторые новые схемы установившегося движения идеальной жидкости в ограниченных областях с достаточно гладкой границей. Прежде всего заметим, что

согласно принципу максимума для гармонических функций в этих задачах единственным решением с ограниченными скоростями будет покой. В самом деле, по условию обтекания функция тока $\psi = \text{const}$ на границе области, и если ψ не имеет особенностей внутри или на границе области, то по этому принципу $\psi \equiv \text{const}$.

Помещая внутри области или на ее границе точечные источники или точечные вихри, мы можем получить движения следующих типов:



а) *б)* *в)*

Рис. 50

Если близкое к любому из этих движений принять за начальное и ввести в рассмотрение сколь угодно малую вязкость, то под ее влиянием движение быстро перестроится — в силу большой концентрации энергии в окрестности особенностей начнется интенсивная диссипация энергии. В частности, например, движение в круге, когда вихрь помещен в его центре (рис. 50, *в*) и на границе нет трения, под влиянием вязкости будет стремиться к вращению жидкости как твердого тела.

Постоянная завихренность. Новую схему установившегося движения в ограниченной односвязной области с гладкой границей мы получим, если откажемся от условия отсутствия вихрей, предполагая, что вихри располагаются во всех точках области. Для простоты будем считать завихренность ω постоянной во всей области D. Тогда вместо обычных уравнений, приводящих к условию аналитичности, для координат вектора скорости — мы будем их здесь обозначать через V_x и V_y — получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = \omega, \qquad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

(второе уравнение по-прежнему выражает условие отсутствия источников).

Дифференцируя эти уравнения, мы получим, что каждая из функций V_x и V_y — гармоническая,

$$\Delta V_x = 0, \quad \Delta V_y = 0, \tag{2}$$

однако они не являются сопряженными, и функция $F = V_x - iV_y$ не аналитична. Поэтому удобнее перейти от V_x и V_y к функциям

$$u = V_x + \omega y, \quad v = -V_y, \tag{3}$$

тогда (1) перейдет, очевидно, в систему Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

и функция $f = u + iv$ будет аналитической. Это позволяет привлечь для изучения рассматриваемой схемы аппарат теории аналитических функций.

Рассмотрим для примера простейшую задачу о течении в круге $\{|z| < R\}$. Условие обтекания окружности состоит в ортогональности векторов $e^{i\varphi}$ и $V_x + iV_y$, т. е. имеет вид

$$V_x \cos\varphi + V_y \sin\varphi = 0.$$

Переходя к функции $f = u + iv$, мы перепишем его в виде

$$u\cos\varphi - v\sin\varphi = \omega y \cos\varphi,$$

или, после умножения на R, в виде $ux - vy = \omega xy$. Последнее условие можно переписать так:

$$\operatorname{Re}\left(zf + \frac{\omega i}{2} z^2\right) = 0.$$

Из принципа максимума следует, что единственным решением задачи, которое не имеет особенностей в круге $\{|z| < R\}$, будет $f(z) = -\frac{\omega i}{2} z$, откуда

$$\boldsymbol{V} = V_x + iV_y = \frac{i\omega}{2} z. \tag{4}$$

Траекториями этого движения (векторными линиями поля $\boldsymbol{V}$) будут кривые, на которых $\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V}$, т. е.

окружности $x^2 + y^2 = r^2$. В отличие от классического вихревого движения, изображенного на рис. 50, *в*, это движение устойчиво, ибо для него энергия всюду конечна.

Такую же задачу можно решить и для произвольной ограниченной области D с гладкой границей Г. Если обозначить через α угол касательной к Г с осью x, то условие обтекания будет состоять в коллинеарности векторов $e^{i\alpha}$ и $\boldsymbol{V} = V_x + iV_y$. Оно записывается в виде

$$V_x \sin\alpha - V_y \cos\alpha = 0, \tag{5}$$

или, после перехода к аналитической функции $f = u + iv$, в виде

$$u \sin\alpha + v \cos\alpha = \omega y \sin\alpha. \tag{6}$$

Это — одна из так называемых линейных граничных задач теории аналитических функций. В классе ограниченных функций она имеет единственное решение для любого гладкого контура Г (см. Л. и Ш., гл. III).

Для решения задач обтекания в рассматриваемой схеме удобно, как и в классическом случае, ввести *функцию тока* ψ. Она по-прежнему вводится как функция, дифференциал которой равен

$$d\psi = -V_y\,dx + V_x\,dy \tag{7}$$

(в силу второго уравнения (1) выражение справа является точным дифференциалом). Мы имеем

$$V_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad V_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{8}$$

так что линии уровня $\psi = \text{const}$ совпадают с векторными линиями поля скоростей $\boldsymbol{V} = V_x + iV_y$. Условие обтекания (5) теперь записывается просто в виде условия, что $\psi = \text{const}$ на границе D.

Подставляя (8) в первое уравнение (1), мы найдем, что функция тока удовлетворяет так называемому *уравнению Пуассона*

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\omega. \tag{9}$$

Потенциала скоростей в этой схеме не существует просто потому, что движение не потенциально.

Заметим, что принятое в схеме условие постоянства завихренности является естественным, если рассматривать течение как предельное для ламинарного течения вязкой жидкости в предположении, что вязкость $\nu \to 0$. В самом деле, завихренность для установившегося плоского движения вязкой несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$V_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + V_y \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \Delta \omega \tag{10}$$

(см. § 3). Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d\omega}{ds} = \nu \frac{\Delta \omega}{|\boldsymbol{V}|},$$

где $\frac{d}{ds}$ обозначает производную вдоль линии тока. Пусть теперь $\nu \to 0$ так, что $\frac{\Delta \omega}{|\boldsymbol{V}|}$ остается ограниченным; тогда $\frac{d\omega}{ds} \to 0$ и, следовательно, при малых ν максимум и минимум ω на любой линии тока, в частности, на границе области D, сколь угодно близки друг к другу. Но для решений уравнения (10) и максимум и минимум достигаются на границе области (см. Курант [1], стр. 324), следовательно, при малых ν максимум ω в D мало отличается от минимума — завихренность ω почти постоянна в D.

Свойства течений. При завихренных течениях (без особенностей) в ограниченной односвязной области D в этой области найдется по крайней мере одна неподвижная точка, в которой скорость равна нулю. В самом деле, на границе области $\psi = \text{const}$, и поэтому либо максимум, либо минимум [1]) этой функции в D достигается во внутренней точке области, а там $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -V_y =$ и $\frac{\partial \psi}{\partial y} = V_x = 0$.

Далее заметим, что в рассматриваемом случае, как и в классическом, поток вектора скорости $\boldsymbol{V}$ через любую кривую γ, лежащую в D, равен приращению

[1]) Так как ψ удовлетворяет уравнению (9), то при $\omega < 0$ внутри области не может достигаться максимум функции ψ, а при $\omega > 0$ — минимум этой функции (см. Курант [1], стр. 324).

функции тока ψ на этой кривой (т. е. разности значений ψ в ее концах). Отсюда следует, что поток V через любую кривую, соединяющую фиксированную точку z_0 области с ее границей Γ, равен $\psi(\zeta) - \psi(z_0)$, где $\zeta \in \Gamma$, и не зависит от вида этой кривой, так как у нас ψ постоянна на Γ. В частности, если z_0 — точка D, в которой достигается минимум или максимум функции ψ, то такой поток

$$\Omega = \int_\gamma d\psi = \psi(\zeta) - \psi(z_0) \tag{11}$$

называется *угловым расходом* рассматриваемого течения (рис. 51).

Важно выяснить, в какой мере на движения с постоянной завихренностью распространяются вариационные принципы. Рассмотренный выше пример круга показывает, что при фиксированном ω основной вариационный принцип неверен. В самом деле, из (4) видно, что скорость на границе $\{|z| = R\}$ равна $V = \frac{\omega}{2} R$ — при уменьшении радиуса круга она не увеличивается, а уменьшается.

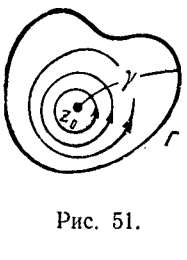


Рис. 51.

Однако этот принцип можно сохранить, если рассматривать движения с одинаковым угловым расходом. Для случая ограниченных областей он формулируется так:

Пусть область $\tilde{D}$ содержится в D, а ее граница $\tilde{\Gamma}$ имеет общую дугу γ с границей Γ области D. В D и $\tilde{D}$ рассматриваются течения с постоянными завихренностями ω и $\tilde{\omega}$ и с одинаковым угловым расходом Ω. При этих условиях на γ скорость второго течения меньше скорости первого, т. е. $\tilde{V} < V$ во всех точках γ. Если дополнительно предположить, что D и $\tilde{D}$ — выпуклые области, то в точках наибольшей деформации $\tilde{V} > V$.

Представляет интерес изучение течений с постоянной завихренностью в областях типа полосы. Пусть дана такая область $D = \{y_0(x) < y < y_1(x)\}$, ограниченная двумя непересекающимися кривыми Γ_0: $y = y_0(x)$ и Γ: $y = y(x)$, и в ней требуется построить движение с заданной завихренностью ω и с заданным расходом H.

Задача сводится к отысканию функции ψ, удовлетворяющей уравнению (9) и граничным условиям $\psi|_{\Gamma_0} = 0$, $\psi|_{\Gamma_1} = H$.

Последнюю задачу легко свести к задаче Дирихле для гармонических функций. В самом деле, вместо ψ можно искать функцию $\Psi = \psi + \frac{\omega y^2}{2}$, для которой $\Delta\Psi = \Delta\psi + \omega = 0$, и следовательно, она является гармонической в D. Граничные условия для этой функции принимают вид

$$\Psi|_{\Gamma_0} = \frac{\omega}{2} y_0^2(x), \qquad \Psi|_{\Gamma_1} = H + \frac{\omega}{2} y_1^2(x), \tag{12}$$

где правые части известны из условий задачи. Задача Дирихле имеет в классе ограниченных гармонических функций единственное решение, а значит, однозначно разрешима и наша задача построения течения с постоянной завихренностью в областях типа полосы.

§ 20. Задачи со свободными границами

Сюда относится большой круг классических задач, в которых ищется движение идеальной жидкости или идеального газа в областях с частично известными границами. Неизвестную часть границы в этих задачах нужно определить из каких-либо дополнительных условий. Простейшим из таких условий является постоянство на неизвестной части границы величины скорости (задача Кирхгофа). Другое важное условие выступает в задачах о волновых движениях тяжелой несжимаемой жидкости: условие постоянства давления на волновую поверхность согласно интегралу Бернулли (см. § 1) приводит на искомой части границы $y = y(x)$ к условию

$$\frac{\rho}{2} V^2 + \rho g y = A, \tag{1}$$

где g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность жидкости, V — величина скорости и A — некоторая постоянная.

Задача Кирхгофа. Начнем с простейшей задачи о течениях идеальной несжимаемой жидкости со свободной

поверхностью в условиях, когда силой тяготения можно пренебречь, движение плоско параллельно и давление над свободной поверхностью постоянно. Из интеграла Бернулли тогда следует, что на свободной поверхности постоянна величина скорости V, и математически задача ставится следующим образом.

Задана кривая Γ_0: $y = y_0(x)$ — дно водоема, причем предполагается, что функция $y_0(x)$ непрерывна и ограничена вместе с двумя производными на всей оси x; задан также расход h. Требуется найти *свободную поверхность*, т. е. кривую

$$\Gamma: \ y = y(x), \qquad y(x) > y_0(x) \tag{2}$$

так, чтобы на ней величина скорости течения была заданной постоянной величиной.

Если ввести комплексный потенциал течения $f = u + iv$, то эта задача сводится к геометрической задаче построения конформного отображения на полосу $\{0 < v < h\}$ области D типа полосы, у которой нижняя граница Γ_0 задана, а верхняя Γ неизвестна — известно только, что на ней постоянно растяжение $|f'(z)| = C$; отображение нормируется условиями $f(\pm\infty) = \pm\infty$.

Разрешимость и единственность решения задачи Кирхгофа можно доказать вариационным методом. Сущность этого метода состоит в следующем. Если задаться кривой Γ, удовлетворяющей неравенству (2), то можно найти конформное отображение f области D, ограниченной кривыми Γ_0 и Γ, на полосу $\{0 < v < h\}$, причем условия нормировки $f(\pm\infty) = \pm\infty$ определяют это отображение с точностью до постоянного слагаемого. Предположим еще, что функция $y(x)$ ограничена вместе с двумя производными, тогда на Γ существует ограниченная производная f' и можно рассматривать величину

$$I(\Gamma) = \max_{z \in \Gamma} | \, |f'(z)| - C \, |, \tag{3}$$

которая при фиксированной постоянной C вполне определяется кривой Γ.

Таким образом, каждой кривой Γ из некоторого множества ставится в соответствие число $I(\Gamma)$, причем близким кривым (с учетом значений функций $y(x)$ и их первых двух производных) соответствуют близкие значе-

ния I. В таких случаях говорят, что на рассматриваемом множестве кривых задан непрерывный функционал. Далее, нужно сузить множество допустимых кривых до компактного множества, т. е. такого, что из любой последовательности принадлежащих ему кривых можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой кривой из того же множества (в смысле близости с учетом значений функций и их первых двух производных). Для этого нужно задать постоянные в следующих неравенствах:

$$K \leqslant y(x) - y_0(x) \leqslant K', \quad |y'(x)| \leqslant \max |y_0'(x)| + M = K_1, \quad |y''(x)| \leqslant \max |y_0''(x)| + N = K_2. \tag{4}$$

Если выбрать кривую Γ: $y(x) = y_0(x) + k$, то при малых k растяжение $|f'(z)|$ на Γ будет большим, а при больших k — малым, поэтому при заданном значении скорости C можно выбрать постоянные K и K' так, чтобы на кривой $y = y_0(x) + K$ растяжение было всюду больше C, а на кривой $y = y_0(x) + K'$ — всюду меньше C. В остальных неравенствах мы считаем M и N достаточно большими.

Ограниченное этими условиями множество кривых Γ компактно, а как доказывается в анализе, на таком множестве непрерывный функционал $I(\Gamma)$ достигает своего наименьшего значения. Пользуясь вариационным принципом для конформных отображений полос, можно доказать, что если бы полученное наименьшее значение было отличным от нуля, то оставаясь в классе допустимых кривых, можно было бы проварьировать Γ так, чтобы величина $I(\Gamma)$ уменьшилась. Отсюда следует, что $I(\Gamma) = 0$, т. е. что построенная кривая — искомая. Из того же вариационного принципа можно заключить, что кривая Γ, которая дает решение задачи, определяется единственным образом. Подробнее об этом методе см. М. А. Лаврентьев [2].

Аналитическое решение задачи можно получить, если воспользоваться выражением для растяжения конформного отображения на полосу области типа полосы, которое приводилось в гл. III. Этот путь приводит к интегральному уравнению, из которого можно найти искомую функцию $y = y(x)$. При дополнительных ограничениях

на форму дна задачу можно решить и для случая сжимаемой жидкости.

Волны в тяжелой жидкости. Если считать дно водоема плоским (т. е. Γ_0 — совпадающей с осью x), то задача об установившемся волновом движении тяжелой несжимаемой жидкости сведется к следующей задаче теории конформных отображений:

Построить периодическую кривую Γ: $y = y(x)$, $y(x) > 0$ (рис. 52), так, чтобы при конформном отображении f области $D = \{0 < y < y(x)\}$ на полосу $\{0 < v < h\}$ всюду на Γ удовлетворялось условие

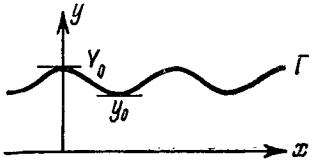


Рис. 52.

$$|f'(z)|^2 + \lambda y = A, \qquad (5)$$

где $\lambda = 2g$ и A — некоторая постоянная (интеграл Бернулли).

Обозначим через Y_0 и y_0 соответственно максимальное и минимальное значения функции $y(x)$. Из вариационного принципа для отображения полос следует, что в точке максимума растяжение $|f'(z)| \leqslant \frac{h}{Y_0}$, а в точке минимума $\geqslant \frac{h}{y_0}$. Подставляя это в (5), мы получим

$$\lambda y_0 + \frac{h^2}{y_0^2} \leqslant A \leqslant \lambda Y_0 + \frac{h^2}{Y_0^2}.$$

Но функция $\varphi(y) = \lambda y + \frac{h^2}{y^2}$ при $y = \left(\frac{2h^2}{\lambda}\right)^{1/3}$ достигает своего единственного минимума, а так как у нас должно быть $y_0 \leqslant Y_0$ и $\varphi(y_0) \leqslant \varphi(Y_0)$, то мы заключаем, что при

$$Y_0 \leqslant \left(\frac{2h^2}{\lambda}\right)^{1/3} \qquad (6)$$

возможны лишь тривиальные движения, для которых $y_0 = Y_0$, т. е. $y(x) = \text{const}$.

Трудность этой задачи состоит в том, что граничное условие (5) нелинейно — оно содержит квадрат модуля искомой функции. Задача существенно упрощается, если рассматривать только волны малой амплитуды, для которых кривая Γ мало отличается от прямой $y = Y_0$ —

при такой гипотезе условие (5) можно приближенно заменить линейным. Для этой цели мы полагаем комплексный потенциал $f(z) = kz + f_*(z)$, где $k = \frac{h}{Y_0}$, а $f_* = \varphi + i\psi$ — аналитическая функция со столь малой производной, что ее квадратом можно пренебречь. Таким образом, у нас

$$u = kx + \varphi, \qquad v = ky + \psi$$

и $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = k + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}$, а на Г, где $v = h$, имеем $y = \frac{h - \psi}{k} = Y_0 - \frac{\psi}{k}$. Подставляя это в (5), получим приближенно

$$k^2 + 2k\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\lambda}{k}(h - \psi) = A,$$

или, после замены $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ и введения новых постоянных $\mu = \frac{\lambda}{2k^2}$ и $a = \frac{1}{2k}\left(A - k^2 - \frac{\lambda h}{k}\right)$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - \mu\psi = a. \tag{7}$$

Наконец, заметим, что в пределах принятой точности граничное условие (7) можно снести с кривой Г на прямую $y = Y_0$. Мы приходим к следующей линейной граничной задаче: найти гармоническую в полосе $\{0 < y < Y_0\}$ функцию $\psi(x, y)$, равную 0 при $y = 0$ и удовлетворяющую условию (7) при $y = Y_0$; волновая поверхность, соответствующая решению ψ этой задачи, находится по формуле

$$y = Y_0 - \frac{1}{k}\psi(x, Y_0). \tag{8}$$

Эта задача решается в элементарных функциях. В самом деле, функция

$$\psi = B\cos\alpha x \operatorname{sh}\alpha y + Cy \tag{9}$$

гармонична при любом выборе значений параметров α, B и C, равна 0 при $y = 0$, и нам остается выбрать эти параметры так, чтобы удовлетворить условию (7). Мы приходим к тождеству

$$\alpha B\cos\alpha x \operatorname{ch}\alpha Y_0 + C - \mu(B\cos\alpha x \operatorname{sh}\alpha Y_0 + CY_0) \equiv a,$$

для выполнения которого необходимы и достаточны соотношения

$$\alpha \operatorname{ch} \alpha Y_0 = \mu \operatorname{sh} \alpha Y_0, \qquad C = \frac{a}{1 - \mu Y_0}. \tag{10}$$

У нас остался неопределенным параметр B, его можно найти из нормировочного условия $\psi(0, Y_0) = 0$, откуда

$$B = -\frac{a}{(1 - \mu Y_0) \operatorname{sh} \alpha Y_0}. \tag{11}$$

Задача свелась к вопросу о разрешимости первого уравнения (10), которое после введения переменной $\xi = \alpha Y_0$ можно переписать в виде

$$\xi \operatorname{ch} \xi = \mu Y_0 \operatorname{sh} \xi. \tag{12}$$

Это уравнение, очевидно, разрешимо при $\mu Y_0 > 1$; при $\mu Y_0 \leqslant 1$ оно не имеет решений. Легко видеть, что последнее неравенство совпадает с (6), так что условия разрешимости общей и линеаризованной задачи о волнах оказываются одинаковыми.

Учет нелинейности. В рамках только что описанной линейной теории нельзя объяснить многие важные экспериментальные факты. Например, линейная теория при любой высоте дает волны в форме синусоид, хотя каждый, кто хоть раз видел море, знает, что у волн значительной высоты гребень более крут, чем впадина. Эта теория не позволяет описать также важное и интересное явление уединенной волны, когда волновой профиль имеет единственный максимум.

Более точную теорию (которая, в частности, включает и эти явления) мы получим, если при той же гипотезе малости амплитуды воспользуемся приближенной формулой для растяжения при конформном отображении узких полос:

$$|f'(z)| \approx \frac{h}{y}\left(1 + \frac{1}{3} yy''\right)$$

(см. § 12).

Подставляя это выражение в граничное условие (5), мы получим для определения формы свободной поверхности обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. В пределах принятой точности в этом

уравнении можно пренебречь членом с $(yy'')^2$ и тогда оно примет вид

$$y'' = -\frac{2}{3y} + \alpha y - \beta y^2, \tag{13}$$

где α и β — положительные постоянные, определяемые физическими параметрами задачи. Заметим, что в качестве таких физических параметров естественно принять так называемую *среднюю глубину водоема*

$$H = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_{-R}^{R} y(x)\,dx \tag{14}$$

и расход h.

Правая часть дифференциального уравнения (13) имеет три корня (два из которых, возможно, комплексные сопряженные). Можно доказать, что у него существуют решения $y(x)$, ограниченные на всей оси, лишь в том случае, когда из этих корней в точности два положительны и различны (тогда третий корень непременно отрицателен). Предположим, что это условие выполняется; пусть η_0 и η_1, $0 < \eta_0 < \eta_1$, будут такие корни, и рассмотрим для уравнения (13) начальную задачу

$$y(0) = Y_0, \qquad y'(0) = 0. \tag{15}$$

Для определенности будем считать, что $y''(0) < 0$, т. е. ограничимся рассмотрением тех волн, которые в точке $(0, Y_0)$ имеют гребень, а не впадину; для этого нужно предположить, что $Y_0 \geqslant \eta_1$.

Меняя Y_0, мы получим однопараметрическое семейство волн различной длины. При $Y_0 = \eta_1$ это прямая, при $Y_0 > \eta$ и мало отличающихся от η_1 — периодическая кривая с крутыми горбами и пологими впадинами. При возрастании Y_0 период кривой возрастает, и при Y_0, стремящемся к некоторому значению Y_1, которое можно выразить через параметры α и β, период возрастает неограниченно — мы получаем кривую с единственным максимумом в точке $x = 0$, т. е. *уединенную волну* (рис. 53).

Пользуясь вариационными методами теории конформных отображений, можно доказать, что в окрестности построенного только что описанным методом

приближенного решения существует единственное точное решение, причем ширина этой окрестности мала по

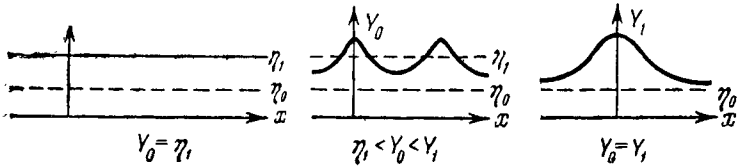


Рис. 53.

сравнению с амплитудой приближенного решения (см. М. А. Лаврентьев [2]).

Волна Стокса. В настоящее время методы теории функций и функционального анализа позволили решить почти все вопросы, связанные с существованием и единственностью волн в тяжелой жидкости. С современным состоянием этой теории можно ознакомиться, например, по сборникам [9] и [10]. Остановимся на одном из оставшихся нерешенными вопросов — доказательстве существования так называемой предельной волны Стокса, которая имеет острия на гребнях.

Даже проведенное выше приближенное исследование, в котором было принято условие малости амплитуды, показало, что при увеличении амплитуды волны ее горб становится круче. Если же отказаться от этого условия, то естественно ожидать, что увеличение амплитуды до некоторого критического значения приведет к появлению на гребнях волны острых углов. Это явление было предсказано еще Стоксом, и оно хорошо подтверждается экспериментами.

Величину угла на гребне волны легко подсчитать, пользуясь граничным условием (5) и свойствами конформных отображений. В самом деле, пусть угол на гребне волны $(0, Y_0)$ равен α (рис. 54), тогда в окрестности точки $x = 0$ уравнение волновой поверхности должно иметь вид

$$y(x) = Y_0 - |x| \operatorname{tg} \alpha + o(x). \tag{16}$$

Учитывая поведение конформного отображения в угловых точках (§ 12), можно заключить, что в окрестности точки $z_0 = Y_0 i$ комплексный потенциал течения

имеет разложение вида

$$f(z) = a(z - z_0)^{\beta} + o(|z - z_0|^{\beta}), \tag{17}$$

где $\beta = \dfrac{1}{1 - \dfrac{2\alpha}{\pi}}$ и $\alpha \neq 0$. Так как $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, то $\beta > 1$, и следовательно, $f'(z_0) = 0$. Подставляя это в (5), мы находим, что $\lambda Y_0 = A$. Теперь подставим в (5) выражения (16) и (17) и получим соотношение

$$\frac{|a|^2 \beta^2}{\cos^2 \alpha} x^{2(\beta-1)} - \lambda |x| \operatorname{tg} \alpha = o(|x|),$$

из которого вытекает, что непременно должно быть $2(\beta - 1) = 1$. Отсюда заключаем, что $\beta = 3/2$, и значит, угол на гребне волны $\alpha = \pi/6$. Читатель, без сомнения, не раз видел волны с такими углами в 120° на гребнях (см. рис. 54).

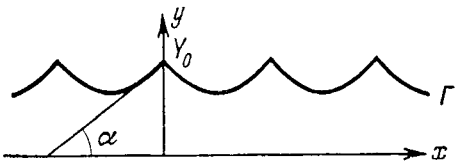


Рис. 54.

Доказательство существования волн конечной (не малой) амплитуды представляет собой не очень простую задачу, потому что она нелинейна и является не локальной, а глобальной задачей. Это доказательство было дано Р. Жербе методами теории операторов в банаховом пространстве (см. его работу в сборнике [9]). Однако Жербе рассматривает лишь гладкие решения, и поэтому волны Стокса в его теорию не включаются. В цитированной работе содержится также условие, обеспечивающее гладкость (аналитичность) волновой поверхности в окрестности точки z_0, — этим условием является необращение в нуль производной комплексного потенциала:

$$f'(z_0) \neq 0 \tag{18}$$

(т. е. z_0 не есть критическая точка течения).

Ю. П. Красовский [11] указал достаточное условие, обеспечивающее выполнение (18) и, следовательно, гладкость волновой поверхности: угол наклона волны к оси x строго меньше критического значения $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$. Вопрос о существовании волн с угловыми точками на поверхности, т. е. с углами наклона, большими или равными $\frac{\pi}{6}$, до сих пор остается открытым. Получены доказательства существования (гладких) волн с наклонами, близкими к критическому, но критическое значение еще не достигнуто и, таким образом, существование волны Стокса не доказано.

§ 21. Модель Кирхгофа и другие модели

Классические модели. Модель Кирхгофа была одной из первых попыток избежать парадоксов бесконечных скоростей и нулевого лобового сопротивления в схеме идеальной жидкости. Рассмотрим задачу об обтекании

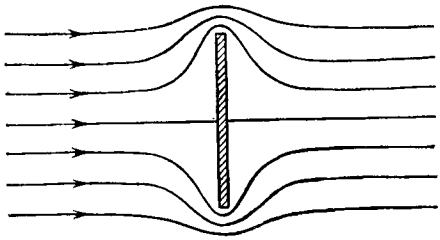


Рис. 55.

пластинки конечной ширины, расположенной перпендикулярно направлению скорости потока в бесконечности (рис. 55). В простейшей схеме комплексный потенциал течения дает конформное отображение внешности отрезка $[-ai, ai]$ на внешность отрезка оси u с нормировкой

$$f(\infty) = \infty$$

Такое отображение выписывается элементарно:

$$f(z) = V_\infty \sqrt{z^2 + a^2}. \qquad (1)$$

В соответствии с общей теорией скорость течения $f'(z) = \frac{V_\infty z}{\sqrt{z^2+a^2}}$ обращается в бесконечность на краях пластинки, а воздействие потока на пластинку равно нулю.

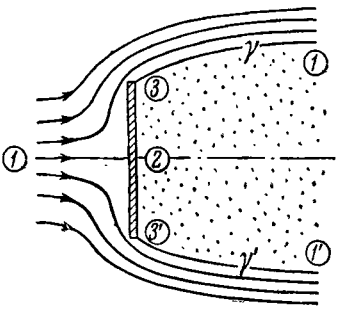


Рис. 56.

Чтобы избавиться от этих противоречащих действительности эффектов, Кирхгоф предложил другую схему течения. Именно, он предположил, что с краев пластинки происходит *срыв струй*, т. е. что течение заполняет не все дополнение к отрезку $[-ai, ai]$, а лишь его часть, ограниченную кривыми γ и γ', выходящими из концов отрезка; между этими кривыми образуется застойная зона (рис. 56). Кривые γ и γ' заранее не задаются, а находятся из того условия, что на них давление — а по интегралу Бернулли, значит, и скорость — сохраняет постоянное значение.

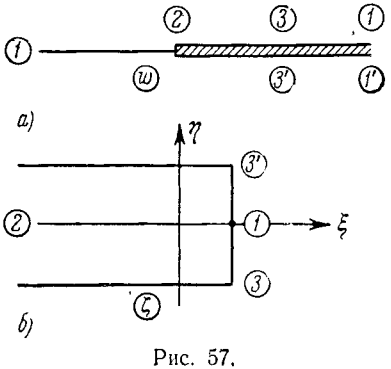


Рис. 57.

Эта задача также просто решается. Пусть $w = f(z)$, $f(0) = 0$, — комплексный потенциал течения; он конформно отображает область течения на плоскость с разрезом по положительной полуоси с соответствием точек, указанным на рис. 56 и 57, *а*. Пусть $b > 0$ — точка, в которую попадают концы отрезка *3* и *3'* — это параметр задачи, характеризующий ширину пластинки.

Введем новую переменную $\zeta = \log f'(z) = \xi + i\eta$, которая связана со скоростью $V = \overline{f'(z)}$ течения; плоскость ζ называют плоскостью *годографа скоростей*. Функции $\xi = \log|f'(z)|$ и $\eta = \arg f'(z) = -\arg V$ являются сопряженными гармоническими как от переменной z, так и от $w = f(z)$, ибо f — конформное отображение,

На границе образа области течения в плоскости w, т. е. на разрезе вдоль полуоси $u > 0$, мы знаем одну из этих функций: из физических соображений очевидно, что на участке $2—3$ имеем $\eta = -\frac{\pi}{2}$, на $2-3'$ $\eta = \frac{\pi}{2}$, а на $3—1$ и $3'—1$ $\xi = \log V_\infty = l$. Мы пришли к так называемой смешанной граничной задаче теории гармонических функций: на части границы заданы значения искомой функции, а на остальной части границы — значения сопряженной с ней функции.

В нашем случае заданные значения постоянны и задача решается в элементарных функциях. Очевидно, что ее решение дает конформное отображение плоскости с разрезом рис. 57, *а* на полуполосу рис. 57, *б* с указанным на этом рисунке соответствием точек. Такое отображение получается в несколько шагов из стандартных отображений и мы получаем

$$f'(w) = \frac{-iV_\infty \sqrt{w}}{\sqrt{b-w}+\sqrt{b}}. \qquad (2)$$

Мы нашли скорость течения, правда, в зависимости от переменной $w = f(z)$, а не от z. Мы могли бы подставить в (2) $f'(w) = \frac{dw}{dz}$ и решить полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными — тогда мы найдем $f(z)$. Однако мы знаем общий характер зависимости $w = f(z)$, а для качественного исследования задачи этого достаточно. Так, из (2) мы видим, что на участке $1—2$ скорость падает от V_∞ до 0, оставаясь положительной. На участках $2—3$ и $2—3'$ она снова растет по модулю, но не до бесконечности, как в первой схеме, а только до величины V_∞. Далее, согласно интегралу Бернулли при росте скорости давление падает, а минимальное давление с левой стороны пластинки, которое достигается на ее концах (и, соответствует скорости V_∞), оказывается равным (постоянному) давлению с правой стороны. Таким образом, давление потока на пластинку слева больше, чем справа, — мы получаем эффект лобового сопротивления. (Пользуясь формулой (2) и формулой Чаплыгина (3) из § 18, можно подсчитать величину лобового сопротивления, но мы не будем этого делать.)

Таким образом, в схеме Кирхгофа удается избежать обоих отмеченных выше парадоксов. Поэтому понятно, что математики пытались решить в этой схеме задачу обтекания со срывом струй для возможно более широкого класса контуров. Прежде всего описанный выше метод был распространен на случай, когда контур состоит из конечного числа отрезков (см. Л. И. Седов [5]). Вариационный метод и метод интегральных уравнений позволили решить эту задачу также для широкого круга гладких дуг (см. М. А. Лаврентьев [2] и Биркгоф и Сарантонелло [4]).

Однако модель Кирхгофа имеет несколько существенных дефектов даже в простейшем случае обтекания плоской пластинки. Например, застойная зона, которая в действительности имеет конечные размеры, в схеме Кирхгофа бесконечна и для ее создания в этой схеме требуется бесконечно большая энергия.

Новые модели. В силу этого за последние 20—30 лет появилось много новых моделей, трактующих ту же задачу. Опишем сначала более старую модель, которая была предложена Рябушинским еще в начале этого столетия. Наряду с основной обтекаемой пластинкой *I* (рис. 58) он вводит еще равную ей по ширине фиктивную пластинку *II* и располагает вторую пластинку за первой на расстоянии H от нее. Линии тока γ и γ' (струи) должны быть определены так, чтобы на них давление, а значит, и скорость, были постоянными. В этой схеме задача решается до конца и в том случае, когда обтекаемый контур представляет собой ломаную с прямолинейными звеньями. Теорему существования и единственности и приближенное решение задачи можно получить вариационным методом, а также методом интегральных уравнений.

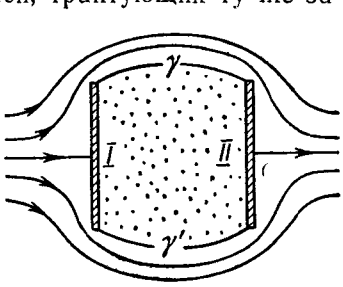


Рис. 58.

В сороковые годы Эфрос предложил новую модель, в которой срывающаяся с пластинки струя γ

возвращается обратно к пластинке и, проходя через нее, уходит в $-\infty$ вдоль оси симметрии (рис. 59). Предполагается, что вдоль этой струи скорость постоянна и, кроме того, что скорости всюду в потоке меняются непрерывно. Эта модель дает хорошо согласующееся с опытом распределение давления на пластинке; наличие обратной струйки также наблюдается экспериментально. Дефектом модели является физически невозможное предположение о том, что обратная струя «отсасывается» пластинкой и после прохождения пластинки течет по уже занятому течением пространству, не смешиваясь со старым течением.

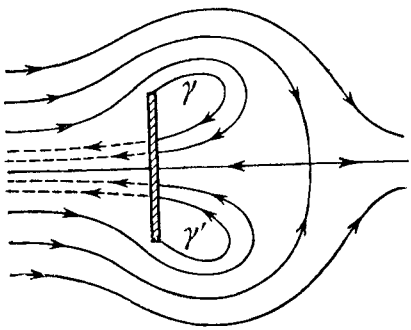


Рис. 59.

Дефект устраняется в следующей схеме (М. А. Лаврентьев, 1958), которая дает примерно такое же распределение давления на пластинке, что и схема Эфроса. В ней делается допущение, что за обтекаемой пластинкой возникают два жидких кольца δ и δ', которые ограничены пластинкой, отрезком оси симметрии, струями γ и γ', сходящими с краев пластинки, и замкнутыми линиями тока γ_0 и γ_0', ограничивающими кольца изнутри (рис. 60). Неизвестные линии γ, γ' и γ_0, γ_0' определяются из следующих условий: 1) на γ_0 и γ_0' скорость имеет заданную постоянную величину, 2) на γ и γ' скорость движения в кольцах совпадает со скоростью основного потока, обтекающего пластинку, дополненную линиями γ и γ'. Расчет по этой схеме делается методами, о которых говорилось выше.

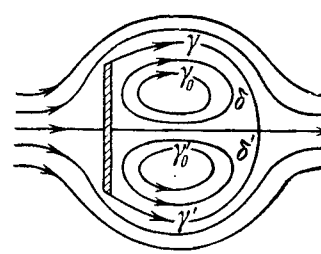


Рис. 60.

§ 22. Склеивание вихревых и потенциальных течений

Здесь будет описано еще несколько новых моделей для решения классических задач, которые основаны на склеивании потенциальных течений с вихревыми.

Обтекание пластинки. В предлагаемой здесь модели движение распадается на три независимых движения: 1) в области D_1, ограниченной верхней половиной пластинки, отрезком оси симметрии (оси x) и струей γ,

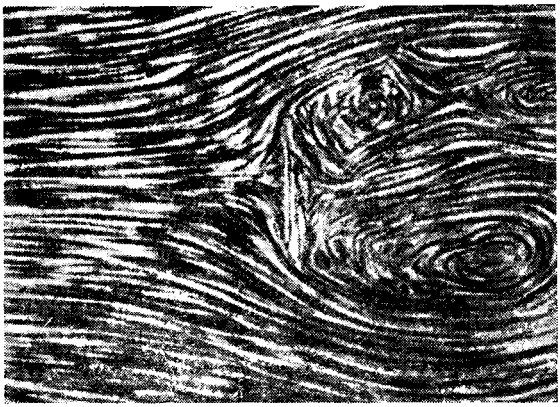


Рис. 61

срывающейся с верхнего края пластинки, 2) в области D_1', симметричной с D_1 относительно оси x, и 3) в области D_0, дополняющей $\overline{D}_1 \cup \overline{D}_1'$ до всей плоскости. Течение в D_0 предполагается потенциальным, а в D_1 и D_1' — вихревым, в D_1 — с постоянной завихренностью $-\omega$, в D_1' — с завихренностью ω. Кривые γ и γ' не задаются, их надо подобрать так, чтобы они были линиями тока и поле скоростей оставалось непрерывным всюду вне пластинки. На рис. 61 приведена фотография обтекания плоской пластинки, из которой видно, что предлагаемая модель хорошо согласуется с опытом.

Обозначим координаты вектора скорости V через u и $-v$, тогда эти функции будут удовлетворять

следующим системам дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\text{в } D_1\text{:} && \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, && \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\omega,\\ &\text{в } D_1'\text{:} && \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, && \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=-\omega,\\ &\text{в } D_0\text{:} && \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, && \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0. \end{aligned} \tag{1}$$

Описанная выше схема приводит к задаче о склеивании по непрерывности решений этих систем, удовлетворяющих условиям обтекания, о которых будет говориться ниже. Ясно, что эта задача симметрична: если нам удастся найти в D_1 и в верхней половине D_0 непрерывную функцию $f=u+iv$, удовлетворяющую системе (1) и такую, что $v=0$ на оси x, то положив $f_1=u_1+iv_1$, где $u_1(x,y)=u(x,-y)$, $v_1(x,y)=-v(x,-y)$, мы получим, что функция, равная f при $y\geqslant 0$ и f_1 при $y<0$, будет непрерывной вне пластинки и удовлетворять системе всюду в $D_1\cup D_1'\cup D_0$.

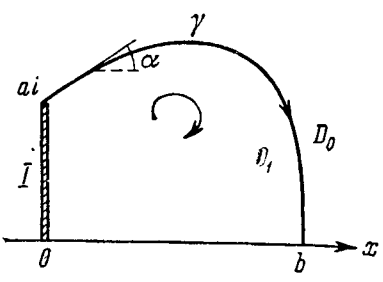


Рис. 62.

Таким образом, задача свелась к следующей: найти линию γ, соединяющую конец вертикального отрезка $I=[0,\ ai]$ с точкой $b>0$ оси x так, чтобы существовала непрерывная в верхней полуплоскости с исключенным отрезком I функция $f=u+iv$, которая в области D_1 удовлетворяет системе

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\omega, \tag{2}$$

а в области D_0 аналитична. При этом должны выполняться еще такие условия обтекания: 1) $v=0$ на всей оси x, 2) $u=0$ на отрезке I, 3) $u\sin\alpha+v\cos\alpha=0$ на кривой γ, где α — угол наклона касательной к этой кривой (рис. 62).

При заданной скорости в бесконечности для выделения решения нужно задать еще одну из величин ω или b (из некоторых допустимых интервалов), другая

из этих величин определяется. Расчеты, выполненные на электронных вычислительных машинах, показали, что в определенном диапазоне скоростей эта модель обтекания пластинки дает весьма хорошее совпадение с опытом.

Однако полное математическое решение и исследование задачи натолкнулось на ряд трудностей и еще не завершено. Мы укажем на эти трудности сначала для более простого варианта задачи, в котором отрезок l отсутствует.

Задача о склейке. Пусть D — верхняя полуплоскость $y > 0$; требуется найти область $D_1 \subset D$, граница которой состоит из заданного отрезка $[-a, a]$ оси x и опирающейся на этот отрезок (неизвестной) дуги γ, так,

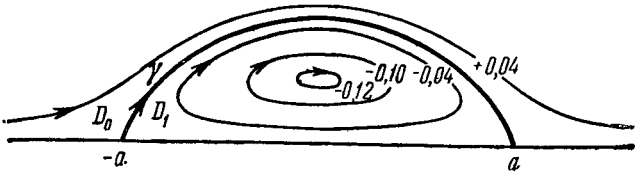


Рис. 63.

чтобы существовало течение с постоянной завихренностью $-\omega$ в D_1 и потенциальное в остальной части $D_0 = D \setminus \bar{D}_1$, причем поле скоростей непрерывно всюду в D, а γ является линией тока (рис. 63). Кроме того, предполагается, что течение имеет заданную скорость в бесконечности V_∞, направленную по оси x; величина завихренности ω определяется в процессе решения. Можно также задавать V_∞ и ω и подбирать величину отрезка $[-a, a]$.

В отличие от задачи обтекания пластинки, эта задача разрешима при любых заданных значениях скорости на бесконечности V_∞ и любой завихренности ω. Из размерностных соображений следует, что при фиксированной V_∞ и для очень малых ω вихревая область D_1 весьма велика; при увеличении ω эта область сжимается и при $\omega \to \infty$ ее диаметр стремится к нулю. В самом деле, из уравнений (1) видно, что если они справедливы для какого-либо течения, то они будут справедливы и для течения, у которого пространственные

координаты увеличены в k_s раз, скорость в k_v раз, а завихренность в $\frac{k_v}{k_s}$ раз.

Задача сводится к интегральному уравнению с неизвестной областью интегрирования. В самом деле, введем, как выше в § 19, функцию тока ψ такую, что $u=\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v=\frac{\partial\psi}{\partial x}$; эта функция должна удовлетворять уравнению

$$\Delta\psi=\begin{cases}0 & \text{в } D_0,\\ \omega & \text{в } D_1.\end{cases} \tag{3}$$

Нам нужно найти решение, которое: 1) имеет непрерывные частные производные всюду в D, 2) имеет $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\partial\psi}{\partial y}=V_\infty$, 3) принимает постоянное значение (пусть равное нулю) на оси x; 4) то же значение принимает на неизвестной дуге γ.

Решение, удовлетворяющее первым трем условиям, легко выписывается:

$$\psi(z)=V_\infty y+\frac{\omega}{2\pi}\iint\limits_{D_1}\log\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right|d\xi\,d\eta \tag{4}$$

($\zeta=\xi+i\eta$ — переменная точка интегрирования), причем D_1 здесь может быть произвольной частью D — доказательство этого можно найти, скажем, в книге Р. Куранта [1], стр. 247. Нам, однако, нужно найти такое решение, для которого D_1 имела бы вид, указанный в постановке задачи, и притом удовлетворялось условие 4), по которому $\psi=0$ на γ. Это условие и дает интегральное уравнение, о котором мы говорили: если $y=y(x)$ — уравнение искомой кривой γ, то оно имеет вид

$$y(x)+\frac{\omega}{4\pi V_\infty}\int\limits_{-a}^{a}d\xi\int\limits_{0}^{y(\xi)}\log\frac{(x-\xi)^2+[y(x)-\eta]^2}{(x-\xi)^2+[y(x)+\eta]^2}\,d\eta=0 \tag{5}$$

при $-a<x<a$. Заметим, что внутренний интеграл по η легко вычисляется в элементарных функциях, и поэтому двойное интегрирование здесь можно заменить простым.

Как мы уже говорили, величина завихренности в этой задаче определяется в процессе ее решения. Это можно сделать, отправляясь от условия, что величина скорости течения в точке $z=-a$ должна быть равной 0. Вычисляя $u=\frac{\partial\psi}{\partial y}$ по формуле (4) дифференцированием под знаком интеграла и полагая $u(-a)=0$, мы после простых преобразований получаем формулу, по которой можно найти ω для данного решения $y(x)$:

$$2\pi V_\infty+\omega\int_{-a}^{a}\log\left\{1+\left(\frac{y(\xi)}{\xi+a}\right)^2\right\}d\xi=0. \qquad (6)$$

Уравнение (5) было решено на электронных вычислительных машинах А. Б. Шабатом [12]; на рис. 63 приведена полученная им картина линий тока для значения $a=0{,}5$ и скорости в бесконечности $V_\infty=1$. Однако доказательство существования и единственности и устойчивости решения получить пока не удалось. Более того, имеются варианты задачи, для которых при машинном счете обнаружено несколько решений (см. ниже пункт о течении в траншее).

Приведем модельный вариант задачи, в котором существование решения очевидно, а единственность доказана. В этом варианте линия склейки γ считается не конечной, опирающейся на заданный отрезок $[-a, a]$, а бесконечной, отрезающей от D область D_1 типа полосы (так что D_1 ограничена осью x и кривой γ); считаются заданными скорость V_∞ потенциального потока, завихренность ω и расход N в вихревой полосе (т. е. разность значений ψ на γ и на оси x).

Из общих соображений естественно искать решение этой задачи в классе функций ψ, зависящих лишь от y, а в этом классе задача становится совсем простой. Пусть γ будет прямая $y=h$; тогда уравнение (3) заменится обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\psi''=\begin{cases}0, & y\geqslant h,\\ \omega, & 0\leqslant y\leqslant h.\end{cases}$$

Будем по-прежнему считать, что $\psi=0$ на γ, тогда из условия на бесконечности находим, что в D_0 (т. е. при $y>h$) функция $\psi=V_\infty(y-h)$. В D_1 (т. е. при

$0 < y < h$) имеем $\psi = \frac{\omega y^2}{2} + by + c$, где постоянные b и c находятся из условий склейки ψ и ψ' при $y = h$ с предыдущим решением. Так мы находим

$$\psi = \begin{cases} V_\infty (y - h) \text{ в } D_0, \\ \frac{\omega y^2}{2} + (V_\infty - \omega h)\, y + \left(\frac{\omega h}{2} - V_\infty\right) h \text{ в } D_1. \end{cases} \tag{7}$$

Остается найти величину h: расход N равен значению ψ при $y = 0$, т. е. $\frac{\omega h^2}{2} - V_\infty h$, откуда определяется единственное положительное значение

$$h = \frac{V_\infty}{\omega}\left\{1 + \sqrt{1 + \frac{2N\omega}{V_\infty^2}}\right\}. \tag{8}$$

А. Б. Шабат [12] доказал, что в этой задаче любое решение ψ должно зависеть лишь от y, и тем самым доказана единственность построенного решения.

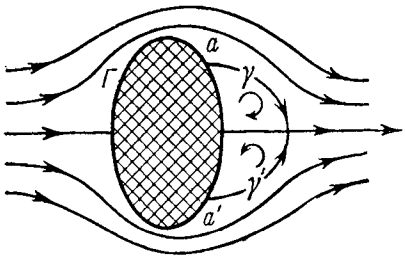


Рис. 64.

Все сказанное здесь распространяется на более общий случай, когда D — произвольная область типа полуплоскости, ограниченная кривой Γ, гладкой всюду, кроме, быть может, точек $z = -a$, $z = a$, в которых допускаются углы. Этот случай приводится к рассмотренному при помощи конформного отображения области на верхнюю полуплоскость. В такую более общую схему укладывается ряд задач, важных для приложений (см. работы М. А. Гольдштика [14], А. Б. Шабата [12], [13], П. И. Плотникова [15]).

Обтекание выпуклых тел. В том же круге идей строится модель для обтекания круга или вообще выпуклой фигуры, симметричной относительно оси x, потоком с той же осью симметрии. И здесь область течения разбивается на три зоны, в двух из которых течение имеет постоянную завихренность $\pm\omega$, а в третьей — потенциально. Линии γ и γ' и величина ω подби-

раются из условий обтекания и непрерывности поля скоростей вне контура Г (рис. 64). При заданной скорости в бесконечности для однозначного определения решений нужно задать еще размеры завихренных зон, задавая, например, точки a и a' срыва струй с обтекаемого контура.

Доказательство существования и единственности решения этой задачи также еще не получено. Однако для

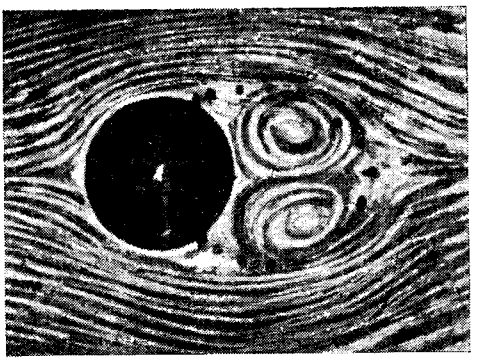


Рис. 65.

ряда тел проведено численное решение на ЭВМ, которое дало хорошее совпадение с экспериментальными данными. Приведем для примера фотографию одного из этапов обтекания круглого цилиндра (рис. 65), на которой для сравнения указаны данные расчета по приведенной здесь схеме в том же режиме обтекания; точки срыва струй с контура цилиндра были заданы на угловом расстоянии в 120 °С от передней критической точки (М. А. Гольдштик).

Обтекание траншеи. Рассмотрим задачу о течении в глубоком водоеме с плоским дном, в котором имеется траншея с квадратным сечением; скорость в бесконечности задана, параллельна дну и перпендикулярна траншее. Имеются два классических решения этой задачи: 1) все течение считается потенциальным и 2) решение по схеме Кирхгофа.

По первой схеме комплексный потенциал определяется конформным отображением f области течения на верхнюю полуплоскость $\psi > 0$ с нормировкой $f(\infty) = \infty$, $f'(\infty) = V_\infty$. Линии тока (прообразы прямых

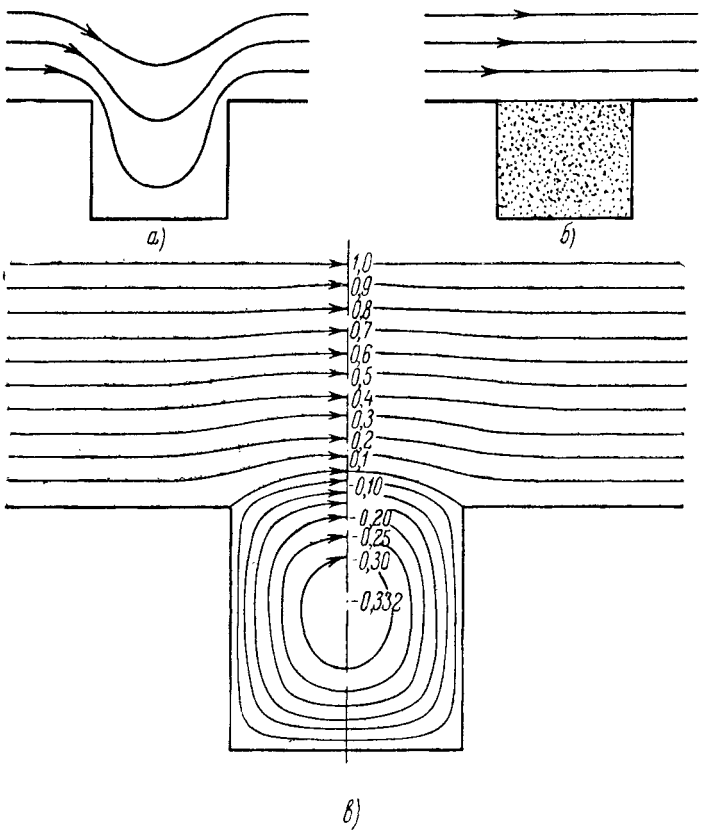


Рис. 66.

$\psi = \text{const}$ при отображении f) заходят в траншею, как показано на рис. 66, *а*. По схеме Кирхгофа течение распадается на два — поступательное движение со скоростью V_∞ в полуплоскости и покой в траншее (рис. 66, *б*). Однако опыты показывают, что в весьма значительных диапазонах чисел Рейнольдса и значений V_∞ ни одна

из этих двух схем не реализуется. В частности, скорость течения на дне траншеи, которая по первой схеме очень мала, а по второй вовсе равна нулю, оказывается сравнимой с V_∞. В этих диапазонах наилучшее совпадение с опытом дает следующая модель. Движение распадается на две зоны: в первой, ограниченной отрезками $(-\infty, -a)$ и (a, ∞) оси x и некоторой линией γ, соединяющей концы отрезков, движение потенциально; во второй, ограниченной γ и тремя сторонами квадрата, движение имеет постоянную завихренность $-\omega$. При заданной V_∞ линию γ и величину завихренности ω нужно подобрать так, чтобы поле скоростей было непрерывным во всей области течения.

Это — частный случай рассмотренной выше задачи о склейке, в котором линия Г представляет собой ломаную, составленную из отрезков $(-\infty, -a)$, (a, ∞) и трех сторон квадрата. При помощи конформного отображения области D, ограниченной ломаной Г и лежащей выше нее, на верхнюю полуплоскость (это отображение можно выписать с помощью интеграла) задача сводится к решению интегрального уравнения (5). Задача была просчитана М. А. Гольдштиком на ЭВМ, и решение (рис. 66, *в*) оказалось очень хорошо совпадающим с результатами эксперимента.

Им же были просчитаны варианты этой задачи, в которой траншея имела вид прямоугольника с основанием $2a$ и высотой b. Интересно, что в случае мелкой траншеи, для которой $\frac{a}{b} = 2{,}5$, на машинах было получено два решения, изображенных на рис. 67, *а* и *б* (на рисунках приведены лишь левые половины течений, правые симметричны). Эти решения отличаются числом критических точек, где скорость обращается в 0: в первом решении их три, а во втором — две. По-видимому, несколько решений, отличающихся числом критических точек, может быть и для глубоких траншей, для которых глубина b примерно в два раза больше ее ширины $2a$. С экспериментом хорошо согласуется решение, в котором течение распадается на три зоны: в первой, расположенной над траншеей, движение потенциально, в двух других, расположенных в траншее друг над другом, движение имеет постоянные завихренности $-\omega$ в

верхней и ω в нижней. На рис. 68 приведены кадры, снятые А. А. Бузуковым в Институте гидродинамики Сибирского отделения АН СССР: на них отчетливо видны зоны с течениями различных типов.

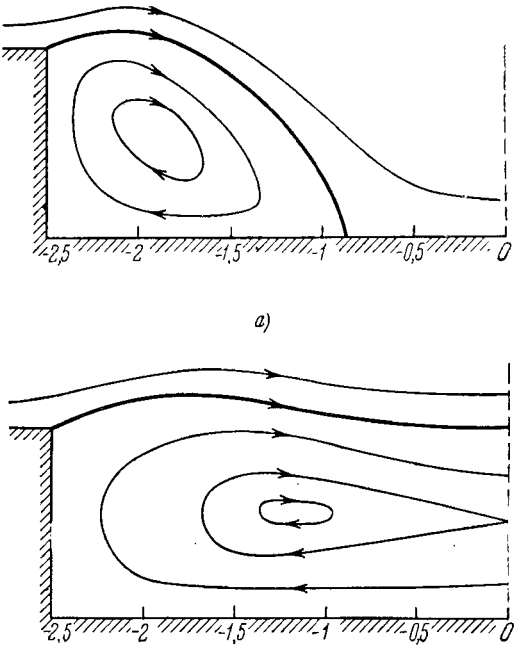


Рис. 67.

Представляется весьма интересным довести до конца математическое исследование задачи о склейке и, в частности, выяснить вопрос о числе ее решений в различных вариантах.

Заключительное замечание. Мы рассказали о некоторых новых схемах решения задач гидродинамики. Хотя они и дают наибольшее приближение к реальности, они все же остаются схемами, и при их применении к практическим задачам нужно вносить некоторые поправки. Главные поправки связаны с тем, что эти схемы, как и большинство схем, в которых решаются конкретные задачи гидродинамики, не учитывают вязкости.

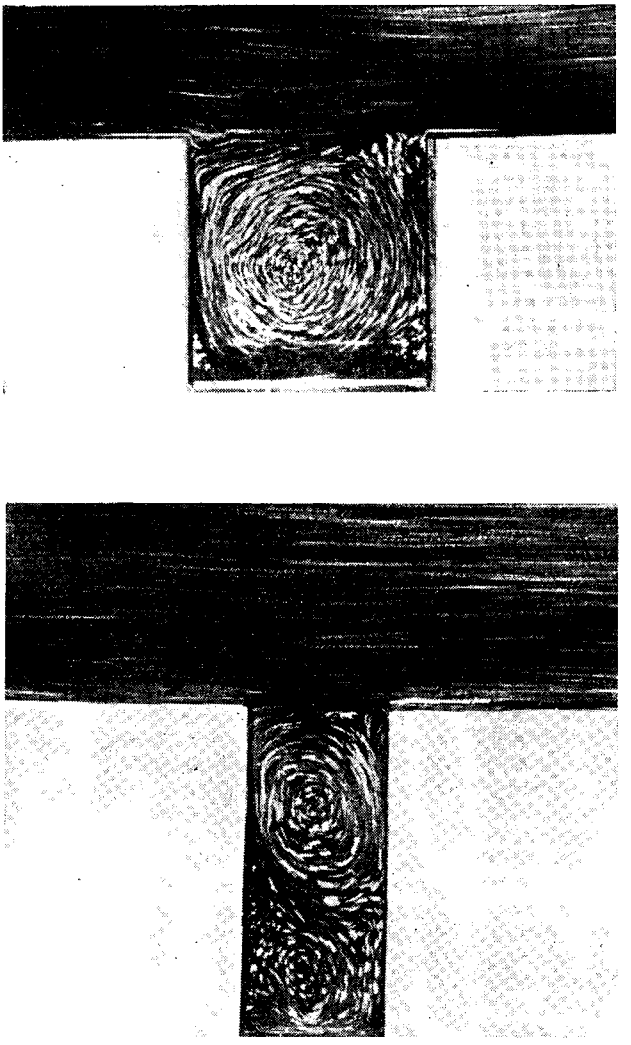


Рис. 68.

Следует заметить, однако, что эти новые схемы существенно лучше приспособлены к учету вязкости, чем классические. Дело в том, что вязкость в реальных задачах того типа, которые мы здесь рассматривали, приводит к образованию сравнительно узких турбулентных зон вблизи мест склейки различных типов течений. Поэтому, получив решение по какой-либо из рассмотренных схем, мы должны лишь учесть в качестве поправки наличие турбулентных зон вблизи линий, которые нам известны. В классических же схемах решения этих задач учет вязкости производить практически очень трудно.

Вообще методы, в которых склеиваются различные режимы в различных зонах, а физические факторы учитываются на сравнительно небольших участках, в последние годы приобретают все большее значение. Следует ожидать, что они получат и дальнейшее развитие.

Закончим эту главу сравнением последней задачи о течении в глубокой траншее с реальной задачей захоронения радиоактивных остатков в глубоких ямах на дне океана. Как мы отмечали выше, расчет по потенциальной схеме дает на дне траншеи столь малые скорости, что энергия течения не может увлечь эти остатки, расчет по схеме Кирхгофа дает на дне покой. По этим классическим схемам, следовательно, захоронение остатков вполне безопасно.

Рассмотрим теперь решение по новой схеме с учетом поправок, о которых мы только что говорили. По этой схеме скорости движения на дне траншеи сравнимы со скоростью основного течения, так что остатки вовлекаются в вихревое движение в нижней зоне. По схеме траектории этого движения — замкнутые кривые, расположенные под нижней линией раздела, и теоретически остатки будут все время двигаться в этой зоне. Но поправка на вязкость дает турбулентный слой вокруг линии раздела, так что захороненные остатки, попав в этой слой, выходят во вторую вихревую зону, в которой скорости движения снова велики. Из этой зоны через второй турбулентный слой они выходят в основное течение. Вывод из этого решения — и он подтверждается практикой — такой способ захоронения радиоактивных остатков неприемлем!

Литература

1. Р. Курант, Уравнения с частными производными, «Мир», М., 1964.
2. М. А. Лаврентьев, Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, Изд. АН СССР, М., 1962.
3. Г. Биркгоф, Гидродинамика, ИЛ, М., 1963.
4. Г. Биркгоф, Э. Сарантоннелло, Струи, следы и каверны, «Мир», М., 1964.
5. Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Гостехиздат, М., 1950.
6. М. И. Гуревич, Теория струй идеальной жидкости, Физматгиз, М., 1961.
7. Л. Н. Сретенский, Теория волновых движений жидкости, Гостехиздат, М., 1936.
8. М. А. Лаврентьев, До теорії довгих хвиль, Зб. праць Інст. матем. АН УРСР, 8 (1947), 13—69.
9. Теория поверхностных волн, сборник переводов, ИЛ, М., 1959.
10. Нелинейная теория волн, сборник переводов, «Мир», М., 1970.
11. Ю. П. Красовский, К теории установившихся волн конечной амплитуды, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1 : 5 (1961).
12. А. Б. Шабат, Об одной схеме движения идеальной жидкости при наличии траншеи на дне, Журн. прикл. мех. и техн. физ., 4 (1962), 68—80.
13. А. Б. Шабат, О двух задачах на склеивание, Докл. АН СССР, т. 150, № 6 (1963), 1242—1245.
14. М. А. Гольдштик, Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости, Докл. АН СССР, т. 147, № 7 (1962), 1310—1313.
15. П. И. Плотников, О разрешимости одного класса задач на склеивание потенциального и вихревого течений, В сб. «Динамика сплошной среды», вып. III, Новосибирск, 1969.

Глава VI

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Одним из наименее развитых разделов гидро- и аэродинамики является теория течений, обтекающих трехмерные тела. Особенно мало сделано в задачах с частично или полностью неизвестной границей области течения. Причиной этого является недостаточность математических методов решения таких задач вообще и отсутствие пространственного аналога метода годографа в частности.

В этой главе в основном будут изучаться задачи, в том или ином смысле близкие к плоским, и для их решения привлекаться методы, развитые в предыдущих главах для плоских задач. Мы не касаемся других методов решения пространственных задач; с этими методами можно ознакомиться, например, по обзору в [8]. Начнем с класса пространственных движений, простота изучения которого определяется тем, что для его описания, как и в плоском случае, можно ограничиться двумя функциями двух действительных переменных.

§ 23. Движения с осевой симметрией

Об уравнениях, связывающих потенциал φ и функцию тока ψ для установившихся движений с осевой симметрией идеальной несжимаемой жидкости в отсутствии источников и стоков, мы уже говорили в гл. I. Они имеют вид

$$r\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial r},\qquad r\frac{\partial\varphi}{\partial r}=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\tag{1}$$

где x — координата вдоль оси симметрии, r — расстояние до этой оси. Здесь мы остановимся на том, как на

такие движения переносятся решения гидродинамических задач, уже разобранных в плоских постановках.

Общие замечания. Для любой гармонической функции φ от трех переменных (т. е. функции, удовлетворяющей уравнению Лапласа $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$), которая зависит только от x и $r = \sqrt{y^2+z^2}$, можно найти сопряженную с ней функцию ψ такую, что φ и ψ вместе удовлетворяют системе (1). Это следует из того, что уравнение Лапласа в цилиндрических координатах x, r, θ для функций, не зависящих от угла θ, записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = 0 \qquad (2)$$

и, значит, для каждого решения φ этого уравнения выражение $A\,dx + B\,dr$, где $A = -r\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ и $B = r\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, удовлетворяет условию полного дифференциала $\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{\partial B}{\partial x}$. Заметим, однако, что в отличие от плоского случая функция ψ уже не является гармонической, а удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0. \qquad (3)$$

Единственной гармонической функцией, зависящей только от r, является $\varphi = a\log r + b$, а зависящей только от x — линейная функция $\varphi = ax + b$ (a и b — постоянные). Далее по сложности идут гармонические полиномы любой степени. Подбирая к таким φ сопряженные функции, мы получим аналоги степеней $(x+iy)^n$ комплексного переменного — простейшие векторные функции, удовлетворяющие системе (1). Выпишем пять первых таких «степеней» (не считая тривиальной $Z^0 \equiv 1$):

$$\begin{aligned} Z^1 &= \log r - ix, \quad Z^2 = 2x + ir^2, \quad Z^3 = r^2 - 2x^2 - 2ir^2x, \\ Z^4 &= 4x(3r^2 - 2x^2) - 3ir^2(4x^2 - r^2), \\ Z^5 &= 3r^2 - 24r^2x^2 + 8x^2 + 4ixr^2(4x^2 - 3r^2) \end{aligned} \qquad (4)$$

(индексы вверху указывают степень ψ — максимальную степень полинома). В курсах уравнений с частными

производными доказывается, что любое решение системы (1) представляется (в некоторой окрестности произвольной точки) в виде ряда

$$f(Z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k Z^k, \tag{5}$$

где $Z=x+ir$, Z^k — «степени» (4) и α_k — действительные постоянные.

Кроме этих элементарных решений, соответствующих положительным степеням комплексного переменного z, можно написать еще решения, правильные в бесконечности, которые соответствуют отрицательным степеням. Простейшим таким решением уравнения (2) будет функция $\varphi=\frac{1}{R}$, где $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+r^2}$, а сопряженная к ней функция $\psi=\frac{x}{R}$. Остальные «отрицательные степени» получаются дифференцированием этих по x. Так мы находим

$$Z^{-1}=\frac{1+ix}{R},\quad Z^{-2}=\frac{-x+ir^2}{R^3},\ \ldots$$

$$\ldots,\ Z^{-n}=\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{1}{R}+i\frac{\partial R}{\partial x}\right),\ \ldots \tag{6}$$

Любое решение системы (1), правильное в бесконечности, представляется в окрестности бесконечности рядом по этим «степеням».

Компоненты вектора скорости течения с осевой симметрией по осям x и r выражаются через потенциальную функцию φ по формулам

$$V_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad V_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \tag{7}$$

и из (1) видно, что векторные линии поля скоростей совпадают с линиями $\psi(x, y)=\text{const}$, так что ψ, как и в плоском случае, служит *функцией тока*. Из тех же уравнений (1) видно, что линии $\varphi=\text{const}$ и $\psi=\text{const}$ ортогональны, однако отображение $f=\varphi+i\psi$ не конформно — оно преобразует бесконечно малые квадраты в прямоугольники.

Рассматриваемые отображения составляют, следовательно, класс квазиконформных отображений. Система

(1) представляет собой частный случай системы (15) из § 7 (гл. II), для которой коэффициенты $a = c = r$, а $b = d = 0$ (вместо принятых в гл. II обозначений x и y для независимых переменных здесь приняты x и r, а вместо u, v для функций — обозначения φ и ψ). Коэффициент $A = ac - \left(\frac{b+d}{2}\right)^2$, положительность которого определяет эллиптичность системы, в нашем случае равен r^2, поэтому система (1) является сильно эллиптической лишь в областях, не примыкающих к оси вращения $r = 0$; на этой оси система вырождается.

Из формул (18) того же § 7 видно, что дифференциалы решений системы (1) преобразуют окружности $(x - x_0)^2 + (r - r_0)^2 = \text{const}$ плоскости $x + ir$ в эллипсы $r_0(\varphi - \varphi_0)^2 + \frac{1}{r_0}(\psi - \psi_0)^2 = \text{const}$ плоскости $\varphi + i\psi$, где $\varphi_0 = \varphi(x_0, r_0)$, $\psi_0 = \psi(x_0, r_0)$. При приближении точки $x_0 + ir_0$ к оси вращения отношение полуосей этих эллипсов неограниченно возрастает. Такое нарушение квазиконформности является геометрическим признаком вырождения типа системы (1) на оси вращения. В областях, замыкание которых не пересекается с осью вращения, отображения $f = \varphi + i\psi$, удовлетворяющие системе (1) или, как мы еще будем говорить, *квазиконформные отображения* по системе (1) — обладают основными свойствами конформных отображений. Поэтому решения задач с осевой симметрией, как правило, несущественно отличаются от решений соответствующих плоских задач.

Метод источников. Решения (6) имеют простой физический смысл. Вычисляя по формулам (7) вектор скорости течения, мы найдем, что для комплексного потенциала $f = Z^{-1}$ этот вектор равен

$$V_x + iV_r = -\frac{x + ir}{R^3}. \tag{8}$$

Все векторы поля направлены к началу координат, а величина вектора убывает обратно пропорционально квадрату расстояния R до начала, следовательно, это — поле *точечного источника*, расположенного в начале (точнее — стока).

Размещая два источника интенсивностей $\pm q$ в точках $\pm a$ оси x, получим осесимметричное движение с комплексным потенциалом

$$f_a(Z) = q\left\{\frac{1+i(x+a)}{\sqrt{(x+a)^2+r^2}} - \frac{1+i(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2+r^2}}\right\}. \qquad (9)$$

Предельное образование, которое получается в результате слияния таких источников с возрастающей интенсивностью ($a \to 0$, $q \to \infty$, так что $2aq \to \mu$), называется *точечным диполем* с моментом, направленным вдоль оси x. Как видно из (9), комплексный потенциал поля такого диполя

$$f(Z) = \mu \frac{-x+ir^2}{R^3} = \mu Z^{-2}. \qquad (10)$$

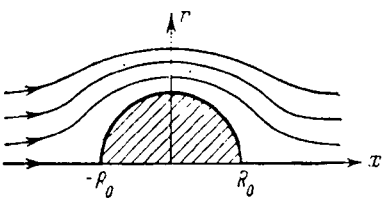


Рис. 69.

Точно так же другие «отрицательные степени» Z^{-k} трактуются как комплексные потенциалы полей мультиполей, которые получаются слиянием диполей (квадруполей), слиянием квадруполей и т. д.

Комбинируя элементарные решения системы (1), можно получать примеры движений с осевой симметрией. Рассмотрим, например, течение с комплексным потенциалом

$$f(Z) = \alpha Z^2 - \mu Z^{-2}, \qquad (11)$$

где Z^2 и Z^{-2} определяются по формулам (4) и (6), а α и μ — положительные постоянные. Функция тока этого течения

$$\psi = \alpha r^2 - \mu \frac{r^2}{R^3}$$

обращается в нуль на оси $r = 0$ и на окружности $R = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\alpha}} = R_0$. Следовательно, это течение обтекает шар радиуса R_0 с центром в начале так, что ось x является линией тока и осью симметрии течения. На рис. 69 изображены линии тока $\psi = \text{const}$ этого течения в любой меридианной плоскости. Скорость течения в бесконечности V_∞, очевидно, равна 2α.

Если в этом примере заменить точечный диполь системой источников интенсивностей $\pm q$, расположенных в точках $\pm a$ оси x, то получим течение с комплексным потенциалом

$$f(Z) = \frac{V_\infty}{2} Z^2 - f_a(Z),$$

где f_a определяется формулой (9). Линия тока $\psi = 0$ распадается на ось x и кривую овальной формы, окружающую точки $Z = \pm a$. Течение обтекает поверхность, вытянутую вдоль своей оси вращения x, со скоростью V_∞ в бесконечности, направленной вдоль этой оси. На рис. 70 изображены линии тока в любом меридианном сечении.

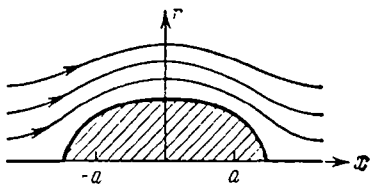


Рис. 70.

Пример можно обобщить, если считать, что источники размещены на произвольном множестве E оси x (ограниченном хотя бы слева) с переменной плотностью распределения интенсивностей. Комплексный потенциал такого течения задается формулой

$$f(Z) = \frac{V_\infty}{2} Z^2 - \int_E q(\xi) \frac{1 + i(x - \xi)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + r^2}} d\xi, \qquad (12)$$

а функция тока

$$\psi(x, r) = \frac{V_\infty}{2} r^2 - \int_E \frac{(x - \xi) q(\xi)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + r^2}} d\xi. \qquad (13)$$

Чтобы на участках оси x вне обтекаемого тела было $\psi(x, 0) = 0$, очевидно, необходимо и достаточно потребовать равенство нулю суммарной обильности источников:

$$\int_E q(\xi)\, d\xi = 0. \qquad (14)$$

При соблюдении этого условия уравнение $\psi(x, r) = 0$, где ψ определена формулой (13), распадается на $r = 0$ и уравнение профиля обтекаемого тела вращения. Очевидно, что это тело содержит множество E.

Можно обратить задачу — задаться формой профиля тела вращения и искать распределение источников на оси вращения так, чтобы создаваемое этими источниками течение обтекало заданное тело. Для решения такой задачи можно также воспользоваться формулой (13). На этот раз в ней нужно считать известной функцию $r = r(x)$ (уравнение профиля обтекаемого тела), и тогда $\psi(x, r) = 0$ вместе с условием (14) будет интегральным уравнением относительно неизвестной плотности распределения источников $q(\xi)$.

Задачи обтекания. Одна из часто встречающихся на практике задач с осевой симметрией — это задача о течении в трубе, меридианное сечение которой представляет собой полосу D, ограниченную осью x и кривой Γ с асимптотой, параллельной этой оси. На оси x, так же как и на Γ, функция ψ должна принимать постоянные значения, так что задача сводится к квазиконформному по системе (1) отображению f полосы D на прямолинейную полосу $\{0 < \psi < h\}$ с соответствием точек $f(\pm\infty) = \pm\infty$.

Для выяснения смысла величины h вычислим поток вектора скорости через любое поперечное сечение S трубы (все такие потоки одинаковы), например, через сечение $x = x_0$. Если учесть, что здесь нормальная составляющая скорости $V_n = V_x = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial r}$, а элемент площади сечения $dS = r\,dr\,d\theta$, то поток

$$N = \iint\limits_S V_n\,dS = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{r_0} \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\,r\,dr = 2\pi\{\psi(x_0, r_0) - \psi(0, r_0)\}.$$

Мы видим, что ширина h полосы в плоскости комплексного потенциала выражается через расход N по формуле

$$h = \frac{N}{2\pi}. \tag{15}$$

Точно так же задача о течении с осевой симметрией вне тела вращения (конечно, ось тела должна совпадать

с осью симметрии течения) сводится к квазиконформному по системе (1) отображению на полуплоскость $\{\psi > 0\}$ области, которая получается из полуплоскости $\{r > 0\}$ выбрасыванием меридианного сечения тела. При этом бесконечные точки должны соответствовать друг другу и нужно задать величину скорости в бесконечности.

Хотя система (1) имеет особенность на оси вращения $r = 0$, на нее, тем не менее, можно распространить теорему Римана о существовании и единственности отображений. В основу доказательства можно положить вариационные принципы, которые, как отмечалось в гл. III, справедливы и для квазиконформных отображений. (Заметим, что в рассматриваемых нами задачах варьировать границу надо лишь для значений $r \in [r_0, r_1]$, где $r_0 > 0$, $r_1 < \infty$, а для таких r система (1) сильно эллиптична.)

Аналогично, даже с некоторыми упрощениями, связанными с тем, что вырождение системы (1) можно не учитывать, доказывается существование и единственность течения в пространственной области, заключенной между двумя соосными поверхностями вращения, меридианное сечение которой представляет собой полосу, ограниченную кривыми Γ_0 и Γ_1.

Узкие трубы. Для прикидочных подсчетов и приближенного решения ряда гидродинамических задач весьма полезны приближенные выражения скорости течения в узких трубах и в узких слоях между соосными поверхностями вращения. Эти выражения получаются примерно так же, как в плоском случае. Мы остановимся на случае течений в трубах.

Зададимся малой величиной h и будем рассматривать трубы, в уравнении границы меридианного сечения Γ: $r = r(x)$ которых r и r'' являются величинами порядка h, а r' — малой высшего порядка. Можно доказать, что как и в случае конформных отображений, влияние вариации границы области на квазиконформное по системе (1) отображение сильно убывает по мере удаления от места вариации[1]). Отсюда следует, что

---

[1]) При этом предполагается, что вариация происходит в окрестности точки $Z_0 = x_0 + ir_0$, где $r_0 \neq 0$.

формула, которую мы хотим получить, имеет локальный характер и, значит, при ее выводе можно ограничиться несколькими членами тейлоровского разложения границы области и несколькими членами разложения (5) предыдущего параграфа для отображающей функции.

Без ограничения общности можно считать, что точка, в которой мы хотим определять скорость, есть точка $Z_0 = ir_0$. В ее окрестности уравнение Γ имеет вид

$$r \approx r_0 + r'x + \frac{r''}{2}x^2, \tag{16}$$

где производные берутся в точке $x_0 = 0$. Так как при $r = 0$ у нас должно быть $\psi = 0$, то в разложении (5) для отображающей функции должно быть $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$; в нашем приближении мы ограничимся тремя ненулевыми членами этого разложения:

$$f(Z) \approx \alpha_2 Z^2 + \alpha_3 Z^3 + \alpha_4 Z^4. \tag{17}$$

Отделяя здесь мнимые части, мы найдем с учетом выражений (4) для Z^k приближенную формулу для функции тока:

$$\psi(Z) \approx r^2\{\alpha_2 - 2\alpha_3 x - 3\alpha_4(4x^2 - r^2)\}.$$

На кривой Γ эта функция должна принимать постоянное значение h, поэтому мы подставляем сюда выражение (16) и приравниваем результаты h. Так мы находим коэффициенты:

$$\alpha_2 = \frac{h}{r^2}, \qquad \alpha_3 = \frac{r'}{r^3}h, \qquad \alpha_4 = \frac{r''h}{12r^3}.$$

Подставляя это в (17) и отделяя действительные части, получаем приближенное выражение для φ, из которого по формуле

$$V = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2_{x=0} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2_{x=0}}$$

находим искомое выражение для скорости:

$$V \approx \frac{2h}{r^2}\left(1 + \frac{1}{2}rr''\right). \tag{18}$$

Заметим, что главный член формулы отвечает случаю поступательного движения в круглом цилиндре со

скоростью $V=\frac{2h}{r^2}$; расход здесь равен $\frac{2h}{r^2}\pi r^2=2\pi h$ в соответствии с формулой (15).

Аналогичным способом получается формула и для скорости движения в узких слоях между двумя соосными поверхностями вращения.

Формула (18) позволяет решить в случае осевой симметрии и некоторые задачи со свободной границей. Вот одна из таких задач, связанная с капиллярными волнами. Как известно (см., например, Ламб [1]), сила поверхностного натяжения, действующая на свободную поверхность, пропорциональна средней кривизне этой поверхности. В случае узкой трубки, удовлетворяющей условиям, в которых была выведена формула (18), максимальная и минимальная кривизны плоских сечений соответственно равны $\frac{1}{r}$ и r, так что средняя кривизна близка к $\frac{1}{2r}$. Пользуясь интегралом Бернулли, мы получаем следующее дифференциальное уравнение для меридианного сечения поверхности трубки:

$$\frac{1}{r^2}(1+rr'')=\frac{k}{r}+c \tag{19}$$

(k и c — постоянные). Оно лишь членами высшего порядка отличается от уравнения (13) § 20 (гл. V) для плоских волн в тяжелой жидкости, так что мы получаем возможность провести в случае капиллярных волн такое же исследование, как в гл. V для плоских волн.

§ 24. Пространственные движения

Трудности пространственного случая. Основным математическим аппаратом решения плоских задач и задач с осевой симметрией является теория конформных и квазиконформных отображений. К великому сожалению, в пространстве конформные отображения составляют очень узкий класс (согласно классической теореме Лиувилля они сводятся к сдвигу, растяжению с поворотом и инверсиям относительно сфер), а квазиконформные — хотя их запас и достаточно велик — еще сравнительно мало изучены.

Мы ограничимся установившимися движениями идеальной несжимаемой жидкости. Если, как и раньше, предположить еще, что движение — безвихревое и без источников в области течения, то по-прежнему будет существовать потенциал скоростей φ — гармоническая функция трех переменных:

$$\boldsymbol{V} = \operatorname{grad}\varphi, \quad \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \qquad (1)$$

Гармонические функции в пространстве хорошо изучены и обладают многими свойствами, аналогичными свойствам гармонических функций двух переменных. Однако в пространстве нет понятия сопряженности гармонических функций, которое связывало бы потенциал с функцией тока, как на плоскости. Хотелось бы наряду с потенциалом скоростей $\varphi(x, y, z)$ иметь еще две функции $\psi_1(x, y, z)$ и $\psi_2(x, y, z)$ — гармонические или удовлетворяющие другим простым уравнениям, такие, что поверхности уровня $\psi_1 = c_1$, $\psi_2 = c_2$ пересекаются по линиям тока течения, причем три семейства поверхностей $\varphi = c$, $\psi_1 = c_1$, $\psi_2 = c_2$ взаимно ортогональны. К сожалению, таких функций тока построить в общем случае не удается.

Поэтому задачи обтекания нельзя по аналогии с плоским случаем сводить к отображению области течения на область в «пространстве потенциала» $(\varphi, \psi_1, \psi_2)$. Условие обтекания приходится формулировать лишь в терминах одной функции φ как условие ортогональности вектора $\operatorname{grad}\varphi$ с нормалью $\boldsymbol{n}$ к обтекаемой поверхности:

$$(\operatorname{grad}\varphi, \boldsymbol{n}^0) \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{n}^0$ — единичный вектор нормали, а $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная в направлении нормали. Если область течения содержит бесконечную точку, то требуют еще существования предела $\operatorname{grad}\varphi$ при $x^2 + y^2 + z^2 \to \infty$ — скорости на бесконечности $\boldsymbol{V}_\infty$ — и считают этот вектор заданным.

В теории уравнений с частными производными доказывается, что для областей D с достаточно гладкой границей гармоническая в D функция φ, удовлетворяющая граничному условию (2) и сформулированному выше условию на бесконечности, если D содержит бесконеч-

ную точку, всегда существует и определяется с точностью до действительной постоянной [1]). Для некоторых задач область течения D содержит бесконечность не внутри, а на границе, и тогда задание условий на бесконечности несколько усложняется — об этом мы будем говорить ниже.

Только очень немногие пространственные задачи решаются до конца в элементарных или специальных функциях. Поэтому классические методы почти ничего не дают для решения таких задач и пространственная гидродинамика осталась еще очень мало разработанной. Между тем, именно в этой области можно надеяться на существенные продвижения, если широко пользоваться, с одной стороны, вычислительными машинами и с другой — новыми методами, основанными на локальном изучении явлений в отдельных зонах и склейке полученных при этом решений в соседних зонах.

Элементарные решения. Отметим несколько простых решений уравнения Лапласа (1), которыми можно пользоваться для локального приближения произвольных решений. Это, прежде всего, большой запас гармонических полиномов: любая константа, любая линейная функция $ax + by + cz$, полиномы второй степени, которые представляют собой линейные комбинации с произвольными коэффициентами функций

$$xy,\quad yz,\quad zx,\quad ax^2 + by^2 - (a+b)\,z^2,$$

полиномы третьей степени — такие же комбинации функций

$$xyz,\quad x\,(ax^2 + by^2 - (3a+b)\,z^2)$$

и двух других, получаемых из последней круговой заменой x, y и z, и т. д.

Линейными комбинациями гармонических многочленов можно с любой точностью приблизить в произвольной ограниченной области D со связным дополнением любую функцию φ, гармоническую в окрестности D (*теорема Рунге*).

---

[1]) Задача восстановления гармонической в области функции по заданной на границе нормальной производной называется *задачей Неймана.*

Наряду с гармоническими полиномами, которые (кроме константы) имеют особенность в бесконечности, можно рассматривать запас функций, правильных в бесконечности: это функция

$$\varphi(P)=\frac{q}{R_{AP}}=\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}, \qquad (3)$$

где q — постоянная и R_{AP} — расстояние от произвольной фиксированной точки $A=(a, b, c)$ до точки $P=(x, y, z)$, а также любые ее производные $\dfrac{\partial^{k_1+k_2+k_3}\varphi}{\partial x^{k_1}\,\partial y^{k_2}\,\partial z^{k_3}}$ $(k_1,\ k_2,\ k_3\geqslant 0)$.

Функция (3) имеет простой физический смысл — это потенциал точечного источника, расположенного в точке $A=(a, b, c)$. В силу гармоничности φ поток вектора скорости $\boldsymbol{V}=\operatorname{grad}\varphi$ через любую замкнутую поверхность, содержащую точку A внутри, имеет одно и то же значение (*теорема Остроградского*). Вычисляя этот поток через сферу $S=\{R_{AP}=r_0\}$ с центром в A, находим

$$\int\limits_S \frac{\partial\varphi}{\partial R}\,dS=-\int\limits_S \frac{q}{R^2}\,dS=-\frac{q}{R_0^2}\,4\pi R_0^2=-4\pi q,$$

так что величина q характеризует обильность источника.

Предельное образование, получаемое слиянием источника и стока обильностей $\pm q$, расположенных в точках A и A', когда $A'\to A$ по прямой направления $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, а $qr'_{AA}\to\mu$, называется диполем с осью $\boldsymbol{l}$ и моментом μ; потенциал диполя равен

$$\mu\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{R}\right)=\mu\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}=\mu\frac{\cos\theta}{R^2}, \qquad (4)$$

где $R=R_{AP}$, а θ — угол между векторами $\boldsymbol{R}=AP$ и осью диполя $\boldsymbol{l}$. Аналогично трактуются и старшие производные функции (3).

Рассмотрим теперь примеры сочетания этих элементарных решений.

Метод источников. В предыдущем параграфе мы рассмотрели течение с осевой симметрией, которое получается, если в поступательный поток в направлении оси x внести источники, расположенные на оси x. Если

источники располагаются не на оси поступательного потока, то течение осевой симметрией обладать уже не будет.

Внесем, например, в поступательный поток со скоростью V_∞, направленной вдоль оси x, два источника одинаковой обильности q, расположив их перпендикулярно к этой оси, в точках $\pm a$ оси z; мы получим течение с потенциалом

$$\varphi = V_\infty x + q\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right). \quad (5)$$

Координаты вектора скорости равны соответствующим частным производным функции φ, и мы имеем

$$V_x = V_\infty - qx\left(\frac{1}{R_1^3} + \frac{1}{R_2^3}\right),$$

$$V_y = -qy\left(\frac{1}{R_1^3} + \frac{1}{R_2^3}\right), \quad (6)$$

$$V_z = -q\left(\frac{z-a}{R_1^3} + \frac{z+a}{R_2^3}\right),$$

где $R_{1,2} = \sqrt{x^2+y^2+(z\mp a)^2}$ — расстояния точки (x, y, z) от источников. При $z = 0$ у нас $V_z \equiv 0$, следовательно, рассматриваемый поток обтекает плоскость (x, y). В этой плоскости мы получаем векторное поле

$$V_x = V_\infty - \frac{2qx}{(r^2+a^2)^{3/2}}, \quad V_y = -\frac{2qy}{(r^2+a^2)^{3/2}}, \quad (7)$$

которое (как плоское поле) не является ни потенциальным, ни соленоидальным.

Построим еще семейство поверхностей, образованных линиями тока этого течения, которое зависит от параметра h. Такие поверхности $z = z(x, y)$ должны удовлетворять уравнению с частными производными первого порядка

$$V_x \frac{\partial z}{\partial x} + V_y \frac{\partial z}{\partial y} = V_z \quad (8)$$

с коэффициентами, определяемыми по формулам (6). Мы рассмотрим решение асимптотической задачи Коши для этого уравнения: $z \to h$ при $x \to -\infty$, где h, $0 < h < a$, — некоторая постоянная.

Можно доказать, что такое решение представляет собой поверхность $z = z(x, y)$ с единственным максимумом на оси x вблизи начала координат (величина этого максимума зависит от q) и асимптотически стремящуюся к плоскости $z = h$ при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$, причем $z - h$ имеет порядок $\frac{1}{r^2}$ (рис. 71). Эти утверждения основаны на том, что влияние источников сказывается лишь в окрестности начала координат; при удалении в бесконечность их влияние затухает со скоростью

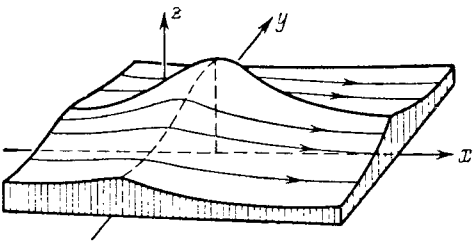


Рис. 71.

$\frac{1}{r^2}$, и превалирующим становится поступательное движение. Мы построили течение, обтекающее пространственный слой $\{0 < z < z(x, y)\}$ со скоростью в бесконечности V_∞, направленной по оси x.

Этот пример можно обобщить, если вместо одной пары источников рассмотреть семейство таких пар, расположенных над кругом $\xi^2 + \eta^2 < r_0^2$ в точках $(\xi, \eta, \pm a(\xi, \eta))$. Если варьировать функцию $a(\xi, \eta)$ и плотность распределения обильности источника $q(\xi, \eta)$, то формула

$$\varphi(x, y, z) = V_\infty x + \iint\limits_{\xi^2+\eta^2<r_0^2} q(\xi, \eta)\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-a)^2}} + \right.$$

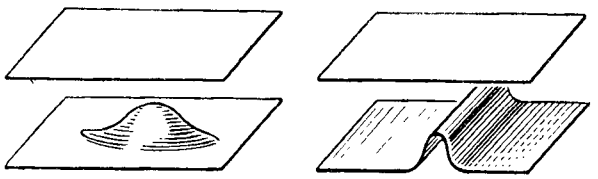
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+a)^2}}\right) d\xi\, d\eta \quad (9)$$

даст потенциал течения, обтекающего пространственный слой $(0 < z < z(x, y))$, где $z = z(x, y)$ — поверхность из достаточно широкого класса.

§ 25. Модельные задачи

Здесь мы рассмотрим несколько вопросов, не связанных непосредственно с определенными гидродинамическими задачами, но относящихся к ситуациям, близким к тем, которые встречаются в пространственных задачах гидродинамики.

Вариационные принципы. В пространственном случае вариационный принцип для течения в слоях в постановке, аналогичной той, которая была дана в плоском случае (см. § 12 гл. III), оказывается неверным. В самом деле, пусть имеется поступательное движение в слое между двумя горизонтальными плоскостями. Очевидно, что если вставить в поток тонкий нож, плоскость лезвия которого направлена по течению, то ничего не произойдет — все линии тока и скорости останутся неизменными. Ясно, что принцип не сохраняется и в том случае, когда деформации границ производятся в классе гладких поверхностей. Например, в том же



а) *б)*

Рис. 72.

слое продавим нижнюю плоскость вверх так, чтобы образовался гладкий узкий холм, сплюснутый в направлении поступательного потока и симметричный относительно плоскости, направленной по течению (рис. 72, *а*). Тогда линии тока в плоскости симметрии, как и в плоской задаче, поднимутся и скорости над вершиной холма возрастут. Но некоторые линии тока просто раздвинутся, обходя холм с боков, и скорости на второй плоскости не обязаны всюду возрастать.

Здесь проявляется принципиальное отличие пространственного случая от плоского, которому в нашем примере соответствует продавливание нижней плоскости

в форме бесконечного хребта — цилиндрической поверхности с образующими, перпендикулярными течению (рис. 72, *б*). При продавливании такого вида все линии тока поднимутся, входя в сузившийся проход над хребтом, а скорость на второй плоскости всюду возрастет.

Математически нарушение вариационного принципа в пространственных задачах связано с тем, что здесь поверхности, образованные линиями тока, вообще говоря, не являются поверхностями уровня гармонических функций. А для поверхностей уровня гармонических функций вариационный принцип остается справедливым в следующей форме. Пусть D — область типа пространственного слоя, которая ограничена поверхностями Γ_0: $z = z_0(x, y)$ и Γ: $z = z(x, y)$, где z_0 и z — гладкие функции, определенные во всей плоскости, и всюду $z_0(x, y) < z(x, y)$. Через $\tilde{D}$ мы обозначим такую же область, ограниченную поверхностями Γ_0: $z = z_0(x, y)$ и $\tilde{\Gamma}$: $z = \tilde{z}(x, y)$, а через u и $\tilde{u}$ — гармонические в D и соответственно в $\tilde{D}$ функции, непрерывные в замыкании этих областей, которые на Γ_0 принимают значение 0, а на Γ и $\tilde{\Gamma}$ равны 1. Через Γ_t и $\tilde{\Gamma}_t$, где $0 < t < 1$, соответственно обозначим поверхности уровня $u(x, y, z) = t$ и $\tilde{u}(x, y, z) = t$.

В этих обозначениях справедлив (см. М. А. Лаврентьев [6]) следующий

Вариационный принцип. Если область $\tilde{D}$ содержится в D, то:

1) все поверхности $\tilde{\Gamma}_t$ лежат ниже Γ_t, $0 < t < 1$,

2) во всех точках Γ_0 производная в направлении внутренней нормали $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \geqslant \frac{\partial u}{\partial n}$,

3) если Γ и $\tilde{\Gamma}$ имеют общие точки, то в них $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \leqslant \frac{\partial u}{\partial n}$.

При этом соприкосновение Γ_t и $\tilde{\Gamma}_t$ при $0 < t < 1$ и достижение знаков равенства возможно лишь при совпадении D и $\tilde{D}$.

Сузим класс рассматриваемых областей D, предположив, во-первых, что через каждую точку их границ можно провести две касательные сферы фиксированного радиуса $\frac{1}{k}$, из которых одна лежит в D, а другая вне D, и во-вторых, что лежащие в D отрезки нормалей

к границам в каждой их точке не меньше N и не больше N', где $N > 0$ и $N' < \infty$ — фиксированные постоянные. Пользуясь вариационным принципом и произведя оценки для элементарных гармонических функций, на области этого класса можно распространить принцип затухания локальных вариаций в следующей форме:

Пусть область $\tilde{D}$ отличается от D лишь в малой окрестности какой-либо граничной точки Q_0 и отклонение $\tilde{D}$ от D также невелико. Тогда в любой внутренней точке P или граничной точке Q области D

$$|\tilde{u}(P) - u(P)|, \quad \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n}\right|_Q \leqslant Ae^{-Bd}\frac{\sigma}{d^3}, \qquad (1)$$

где A и B — постоянные, зависящие лишь от k, N и N', d — расстояние точки от места вариации и σ — объем, заключенный между границами D и $\tilde{D}$.

Узкие слои. Рассмотрим область D, удовлетворяющую сформулированным выше условиям, и кроме того, предположим, что для любой точки $Q_0 \in \Gamma_0$ отрезок $n = Q_0Q$ нормали к Γ_0, лежащий в D, заключен в пределах Nh, $N'h$, где N и N' — фиксированные постоянные, а h — малая величина. Будем еще считать, что производные функций $z_0(x, y)$ и $z(x, y)$ до третьего порядка во всех точках имеют тот же порядок h.

Для таких узких слоев можно дать формулу, обобщающую на пространственный случай формулу для растяжения при конформном отображении узких полос (см. цитированную выше работу М. А. Лаврентьева [6]). Эта формула дает приближенное выражение нормальной производной гармонической в слое функции u, которая на Γ_0 принимает значение 0, а на Γ равна постоянной H.

Согласно принципу затухания задача имеет локальный характер, поэтому при подсчете мы можем заменить Γ_0 и Γ в окрестности рассматриваемой точки Q_0 поверхностями уровня гармонических многочленов. Подсчет упростится, если воспользоваться следующим соображением. Обозначим через θ угол между нормалью Q_0Q к Γ_0 в точке Q_0 и нормалью QQ' к Γ в точке Q; по условию θ имеет порядок h. Но $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{Q_0}$ является четной

функцией от θ, ибо при замене θ на $-\theta$, которая эквивалентна повороту слоя на 180° вокруг нормали Q_0Q, величина этой производной не изменится. Поэтому при разложении $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{Q_0}$ по степеням θ коэффициент при первой степени должен обращаться в нуль, а величинами порядка h^2 мы пренебрегаем, и следовательно, при нашем подсчете мы можем считать $\theta = 0$.

Далее без ограничения общности можно считать, что Q_0 — начало координат и что касательные плоскости в Q_0 и Q горизонтальны. Тогда в пределах принятой точности можно заменить Γ_0 и Γ поверхностями уровня гармонического многочлена

$$\Phi = z + a(z^2 - x^2) + b(z^2 - y^2), \qquad (2)$$

первую — уровня 0, вторую — уровня h. Длина нормали $n = Q_0Q$ определится из уравнения $n + (a+b)n^2 = h$, откуда

$$n = \frac{1}{2(a+b)}\left(\sqrt{1 + 4h(a+b)} - 1\right) \approx h - (a+b)h^2$$

$\left(\text{мы заменили } \sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8}\right)$. Но тогда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{Q_0} \approx \frac{H}{n} \approx \frac{H}{h}\{1 + (a+b)h\} \approx \frac{H}{h}\{1 + (a+b)n\},$$

ибо в пределах принятой точности мы можем в средней части этой формулы принять $h \approx n$.

Остается заметить, что по известным формулам дифференциальной геометрии главные кривизны поверхности Γ_0 в точке Q_0

$$k_1 = 2a, \quad k_2 = 2b$$

(мы приняли за Γ_0 поверхность $\Phi = 0$), и мы получим окончательно

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{Q_0} \approx \frac{H}{n}\left\{1 + \frac{k_1 + k_2}{2}n\right\}. \qquad (3)$$

Гармонические отображения. Мы уже говорили о трудностях, которые возникают в пространственных задачах в связи с отсутствием функций тока. Однако ввести понятие сопряженности трех гармонических функций

в пространстве удается, и эта сопряженность аналогична той, которая на плоскости связывает потенциал и функцию тока. Именно, три функции u, v и w переменных x, y и z называются *сопряженными*, если они являются соответствующими частными производными некоторой гармонической функции φ:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{4}$$

(гармоничность самих функций u, v и w вытекает автоматически из того, что уравнение Лапласа можно дифференцировать частным образом по x, y и z). В плоском случае, когда φ — гармоническая функция от x и y, а $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, мы имеем соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

(первое в силу равенства смешанных производных φ, а второе в силу того, что φ удовлетворяет уравнению Лапласа), которые показывают, что функция $f = u + iv$ является антианалитической, т. е. функции u и $-v$ — сопряженные гармонические в обычном смысле.

Легко видеть, что введенное условие (4) сопряженности в пространстве эквивалентно тому, что векторное поле $f = (u, v, w)$ является одновременно потенциальным и соленоидальным:

$$\operatorname{rot} f = 0, \quad \operatorname{div} f = 0 \tag{5}$$

(мы предполагаем, что область, в которой рассматривается поле, является односвязной, т. е. что в ней любой замкнутый путь непрерывной деформацией можно стянуть в точку). В самом деле, из первого условия (5) следует существование потенциала — функции φ такой, что $f = \operatorname{grad} \varphi$, а второе показывает, что $\Delta\varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$. Мы доказали, что из (5) следует (4), а обратное доказывается также просто.

Отображения f, удовлетворяющие эквивалентным условиям (4) или (5), мы будем называть *гармоническими*. Очевидно, что это — отображение области течения жидкости на область изменения вектора скорости, если жидкость идеальная, течение установившееся и в области течения нет ни вихрей, ни источников.

Заметим, что якобиан отображения f

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} & \varphi_{xz} \\ \varphi_{yx} & \varphi_{yy} & \varphi_{yz} \\ \varphi_{zx} & \varphi_{zy} & \varphi_{zz} \end{vmatrix} \tag{6}$$

(такой определитель называется *гессианом* функции φ) не принимает положительных значений — это следует из того, что гармоническая функция φ не может внутри области иметь ни минимумов, ни максимумов. Поэтому f всегда меняет ориентацию; чтобы получить отображение, сохраняющее ориентацию, мы должны изменить знак одной из координат, либо переменить их порядок.

Кроме того, в отличие от плоского случая, система (5), определяющая отображение f, переопределена: она содержит четыре уравнения относительно трех неизвестных функций, поэтому естественно ожидать, что теорема Римана на гармонические отображения не распространяется, т. е. не всякую односвязную пространственную область можно гармонически отобразить на другую такую же область. Например, по-видимому, не существует гармонического отображения слоя $\{0 < z < 1\}$ на шар $u^2 + v^2 + w^2 < 1$ (доказательства этого утверждения пока нет). Тем не менее области $D = \{z_0(x, y) < z < z(x, y)\}$ типа слоя, границы которых Γ_0 и Γ удовлетворяют соответствующим условиям, можно гармонически отображать на плоский слой. Справедливо, например, такое утверждение:

Если границы Γ_0 и Γ области D типа слоя дважды гладки и при $x^2 + y^2 \to \infty$ достаточно быстро стремятся к горизонтальным асимптотам, скажем, к $z = 0$ и $z = h$, причем первые и вторые производные функций z_0 и z достаточно быстро стремятся к нулю, то гармоническое отображение $f = (u, v, w)$ этой области на слой $\{0 < w < H\}$ существует. Отображение f определяется единственным образом, если дополнительно потребовать, чтобы точка $(0, 0, z_0(0, 0))$ переходила в $(0, 0, 0)$, а оси u соответствовала кривая с асимптотой, параллельной оси x, и задать растяжение в бесконечности вдоль этой кривой.

Приведем идею доказательства, ограничиваясь для простоты письма случаем, когда Γ_0 совпадает с пло-

скостью $z=0$. Третья координата w отображения f должна быть гармонической в D функцией, которая на Γ_0 принимает значение 0, а на Γ равна 1. Ее определение, таким образом, сводится к задаче Дирихле, которая в принятых условиях имеет единственное решение $w(x, y, z)$. По известной w функция φ, градиентом которой является f, восстанавливается интегрированием с точностью до функции ψ от двух переменных:

$$\varphi(x, y, z)=\int_0^z w(x, y, \zeta)\,d\zeta+\psi(x, y). \tag{7}$$

Функцию ψ надо выбрать так, чтобы φ была гармонической. Вычисляя оператор Лапласа от φ и пользуясь гармоничностью w, мы получаем

$$\Delta\varphi=-\int_0^z \frac{\partial^2 w}{\partial\zeta^2}\,d\zeta+\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{z=0}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}.$$

Таким образом, ψ должна удовлетворять уравнению Пуассона

$$\Delta\psi=-\frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{z=0}. \tag{8}$$

Кроме того, как видно из (7), $\operatorname{grad}\psi$ осуществляет гомеоморфное отображение плоскости $x+iy$ на плоскость $u+iv$. Воспользуемся еще тем, что в принятых условиях $\frac{\partial w}{\partial z}$ для больших x^2+y^2 близка к постоянной $\frac{H}{h}$, а значит, ψ_0 (вместе с производными) близка к решению уравнения

$$\Delta\psi_0=-\frac{H}{h}.$$

Любое решение последнего уравнения представляется в виде $\psi_0=P(x, y)-\frac{H}{2h}x^2$, где P — гармоническая во всей плоскости функция. Так как $\operatorname{grad}\psi_0=\operatorname{grad}P-\frac{H}{h}x$ [1]) переводит бесконечность в бесконечность, то

[1]) Здесь, как и раньше, мы представляем плоские векторы комплексными числами.

P — гармонический полином. Если его степень выше 2, то $\operatorname{grad}\psi_0$, а значит, и близкий к нему $\operatorname{grad}\psi$ не может быть взаимно однозначным в окрестности бесконечности. Поэтому $P = a_0 + a_1x + b_1y + a_2xy + b_2(x^2 - y^2)$, и следовательно,

$$\operatorname{grad}\psi = a_1 + \left(2b_2 - \frac{H}{h}\right)x + a_2y + i(b_1 + a_2x - 2b_2y) + \\ + \alpha(x, y) + i\beta(x, y), \quad (9)$$

где α и β стремятся к нулю при $x^2 + y^2 \to \infty$.

Из соответствия точек $x = y = 0$ и $u = v = 0$ мы находим $a_1 = -\alpha(0, 0)$, $b_1 = -\beta(0, 0)$, из параллельности оси x прообраза оси заключаем, что $a_2 = 0$, а тогда заданное растяжение этого прообраза в бесконечности позволяет найти b_2 — отображение f определено единственным образом.

Векторные функции, осуществляющие гармонические отображения, обладают рядом свойств, аналогичных свойствам аналитических функций. Некоторые из них можно найти в книгах А. В. Бицадзе [3] или С. Бергмана [4]. Следует, однако, отметить, что теория таких функций разработана еще очень мало.

Системы из трех уравнений. Рассмотрим произвольное гладкое отображение $f = (u, v, w)$ области $D = \{z_0(x, y) < z < z(x, y)\}$ типа слоя на слой $\{0 < w < H\}$. Если якобиан этого отображения не обращается в нуль (что мы и предположим), то его дифференциал

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz$$

преобразует в единичный куб со сторонами длины 1, параллельными координатным осям, некоторый параллелепипед (рис. 73).

Будем трактовать f как преобразование некоторого течения в области D в поступательное движение в плоском слое $\{0 < w < H\}$ в направлении оси u; пусть u будет потенциал скоростей. Геометрически естественно потребовать, чтобы ребро PP_1 параллелепипеда, соответствующее ребру куба, параллельному оси u, было перпендикулярно плоскости его грани, соответствующей грани куба $u = \text{const}$. Это условие выражается двумя

уравнениями:

$$\frac{u_x}{v_y w_z - v_z w_y} = \frac{u_y}{v_z w_x - v_x w_z} = \frac{u_z}{v_x w_y - v_y w_x}. \qquad (10)$$

Третье уравнение естественно задать как условие, выражающее режим рассматриваемого течения, в виде

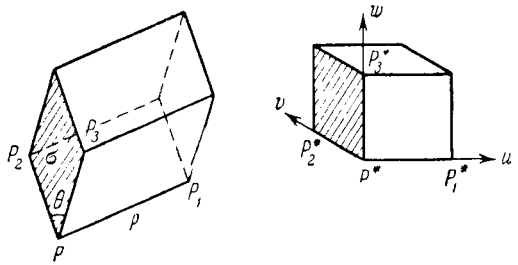


Рис. 73.

зависимости ребра $p = PP_1$ параллелепипеда от площади σ ортогональной к нему грани:

$$p = p(\sigma), \qquad (11)$$

где $p(\sigma)$ — возрастающая функция, $p(0) = 0$. Если учесть, что у нас $p = \frac{1}{|\operatorname{grad} u|}$ (величина, обратная скорости), а $p\sigma$ — объем параллелепипеда, равный обратной величине якобиана $J = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$, то это условие также запишется в виде некоторого нелинейного уравнения с частными производными первого порядка.

Особо следует рассмотреть случай, когда уравнение (11) имеет вид $\sigma = p^2$, т. е.

$$J = |\operatorname{grad} u|^3. \qquad (12)$$

Если к системе трех уравнений (10), (12) добавить еще два условия, выражающих, что грань σ представляет собой квадрат: 1) $\theta = \frac{\pi}{2}$, где θ — угол между PP_2 и PP_3 и 2) $|\operatorname{grad} v| = |\operatorname{grad} w|$, то полученная система из пяти уравнений будет выражать условия конформности отображения f. Полученная система переопределена, и это делает понятной теорему Лиувилля, выражающую тот

факт, что класс конформных отображений в пространстве весьма невелик (мы говорили об этой теореме в начале главы).

Представляет большой интерес изучить системы вида (10)—(11) и, в частности, попытаться распространить на них теорему Римана о существовании отображений и другие свойства конформных и квазиконформных отображений плоских областей.

§ 26. Гидродинамические задачи

Здесь мы рассмотрим несколько пространственных задач гидродинамики, решения которых можно получить методами, изложенными выше.

Течения, близкие к плоским. В § 24 мы рассмотрели течение в слое $\{0 < z < z(x, y)\}$, где Γ: $z = z(x, y)$ — поверхность с единственным максимумом, приближающаяся со скоростью $\frac{1}{r^2}$ $(r^2 = x^2 + y^2)$ к своей асимптоте $z = h$, скорость течения в бесконечности направлена по оси x и, как видно из формул (6) того же параграфа, координаты скорости V_y и V_z на бесконечности убывают соответственно как $\frac{1}{r^2}$ и $\frac{1}{r^3}$, а V_x стремится к V_∞ тоже как $\frac{1}{r^2}$. Для больших r течение, следовательно, близко к поступательному движению.

Здесь мы рассмотрим течения в слоях

$$D = \{z_0(x, y) < z < z(x, y)\}, \tag{1}$$

которые предположим тонкими и мало отличающимися от плоских. Для этого введем следующее:

Условие (А): существует малое число h такое, что для всех x, y

$$1)\quad 0 \leqslant z_0(x, y) \leqslant k_0 h, \quad h \leqslant z(x, y) \leqslant (1 + k_0)\, h;$$
$$z_0(x, y),\ z(x, y) - h < k_0 e^{-r^2},$$

$$2)\quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \leqslant k_1 \frac{h^2}{1 + r^2};\quad \left|\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right| \leqslant k_2 \frac{h}{1 + r^2}, \tag{2}$$

$$3)\quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right|,\ \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \leqslant k_1 \frac{h^3}{1 + r^2};\quad \left|\frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right| \leqslant k_2 \frac{h^2}{1 + r^2},$$

где k_0, k_1 и k_2 — некоторые положительные постоянные. Кроме того, мы будем рассматривать лишь течения, у которых скорость в бесконечности направлена вдоль оси x.

Для областей этого класса $\frac{\partial z_0}{\partial y}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ малы сравнительно с $\frac{\partial z_0}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$, поэтому задача обтекания, которая, как мы видели, сводится к отысканию гармонической в D функции φ по граничному условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial z_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial z_0}{\partial y} \tag{3}$$

на Γ_0: $z = z_0(x, y)$ и аналогичному условию на Γ: $z = z(x, y)$, допускает приближенное решение. Именно, мы пренебрежем в (3) и в таком же условии на Γ членами с $\frac{\partial z_0}{\partial y}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, а $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ положим равной постоянной величине V_∞. Тогда условия обтекания примут вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = V_\infty \frac{\partial z_0}{\partial x} \quad \text{на } \Gamma_0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = V_\infty \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{на } \Gamma. \tag{4}$$

Условия (4) представляют собой задачу Дирихле для гармонической функции $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Решив эту задачу, мы, как и в предыдущем параграфе, найдем φ интегрированием, а появляющийся при интегрировании произвол устраним при помощи асимптотических условий на бесконечности.

Вариационные принципы. Мы уже отмечали, что в случае произвольных пространственных слоев вариационный принцип в обычной гидродинамической постановке несправедлив: продавливание обтекаемой поверхности в форме тонкого холма, сплюснутого по направлению течения, может привести лишь к раздвиганию линий тока без увеличения скорости на противоположной стенке. Если, однако, ограничиться движениями в слоях, удовлетворяющих условию (А) и имеющих фиксированную скорость в бесконечности, параллельную оси x, и предположить еще, что вариации поверхностей не выводят из рассматриваемого класса, то принцип останется справедливым в следующей форме:

Пусть в принятых условиях область $\tilde{D} = \{z_0(x, y) < z < \tilde{z}(x, y)\}$ принадлежит области D; тогда: 1) во

всех точках поверхности Γ_0 скорости течения в $\tilde{D}$ больше скорости течения в D; 2) если $\tilde{\Gamma}$ отличается от Γ лишь в ограниченной области, то во всех общих точках Γ и $\tilde{\Gamma}$ скорость течения в $\tilde{D}$ меньше скорости течения в D.

Для областей рассматриваемого класса справедлив также принцип локализации, по которому при локальной вариации границы слоя величина вариации скорости убывает по закону

$$|\delta V| < Ae^{-Bd}\frac{\sigma}{d^3}, \tag{5}$$

где A и B — постоянные, d — расстояние до места вариации и σ — объем, заключенный между исходной и проварьированной границей.

Доказательство этого утверждения получается при помощи вариационного принципа, сформулированного выше. Для его применения достаточно мажорировать рассматриваемый слой таким, течение в котором описывается элементарными функциями (см. § 24).

Течения в узких слоях. Принцип локализации позволяет строить приближенные решения пространственной задачи обтекания, достаточно точные для практических приложений. Общая схема построения примерно такая же, как в плоском и осесимметрическом случае.

Пусть дана пространственная область $D = \{0 < z < z(x, y)\}$ типа слоя, удовлетворяющая условию (А), и нам нужно изучить течение в окрестности U какой-либо точки (x_0, y_0). Вне этой окрестности мы будем считать все линии тока близкими к параллелям оси x и, учитывая, что слой D — узкий, воспользуемся «гидравлическим» приближением, в котором предполагается, что величина V и направление α скорости постоянны на каждом вертикальном отрезке, заключенном в D. Это упрощение приведет нас к плоской задаче

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{h}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}, \tag{6}$$

где $z = z(x, y)$ — уравнение границы слоя Γ (уравнения (6) представляют собой запись условий потенциальности и неразрывности в наших предположениях). Система (6) решается простым интегрированием — сначала нахо-

дим α из второго уравнения, затем результат подставляем в первое:

$$\alpha(x, y) = h \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{z^2(\xi, y)} \frac{\partial z}{\partial y} d\xi,$$

$$V(x, y) = V_0 \frac{h}{z(x, y)} \left\{ 1 - \right. \tag{7}$$

$$\left. - h \int_{-\infty}^{x} d\xi' \int_{-\infty}^{\xi'} \left\{ \frac{1}{z^2(\xi, y)} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{2}{z^3(\xi, y)} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right\} d\xi, \right.$$

где V_0 — скорость течения в $-\infty$ (мы воспользовались еще тем, что $z(x, y) \to h$ при $x \to -\infty$ и, считая $\frac{Vz}{V_0 h}$ близким к 1, заменили $\log \frac{Vz}{V_0 h} \approx \frac{Vz}{V_0 h} - 1$).

В интересующей нас окрестности U мы будем пользоваться другими идеями. Именно, на основании принципа локализации, мы заменим в этой окрестности заданную поверхность Γ поверхностью $\tilde{\Gamma}$: $z = \tilde{z}(x, y)$, близкой к Γ и такой, что в слое между $z = 0$ и $\tilde{\Gamma}$ течение описывается элементарными функциями. Близость $\tilde{\Gamma}$ к Γ мы обеспечим условием, что эти поверхности имеют в точке $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$ соприкосновение достаточно высокого порядка (условие совпадения достаточного количества коэффициентов тейлоровского разложения функций $z(x, y)$ и $\tilde{z}(x, y)$ в рассматриваемой точке). Запас поверхностей $\tilde{\Gamma}$ с известными течениями нам дает метод источников, который был изложен в § 24, — решение (6) § 24 содержит лишь два параметра (q и a), что дает лишь грубое приближение, но более общая формула (9) § 24 позволяет в принципе получить элементарное решение с любым числом параметров.

Подробнее с описанным методом можно ознакомиться по работе М. А. Лаврентьева [7].

Отметим еще некоторые постановки, связанные с движением жидкости в узких слоях $\{z_0(x, y) < z < z(x, y)\}$. Прежде всего нужно получить приближенные уравнения для поля скоростей с учетом узости слоя, обобщающие и уточняющие уравнения (6). Эти

уравнения должны связывать производные по переменным x и y от величины V и направления α вектора скорости течения на нижней границе слоя и представлять собой линейную неоднородную систему двух уравнений с частными производными первого порядка с коэффициентами и свободными членами, зависящими от уравнений границ слоя.

Далее, желательно получить закон изменения поля скоростей при переходе от нижней границы слоя к верхней, а также изучить влияние локальной деформации границ на расстояниях от места деформации, значительно превышающих ширину слоя.

Задачи со свободной границей. Свободной границей пространственного течения называется поверхность, на которой давление всюду постоянно, а по интегралу Бернулли постоянна и величина скорости. Здесь мы отметим несколько особенностей, отличающих пространственный случай от плоского.

В пространственных задачах свободные границы являются поверхностями, составленными из линий тока. Возникает естественный вопрос о том, какие геометрические свойства отличают линии тока на свободных поверхностях? Ответ на него оказывается простым: на любой свободной поверхности линии тока являются геодезическими. В самом деле, для установившихся течений идеальной несжимаемой жидкости из уравнений движения видно, что ускорение движущихся частиц пропорционально градиенту давления:

$$(\boldsymbol{V}, \nabla)\boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla P. \tag{8}$$

Отсюда следует, что на свободных границах, которые являются поверхностями уровня давления, вектор ускорения направлен по нормали к поверхности. Но вектор ускорения, очевидно, идет по главной нормали к линии тока, поэтому в каждой точке линии тока ее соприкасающаяся плоскость содержит нормаль к свободной поверхности. Это и показывает, что линия тока — геодезическая.

Дальнейшие наши замечания относятся к трудностям, связанным со следующей задачей, которая представляет собой пространственный аналог задачи о волнах:

Дана нижняя граничная поверхность Γ_0 области D типа слоя и требуется найти верхнюю граничную поверхность Γ из условия, что на ней величина скорости течения постоянна. Скорость в бесконечности считается заданной и направленной вдоль оси x; задается также средняя глубина водоема, которую по аналогии с плоским случаем можно определить как

$$H = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^2} \int_{-R}^{R} dx \int_{-R}^{R} z(x, y)\, dy, \tag{9}$$

где $z = z(x, y)$ — уравнение свободной поверхности Γ.

Прежде всего отметим, что в отличие от плоского случая эта задача неопределенна. Действительно, пусть Γ_0 — плоскость $z = 0$, тогда естественным решением задачи будет плоскость Γ: $z = H$ и поступательное движение жидкости в слое между Γ_0 и Γ с потенциалом $\varphi = V_\infty x$. Но это решение неединственно. Об одном типе нарушения единственности мы уже говорили выше в примере с тонким ножом, плоскость лезвия которого идет по направлению поступательного потока: такой нож ничего не меняет в потоке, поэтому наряду с плоскостью решением поставленной задачи будут и кусочно гладкие поверхности, составленные из плоскости $z = H$ и, например, кусков плоскостей, параллельных оси x (очевидно, что такие куски не меняют и средней глубины водоема).

Чтобы исключить такого рода примеры, нужно ограничиться рассмотрением гладких границ Γ_0 и Γ, уравнения которых имеют вид $z = z_0(x, y)$ к $z = z(x, y)$. Но и это дополнительное условие еще не обеспечивает единственности: в нашем примере наряду с плоскостью $z = H$ решением будет служить и любая цилиндрическая поверхность Γ: $z = z(y)$ с образующими, параллельными оси x, для которой $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int\limits_{-R}^{R} z(y)\, dy = H$ (рис. 74). В самом деле, средняя глубина слоя между Γ_0 и Γ также равна H и в нем жидкость может двигаться поступательно вдоль оси x с заданной скоростью V_∞ (и с потенциалом $\varphi = V_\infty x$). Чтобы исключить примеры

такого рода, нужно наложить на границы Γ_0 и Γ дополнительные условия, например, на их асимптотическое поведение при $x \to -\infty$. Простейшим из таких условий является требование, чтобы Γ_0 и Γ при $x \to -\infty$ асимптотически приближались к параллельным плоскостям (т. е. чтобы слой D при больших отрицательных x был почти плоским слоем).

Но трудности, связанные с пространственным случаем, этим не исчерпываются. Асимптотические условия

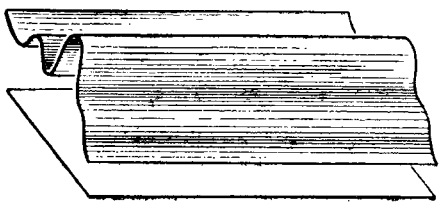


Рис. 74.

при $x \to -\infty$, которые обеспечивают единственность, еще не гарантируют устойчивости решения, а отсутствие устойчивости сильно затрудняет, скажем, приближенный машинный счет. Приведем соответствующий пример.

Рассмотрим слой, ограниченный плоскостью Γ_0: $z=0$ и поверхностью Γ

$$z = 1 + \frac{2}{3}\frac{\alpha e^x}{1+\alpha e^x}\cos y \tag{10}$$

($\alpha > 0$ — постоянная), которая при $x \to -\infty$ асимптотически стремится к плоскости $z = 1$; так как

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^2} \int_{-R}^{R} dx \int_{-R}^{R} \frac{\alpha e^x}{1+\alpha e^x}\cos y\, dy = 0,$$

то средняя глубина водоема, ограниченного Γ_0 и Γ, равна 1. В этом водоеме рассмотрим течение со скоростью в бесконечности $V_\infty = 1$, направленной вдоль оси x. Ясно, что это течение периодично по y с периодом 2π и его достаточно рассмотреть над полосой $-\pi < y < \pi$ (рис. 75).

Пусть потенциал этого течения $\varphi = x + u$; условие обтекания поверхности Γ записывается в виде $\frac{\partial u}{\partial z} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}$, или

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial z}{\partial x}, \tag{11}$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по направлению нормали к Γ, а $\lambda = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$. На других гранях тела

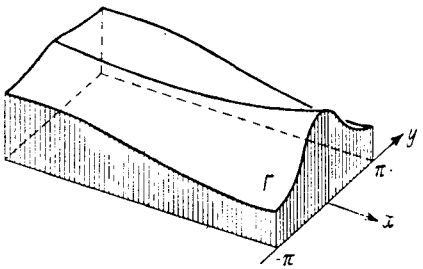


Рис. 75.

Δ, изображенного на рис. 75, граничные условия однородны:

$$\text{на дне: } \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \text{на боках: } \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{12}$$

Мы пришли к задаче Неймана восстановления гармонической в области Δ функции u по заданной на границе ее нормальной производной, причем на трех гранях у нас $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, а на четвертой ($\Gamma$) она принимает значения

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2\alpha}{3\lambda}\frac{e^x \cos y}{(1 + \alpha e^x)^2},$$

всюду малые при достаточно малом α и экспоненциально стремящиеся к нулю при $x \to \pm\infty$. Отсюда можно заключить, что в классе решений с ограниченными градиентами[1]) величина $\operatorname{grad} u$ при достаточно малом α

[1]) Заметим, что без дополнительного условия об ограниченности градиента утверждение о его малости неверно — в этом можно убедиться на примере, аналогичном тому, который был рассмотрен на стр. 94. Такого рода явления связаны с неограниченностью областей,

сколь угодно мала в замыкании области Δ. В частности, на Γ малы все частные производные функции u, и значит, малы компоненты скорости V_y и V_z, а $V_x = 1 + \frac{\partial u}{\partial x}$ сколь угодно близка к 1.

Итак, при достаточно малых α на поверхности Γ величина скорости сколь угодно мало отличается от 1, а между тем отклонение Γ от плоскости $z = 1$ конечно, оно близко к $\frac{2}{3}$ (в точках с большими x и $y = 0$). Это и означает неустойчивость решения задачи. Подчеркнем, что пример отражает особенности пространственного случая: на плоскости аналогичная конструкция не осуществима и задача оказывается устойчивой.

Рассмотренный пример показывает, что при построении решения задачи со свободной границей нужно заранее выделить класс областей, для которого имели бы место и существование, и единственность, и устойчивость. Приведем условия, по-видимому, достаточные для обеспечения всех трех требований. Пусть задано малое число h и поверхность Γ_0 совпадает с плоскостью $z = 0$ вне эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a и b — величины порядков, соответственно h и h^2; внутри эллипса Γ_0 пусть задается уравнением $z = z_0(x, y)$, где

$$\left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| \leqslant k_1 h^2, \quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| \leqslant k_1 h^3,$$
$$\left|\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}\right| \leqslant k_2 h, \quad \left|\frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right| \leqslant k_2 h^2, \tag{13}$$

причем функции $z = z_0(c_1, y)$ и $z = z_0(x, c_2)$ четны и имеют единственный максимум при $y = 0$ и $x = 0$.

В этих условиях существует единственная поверхность Γ: $z = z(x, y)$

$$0 < z(x, y) < h(1 + Ae^{-r}), \quad \lim_{x \to -\infty} z(x, y) = h \tag{14}$$

такая, что при течении между Γ_0 и Γ со скоростью в бесконечности, направленной вдоль оси x, всюду на Γ величина скорости $V = 1$. Решение устойчиво в том смысле, что если на некоторой поверхности $\tilde{\Gamma}$: $z = \tilde{z}(x, y)$, удовлетворяющей условиям (14), скорость течения,

в бесконечности также направленного вдоль оси x, всюду отличается от 1 не больше, чем на ε, то

$$|\tilde{z}(x, y) - z(x, y)| < K\varepsilon, \tag{15}$$

где K — некоторая постоянная, а ε сколь угодно мало.

Сформулированные утверждения, вероятно, можно доказать, используя приведенные выше методы. Представляет интерес подробное их обоснование и выяснение возможности расширения принятых выше условий.

Две задачи. Сформулируем еще две задачи со свободной границей, имеющие существенно пространственный характер. Первая из них относится к нелинейной теории волн в тяжелой жидкости. Общая постановка задачи такова.

Требуется найти поверхность Г: $z = z(x, y)$ так, чтобы при движении жидкости в слое $\{0 < z < z(x, y)\}$ всюду на Г выполнялось соотношение

$$|\operatorname{grad}\varphi|^2 + \lambda z = C, \tag{16}$$

где φ — потенциал течения, а λ и C — постоянные. Считается заданной скорость на бесконечности и средняя глубина водоема.

Из сказанного выше ясно, что в такой общей постановке эта задача также неопределенна, как предыдущая, и ее решение также неустойчиво. Приведем постановку, по-видимому, свободную от этих недостатков.

Рассмотрим две системы установившихся плоских волн, которые распространяются со скоростью V_0 в направлениях, образующих с осью x соответственно углы $\pm\alpha$. Их суперпозиция дает существенно пространственную картину. Вдоль оси x возмущение распространяется со скоростью $V_0\cos\alpha$, поэтому, выбрав систему координат, движущуюся вдоль оси x с этой скоростью, мы получим неподвижную волновую поверхность, которая дает решение задачи в линейной постановке. Если за амплитуду волны принять число $2a$, за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ и за среднюю глубину водоема H, то уравнением этой поверхности будет

$$z = H + a\{\sin\omega(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \\ + \cos\omega(x\cos\alpha - y\sin\alpha)\}. \tag{17}$$

Задача. Доказать, что при малых углах α и малом отношении $\frac{a}{H}$ существует решение нелинейной задачи (16), близкое к решению (17) в линейной постановке. Выяснить класс поверхностей, в котором имеет место единственность и устойчивость решения.

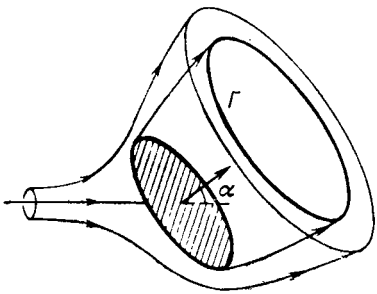


Рис. 76.

Вторая задача представляет собой пространственный вариант классической задачи Кирхгофа об обтекании со срывом струй.

Задача. Построить течение идеальной жидкости со скоростью в $-\infty$, равной 1 и направленной вдоль оси x, область которого ограничена наклонной эллиптической пластинкой $y^2 + \frac{z^2}{1+b} = 1$, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0$ и неизвестной поверхностью Γ, вдоль которой скорость равна 1 (Γ примыкает к границе пластинки, см. рис. 76).

Здесь не вполне ясны вопросы единственности и устойчивости. Представляет интерес даже изучение случая, когда пластинка вертикальна ($\alpha = 0$) и близка к круговой (число b мало).

Литература

1. Г. Ламб, Гидродинамика, Гостехиздат, М., 1947, гл. V.
2. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, Гостехиздат, М., 1948, т. I, гл. 7.
3. А. В. Бицадзе, Основы теории аналитических функций комплексного переменного, «Наука», М., 1969, гл. VIII.
4. С. Бергман, Интегральные операторы в теории линейных уравнений с частными производными, «Мир», М., 1964.
5. М. А. Лаврентьев, Задача Дирихле для узкого слоя, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 38 (1951), 146—151.
6. M. A. Lavrentieff, On the theory of quasi-conformal mappings of three-dimensional domains, Journ. d'Analyse math. Vol. XIX (1967), 217—225.
7. М. А. Лаврентьев, О некоторых краевых задачах для систем эллиптического типа, Сибирск. матем. журн., т. III, № 5 (1962), 715—728.
8. Механика в СССР за 50 лет, т. 2, «Наука», М., 1970.

Глава VII

СТРУИ

В этой главе будут рассмотрены некоторые сравнительно новые задачи, которые связаны со струями конечной ширины. Начнем с описания общих свойств таких струй.

§ 27. Струи конечной ширины

Струи с завихренными зонами. Рассмотрим еще один вариант задачи о склейке из числа тех, о которых говорилось в гл. V. Движение происходит в области D типа полосы, нижней границей которой является ось x, а верхней — линия Γ с горизонтальной асимптотой $y = h$ при

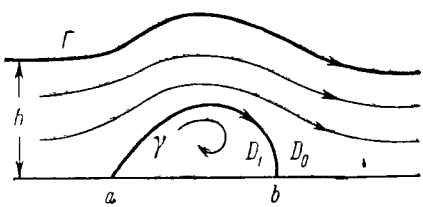


Рис. 77.

$x \to \pm\infty$ (струя шириной h в бесконечности). Предположим, что в области D_1, ограниченной отрезком $[a, b]$ оси x и дугой γ, опирающейся на этот отрезок, течение имеет постоянную завихренность $-\omega$, а в остальной части D_0 области D оно потенциально (рис. 77). Скорость течения в бесконечности V_∞ и величина завихренности ω заданы; линии Γ и γ нужно найти — первую (свободную поверхность) из условия постоянства на ней величины скорости $V = V_\infty$, вторую (линию склейки) — из

условия непрерывности поля скоростей и того условия, что она является линией тока.

В отличие от аналогичной задачи, в которой глубина основного течения бесконечна (см. гл. V § 22), в классе областей D_1, диаметр которых ограничен снизу положительной постоянной и кривизна γ также ограничена, эта задача не всегда разрешима. Именно, если фиксировать V_∞, то найдется значение h_0 такое, что *при* $h < h_0$ *задача оказывается неразрешимой.*

Качественное обоснование этого утверждения таково. В точке $(a, 0)$, где струя встречает завихренную зону D_1, скорость течения должна быть равной нулю, а на свободной границе Γ величина скорости равна V_∞, кроме того, в рассматриваемой схеме производные скорости ограничены. Если взять ширину струи h очень малой сравнительно с диаметром D_1 и величиной, обратной кривизне γ, то на γ найдется точка ζ, расположенная от $(a, 0)$ на расстоянии d малом, но большом в сравнении с h, скажем, $d \approx \sqrt{h}$. Скорость течения в точке ζ при малом h будет сколь угодно близка к V_∞, а, с другой стороны, эта точка близка к точке $(a, 0)$, где скорость равна 0. Это противоречит ограниченности производных скорости, и следовательно, в наших условиях течений с очень малыми h существовать не может.

Физически более естественным является следующий вариант задачи. Рассмотрим (в плоской постановке) обтекание струей шириной h угла, образованного положительными полуосями x и y; скорость в бесконечности пусть равна V_∞ и направлена вниз по оси y (рис. 78). Классическое решение этой задачи проводится в схеме потенциального течения и состоит в отыскании линии Γ (границы струи) из условия постоянства на ней величины скорости $V = V_\infty$. Однако эта схема далека от действительности. Реальная жидкость не любит ни очень больших, ни очень малых скоростей и особенно избегает больших перепадов скоростей. Поэтому на самом деле в значительном диапазоне скоростей V_∞ у вершины обтекаемого угла (где в потенциальной схеме скорость течения обращается в нуль) возникает завихренная зона.

Мы приходим к такой модели движения: область течения делится линией тока γ на две области — D_0 (неограниченную) и D_1 (ограниченную), в первой из них

течение потенциально, а во второй имеет постоянную завихренность ω, причем поле скоростей непрерывно во всей области течения (рис. 78). Как и в предыдущей задаче, скорость в бесконечности V_∞, ширина струи h и величины завихренности считаются заданными, а линии Γ и γ ищутся из соответствующих условий. Здесь также было бы интересно получить количественные оценки для величины $h = h_0$, отделяющей случаи разрешимости и неразрешимости задачи, в зависимости от других параметров.

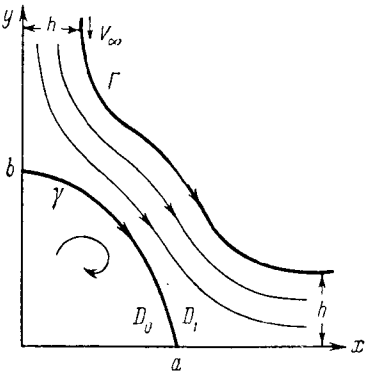


Рис. 78.

Еще ближе к действительности схема неустановившегося движения. Такими движениями мы займемся в следующей главе, а здесь лишь рассмотрим постановку, связанную с задачей обтекания угла. В реальной жидкости под влиянием вязкости размер завихренной зоны с течением времени будет увеличиваться. Кроме того, вследствие трения о нижнюю стенку угла на эту зону будет действовать сила, направленная вправо, а силы сцепления с вертикальной стенкой будут ее удерживать. В результате завихренная зона, увеличиваясь, приобретает склонность вытягиваться в горизонтальном направлении. По достижении некоторого критического размера вихревая зона срывается со стенки и уносится потоком. После этого вблизи вершины угла образуется новая вихревая зона, которая растет до критического размера и вновь срывается и т. д.

Было бы весьма интересно построить математическую модель обтекания угла по этой схеме и, в частности, оценить критический размер вихревой зоны, по достижении которого она срывается.

Первая из рассмотренных здесь задач может служить основой для построения модели образования вихрей в струях, если наряду с течением, изображенным на рис. 77, рассмотреть еще течение, симметричное с ним

осносительно оси x. Подробнее мы рассмотрим этот вопрос в гл. IX.

Косой удар струи о прямую. Эта классическая задача решается методами комплексного анализа. Рассмотрим комплексный потенциал $\zeta = f(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$ течения; он определяется с точностью до постоянного слагаемого, которое мы подберем так, чтобы в точке разветвления потока *2* (рис. 79) (мы примем ее

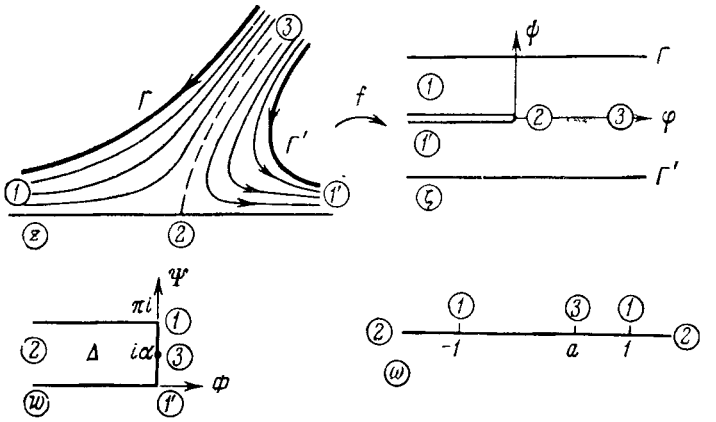


Рис. 79.

за начало $z = 0$) было $f = 0$. На свободных границах струи Γ и Γ' функция тока ψ принимает постоянные значения, пусть это будут q на Γ и $-q'$ на Γ'; значения ψ на прямой, о которую ударяет струя (мы примем ее за ось x), пусть равны 0. Функция f конформно отображает область течения на полосу $\{-q' < \psi < q\}$ с разрезом вдоль отрицательной полуоси φ (рис. 79).

Пусть $z = g(\zeta)$ будет функция, обратная f; рассмотрим аналитическую в нашей полосе с разрезом функцию

$$w = \Phi + i\Psi = \log g'(\zeta) = \log|g'(\zeta)| + i\arg g'(\zeta). \quad (1)$$

Величина скорости $|f'(z)|$ на границах Γ и Γ' полосы принимает постоянные значения, равные V_∞; не ограничивая общности, мы можем считать $V_\infty = 1$. Так как $|g'(\zeta)| = \frac{1}{|f'(z)|}$, то на границах полосы Γ и Γ' имеем

$\Phi = -\log V_\infty = 0$, а на верхнем и нижнем берегах разреза значения $\psi = \arg g'(\zeta)$ соответственно равны 0 и π (вспомните геометрический смысл производной). Отсюда следует, что функция (1) отображает нашу полосу с разрезом на полуполосу $\Delta = \{\Phi < 0,\ 0 < \Psi < \pi\}$ плоскости w, а такое отображение можно выписать элементарно. В самом деле, как нетрудно проверить, функция

$$\zeta = \frac{q}{\pi}\log(\omega - 1) + \frac{q'}{\pi}\log(\omega + 1) - \frac{q+q'}{\pi}\log(\omega - a), \tag{2}$$

где $a = \frac{q-q'}{q+q'}$, отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$ на полосу с разрезом; соответствие точек при этом отображении показано на рис. 79. Остается найти отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\omega > 0$ на полуполосу Δ, а обратное к такому отображению выписывается просто:

$$\omega = \sin\left(-iw - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ch} w.$$

Подставляя это в (2), мы находим отображение, обратное к искомому:

$$\zeta = \frac{q}{\pi}\log(1 + \operatorname{ch} w) + \frac{q'}{\pi}\log(1 - \operatorname{ch} w) - \\ - \frac{q+q'}{\pi}\log(a + \operatorname{ch} w) - q'i. \tag{3}$$

В принципе отсюда находится и само отображение $w = G(\zeta)$, а тогда

$$g'(\zeta) = \frac{dz}{d\zeta} = e^{G(\zeta)}, \qquad z = \int_0^\zeta e^{G(\zeta)}\,d\zeta. \tag{4}$$

Найдем приближенное выражение этой функции вблизи начала струи, т. е. точки 3, которой соответствует значение w_0 такое, что $\operatorname{ch} w_0 = -a$. Так как у нас $-1 < a < 1$, мы можем положить $a = -\cos\alpha$, а тогда из уравнения $\operatorname{ch} w_0 = \cos\alpha$ получим, что $w_0 = i\alpha$. Для получения нужного приближения мы положим в первых двух слагаемых $w = w_0$, а в третьем заменим до

формуле Тейлора $\operatorname{ch} w \approx -a + \operatorname{sh} w_0 (w - w_0)$. Полученное уравнение легко разрешается относительно w, и после вычислений мы получаем, что в окрестности начала струи

$$g'(\zeta) \approx e^{i\left\{\alpha - \frac{1}{\sin\alpha} e^{-\frac{\pi}{q+q'}(\zeta-\zeta_0)}\right\}}, \tag{5}$$

где ζ_0 — некоторая постоянная. Так как в окрестности точки 3 значения ζ близки к положительной бесконечности, то там g' очень близко к $e^{i\alpha}$, и значит, $g(\zeta) \approx \approx e^{i\alpha}\zeta + \text{const}$. Мы видим, что α — это угол наклона струи к оси x и что ее ширина асимптотически равна $q + q'$ (ширине полосы в плоскости ζ). Заметим, однако, что этот вывод можно получить и без вычислений комплексного потенциала: по теореме о количестве движения проекция на ось x количества движения в набегающей струе, т. е. величина $(q' + q)\cos\alpha$, должна равняться разности количеств движений в струях, идущих по оси x, т. е. $q' - q$; отсюда снова получаем

$$\cos\alpha = \frac{q' - q}{q' + q} = -a. \tag{6}$$

Обтекание тел струями. Существенно сложнее задача о набегании струи на произвольный контур γ, которая ставится так. Найти потенциальное и без особенностей движение жидкости по следующим условиям:

1) вблизи точки $x = -\infty$ это движение близко к поступательному движению струи $|y| < \frac{h}{2}$ вдоль оси x со скоростью V_∞, которую мы принимаем равной 1;

2) на свободных поверхностях струи Γ и Γ' (неизвестных заранее) скорость постоянна, т. е. в силу предыдущего условия равна 1;

3) струя обтекает заданный контур γ, ограничивающий некоторую область, конечную или бесконечную.

Укажем путь решения этой задачи. Как и в предыдущем пункте, рассмотрим функцию

$$G(\zeta) = \log g'(\zeta) = \Phi + i\Psi,$$

где g — функция, обратная к комплексному потенциалу $\zeta = f(z)$ искомого течения. Предположим сначала, что γ — гладкая кривая и ограничивает бесконечную об-

ласть типа полуплоскости. Тогда картина в плоскости ζ будет такой же, как в разобранной задаче, т. е. образом области течения служит полоса $\{-q' < \psi < q\}$ с разрезом вдоль отрицательной полуоси φ. На границах этой полосы по-прежнему будет $\Phi = -\log V_\infty = 0$, однако значения $\Psi = \arg g'(\zeta)$ на разрезе теперь являются неизвестными, ибо мы не знаем, в какую точку кривой γ переходит ζ при отображении g.

Для практических целей можно задавать значения ψ на разрезе, и тогда, решая соответствующую смешанную граничную задачу, получать классы движений с различными контурами γ. Можно применять также метод последовательных приближений — задавая одну из свободных границ, скажем Γ, подбирать Γ' из условия, что на ней $V = V_\infty$ (это задача о волнах, о которой говорилось в гл. V), затем подобранную Γ' считать заданной и по тому же условию подбирать новую Γ и т. д.

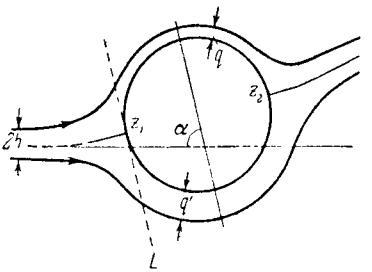


Рис. 80.

Пусть теперь γ — граница области конечного диаметра (мы будем считать ее гладкой, а область — выпуклой), тогда можно действовать так же, как в только что разобранном случае. Однако этот случай имеет существенное отличие от предыдущего: решение не определяется заданием величины V_∞ обтекаемого контура, ширины и положения струи вблизи $x = -\infty$. Мы получаем при таком задании семейство решений, зависящее от одного параметра. Этот параметр можно определить, задавая еще точку встречи струй на контуре (вторую критическую точку течения) или циркуляцию скорости вокруг γ. Иными словами, положение здесь такое же, как в задаче обтекания тела неограниченным потоком, которую мы рассматривали в § 18 гл. V и которая является предельным случаем рассматриваемой здесь задачи при $q = q' = \infty$.

Рассмотрим частный случай этой задачи, когда γ — окружность радиуса 1 (рис. 80), и приведем ее

приближенное решение при малом h, $2h = q + q'$. Тогда точка раздвоения струй z_1 будет близка к левой точке пересечения γ с осью x; как говорилось выше, в качестве точки встречи струй z_2 можно взять любую точку окружности ($z_2 \neq z_1$). Из возможности обратить движение следует, что течение симметрично относительно диаметра γ, перпендикулярного к хорде z_1z_2. В окрестности z_1 с точностью до малых высших порядков можно заменить γ касательной L к ней в точке z_1 (которая параллельна оси симметрии течения) и воспользоваться решением из предыдущего пункта. Из формулы (6) мы находим отношение ширин струй, образовавшихся после раздвоения:

$$\frac{q'}{q} = \frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}, \tag{7}$$

где α — угол оси симметрии с отрицательной полуосью x (рис. 80). В окрестности точки z_2 течение симметрично с найденным. Пользуясь приближенными формулами для конформных отображений узких полос и учитывая, что на свободной поверхности скорость постоянна, можно доказать, что вне окрестностей точек z_1 и z_2 свободные поверхности раздвоенной струи близки к дугам окружностей радиусов $1 + q'$ (нижняя) и $1 + q$ (верхняя).

Конечно, ближе к действительности схемы струйных течений с вихревыми зонами. Рассмотрим несколько вариантов таких схем для простейшего случая обтекания

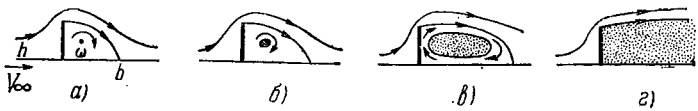


Рис. 81.

струей плоской пластинки (см. рис. 81, где изображена верхняя половина течения, нижняя симметрична ей). Схема рис. 81, *а* аналогична рассмотренной в § 22 гл. V — здесь вихревая зона представляет собой односвязную область, примыкающую к пластинке. При заданных V_∞, h и b величина завихренности ω определяется, равно как и положение критической точки (в верхней половине течения она одна). В схеме рис. 81, *б* около критической точки имеется небольшая зона постоянного давления, а вокруг нее расположена зона по-

стоянной завихренности. В схеме рис. 81, *в* зона постоянного давления велика, а завихренная зона представляет собой узкое кольцо. Схема рис. 81, *г* является предельным случаем предыдущей, когда вихревая зона уже исчезла.

Весьма любопытно было бы получить семейство решений задачи струйного обтекания пластинки, зависящее от некоторого параметра и осуществляющее непрерывный переход от схемы течения с односвязной зоной постоянной завихренности (рис. 81, *а*) к схеме Кирхгофа (рис. 81, *г*). Вероятно, более простыми являются схемы рис. 81, *б* и *в*, в первой из которых можно воспользоваться малостью зоны постоянного давления, а во второй — узостью вихревой зоны.

Интересно также построить математическую модель решения этой задачи в схеме неустановившегося движения. Здесь постановка такова: плоская пластинка мгновенно помещается в перпендикулярную к ней струю, и сразу же под влиянием вязкости у краев пластинки (где скорость потенциального течения бесконечна) начинают возникать небольшие зоны постоянной завихренности. С течением времени эти зоны растут, деформируются и по мере достижения некоторых критических размеров срываются с пластинки в поток. После этого у краев пластинки начинают расти новые вихревые зоны и процесс повторяется.

Задача о затопленной струе. Пусть имеется бесконечно глубокий потенциальный поток идеальной жидкости, движущийся над дном (осью x) со скоростью V_1 в $-\infty$; пусть в этот поток со дна (у точки $x = 0$) втекает струя со скоростью V_2, направленная под углом α к дну, и требуется определить, как эта струя будет двигаться.

На самом деле это — задача на неустановившееся движение. Быть может, для ее решения даже нет устойчивой схемы, и очень интересно было бы выяснить, как именно развивается в ней неустойчивость. Однако в некотором приближении можно попытаться описать явление в схеме установившегося движения.

Приведем несколько возможных схем такого рода, аналогичных схемам обтекания тел со срывом струй. В схеме рис. 82, *а* струя идет в $+\infty$, не примыкая ко дну, и за ней образуется бесконечная зона покоящейся

жидкости. В схеме рис. 82, *б* струя на некотором расстоянии от точки выхода примыкает к дну, а за струей образуется ограниченная зона, в которой жидкость можно считать покоящейся или, в другом варианте, движущейся с постоянным завихрением.

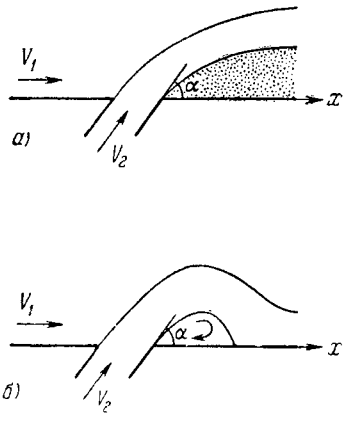


Рис. 82.

Можно ожидать, что эти схемы допускают сравнительно несложное математическое описание.

Два гидродинамических эффекта. Первый эффект известен давно и на нем основано несколько игрушек. Он состоит в следующем: легкий шарик (например, из пробки или мяч от пинг-понга) может устойчиво держаться в тонкой струе воздуха или воды, направленной вверх.

Второй эффект был сравнительно недавно обнаружен М. А. Гольдштиком. Возьмем круглый цилиндр высотой, в несколько раз большей диаметра, и закрепим его так, чтобы он мог легко вращаться вокруг своей оси, которую расположим горизонтально. Пустим на этот цилиндр струю воды, ось которой (при формировании струи) горизонтальна и проходит несколько ниже оси цилиндра. Если толщина струи мала по сравнению с диаметром цилиндра, то цилиндр раскручивается в естественно ожидаемом направлении — так, что нижняя его часть движется в направлении струи. Однако оказывается, что в некотором диапазоне толщин струи и расстояний между осями струи и цилиндра нижняя часть цилиндра движется в противоположном направлении!

Задачи, которые были разобраны выше, позволяют объяснить эти эффекты. Рассмотрим сначала эффект устойчивости шарика в струе, причем мы ограничимся плоской задачей обтекания круга узкой струей. Пусть сначала ось струи проходит через центр круга, так что точка разветвления струй $z_1 = -1$ (мы пользуемся обо-

значениями предыдущего пункта и располагаем оси координат, как там). Как мы говорили, в схеме идеальной жидкости точку встречи струй z_2 можно задавать произвольно, однако физически очевидно, что реализовываться будет лишь симметричный случай, когда точка разветвления струй $z_2 = 1$. Это объясняется вязкостью — в самом деле, при любой малой вязкости на бо́льшей из двух дуг γ с концами z_1 и z_2 будет и бо́льшая потеря скорости струи, а струя с большей скоростью будет сбивать вторую струю, так что точка z_2 будет перемещаться к положению, диаметрально противоположному z_1.

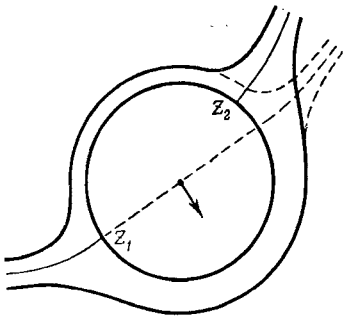


Рис. 83.

Та же тенденция будет наблюдаться и в случае, когда ось струи не проходит через центр круга — в первом приближении можно считать, что точка z_2 диаметрально противоположна z_1. Однако нужно еще учесть, что в более толстой струе потеря скорости вследствие вязкости (на участках равной длины) будет несколько меньшей, чем в тонкой. Вследствие этого точка z_2 немного сместится в сторону тонкой струи и по теореме Жуковского о подъемной силе (см. гл. V § 18) возникнет сила, действующая на круг в сторону от набегающей струи (рис. 83).

Мы получаем, таким образом, объяснение устойчивости шарика в струе — если ось струи проходит через центр шарика, то реализуется симметричное течение, если же под влиянием каких-либо причин шарик несколько сместится, то сейчас же возникнет сила, перемещающая его центр к оси струи.

Эти же причины объясняют и вращение цилиндра в нормальном случае, при обтекании его тонкой струей — если ось струи проходит ниже оси цилиндра, то толстая часть струи будет занимать больше половины обтекаемой окружности и цилиндр будет вращаться в сторону, куда его увлекает толстая струя (на рис. 83 против часовой стрелки). Нам остается объяснить аномальный случай вращения цилиндра.

Пусть ширина струи $2h$ велика по сравнению с радиусом цилиндра, который мы по-прежнему принимаем равным 1. Сначала рассмотрим случай симметричного обтекания, когда ось струи проходит через ось цилиндра (рис. 84), т. е. точка раздвоения струи $z_1 = -1$. Если принять схему идеальной жидкости, то в соответствии с тем, о чем говорилось в начале этого параграфа, за цилиндром возникнут зоны D_1 и D_1' с постоянной завихренностью $\pm\omega$. Каждая из этих зон ограничена дугой обтекаемой окружности, отрезком $[1, b]$ оси x и кривой, соединяющей конец дуги с точкой $(b, 0)$; в остальной части струи $D_0 \cup D_0'$ движение потенциально.

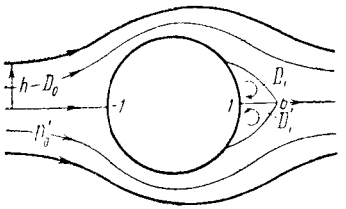


Рис. 84.

Если ширина струи $2h$ достаточно велика, то размер завихренной зоны может быть произвольным — от нуля до некоторой предельной величины. С уменьшением h предельный размер убывает и при небольших h его можно считать величиной порядка h. Наличие вязкости меняет картину — описанного сейчас установившегося движения существовать не будет. Зародившаяся за цилиндром малая вихревая зона будет расти и с достижением некоторого предельного размера она отделится от цилиндра. Учитывая рассмотрения, проведенные выше в связи с образованием вихревых зон в струях, естественно считать, что меньшим значениям h соответствуют и меньшие размеры вихревых зон в момент отрыва [1]).

Теперь мы можем объяснить и парадоксальный случай вращения цилиндра. Пусть ось достаточно широкой струи проходит ниже оси цилиндра (рис. 85). В качестве основного (безвихревого) течения по причинам, о которых говорилось выше, следует принять то, при котором точки z_1 и z_2 раздвоения и встречи струй диа-

[1]) Интересно было бы проверить экспериментально, соответствуют ли размеры отрывающихся зон в случае вязкой жидкости предельным возможным размерам этих зон в схеме идеальной жидкости.

метрально противоположны. Но тогда снизу цилиндра пойдет более широкая струя, чем сверху. Если допустить сколь угодно малую вязкость, то в окрестности точки слияния струй начнут образовываться две вихревые зоны D_1 и D_1', растущие со временем. Обе эти зоны будут по достижении некоторых критических размеров срываться с цилиндра. Но критический размер зоны D_1', соответствующей более широкой струе, будет больше критического размера D_1. Поэтому дуга окружности, вдоль которой направление вихревого потока обратно направлению струи, будет бóльшей для нижней струи (эта дуга выделена жирно на рис. 85). В силу трения это превышение и дает дополнительный момент, вращающий цилиндр в сторону, противоположную направлению широкой струи (на рис. 85 — по часовой стрелке).

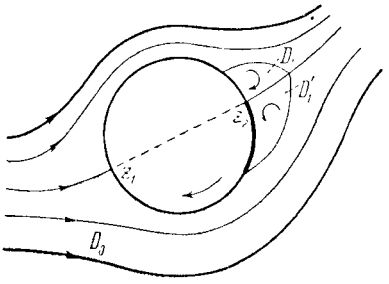


Рис. 85.

Экспериментально установлено, что парадоксальное направление вращения цилиндра исчезает, если жидкость практически невязкая (ее число Рейнольдса очень велико) или, наоборот, слишком вязкая (с очень малыми числами Рейнольдса). Этот эксперимент подтверждает естественность приведенного объяснения.

§ 28. Пространственные задачи о струях

Задача о встречных струях. Решение этой задачи позволит нам в следующем параграфе объяснить некоторые явления, связанные с кумуляцией; уже поэтому она представляет большой интерес. Задача ставится так.

Требуется найти движение с осевой симметрией по следующим условиям: 1) при $x \to -\infty$ асимптотически струя представляет собой цилиндр радиуса r_0, ось которого совпадает с осью x, и движется со скоростью V_0 в направлении оси; 2) при $x \to +\infty$ струя также представляет собой асимптотически цилиндр радиуса $r_1 < r_0$

и движется с той же скоростью V_0 навстречу первой струе; 3) на свободной поверхности струй давление постоянно, или — что то же самое — скорость постоянна и равна V_0 (рис. 86). Плотности обеих струй предполагаются одинаковыми.

Рассмотрим сначала плоский вариант задачи, т. е. будем считать, что сечение на рис. 86 изображает не осевое сечение, а одно из параллельных сечений поля.

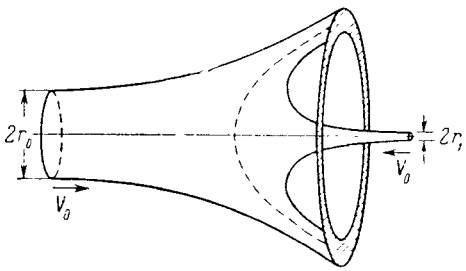


Рис. 86.

Задача, очевидно, симметрична относительно оси x, а если мы рассмотрим часть течения, лежащую выше оси x, и воспользуемся принципом обращения течения, то увидим, что эта задача совпадает с задачей о косом ударе струи о прямую, которую мы решали в начале главы. Мы видели там, что отображение плоскости комплексного потенциала $\zeta = \varphi + i\psi$ на плоскость течения $z = x + iy$ дается формулой

$$z = \int_0^{\zeta} e^{G(\zeta)}\, d\zeta, \tag{1}$$

где функция G находится из уравнения (3) § 27, в котором надо положить $q = r_0$ и $q' = r_1$; угол α наклона к оси x струи, образовавшейся после соударения, определяется из формулы

$$\cos\alpha = \frac{r_0 - r_1}{r_0 + r_1}. \tag{2}$$

В осесимметрическом варианте столь законченного решения задачи получить не удается. Дело в том, что

в основе решения плоского варианта лежит переход к плоскости годографа $w = \log g'(\zeta)$, где g — функция, обратная к комплексному потенциалу, и этот переход также представляет собой конформное отображение. Для квазиконформных отображений такой переход также возможен — это переход к производной системе (см. гл. III). По формулам (11) § 11 мы находим, что в данном случае производная система имеет вид

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = r \frac{\partial \tau}{\partial \psi}, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial \alpha}{\partial \psi} - \frac{\sin \alpha}{r} e^{-\tau}, \tag{3}$$

где $\tau = \log V$ и α — угол наклона скорости к оси x. К сожалению, система (3) неоднородна (в ней присутствует член, содержащий $e^{-\tau}$), а теория квазиконформных отображений, соответствующих таким системам, еще не разработана.

Приходится ограничиваться приближенными решениями этой задачи и ее качественным исследованием. Общая качественная картина решения будет примерно такой же, как в плоском случае: после соударения струи образуют так называемую *пелену*, которая асимптотически приближается к некоторому круговому конусу с осью x (на рис. 86 изображено сечение любой плоскостью, проходящей через ось вращения). В отличие от плоского случая, где ширина струи после соударения асимптотически приближалась к $r_0 + r_1$, толщина пелены δ стремится к нулю по мере удаления от оси вращения.

Наиболее важными элементами расчета являются угол α образующей асимптотического конуса с осью x и закон убывания толщины пелены δ. Эти величины можно подсчитать из физических соображений. Так как жидкость несжимаема и в струях нет источников и стоков, то сумма потоков вектора скорости через поперечные сечения струй (которая стремится к $V_0(\pi r_0^2 + \pi r_1^2)$, если сечения удаляются в $\pm\infty$ по оси x) должна быть равна потоку этого вектора через поперечное сечение пелены (который для больших r равен примерно $2\pi r \delta V_0$). Отсюда мы получаем с точностью до малых высших порядков, что

$$\delta \approx \frac{r_0^2 + r_1^2}{2r}. \tag{4}$$

Для нахождения угла α, как и в плоском случае, можно воспользоваться законом сохранения количества движения: проекции количества движения на ось x до соударения и после него должны быть одинаковыми. Рассмотрим два элемента струй, которые представляют собой цилиндрики высотой 1 вблизи точки $x = \pm\infty$; их суммарное количество движения равно $(\pi r_0^2 - \pi r_1^2)V_0$, если плотность равна 1, что мы и предполагаем. После соударения, когда эти элементы будут уже находиться вблизи асимптотического конуса, проекция их суммарного количества движения на ось x будет примерно равна $(2\pi r\delta)V_0 \cos\alpha \approx 2\pi(r_0^2 + r_1^2)$. Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{r_0^2 - r_1^2}{r_0^2 + r_1^2}. \tag{5}$$

Задача о вихрях. В осесимметрическом варианте можно рассматривать также задачи, связанные с образованием вихрей в неограниченных потоках или струях. Заметим сразу, что в отличие от плоских задач здесь за обтекаемым телом образуются не две вихревых зоны, а одна с тороидальными трубками тока (рис. 87).

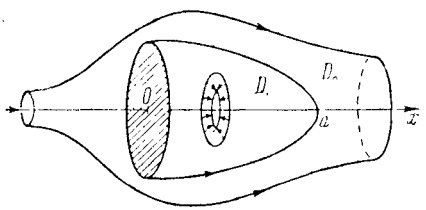


Рис. 87.

Вот одна из постановок таких задач. Ищется движение, для которого ось x является осью симметрии. Движение распадается на две зоны: вихревую D_1 и потенциальную D_0, причем D_1 — ограниченная область, для которой ось x служит осью симметрии, а D_0 представляет собой дополнение D_1. В D_1 имеется осесимметрическое течение с постоянной завихренностью ω, а в D_0 — такое же потенциальное течение со скоростью в бесконечности V_∞. Фиксируется величина V_∞ и длина a отрезка, который образуется в пересечении D_1 с осью x, а величина ω и общая граница зон D_0 и D_1 подбираются из условия непрерывности поля скоростей во всем пространстве.

Выпишем уравнения этой задачи. Если обозначить через V_x и V_r составляющие вектора скорости по оси x и радиальную, то одно из уравнений — условие отсутствия источников — запишется одинаковым образом для обеих зон D_0 и D_1:

$$\frac{\partial (rV_x)}{\partial x} + \frac{\partial (rV_r)}{\partial r} = 0, \tag{6}$$

а второе, связанное с вихрями, будет иметь вид

$$\text{в } D_0\text{:}\quad \frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial r} = 0, \qquad \text{в } D_1\text{:}\quad \frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial r} = \omega. \tag{7}$$

Если, как и выше, ввести функцию тока ψ такую, что $rV_x = \frac{\partial \psi}{\partial r}$, $rV_r = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, то эта функция будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = -\varepsilon\omega, \tag{8}$$

где $\varepsilon = 0$ в области D_0 и $\varepsilon = 1$ в D_1.

Точное решение задачи столь же трудно, как и в плоском случае. Однако, как и там, можно строить ее приближенные решения, например, основанные на формулах для скорости в узких слоях. В том же круге идей можно получать приближенные решения задач обтекания осесимметрических тел потоками с осевой симметрией в предположении, что за телом образуются вихревые зоны.

Вращение жидкости в сосуде. К числу классических проблем гидродинамики принадлежит проблема расчета истечения жидкости из цилиндрического сосуда через круглое отверстие на его дне. Экспериментально известно, что при таком истечении поток, казавшийся в начале покоящимся, приобретает в зоне стока, кроме естественной радиальной скорости, также значительную вращательную скорость. (Резкое увеличение скорости вращения каждый наблюдал, скажем, при спуске воды из ванны.)

Такое вращательное движение жидкости пытались объяснить вращением Земли или случайным начальным вращением. Однако расчеты в схеме идеальной жидкости не давали числового совпадения с экспериментом.

Наиболее явное расхождение теории и опыта проявляется в следующем факте: при истечении жидкости из отверстия в дне вращающегося цилиндрического сосуда (рис. 88) суммарный момент количества движения жидкости (отнесенный к ее массе) относительно вертикальной оси сосуда увеличивается со временем. Этот факт легко проверяется экспериментально: надо раскрутить цилиндрический сосуд с жидкостью до определенной (малой) угловой скорости, затем открыть сток в центре дна и замерить суммарный момент количества движения жидкости, отнесенный к ее массе.

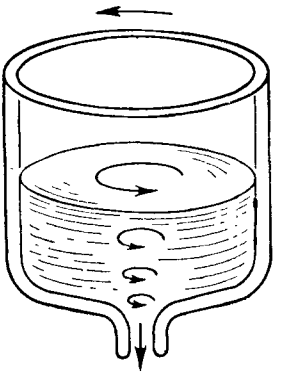


Рис. 88.

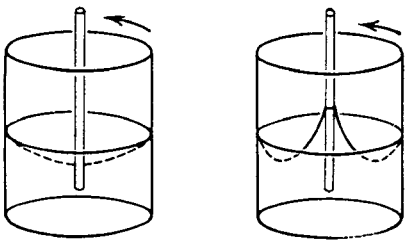
Следствием этого является такой, на первый взгляд неожиданный, эффект. Пусть сосуд с жидкостью, о котором только что говорилось, укреплен на подшипниках так, что он может свободно вращаться вокруг своей оси. Если раскрутить его до некоторой угловой скорости, а потом снять крутящие усилия и одновременно открыть сток на дне, то скорость вращения цилиндра начнет возрастать!

По-видимому, объяснение этого эффекта следует искать в вязкости. В схеме идеальной жидкости истечение привело бы к резкому увеличению угловой скорости жидких колец малого радиуса, близких к оси вращения. По мере удаления от оси прирост угловой скорости вследствие истечения быстро затухал бы, и на скорости вращения самого сосуда истечение жидкости не сказалось бы. Но под влиянием вязкости различие в угловых скоростях жидких колец разных радиусов будет выравниваться — скорость колец, близких к оси, уменьшится, но зато скорость периферийных колец возрастет. Последнее, в силу граничных условий прилипания, приведет к увеличению скорости вращения всего сосуда.

Следуя описанной схеме, можно попытаться сделать и приближенный количественный расчет. Для этого нужно представить, что жидкость состоит из некоторого количества цилиндрических слоев, в каждом из которых

она движется с постоянным завихрением ω_k, причем учет вязкости приводит к определенным соотношениям между ω_k; во всем цилиндре поле скоростей жидкости считается непрерывным. Возникает задача о склейке типа тех, которые рассматривались в гл. V. Для ее решения можно организовать машинный счет.

Близка к рассмотренной следующая задача. Пусть цилиндр, наполненный жидкостью, вращается с постоянной угловой скоростью вокруг своей оси и в него вставлен неподвижный стержень, ось которого совпадает с осью цилиндра. Если вязкость жидкости невелика, то ее свободная поверхность будет близка к параболоиду вращения так, как если бы стержня не было (рис. 89, *а*). Если же вязкость значительна, то жидкость оказывается более поднятой в центре, чем на границе цилиндра (рис. 89, *б*). Опыт можно видоизменить: цилиндр с вязкой жидкостью оставить неподвижным, а круглый стержень, вставленный в жидкость по оси цилиндра, вращать — жидкость поползет по стержню вверх.



а) *б)*

Рис. 89.

Качественное объяснение явления таково. В отсутствии вязкости при установившемся движении все скорости перпендикулярны к оси цилиндра; поле скоростей и распределение давлений в жидкости нетрудно рассчитать. Наличие вязкости, как и в предыдущей задаче, приводит к увеличению скоростей и избыточному давлению вблизи оси цилиндра — это давление и объясняет появление составляющих скоростей, параллельных оси цилиндра и направленных к свободной поверхности жидкости.

Примерно такими же соображениями объясняются еще два явления. Первое из них впервые отмечено А. Эйнштейном — если чай в стакане раскрутить ложкой, то чаинки соберутся в центре стакана. Второе явление наблюдается в реках с быстрым течением.

У берега возле вогнутых мест русла реки скорости имеют заметную составляющую, направленную вниз: течение в таких местах затягивает плавающие тела на глубину и переносит грунт со дна реки на противоположный берег.

Пространственные задачи. Рассмотрим еще несколько существенно пространственных задач (без осевой симметрии), для которых ограничимся качественным объяснением явлений. Количественный (приближенный) расчет, с ними связанный, также можно организовать,

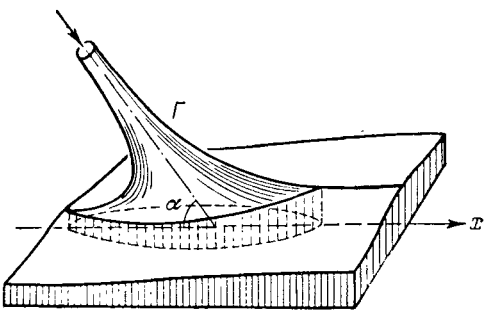


Рис. 90.

но он достаточно сложен и требует предварительных исследований. В плоской постановке эти задачи уже рассматривались.

Удар струи о плоскость. Пусть в бесконечности струя представляет собой цилиндр радиуса r_0, ось которого лежит в плоскости $y = 0$ и составляет угол α с отрицательной осью x. Эта струя должна обтекать плоскость $z = 0$, а на свободной поверхности Γ (рис. 90) величина скорости должна быть постоянной, скажем, равна 1.

Для качественного решения задачи примем в первом приближении, что вне круга $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, где $R \gg r_0$, линии тока представляют собой лучи, выходящие из оси z, а скорость близка к 1. Высоту свободной поверхности над окружностью $x^2 + y^2 = r^2$, где $r > R$, будем считать линейно зависящей от x, пусть $z = ax + b$. Чтобы вычислить постоянные a и b, воспользуемся условиями постоянства расхода и теоремой о количестве движения.

Расход в струе для больших z равен $N = \pi r_0^2$, а над окружностью $x^2 + y^2 = r^2$ он равен $2\pi r(a + b)$, отсюда

$$a + b = \frac{r_0^2}{2r}.$$

Проекция на ось x количества движения массы жидкости в цилиндрике высотой 1 в струе при больших z равна $\pi r_0^2 \cos\alpha$ (плотность мы считаем равной 1). Эта масса с течением времени будет занимать объем, который высекают из цилиндрического слоя $r^2 < x^2 < y^2 < (r+1)^2$ плоскость $z = 0$ и свободная поверхность, а проекция на ось x соответствующего количества движения равна

$$b \int_r^{r+1} r\,dr \int_0^{2\pi} x\cos\varphi\,d\varphi = b \int_r^{(r+1)^2} r^2\,dr \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi b}{3}(3r^2 + 3r + 1).$$

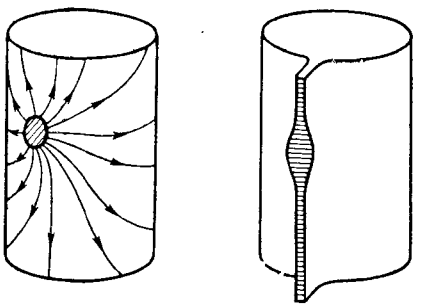
Приравнивая полученные выражения, мы найдем $b \approx \frac{r_0^2 \cos\alpha}{r^2}$ и, следовательно, $a \approx \frac{r_0^2}{2r}$. Таким образом,

$$z \approx \frac{r_0^2}{2r}(1 + 2\cos\alpha\cos\varphi) \qquad (9)$$

(конечно, мы должны еще считать $\alpha < 60°$, чтобы было $2\cos\alpha < 1$).

Удар струи о выпуклое тело. Если струя достаточно тонка, то, как и в плоском случае, мы можем считать, что в окрестностях точки удара струи о поверхность тела и точки отхода струи от поверхности течение примерно такое же, как в случае удара струи о плоскость. Вне этих окрестностей можно считать, что струи имеют осевую симметрию. В частности, сюда входит задача об ударе струи о шар. Если дополнительно учесть влияние вязкости, то по тем же соображениям, что и в плоском случае (см. стр. 241), в этой задаче нужно считать, что точка отхода струи от сферы должна находиться на одном диаметре с точкой удара. Пользуясь этим, можно объяснить устойчивость шара в струе и в пространственной постановке.

Удар струи о цилиндр. В этой задаче имеется специфическая особенность — при срыве с цилиндра со стороны, противоположной месту удара струи, будет образовываться не струя, а жидкий слой. Начало решения этой задачи такое же, как в случае удара о шар, но после удара надо рассмотреть движение слоя воды по поверхности цилиндра. Если принять, что ось струи ортогональна поверхности цилиндра, то можно провести приближенный расчет, и мы получим распределение линий тока на поверхности цилиндра вблизи места удара, изображенное на рис. 91, *а*. На рис. 91, *б* изображено распределение толщины сходящей с цилиндра пелены.



а) *б)*

Рис. 91.

Описанную схему можно уточнить, если вблизи отрыва потока от цилиндра ввести вихревые зоны, как в плоском случае.

Представляет интерес рассмотреть также случай, когда диаметр струи соизмерим с диаметром цилиндра, а ось струи не пересекается с осью цилиндра. Решение этой задачи дало бы полное объяснение эффекта Гольдштика, описанного выше в плоской постановке.

Выбивание пробки из бутылки. Много десятков лет известен прием выбивания пробки из бутылки, частично наполненной жидкостью. Пробка выбивается ударом ладони по дну бутылки. В чем механизм этого эффекта?

Опыты показывают, что эффект проявляется, если ось бутылки наклонена, а удар направлен по этой оси. Качественно явление довольно понятно — при ударе в бутылке создается «ударное» ускорение, свободная поверхность жидкости получает угловую скорость и в результате часть жидкости, расположенная ближе к нижней стороне поверхности бутылки, получает скорость в сторону пробки. Эффект удара о пробку усиливается суживающимся горлышком бутылки.

Эффект проявляется также, если жидкость в бутылке предварительно резко встряхнуть так, чтобы в ней образовалось много пузырьков воздуха (аэрация). Упругие силы, возникающие в пузырьках, действуют подобно сжатой пружине, они и создают струю, выбивающую пробку.

В следующем параграфе мы увидим, что аналогичные явления лежат в основе весьма важных технических эффектов.

§ 29. Кумулятивные струи

Опыт Покровского. Профессор Г. И. Покровский проделал следующий опыт. В стеклянную или металлическую пробирку наливается вода и с небольшой высоты (10—20 *см*) пробирка из вертикального положения падает на стол (рис. 92). Сразу после падения из пробирки вверх выбивается тонкая струя воды высотой свыше метра!

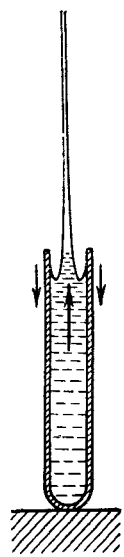


Рис. 92.

Для объяснения этого эффекта первоначально была выдвинута идея, что при ударе от выпуклого дна пробирки образуется сфокусированная упругая волна, которая и создает струю. Но эта гипотеза не подтвердилась — были сделаны пробирки с плоским и даже вогнутым дном, а эффект формирования струи не исчез.

Качественная картина явления была вскоре выяснена — при ударе свободная поверхность жидкости получает такой импульс, что поднятый из-за смачиваемости ее край мгновенно приобретает конечную скорость, направленную вниз, а центральная часть — скорость вверх (см. рис. 92). Эта средняя часть и образует струю.

В обоих описанных примерах (с бутылкой и с пробиркой) общим является то, что в них энергия концентрируется в определенных направлениях, приводя к образованию тонкой, но сильной струи. Эффекты такого рода называются *кумулятивными.*

Следует отметить, что указанные эксперименты получили не только качественное объяснение, удалось построить и метод расчета отдельных элементов явления. Ниже мы рассмотрим родственные явления, связанные с подрывом так называемых кумулятивных зарядов. Здесь также удалось получить не только качественное объяснение явлений, но и установить ряд важных для приложений количественных соотношений.

Кумулятивные заряды. Начнем с краткого описания понятия *детонации* взрывчатых веществ. Представим себе, что в некотором объеме неограниченной упругой среды мгновенно создано большое давление. Тогда по среде побежит ударная волна — поверхность, перед которой среда покоится, а за ней частицы имеют конечную скорость; на самой поверхности имеется скачок давления, плотности и скорости. Если при этом в среде не происходит химических реакций, то с удалением от места возмущения все скачки на фронте волны будут падать. Имеется, однако, много веществ (газообразных, жидких и твердых), таких, что при достижении в каком-либо их месте определенного давления в этом месте происходит химическая реакция с большим выделением тепла. Если по такому веществу пустить ударную волну достаточно большой интенсивности, то сразу за волной будет выделяться энергия, которая питает скачок. При этом, как правило, быстро образуется установившийся процесс, при котором на фронте ударной волны сохраняются величины скачков давления, плотности и скорости, и скорость распространения самой волны также становится постоянной. Вещества, обладающие таким свойством, называются *бризантными* взрывчатыми веществами, а описанный процесс их превращения — детонацией.

Вот средние данные, относящиеся к наиболее распространенным в технике твердым бризантным взрывчатым веществам (тротил, тэн, гексоген и др.): плотность 1—1,5, скорость детонации 5—10 *км/сек*, давление за фронтом волны 100—200 *тонн/см*^{2}. Таким образом, эти ВВ превращаются в газ почти мгновенно, а возникающее давление достаточно для разрушения самого прочного материала. При подрыве 100-граммового кубика

такого вещества на стальной плите в ней образуется вмятина, гранит дробится.

Чтобы получить представление о кумулятивном заряде, проделаем следующий опыт. На стальной плите толщиной в 20 *см* разместим шесть цилиндрических зарядов бризантного ВВ одинаковой высоты — 15 *см* и диаметра — 4 *см* (рис. 93). Заряды *а* и *б* пусть будут сплошными, а остальные имеют коническую выемку со стороны, обращенной к плите; в последних двух зарядах (*д* и *е*) в выемку вставлены конусы из стали толщиной

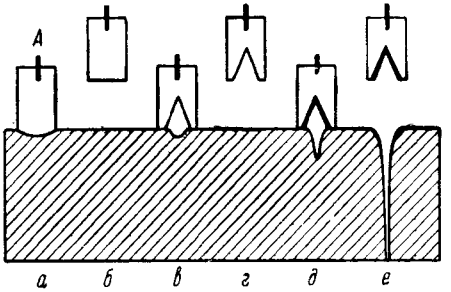


Рис. 93.

1,5 *мм*. Заряды *а*, *в* и *д* стоят на плите, а остальные приподняты на полтора диаметра заряда. Инициирование зарядов производится в месте, указанном на рис. 93 буквой *А*.

На рис. 93 изображено также действие этих зарядов. Обращает на себя внимание необычное — парадоксального характера — увеличение пробивного действия в случае *е*, когда в заряде имеется выемка, покрытая стальной оболочкой, и заряд удален от пробиваемого тела.

Эффект увеличения бронебойного действия заряда при наличии выемки (заряд *в*) был открыт еще во второй половине прошлого века и получил название кумулятивного эффекта. Его использование тогда ограничивалось некоторыми техническими задачами в горном деле. Резкое повышение бронебойного действия при введении металлической облицовки выемки было обнаружено несколько позже, а к 1914 г. относится первый патент на использование эффекта в военном деле —

создание на его принципе бронебойного снаряда. Однако широкое применение явление кумуляции нашло только в войне 1941—1945 гг. К этому же времени относится и создание теории этого явления. Но первая открытая публикация [7], в которой были изложены основы теории кумулятивного заряда с металлической облицовкой, появилась лишь в 1948 г.; она принадлежит группе ученых во главе с Г. Тейлором и Г. Биркгофом.

Физические предпосылки. Для построения количественной теории понадобились простые и вместе с тем достаточно надежные физические предпосылки, причем внимание было сосредоточено на кумулятивном заряде с металлической оболочкой. В качестве предпосылок теории первого приближения были приняты следующие гипотезы:

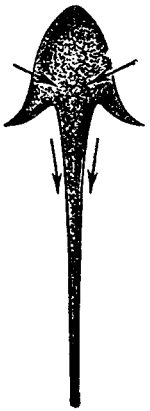


Рис. 94.

1°. Детонация происходит мгновенно, а действие ВВ на оболочку сводится к импульсу, направленному перпендикулярно к поверхности конуса.

2°. Материя оболочки, а также пробиваемая сталь, считается идеальной несжимаемой жидкостью.

Обе эти гипотезы легко обосновать, хотя на первый взгляд представление броневой стали в виде идеальной жидкости и кажется совершенно неправомерным. Дело, однако, в том, что возникающие при кумулятивном взрыве давления имеют порядок 100 000 атмосфер, а при таких давлениях упругие силы составляют сотые доли сил инерционных.

В принятых предпосылках качественную картину явления можно представить следующим образом. В начальный момент все элементы жидкой конической оболочки приобретают скорость (порядка 2 *км/сек*) в направлении оси конуса и происходит обжатие конуса с утолщением его стенок. При подходе элементов к оси конуса часть их выжимается и выплескивается вперед подобно тому, как выплескивается морская вода при входе в клинообразную бухту. В результате этого из конуса выжимается струя — проволока (рис. 94). Расчет, о котором пойдет речь ниже, показывает, что про-

волока будет иметь тем бо́льшую скорость, чем острее конус. Обычно наблюдаемые здесь скорости имеют порядок от 2 до 10 *км/сек*; в отдельных экспериментах достигнута скорость до 90 *км/сек*.

Эта проволока, встречаясь с броней, производит на нее давление порядка 1 000 000 атмосфер, что и объясняет применимость схемы идеальной жидкости для построения теории пробивания. Качественная картина пробивания, т. е. проникания струи в преграду, отличается от картины формирования струи лишь направлением изменения времени (заменой t на $-t$). Характерным в этом процессе является то, что по мере его развития длина струи уменьшается — на каждый пробиваемый участок расходуется часть струи.

Расчетная схема. В соответствии с приведенным выше качественным решением задачи мы можем, как в теории формирования струи, так и в теории пробивания, с достаточной степенью точности воспользоваться решением задачи о встречных струях, с которой мы начали эту главу. Однако, имея в виду теорию пробивания, где плотности кумулятивной струи и брони, вообще говоря, различны, мы должны несколько обобщить ее постановку.

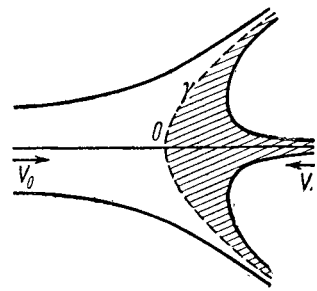


Рис. 95.

Задача ставится так. Вдоль оси симметрии (мы принимаем ее за ось x) слева направо движется струя жидкости плотности ρ_0, которая асимптотически, вблизи $-\infty$, имеет диаметр $2r_0$ и скорость V_0; навстречу ей справа налево движется струя плотности ρ_1, имеющая асимптотически, вблизи ∞, диаметр $2r_1$ и скорость V_1 (рис. 95).

Течение имеет свободные поверхности Γ_0 и Γ_1 и поверхность раздела γ сред с различными плотностями. Так как движение мы считаем установившимся, то по формуле Бернулли давление

$$P = C - \frac{\rho}{2} V^2, \qquad (1)$$

где C — постоянная, равная давлению при $V = 0$, т. е. в точке пересечения оси x и поверхности раздела γ (пусть это будет точка $x = 0$). Из условия постоянства давления в среде, на свободной поверхности Γ_0 мы имеем $V = V_0$, а на поверхности раздела γ должно выполняться соотношение

$$\rho_0 V_0^2 = \rho_1 V_1^2, \tag{2}$$

где V_0 и V_1 — соответственно скорости потоков, идущих из $\pm\infty$. Отсюда вытекает, что скорость вдоль Γ_1, равная предельному значению скорости струи в $+\infty$,

$$V_1 = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}}\, V_0. \tag{3}$$

Все сказанное до сих пор относится в равной мере и к плоской и к осесимметричной трактовке задачи. Рассмотрим теперь подробнее плоский случай.

Обозначим через

$$f_0(z) = \varphi_0 + i\psi_0, \qquad f_1(z) = \varphi_1 + i\psi_1 \tag{4}$$

комплексные потенциалы наших встречных потоков. В силу симметрии этих потоков относительно оси x достаточно рассмотреть их части, лежащие в верхней полуплоскости. Эти части функции f_0 и f_1 конформно отображают на горизонтальные полосы шириной, равной соответствующим расходам $q_0 = V_0 r_0$ и $q_1 = V_1 r_1$. Функции f_0 и f_1 определены с точностью до постоянных слагаемых, которые можно выбрать так, чтобы полосами в плоскости потенциала $w = \varphi + i\psi$ служили $\{0 < \psi < q_0\}$ и $\{-q_1 < \psi < 0\}$ и чтобы точка разветвления потоков $z = 0$ при обоих отображениях переходила в точку $w = 0$ (рис. 96).

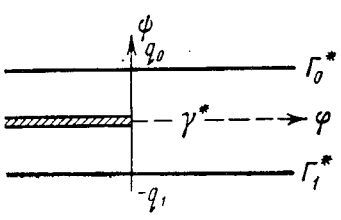


Рис. 96.

Для решения задачи нужно найти кривые Γ_0, Γ_1 и γ и соответствующие отображения (4) так, чтобы вдоль кривых Γ_0 и Γ_1, переходящих в прямые $\psi = q_0$

и $\psi = -q_1$, было соответственно

$$|f_0'(z)| = V_0, \quad |f_1'(z)| = V_1 = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}}\, V_0, \tag{5}$$

а вдоль кривой γ, переходящей в положительную ось φ,

$$|f_1'(z)| = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}}\, |f_0'(z)|. \tag{6}$$

Заметим еще, что при отображениях (4) отрицательная и положительная полуоси x переходят соответственно в верхний и нижний берега разреза вдоль отрицательной оси φ (см. рис. 96), так что

$$\begin{aligned} &\arg f_0'(x) = 0 \quad \text{при} \quad x < 0, \\ &\arg f_1'(x) = -\pi \quad \text{при} \quad x > 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Задача существенно упростится, если от f_k перейти к функциям

$$G_k(w) = \log g_k'(w), \tag{8}$$

где $k = 0$, 1 и g_k — функции, обратные функциям (4). Функции G_k должны удовлетворять следующим граничным условиям: вдоль прямых $\psi = q_0$ и $\psi = -q_1$ соответственно

$$\operatorname{Re} G_0(w) = \log V_0, \quad \operatorname{Re} G_1(w) = \log V_0 + \tfrac{1}{2} \log \frac{\rho_0}{\rho_1}, \tag{9}$$

вдоль положительной полуоси φ

$$\operatorname{Re} G_1(w) = \operatorname{Re} G_0(w) + \tfrac{1}{2} \log \frac{\rho_0}{\rho_1}, \quad \operatorname{Im} G_1(w) = \operatorname{Im} G_0(w), \tag{10}$$

а на нижнем и верхнем берегах отрицательной полуоси φ соответственно

$$\operatorname{Im} G_0(w) = 0, \quad \operatorname{Im} G_1(w) = \pi. \tag{11}$$

Из (10) видно, что функция $G_1(w) - \frac{1}{2} \log \frac{\rho_0}{\rho_1}$ является аналитическим продолжением $G_0(w)$ через положительную полуось φ, и следовательно, функция

$$\zeta = G(w) = \begin{cases} G_0(w) & \text{при} \quad 0 < \psi < q_0, \\ G_1(w) - \frac{1}{2} \log \frac{\rho_0}{\rho_1} & \text{при} \quad -q_1 < \psi < 0 \end{cases} \tag{12}$$

конформно отображает полосу с разрезом вдоль отрицательной оси φ (рис. 96) на полуполосу $\{\operatorname{Re}\zeta < \log V_0, 0 < \operatorname{Im}\zeta < \pi\}$. Без ограничения общности можно считать, что $V_0 = 1$, и тогда G будет совпадать с функцией, которую мы рассматривали в § 27 при решении задач об ударе струи о прямую и о встречных струях. Зная G, мы из (12) и (8) сможем найти функции f_0 и f_1 и тем самым определить форму струй и распределение скоростей в потоке.

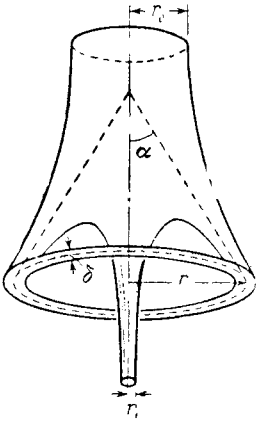


Рис. 97.

Для случая осевой симметрии столь полного решения получить не удается. Однако, пользуясь теорией квазиконформных отображений и повторяя физические рассуждения, которые мы проводили в начале главы (с той лишь разницей, что теперь у нас плотности струй различны), мы можем прийти к следующим выводам:

1°. При неограниченном удалении от оси вращения линии Γ_0 и Γ_1 асимптотически приближаются к некоторой прямой, так что существует асимптотический конус, к которому приближаются свободные поверхности струйных потоков, ограничивающие так называемую «пелену» (рис. 97).

2°. Ширина δ полосы между Γ_0 и Γ_1 стремится к нулю с увеличением расстояния r от оси вращения:

$$\delta \approx \frac{r_0^2 + r_1^2}{2r} \tag{13}$$

(условие несжимаемости жидкости).

3°. Между радиусами струйных потоков r_0 и r_1, их плотностями ρ_0 и ρ_1 и углом α асимптотического конуса имеет место соотношение

$$\cos\alpha = \frac{r_0^2 - \lambda r_1^2}{r_0^2 + \lambda r_1^2}, \tag{14}$$

где $\lambda = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_0}}$ (теорема о сохранении количества движения).

Как мы сейчас увидим, этих фактов достаточно для построения приближенных расчетных формул теории кумулятивных зарядов.

Теория пробивания. Рассмотрим описанную выше схему соударения двух жидких струй в подвижной системе координат, относительно которой левая (толстая) струя неподвижна. В этой системе координат скорость правой (подвижной) струи будет равна

$$v = V_0 + V_1 = (1 + \lambda) V_1.$$

По аналогии со многими задачами механики сплошной среды (теория крыла самолета, волновое сопротивление судов, расчет движения грунтовых вод и т. д.) мы принимаем, что процесс пробивания в теории кумуляции следует законам установившегося проникания жидкой струи в жидкость.

Скорость места соударения V_0 в теории кумуляции будет вместе с тем скоростью проникания; обозначая ее через u, будем иметь

$$u = \lambda V_1 = \frac{\lambda}{1 + \lambda} v. \tag{15}$$

Из последней формулы видно, что *скорость проникания всегда меньше скорости струи*: в частности, если струя и броня имеют одинаковую плотность, то скорость проникания будет вдвое меньше скорости струи.

Из формулы (15) получается также следующий важный факт: если некоторое фиксированное сечение струи продвинется на расстояние L, то точка проникания продвинется на расстояние

$$l = L \frac{u}{v} = \frac{\lambda}{1 + \lambda} L,$$

а струя при этом укоротится на величину

$$L - l = L\left(1 - \frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1 + \lambda} L,$$

откуда *отношение длины израсходованной части струи* $l_2 = L - l$ *к длине пробитого участка* l *равно*

$$\frac{l_2}{l} = \frac{L - l}{l} = \frac{1}{\lambda}$$

или

$$l = \lambda l_2 = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_0}}\, l_2. \tag{16}$$

В частности, если плотности струи и брони одинаковы, то $l = l_2$, т. е. глубина пробития равна длине израсходованной на это пробитие части струи.

Соотношение (16) хорошо согласуется с проблемой пробивания, когда струя имеет конечную длину. Пусть цилиндрический жидкий стержень, диаметр которого мал сравнительно с его длиной, ударяется соосно о другой цилиндрический жидкий стержень. В период, близкий к моменту начала соударения, мы будем иметь резко выраженный неустановившийся процесс, однако, опираясь на вариационные принципы, нетрудно показать, что процессы, происходящие в голове струи, будут заметно влиять только на расстоянии в 2—3 диаметра струи. Когда реальный процесс приближается к разобранному выше установившемуся процессу, то на это тратится лишь небольшая часть струи (всего несколько диаметров), которой можно пренебречь. Поэтому длину l_2 части струи, израсходованной на пробитие, можно просто считать равной длине струи. Мы приходим к такой приближенной формуле для *глубины проникания кумулятивной струи*:

$$l = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_0}}\, a, \tag{17}$$

где a — длина струи, ρ_1 — ее плотность и ρ_0 — плотность брони.

Опираясь на формулу (17), можно решать и более общие задачи, например, изучать пробивание жидкой массы жидкой струей переменной толщины и переменной скорости (по длине струи). В теории первого приближения можно принять, что каждый элемент струи работает так же, как если бы вся струя была устроена, как этот элемент; такой квазистационарный расчет также широко используется в неустановившихся задачах сплошной среды. Представляется весьма интересным и важным получить методы для оценок погрешностей этого приема и, что особенно интересно, формулы следующего приближения с учетом неустановившихся членов. Эта задача, естественно, относится не только к разбираемой задаче пробивания, но и ко всем подобным задачам на квазистационарный расчет.

Формирование кумулятивной струи. Рассмотренная выше схема соударения двух струй при $\rho_0 = \rho_1$ может быть положена также в основу расчета параметров кумулятивной струи. Для этой цели обозначим через V общую скорость границ обеих струй (по формуле (5) у нас $V_0 = V_1$) и введем новую подвижную систему координат, которая движется вдоль оси x справа налево со скоростью $\frac{V}{\cos\alpha}$, где α — угол раствора асимптотического конуса пелены.

В этой системе асимптотический конус движется по нормали к своей поверхности со скоростью $U = V \operatorname{tg}\alpha$, а скорость кумулятивной струи оказывается равной $v = V + \frac{V}{\cos\alpha}$. Подставляя сюда $V = U \operatorname{ctg}\alpha$, мы получаем выражение *скорости кумулятивной струи* в зависимости от угла раствора α и «скорости обжатия» U асимптотического конуса:

$$v = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} U. \tag{18}$$

Легко получить также выражение радиуса струи в зависимости от угла α и толщины оболочки в одном из ее сечений [1]). Примем толщину оболочки при $r = 1$ равной δ. Тогда в силу формулы (13) будем иметь приближенно $2\delta \approx r_0^2 + r_1^2$, а согласно (14)

$$r_0 = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\, r_1.$$

Отсюда для радиуса кумулятивной струи получаем

$$r_1 = \sqrt{\delta(1-\cos\alpha)} = \sqrt{2\delta}\, \sin\frac{\alpha}{2}. \tag{19}$$

Как и в теории пробивания, от рассмотренной идеальной схемы можно перейти к расчету (в первом приближении) реального кумулятивного заряда. Начнем со случая, когда оболочка заряда есть конус, толщина которого меняется по формуле (13) и когда заряд таков, что все элементы оболочки получают мгновенно скорость U, постоянную по величине и направленную по

[1]) Зная толщину одного сечения оболочки, можно определить всю оболочку, ибо геометрия оболочки у нас определяется формой пелены, создаваемой двумя струями.

нормали к асимптотическому конусу. Если толщина конуса мала по сравнению с его высотой, то начальной неустановившейся фазой процесса можно пренебречь и, следовательно, считать, что формирование струи происходит по схеме, изображенной на рис. 97. Обжимающийся конус будет выдавливать из себя проволоку, радиус которой вычисляется по формуле (19) и которая движется со скоростью, вычисляемой по формуле (18). Длина струи и глубина пробития по формулам (16) и (17) будут равны длине образующей конуса.

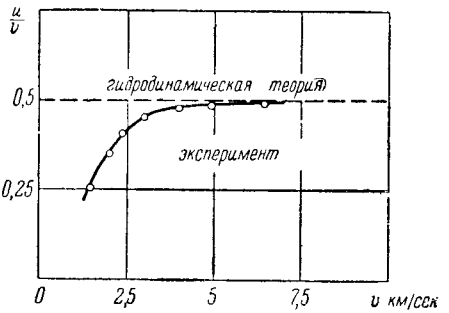


Рис. 98.

Используя принцип квазистационарного расчета и опираясь на формулы (18) и (19), можно дать расчет первого приближения для работы произвольной металлической оболочки с произвольным распределением импульса (с осевой симметрией). Получающаяся при этом струя будет, естественно, иметь переменную толщину, кроме того, различные элементы струи будут двигаться с различной скоростью — струя в полете будет в одних своих участках сжиматься, в других растягиваться.

Пределы применимости теории. Приведенная выше теория первого приближения полностью подтвердилась на опыте в достаточно широких пределах диаметров зарядов, форм и толщин оболочек, в материалах различных плотностей и прочностных свойств. На рис. 98 приведено сравнение гидродинамической теории с экспериментом для различных значений скорости v кумулятивной струи. В этом эксперименте струя и мишень имели одинаковую плотность (обе из стали), так что $\lambda = 1$ и по

гидродинамической теории (формула (15)) скорость проникания $u = \frac{1}{2}v$. Из рис. 98 видно, что отношение $\frac{u}{v}$ близко к теоретическому при скоростях струи $v > 4$ *км/сек*.

Накопилось, однако, и некоторое количество фактов, не укладывающихся в теорию и требующих для своего объяснения существенных дополнений к теории.

а) Острые конусы. Согласно полученным формулам чем меньше угол, тем тоньше струя и тем больше ее скорость; делая угол все меньше и меньше, мы можем теоретически получать сколь угодно большие скорости, и следовательно, в зоне образования струи (согласно формуле Бернулли) — сколь угодно большие давления. Этот качественный вывод на опыте не подтверждается: при малых углах α наблюдается резкое снижение пробивного действия (вплоть до полной потери), а скорость перестает увеличиваться. При количественном изучении этого явления оказалось, что здесь существенную роль играет материал оболочки (марка стали, свинец, алюминий, бериллий и т. д.): каждый материал дает свой предельный угол α_0, начиная с которого появляются аномалии. Поскольку проблема получения больших скоростей и давлений имеет самостоятельный интерес, то за последние годы появились работы теоретические и экспериментальные, ставящие своей задачей дать более точный расчет при малых α и получить возможно большие скорости. Основным добавочным фактором в расчетах явилась сжимаемость, отсюда одной из существенных характеристик металла явилось его уравнение состояния, в частности, коэффициент объемного сжатия. Из отечественных работ отметим работу Н. А. Слезкина [6], из иностранных — Уолша с сотрудниками [9]. Наиболее ценная экспериментальная работа принадлежит Коски с сотрудниками [8]. Используя цилиндрическую оболочку из бериллия и обжимая эту оболочку специальным зарядом, этим авторам удалось получить поток частиц — но не струй — (в пустоте) со скоростями около 90 *км/сек*. В работе [8] авторы, опираясь на ряд дополнительных гипотез, вычисляют предельное значение α_0; при меньших значениях струя не может образоваться.

б) Диаметр пробиваемого отверстия. Согласно гидродинамической теории, в процессе пробивания преграды струей преграда раздвигается так, что все ее элементы получают скорости, соответствующие расширению отверстия; струя при этом размазывается по стенкам. Мы считаем процесс законченным, когда вся струя размажется. На самом деле в схеме идеальной жидкости полученное жидкостью движение будет продолжаться так, что диаметр отверстия будет неограниченно расти. Задача определения диаметра отверстия, таким образом, в схеме идеальной жидкости неразрешима. Начальное распределение скоростей можно брать из схемы идеальной жидкости (или газа), а дальнейший счет нужно вести в вязко-упругой среде.

в) Фокусное расстояние. Как показывает опыт, для каждого конуса, в зависимости от его толщины, диаметра и высоты и соответствующего ему заряда существует относительное расстояние заряда от брони, при котором получается наибольшее пробитие. Резкое падение пробивного действия при удалении заряда от преграды объясняется прежде всего неустойчивостью струи; задача изучения струи в полете также выходит за рамки идеальной жидкости и требует привлечения теории вязко-пластических течений металла.

Литература

1. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидродинамика, т. I, Гостехиздат, М., 1948.
2. Г. Ламб, Гидродинамика, Гостехиздат, М., 1947.
3. Г. Биркгоф, Э. Сарантонелло, Струи, следы и каверны, «Мир», М., 1964.
4. М. А. Лаврентьев, О некоторых задачах движения жидкости при наличии свободных поверхностей, Прикл. матем. и мех., т. 30, в кн. 1 (1966), 177—182.
5. М. А. Лаврентьев, Кумулятивный заряд и принципы его работы, Успехи матем. наук, т. XII, вып. 4 (1957), 41—56.
6. Н. А. Слезкин, Об ударе плоской газовой струи в безграничную стенку, Прикл. матем. и мех., 16 : 2 (1952).
7. G. Birkhoff, D. Mc Dougall, E. Pugh, G. Taylor, Explosives with lined cavitis, Journ. of Appl. Phys., 19 (1948), 563—582.
8. W. Koski, F. Luky, R. Shreffler, F. Willig, Fast jets from collapsing cylinders, Journ. of Appl. Phys., 23 (1952), 1300—1305.
9. J. Walsch, P. Shreffler, F. Willig, Limiting conditions for jet formation in high velocity collisions, Journ. of Appl. Phys., 24 (1953), 349—359.

Глава VIII

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ

Этот сравнительно молодой раздел гидродинамики сейчас интенсивно развивается, и количество работ, ему посвященных, растет из года в год. Внимание исследователей здесь привлекает, с одной стороны, трудность и новизна проблем и, с другой, — то, что многие из этих проблем возникают из запросов техники сегодняшнего дня — движение судов на подводных крыльях, поиски нового типа тяговой силы, быстро меняющиеся процессы (в том числе взрывы в атмосфере и воде), изучение и использование природных явлений и т. д. и т. п.

В этой главе мы коснемся лишь некоторых из очень широкого круга проблем, связанных с неустановившимися движениями. В следующих главах проблемы этого круга также будут занимать значительное место.

§ 30. Постановка задачи

Общая постановка задачи о неустановившемся движении несжимаемой жидкости такова.

В начальный момент времени, скажем, $t = 0$, задана пространственная область D, заполненная жидкостью, и пусть известно распределение скоростей в этот момент, требуется определить дальнейшее движение жидкости.

Эта постановка, однако, очень неопределенна и нуждается в упрощающих и конкретизирующих предположениях. Наиболее общими упрощающими предположениями являются предположения об отсутствии вязкости и потенциальности движения. Рассмотрим их несколько подробнее.

Потенциальные движения. Естественно возникает следующий вопрос: если в начальный момент $t = 0$ движение идеальной несжимаемой жидкости является потенциальным, то будет ли оно оставаться таким же во все время движения?

На этот вопрос можно ответить утвердительно, если предположить еще, что жидкость находится в потенциальном поле внешних сил $\boldsymbol{F}$. В самом деле, возьмем произвольный жидкий замкнутый контур L_t, который будем считать заданным параметрически уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s, t)$, где $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор, а параметр s в любой момент времени t меняется на отрезке $[0, 1]$. Производная по времени от циркуляции вектора скорости вдоль L_t

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_{L_t}(\boldsymbol{V}, d\boldsymbol{r}) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{V}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}\right) ds =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}\right) ds + \int\limits_0^1 \left(\boldsymbol{V}, \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}\right) ds,$$

но $\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial s}$, а $\left(\boldsymbol{V}, \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial s}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}V^2$, поэтому второй интеграл равен приращению функции $\frac{V^2}{2}$ вдоль контура L_t и в силу замкнутости последнего равен нулю. Таким образом,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int\limits_{L_t}\left(\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}, d\boldsymbol{r}\right), \tag{1}$$

а так как в силу уравнений движения

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p, \tag{2}$$

где согласно сделанным предположениям $\boldsymbol{F}$ имеет потенциал, а ρ — постоянная, то интеграл в правой части (1) равен нулю. Итак, доказано, что $\frac{d\Gamma}{dt} \equiv 0$, а так как в начальный момент у нас $\Gamma = 0$, то и все время $\Gamma \equiv 0$ — отсюда и следует потенциальность движения.

Опишем принципиальную схему определения того, как с течением времени меняются область течения и поле скоростей в отсутствии внешних сил. Для любого момента t мы обозначим через D_t положение области течения, а через $\varphi(\boldsymbol{r}, t)$ — потенциал скоростей в этот момент. Будем еще считать, что D_t имеет свободную границу — поверхность S_t. Условие постоянства давления на этой поверхности приводит к соотношению, которое выполняется всюду на S_t:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\operatorname{grad} \varphi|^2 = c, \tag{3}$$

здесь c — некоторая постоянная (см. § 1). Это соотношение и можно использовать для приближенного определения D_t и φ.

Выберем малый отрезок времени δt. За время δt каждая точка границы S области D сдвинется в направлении $\operatorname{grad} \varphi_0$, где $\varphi_0 = \varphi(\boldsymbol{r}, 0)$, на расстояние $|\operatorname{grad} \varphi_0| \delta t$ — так мы получим поверхность $S_{\delta t}$. С другой стороны, согласно (3), на S за время δt значение φ изменится на величину

$$\delta \varphi = \left(c - \frac{1}{2} |\operatorname{grad} \varphi_0|^2\right) \delta t.$$

Если еще учесть изменение φ на отрезке $|\operatorname{grad} \varphi_0| \delta t$, на который сдвинулась точка поверхности S, мы получим, что на $S_{\delta t}$ значение

$$\varphi(\boldsymbol{r}, \delta t) = \varphi_0(\boldsymbol{r}) + \left(c + \frac{1}{2} |\operatorname{grad} \varphi_0|^2\right) \delta t. \tag{4}$$

Решая в области $D_{\delta t}$ задачу Дирихле с такими граничными данными, мы найдем значение $\varphi(\boldsymbol{r}, \delta t)$ в этой области.

Описанный процесс можно продолжить, и мы получим тогда приближенное представление о виде D_t и значении $\varphi(\boldsymbol{r}, t)$ в «любой» момент времени t.

Пользуясь этой схемой, Р. М. Гарипов провел на ЭВМ расчет неустановившегося движения идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в прямоугольном бассейне с сечением $\{0 \leqslant x_1 \leqslant 2,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$. В начальный момент времени $t = 0$ свободная поверхность имеет вид кривой (0) рис. 99, которая

соединяет точки, отмеченные 0 и 1. Потенциал скоростей на свободной поверхности в начальный момент принимается равным x_1, а внутри жидкости вычисляется как решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее условиям непроницаемости на стенках бассейна.

На рис. 99 скопирован выданный машиной бланк, на котором кроме начального положения свободной поверхности приведены точки, полученные в результате расчета для момента $t = 0{,}244$ — они отмечены цифрами 2

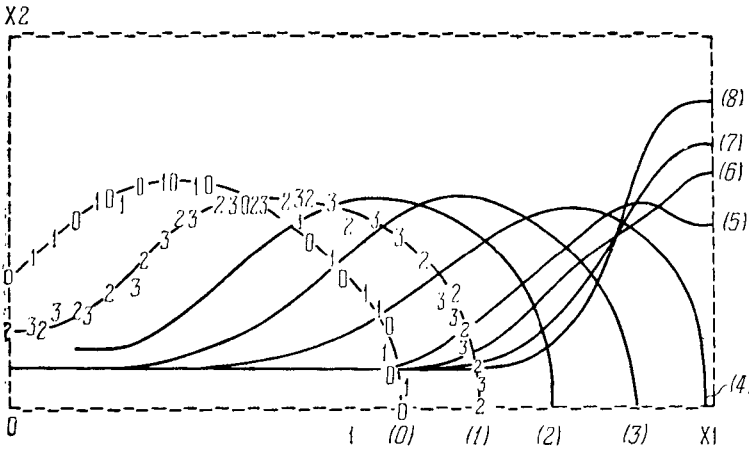


Рис. 99.

и 3 и соединены кривой (*1*). На этот же рисунок с других бланков снесены кривые (*2*), (*3*), ..., (*8*), соединяющие расчетные точки и указывающие положения свободной поверхности в моменты времени 0,488; 0,732; ... ...; 1,951.

Задача формально решалась как пространственная (с осью x_3, перпендикулярной плоскости рисунка), но так как от x_3 ничего не зависит, она по существу является плоской. На рис. 99 изображены сечения плоскостями $x_3 = 0$ (точки с индексом 0 на кривой (*0*) и с индексом 2 на кривой (*1*)) и $x_3 = 0{,}146$ (точки с индексом 1 на кривой (*0*) и с индексом 3 на кривой (*1*)). Точки не совпадают из-за того, что в качестве узлов разностной схемы бралась шахматная сетка, но соответствующие точки лежат на одной кривой.

Этот расчет дает основание полагать, что описанная выше схема приближенного решения задачи о неустановившемся движении жидкости устойчива.

Задачи со свободными границами. Класс задач о неустановившихся потенциальных движениях идеальной жидкости со свободными границами достаточно широк. К нему относится, в частности, знаменитая задача Коши — Пуассона о волнах, которые распространяются на поверхности водоема в результате действия какого-либо возмущения первоначально покоящейся воды. Хотя эта задача математически поставлена около 150 лет назад, ее полного решения до сих пор еще нет. До недавнего времени были известны лишь многочисленные приближенные теории и некоторые точные решения довольно специального характера.

В последние годы в Институте гидродинамики Сибирского отделения АН СССР под руководством Л. В. Овсянникова были разработаны методы, позволившие несколько продвинуть теорию. Мы хотим здесь дать представление об этих методах.

Движение вполне определено, если известен потенциал скоростей $\varphi(\boldsymbol{r}, t)$ — гармоническая функция пространственных координат $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$. Поэтому задача формулируется так:

Дана область D и гармоническая в ней функция $\varphi_0(\boldsymbol{r})$. Требуется для всех $t > 0$ найти область D_t с границей S_t, зависящей от времени t, и функцию $\varphi(\boldsymbol{r}, t)$, гармоническую по $\boldsymbol{r}$ в области D_t, так, чтобы при всех $t > 0$ на S_t выполнялись соотношения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\operatorname{grad} \varphi|^2 + \Phi = p(t), \tag{5}$$

$$(\boldsymbol{n}, \operatorname{grad} \varphi) = V_n, \tag{6}$$

а при $t = 0$ было бы

$$D_0 = D, \quad \varphi(\boldsymbol{r}, 0) = \varphi_0(\boldsymbol{r}). \tag{7}$$

Здесь градиент, как всегда, берется по пространственным координатам, $\Phi = \Phi(\boldsymbol{r}, t)$ обозначает потенциал внешних сил и считается заданной функцией, функция $p(t)$ (давление на свободной границе) также считается известной. Во втором уравнении $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S_t, а V_n —

скорость перемещения этой поверхности в направлении ее нормали. Если S_t задается уравнением $z = f(x, y, z)$, то как мы показали в гл. I (см. формулу (28) § 1), условие (6) можно переписать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (\operatorname{grad}\varphi,\ \operatorname{grad}(z - f)). \tag{8}$$

Напомним еще, что если в состав границы S_t входят непроницаемые поверхности, то на них условие (5) не ставится, и остается одно лишь условие (6), но зато форма таких поверхностей считается известной во все время движения.

В эту постановку входит, в частности, и задача Коши — Пуассона о волнах на поверхности водоема конечной глубины. В ней принимается, что $\Phi = az$, где a — некоторая постоянная, а давление $p(t)$ постоянно, например, тождественно равно нулю. Начальная область D задается неравенствами $0 < z < f_0(x, y)$ и дно водоема считается неподвижным, условие (6) на нем имеет вид $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$. Даже в случае установившегося движения решение этой задачи наталкивается на трудности, о которых мы говорили в предыдущих главах (см. § 20 в связи с плоской постановкой и § 24 — в связи с пространственной).

Подход к ее решению, предложенный Л. В. Овсянниковым, в общих чертах состоит в следующем. Допустим, что нам известна свободная поверхность S_t, задаваемая уравнением $z = f(x, y, t)$, а также значение потенциала на этой поверхности, т. е. функция $\varphi(x, y, f(x, y, t), t) = g(x, y, t)$. Тогда в принципе (при определенных условиях, наложенных на функции f и g) мы можем найти единственную гармоническую в D_t функцию $\varphi(r, t)$, которая на S_t принимает значение g, а на плоскости $z = 0$ удовлетворяет условию $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$. Таким образом, определено отображение, которое каждой паре функций (f, g) из определенного класса E ставит в соответствие векторное поле $\boldsymbol{V} = \operatorname{grad}\varphi$ в области D_t

$$\boldsymbol{V}\colon\ (f, g) \to \operatorname{grad}\varphi. \tag{9}$$

Задача свелась к отысканию в E функций f и g, которые вместе с соответствующей им функцией φ удовлетворяют при всех x, y и всех $t \geqslant 0$ соотношениям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\operatorname{grad} \varphi|^2 + af = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial t} = (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad}(z - f)), \end{aligned} \tag{10}$$

где $z = f(x, y, t)$, а при $t = 0$ — начальным условиям

$$f(x, y, 0) = f_0(x, y), \quad g(x, y, 0) = g_0(x, y), \tag{11}$$

где f_0 и g_0 — заданные функции, а точка (x, y) пробегает всю плоскость.

Опишем теперь выбор класса E. Говорят, что функция f удовлетворяет в плоской области D *условию Гёльдера* с показателем α, если для любых точек P_1, $P_2 \in D$ отношение $\dfrac{|f(P_2) - f(P_1)|}{|P_1 - P_2|^\alpha}$ ограничено; верхнюю грань этого отношения называют коэффициентом Гёльдера. При фиксированном α, $0 < \alpha < 1$, через $\|f\|_{k,\alpha}$ обозначают сумму верхних граней в D модулей функции f и ее частных производных до порядка k включительно, а также коэффициентов Гёльдера этих производных (предполагается, что последние существуют и непрерывны). Для функций, которые обладают в D частными производными всех порядков, вводят величину

$$\|f\|^{(\rho)}_{k,\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} \max_{n_1+n_2=n} \left\| \frac{\partial^{n_1+n_2} f}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2}} \right\|_{k,\alpha}. \tag{12}$$

Через $B^{(\rho)}_{k,\alpha}$ обозначают множество всех функций f, для которых величина (12) конечна.

Класс $E = E^{(\rho)}_\alpha$ составляется из тех функций $f(x, y, t)$, которые по x и y во всей плоскости (x, y) принадлежат множеству $B^{(\rho)}_{2,\alpha}$, а при $t \geqslant 0$ зависят от t аналитически. Этот класс оказался удобным для исследования задачи Коши — Пуассона; В. И. Налимов (ученик Л. В. Овсянникова) доказал следующую теорему [3]:

Если начальные данные f_0 и g_0 в задаче Коши — Пуассона принадлежат некоторому классу $E^{(\rho_0)}_\alpha$, то найдутся числа $\rho_1 > 0$ и $t_1 > 0$ такие, что в любом классе

$E_a^{(\rho)}$, где $\rho < \rho_1$, существует единственное решение этой задачи на отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Таким образом, разрешимость задачи Коши — Пуассона в классе аналитических поверхностей S_t с уравнением вида $z = f(x, y, t)$ установлена лишь для начальных отрезков времени. Как мы сейчас увидим, это ограничение, по-видимому, связано с существом дела.

Устойчивость. При изучении инерционного неустановившегося движения жидкой массы естественно возникает вопрос об устойчивости этого движения. На самых простых примерах, хотя бы в рамках приближенной схемы, о которой говорилось в начале этого параграфа, можно убедиться в том, что даже при достаточно гладких начальных данных довольно скоро возникают особенности как у границы S_t, так и у потенциала φ.

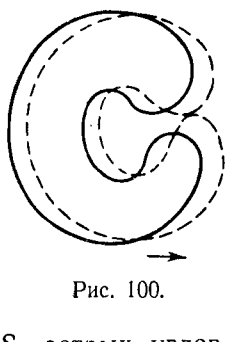


Рис. 100.

Следует различать неустойчивость, связанную с двумя видами особенностей границы — локальными и глобальными. Локальные особенности возникают при появлении у S_t волнообразной формы такой, что длина волн мала по сравнению с размерами D_t.

При увеличении t эти мелкие «волны» могут привести к образованию на S_t острых углов, складок и других особенностей. Но с точки зрения приложений, в которых обычно интересуются движением основной массы жидкости, такие локальные особенности большой роли не играют (так, например, мелкая рябь на воде практически не влияет на движение длинных волн). При подсчетах следует заменить плохую поверхность S_t близкой к ней хорошей и продолжать процесс.

Иначе обстоит дело с глобальными особенностями, которые образуются, когда в процессе движения две точки поверхности S_t, находящиеся на конечном расстоянии, приближаются друг к другу с последующим гидравлическим ударом одной части жидкости о другую (рис. 100). Особенности такого типа связаны с природой явления и подлежат особому анализу. Во многих вопросах такие глобальные особенности играют фундаментальную роль.

§ 31. Подводный взрыв

С явлениями, происходящими при подводных взрывах, связан очень широкий круг задач, в которых участвуют неустановившиеся движения. Мы начинаем с рассмотрения двух вполне классических задач.

Схлопывание пузыря. Одним из первых вопросов, возникающих при изучении взрыва под водой, является вопрос о том, как изменяется с течением времени образовавшийся при взрыве газовый пузырь, который заполнен продуктами детонации ВВ.

В простейшей приближенной постановке задачу можно сформулировать так. Пусть сферический газовый пузырь переменного радиуса $R = R(t)$ находится в безграничной несжимаемой жидкости с плотностью 1 и постоянным давлением P_0. Силой тяжести, вязкостью, а также поверхностным натяжением и конденсацией газов в пузыре мы пренебрегаем. Требуется найти закон изменения радиуса $R(t)$.

Скорость движения жидкости, вызванного изменением радиуса пузыря, в данный момент времени t зависит лишь от расстояния r рассматриваемой точки от центра пузыря и равна $\frac{dr}{dt} = \dot{r}$. Сравнивая расходы на границе пузыря и концентрической с ней сфере радиуса r, мы найдем

$$4\pi R^2 \dot{R} = 4\pi r^2 \dot{r} = \Phi, \tag{1}$$

где $\Phi = \Phi(t)$ — некоторая функция времени. Это соотношение позволяет вычислить кинетическую энергию всей массы жидкости в момент t:

$$E = \int_R^\infty \frac{1}{2}\left(\frac{\Phi}{4\pi r^2}\right)^2 4\pi r^2\, dr = \frac{\Phi^2}{8\pi R} = 2\pi R^3 \dot{R}^2. \tag{2}$$

Будем считать, что в начальный момент жидкость находится в покое, а $R(0) = R_0$; пусть еще разность между давлением в жидкости P_0 и давлением газа внутри пузыря равна P; в силу наших предложений это — постоянная величина. Если не учитывать поверхностное натяжение, то

$$dE = -4\pi R^2 \dot{R} P\, dt \tag{3}$$

(знак минус объясняется тем, что у нас $\dot{R} < 0$), откуда интегрированием находим

$$E = \frac{4}{3}\pi P\left(R_0^3 - R^3\right).$$

Сравнивая это выражение с (2), получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\dot{R}^2 = \frac{2P}{3}\frac{R_0^3 - R^3}{R^3}, \tag{4}$$

а его интегрирование приводит к соотношению

$$t = \sqrt{\frac{3}{2P}}\int_R^{R_0}\sqrt{\frac{r^3}{R_0^3 - r^3}}\,dr, \tag{5}$$

из которого можно найти искомую зависимость $R = R(t)$.

Из уравнения (4) следует, что при $R \to 0$ скорость $\dot{R}$ неограниченно возрастает как $R^{-3/2}$. Это отражает тот факт, что в момент исчезания пузыря происходит гидравлический удар — мы имеем пример глобальной особенности, о которой говорилось выше. Описанный эффект называется *схлопыванием пузыря.*

Полагая в (5) $R = 0$, мы находим время схлопывания:

$$\tau = \sqrt{\frac{3}{2P}}\int_0^{R_0}\sqrt{\frac{r^3}{R_0^3 - r^3}}\,dr \approx 0{,}9\frac{R_0}{\sqrt{P}}. \tag{6}$$

Можно еще рассматривать пульсирующий пузырь, который после схлопывания расширяется до начальной величины. Последняя формула позволяет определить период колебаний такого пузыря:

$$T = 2\tau. \tag{7}$$

Отметим, что в точной постановке задачи о движении газового пузыря, образовавшегося при подводном взрыве, следует учитывать влияние поверхности воды и силы тяжести, а давление в пузыре считать меняющимся по закону:

$$p(t) = \frac{c}{[\omega(t)]^{\gamma}}, \tag{8}$$

где $\omega(t)$ — объем пузыря в момент времени t, а c и $\gamma > 1$ — постоянные. Массой газа внутри пузыря и силами поверхностного натяжения можно пренебречь. В этой постановке в начальный момент поверхность воды можно считать плоской, а границу газового пузыря — сферой; дальнейшее изменение формы этих поверхностей находится из решения задачи.

Решение задачи о движении газового пузыря в такой точной постановке для начального этапа получил недавно Л. В. Овсянников [2]. О дальнейших этапах движения мы будем говорить ниже при обсуждении проблемы султана.

Шары Бьёркнесов. Пусть в безграничной жидкости, которую мы по-прежнему предполагаем несжимаемой

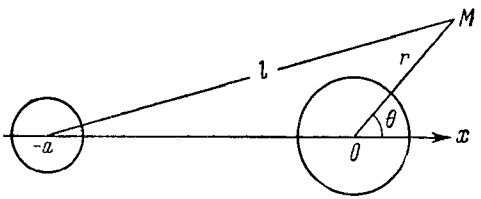


Рис. 101.

(с плотностью 1) и невесомой, пульсируют два воздушных или газовых пузыря. Еще в прошлом веке отец и сын Бьёркнесы обнаружили и объяснили интересное явление, связанное с этим экспериментом — оказывается, что если пузыри пульсируют в одинаковой фазе, то они притягиваются друг к другу, а если в противофазе, то отталкиваются.

Для объяснения этого явления нам понадобится следующий элементарный факт — шар, движущийся поступательно в безграничной жидкости, можно имитировать точечным диполем, расположенным в центре шара. В самом деле, пусть шар радиуса R движется со скоростью U вдоль оси x. Потенциал скоростей этого движения представляет собой гармоническую вне шара функцию φ, равную 0 на бесконечности и на поверхности шара удовлетворяющую условию $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = U \cos\theta$ (нормальная составляющая скорости, r и θ — цилиндрические координаты, см. рис. 101). Этим условиям, очевидно,

удовлетворяет функция $\varphi = -\frac{U}{2}\frac{R^3}{r^2}\cos\theta$, а решение задачи единственно, следовательно, она и является искомым потенциалом. Мы видим, что вне шара (при $r > R$) она совпадает с потенциалом скоростей диполя, расположенного в начале координат: $\varphi = -\frac{\alpha\cos\theta}{r^2}$ (см. § 23), причем $U = \frac{2\alpha}{R^3}$.

Переходя к описанию явления Бьёркнесов, заменим пузыри точечными источниками интенсивностей $q(t)$ и $\varepsilon q(t)$, расположенными соответственно в точках $x = 0$ и $x = -a$ оси x, причем $\varepsilon = 1$, если пузыри пульсируют в одинаковой фазе, и $\varepsilon = -1$, если они пульсируют в противофазе. Чтобы учесть возможность перемещения центров пузырей, будем еще считать, что в тех же точках помещены диполи. Так как пузыри равноправны, достаточно изучить движение одного из них, скажем, того, который пульсирует в окрестности начала. Радиусы пузырей мы будем считать малыми в сравнении с a.

Если пренебречь влиянием диполя, расположенного в точке $x = -a$, то в точке M, близкой к началу координат, потенциал поля скоростей запишется в виде

$$\varphi = -\frac{q}{r} - \varepsilon\frac{q}{l} + \frac{\alpha\cos\theta}{r^2}, \tag{9}$$

где l — расстояние точки M до второго источника, а $\alpha = \alpha(t)$ — момент диполя (рис. 101). У нас $l^2 = a^2 + r^2 + 2ar\cos\theta$ и вблизи начала $l \approx \sqrt{a^2 + 2ar\cos\theta} \approx a\left(1 + \frac{r}{a}\cos\theta\right)$. Поэтому (9) можно приближенно переписать в виде

$$\varphi = -\frac{q}{r} - \frac{\varepsilon q}{a}\left(1 - \frac{r}{a}\cos\theta\right) + \frac{\alpha\cos\theta}{r^2}$$

или, если отбросить несущественное постоянное (при фиксированном t) слагаемое, в виде

$$\varphi = -\frac{q}{r} + \varepsilon\frac{q\cos\theta}{a^2}r + \frac{\alpha\cos\theta}{r^2}. \tag{10}$$

Здесь первое слагаемое дает потенциал источника, расположенного в начале координат, второе — потен-

циал другого источника (приближенно) и третье — потенциал диполя. Если обозначить через $R = R(t)$ радиус пузыря, пульсирующего в окрестности начала, то скорость его изменения (которая определяется первым слагаемым) $\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \frac{q}{R^2}$, а поступательная скорость пузыря $U = \frac{2\alpha}{R^3}$ (она определяется третьим слагаемым; знак плюс объясняется тем, что речь идет о скорости пузыря, а не жидкости).

Воспользуемся теперь тем, что в силу нашего предположения о невесомости суммарное давление на пузырь должно быть равным нулю. По интегралу Коши давление в точке, близкой к началу,

$$P = \text{const} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2\right] - \frac{\partial\varphi}{\partial t} =$$

$$= \text{const} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{q}{r^2} + \frac{\varepsilon q\cos\theta}{a^2} - \frac{2\alpha\cos\theta}{r^3}\right)^2 + \right.$$

$$+ \frac{\sin^2\theta}{r^2}\left(\frac{\varepsilon q r}{a^2} - \frac{\alpha}{r^2}\right)^2 -$$

$$\left. - \left(-\frac{\dot{q}}{r} + \varepsilon\frac{r\dot{q}\cos\theta}{a^2} + \frac{\dot{\alpha}\cos\theta}{r^2}\right)\right]. \qquad (11)$$

При интегрировании по граничной сфере пузыря члены, не зависящие от θ или пропорциональные $\sin^2\theta$ и $\cos^2\theta$, сокращаются вследствие симметрии, поэтому ненулевой вклад в суммарное давление могут дать лишь члены

$$-\cos\theta\left(\frac{\varepsilon q^2}{r^2a^2} - \frac{2\alpha q}{r^5} + \varepsilon\frac{\dot{q}r}{a^2} + \frac{\dot{\alpha}}{r^2}\right).$$

Условие обращения в нуль суммарного давления приводит, следовательно, к равенству

$$\dot{\alpha} = \frac{2\alpha q}{R^3} - \frac{\varepsilon q^2}{a^2} - \frac{\varepsilon\dot{q}R^3}{a^2}, \qquad (12)$$

справедливому в любой момент времени t.

Остается учесть, что за полный период пульсирования пузыря суммарные эффекты изменения $q(t)$ и $\dot{q}(t)$ равны нулю. Но тогда, как видно из (12), суммарный эффект изменения за период величины $\dot{\alpha}(t)$, а значит, и $\alpha(t)$ по знаку противоположен знаку ε. Так как

поступательная скорость центра пузыря $U = \frac{2\alpha}{R^3}$, то мы заключаем, что приращение $U(t)$ за период пульсирования отрицательно при $\varepsilon > 0$ и положительно при $\varepsilon < 0$. Это и объясняет явление Бьёркнесов.

Отметим еще один вариант этого же явления. Как известно, влияние на источник твердой стенки в точности эквивалентно влиянию на него другого источника той же интенсивности, расположенного зеркально симметрично с первым источником относительно стенки. Точно так же действие на источник свободной поверхности можно заменить действием симметричного источника, интенсивность которого противоположна по

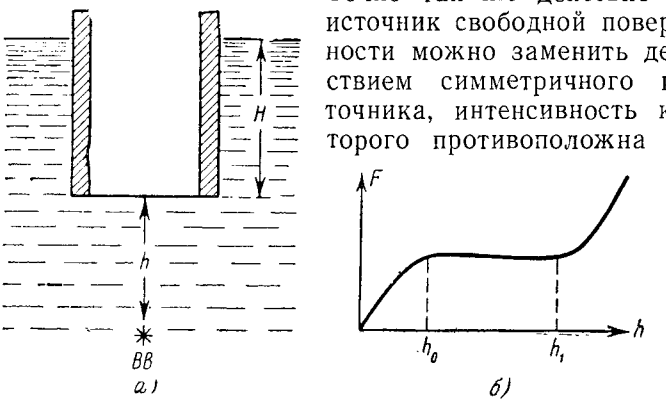


Рис. 102.

знаку интенсивности первого источника. Поэтому приведенный выше анализ объясняет еще и следующий экспериментально наблюдаемый факт: газовый пузырь, пульсирующий в воде вблизи от твердой стенки, притягивается к стенке, а пузырек, который пульсирует вблизи свободной поверхности, отталкивается от нее.

Переходим к новым задачам.

Парадокс при подводном взрыве. Пусть в воду частично погружен полый цилиндр с толстыми (в 20—30 *мм*) стенками и тонким (в 1—3 *мм*) дном из железа или меди (рис. 102, *а*). При фиксированной глубине погружения H на расстоянии h от дна цилиндра на его оси помещается заряд ВВ и производится подрыв. Для каждого h подбирается минимальный вес $F = F(h)$ заряда, при котором дно разрушается.

Естественно ожидать, что функция $F(h)$ строго возрастает, однако в многочисленных опытах наблюдался следующий парадоксальный факт: функция F строго возрастает, пока h не достигнет некоторого значения h_0, после этого на участке $h_0 \leqslant h \leqslant h_1$ (где h_1 в два-три раза больше h_0) она остается практически постоянной; при $h > h_1$ величина F снова возрастает (рис. 102, *б*). Изменяется и характер разрушения дна — при $h < h_0$ дно прорывается на большой площади, а при $h \gg h_0$ прорыв резко локализован.

Приведем качественное объяснение этого парадокса. Опыты показывают, что эффект подводного взрыва ВВ делится на две стадии. На первой стадии, сразу после подрыва, продукты взрыва образуют газовый пузырь. От него прежде всего отходит ударная волна, которая уносит около половины энергии взрыва, а затем происходит нарастание скоростей жидкости и диаметр газового пузыря быстро увеличивается.

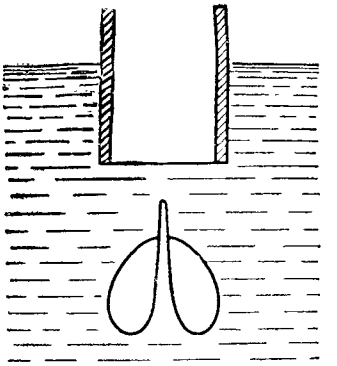


Рис. 103.

Если в конце этой стадии прорыва дна и выхода газов в атмосферу не произойдет, то наступает вторая стадия. Газовый пузырь под действием атмосферного давления начнет сжиматься[1]), удаляясь от дна цилиндра. Задачу о сжатии газового пузыря в воде мы рассматривали выше; следует только иметь в виду, что на практике форма его не сферическая, а грушевидная с расширением книзу. С течением времени пузырь сплющивается, образуя шапку с выемкой внизу, и потому схлопывание пузыря происходит на нижней его поверхности. Возникающий в момент схлопывания гидравлический удар приводит к струе, которая идет назад, к дну цилиндра (рис. 103). Эта струя имеет кумулятивный характер, энергия в ней сравнима с энергией пузыря на

[1]) Когда пузырь достигает максимального размера, давление в нем невелико.

первой стадии. При определенном весе F заряда струя пробивает небольшое отверстие в дне цилиндра [1]).

Для прорыва на первой стадии процесса характерно строгое возрастание функции $F(h)$, на второй стадии пробивная сила мало зависит от расстояния. Таким образом, качественную картину явления можно считать достаточно ясной, но сколько-нибудь полный количественный расчет пока еще не проведен.

Сферическая кумуляция. В предыдущей главе мы рассматривали движение кумулятивных струй как установившееся. Между тем большой интерес представляет также и процесс формирования струй, который является существенно неустановившимся.

Для простоты рассмотрим случай сферической кумуляции, где предполагается, что в начальный момент $t=0$ жидкость занимает нижнее полупространство с выемкой в форме полушара. Кроме того, считается, что при $t=0$ жидкость мгновенно становится тяжелой, а потенциальная функция φ и скорость частиц v на свободной поверхности равны нулю.

Задача сводится к отысканию функции $\varphi=\varphi(r, t)$, гармонической по пространственным координатам $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$ в переменной области D_t, равной 0 в бесконечности, а на границе D_t (свободной поверхности жидкости) удовлетворяющей условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}v^2+gz=0,$$

которое с учетом соотношения

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(\boldsymbol{V}, \nabla\varphi)=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v^2$$

можно переписать в виде

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{2}v^2-gz. \tag{13}$$

Приближенное решение этой задачи в плоском варианте можно получить методом электрогидродинамиче-

[1]) Не исключена также возможность прилипания газового пузыря к дну цилиндра, и тогда при его схлопывании запасенная энергия концентрируется в непосредственной близости дна. Этот вариант представляет собой разновидность второй стадии процесса.

ских аналогий (ЭГДА) при помощи электропроводящей бумаги. Для этого нужно записать разностный аналог условия (13); если обозначить через i индекс точки на свободной поверхности жидкости и через j — индекс шага по времени, то мы будем иметь

$$\varphi_{i,\,j+1} = \varphi_{i,\,j} + \frac{1}{2} v_{i,\,j}^2 \Delta t_j - g z_i \Delta t_j. \qquad (14)$$

В начальный момент $j = 0$ получаем распределение φ на известной свободной поверхности:

$$\varphi_{i,\,1} = -g z_i \Delta t_0.$$

Реализуя эти граничные условия на электропроводящей бумаге, мы сможем построить линии равного потенциала, а затем и линии тока для выбранных точек свободной поверхности. Далее можно найти скорости жидкости в этих точках, построить свободную поверхность в момент времени с индексом $j = 1$ и по (14) найти новое распределение потенциала на этой поверхности. Это распределение снова реализуется на электропроводящей бумаге и процесс продолжается.

На рис. 104 изображена последовательная картина формирования кумулятивной струи под действием силы тяжести для моментов времени

$0 - 0$ *сек*	$5 - 47 \cdot 10^{-3}$ *сек*
$1 - 28 \cdot 10^{-3}$ *сек*	$6 - 49 \cdot 10^{-3}$ *сек*
$2 - 38 \cdot 10^{-3}$ *сек*	$7 - 50 \cdot 10^{-3}$ *сек*
$3 - 43 \cdot 10^{-3}$ *сек*	$8 - 51 \cdot 10^{-3}$ *сек*
$4 - 45 \cdot 10^{-3}$ *сек*	$9 - 52 \cdot 10^{-3}$ *сек.*

Результаты получены В. Кедринским описанным выше методом.

На рис. 105 изображены кадры киносъемки повторения опыта Покровского (§ 29). Пробирка с водой, свободной поверхности которой придана сферическая форма при помощи стеклянного мениска (виден на первом кадре), бросается в вертикальном положении на стол. В момент удара жидкость мгновенно становится тяжелой, так что этот опыт можно рассматривать в связи

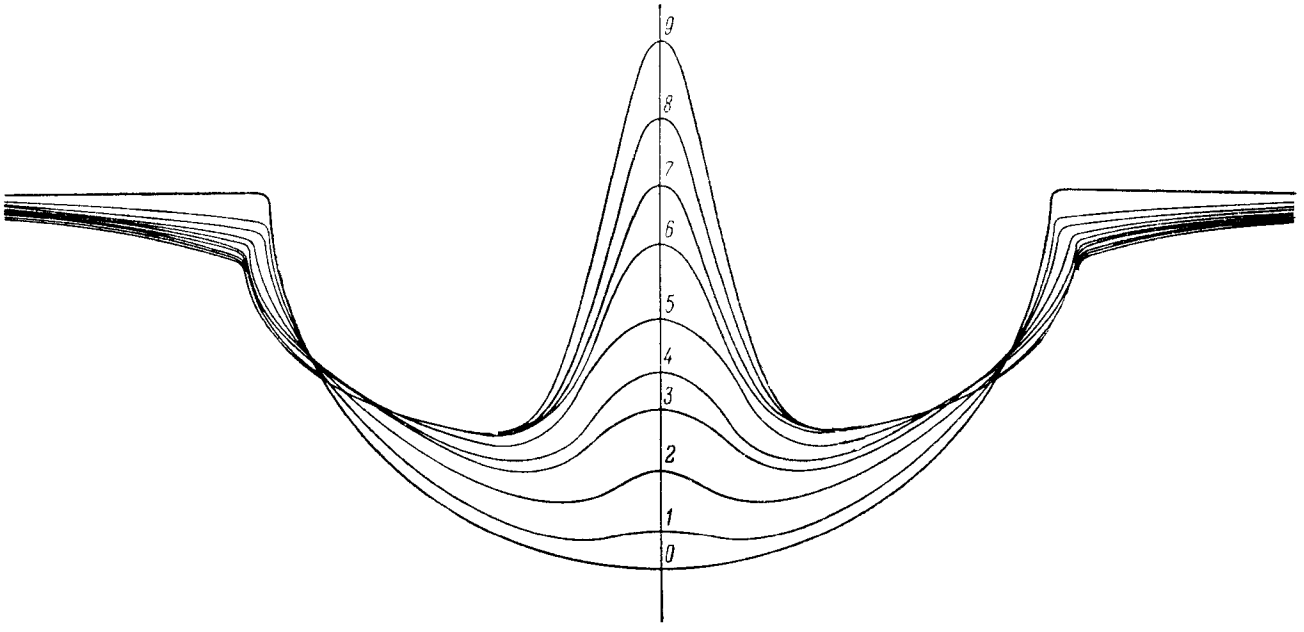


Рис. 104.

с указанными выше расчетами по сферической кумуляции. Под кадрами на рис. 105 указано время, прошедшее с момента удара.

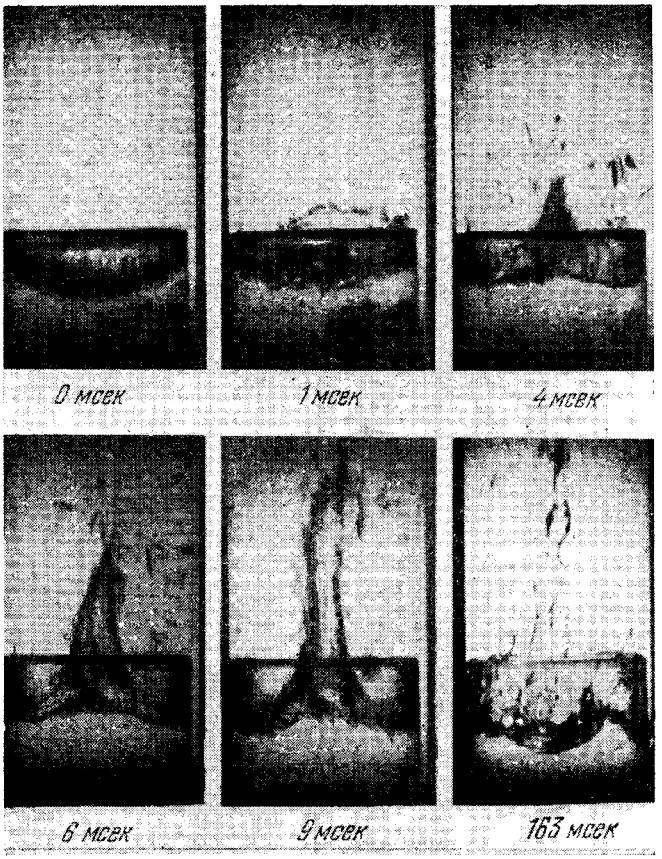


Рис. 105.

Проблема султана. При некоторых условиях в результате подводного взрыва наблюдается интересное явление, которое получило название «султан» — над свободной поверхностью на большую высоту в виде узкого конуса выбрасывается вода (рис. 106). Отмечено, что

это явление характерно для жидкой среды и не наблюдается при подземных взрывах.

Укажем на некоторые особенности подводного взрыва. В предыдущем разделе мы уже говорили о двух этапах развития такого взрыва. Первый, очень короткий, этап характеризуется созданием ударной волны, на что уходит около половины всей энергии взрыва. В рассматриваемой здесь задаче волна выходит на свободную поверхность и откалывает некоторую массу воды. Отколотая масса распадается на большое число мелких

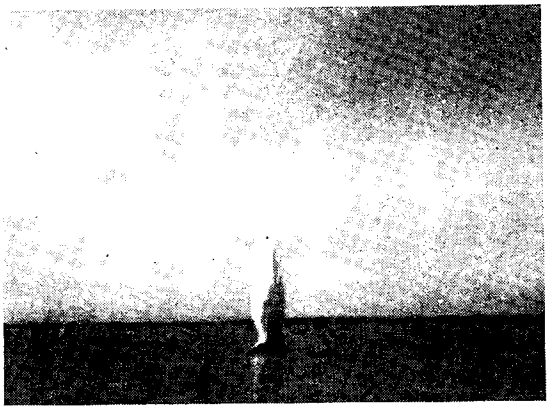


Рис 106

брызг, каждая с небольшой энергией, а на свободной поверхности образуется воронка в форме впадины.

Второй этап связан с эволюцией газового пузыря, образовавшегося при взрыве, который тоже несет около половины энергии. Эта эволюция, как мы говорили, приводит к схлопыванию и образованию струи, которая (при надлежащих условиях взрыва, т. е. глубине заряда и его весе) выходит на свободную поверхность в момент, когда там образовалась воронка. На этом этапе можно пользоваться моделью потенциального течения несжимаемой жидкости — мы приходим к задаче определения поля скоростей, ортогонального поверхности воронки (задача о сферической кумуляции, о которой только что говорилось). В результате из воронки вырывается ку-

мулятивная струя, которая и дает султан — всплеск с довольно большой энергией.

Очень похожее явление (но, конечно, со значительно меньшей энергией) наблюдается при выстреле в воду пулей в направлении, перпендикулярном свободной поверхности (рис. 107). Другое проявление того же эффекта можно наблюдать, когда на спокойную воду падает редкий прямой дождь — поверхность воды покрывается тогда небольшими фонтанчиками, которые поднимаются навстречу дождю.

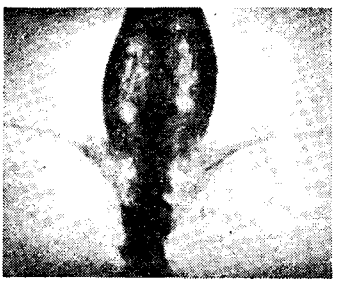


Рис. 107.

Качественное объяснение этих явлений ясно из рис. 108, где показаны три последовательные фазы входа в воду пули (или дождевой капли): сначала поверхность воды немного прогибается вниз (фаза *а*), затем падающее тело погружается в воду и за ним образуется полость (фаза *б*) и, наконец, кинетическая энергия тела идет на схлопывание полости. В результате этого схлопывания и возникает встречная струя, имеющая кумулятивный характер (фаза *в*).

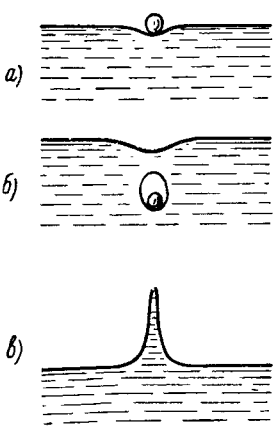


Рис. 108.

Это объяснение подтверждается модификацией опыта — если стрелять пулей в воду не перпендикулярно к поверхности, а под некоторым углом, то после выстрела образуется наклонный султан в направлении навстречу движению пули (рис. 109). Здесь прогиб поверхности воды в фазе *а* будет несимметричным, полость в фазе *б* будет двигаться в направлении полета пули, и кумулятивная струя в заключительной фазе пойдет не перпендикулярно к поверхности воды, а навстречу движению полости!

Взрыв в воздухе. Характерное отличие взрыва в воздухе от взрыва в воде состоит в том, что здесь основная часть энергии переходит в ударную волну. Исследования по распространению ударных волн в воздухе приобретают основное значение. До сих пор при проведении больших взрывных работ инженеры сталкиваются с непонятными явлениями — иногда действие ударной волны оказывается во много раз больше, а иногда во много раз меньше, чем то, которое было вычислено по хорошо проверенным формулам. Как правило, такие отклонения вызываются аномалиями в атмосфере, ибо как скорость акустической, так и скорость ударной волны зависит от состояния атмосферы (плотность, температура, влажность). Неоднородность атмосферы меняет фронт ударной волны — она может уйти вверх, а может и прижаться к земле. Как в воде, в воздухе могут создаваться своеобразные «волноводы», когда в некотором направлении затухание волн оказывается существенно меньше обычного (об этом явлении мы будем говорить ниже, в § 34).



Рис. 109.

Около 20-ти лет назад среди гидродинамиков возникли острые споры по следующему вопросу. Пусть сферический заряд ВВ без оболочки в момент взрыва (в воздухе) имеет скорость V такую, что кинетическая энергия $\frac{mV^2}{2}$ соизмерима с потенциальной энергией E заряда или существенно больше ее; спрашивается, как скорость изменит эффект взрыва?

В споре были высказаны две крайние точки зрения: по одной скорость заряда в момент взрыва практически не должна влиять на эффект, параметры ударной волны могут измениться лишь на несколько процентов. По мнению других, скорость может увеличить эффект взрыва примерно в десять раз.

Решение этого спора оказалось довольно простым. Надо расчленить явление на два этапа — выделение энергии взрыва и формирование ударной волны. На первом этапе, в соответствии с точкой зрения одной из спорящих групп, скорость заряда практического влияния не оказывает, вся потенциальная энергия ВВ переходит в кинетическую энергию разлетающихся частиц продуктов взрыва. На втором этапе необходимо рассмотреть газовое облако, скорости частиц которого составлены из радиальной скорости (от центра заряда) и из поступательной скорости самого заряда.

Подсчеты и опыты показали, что эффект движущегося заряда (на достаточно большом расстоянии от места взрыва) эквивалентен эффекту неподвижного заряда с потенциальной энергией, равной сумме $E+\frac{mV^2}{2}$ потенциальной энергии ВВ и кинетической энергии заряда в момент взрыва. При этом нужно еще считать, что приведенный центр взрыва отнесен от фактического центра взрыва в направлении движения заряда на расстояние, определяемое кинетической энергией $\frac{mV^2}{2}$ и потенциальной энергией E.

§ 32. Пробивание при космических скоростях

В предыдущей главе мы довольно подробно рассмотрели явление пробивания брони кумулятивными струями, которые имеют скорости порядка 4—10 *км/сек* и примерно в 10 раз больше артиллерийских. Гораздо менее изучена проблема пробивания при скоростях 50—100 *км/сек*. Трудности экспериментов при таких скоростях [1]) заставляют особенно четко формулировать гипотезы, лежащие в основе объяснения и расчета явлений.

Здесь будет рассмотрена модель несжимаемой среды, которая отражает существенные стороны процесса пробивания при очень больших скоростях и, с другой стороны, позволяет провести расчеты с достаточной полнотой [4].

---

[1]) Сейчас в обычных условиях достигнута скорость метания 16 *км/сек* при диаметре шарика в 0,5 *мм*.

Одномерный случай. Здесь предлагаемая схема особенно проста. Рассмотрим удар пластинки толщиной a, которая летит со скоростью V_0, о торец стержня длиной l. Толщину a будем считать малой в сравнении с l и для простоты письма предположим, что площадь поперечного сечения стержня, площадь пластинки, а также плотности пластинки и стержня равны 1. Задача состоит в определении импульса, который получит стержень в результате удара.

Пластинку-боек мы будем считать несжимаемой, абсолютно твердой, а тело представим как предельный

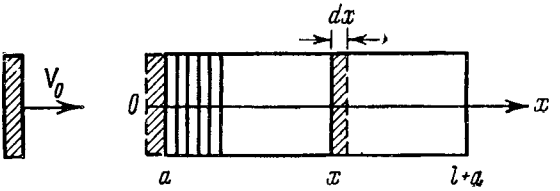


Рис. 110.

случай стопки сложенных тонких и также абсолютно твердых пластинок, когда толщина пластинок стремится к нулю, а их число неограниченно возрастает так, что общая сумма толщин остается равной l (рис. 110).

При ударе (который мы считаем неупругим) бойка о первую пластинку сохранится количество движения и вследствие увеличения массы произойдет потеря кинетической энергии, то же самое будет происходить при вовлечении в движение каждой следующей пластинки. Произведем подсчет потери кинетической энергии системы вдоль стержня в предельном случае.

Пусть в рассматриваемый момент вовлечен в движение участок стержня длины x и пусть V — скорость стержня в этот момент. Когда в движение вовлекается следующий участок стержня толщиной dx, то скорость изменится на величину dV, которая по закону сохранения количества движения удовлетворяет соотношению

$$x\,dV + V\,dx = 0.$$

Решая это дифференциальное уравнение при очевидном начальном условии $V|_{x=a} = V_0$, найдем распределение

скоростей вдоль стержня

$$V = V_0 \frac{a}{x}. \tag{1}$$

Зная скорости, мы можем получить распределение энергии

$$E = \frac{xV^2}{2} = \frac{V_0^2}{2}\frac{a^2}{x} = E_0 \frac{a}{x}, \tag{2}$$

где $E_0 = \frac{aV_0^2}{2}$ — начальная энергия бойка. Предположим, что при ударе вся потерянная энергия переходит в тепловую, тогда плотность распределения тепла вдоль стержня будет выражаться так:

$$T = -\frac{dE}{dx} = E_0 \frac{a}{x^2}. \tag{3}$$

Обозначим через $T_{кр}$ минимальную плотность тепла, при которой вещество стержня переходит в газ. Тогда описанный выше процесс передачи энергии будет происходить лишь до тех пор, пока x не достигнет величины

$$x_{кр} = \sqrt{\frac{aE_0}{T_{кр}}}. \tag{4}$$

В этот момент участок стержня $0 < x < x_{кр}$ превратится в газ. Образовавшийся газ, расширяясь, отделяется от оставшейся части стержня, а эта оставшаяся часть получает некоторый импульс I.

Займемся подсчетом величины I, причем для простоты ограничимся наиболее интересным случаем, когда $a \ll x_{кр}$ и $x_{кр} \ll l$. В этом случае количество энергии, уходящей на превращение куска стержня в газ, мало сравнительно с начальной энергией бойка E_0 и можно считать, что вся энергия газа перейдет в его кинетическую энергию. В этом предположении скорость v газового облака находится из равенства $x_{кр}v^2 = aV_0^2$:

$$v = \sqrt{\frac{a}{x_{кр}}} V_0. \tag{5}$$

Теперь задача свелась к чисто газодинамической задаче. Ограничимся лишь самыми грубыми подсчетами в двух крайних случаях при следующих дополнительных предположениях.

а) Пусть при разлете газового облака все его частицы получают одинаковую скорость. Эта скорость тогда должна определяться из (5) и для импульса мы получим выражение

$$I = x_{\text{кр}} v = a^{3/4}\left(\frac{E_0}{T_{\text{кр}}}\right)^{1/4} V_0 = aV_0\left(\frac{V_0^2}{2T_{\text{кр}}}\right)^{1/4}. \qquad (6)$$

б) Пусть каждый слой dx газового цилиндра разлетается в направлении оси x независимо от других слоев. Тогда по формуле (3) импульс слоя на расстоянии x от торца цилиндра

$$V\,dx = \sqrt{2T}\,dx = \sqrt{2E_0 a}\,\frac{dx}{x},$$

а суммарный импульс

$$I = \int_a^{x_{\text{кр}}} V\,dx = \sqrt{2E_0 a}\,\log\frac{x_{\text{кр}}}{a} = aV_0\log\frac{V_0}{\sqrt{2T_{\text{кр}}}}. \qquad (7)$$

Пространственный случай. Имея в виду, например, образование кратеров при падении метеоритов на небесные тела, рассмотрим некоторую модификацию разобранной выше схемы. Именно, предположим, что летящее тело представляет собой шарик и что оно ударяется о полусферическую выемку радиуса R.

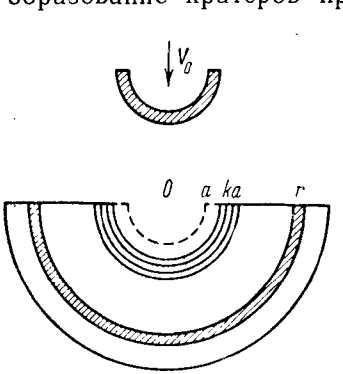


Рис. 111.

Для упрощения расчетов придется еще более схематизировать модель. Мы будем считать, что задача сводится к удару тонкого полусферического слоя о толстый, который по аналогии с одномерным случаем будем представлять как набор тонких полусферических слоев, расположенных бесконечно близко друг к другу (рис. 111). Предположим, что во всех слоях скорости направлены по радиусам и что распределение скоростей происходит по схеме идеальной несжимаемой жидкости: в точке, удаленной от центра

слоя на расстояние r, скорость

$$V = V_0\left(\frac{a}{r}\right)^2, \tag{8}$$

где a — радиус внутренней выемки слоя-бойка и V_0 — скорость этой выемки в момент соударения.

По аналогии с одномерным случаем будем считать, что в результате удара бойка в начальный период будет происходить наращивание его массы по схеме неупругих ударов, а кинетическая энергия системы переходить в тепло. Произведем расчеты, относящиеся к этому периоду, по-прежнему предполагая, что плотности бойка и среды, о которую он ударяется, равны 1.

Пусть ka $(k > 1)$ будет внешний радиус поверхности бойка. Через $U(r)$ мы обозначим скорость внутренней поверхности бойка в момент, когда эффект удара дойдет до полусферы радиуса r; очевидно, имеем

$$U(ka) = V_0. \tag{9}$$

В силу принятого предположения о распределении скоростей, в этот момент скорость в точках, расположенных на расстоянии x от центра, будет равна

$$V = U(r)\left(\frac{a}{x}\right)^2. \tag{10}$$

При изменении r на величину dr скорость поверхности бойка изменится на величину dU, причем в силу закона сохранения количества движения

$$(r - a)\,dU + U\,dr = 0.$$

Решая это дифференциальное уравнение при начальном условии (9), найдем

$$U(r) = \frac{(k-1)\,a}{r-a}V_0. \tag{11}$$

Формула (10) дает теперь распределение скоростей в полусферических слоях в рассматриваемый момент, и мы можем найти кинетическую энергию части слоя, по которой уже прошел удар:

$$E = \frac{1}{2}\int_a^r 2\pi x^2 U^2(r)\left(\frac{a}{x}\right)^4 dx = \pi U^2(r)\,a^3\left(1 - \frac{a}{r}\right). \tag{12}$$

Отсюда с учетом (11) легко находится плотность распределения тепла в слое:

$$T = -\frac{1}{2\pi r^2}\frac{dE}{dr} = a^5 V_0^2 \frac{(k-1)^2}{r^3 (r-a)^2}\left(1 - \frac{a}{2r}\right),$$

или, если ввести начальную энергию бойка $E_0 = E(kr) = \frac{\pi}{k} V_0^2 a^3 (k-1)$,

$$T = \frac{k(k-1)}{\pi r^3 (r-a)^2}\left(1 - \frac{a}{2r}\right) a^2 E_0 \approx \frac{k(k-1)}{\pi r^5} a^2 E_0. \quad (13)$$

Как и в одномерном случае, предположим, что в момент, когда тепло на единицу объема достигает величины $T = T_{кр}$, часть слоя, по которой удар уже прошел, мгновенно превращается в газ. В среде, о которую ударился шарик, в этот момент образуется газовая полость радиуса $r_{кр}$, где

$$r_{кр}^5 = \frac{k(k-1)}{\pi T_{кр}} a^2 E_0. \quad (14)$$

Эта формула дает нижнюю границу радиуса воронки, которая образуется при ударе.

Для упрощения расчетов на втором периоде по-прежнему будем считать, что $a \ll r_{кр}$ и $r_{кр} \ll R$, и допустим, что на превращение в газ указанной выше части среды затрачивается лишь небольшая часть энергии бойка. Далее предположим, что скорости всех частиц газового облака, образовавшегося в воронке, одинаковы. Величина этой скорости определяется из равенства $\frac{1}{3}\pi r_{кр}^3 v^2 = E_0$, откуда

$$v = \sqrt{\frac{3E_0}{\pi r_{кр}^3}}. \quad (15)$$

Теперь легко вычисляется импульс, который получает тело при ударе о него шарика:

$$I = \frac{2}{3}\pi r_{кр}^3 v = A a^{3/5} E_0^{4/5}, \quad (16)$$

где $A^2 = \frac{4}{3}\pi^{2/5}\left(\frac{k(k-1)}{T_{кр}}\right)^{3/5}$. Интересно отметить, что в принятой схеме импульс оказался зависящим от размеров ударяющего шарика.

Можно провести расчет и в другом крайнем случае, когда каждый элемент dr сферического слоя газа разлетается независимо от других элементов и сообщаемый им импульс направлен по нормали к сферической выемке (см. работу [4]).

Обобщение метода. Наиболее существенным пунктом описанного выше метода решения задачи о пробивании при космических скоростях является использование двух различных моделей среды: до тех пор, пока тепловая энергия процесса меньше некоторой критической величины, среда считается твердой и применяется схема неупругого удара; по достижении этой критической величины среда считается газом. Такое комбинирование различных моделей, выбираемых в соответствии с физическими условиями, может привести к решающему успеху и в других задачах.

Рассмотрим, например, задачи, связанные с воздействием на металлы или пластические среды (такие, как плотная глина) в малые промежутки времени импульсов большой величины. Здесь можно применять следующий метод, который является обобщением описанного в предыдущих пунктах. В качестве начального распределения скоростей деформации среды принимается то распределение, которое имело бы место, если среда являлась бы идеальной жидкостью. Дальнейший расчет ведется в предположении, что области среды, где скорости деформации не превосходят некоторой фиксированной заранее (в зависимости от вязкости) постоянной c, рассматриваются как твердые тела.

Мы получаем такую схему расчетов. Выбирается отрезок времени Δt и по законам неустановившегося движения идеальной жидкости определяется изменение начального поля скоростей за этот отрезок. В полученном поле скоростей «замораживаются» (т. е. считаются твердыми телами) те зоны, где скорость деформации оказывается меньшей c; остальная часть среды считается идеальной жидкостью и в следующий отрезок времени. Счет ведется до тех пор, пока не окажется замороженной вся среда.

Этим методом хорошее совпадение с опытными данными можно получить, например, 1) в задаче о крешере: дан свинцовый цилиндр, стоящий на твердой

основе; на верхнем его конце подрывается заряд ВВ и требуется выяснить, во что превратится цилиндр после взрыва; 2) в задаче о форме полости, полученной при взрыве заряда эллипсоидальной формы в неограниченном массиве глины.

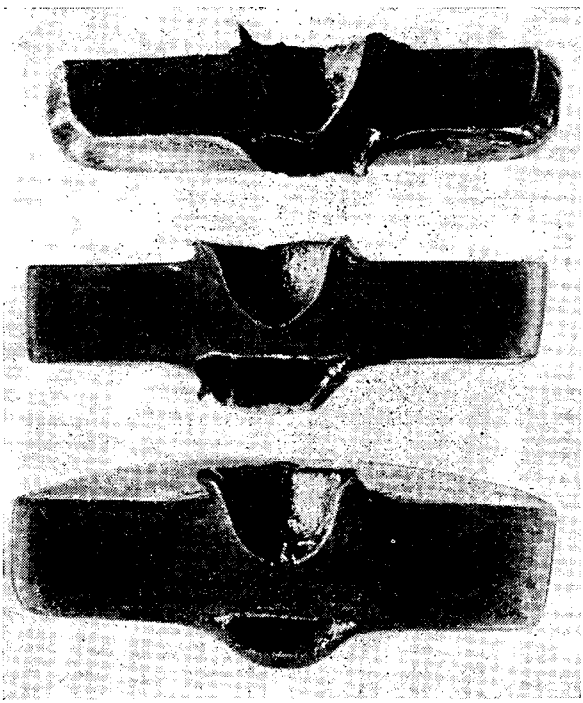


Рис. 112

В Институте гидродинамики Сибирского отделения АН СССР проведен ряд экспериментов, моделирующих падение метеоритов на небесные тела. Производились удары стальной частицей диаметром 1,7 *мм* по пластинкам из дунита [1]) различной толщины при скоростях

[1]) Дунит — горная порода, которая образуется в глубинах земной коры при остывании магмы.

удара v_0 от 5 до 10,5 *км/сек*. Кратеры, образующиеся в результате удара, имеют диаметры в 7—8 раз больше диаметра частицы-ударника. При скоростях

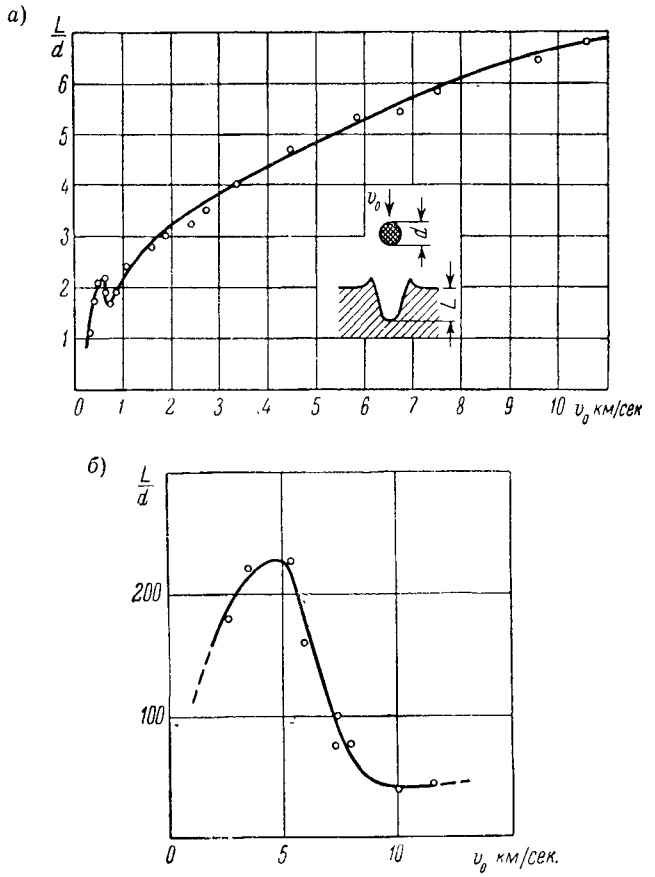


Рис. 113.

$v_0 \approx 5—8$ *км/сек* на поверхности кратера остается несколько процентов вещества ударника, с ростом v_0 это количество уменьшается.

На рис. 112 показаны фотографии среза пластинок из дунита различной толщины после удара. На них хорошо виден эффект действия ударной волны, прошедшей

впереди частицы, — наличие этой волны и учитывают описанные выше схемы.

На рис. 113, *а* приведен график зависимости отношения глубины пробития L к диаметру частицы-ударника d от скорости удара v_0 для удара стального шара по свинцовой пластинке. В начальном диапазоне скоростей имеется характерный участок немонотонности. Такой же участок немонотонности наблюдался и при ударе стального шара по пластинке из легкого пористого материала — пенопласта с плотностью 0,11 $г/см^3$ (рис. 113, *б*). Было бы интересно найти объяснение этого явления.

§ 33. Загадки движения рыб

Много десятков лет назад было обнаружено несоответствие между скоростью движения некоторых видов рыб и их энергетическим потенциалом. Для объяснения этого несоответствия были выделены следующие три фактора: 1) рыбы, способные развивать большую скорость, выделяют смазку — жидкость с особыми свойствами, которая в несколько раз снижает сопротивление; 2) форма тела этих рыб оптимальна; 3) рыбы пользуются особыми способами создания тяговой силы.

Проблемам смазки посвящено много работ, как экспериментальных, так и теоретических. Получены полимерные смазки, введение которых даже в ничтожных количествах в несколько раз снижает сопротивление малых судов. Объяснение этого эффекта находят в том, что длинные молекулы полимеров, из которых состоит смазка, гасят пристеночные пульсации возникающей турбулентности и увеличивают толщину пристеночного слоя, в котором происходит резкое изменение скорости. Это приводит к падению градиента скорости, что влечет за собой падение напряжения трения на обтекаемой поверхности. Не меньшее количество работ посвящено и проблеме определения формы тел с наименьшим сопротивлением при движении в жидкости. Существенно меньше работ посвящено принципам создания тяговой силы.

Наиболее простым способом создания тяговой силы считается принцип машущего крыла: в жидкость погру-

жается пластинка, которая совершает колебательные движения относительно некоторой оси. Этот принцип применяется, например, во Франции, в Бретани, где поступательное движение рыбацким лодкам сообщают колебательным движением весла, прикрепленного шарнирно к корме. На нем основаны также некоторые игрушки. Однако двигатели, основанные на принципе машущего крыла, имеют очень малый коэффициент полезного действия.

В последние годы появился ряд работ, в которых рассматриваются другие предположения о тяговой силе рыб. Например, в ряде опытов установлено, что дельфин движется, создавая на своей коже поверхностные волны в направлении от головы к хвосту. Но и этот способ движения является недостаточно эффективным.

Здесь будет рассмотрен еще один способ движения (см. работу М. А. Лаврентьева и М. М. Лаврентьева [5]), который основан на следующем наблюдении — ужи и многие виды рыб движутся, производя непрерывные волнообразные движения вдоль линии своего хребта.

Качественная картина движения. Пусть имеется жесткий канал с круговыми сечениями постоянного радиуса и с осевой линией, которая представляет собой плоскую волнистую кривую (например, синусоиду). Представим себе, что в этот канал посажен уж, круговые сечения которого совпадают с сечениями канала, и допустим, что трения между телом ужа и стенками канала нет. Сможет ли в этих условиях уж прийти в движение из состояния покоя и достичь значительной скорости, если длина канала достаточно велика?

Оказывается, сможет, если будет мускульными усилиями напрягать различные участки своего тела таким образом, чтобы выпрямлять тело или делать его более изогнутым. Например, чтобы двигаться слева направо, уж должен делать такие усилия: если вправо от некоторого участка его тела кривизна канала убывает, то уж должен выпрямлять этот участок, если же кривизна канала возрастает, то уж должен направлять усилия на увеличение кривизны этого участка. Короче говоря, уж должен создавать распределение кривизн своего тела,

которое соответствует его новому, продвинутому в желаемом направлении, положению в канале.

Качественное объяснение такого способа движения получить совсем нетрудно. В самом деле, если при новом распределении кривизн своего тела уж продвинется так, что это распределение будет ближе к распределению кривизн канала, то потенциальная энергия напряжения уменьшится, а так как трения нет, то вся высвободившаяся энергия перейдет в кинетическую энергию поступательного движения.

Но откуда же взять ужу в реальных условиях канал? Ответ на этот вопрос также прост: канал в воде он создает передней частью своего тела, вблизи головы, а средней и задней частью совершает изгибные движения, которые и порождают тяговую силу. При этом используется инерционность воды, в силу которой в окрестности головы ужа примыкающие слои воды действуют на остальную часть тела как стенки канала.

Наблюдения показывают, что ужи или рыбы, которые способны создавать вдоль своего тела наперед заданные напряжения, передвигаются в воде с очень большой скоростью. Коэффициент полезного действия при этом оказывается тем выше, чем больше отношение присоединенной массы воды к собственной массе рыбы. У плоских рыб коэффициент полезного действия, очевидно, выше, чем у круглых, но при одинаковой массе у плоских рыб больше поверхность, а значит, больше и сопротивление трения. Таким образом, при заданном коэффициенте трения нужно иметь наиболее оптимальную форму тела. Но это уже другой вопрос, и его мы здесь не касаемся. Перейдем к расчетам.

Движение в твердом канале. Предположим, что в плоскости $z = x + iy$ в момент времени t уж занимает положение отрезка кривой

$$z = z(s, t), \qquad 0 \leqslant s \leqslant l, \tag{1}$$

где за параметр s принята длина участка тела ужа, отсчитываемая, скажем, от хвоста (длина ужа l считается постоянной). Пусть уж перемещается вдоль фиксированной кривой Γ (канала), которая задается уравнением

$$z = Z(\sigma), \qquad -\infty < \sigma < \infty, \tag{2}$$

где Z — известная комплексная функция действительного аргумента σ, длины дуги Γ, отсчитываемой от какой-либо ее точки (рис. 114).

Движение ужа вполне определяется функцией $\sigma = \sigma(t)$, которая задает положение его хвоста в момент времени t; в самом деле, мы имеем

$$z(s, t) = Z[s + \sigma(t)]. \tag{3}$$



Рис. 114.

Ускорение ужа (точнее, касательная составляющая ускорения вдоль Γ) равно, очевидно, $\sigma''(t)$, следовательно, уравнение его движения в канале можно записать в виде

$$m\sigma''(t) = F_e(t) + F_i(t), \tag{4}$$

где m — масса ужа, а F_e и F_i — соответственно внешние и внутренние силы, на него действующие. Суммарная внешняя сила F_e определяется трением ужа о стенки канала, и сначала мы предположим, что она равна нулю.

В соответствии с тем, что говорилось в предыдущем разделе, естественно считать, что внутренние силы, которые определяются мышечными усилиями ужа, пропорциональны производной кривизны линии Γ в рассматриваемой точке. Поэтому мы предположим, что суммарная внутренняя сила

$$F_i(t) = \int_0^l \varphi(s, t) K'[s + \sigma(t)]\, ds, \tag{5}$$

где коэффициент пропорциональности φ — функция, которую должен выбирать уж. Так как у нас $F_e = 0$, то F_i согласно уравнению (4) и есть тяговая сила ужа.

Усилие, которое совершает уж на том или ином участке тела, определяется функцией φ. Поэтому суммарное его усилие, затрачиваемое на создание тяговой силы:

$$J(t) = \int_0^l f[\varphi(s, t)]\, ds, \tag{6}$$

где f — неотрицательная возрастающая функция, которая определяет зависимость изгибающего усилия от напряжения мышц ужа.

Желая экономно расходовать силы, уж должен решить следующую экстремальную задачу: он должен задаться своим суммарным усилием $J(t) = J_0$ и подобрать функцию φ так, чтобы величина тяговой силы $F_i(t)$ была наибольшей. Эта задача под силу всякому ужу, который знаком с элементами вариационного исчисления — задача на экстремум функционала (5) при условии $J(t) = J_0$.

Как и обычные задачи на условный экстремум, она решается методом множителей Лагранжа, т. е. сводится к отысканию обычного экстремума функционала

$$F_i(t) - \lambda(t) J(t) = \int_0^l \{\varphi(s, t) K'[s + \sigma(t)] - \lambda(t) f[\varphi(s, t)]\} ds. \quad (7)$$

Теперь экстремальная функция должна удовлетворять соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(\varphi K' - \lambda f) = K'[s + \sigma(t)] - \lambda(t) f'[\varphi(s, t)] = 0, \qquad \int_0^l f[\varphi(s, t)] ds = J_0. \quad (8)$$

Из первого уравнения этой системы мы находим

$$\varphi(s, t) = g\left(\frac{K'[s + \sigma(t)]}{\lambda(t)}\right), \quad (9)$$

где g — функция, обратная к известной функции f' [1]), и тогда подстановка во второе уравнение при заданном усилии J_0 позволит подобрать функцию λ. Усилия ужа найдены, и для отыскания его закона движения остается решить обыкновенное дифференциальное уравнение (4).

Покажем теперь, как можно учесть трение. Мы предположим, что функция $Z(\sigma)$ является периодической,

[1]) Для существования обратной к функции f' нужно предположить, что f не только возрастает, но и выпукла — мы делаем это предположение.

с периодом l и что внешняя сила F_e зависит лишь от скорости движения: $F_e(t) = -k(\sigma'(t))\,l$, где k — известная функция. Если потребовать, чтобы уж двигался с заданной постоянной скоростью $\sigma' = V$, то из уравнения (4) мы получим, что должно выполняться равенство $F_e + F_i = 0$, причем обе эти величины постоянны. Учитывая найденное выражение функции (9), в котором теперь можно положить $t = 0$ и $\sigma(0) = 0$, мы получим из (5) и (6) соотношения

$$J = \int_0^l f\left[g\left(\frac{K'(s)}{\lambda}\right)\right] ds, \quad k(V)\,l = \int_0^l g\left(\frac{K'(s)}{\lambda}\right) K'(s)\,ds. \quad (10)$$

Из них можно найти суммарное усилие J, которое должен затратить уж, чтобы двигаться с заданной скоростью V.

Движение в воде. По-прежнему будем считать, что уж двигается в плоскости, которую примем за плоскость (x, y). Пусть в системе координат, движущейся вместе с центром тяжести ужа, его ось симметрии задается уравнением

$$y = y(x, t), \quad (11)$$

а его сечение каждой плоскостью $x = x_0$, $a \leqslant x_0 \leqslant b$, представляет собой круг радиуса r (рис. 115).

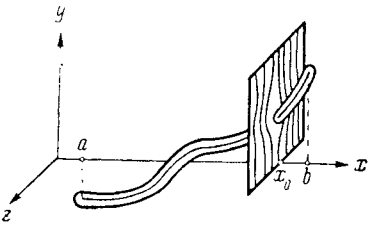


Рис. 115.

Считая движение безвихревым, по теореме о количестве движения можно написать

$$m\boldsymbol{V} = \rho \int_D \operatorname{grad} \varphi\, dv,$$

где m — масса ужа, $\boldsymbol{V}$ — скорость его центра тяжести, ρ — плотность жидкости, D — занимаемая ужом область, dv — элемент объема. По формуле Стокса

$$m\boldsymbol{V} = \rho \int_S \varphi \boldsymbol{n}\, dS, \quad (12)$$

где S — поверхность тела ужа, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к ней, dS — элемент поверхности.

Вычислим компоненту n_x вектора нормали; обозначая через α угол между этим вектором и осью y, а через β — угол между касательной и кривой (11) и осью x $\left(\operatorname{tg}\beta = \frac{\partial y}{\partial x}\right)$, будем, очевидно, иметь

$$n_x = -\cos\alpha \sin\beta \approx -\frac{\partial y}{\partial x}\cos\alpha,$$

если наклон $\frac{\partial y}{\partial x}$ невелик (что мы и предположим). Так как $dS = r\,d\alpha\,dx$, то из (12) получается, следовательно, что

$$mV_x = -\rho r \int\int_S \varphi \cos\alpha \frac{\partial y}{\partial x}\,d\alpha\,dx. \tag{13}$$

Предположим, что в каждом сечении $x = x_0$, $a < x_0 < b$, рассматриваемый поток мало отличается от потока, обтекающего цилиндр радиуса r, который движется вдоль оси y со скоростью

$$U = \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial x} V_x \tag{14}$$

(см. рис. 115). Тогда на поверхности S значение потенциала можно приближенно считать равным

$$\varphi = -Ur\cos\alpha$$

(см. § 23). Подставляя это значение в (13), получим

$$mV_x = \rho r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\alpha\,d\alpha \int_a^b U \frac{\partial y}{\partial x}\,dx = \pi\rho r^2 \int_a^b U \frac{\partial y}{\partial x}\,dx. \tag{15}$$

Далее предположим, что движение ужа имеет характер бегущей волны, т. е. что уравнение (11) представляется в виде

$$y = f[x + \sigma(t)]. \tag{16}$$

Тогда из (14) мы найдем $U = f'[x + \sigma(t)][\sigma'(t) - V_x]$ и после подстановки в (15) будем иметь

$$mV_x = \pi\rho r^2 [\sigma'(t) - V_x] \int_a^b \{f'[x + \sigma(t)]\}^2\,dx.$$

Введем еще обозначение

$$\mu = \pi\rho r^2 \int_a^b \{f'[x + \sigma(t)]\}^2 dx, \tag{17}$$

тогда для V_x будем иметь

$$V_x = \frac{\mu\sigma'(t)}{m + \mu}. \tag{18}$$

Величина μ называется *присоединенной массой* жидкости. Скорость центра тяжести ужа $V_x < \sigma'(t)$, а при движении в твердом канале $V_x = \sigma'(t)$. При движении ужа в канале вся полезная работа его мышц идет на создание поступательного движения тела и работу против сил трения, а при движении в жидкости некоторая часть мышечной работы идет на сообщение кинетической энергии частицам жидкости. Таким образом, коэффициент полезного действия при движении ужа в твердом канале больше, чем при движении в жидкости. В рассмотренной здесь приближенной схеме движения этот коэффициент нетрудно подсчитать, см. Е. Н. Шер [6].

§ 34. Распространение волн и проблема цунами

В заключение этой главы мы рассмотрим некоторые вопросы теории неустановившихся волновых движений жидкости. Из широкого круга таких вопросов мы выберем лишь два: 1) эффект волновода — качественно новое явление, возникающее при неровном дне; 2) проблема краткосрочного прогноза цунами на основе сейсмической информации.

Цунами — японский термин, означающий необычно большую волну. Волны цунами возникают от внезапных перемещений обширных участков дна океана во время подводных землетрясений. Они, как правило, составляют группу из двух-трех волн, которые в открытом море являются очень длинными (длина 100 *км*) и пологими (высота 1 *м*), поэтому не опасны. Но при подходе к берегу их высота возрастает за счет уменьшения длины и может достигать 30 *м* (по словам очевидцев). Проникая в глубь прибрежной территории, они вызывают большие разрушения и человеческие жертвы. Например,

волной цунами в ночь с 4 на 5 ноября 1952 г., которая возникла в результате землетрясения вблизи берегов Камчатки, был полностью смыт город Северо-Курильск [7]. Надо заметить, что такие разрушительные цунами — явление редкое, бывают один-два раза в 100 лет.

Анализируя данные наблюдений цунами, можно заметить, что высота волны на побережье (при одинаковых условиях выхода на берег) не уменьшается монотонно с удалением от эпицентра землетрясения. Для объяснения этого явления можно указать две причины — начальную направленность волны, обусловленную начальными условиями, и влияние рельефа дна в процессе распространения волны. Рассмотрим подробнее вторую причину.

Влияние рельефа дна. В гл. I мы видели, что в рамках линейной теории мелкой воды распространение волн описывается акустическим уравнением

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - g\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right\}=0, \qquad (1)$$

где $h = h(x, y)$ — глубина бассейна (см. (35) § 2). Скорость распространения волн в этой теории, следовательно, равна $\sqrt{gh(x, y)}$, и над неровным дном скорость над подводными возвышениями оказывается меньшей, чем на глубоких участках. Это приводит к деформации волн, которая сопровождается концентрацией энергии на мелководных участках бассейна.

Из акустики известно, что если скорость звука имеет минимум на какой-либо прямой или плоскости M, то от источника возмущений вдоль M излучается группа медленно затухающих волн, энергия которых локализована в окрестности M. Линия (поверхность) минимума скорости звука служит, следовательно, своего рода волноводом для звуковых волн.

В 1957 г. М. А. Лаврентьев высказал гипотезу, что неровности дна типа подводных гребней также должны служить волноводами поверхностных волн, и поставил задачу об изучении этого явления в рамках более точных теорий. Вскоре, в 1959 г., Сунь Цао [8] обнаружил экспериментально почти стационарное распространение уединенной волны над подводным гребнем — над гребнем амплитуда волны была больше,

чем в других местах. В 1965 г. Р. М. Гарипов [9] в рамках линейной теории доказал, что неровность дна типа подводного хребта:

$$h = h(x), \quad h(-\infty) = h(\infty) > \min h(x) > 0, \tag{2}$$

где h достаточно быстро стремится к своему пределу при $x \to \pm\infty$, действительно является волноводом поверхностных волн.

Напомним, что в линейной теории амплитуда волны $\zeta(x, y, t)$ и скорость жидкости $\operatorname{grad}\Phi(x, y, z, t)$ считаются малыми. Это позволяет снести граничные условия со свободной поверхности жидкости на плоскость ее равновесия $z = 0$ и считать, что потенциал скоростей Φ как функция пространственных переменных определен в фиксированной области $D = \{-h(x, y) < z < 0\}$. Условие несжимаемости приводит к тому, что функция Φ должна быть гармонической в области D для любого момента времени t

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{3}$$

На дне, при $z = -h(x, y)$, должно выполняться условие непроницаемости

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \tag{4}$$

а на свободной поверхности $\zeta = \zeta(x, y, t)$ — два условия: постоянства давления, которое в силу интеграла Коши—Лагранжа (30) § 1 имеет вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\operatorname{grad}\Phi|^2 + g\zeta = 0, \tag{5_1}$$

и условие непроницаемости

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0. \tag{5_2}$$

В пределах принятой точности последние условия можно снести со свободной поверхности $z = \zeta(x, y, t)$ жидкости на плоскость ее равновесия $z = 0$ и отбросить в них нелинейные члены. Тогда эти условия примут вид: при $z = 0$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + g\zeta = 0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

Кроме того, должны выполняться начальные условия: при $t = 0$

$$\Phi = \Phi_0(x, y, z), \quad \zeta = \zeta_0(x, y), \tag{6}$$

где Φ_0 — гармоническая в области D функция. Задачу отыскания функций Φ и ζ, удовлетворяющих уравнению (3) и условиям (4), (5), (6), мы будем называть *задачей* (L).

Задачу (L) можно сформулировать и иначе. Для этого заметим, что гармоническая функция Φ в любой момент времени t однозначно определяется своими значениями $\Phi|_{z=0} = \varphi(x, y, t)$ на плоскости $z = 0$ и условием (4) непроницаемости дна (смешанная граничная задача, см. Л. и Ш., стр. 259), поэтому определен оператор K: $\varphi \to \left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=0}$, сопоставляющий каждой функции $\varphi = \Phi|_{z=0}$ значение нормальной производной соответствующей гармонической функции Φ на плоскости $z = 0$.

Исключая из (5) функцию ζ, мы придем к уравнению $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$, которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + gK\varphi = 0. \tag{7}$$

Если глубина жидкости мала, то оператор K можно приближенно заменить дифференциальным оператором, ибо

$$K\varphi = -\frac{\partial}{\partial x}\left(h \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(h \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + O(h^2). \tag{8}$$

Подставляя это приближенное выражение в (7), мы найдем, что функция φ, так же как и ζ, удовлетворяет акустическому уравнению (1). Этими двумя функциями движение полностью определяется.

Р. М. Гарипов показал, что качественная картина волновода при наличии подводного хребта правильно описывается уже в рамках изложенного выше акустического приближения.

Является ли эффект волновода существенным при распространении цунами? Данные о рельефе дна океана в цунамиактивных районах не говорят о наличии подводных хребтов, тянущихся от эпицентров землетрясе-

ний к побережью. Но роль волноводов, по-видимому, играют материковые отмели (шельфы) и уступы вдоль берега. На это указывают характерные особенности некоторых цунами.

Общая характеристика волноводов. Волноводный характер распространения звука, упругих волн, радиоволн и т. п. в неоднородных средах без диссипации энергии имеет общую математическую природу, которую, следуя Р. М. Гарипову [10], можно описать так.

Предполагается, что процесс распространения волн описывается уравнением (7), в котором оператор K действует на функции только пространственных переменных. Этот оператор в подходящим образом выбранном гильбертовом пространстве является симметричным и положительным, что влечет за собой закон сохранения энергии. В ряде задач допустима приближенная постановка, в которой этот оператор можно считать дифференциальным. Для определенности в дальнейшем мы будем говорить о волнах на воде.

Примем дополнительно условие однородности волновода: уравнение (7) инвариантно относительно сдвигов по координате y, а дно бассейна имеет уравнение вида $h = h(x)$ (так что речь идет об инвариантности относительно сдвигов вдоль неровностей дна).

При этом условии можно искать частные решения уравнения (7) в виде

$$e^{i(\omega t - \nu y)}\psi(x), \tag{9}$$

где ω и ν — действительные числа, а $\psi \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Подставляя это в (7) и пользуясь тем, что оператор K действует лишь на пространственные переменные, мы получим соотношение

$$gKe^{-i\nu y}\psi(x) = \omega^2 e^{-i\nu y}\psi(x). \tag{10}$$

Из условия однородности следует, что здесь переменные x и y разделяются, и мы таким образом приходим к задаче на собственные числа для функции ψ. Если собственные числа $\omega^2(\nu)$ существуют (ψ и ω являются функциями также параметра ν), то рассматриваемая неровность дна служит волноводом.

Решение (9) представляет собой прогрессивную волну, которая бежит над подводным возвышением и

затухает по мере удаления от него в перпендикулярном направлении. Умножая его на произвольную функцию от ν и интегрируя по ν, мы получим неустановившуюся волну, распространяющуюся параллельно оси y, энергия которой локализована в полоске, параллельной этой оси.

Р. М. Гарипов показал, что условие (2) при дополнительном условии однородности достаточно для существования решений вида (9), дающих волновод. В частности, оно выполняется, если дно бассейна плоское всюду, кроме полоски шириной ε, над которой имеется возвышение высотой порядка ε. Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$ над этим возвышением распространяются медленно затухающие волны. Можно доказать, что при $\varepsilon \to 0$ значения $\psi(x)$ равномерно стремятся к 0, т. е. что при $\varepsilon \to 0$ волновод постепенно пропадает.

Заметим, что условие однородности не является ограничением по существу, а введено лишь для упрощения рассуждений. Естественно ожидать, что решения типа (9), дающие волновод, существуют и в более общем случае, когда возвышение дна бассейна локализовано в полосе ограниченной ширины, уходящей на бесконечность.

Следует сказать, что волны типа (9), бегущие вдоль плоского наклонного берега, были найдены еще Стоксом и изучены рядом авторов, см. [11]. Наши рассуждения справедливы и в случае уступа вдоль вертикального берега, который тоже может служить волноводом.

Достаточные условия[1]). После отделения переменной y и времени t для функции $\psi(x)$ в (9) получаем следующее уравнение:

$$A\psi = \omega^2\psi. \tag{11}$$

Оператор A осуществляет отображение $\psi \to \left.\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right|_{z=0}$, где Ψ — решение граничной задачи

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \nu^2\Psi = 0 \quad \text{в} \quad D = \{-h(x) < z < 0\},$$
$$\Psi|_{z=0} = \psi(x), \qquad \left.\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right|_{z=-h} = 0. \tag{12}$$

[1]) Для чтения этого и следующего разделов нужно владеть основами функционального анализа; см. Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954, стр. 321—401.

Этот оператор зависит от параметра ν и формы дна $z = -h(x)$; чтобы отметить последнее, мы будем писать $A = A(h)$.

Здесь мы хотим доказать сформулированное выше достаточное условие (2) существования волновода. Как мы видели, для этого нужно убедиться в существовании собственных функций ψ оператора A. Для простоты предположим еще, что дно водоема — достаточно гладкая поверхность, а также что $h(x) = 1$ вне некоторого конечного интервала (рис. 116).

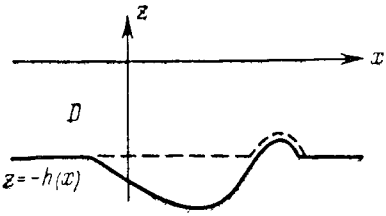


Рис. 116.

Оператор A будем считать действующим в гильбертовом пространстве $L_2(R)$. Он определен на пространстве Соболева $W_2^1(R)$ и является самосопряженным. Обозначим через $A(1)$ оператор A для случая плоского дна ($h(x) \equiv 1$); он имеет ту же область определения $W_2^1(R)$.

Лемма. Оператор $B = A(h) - A(1)$ вполне непрерывен.

Доказательство. Обозначим через D_1 полосу $\{-1 < z < 0\}$, а через Ψ_1 — решение граничной задачи (12) в этой области. Теперь заметим, что функция $\Psi - \Psi_1$ определена и удовлетворяет уравнению (12) в пересечении $D \cap D_1$, обращается в нуль на границе $z = 0$ и удовлетворяет неоднородному условию Неймана на нижней границе $D \cap D_1$, причем носитель этой неоднородности сосредоточен на ограниченном множестве, которое на рис. 116 отмечено пунктиром. Поэтому (см. Л. и Ш., стр. 228) все производные функции $\Psi - \Psi_1$ на $z = 0$ экспоненциально убывают при $x \to \pm\infty$. Кроме того, указанная неоднородность условий Неймана оценивается через L_2-норму $\|\psi\|$ функции $\psi = \Psi|_{z=0} =$

$= \Psi_1|_{z=0}$. Пользуясь еще локальностью эллиптических задач, получим

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} B\psi\right| = \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\right)_{z=0}\right| \leqslant \text{const}\, e^{-|x|}\|\psi\|.$$

Отсюда и следует утверждение леммы.

Воспользуемся теперь двумя известными фактами спектральной теории самосопряженных операторов: 1) нижняя грань спектра оператора A совпадает с нижней гранью значений $(A\psi, \psi)$ на пересечении единичной сферы с областью его определения D_A и 2) непрерывные спектры операторов $A(h)$ и $A(1)$ совпадают (это следует из того, что в силу леммы они отличаются на вполне непрерывное слагаемое).

Найдем спектр оператора $A(1)$. Для этого удобно воспользоваться преобразованием Фурье

$$\tilde{\psi}(\sigma) = F\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x}\psi(x)\, dx.$$

Так как оператор $A(1)$ инвариантен относительно сдвига, то его «преобразование Фурье» $\tilde{A}(1) = FA(1)F^{-1}$ есть оператор умножения на функцию. Легко вычислить

$$(\tilde{A}(1)\tilde{\psi})(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 + \nu^2}\, \text{th}\, \sqrt{\sigma^2 + \nu^2}\, \tilde{\psi}(\sigma).$$

Спектр оператора $\tilde{A}(1)$ чисто непрерывен ($\tilde{A}(1)$ не имеет собственных чисел) и заполняет полуось $[\nu\, \text{th}\, \nu, \infty)$. Поскольку $A(1)$ и $\tilde{A}(1)$ унитарно эквивалентны, то их спектры совпадают.

Таким образом, вне $[\nu\, \text{th}\, \nu, \infty)$ оператор A может иметь лишь изолированные собственные значения конечной кратности. Поэтому условие

$$\inf_{\|\psi\|=1,\ \psi \in D_A} (A\psi, \psi) < \nu\, \text{th}\, \nu \qquad (13$$

достаточно для существования собственных функций ψ этого оператора.

Наша цель — доказать достаточность условия (2). Для этого преобразуем выражение функционала

$$(A\psi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi A(\psi)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi|_{z=0} \frac{\partial \Psi}{\partial z}\Big|_{z=0} dx.$$

Здесь стоит интеграл от $\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n}$ по части $\{z = 0\}$ границы области $D = \{-h(x) < z < 0\}$; учитывая, что согласно (12) на остальной части границы $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$, мы можем считать, что этот интеграл берется по всей границе ∂D. Тогда, применяя формулу Грина, будем иметь

$$(A\psi, \psi) = \int\int_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\right\} dx\, dz$$

или, рассматривая это выражение как функционал от Ψ и учитывая уравнение (12),

$$T(\Psi) = \int\int_D \left\{\Psi_x^2 + \Psi_z^2 + \nu^2 \Psi^2\right\} dx\, dz. \tag{14}$$

Уравнение (12) является уравнением Эйлера для функционала T, следовательно, на множестве функций $\{\overline{\Psi} \in W_2^1(D)\colon \overline{\Psi}|_{z=0} = \psi(x)\}$ функционал T принимает минимальное значение на решении этого уравнения (см., например, [12]). Вычислим значение T на функции

$$\overline{\Psi} = \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha|x|} w(z),$$

$$w(z) = \frac{1}{\operatorname{ch} \nu} \begin{cases} \operatorname{ch} \nu (z+1), & -1 \leqslant z \leqslant 0, \\ 1, & z < -1; \end{cases}$$

получим

$$T(\overline{\Psi}) = \alpha \int\int_D \left(\alpha^2 w^2 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + \nu^2 w^2\right) e^{-2\alpha|x|}\, dx\, dz.$$

Первое слагаемое под интегралом заменим его максимальным значением и учтем, что при $z \geqslant -1$

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + \nu^2 w^2 = \frac{\nu^2}{\operatorname{ch}^2 \nu} \operatorname{ch} 2\nu (z+1).$$

Тогда будем иметь

$$T(\overline{\Psi}) \leqslant \alpha^2 \max h(x) + \nu \operatorname{th} \nu + \frac{\alpha \nu}{2 \operatorname{ch}^2 \nu} \left\{ - \int\limits_{\{x:\, h(x) < 1\}} \operatorname{sh}(2\nu [1 - h(x)])\, e^{-2\alpha|x|}\, dx + 2\nu \int\limits_{\{x:\, h(x) \geqslant 1\}} [h(x) - 1] e^{-2\alpha|x|}\, dx \right\}.$$

Отсюда видно, что если существует точка x_0, в которой $h(x_0) < 1$, то скобка в правой части этого неравенства при достаточно большом ν станет отрицательной. Зафиксировав это ν и уменьшая α, всю правую часть можно сделать меньше $\nu \operatorname{th} \nu$, и тогда условие (13) будет выполнено. Тем самым достаточность условия (2) для существования волновода доказана.

В приведенных выше рассуждениях тот факт, что дно однозначно проектируется на плоскость $z = -1$, является несущественным. Поэтому доказанный достаточный признак волновода можно сформулировать так: дно совпадает с горизонтальной плоскостью вне некоторой полосы, а минимальная глубина меньше, чем глубина над плоским участком дна (следует добавить еще некоторые условия гладкости дна).

Пусть теперь ψ — собственная функция оператора A. Тогда функция

$$w(x, y) = e^{-i\nu y}\psi(x, \nu)$$

является обобщенной собственной функцией оператора K из уравнения (7) (она не убывает при $y \to \pm\infty$ и поэтому не принадлежит пространству $L_2(R^2)$, в котором действует оператор K). Обобщенная собственная функция быстро убывает в направлении, перпендикулярном волноводу. В случае неоднородного волновода тоже должны существовать обобщенные собственные функции оператора K, обладающие этим свойством. Но это пока никем не доказано.

Асимптотика волн. Можно доказать [10], что если функция $h(x)$ достаточно быстро стремится к своему предельному значению $h(\infty)$, то оператор A вне его непрерывного спектра $[\nu \operatorname{th} \nu, \infty)$ имеет лишь конечное число собственных чисел. Занумеруем их, повторив каждое столько раз, какова его кратность: $\omega_1^2(\nu), \ldots, \omega_p^2(\nu)$, и обозначим через $\psi_1(x, \nu), \ldots, \psi_p(x, \nu)$ соответствующую им ортонормированную систему собственных функций. В силу (14) оператор A положителен, следовательно, все ω_k действительны; функции ψ_k также можно считать действительными.

Величины ω_k^2 и ψ_k являются четными функциями параметра ν (так как они зависят от ν^2) и определены

при $\alpha_k < |\nu| < \beta_k$, где $\alpha_k \geqslant 0$ и $\beta_k \leqslant \infty$. Оператор A зависит от параметра ν аналитически, поэтому ω_k^2 и ψ_k являются аналитическими функциями от ν на интервалах (α_k, β_k) и $(-\beta_k, -\alpha_k)$; при $|\nu| \to \alpha_k$ или β_k величина $\omega_k^2(\nu)$ стремится к нижней границе непрерывного спектра $\nu \operatorname{th} \nu$. Нам удобно считать, что $\omega_k(\nu) = \pm\sqrt{\omega_k^2(\nu)}$ являются нечетными функциями.

Мы хотим получить асимптотическое разложение волн, распространяющихся вдоль волновода (над подводным хребтом). Для этого полезно заметить, что любое решение уравнения (7), удовлетворяющее начальным и граничным условиям (5) и (6), можно представить в виде суммы

$$\varphi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{p} \int\limits_{\alpha_k < |\nu| < \beta_k} e^{-i\nu y} \psi_k(x, \nu) \times$$

$$\times \left(a_k(\nu) \frac{\sin \omega_k(\nu)\, t}{\omega_k(\nu)} + b_k(\nu) \cos \omega_k(\nu)\, t \right) d\nu + \varphi_*(x, y, t), \quad (15)$$

слагаемые которой ортогональны в смысле $L_2(R^2)$ (см. [9] и [10]). Для определения коэффициентов этого разложения достаточно вспомнить, что $\varphi = \Phi|_{z=0}$, и воспользоваться соотношением (5), по которому $\frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} = -g\zeta(x, y, 0)$; мы получим

$$a_k(\nu) = -g \int_{-\infty}^{\infty}\int e^{i\nu y} \psi_k(x, \nu) \zeta(x, y, 0)\, dx\, dy,$$

$$b_k(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty}\int e^{i\nu y} \psi_k(x, \nu) \varphi(x, y, 0)\, dx\, dy. \quad (16)$$

Так как начальные значения φ и ζ (а также функции φ_k) действительны, то $a_k(-\nu) = \overline{a_k(\nu)}$, $b_k(-\nu) = \overline{b_k(\nu)}$. Интересно отметить, что энергия движения равна сумме энергий движений, описываемых отдельными слагаемыми в (15).

Слагаемое φ_* описывает волны, распространяющиеся во все стороны, мы его рассматривать не будем.

Рассмотрим k-е слагаемое суммы, которое мы обозначим через φ_k. Ему соответствует группа волн с амплитудой

$$\zeta_k(x, y, t) = -\frac{1}{g}\frac{\partial \varphi_k(x, y, t)}{\partial t},$$

движущихся вдоль оси y и локализованных в некоторой полосе, окружающей ось, — это следует из того, что функция ψ_k быстро убывает при возрастании $|x|$. Займемся асимптотикой этих волн.

В силу четности функции ψ по ν и отмеченного выше свойства коэффициентов a_k и b_k интеграл в (15) по отрезку $(-\beta_k, -\alpha_k)$ комплексно сопряжен с интегралом по отрезку (α_k, β_k). Объединим эти интегралы, а также выразим синус и косинус по формулам Эйлера и возьмем лишь часть φ_k, соответствующую $e^{i\omega t}$, тогда вместо (16) получим

$$\zeta^+(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi g}\,\mathrm{Re}\int_\alpha^\beta e^{i(\omega t - \nu y)}\psi(x, \nu)(a + ib\omega)\,d\nu$$

(индекс k мы для краткости опускаем). Если мы будем двигаться вдоль оси y с постоянной скоростью c, так что $y = ct$, то задача сведется к асимптотической оценке при больших t интеграла

$$I(x, t) = \int_\alpha^\beta e^{i(\omega - c\nu)t}F(x, \nu)\,d\nu, \tag{17}$$

где $F(x, \nu) = -\frac{1}{2\pi g}\psi(x, \nu)(a + ib\omega)$.

Нам нужно выяснить характер зависимости $\omega = \omega(\nu)$. Для этого воспользуемся соотношением (11), из которого, учитывая, что $\|\psi\| = 1$, находим $\omega^2 = (A\psi, \psi)$. Теперь воспользуемся выражением (14) и, внося дифференцирование под знак интеграла, найдем

$$\frac{d\omega^2}{d(\nu^2)} = 2\int\int_D \left\{\Psi_x\Psi_{x\nu^2} + \Psi_z\Psi_{z\nu^2} + \nu^2\Psi\Psi_{\nu^2} + \frac{1}{2}\Psi^2\right\}dx\,dz.$$

Так как функция Ψ_{ν^2} удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \nu^2\right)\Psi_{\nu^2} = \Psi,$$

которое получается дифференцированием (12) по ν^2, то предыдущее равенство можно переписать в виде

$$\frac{d\omega^2}{d(\nu^2)} = 2\iint_D \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi\frac{\partial\Psi_{\nu^2}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Psi\frac{\partial\Psi_{\nu^2}}{\partial z}\right)\right\}dx\,dz - \\ - \iint_D \Psi^2\,dx\,dz.$$

Теперь применим формулу Грина, учитывая, что $\frac{\partial\Psi_{\nu^2}}{\partial n} = 0$ при $z = -h(x)$; мы получим

$$\iint_D \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi\frac{\partial\Psi_{\nu^2}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Psi\frac{\partial\Psi_{\nu^2}}{\partial z}\right)\right\}dx\,dz = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi\frac{\partial\Psi_{\nu^2}}{\partial z}\,dx = \frac{d}{d(\nu^2)}(A\psi, \psi).$$

Подставляя это равенство в предыдущее с учетом того, что $(A\psi, \psi) = \omega^2$, найдем окончательно

$$\frac{d\omega^2}{d(\nu^2)} = \iint_D \Psi^2\,dx\,dz > 0,$$

и, следовательно, можно выбрать $\omega(\nu) = \pm\sqrt{\omega^2(\nu)}$ так, чтобы на отрезке (α, β) было $\omega'(\nu) > 0$.

Переходя к асимптотической оценке интеграла (17), заметим прежде всего, что при $\omega''(\nu) \equiv 0$, т. е. при $\omega = a + b\nu$ волны не затухают. В самом деле, в этом случае

$$I(x, t) = e^{iat}\int_\alpha^\beta e^{i(b-c)\nu t}F(x, \nu)\,d\nu,$$

и если положить $b = c$, т. е. двигаться вдоль волновода со скоростью $c = \omega'(\nu)$, то будем иметь $I(x, t) = e^{iat}I_0(x)$.

Если, напротив, $\omega''(\nu) \neq 0$ на интервале (α, β), то к (17) можно применить метод стационарной фазы, который является разновидностью метода перевала (см. Л. и Ш., стр. 472). Мы получим, что в этом случае волны затухают со скоростью порядка $t^{-1/2}$ (см. [14]).

Заметим, что в отсутствии подводного хребта (плоского дна) волны затухают быстрее, со скоростью порядка t^{-1} (см., например, [13]).

Тот же метод показывает, что если $\omega''(\nu)$ в точке $\nu_0 \in (\alpha, \beta)$ имеет нуль порядка m, то этой точке соответствует группа еще более медленно затухающих волн, с амплитудой порядка $t^{-\frac{1}{m+2}}$, движущихся вдоль оси y со средней скоростью $c = \omega'(\nu_0)$. Метод позволяет найти и асимптотическое выражение для этих волн. Пусть, например, $\omega''(\nu)$ в точке $\nu = \nu_0$ имеет нуль второго порядка, так что $\omega'(\nu_0) = c > 0$, $\omega''(\nu_0) = \omega'''(\nu_0) = 0$, а $\omega^{IV}(\nu_0) = -\varkappa < 0$. Тогда (см. [9])

$$\zeta^+ = -\frac{\psi(x, \nu_0)}{\sqrt[4]{\varkappa t}} \times$$

$$\times \operatorname{Re}\left\{[a(\nu_0) + ib(\nu_0)\,\omega(\nu_0)]\, e^{i[\omega(\nu_0)t - \nu_0 t]} F\left(\frac{y - ct}{\sqrt[4]{\varkappa t}}\right)\right\} + o(t^{-1/4}), \tag{18}$$

где

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi g}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\left(\xi u + \frac{u^4}{4}\right)} du =$$

$$= \frac{1-i}{4g\sqrt{3\pi}} |\xi|^{-1} e^{i\frac{3}{4}|\xi|^{4/3}} + o(|\xi|^{-1}).$$

До сих пор мы говорили об асимптотическом разложении группы волн ζ_k, соответствующих k-му слагаемому суммы (15). Асимптотика суммы $\zeta = \sum_{k=1}^{p} \zeta_k$ определяется наиболее медленно затухающим слагаемым, причем если таких слагаемых несколько, то главные члены их асимптотических разложений не могут взаимно уничтожаться в силу отмеченной выше ортогональности.

Функции $\omega_k(\nu)$, от которых зависит характер асимптотических разложений, определяются формой дна, т. е. функцией $h(x)$. В работе Е. И. Биченкова и Р. М. Гарипова [15] исследована зависимость $\omega_k(\nu)$ от формы дна. Особенно простой характер она имеет для случая, когда подводный хребет представляет собой широкую ступеньку небольшой высоты, т. е. функция

$h(x)$ имеет вид

$$h(x)=\begin{cases} 1-Sq & \text{для } |x|<\dfrac{1}{2q}, \\ 1 & \text{для } |x|>\dfrac{1}{2q}, \end{cases}$$

где q — малый параметр (рис. 117). Здесь оказалось, что существует такое критическое значение площади ступеньки S_k^*, что при $S<S_k^*$ функция $\omega_k''(\nu)$ не имеет нулей, при $S=S_k^*$ — один нуль кратности 2, а при $S>S_k^*$ — два простых нуля. Следовательно, при $S<S_k^*$ соответствующая группа волн затухает со скоростью порядка $t^{-1/2}$, при $S>S_k^*$ — со скоростью $t^{-1/3}$, а при $S=S_k^*$ — медленнее всего, со скоростью порядка $t^{-1/4}$.

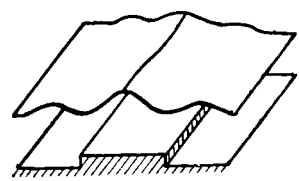


Рис. 117.

Таким образом, влияние подводного хребта на распространение волн сводится не только к простому увеличению амплитуды, но существенным образом определяет сам процесс распространения волны, изменяя характер затухания ее вдоль хребта. Вдоль хребта могут распространяться медленно затухающие волны.

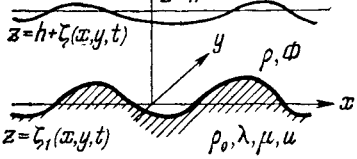


Рис. 118.

Простейшая модель цунами. Переходя к рассмотрению цунами, мы прежде всего сильно идеализируем явление. Земную кору будем считать упругим, однородным и изотропным полупространством $\{z<0\}$, над которым находится слой жидкости постоянной глубины h (рис. 118).

В состоянии равновесия тензор упругих напряжений в земной коре имеет вид

$$\sigma^0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_0+\rho_0 gz \end{pmatrix},$$

где ρ_0 — плотность коры, g — ускорение силы тяжести, а p_0 — давление на границе полупространства в отсутствии движения. Во время землетрясения возникают дополнительные напряжения σ и смещения $\boldsymbol{u}(x, y, z, t) = (u_1, u_2, u_3)$, которые связаны между собой законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{19}$$

где λ и μ — упругие постоянные Земли, δ_{ij} — символ Кронеккера и $\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ — дивергенция поля смещений (координаты x, y и z мы временно обозначили через x_1, x_2 и x_3).

Процессы, которые выводят систему из состояния покоя, будем моделировать векторным полем $\boldsymbol{f}(x, y, z, t) = (f_1, f_2, f_3)$ массовых сил. Учитывая, что поле напряжений Земли есть $\sigma^0 + \sigma$, можно написать уравнения упругих колебаний:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\lambda + \mu}{\rho_0}\frac{\partial\theta}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho_0}\Delta u_i + f_i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{20}$$

(см., например, [16], стр. 185). Функция $\boldsymbol{f}$ меняется по некоторому закону в промежутке времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$, когда в очаге землетрясения происходят активные геофизические процессы; мы считаем, что после этого она не зависит от времени и равна $f_0(x, y, z)$ (остаточная сила). На самом деле $f_0 \equiv 0$, но она вводится, чтобы в рамках теории упругости учесть необратимые смещения коры, которые остаются после землетрясений, вследствие пластических деформаций.

Так как движение жидкости начинается из состояния покоя, то мы считаем его потенциальным, потенциальную функцию обозначим через $\Phi(x, y, z, t)$. Скорость жидкости $\operatorname{grad}\Phi$ мы считаем малой. Давление внутри жидкости определяется по (линеаризированному) интегралу Коши — Лагранжа

$$p = p_0 - \rho\left(gz + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\right),$$

где ρ — плотность жидкости.

Опишем теперь граничные условия. Амплитуды жидких волн ζ и волн ζ_1 на границе упругого полупростран-

ства мы считаем малыми и сносим их на плоскости равновесия, соответственно $z = h$ и $z = 0$. На свободной поверхности жидкости согласно (5) будем иметь условие

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = h, \tag{21}$$

а на дне — два условия: непрерывности нормальной составляющей скорости

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} \quad \text{при} \quad z = 0 \tag{22_1}$$

и условие непрерывности нормальных напряжений, которое (с учетом принятой линеаризации) записывается в виде $(\sigma^0 + \sigma)\boldsymbol{k} = -p\boldsymbol{k}$ (где $\boldsymbol{k}$ — орт оси z) или в координатах

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} = 0, \\ &\rho_0 g \zeta_1 + \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial z} = \rho\left(g\zeta_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad z = 0. \tag{22_2}$$

Введем несколько упрощающих предположений. Прежде всего примем, что $\mu = 0$ и что поле смещений $\boldsymbol{u}$ потенциально ($\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0$), — последнее предположение противоречит первым двум условиям (22_2), и нам придется их отбросить. Далее будем считать, что плотность жидкости мала в сравнении с плотностью коры ($\rho \ll \rho_0$), и в силу этого правую часть последнего условия (22_2) положим равной нулю (она мала в сравнении с $\rho_0 g \zeta_1$). Пусть l и δ — характерные размер и смещение в очаге землетрясения, тогда $\zeta_1 \approx \delta$, $\theta \approx \frac{\delta}{l}$, и если мы предположим, что $l \ll \frac{\lambda}{\rho_0 g}$, то в ($22_2$) сможем пренебречь и членом $\rho_0 g \zeta_1$. Это условие примет, следовательно, вид: $\theta = 0$ при $z = 0$.

Массовые силы при $z = 0$ будем считать вертикальными ($f_1 = f_2 = 0$), тогда из наших предположений и из уравнения (20) будет следовать, что $\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$ при $z = 0$. Начальные условия для $\boldsymbol{u}$ можно считать нулевыми, так как движение возникает из состояния покоя в результате массовых сил, начинающих действовать в момент $t_0 \geqslant 0$. Поэтому на границе раздела $z = 0$ все

время будет $u_1 = u_2 = 0$, и значит, граничное условие (22_2) примет вид

$$\theta = \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \tag{22}$$

Последнее упрощающее предположение состоит в том, что глубина слоя жидкости мала в сравнении с размером очага землетрясения ($h \ll l$), и значит, можно воспользоваться приближением (8); мы получим

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=h} = \left.\frac{\partial u_3}{\partial t}\right|_{z=0} - h\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi(x, y, h, t) + O(h^2). \tag{23}$$

Перепишем, наконец, полученные уравнения и граничные условия в безразмерных переменных

$$\boldsymbol{x} = L\boldsymbol{x}', \quad t = \frac{L}{c_0}t', \quad \boldsymbol{u} = \delta \boldsymbol{u}', \quad \boldsymbol{f} = \frac{c_0^2\delta}{L^2}\boldsymbol{f}', \quad \Phi = \frac{gL\delta}{c_0}\Phi',$$

где масштаб длины L — это расстояние от очага землетрясения до точки наблюдения, а $c_0^2 = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$ (у нас $\mu = 0$) — скорость продольных упругих волн. Так как согласно (5) $\zeta = -\dfrac{1}{g}\left.\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{z=h}$, то надо положить $\zeta = \delta\zeta'$. Обратимся к третьему уравнению (20); учитывая предположения $\mu = 0$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0$ (в силу последнего $\dfrac{\partial \theta}{\partial z} = \Delta u_3$), мы переписываем его в безразмерных величинах [1]), для $t > 0$ и $z < 0$:

$$\Box u_3 \equiv \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}\right) = f_3, \tag{24}$$

причем функция f_3 отлична от нуля только при $t > t_0$, где $t_0 \geqslant 0$ — момент начала землетрясения. Условие (21) в приближении (23) после перехода к безразмерной амплитуде волны ζ и другим безразмерным величинам перепишется в виде

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right) = \left.\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}\right|_{z=0}, \tag{25}$$

где $c = \dfrac{\sqrt{gh}}{c_0}$.

[1]) Штрихи в обозначении безразмерных величин мы опускаем.

Уравнения (24)—(25) и представляют основные уравнения нашей модели. Граничным условием для уравнения (24) является условие (22):

$$\frac{\partial u_3}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \tag{26}$$

а начальные условия для этих уравнений по причинам, о которых говорилось выше, имеют вид: при $t = 0$

$$u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial t} = 0, \quad \zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \tag{27}$$

В следующем разделе мы покажем, как можно применить эту модель к задаче краткосрочного прогноза цунами по сейсмической информации.

Задача краткосрочного прогноза. Предотвратить цунами, по-видимому, так же трудно, как и землетрясения, поэтому имеется только две возможности. Первая возможность состоит в том, чтобы для прибрежных поселений выбирать нецунамиопасные места. Но такие места неудобны для строительства и, кроме того, поскольку в одном месте большие цунами бывают один-два раза в столетие, то экономически выгоднее отстраивать города заново после цунами, чем строить их в трудно доступных районах и терпеть ежедневные дополнительные издержки. Важно только научиться предсказывать цунами и в случае предстоящей опасности успевать эвакуировать население из затопляемой зоны.

Таким образом, задача краткосрочного прогноза цунами является важной народнохозяйственной задачей. В настоящее время для этой цели предназначаются цунамистанции, которые прогнозируют цунами по измерениям сейсмических волн. По сейсмограммам определяются координаты эпицентра землетрясения и его интенсивность; если последняя превышает пороговое значение, то в ближайших к эпицентру районах побережья объявляется тревога цунами.

Однако сильные землетрясения не всегда вызывают большие цунами, и поэтому эффективность такого прогноза низка — около 80% тревог оказываются ложными. Существующая практика прогноза цунами требует коренного улучшения. Нужно гораздо полнее использовать сейсмическую информацию, усовершенствовать

методы ее анализа. Здесь мы хотим проанализировать постановку задачи и показать несколько модельных примеров, связанных с ее решением.

Уточним прежде всего, что мы можем измерить и что должны предсказать. Пусть на побережье находится точка наблюдения, которую в рамках описанной выше модели будем считать совпадающей с началом координат. Высота волны цунами в точке наблюдения является скалярной функцией времени $\zeta_0(t) = \zeta(0, 0, t)$, $t > 0$. В качестве начала отсчета времени выбираем начало наблюдения.

Поставим своей целью предсказать ζ_0 настолько полно, насколько это возможно, зная поле смещений на некотором малом участке σ поверхности Земли вблизи точки наблюдения.

Выберем в качестве σ круг: $x^2 + y^2 < r_0^2$, $z = 0$ и будем считать известной $u_3(x, y, 0, t)$ для $(x, y, t) \in S$, где $S = \sigma \times R_+$ — произведение круга σ на положительную полуось $R_+ = \{t\colon\ t \geqslant 0\}$.

Правая часть уравнения (25) содержит значения функции $w = \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$ на плоскости $z = 0$, а нам известен лишь сейсмический сигнал $w|_S$ — значение этой функции на многообразии S. По этому сигналу нам и нужно предсказать волну цунами $\zeta_0(t)$ для $t > 0$. Отметим еще, что в силу граничного условия (26) нам известна (равна 0) нормальная производная $\dfrac{\partial w}{\partial z}$ на S. Как мы сейчас увидим на примерах, именно это обстоятельство избавляет нас от необходимости измерять поле смещений на глубине.

Однозначное предсказание. Обозначим через W множество всех возможных сейсмических полей, т. е. функций $w(x, y, z, t)$, определенных и дважды гладких в произведении T пространства R^3 переменных (x, y, z) на положительную полуось $R_+ = \{t \geqslant 0\}$. Мы предположим, что эти функции четны по переменной z, т. е., что $w(x, y, -z, t) = w(x, y, z, t)$ всюду в T, — это заменяет граничное условие (26).

Оказывается, что если наложить некоторые начальные условия при $t = 0$ на функции $w \in W$ и, кроме того, некоторые условия на носители правых частей волнового

уравнения

$$\Box w \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w = \frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2}, \tag{28}$$

которому согласно (24) должны удовлетворять эти функции [1]), то задание $w|_S$ однозначно определяет функцию w во всей области T. В этом случае по измеренному сейсмическому сигналу $w|_S$ можно будет восстановить значения $w|_{z=0}$, т. е. правую часть уравнения (25), и тогда, решив последнее при нулевых начальных условиях (27), однозначно предсказать волну цунами. Классы W, обладающие этим свойством, будем называть *классами единственности*. Приведем два примера:

Пример 1. Пусть начальное условие имеет вид

$$\left.\frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{29}$$

а период, в течение которого происходят активные процессы в очаге землетрясения, столь мал, что теоретически можно считать $\tau = 0$. Момент землетрясения $t_0 = 0$ мы также считаем известным, и тогда правая часть уравнения (28) равна 0 при $t > 0$.

Выясним, какие массовые силы f_3 вызывают сейсмические поля этого класса W. Так как согласно второму предположению у нас $\frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2} = 0$ при $t > 0$, то

$$f_3 = f_{03}(x, y, z) + f_{13}(x, y, z)\, t \quad \text{при} \quad t > 0.$$

Будем считать, что движение возникает из покоя, тогда u_3 и $\frac{\partial u_3}{\partial t}$ стремятся к 0 при $t \to +0$, и из уравнения (24), которое имеет вид $w = f_3 + \Delta u_3$, мы получим

$$\lim_{t \to +0} w = f_{03} + \Delta u_3|_{t=0} = f_{03},$$

$$\lim_{t \to +0} \frac{\partial w}{\partial t} = f_{13} + \Delta \left.\frac{\partial u_3}{\partial t}\right|_{t=0} = f_{13} = 0$$

---

[1]) Уравнение (24) приводит к тому, что (28) выполняется в точках T, для которых $z < 0$; мы считаем, что правая часть (28) четным образом продолжена на значения $z > 0$, и тогда это уравнение удовлетворяется во всей области T.

(мы воспользовались условием (29)). Таким образом, массовые силы, вызвавшие из покоя упругие волны класса W, должны иметь вид

$$f_3 = \begin{cases} f_{03}(x, y, z), & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

где f_{03} — произвольная функция.

Докажем, что этот класс W является классом единственности. Для этого достаточно доказать, что условие $w|_S = 0$ влечет за собой тождество $w \equiv 0$. Если функции $w \in W$ продолжить четным образом по t на значения $t < 0$, то в силу условия (23) продолженная функция $\tilde{w}$ будет дважды гладкой во всем пространстве R^4 переменных (x, y, z, t) и всюду в R^4 будет удовлетворять волновому уравнению $\Box w = 0$. Но по условию $\tilde{w} = 0$ на многообразии $S = \{x^2 + y^2 < r^2,\ z = 0,\ -\infty < t < \infty\}$, а из четности w по переменной z следует, что и $\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}\Big|_S = 0$. Таким образом, функция $\tilde{w}$ является решением волнового уравнения во всем пространстве R^4, удовлетворяющим нулевым условиям Коши на многообразии S непространственного типа. Отсюда и следует, что $\tilde{w} \equiv 0$ (см. К у р а н т [1], стр. 749).

Заметим, что в классе W из этого примера отображение $w|_S \to w$ некорректно: малая погрешность измерения сигнала $w|_S$ может повлечь за собой большие погрешности в определении w и, следовательно, в прогнозе волны цунами ζ_0. Чтобы избежать этого, нужно в классе единственности W при помощи некоторых дополнительных условий выделить подкласс *корректности*. Результаты М. М. Л а в р е н т ь е в а [17] делают естественной гипотезу, что корректность можно обеспечить условием ограниченности сверху энергии упругих волн заданной наперед постоянной E_0. Величина E_0 оценивается из физических соображений как энергия землетрясения.

П р и м е р 2. В качестве W выберем класс обобщенных функций в R^4 с носителями в $T = R^3 \times R_+$, четных по переменной z и удовлетворяющих уравнению

$$\Box w = \delta(|x - a|^2 - (t - t_0)^2) + \delta(|x - \bar{a}|^2 - (t - t_0)^2), \quad (30)$$

где $x=(x, y, z)$, $a=(a_1, a_2, a_3)$ — произвольные точки R^3, $\bar{a}=(a_1, a_2, -a_3)$ — точка, симметричная с a относительно плоскости $z=0$, $t_0 \geqslant 0$ — постоянная и δ — дельта-функция. Носители функций $w \in W$ сосредоточены на поверхности конусов $|x-a|^2-(t-t_0)^2=0$, $|x-\bar{a}|^2-(t-t_0)^2=0$, $t \geqslant t_0$, с вершинами в точках (a, t_0) и $(\bar{a}, t_0)$.

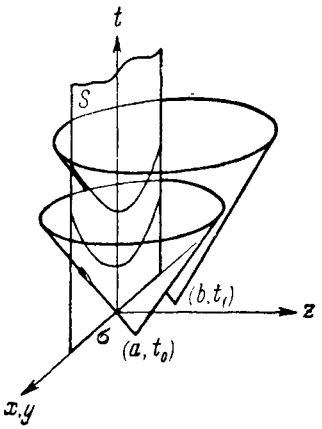


Рис. 119.

В этом примере W также является классом единственности, т. е. по значениям $w|_S$ однозначно определяются значения w всюду в R^4. Этим самым однозначно определяется и точка (a, t_0). В самом деле, в противном случае существовали бы две функции v, $w \in W$, для которых $v|_S = w|_S$, но вершины соответствующих им конусов (a, t_0) и (b, t_1) различны. Тогда должны совпадать и пересечения этих конусов с многообразием S, а это невозможно, если $(a, t_0) \neq (b, t_1)$ (см. рис. 119, где плоскость (x, y) схематически изображена как прямая).

Распознавание цунами. Делаются попытки отличить цунамигенные землетрясения от нецунамигенных (при одной и той же балльности) методом распознавания образов. При непосредственном рассмотрении сейсмограмм обнаружить цунамигенность землетрясения трудно, поэтому желательно найти преобразования сейсмограмм, после которых признаки цунамигенности выступили бы явно.

Задача состоит, следовательно, в поиске небольшого числа числовых признаков $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ таких, чтобы при отображении

$$p\colon w|_S \to (p_1, p_2, \ldots, p_m) \tag{31}$$

точки пространства признаков, соответствующие цунамигенным землетрясениям, отделялись от точек, соот-

ветствующих землетрясениям нецунамигенным, некоторой поверхностью.

Еще лучше было бы найти такое преобразование (31), чтобы образы землетрясений, вызывающих волну цунами одной и той же максимальной высоты, заполняли в пространстве признаков некоторый слой и чтобы слои, отвечающие существенно различным высотам волн, не пересекались друг с другом (рис. 120).

Такая система признаков, однако, еще не найдена. Были вычислены спектральные (корреляционные) функции сейсмограмм, но никаких характерных особенностей,

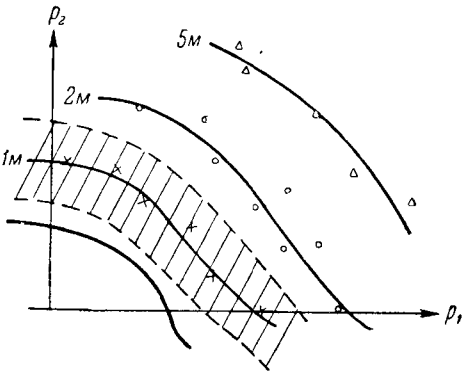


Рис. 120.

отличающих цунамигенные землетрясения, при этом обнаружено не было. Представляется целесообразным такой способ выбора признаков. Известно, что если размеры эпицентра землетрясения малы по сравнению с расстоянием до точки наблюдения, то высота волны цунами с большой точностью определяется положением эпицентра и моментами начальных возмущений относительно этого эпицентра.

Поэтому в качестве системы признаков естественно принять координаты очага землетрясения и моменты начальных условий до некоторого порядка. Отображение (31) — это способ вычисления указанных моментов по сейсмограммам. Для идеализированного случая такой способ можно указать, и даже построить поверхности равной интенсивности цунами, такие, как на рис. 120.

В реальных условиях картина, конечно, деформируется, и толщина слоев равной интенсивности увеличивается, но общий топологический характер картины сохранится.

Из сказанного здесь ясно, что задача исследования и предсказания цунами еще очень далека от сколько-нибудь удовлетворительного решения.

Литература

1. Р. Курант, Уравнения с частными прозводными, «Мир», М., 1964.
2. Л. В. Овсянников, О всплывании пузыря, В сб. «Некоторые проблемы математики и механики» (К семидесятилетию М. А. Лаврентьева), «Наука», Л., 1970, 209—222.
3. В. И. Налимов, Априорные оценки решений эллиптических уравнений и их приложение к задаче Коши — Пуассона, Докл. АН СССР, 189 (1969), 45—48.
4. М. А. Лаврентьев, Проблема пробивания при космических скоростях, В сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 3, Изд-во АН СССР, М., 1959, 61—65.
5. М. А. Лаврентьев и М. М. Лаврентьев, Об одном принципе создания тяговой силы для движения, ПМТФ, 4 (1962); 3—9.
6. Е. Н. Шер, О механизме движения ужей и рыб, В сб. «Некоторые проблемы математики и механики», цит. выше, 267—276.
7. Цунами 4—5 ноября 1952 г., Бюллетень Совета по сейсмологии № 4, М., 1958.
8. Сунь Цао, О волноводе поверхностных волн в тяжелой жидкости, Изв. СО АН СССР, 5 (1959), 20—25.
9. Р. М. Гарипов, Неустановившиеся волны над подводным хребтом, Докл. АН СССР, 161, № 3 (1965), 547—550.
10. Р. М. Гарипов, Волновод в упругой среде, Сб. материалов межд. конференции по механике сплошных сред (Варна, сентябрь, 1966), София, 1968, 83—96.
11. F. Ursell, Edge waves on a sloping beach, Proc. Roy. Soc., A, **214**, № 116 (1952), 79—97.
12. R. M. Garipov, On the linear theory of gravity waves: the theorem of existence und uniqueness, Arch. Rat. Mech. Anal. **24**, № 5 (1967), 352—362.
13. Ю. Л. Газарян, О поверхностных волнах, возбуждаемых подводными землетрясениями, Акуст. журн., 3 (1955).
14. Р. М. Гарипов, Об асимптотике волн в жидкости конечной глубины, вызванных произвольным начальным возвышением свободной поверхности, Докл. АН СССР, 147, № 6 (1962).
15. Е. И. Биченков, Р. М. Гарипов, Распространение волн на поверхности тяжелой жидкости в бассейне с неровным дном, ПМТФ, 2 (1969), 21—26.
16. И. Н. Снеддон, Д. С. Берри, Классическая теория упругости, Физматгиз, М., 1961.
17. М. М. Лаврентьев, О некоторых некорректных задачах математической физики, Изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1962.

Глава IX

ВИХРИ

В этой главе изложены некоторые результаты теоретических и экспериментальных исследований, связанных с образованием, структурой и движением кольцевых вихрей.

Несмотря на большое число работ, посвященных этой проблеме, многие важные и интересные вопросы, к ней относящиеся, до последнего времени оставались без ответа. Исследования, проведенные за последнее десятилетие, улучшили положение. Были поставлены многочисленные опыты, на основе которых создана математическая модель, позволяющая определить закон движения, структуру кольцевых вихрей, количество примеси, которое они могут переносить, и другие характеристики. Полученные результаты дают хорошее совпадение с опытом.

Более трудным для исследования оказался механизм образования кольцевых вихрей. Здесь получены некоторые экспериментальные результаты, дающие основу для качественного понимания явления, однако задача его полного математического описания еще не решена.

§ 35. Кольцевые вихри

Если обычному воздушному шарику в резиновой оболочке сообщить скорость 5—10 *м/сек*, то он проходит расстояние 1,5—2 *м*. С другой стороны, давно известно, что если с той же скоростью кинуть (например, вытолкнуть поршнем из трубки) такую же массу воздуха без оболочки, то она пройдет расстояние, в 10—15 раз большее.

Опыт показывает, что во втором случае движение происходит так, как показано на рис. 121, где изображены линии тока для движения относительно системы координат, движущейся вместе с вытолкнутой массой воздуха. Движение обладает осевой симметрией; внутри выпуклой области, образованной вращением участка ABC линии тока, оно вихревое, а вне этой области — практически потенциальное. На ABC скорости внутреннего и внешнего движений совпадают, так что поле скоростей оказывается непрерывным. Это и объясняет эффект, с которого мы начали, — из-за непрерывности трение на границе движущейся без оболочки массы меньше, чем массы в оболочке, следовательно, меньше сопротивление и больше проходимое массой расстояние.

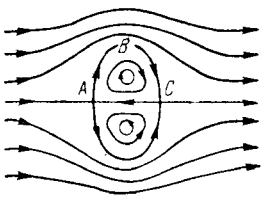


Рис. 121.

Аналогичное движение можно наблюдать и в воде. Оно известно уже давно и называется *кольцевым вихрем*. В конце прошлого века такая схема движения привлекала внимание в связи с попытками создания вихревой модели атомов (У. Томсон-Кельвин, Дж. Дж. Томсон). Эти попытки успеха не имели, но они послужили поводом для интересных исследований, с которыми можно ознакомиться по книге Ламба [4].

Интерес к проблеме сильно возрос после появления атомных бомб, при взрыве которых образуется характерное грибовидное облако, структура которого аналогична структуре кольцевого вихря, изображенного на фото рис. 122. Такое облако с большой скоростью поднимается на высоту нескольких километров. Аналогичное явление наблюдается и при взрыве больших зарядов обычных ВВ.

В последнее время исследуются возможности практического применения кольцевых вихрей для удаления дыма, вредных газов и т. п. на промышленных предприятиях. В связи с этим возникает много вопросов, ответы на которые нельзя получить без учета вязкости, диссипации энергии, турбулентного характера движения и т. д. Однако прежде чем переходить к описанию математической модели, учитывающей эти факторы, мы

должны напомнить некоторые результаты, полученные в схеме идеальной несжимаемой жидкости.

Вихри в идеальной жидкости. Если пренебречь вязкостью и рассматривать осесимметричные движения несжимаемой жидкости, стационарные в системе координат, движущейся вместе с вихрем, то уравнения, связы-

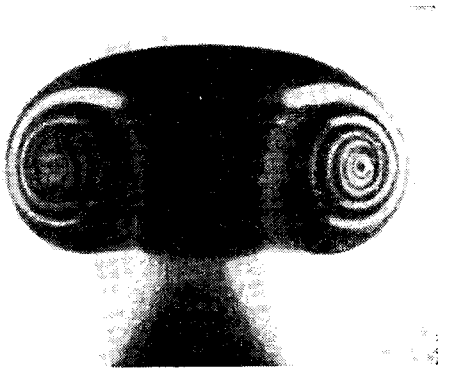


Рис. 122.

вающие функцию тока ψ и завихренность ω в цилиндрических координатах (r, α, z), имеют вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\omega}{r}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\omega}{r}\right) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = -r\omega \tag{2}$$

(см. гл. I). Из (1) следует, что отношение $\frac{\omega}{r}$ постоянно вдоль линии тока, т. е. что

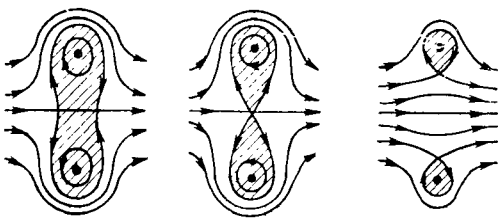
$$\omega = rF(\psi), \tag{3}$$

где F — произвольная функция.

Так как движение на бесконечности должно быть потенциальным, то F должна тождественно обращаться в нуль вне некоторой области, ограниченной замкнутой линией тока, а на этой линии составляющие скорости должны быть непрерывными. При заданной F возникает типичная задача о склейке потенциального и вихревого

течения, аналогичная тем, кторые мы рассматривали в гл. V.

В такой форме эта задача не исследована даже для простейших функций F, известны только отдельные примеры точных и приближенных решений. Пример точного решения дает сферический *вихрь Хилла*. Здесь завихренность распределена внутри шара радиуса R по закону



а) $\frac{R}{a} < 86$ б) $\frac{R}{a} = 86$ в) $\frac{R}{a} > 86$

Рис. 123.

$\omega = b^2 r$, где b — постоянная; вне шара поток — потенциальный и жидкость, содержащаяся в этом шаре, движется вместе с вихрем со скоростью

$$V = \frac{2}{15} b^2 R \tag{4}$$

относительно неподвижной системы координат (см. Ламб [4], стр. 309—310).

Вихри такого типа в опытах не наблюдаются. Большее сходство с наблюдениями имеет приближенное решение, полученное еще Максвеллом, где завихренная область представляет собой тор, радиус a поперечного сечения которого много меньше радиуса R самого тора. Тороидальный *вихрь Максвелла* движется со скоростью

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi R}\left(\log \frac{8R}{a} - \frac{1}{4}\right), \tag{5}$$

а форма объема, заключенного внутри замкнутой поверхности тока и движущегося вместе с вихрем, зависит от отношения $\frac{R}{a}$ (см. Ламб [4], стр. 299—305). На рис. 123 изображены линии тока при различных $\frac{R}{a}$;

область, движущаяся вместе с вихрем, на этом рисунке заштрихована, а область завихренной жидкости зачернена. При $\frac{R}{a} < 86$ форма области, движущейся с вихрем, мало отличается от наблюдаемой. При $\frac{R}{a} > 86$ эта область, как и область завихренности, имеет тороидальную форму; в опытах этот случай не наблюдается, что, по-видимому, можно объяснить его неустойчивостью (строгого исследования здесь еще нет).

В плоском варианте задачи о кольцевом вихре завихренность должна быть постоянной на линиях тока, т. е. $\omega = F(\psi)$. При постоянной F эта задача совпадает с задачей о склейке потенциального и вихревого движения, рассмотренной в гл. V. Точное решение имеется для случая $F(\psi) = b^2\psi$, где b — постоянная (Ламб [4], стр. 308—309), но он далек от практики.

Итак, в схеме идеальной жидкости возможны различные модели кольцевых вихрей — эта схема не дает никаких условий для определения вида функции F и формы области, в которой завихренность отлична от нуля. Поэтому ясно, что решения, полученные в рамках невязкой несжимаемой жидкости, не позволяют определить изменение скорости и размеров вихрей, наблюдаемых в экспериментах.

Влияние вязкости. Вязкость жидкости приводит к диссипации энергии, поэтому движение вихря в отсутствии внешних сил становится нестационарным. Можно было бы ожидать, что закон движения и распределение завихренности в кольцевом вихре определяются начальными и краевыми условиями и, следовательно, существенно зависят от способа образования вихря. Однако опыт показывает, что дело обстоит не совсем так.

Классический способ образования вихря состоит в следующем: в верхней крышке коробки с эластичным дном делается отверстие, диаметр которого существенно меньше, чем размеры коробки. К отверстию могут прикрепляться насадки в виде сопел различной формы. Коробка наполняется дымом, после чего по дну производится удар.

При малых числах Рейнольдса, определяемых радиусом и скоростью вихря, образуется ламинарный вихрь

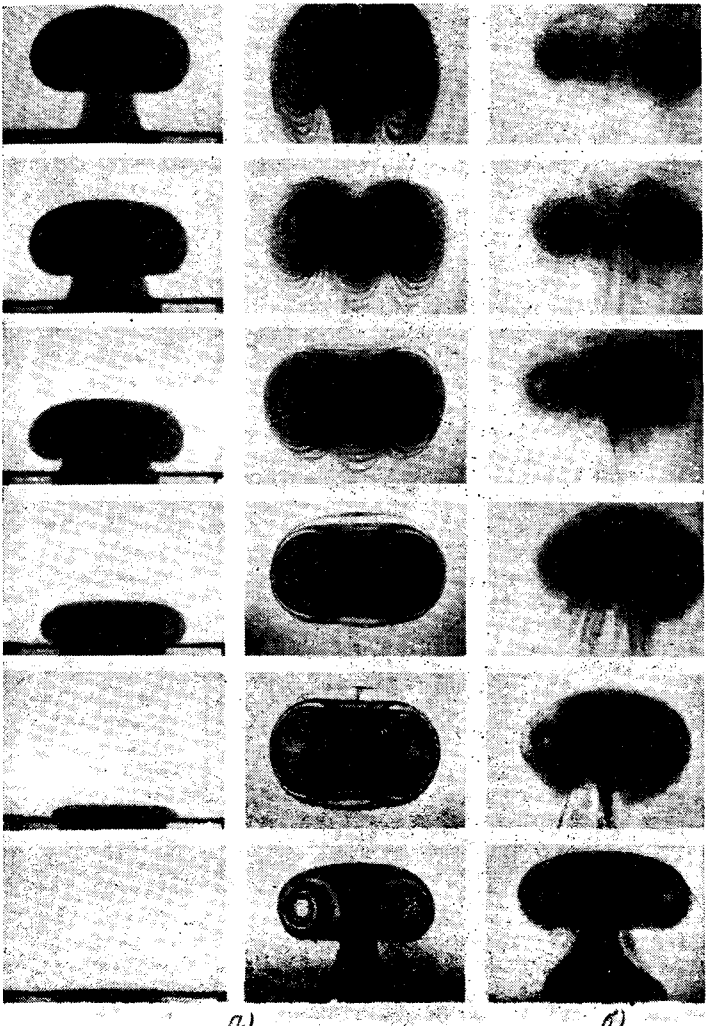


Рис. 124.

с четко выраженной спиральной структурой, хорошо видимой на фотографиях[1]) (рис. 124, *а*). В этом случае распределение завихренности действительно определяется начальным полем скоростей, формой насадки, зависит от того, плавный или резкий был удар, и т. д. Это движение в принципе может быть описано с помощью уравнений Навье — Стокса, но решение соответствующей нестационарной задачи, даже с применением вычислительных машин, связано с огромными трудностями.

С другой стороны, начиная с $\mathrm{Re} \sim 10^3$, характер движения резко меняется, оно становится турбулентным (рис. 124, *б*). В этом случае, как показывает опыт, структура кольцевого вихря не зависит (или, по крайней мере, зависит очень слабо) от деталей начальных и краевых условий. После того, как вихрь проходит расстояние порядка нескольких радиусов отверстия, вырабатывается некоторое распределение завихренности, вообще не зависящее от способа образования вихря. Усредненное движение в турбулентном вихре определяется только размером и скоростью вихря. При дальнейшем движении, как показывает эксперимент, размеры вихря линейно увеличиваются с пройденным расстоянием, причем форма вихря преобразуется подобно.

Турбулентная вязкость. Турбулентное движение вязкой жидкости, как известно, не описывается замкнутой системой уравнений — в каждом конкретном случае для получения такой системы приходится выдвигать дополнительные гипотезы, т. е. рассматривать какую-либо модель движения.

В безграничном пространстве турбулентно движущуюся жидкость можно описывать как жидкость, обладающую некоторой, как говорят, *турбулентной вязкостью* ν_*, отличной от истинной кинематической вязкости. Такое феноменологическое описание свободной турбулентности (в отсутствии границ) дает хорошие результаты в теории турбулентных струй и в некоторых других случаях.

---

[1]) Эти фотографии выполнены А. А. Бузуковым в Институте гидродинамики СО АН СССР

Турбулентный характер движения жидкости в кольцевом вихре можно описать введением коэффициента турбулентной вязкости ν_*. Предположим, что этот коэффициент есть некоторая функция времени, не зависит от пространственных координат и определяется характерными масштабами движения (размером и скоростью вихря). Более того, предположим, что

$$\nu_*(t) = \lambda U(t) R(t), \tag{6}$$

где U и R — скорость и радиус вихря [1]), а коэффициент λ — постоянная, величина которой должна определяться сравнением результатов расчета с экспериментом.

Опыт показывает, что на значительном участке движения вихря турбулентная вязкость во много раз больше кинематической, и последней можно пренебречь. Окончательно получаем следующее: усредненное движение турбулентного вихря описывается уравнениями Гельмгольца (гл. I), в которые вместо кинематической вязкости ν входит турбулентная вязкость ν_*.

Уравнения Гельмгольца. Будем рассматривать в вязкой жидкости одновременно осесимметричные кольцевые вихри и соответствующий плоский аналог. В силу сделанных предположений система уравнений, описывающая такие движения, имеет вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial r}\frac{\partial}{r^k}\left(\frac{\Omega}{r^k}\right) - \frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Omega}{r^k}\right) = \\ = \nu_*(t)\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + k\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Omega}{r}\right), \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{k}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -r^k \Omega.\end{gathered} \tag{7}$$

Уравнения (7) называются уравнениями Гельмгольца, при $k = 1$ они описывают осесимметричное движение, а при $k = 0$ — плоское (Ω — соответствующая компонента вектора завихренности, Ψ — функция тока).

Предположение о коэффициенте турбулентной вязкости заведомо неверно на больших расстояниях от кольцевого вихря, так как там этот коэффициент должен обращаться в нуль. Однако из уравнений Гельмгольца (7) видно, что члены с вязкостью существенны только там,

[1]) Определение этих величин см. ниже на стр. 344.

где завихренность заметно отличается от нуля. Поскольку в кольцевом вихре завихренность очень быстро уменьшается с удалением от него, можно ожидать, что сделанное предположение не будет давать существенной ошибки. Аналогичная ситуация имеет место в теории турбулентных струй, дающей хорошее соответствие с экспериментом.

Система (7) обладает важным законом сохранения. Умножая первое уравнение на r^2 при $k=1$ или на r при $k=0$ и интегрируя по всему пространству, в предположении, что Ω и ее производные достаточно быстро стремятся к нулю на бесконечности, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int \Omega(t, r, z) r^k \, dr\, dz = 0. \tag{8}$$

Этот результат есть частный случай общего утверждения о том, что в безграничной вязкой жидкости, покоящейся на бесконечности, величина

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{2}\int (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\Omega})\, dv \tag{9}$$

не зависит от времени (доказательство дано в работе [6]). Величину $\boldsymbol{P}$ естественно назвать импульсом вихря, а постоянство этой величины есть не что иное, как закон сохранения импульса.

Автомодельная задача. Для полученной системы уравнений необходимо, вообще говоря, задать начальное условие — начальное распределение завихренности, определяемое способом образования кольцевого вихря. Однако, как уже отмечалось раньше, распределение завихренности очень быстро приближается к некоторому распределению, не зависящему от начальных условий, которое в дальнейшем линейно зависит от расстояния. Естественно поэтому предположить, что предельное распределение завихренности описывается автомодельным решением системы Гельмгольца (4).

Поставим следующую задачу, которую снова будем рассматривать и в осесимметричном и в плоском вариантах. Пусть в момент времени $t=0$ завихренность Ω равна нулю всюду в безграничном пространстве, за исключением начала координат, где в осесимметричном случае расположен кольцевой вихрь бесконечно малого

радиуса и бесконечной большой интенсивности так, что

$$\pi \int_{-\infty}^{\infty}\int \Omega(0, r, z) r^2 \, dr \, dz = P_0. \tag{10}$$

В плоском варианте будем считать, что в начале координат имеется вихревой диполь: пара вихрей бесконечно большой интенсивности и противоположных знаков, расположенных на бесконечно малом расстоянии друг от друга так, что

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty}\int \Omega(0, r, z) r \, dr \, dz = p_0. \tag{11}$$

Легко видеть, что P_0 и p_0 — это импульсы кольцевого вихря в начальный момент соответственно для осесимметричного и плоского вариантов.

В такой постановке единственной размерной постоянной, определяющей движение вихря, будет $[P_0] = \frac{L^4}{T}$ в осесимметричном случае и $[p_0] = \frac{L^3}{T}$ — в плоском. Следовательно, в осесимметричном случае искомые функции Ω и Ψ имеют такой вид:

$$\Omega = \Omega(t, r, z, P_0), \quad \Psi = \Psi(t, r, z, P_0),$$

а турбулентная вязкость в соответствии с (6) — вид

$$\nu_* = \nu_*(t, P_0).$$

Анализ размерностей (см. § 4) позволяет уточнить вид этих функций, именно

$$\Omega = \frac{1}{t}\omega(x, y), \quad \Psi = \frac{P_0^{3/4}}{t^{1/4}}\psi(x, y), \quad \nu_* = \lambda_0 \frac{P_0^{1/2}}{t^{1/2}}, \tag{12}$$

где

$$x = \frac{z}{P_0^{1/4} t^{1/4}}, \quad y = \frac{r}{P_0^{1/4} t^{1/4}}, \tag{13}$$

а λ_0 — постоянная. Таким образом, сформулированная задача оказывается автомодельной (см. гл. I).

В плоском случае точно так же можно заключить, что искомые функции имеют следующий вид:

$$\Omega = \frac{1}{t}\,\omega(x, y), \quad \Psi = \frac{p_0^{2/3}}{t^{1/3}}\,\psi(x, y), \quad \nu_* = \lambda_0 \frac{p_0^{2/3}}{t^{1/3}}, \tag{14}$$

где

$$x = \frac{z}{p_0^{1/3} t^{1/3}}, \qquad y = \frac{r}{p_0^{1/3} t^{1/3}}. \tag{15}$$

Подставляя выражения (12) и (14) в (7), мы получим уравнения для определения ω и ψ. Ограничимся далее плоским случаем ($k = 0$); здесь получается следующая система уравнений с частными производными:

$$\begin{gathered} \lambda_0 \Delta\omega + \frac{1}{3} x\omega_x + \frac{1}{3} y\omega_y + \omega = \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y, \\ \Delta\psi = -\omega. \end{gathered} \tag{16}$$

Нам нужно найти решения этой системы ω и ψ, стремящиеся к нулю на бесконечности и удовлетворяющие условию нормировки

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty}\int y\omega\, dx\, dy = 1, \tag{17}$$

которое следует из закона сохранения импульса и начального условия. Из соображений симметрии ясно также, что ω и ψ должны быть нечетными функциями от y:

$$\omega(x, -y) = -\omega(x, y), \qquad \psi(x, -y) = -\psi(x, y). \tag{18}$$

Постоянная λ_0, входящая в первое уравнение (16), остается неопределенной — ее величина должна определяться сравнением с экспериментом.

К сожалению, точное решение системы (16) получить не удается и мы ограничимся замечаниями общего характера. Назовем *радиусом* вихря и *расстоянием*, им пройденным, соответственно такие значения $r = R(t)$ и $z = L(t)$, при которых функция $\Omega(t, r, z)$ имеет максимум при фиксированном значении t. Эти величины, очевидно, определяются равенствами, которые в осесимметричном случае имеют вид

$$R(t) = P_0^{1/4} t^{1/4} y_0(\lambda_0), \qquad L(t) = P_0^{1/4} t^{1/4} x_0(\lambda_0); \tag{19}$$

здесь $x_0(\lambda_0)$ и $y_0(\lambda_0)$ — координаты точки, где достигает максимума функция $\omega(x, y)$, положение этой точки зависит от λ_0.

Равенства (19) определяют закон движения вихря. Из них сразу следует, что

$$R(t) = \alpha(\lambda_0) L(t), \tag{20}$$

где $\alpha(\lambda_0) = \frac{y_0(\lambda_0)}{x_0(\lambda_0)}$. Мы получаем, что радиус вихря линейно зависит от расстояния, им проходимого; этот результат хорошо подтверждается экспериментом. Величина α измеряется в эксперименте и оказывается малой порядка $10^{-2} - 10^{-3}$. Зная α и имея решение системы (16), можно определить λ_0.

Естественно ожидать, что малым α соответствуют малые λ_0, и следовательно, для сравнения с экспериментом достаточно получить решение системы (16) для малых значений λ_0. Но и эта задача оказалась сложной.

Модельная задача. Следуя Б. А. Луговцову [7], рассмотрим модельную задачу, в которой (16) заменяется похожей системой уравнений

$$\begin{gathered} \lambda_0 \Delta\omega + \frac{x}{3}\omega_x + \frac{y}{3}\omega_y + \omega = \psi_y(x_0, y_0)\omega_x, \\ \Delta\psi = -\omega, \end{gathered} \tag{21}$$

где x_0 и y_0 — координаты точки максимума функции $\omega(x, y)$.

Сделаем замену переменных, полагая

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{6\lambda_0}}[x - 3\psi_y(x_0, y_0)], \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{6\lambda_0}} y,$$
$$\omega = e^{-\frac{\xi^2+\eta^2}{2}} \theta(\xi, \eta).$$

Тогда из первого уравнения (21) мы получим для θ уравнение

$$\theta_{\xi\xi} + \theta_{\eta\eta} + (4 - \xi^2 - \eta^2)\theta = 0.$$

Оно допускает разделение переменных: полагая $\theta(\xi, \eta) = \theta_1(\xi)\theta_2(\eta)$, мы сведем его к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\theta_1'' - \xi^2\theta_1 = -(c + 1)\theta_1, \quad \theta_2'' - \eta^2\theta_2 = c\theta_2, \tag{22}$$

где c — постоянная разделения. Нас интересуют решения, стремящиеся к нулю при $|\xi|\to\infty$ и $|\eta|\to\infty$, кроме того, в силу (18) функция θ_2 должна быть нечетной.

Эта задача хорошо изучена — в квантовой механике ей соответствует задача о гармоническом осцилляторе (см. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский [1]). Решения уравнений (22), удовлетворяющие нашим дополнительным условиям, существуют только при

$$c+4=2m+1 \qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$
$$-c=2n+1 \qquad (n=0,\ 1,\ 2).$$

Отсюда следует, что либо $m=0$, $n=1$, либо $m=1$, $n=0$, а условие нечетности по η оставляет только одну возможность $m=0$, $n=1$. Соответствующее решение имеет вид $\theta_1(\xi)=A_1e^{-\frac{\xi^2}{2}}$, $\theta_2(\eta)=A_2\eta e^{-\frac{\eta^2}{2}}$, откуда

$$\theta(\xi,\ \eta)=A\eta e^{-\frac{\xi^2+\eta^2}{2}},$$

где A — произвольная постоянная, определяемая нормировкой (17).

Во втором уравнении (21) теперь правая часть известна, и оно становится уравнением Пуассона, решение которого, обращающееся в нуль на бесконечности, определяется формулой

$$\psi(x,\ y)=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int\omega(\xi,\ \eta)\log[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]\,d\xi\,d\eta$$

(см., например, В. С. Владимиров [2]).

Зная ψ, мы можем определить постоянную $\psi_y(x_0, y_0)$ и найти окончательное решение модельной задачи:

$$\omega(x,\ y)=\frac{y}{2\pi\lambda_0^2}e^{-\frac{(x-x_0)^2+y^2}{6\lambda_0}},$$
$$\psi(x,\ y)=\frac{y}{\pi[(x-x_0)^2+y^2]}\left(1-e^{-\frac{(x-x_0)^2+y^2}{6\lambda_0}}\right); \tag{23}$$

здесь координаты точки максимума ω

$$x_0=\frac{1}{\pi\lambda_0}\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-1\right),\qquad y_0=\sqrt{3\lambda_0}. \tag{24}$$

следовательно,

$$\alpha(\lambda_0) = \frac{y_0(\lambda_0)}{x_0(\lambda_0)} = \frac{\pi\sqrt{3}}{\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - 1\right)} \lambda_0^{3/2}. \qquad (25)$$

Это модельное решение можно использовать для грубой оценки положения максимума $\omega(x, y)$ в точной задаче, что очень важно для возможности применения численных методов.

Сравнение с экпериментом. Закон движения вихря (19) дает хорошее согласие с экспериментом. Удобно преобразовать формулы (19) так, чтобы в них входили экспериментально измеряемые величины — начальный радиус R_0 и начальная скорость U_0. В качестве начала отсчета удобно выбирать не момент выхода вихря из отверстия, а более поздний момент, когда вихрь от отверстия отойдет на некоторое расстояние (четыре-пять диаметров отверстия), — это объясняется тем, что на вырабатывание автомодельного распределения завихренности в вихре необходимо некоторое время. Если время t и расстояние $L(t)$, проходимое вихрем, отсчитывать от этой точки, то вместо (19) получим

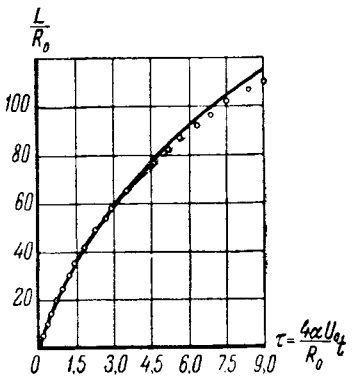


Рис. 125.

$$L(t) = \frac{R_0}{\alpha}\left[\left(1 + \frac{4\alpha U_0}{R_0} t\right)^{1/4} - 1\right], \quad R(t) = R_0 + \alpha L(t). \qquad (26)$$

На рис. 125 кружками отмечены экспериментальные точки, соответствующие движению вихря, начальные параметры которого равны $R_0 = 10$ *см*, $U_0 = 4{,}3$ *м/сек*, а величина $\alpha = 6 \cdot 10^{-3}$. Сплошная кривая получена по формуле (26). Отклонение расчетной кривой от экспериментальных точек при больших t объясняется тем, что турбулентная вязкость со временем уменьшается и, начиная с некоторого момента, делается сравнимой с ки-

нематической, после чего пренебрежение кинематической вязкостью становится неправомерным. После того как кинематическая вязкость становится существенной, вихрь быстро останавливается.

§ 36. Перенос примесей

Турбулентная диффузия. Аналогичным образом можно изучить задачу о переносе турбулентным вихрем пассивной примеси, т. е. примеси, которая не оказывает влияния на его движение. Турбулентное перемешивание жидкости сопровождается переносом примесей в молярных (макроскопических) объемах. Этот процесс в случае свободной турбулентности (в отсутствии границ) можно описать введением специального «коэффициента турбулентной диффузии» D_*, величина которого, как и величина коэффициента турбулентной вязкости ν_*, определяется характерными масштабами движения (размером и скоростью вихря). Из опытов с турбулентными струями известно [5], что коэффициент турбулентной диффузии с точностью до множителя порядка единицы совпадает с коэффициентом турбулентной вязкости:

$$D_*(t) = \gamma \nu_*(t); \tag{1}$$

для турбулентных струй $\gamma \approx 1{,}2 - 1{,}3$.

Уравнение, описывающее распределение примеси, концентрацию которой мы обозначим через C, имеет вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\boldsymbol{V}, \nabla) C = (D_*(t) + D)\,\Delta C, \tag{2}$$

где D — молекулярный коэффициент диффузии (см. [5]).

Ясно, что на начальном участке движения вихря молекулярным коэффициентом диффузии D можно пренебречь по сравнению с турбулентным. Скорость $\boldsymbol{V}$ известна, если известно движение вихря.

Для уравнения (2) необходимо, вообще говоря, задать начальные условия, которые сводятся к заданию начального распределения концентрации, зависящего от способа заполнения вихря примесями. Эксперимент, однако, показывает, что так же, как и распределение завихренности, распределение концентрации примесей очень быстро приближается к некоторому распределению,

не зависящему от начальных условий. При этом избыточные по отношению к предельному распределению количества примесей быстро теряются, а после этого потери примесей практически отсутствуют.

Автомодельная задача. Естественно предположить, что предельное распределение концентрации примесей является автомодельным [7]. Поставим следующую задачу (ограничиваясь плоским случаем). Пусть в момент времени $t = 0$ концентрация C равна нулю всюду, кроме начала координат, где она бесконечно велика, так что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int C\,dr\,dz = N_0, \tag{3}$$

где N_0 — полное количество примеси (например, полное число частиц дыма). В этой же точке при $t = 0$ находится и вихревой диполь с импульсом p_0.

Ясно, что концентрация

$$C = C(t,\ r,\ z,\ p_0,\ N_0), \tag{4}$$

а согласно (1) коэффициент турбулентной диффузии

$$D_* = \gamma v_*(t,\ p_0), \tag{5}$$

так как по предположению примесь не оказывает влияния на движение жидкости.

В силу линейности уравнения (2) и нормировки (3) ясно, что C пропорциональна N_0, и из анализа размерностей следует, что функции (4) и (5) имеют вид

$$C = \frac{N_0}{p_0^{2/3}t^{2/3}}\,c(x,\ y), \qquad D_* = \gamma\lambda_0\frac{p_0^{2/3}}{t^{1/3}}. \tag{6}$$

Подставляя это в (2), получаем уравнение для c:

$$\gamma\lambda_0\,\Delta c + \frac{x}{3}c_x + \frac{y}{3}c_y + \frac{2}{3}c = \psi_y c_x - \psi_x c_y, \tag{7}$$

причем нас интересуют его решения, стремящиеся к нулю при $x^2 + y^2 \to \infty$ и удовлетворяющие условию нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int c\,dx\,dy = 1, \tag{8}$$

которое следует из закона сохранения полного количества примеси.

Решение поставленной задачи позволит определить предельное распределение концентрации примеси в вихре. Если, например, в момент образования весь объем вихря равномерно заполнен дымом, то через некоторое время в результате турбулентного перемешивания «лишний» дым будет потерян. Опыт и приближенные оценки показывают, что избыточное по сравнению с предельным количество примеси убывает с расстоянием по экспоненте, т. е. очень быстро.

Дымовые кольца. Проведенный анализ позволяет объяснить интересное явление, связанное с дымовыми

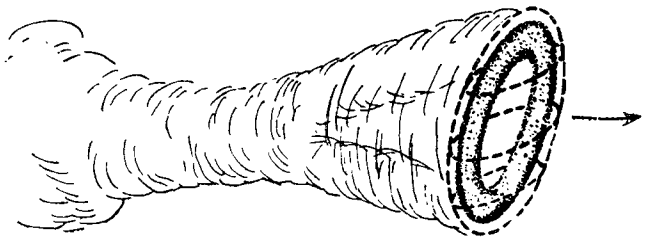


Рис. 126.

кольцами, которые выпускают изо рта искусные курильщики. Такие кольца хорошо моделируются в наполненном дымом ящике с круглым отверстием, о котором говорилось в § 35. Кольца из этого ящика, не разрушаясь, проходят расстояния порядка 150—200 диаметров. Можно соорудить пистолет, стреляющий дымовыми кольцами — вылетающие из него кольца колышат довольно плотную портьеру на расстоянии 5—6 метров от места выстрела.

Мы знаем, что вместе с вихрем в воздухе движется тело вращения, близкое к сплюснутому эллипсоиду, но в описанных опытах четко видны именно кольца из дыма, за которыми остается дымовой след (рис. 126).

Дело в том, что вследствие турбулентной диффузии частицы дыма у границ движущегося тела быстро отходят от него (они и образуют след). Видимой является только область высокой концентрации частиц дыма, которая представляет собой кольцо (тор). Такое

распределение концентрации дыма описывается осесимметрическим вариантом автомодельной задачи из предыдущего пункта.

Поразительная устойчивость дымовых колец, о которой говорилось выше, по-видимому, и объясняется тем, что они представляют собой часть движущегося эллипсоида вращения — одной из наиболее часто встречающихся в природе устойчивых форм.

Заметим, что точно такие же кольца можно наблюдать в воде, если вытолкнуть в нее поршнем некоторый объем жидкости, подкрашенный чернилами. Очень хорошо видно густо окрашенное чернильное кольцо, которое движется вместе с некоторым, окрашенным слабее, объемом жидкости, имеющим эллипсоидальную форму. Ограниченные размеры экспериментальной установки не позволяют, однако, проследить весь путь вихря до его остановки — вихрь наталкивается на стенку и разрушается.

§ 37. Формирование и движение вихрей

Вихри в воздухе. Экспериментально известен ряд способов создания вихревых движений. Описанный выше способ получения дымовых колец из ящика позволяет получать вихри, радиус и скорость которых имеют порядок 10—20 *см* и 10 *м/сек* соответственно, в зависимости от диаметра отверстия и силы удара. Такие вихри проходят расстояния 15—20 *м*.

Вихри гораздо большего размера (радиусом до 2 *м*) и большей скорости (до 100 *м/сек*) получаются с помощью ВВ. В трубе, закрытой с одного конца и заполненной дымом, производится подрыв заряда ВВ, расположенного у дна. Вихрь, получаемый из цилиндра радиусом 2 *м* при заряде весом около 1 *кг*, проходит расстояние около 500 *м*. На большей части пути вихри, получаемые таким способом, имеют турбулентный характер и хорошо описываются законом движения, который изложен в § 35.

Механизм образования таких вихрей качественно ясен. При движении в цилиндре воздуха, вызванном взрывом, на стенках образуется пограничный слой. На краю цилиндра пограничный слой отрывается, в резуль-

тате чего создается тонкий слой воздуха со значительной завихренностью. Затем происходит сворачивание этого слоя. Качественная картина последовательных этапов приведена на рис. 127, где изображен один край цилиндра и срывающийся с него вихревой слой. Возможны и другие схемы образования вихрей.

При малых числах Рейнольдса спиральная структура вихря сохраняется довольно долго. При больших числах Рейнольдса, в результате неустойчивости, спиральная структура разрушается сразу и происходит турбулентное перемешивание слоев. В результате образуется вихревое ядро, распределение завихренности в котором

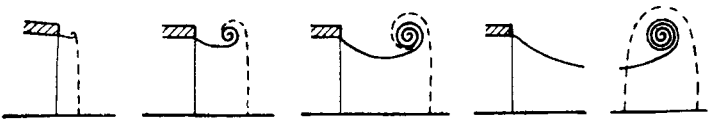


Рис. 127.

можно найти, если решить поставленную в § 35 задачу, описываемую системой уравнений (16).

Однако в настоящий момент нет никакой схемы расчета, которая позволяла бы по заданным параметрам трубы и весу ВВ определять начальные параметры сформировавшегося турбулентного вихря (т. е. его начальные радиус и скорость). Эксперимент показывает, что для трубы с заданными параметрами существует наибольший и наименьший вес заряда, при которых вихрь образуется; на его образование сильно влияет и расположение заряда.

Вихри в воде. Мы уже говорили, что вихри в воде можно получать аналогичным способом, выталкивая поршнем из цилиндра некоторый объем жидкости, подкрашенной чернилами.

В отличие от воздушных вихрей, начальная скорость которых может достичь 100 *м/сек* и более, в воде при начальной скорости 10—15 *м/сек* вследствие сильного вращения жидкости, движущейся вместе с вихрем, возникает кавитационное кольцо. Оно возникает в момент образования вихря при срыве пограничного слоя с края цилиндра. Если пытаться получить вихри со скоростью

более 20 *м/сек*, то кавитационная каверна становится столь большой, что возникает неустойчивость и вихрь разрушается. Сказанное относится к диаметрам цилиндра порядка 10 *см*; возможно, что с увеличением диаметра удастся получить устойчивые вихри, движущиеся с большой скоростью.

Интересное явление возникает, когда вихрь движется в воде вертикально вверх по направлению к свободной поверхности. Часть жидкости, образующая так называемое тело вихря, взлетает над поверхностью, сначала почти без изменения формы — водяное кольцо выпрыгивает из воды. Иногда скорость вылетевшей массы в воздухе увеличивается. Это можно объяснить отбрасыванием воздуха, которое происходит на границе вращающейся жидкости. В дальнейшем вылетевший вихрь разрушается под действием центробежных сил.

Падение капель. Легко наблюдать вихри, образующиеся при падении капель чернил в воду. Когда чернильная капля попадает в воду, образуется кольцо, состоящее из чернил и движущееся вниз. Вместе с кольцом движется некоторый объем жидкости, образующий тело вихря, которое также окрашено чернилами, но гораздо слабее. Характер движения сильно зависит от соотношения плотностей воды и чернил. При этом оказываются существенными различия плотности в десятые доли процента.

Плотность чистой воды меньше, чем чернил. Поэтому при движении вихря на него действует сила, направленная вниз, по ходу вихря. Действие этой силы приводит к увеличению импульса вихря. Импульс вихря

$$P \approx \Gamma R^2, \tag{1}$$

где Γ — циркуляция или интенсивность вихря, и R — радиус вихревого кольца, а скорость движения вихря

$$V \approx \frac{\Gamma}{R}. \tag{2}$$

Если пренебречь изменением циркуляции, то из этих формул можно сделать парадоксальный вывод: действие силы в направлении движения вихря приводит к уменьшению его скорости. Действительно, из (1) следует, что с ростом импульса при постоянной цирку-

ляции должен увеличиваться радиус R вихря, но из (2) видно, что при постоянной циркуляции с ростом R скорость падает.

В конце движения вихря чернильное кольцо распадается на 4—6 отдельных сгустков, которые в свою очередь превращаются в вихри с маленькими спиральными кольцами внутри. В некоторых случаях эти вторичные кольца распадаются еще раз.

Механизм этого явления не очень ясен, и существует несколько его объяснений. В одной схеме главную роль играет сила тяжести и неустойчивость так называемого тейлоровского типа, которая возникает, когда в поле тяжести более плотная жидкость находится над менее плотной, причем обе жидкости вначале покоятся. Плоская граница, разделяющая две такие жидкости, неустойчива — она деформируется, и отдельные сгустки более плотной жидкости проникают в менее плотную.

При движении чернильного кольца циркуляция на самом деле уменьшается, и это приводит к полной остановке вихря. Но на кольцо продолжает действовать сила тяжести, и в принципе оно должно было бы опускаться дальше как целое. Однако возникает тейлоровская неустойчивость, и в результате кольцо распадается на отдельные сгустки, которые опускаются под действием силы тяжести и в свою очередь образуют маленькие вихревые кольца.

Возможно и другое объяснение этого явления. Увеличение радиуса чернильного кольца приводит к тому, что часть жидкости, движущаяся вместе с вихрем, принимает форму, изображенную на рис. 127 (стр. 352). В результате действия на вращающийся тор, состоящий из линий тока, сил, аналогичных силе Магнуса, элементы кольца приобретают скорость, направленную перпендикулярно скорости движения кольца как целого. Такое движение неустойчиво, и происходит распад на отдельные сгустки, которые снова превращаются в маленькие вихревые кольца.

Механизм образования вихря при падении капель в воду может иметь разный характер. Если капля падает с высоты 1—3 *см*, то ее вход в воду не сопровождается всплеском и свободная поверхность деформируется слабо. На границе между каплей и водой

образуется вихревой слой, сворачивание которого и приводит к образованию кольца чернил, окруженного захваченной вихрем водой. Последовательные стадии образования вихря в этом случае качественно изображены на рис. 128.

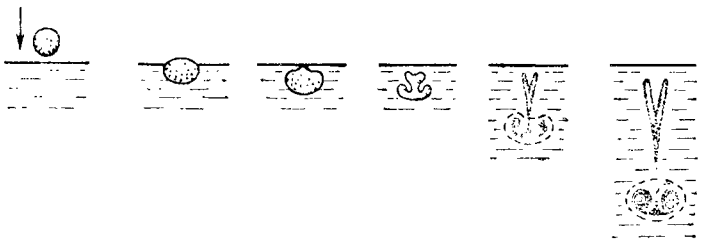


Рис. 128.

При падении капель с большой высоты механизм образования вихрей иной. Здесь падающая капля, деформируясь, растекается на поверхности воды, сообщая на площади, много большей ее диаметра, импульс с максимальной интенсивностью в центре. В результате на поверхности воды образуется впадина, она по инерции расширяется, а потом происходит схлопывание и возникает кумулятивный всплеск — султан (см. гл. VII).

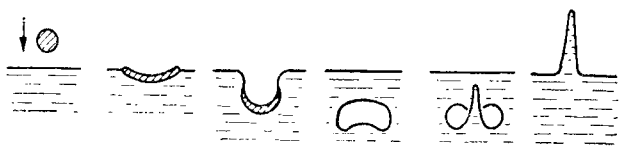


Рис. 129.

Масса этого султана в несколько раз больше массы капли. Падая под действием силы тяжести в воду, султан образует вихрь по уже разобранной схеме (рис. 128); на рис. 129 изображена первая стадия падения капли, приводящая к образованию султана.

По этой схеме образуются вихри, когда на воду падает редкий дождь с крупными каплями — поверхность воды покрывается тогда сеткой небольших султанчиков. Вследствие образования таких султанчиков каждая

капля значительно наращивает свою массу, и поэтому вихри, вызванные ее падением, проникают на довольно большую глубину.

По-видимому, это обстоятельство можно положить в основу объяснения известного эффекта гашения дождем поверхностных волн в водоемах. Известно, что при наличии волн горизонтальные составляющие скорости частиц на поверхности и на некоторой глубине имеют противоположные направления. Во время дождя значительное количество жидкости, проникающее на глубину, гасит волновую скорость, а восходящие из глубины токи гасят скорость на поверхности. Было бы интересно подробнее разработать этот эффект и построить его математическую модель.

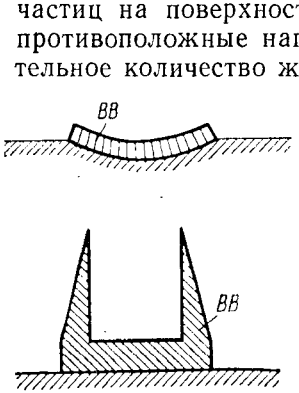


Рис. 130.

Вихревое облако атомного взрыва. Явление, очень похожее на образование вихревого облака при атомном взрыве, можно наблюдать при взрывах обычных ВВ, например, при подрыве плоской круглой пластины ВВ, расположенной на плотном грунте или на стальной плите. Можно также располагать ВВ в виде сферического слоя или стакана, как показано на рис. 130.

Наземный атомный взрыв отличается от обычного взрыва прежде всего существенно большей концентрацией энергии (кинетической и тепловой) при очень малой массе бросаемого вверх газа. При таких взрывах образование вихревого облака происходит за счет выталкивающей силы, которая появляется из-за того, что масса горячего воздуха, образующаяся при взрыве, легче окружающей среды. Выталкивающая сила играет существенную роль и при дальнейшем движении вихревого облака. Точно так же, как при движении чернильного вихря в воде, действие этой силы приводит к росту радиуса вихревого облака и уменьшению скорости. Явление осложняется тем, что плотность воздуха меняется с высотой. Схема приближенного расчета этого явления имеется в работе [8].

Вихревая модель турбулентности. Пусть поток жидкости или газа обтекает поверхность, которая представляет собой плоскость с вмятинами, ограниченными сферическими сегментами (рис. 131, *а*). В гл. V мы показали, что в районе вмятин естественно возникают зоны с постоянной завихренностью.

Предположим теперь, что завихренная зона отделяется от поверхности и начинает двигаться в основном потоке (рис. 131, *б*). В силу закрученности эта зона, кроме скорости V основного потока, будет иметь еще компоненту скорости, перпендикулярную к V. В результате такая движущаяся вихревая зона вызовет турбулентное перемешивание в слое жидкости, размер которого в десятки раз превышает размеры вмятины.

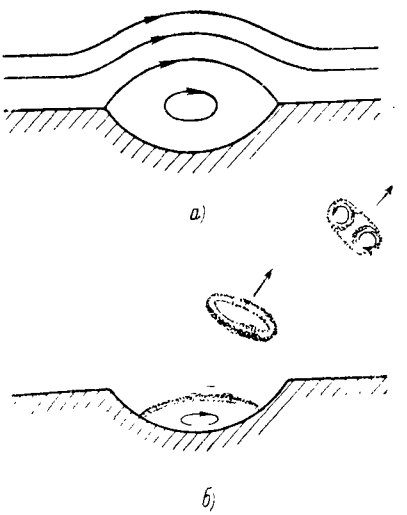


Рис. 131.

Это явление, по-видимому, можно использовать для объяснения и расчетов передвижения больших масс воды в океанах, а также передвижения масс воздуха в горных районах при сильных ветрах.

Снижение сопротивления. В начале главы мы говорили о том, что воздушные или водяные массы без оболочек, которые движутся вместе с вихрем, несмотря на плохо обтекаемую форму испытывают значительно меньшее сопротивление, чем такие же массы в оболочках. Мы указали и причину такого снижения сопротивления — оно объясняется непрерывностью поля скоростей.

Возникает естественный вопрос о том, нельзя ли придать обтекаемому телу такую форму (с подвижной границей) и сообщить ему такое движение, чтобы возникающее при этом течение было аналогично течению при движении вихря, и тем самым попытаться уменьшить сопротивление?

Мы приведем здесь принадлежащий Б. А. Луговцову пример, который показывает, что такая постановка вопроса имеет смысл. Рассмотрим симметричное относительно оси x плоское потенциальное течение несжимаемой невязкой жидкости, верхняя половина которого изображена на рис. 132. На бесконечности поток имеет скорость, направленную вдоль оси x; на рис. 132 штриховкой отмечена каверна, в которой поддерживается такое давление, что на ее границе величина скорости постоянна и равна $V_0 > V_\infty$.

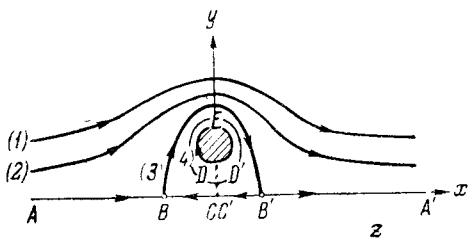


Рис. 132.

Нетрудно видеть, что если вместо каверны в поток поместить твердое тело с подвижной границей, скорость которой также равна V_0, то наше течение можно рассматривать и как точное решение задачи обтекания этого тела вязкой жидкостью. В самом деле, потенциальное течение удовлетворяет уравнению Навье — Стокса, а условие прилипания на границе тела выполняется в силу того, что скорости жидкости и границы совпадают. Таким образом, благодаря подвижной границе течение останется потенциальным, несмотря на вязкость, след не появится и полная сила, действующая на тело, будет равной нулю.

В принципе такую конструкцию тела с подвижной границей можно осуществить и на практике. Для поддержания описанного движения необходим постоянный подвод энергии, который должен компенсировать диссипацию энергии вследствие вязкости. Ниже мы подсчитаем необходимую для этого мощность.

Характер рассматриваемого течения таков, что его комплексный потенциал должен быть многозначной функцией. Чтобы выделить его однозначную ветвь, мы

сделаем в области течения разрез вдоль отрезка CD (рис. 132). Ясно, что комплексный потенциал $w(z) = \varphi + i\psi$ отображает эту область с разрезом на область, изображенную на рис. 133, *а* (соответствующие точки помечены одинаковыми буквами), на нем указаны также образы линий тока (соответствующие помечены одинаковыми цифрами). Разрыв потенциала на линии CD не нарушает непрерывности поля скоростей, ибо производная комплексного потенциала $w'(z) = V_x - iV_y$

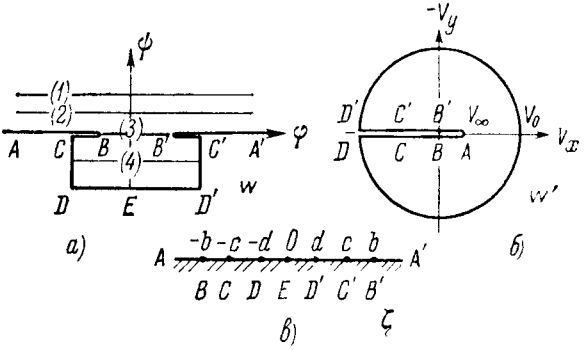


Рис. 133.

остается непрерывной на этой линии. На рис. 133, *б* показан образ области течения при отображении $z \to w'(z)$ — это круг радиуса V_0 с разрезом по действительной оси от точки $D = -V_0$ до $A = V_\infty$, точка разветвления потока B, в которой скорость равна нулю, переходит в центр круга $w' = 0$ [1]).

Итак, в плоскости w' образ области течения и положение точек A, B, D и E вполне определены. В плоскости w, напротив, можно произвольно задавать размеры прямоугольника $CDD'C'$. Задав их, можно найти по

[1]) Для читателей, знакомых с понятием римановой поверхности (см. Л. и Ш., гл. I), укажем, что образом всей области течения (включая часть, лежащую ниже оси x) при отображении $z \to w'(z)$ является двулистный круг — кусок римановой поверхности с двумя точками ветвления второго порядка. При этом граница одной каверны переходит в одну из граничных окружностей двулистного круга, а граница другой каверны — в другую граничную окружность.

теореме Римана (гл. II) единственное конформное отображение левой половины области рис. 133, *а* на нижний полукруг рис. 133, *б*, при котором точки A, D и E на обоих рисунках соответствуют друг другу. В силу симметрии тогда вся область рис. 133, *а* отобразится на круг с разрезом рис. 133, *б*. Если при этом выбрать надлежащим образом положение точки B на рис. 133, *а* (т. е. длину разреза), то она перейдет в центр круга $w' = 0$ и отображение $w \to w'$ определится полностью.

Это отображение удобно выразить через параметр ζ, меняющийся в верхней полуплоскости (рис. 133, *в*). Конформное отображение этой полуплоскости на круг с разрезом рис. 133, *б* с нужным соответствием точек выписывается элементарно:

$$w' = \frac{dw}{dz} = V_0 \frac{\sqrt{\zeta^2 - d^2} - \alpha\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - d^2} + \alpha\zeta}. \tag{3}$$

Здесь $\alpha = \dfrac{V_0 - V_\infty}{V_0 + V_\infty}$, а $d > 0$ — абсцисса точки D' на рис. 133, *в* — величина, которую можно задавать произвольно; чтобы точка B' рис. 133, *в* переходила в $w' = 0$, ее абсцисса должна быть равной

$$b = \frac{d}{\sqrt{1 - \alpha^2}}. \tag{4}$$

Конформное отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$ на область рис. 133, *а* выражается через эллиптические интегралы, а производная этого отображения имеет вид

$$\frac{dw}{d\zeta} = kV_0 \frac{\zeta^2 - b^2}{\sqrt{(\zeta^2 - c^2)(\zeta^2 - d^2)}}, \tag{5}$$

где $c > d$ — абсцисса точки C' на рис. 133, *в* — произвольно задаваемая величина, а $k > 0$ — постоянная, которую можно выразить через c и d (см. формулу Шварца — Кристоффеля, Л. и Ш., гл. II).

Из формул (3) и (5) легко находится

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{dz}{dw}\frac{dw}{d\zeta} = k \frac{\zeta^2 - b^2}{\sqrt{(\zeta^2 - c^2)(\zeta^2 - d^2)}} \frac{\sqrt{\zeta^2 - d^2} + \alpha\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - d^2} - \alpha\zeta}.$$

Если $\zeta = \xi$ меняется на отрезке $(-d, d)$, то отделяя здесь действительные и мнимые части, мы получим

уравнения, из которых можно найти форму обтекаемого тела (каверны) в плоскости течения:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= \frac{k}{1-\alpha^2}\,\frac{d^2-(1+\alpha^2)\,\xi^2}{\sqrt{(c^2-\xi^2)\,(d^2-\xi^2)}}, \\ \frac{dy}{d\xi} &= -\frac{k}{1-\alpha^2}\,\frac{2\alpha\xi}{\sqrt{c^2-\xi^2}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Меняя значения параметров c и d, мы можем варьировать форму и размеры обтекаемого тела.

Перейдем к подсчету мощности, необходимой для поддержания такого движения в вязкой жидкости. Эта мощность равна энергии, которая за счет вязкости диссипируется в единицу времени в слое толщиной 1, параллельном плоскости течения. По формуле (6) § 3 ее величина

$$Q_1 = \frac{\rho\nu}{2}\int\int_D 4\left\{\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy,$$

где D — вся область течения. Если учесть, что функция $\Phi = V_x - iV_y$ — аналитическая в D, и воспользоваться симметрией области течения относительно оси x, то эту формулу можно переписать в виде

$$Q_1 = 8\rho\nu\int\int_{D_1} |\,\Phi'(z)\,|^2\,dx\,dy,$$

где D_1 — часть области течения в верхней полуплоскости. Остается заметить, что интеграл в последней формуле равен площади образа области D_1 при отображении $z \to w'(z)$, т. е. площади круга радиуса V_0, и мы получим окончательно

$$Q_1 = 8\pi\rho\nu V_0^2. \tag{7}$$

Предположим, что длина L обтекаемого тела в направлении, перпендикулярном плоскости течения, много больше поперечных размеров этого тела, и пренебрежем граничными эффектами. Тогда мы получим, что полная мощность, необходимая для поддержания движения такого тела,

$$Q = Q_1 \cdot L = 8\pi\rho\nu V_0^2 L. \tag{8}$$

Интересно отметить, что эта мощность не зависит от поперечных размеров обтекаемого тела (конечно, если форма этого тела получается описанным выше способом). Можно убедиться в том, что обтекание тела по рассмотренной схеме требует значительно меньшей мощности, чем та, которая, например, затрачивается на обтекание плоской пластины сравнимых размеров (см. [3]).

Проделанный расчет справедлив для ламинарных течений. В действительности же, при достаточно больших числах Рейнольдса, движение будет турбулентным, и необходимая мощность Q может увеличиться. Для выяснения фактической возможности снижения сопротивления за счет применения описанной схемы обтекания необходимы дальнейшие исследования.

Литература

1. А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, «Наука», М., 1966.
2. В. С. Владимиров, Уравнения математической физики, изд. 2-е, «Наука», М., 1971.
3. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1954.
4. Г. Ламб, Гидродинамика, ГИТТЛ, М. — Л., 1947.
5. Л. А. Вулис, В. П. Кашкаров, Теория струй вязкой жидкости, «Наука», М., 1965.
6. А. А. Луговцов, Б. А. Луговцов, В. Ф. Тарасов, О движении турбулентного вихревого кольца, В сб. «Динамика сплошной среды», вып. III, Новосибирск, 1969.
7. Б. А. Луговцов, О движении турбулентного вихревого кольца и переносе им пассивной примеси, В сб. «Некоторые проблемы математики и механики» (к семидесятилетию М. А. Лаврентьева), «Наука», Л., 1970.
8. А. Т. Онуфриев, Теория движения кольца под действием силы тяжести. Подъем облака атомного взрыва, ПМТФ, 2 (1967).
9. А. А. Луговцов, Б. А. Луговцов, Пример обтекания тела с движущейся границей, В сб. «Динамика сплошной среды», вып. VIII, Новосибирск, 1971.

Глава X

ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Простейшее представление об устойчивости и неустойчивости механических систем дает известный пример с тяжелым шариком на сферической поверхности или на плоскости — в зависимости от характера изменения потенциальной энергии шарика здесь различают случай устойчивого, неустойчивого или безразличного равновесия.

Если на поверхности сферы имеется небольшая вмятина, как на рис. 134, *а*, то при малых смещениях (в линейной постановке задачи о равновесии) мы будем иметь

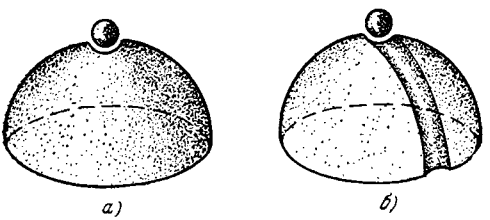


Рис. 134.

устойчивость, а при больших смещениях (в нелинейной постановке задачи) получим неустойчивость. Рис. 134, *б* иллюстрирует динамическую потерю устойчивости — на поверхности сферы здесь имеется желобок, и наиболее вероятен случай, что шарик будет скатываться вниз именно по желобку; в этом случае скорость убывания потенциальной энергии будет больше, чем при движении в других направлениях.

В этой главе мы рассмотрим некоторые результаты, относящиеся к изучению динамических форм потери устойчивости механических систем. Начнем со случая стержней.

§ 38. Неустойчивость стержней

Статическая и динамическая потери устойчивости. Простейший эксперимент, поясняющий различие между этими двумя формами потери устойчивости стержней, можно поставить так. Пусть стержень (т. е. упругая тонкая полоса) расположен вертикально, его нижний конец закреплен в твердом основании, а сверху на него действует не слишком большая вертикальная сила F (рис. 135). Если стержень немного отклонить от вертикального положения и затем отпустить, то он будет совершать затухающие колебания вокруг положения равновесия и через некоторое время вернется в это положение. Мы имеем случай устойчивого равновесия.

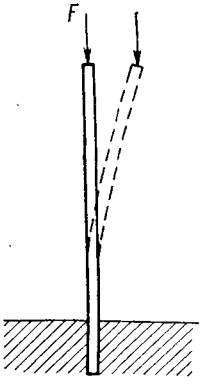


Рис. 135.

Будем теперь постепенно увеличивать силу F. С ростом F частота колебаний уменьшается, и при некотором значении $F = F_{кр}$ частота обратится в нуль — стержень будет находиться в состоянии безразличного равновесия. При дальнейшем увеличении силы F равновесие становится неустойчивым: после любых отклонений стержень изгибается и не возвращается в вертикальное положение.

Величина критической силы $F_{кр}$, при которой равновесие перестает быть устойчивым, зависит от формы, размеров и упругих свойств стержня, а также от условий его закрепления (граничных условий). Описанный выше процесс потери устойчивости, при котором величина нагрузки постепенно увеличивается до тех пор, пока она не достигнет критического значения, называется *статической* потерей устойчивости.

Иначе ставится эксперимент по *динамической* потере устойчивости. Здесь в некоторый момент времени стержень немного изгибается, и к нему сразу прикладывается вертикальная сила, величина которой превышает критическую. Оказывается, что в этой постановке потеря устойчивости происходит иначе, чем при статическом нагружении. Ниже мы рассмотрим это различие подробнее.

В механике упругих тел большинство изученных задач относится к случаю статической устойчивости. Наиболее классическая из таких задач была решена Л. Эйлером еще в 1744 году.

Задача Эйлера. Пусть концы стержня закреплены шарнирно, причем нижний шарнир неподвижен, а верхний может перемещаться вертикально; к верхнему концу прикладывается вертикальная сила F (рис. 136). Предположим, что сечения стержня одинаковы, длина его равна l, момент инерции J и модуль Юнга E.

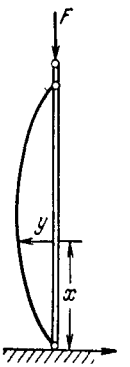


Рис. 136.

При равновесии в каждом сечении стержня изгибающий момент упругих сил должен равняться моменту силы F относительно середины изогнутого стержня. Момент упругих сил, как известно, пропорционален кривизне стержня $k(x)$ в рассматриваемом сечении и равен $\pm EJk$, а момент силы F в этом сечении равен $\pm Fy$.

Задачу будем решать в линейном приближении, предполагая, что прогибы стержня малы. Тогда кривизна $k \approx y''(x)$, и мы получаем уравнение равновесия в виде

$$y'' + \frac{F}{EJ} y = 0 \tag{1}$$

(знак выбран с учетом того, что $y'' > 0$ при $y < 0$ и наоборот).

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = A \sin \omega x + B \cos \omega x, \tag{2}$$

где A и B — произвольные постоянные, а

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{EJ}}. \tag{3}$$

Условие шарнирного закрепления концов приводит к граничным условиям

$$\begin{aligned} y &= 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \\ y &= 0 \quad \text{при} \quad x = l, \end{aligned} \tag{4}$$

из которых следует, что $B = 0$ и

$$A \sin \omega l = 0 \tag{5}$$

Если $F < \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$, то из (5) следует, что $A = 0$, т. е. при этом условии возможно лишь тривиальное решение $y \equiv 0$. Если же $F \geqslant \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$, то при условии $\omega l = n\pi$, которое переписывается в виде

$$F = \frac{n^2\pi^2 EJ}{l^2} \tag{6}$$

(n — произвольное целое число), кроме тривиального, возможны еще решения вида

$$y = A \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{7}$$

Мы получаем спектр собственных значений (6) величины F, каждому из которых соответствует искривленная равновесная форма стержня (7). Критической силой естественно считать ту, при которой перестает быть устойчивой первоначальная прямолинейная форма стержня. Очевидно, эта сила соответствует значению $n = 1$ и равна

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}; \tag{8}$$

она называется *эйлеровой силой*. При медленном возрастании нагрузки F потеря устойчивости происходит при этом значении $F_{\text{кр}}$. Стержень при этом изогнется в форме одной полуволны синусоиды, и если произойдет излом, то стержень распадется на два куска.

Отметим, что величина A амплитуды прогиба стержня в приведенном выше решении задачи Эйлера никак не определяется и теоретически может быть сколь угодно большой. Этот противоречащий действительности вывод является следствием линеаризации задачи. На самом деле при больших прогибах перестает быть обоснованным приближенное выражение для кривизны, которым мы пользовались при выводе уравнения (1). В этом случае надо использовать точное выражение $k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$, и задача становится нелинейной. Исследование устойчивости в нелинейной постановке также возможно, оно дает и конкретные результаты, но основные выводы остаются примерно теми же, что и в линейной постановке. На конгрессе механиков в

Калифорнии (1968 г.) этим проблемам был посвящен обзорный доклад французского ученого Л. Готье[1]).

Динамическая постановка. При изучении действия взрыва на стержни и оболочки были обнаружены формы потери устойчивости, которые не укладываются в разобранную статическую схему [4]. Представим себе следующий эксперимент.

Пусть имеется стержень, расположенный вертикально и закрепленный так же, как в предыдущей задаче. Мы предположим, что разрушение стержня наступает при малых деформациях, когда еще применима линейная теория. Пусть сверху к стержню мгновенно прилагается вертикальная сила F, величина которой в несколько раз превышает эйлерову силу $F_{кр}$. Нужно выяснить, как будет происходить потеря устойчивости стержня и его разрушение.

Как мы видели выше, в схеме статического нагружения стержень разламывается на два куска. Опыт показывает, что в принятых здесь условиях стержень разламывается на несколько кусков, число которых зависит от отношения $F/F_{кр}$. Нашей задачей является выяснение движения стержня в начальный отрезок времени и определение числа кусков, на которые он разламывается.

Как известно, уравнение малых движений стержня описывается дифференциальным уравнением

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x), \tag{9}$$

где ρ — плотность материала и S — площадь поперечного сечения стержня; функция f определяется начальным искривлением, поперечной нагрузкой и т. п.

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (4), к которым теперь следует добавить $y'' = 0$ при $x = 0, l$ (в статической схеме эти условия выполнялись автоматически), естественно искать в виде ряда Фурье по синусам:

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}. \tag{10}$$

[1]) L. Gautier, An elementary treatment of buckling and problems of instability.

Если правая часть уравнения (9) также представлена рядом Фурье $f(x)=\sum f_k \sin\frac{k\pi x}{l}$, то при подстановке (10) в это уравнение мы получим систему обыкновенных уравнений

$$\rho S\frac{d^2q_k}{dt^2}+\frac{\pi^4 EJ}{l^4}k^2(k^2-n)q_k=f_k, \quad k=1,\ 2,\ \ldots, \tag{11}$$

где

$$n=\frac{F}{F_{\text{кр}}}, \quad F_{\text{кр}}=\frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \tag{12}$$

Величина q_k представляет собой амплитуду той гармоники

$$y_k(t)=q_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{13}$$

которой соответствует изгиб стержня по синусоиде с k полуволнами.

Уравнение (11) показывает, что при $k^2>n$ закон изменения $q_k(t)$ — синусоидальный, поэтому соответствующие гармоники $y_k(t)$ имеют ограниченную амплитуду и не дают потери устойчивости. При $k^2<n$, напротив, решения уравнения (11) имеют непериодический характер:

$$q_k(t)=A_k \operatorname{sh}\lambda_k t+\frac{f_k}{\rho S\lambda_k^2}(1-\operatorname{ch}\lambda_k t), \tag{14}$$

где

$$\lambda_k^2=\frac{\pi^4 EJ}{\rho S l^4}k^2(n-k^2) \tag{15}$$

(мы считаем, что $q_k(0)=0$, $q_k'(0)=0$). С течением времени амплитуды соответствующих гармоник неограниченно возрастают, причем быстрее всего возрастает амплитуда той гармоники, для которой величина λ_k — наибольшая. Из (15) видно, что максимум λ_k достигается при $2k^2=n$, так что наибольшую неустойчивость дает синусоидальная форма стержня с числом полуволн, равным ближайшему целому к числу

$$\sqrt{\frac{n}{2}}=\sqrt{\frac{F}{2F_{\text{кр}}}}. \tag{16}$$

Естественно ожидать, что если стержень не выдержит нагрузки и сломается, то число изломов будет равно именно этому числу.

К тому же выводу можно прийти и из энергетических соображений. Существует принцип, согласно которому движение консервативной механической системы осуществляется так, чтобы в каждый данный момент ее полная потенциальная энергия была возможно меньшей. (Скажем, в примере, которым начиналась глава, шарик скатывается по желобку на сферической поверхности, если такой желобок есть.)

Подсчитаем полную потенциальную энергию стержня в нашей задаче. Она составляется из энергии упругого изгиба стержня

$$\Pi_1 = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 dx$$

и потенциала внешних сил Π_2 (продольным сжатием стержня и его начальным изгибом мы пренебрегаем). Потенциал Π_2 равен работе силы F с противоположным знаком: $\Pi_2 = -F\Delta l$, где Δl — смещение верхнего конца стержня по вертикали. Предполагая стержень нерастяжимым и обозначая через l_0 его длину, а через l — проекцию его верхнего конца на ось x, будем иметь

$$l_0 = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, dx \approx l + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Так как $\Delta l = l_0 - l$, то мы получим

$$\Pi_2 = -\frac{F}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx,$$

а значит,

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 dx - \frac{F}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx. \qquad (17)$$

Отсюда с учетом формул (12) получаем выражение полной потенциальной энергии для гармоники (13):

$$\Pi = \frac{\pi^4 q_k^2 EJ}{4l^3} k^2 (k^2 - n). \qquad (18)$$

Мы видим, что минимальное значение П достигается для той гармоники y_k, номер которой равен ближайшему целому к числу (16), т. е. той самой гармонике, которая дает наибольшую неустойчивость.

Таким образом, мы двумя способами пришли к одному и тому же выводу: когда к стержню мгновенно

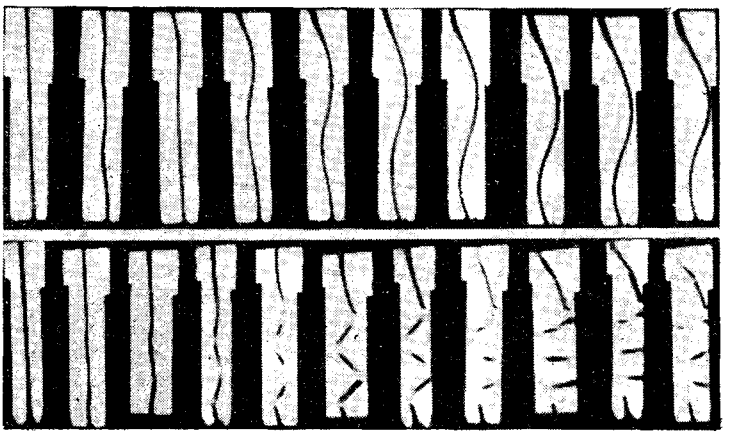


Рис. 137.

прикладывается нагрузка F, в n раз превышающая критическую эйлерову силу $F_{кр}$, то стержень изгибается по синусоиде с числом полуволн, равным $\sqrt{\frac{n}{2}}$ или ближайшему целому числу; если стержень при этом разрушается, то число изломов также оказывается равным этом числу.

На рис. 137 приведены фотографии эксперимента, иллюстрирующего изгиб стержня при динамической нагрузке и его разрушение на несколько кусков[1]). Конечно, на практике наш вывод осуществляется лишь в вероятностном смысле: при проведении большого числа опытов среднее число осколков близко к $\sqrt{\frac{n}{2}}$.

[1]) В этом эксперименте груз падал на пластины из оргстекла.

Интересно отметить, что аналогичный результат наблюдается при мгновенном нагружении тонкостенной трубки, когда эта трубка подвергается внешнему давлению. Так же, как в случае стержня, имеется критическое давление $F_{кр}$ такое, что если внешнее давление на трубку меньше критического, то трубка устойчива; если сжать ее в пределах упругости, то при снятии сжимающей силы она вернется в прежнее состояние. Если же давление превысит критическое, то трубка потеряет устойчивость в прежнем смысле. Если нагрузка будет в n раз больше критической, то мы получим деформацию с количеством волн порядка $\sqrt{n}$.

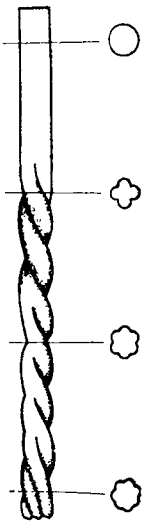


Рис. 138.

Наиболее яркий пример динамической неустойчивости дает следующий опыт. Если тонкостенную трубку с заделанными концами погрузить в воду, а затем вблизи нижнего конца произвести взрыв, то трубка будет обжата так, что ее сечение будет волнистым с наибольшим количеством волн вблизи заряда (рис. 138).

Хотя за последние 20 лет проблема динамической устойчивости значительно продвинулась, все же здесь осталось еще много нерешенных задач: динамическая устойчивость труб при осевой нагрузке, динамическая неустойчивость сферических оболочек и многие другие.

§ 39. Механизм разрушения

При техническом использовании взрывов среди других возникает такая проблема: как и в каких количествах расположить ВВ в скальном массиве так, чтобы после взрыва получить куски породы заданных размеров. Важно и частичное решение этой проблемы — получить при взрыве из разрушенного массива наибольшее количество кусков данного габарита. Эта проблема тесно связана также с известной проблемой осколочных снарядов: надо добиться, чтобы осколки (или хотя бы большая их часть) имели заданные размеры.

Вероятностный подход. В любом реальном физическом теле всегда имеется большое количество структурных дефектов (в том числе трещин), расположенных хаотически и имеющих различные размеры и форму. Под действием взрыва происходит раскрытие и развитие этих дефектов, которое и приводит к образованию осколков разнообразных форм и объемов.

В простейшем случае, когда материал в достаточно больших объемах обладает изотропными свойствами, можно описать результат осколочного действия взрыва, введя функцию распределения, т. е. вероятность того, что осколок имеет размер, меньший некоторой величины. Как показывают многочисленные эксперименты, эта функция с достаточной точностью может быть представлена в виде:

$$\Phi(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^n}, \tag{1}$$

где x — характерный размер осколка, а x_0, n — параметры распределения.

Вероятность dp того, что осколок имеет характерный размер в диапазоне $(x, x+dx)$, получается дифференцированием функции $\Phi(x)$:

$$dp = \frac{n}{x_0}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^n} dx. \tag{2}$$

Практически эта вероятность определяется как отношение объема всех осколков, имеющих размер в интервале $(x, x+dx)$, ко всему разрушенному объему:

$$\Delta p = \frac{\Delta V}{V_0}. \tag{3}$$

Справедливы следующие соотношения. Количество частиц, имеющих размер в интервале $(x, x+dx)$ и средний объем v, равно

$$dn = \frac{V_0}{v}\, dp. \tag{4}$$

Относительный объем всех частиц, имеющих размер, бóльший x:

$$R = \frac{1}{V_0}\int_x^\infty v\, dn = e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^n}. \tag{5}$$

Последнее выражение используется в горнообогатительной промышленности под названием закона Розина—Раммлера (1933 г.). Из формулы (2) видно, что средний размер осколка

$$\bar{x} = \int_0^\infty x\,dp = n\int_0^\infty \left(\frac{x}{x_0}\right)^n e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^n} dx = x_0\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right), \qquad (6)$$

где Γ — гамма-функция Эйлера,

$$\Gamma(1+\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}t^\alpha\,dt. \qquad (7)$$

Через эту же функцию выражается и дисперсия рассматриваемого распределения:

$$D = \int_0^\infty (x-\bar{x})^2\,dp = \bar{x}^2\left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1\right). \qquad (8)$$

При $n \gg 1$ справедливы следующие приближенные соотношения:

$$\bar{x} \approx x_0, \qquad D \approx k\frac{x_0^2}{n^2} \qquad (9)$$

$\left(k \approx \frac{\pi^2}{6}\right.$ — числовой коэффициент$\left.\right)$, раскрывающие смысл параметров x_0 и n. Мы видим, что x_0 — это «почти» средний размер осколков, а величина n характеризует «кучность» распределения относительно среднего размера: чем больше n, тем более равномерно произведено дробление.

Модельные задачи. Параметр n определяется в основном технологией производства взрывных работ. Величину x_0 можно определять из решения модельных задач, причем выбор модели определяется физико-механическими свойствами материала, величиной давления и геометрией конструкции. Если, например, рассматривается разрушение металлов под действием давления порядка 10^5—10^6 *кг/см*^{2}, то соответствующую задачу можно рассчитать по схеме идеальной несжимаемой

жидкости или вязкопластической среды, в круге идей, в которых в гл. VII мы рассматривали действие кумулятивных зарядов.

Для горных пород в большинстве случаев наиболее подходящей является модель хрупкого тела. Возможны также и комбинации различных моделей. Так, при камуфлетном взрыве[1]) в скальном грунте вблизи заряда движение грунта может описываться уравнениями сыпучей или пластической среды, в средней зоне, разрушенной радиальными трещинами, — уравнениями для стержней, а вдали от зарядов — уравнениями теории упругости.

Величина среднего размера осколка в каждой из моделей обычно вычисляется из исследования устойчивости движения по отношению к малым возмущениям синусоидального типа, причем вид движения определяется характером деформации материала. Во многих случаях разрушение тела наступает при растяжении, поэтому особый интерес представляет исследование в различных схемах устойчивости такого движения, при котором все элементы среды испытывают растяжение.

Основные результаты здесь получены для плоского движения, их можно сформулировать следующим образом:

1. Растяжение упругого стержня устойчиво. Этот результат непосредственно следует из задачи, рассмотренной в предыдущем параграфе (с заменой F на $-F$).

2. Равномерное растяжение полосы идеальной несжимаемой жидкости устойчиво по отношению к гармоническим возмущениям границ, симметричных относительно средней линии [6].

3. Растяжение вязкопластической полосы абсолютно неустойчиво к возмущениям указанного выше типа. Этот результат получен в пренебрежении инерционными силами. При любом количестве полуволн растяжение приводит к разрыву [5].

Задача о трещинах. Рассмотрим теперь задачу об устойчивости трещин в упругохрупком теле. Простейшая из возможных постановок состоит в следующем.

---

[1]) Так называется взрыв в глубине породы без образования воронки (см. следующую главу).

Пусть в плоскости (x, y) имеется система параллельных трещин длины $2l$, расположенных симметрично относительно оси y на расстоянии h одна от другой. В начальный момент времени внутри трещин создается давление, превосходящее равновесное и остающееся постоянным во все время движения. Требуется описать движение трещин и, в частности, исследовать устойчивость процесса.

Полного решения поставленной задачи в настоящее время нет. Можно, однако, построить приближенное решение, опираясь на качественный анализ проблемы и некоторые точные решения более простых задач. Опишем вкратце схему решения. Сначала решается:

Статическая задача. Пусть задано растягивающее напряжение p_0, большее, чем прочность материала на растяжение σ_*; предполагается, что при этом в материале образуется система параллельных трещин заданной длины. Требуется определить расстояние h между трещинами.

В теории хрупких трещин показывается (см. Л. И. Седов [1]), что равновесие трещины определяется одним параметром — равновесным коэффициентом интенсивности напряжений или модулем сцепления

$$K_0 = \sqrt{\frac{E\gamma}{\pi(1-\nu^2)}}, \tag{10}$$

где E — модуль Юнга, γ — эффективная удельная энергия, идущая на образование единицы поверхности трещины, ν — коэффициент Пуассона (размерность этой величины $ML^{-1/2}T^{-2}$). Прочность материала на растяжение σ_* связана с величиной K_0 и длиной трещины соотношением

$$\sigma_* = \frac{K_0}{\sqrt{2l}}. \tag{11}$$

Поставленная задача в принципе может быть решена методами плоской задачи теории упругости (см. Н. И. Мусхелишвили [3]). Можно показать, что в окрестности носика трещины напряжение стремится к бесконечности по закону $\sigma = \frac{K}{\sqrt{s}}$, где s — малое расстояние от носика, а K — коэффициент интенсивности

напряжений в данный момент времени. Равновесие имеет место, когда $K = K_0$. Точное решение в конечном виде, однако, в настоящее время не получено. Известно лишь приближенное решение

$$p_0 \sqrt{\frac{h}{2\pi} \operatorname{th} \frac{\pi l}{h}} = K, \tag{12}$$

полученное для $h > l$, или

$$p_0 \sqrt{\frac{h}{\pi}} = K \tag{13}$$

для $h \ll l$ (В. М. Кузнецов [7]).

Наряду со статической рассматривается

Динамическая задача. Заданы длина трещин и расстояние между ними. Найти скорость при давлениях p, превышающих равновесное давление p_0.

Динамические задачи теории хрупкого разрушения являются более трудными, и до настоящего времени их решено очень мало даже в самых простых предположениях. Имеются, однако, экспериментальные факты, использование которых помогает решению. Оказывается, например, что напряженное состояние в окрестности носика движущейся трещины мало отличается от того, которое наблюдается в случае равновесной неподвижной трещины. Это позволяет на каждом этапе движения трещины искать решение статической задачи, соответствующей данной геометрии.

Можно, далее, показать, что скорость развития трещины не может превышать некоторой величины c (теоретически равной релеевской скорости, практически — всегда составляющей примерно половину ее). Эти соображения приводят к построению следующей формулы для скорости V движения трещины:

$$V = c \sqrt{1 - \frac{K_0}{K}}, \tag{14}$$

где c — предельная скорость, K — коэффициент интенсивности напряжений в данный момент времени, K_0 — равновесная величина того же коэффициента (см. работу [7]).

Устойчивость. Пусть в предыдущей задаче трещины через одну получили одинаковое малое приращение длины. Как изменится скорость развития трещин?

Оказывается, длинные трещины при этом ускоряются, а короткие замедляются. Качественно этот результат понятен и без выкладок: длинные трещины «экранируют» более короткие и зажимают их. Расчет показывает, что если длина больших трещин в e раз превышает длину малых трещин, то наличие последних практически не влияет на напряженное состояние в окрестности носика длинных трещин.

Короткие трещины при этом останавливаются, длинные — продолжают развиваться. Теперь можно рассматривать развитие новой системы трещин, расстояние между которыми равно $2h$. Эту систему можно подвергнуть возмущениям описанного типа и т. д. Таким образом, неустойчивость развития системы трещин приводит к увеличению расстояния между ними. Если трещины проходят расстояние L, то число актов удвоения равно $\log \frac{L}{l}$, а расстояние между трещинами составляет

$$H = h2^{\log \frac{L}{l}} = h\left(\frac{L}{l}\right)^{\log 2}. \qquad (15)$$

Длинные осколки в форме пластин разрушаются так же, как стержни под действием продольного удара (см. предыдущий параграф), и при этом образуются осколки, размер которых имеет порядок h. Таким образом, величина h играет роль среднего размера осколка, входящего в формулы (1), (9) и другие.

Влияние масштаба взрыва на размер осколков. Рассмотрим два геометрически подобных взрыва в одинаковых горных породах. Пусть все линейные размеры в одном из них в k раз больше, чем в другом. Вес ВВ, который пропорционален объемам, увеличится в k^3 раз. А как изменится средний размер куска?

В геометрически подобных точках в обоих случаях напряжения в соответствующие моменты времени будут одними и теми же. Поэтому первоначальная сетка трещин должна быть одинаковой. Однако время действия нагрузок, а следовательно, и время развития трещин будет больше для более крупного взрыва. В силу отмеченной выше неустойчивости расстояние между трещи-

нами будет возрастать, причем в большей степени для более мощного взрыва.

В идеализированной задаче предыдущего пункта при изменении линейного масштаба в k раз расстояние между трещинами изменялось в $k^{\log 2}$ раз, так же изменялся и размер осколков. Мы сделаем допущение, что и в общем случае при изменении масштаба взрыва в k раз средний размер осколков изменится в k^{α} раз, где $0 < \alpha < 1$.

Вот некоторые конкретные примеры.

При взрыве заряда весом 500 *г* в камне весом 5000 *кг* средний размер осколков $x_0 = 19$ *см*, а при взрыве 0,5 *г* в камне весом 2130 *кг* средний размер $x_0 = 5$ *см*. Так как масштаб взрыва пропорционален корню кубическому из веса ВВ, то масштаб второго взрыва был в 10 раз меньше первого; средний размер осколков изменился при этом примерно в 4 раза.

При взрыве на выброс заряда в 100 *г* на глубине 40 *см* средний размер кусков $x_0 = 13{,}5$ *см*, при взрыве 20 *т* ВВ $x_0 = 100$ *см*. Здесь увеличение масштаба взрыва в 60 раз привело к увеличению среднего размера кусков в 8 раз.

На основании указанных выше соображений и многочисленных экспериментов была построена эмпирическая формула, определяющая средний размер куска в зависимости от удельного расхода ВВ и масштаба взрыва:

$$x_0 = 10Q^{1/6}\left(\frac{V}{Q}\right)^{4/5}. \qquad (16)$$

Здесь x_0 измеряется в *см*, вес ВВ Q — в *кг*, объем взорванной массы V — в $м^3$.

§ 40. Равновесия в жидких средах

К числу мало изученных относится значительный цикл задач гидродинамики и механики твердого тела, связанных с проблемой устойчивости в жидких средах. Здесь мы рассмотрим несколько примеров таких задач.

Ртуть над водой. Начнем с простейшего явления. Представим себе, что в сосуде, наполненном водой, над поверхностью воды расположен тонкий слой ртути

(рис. 139). Если поверхности воды и ртути — идеальные плоскости, то ртуть будет в равновесии, однако очевидно, что это равновесие неустойчиво. Ставится вопрос о механизме проникания ртути через воду на дно.

Физически описанное явление можно реализовать еще так: на дно закрытого стакана налить ртуть, а сверху нее — воду. Это равновесие устойчиво, но оно потеряет устойчивость, если сообщить стакану ускоренное движение вниз, с ускорением в 2—5 раз больше g.

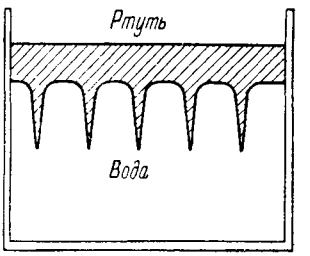


Рис. 139.

Механизм этого явления был осознан несколько лет тому назад за рубежом и у нас. Приведем качественный ответ на поставленный вопрос и его принципиальное обоснование. Займемся сначала более простой моделью, когда толщина слоя ртути равна или больше диаметра стакана. Здесь довольно очевидно, что если вследствие случайной асимметрии в каком-то месте нижней поверхности ртути появится бугорок, то этот бугорок будет расти и он образует в воде воронку, по которой вся ртуть стечет вниз. Последовательные положения ртути и воды в этой постановке можно построить графоаналитическим методом.

В основной постановке, когда толщина слоя ртути мала сравнительно с диаметром стакана, процесс потери устойчивости и проливания ртути вниз может начаться в любой точке поверхности воды. Но влияние этого процесса будет затухать по мере удаления от места слива по закону

$$V = V_0 e^{-\frac{r}{\delta}}, \tag{1}$$

где V — скорость жидкости в некоторой точке, V_0 — скорость в зоне начала процесса, δ — толщина слоя ртути и r — расстояние рассматриваемой точки от точки слива (см. § 12).

Таким образом, части ртути, расположенные от точки начавшегося слива на расстоянии более нескольких

толщин слоя ртути, будут мало реагировать на начало процесса. Для этих частей найдется более близкий бугорок, где организуется новый слив.

Поэтому при малой толщине слоя ртути ртуть устремится вниз по многим струйкам, расположенным друг от друга на расстоянии порядка δ (рис. 139).

В эту модель укладывается одно любопытное явление, наблюдаемое при определенных условиях при подводном взрыве. После взрыва под водой над гладкой поверхностью воды появляется группа фонтанчиков, расположенных друг от друга на одинаковых расстояниях. Дело в том, что когда ударная волна в воде подходит к поверхности, то при разгрузке слой воды стремится оторваться от основной массы. Если при этом потенциальная энергия сжатия не достаточна для того, чтобы оторвать слой жидкости от ее основной массы, то мы окажемся в условиях, сходных с условиями ртути на воде, — вместо отрыва получается система фонтанчиков.

Аналогичное явление можно наблюдать и в металле, когда ударная волна подходит к его свободной поверхности. Будет или не будет иметь место описанное явление, зависит от ряда факторов — длины ударной волны, кривизны фронта, прочности на разрыв среды и др.

Для количественного исследования описанного здесь явления можно поставить следующую задачу. Пусть слой идеальной несжимаемой жидкости $-\infty < x < \infty$, $0 < y < h$ имеет ускорение a, направленное вертикально вверх. Пусть, далее, верхняя поверхность слоя в момент $t = 0$ получает малое возмущение $\eta = T_0 \sin kx$, которое дальше меняется по закону

$$\eta(x, t) = T(t) \sin kx. \tag{2}$$

Требуется найти дальнейшее движение свободной поверхности.

Если толщина слоя h мала по сравнению с длиной волны возмущения, то уравнения движения можно заменить приближенными точно так, как это сделано в гл. I для задачи о мелкой воде. Различие будет лишь в том, что ускорение силы тяжести g во всех соотношениях заменится на $-a$ (в рассматриваемой здесь задаче ускорение направлено вверх). В частности, для

свободной поверхности жидкости получится уравнение

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + ah\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = 0. \tag{3}$$

Подставляя в него выражение (2), найдем

$$\frac{d^2T}{dt^2} - ahk^2T = 0, \tag{4}$$

откуда

$$T = Ae^{k\sqrt{ah}\,t} + Be^{-k\sqrt{ah}\,t}, \tag{5}$$

где A и B — постоянные. Начальные условия для T имеют вид $T(0) = T_0$, $T''(0) = a$, откуда следует, что $A \neq 0$. Поэтому амплитуда колебаний (2) неограниченно возрастает и движение оказывается неустойчивым.

В нашем приближении неустойчивы возмущения любой длины волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. В действительности же очень мелкие волны должны затухать вследствие действия сил поверхностного натяжения, и неустойчивыми являются только гармоники, длина волн которых превышает некоторую критическую величину $\lambda_{\min}$. Эту величину и следует считать характерным расстоянием между фонтанчиками в рассмотренных здесь явлениях; расчеты [6] дают для нее приближенную формулу

$$\lambda_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{3\sigma}{\rho a}}, \tag{6}$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, а ρ — плотность жидкости.

Образование волн. Проблеме образования ветровых волн посвящено огромное количество статей, обзоров и монографий. Каков механизм образования волн при заданном ветровом режиме, существует ли обратная связь, т. е. влияют ли в свою очередь волны на ветровой режим? Эти и многие другие вопросы не решены до сих пор, хотя качественная картина была ясна уже давно.

Свободная поверхность воды, при наличии над ней воздушного потока, неустойчива: при малых случайных колебаниях давление во впадинах по закону Бернулли больше, чем на выступах, поэтому каждое волновое движение под действием ветра должно прогрессировать. Этот результат легко получить и аналитически (см.

например, Ландау и Лифшиц [2]). Если обозначить через V скорость ветра, ρ_0 — плотность воды, ρ — плотность воздуха, λ — длина волны, то рост амплитуды волны определяется множителем $e^{\omega t}$, где

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda} V \frac{\sqrt{\rho_0 \rho}}{\rho_0 + \rho}. \tag{7}$$

С другой стороны, если высота волны становится порядка своей длины, то гребень волны срывается ветром и преимущества роста приобретают волны большей длины. В этих условиях по истечении достаточно большого времени должен наступить установившийся режим. Можно показать, что для этого скорость ветра должна быть вдвое больше скорости волн.

В самом деле, естественно предположить, что здесь (как в задаче обтекания траншеи из § 22) между каждыми двумя соседними горбами волны имеется зона вихревого движения (рис. 140). Перейдем к системе координат, связанной с волной. В этой системе скорость течения жидкости равна скорости движения волны и направлена в отрицательную сторону. В силу непрерывности поля скоростей на границе вихревой зоны скорость ветра тоже должна быть равной C, но направлена в положительную сторону. Переходя снова к неподвижной системе координат, получаем доказательство высказанного утверждения.

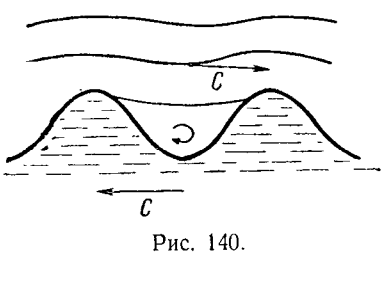


Рис. 140.

Наряду с теоретическими работами проводилось много наблюдений ветровых волн в натурных условиях. Лет 20 назад в Крыму был построен специальный «штормовой бассейн» с вертикальными круговыми цилиндрическими стенками. Над свободной поверхностью там расположено несколько мощных компрессоров, которые способны создавать ветер в большом диапазоне скоростей. Волны в этом штормовом бассейне действительно образуются, но их характер существенно отличен от нормальных ветровых волн, при образовании

которых ветер имеет достаточно стабильную направленность. В кольцевом бассейне образовавшиеся волны, имея определенную направленность в зоне зарождения, очень быстро переходят в колебания воды в направлении оси бассейна — создаются группы стоячих волн.

Очень интересно наблюдать, но трудно рассчитать явления, которые связаны с кольцевыми волнами. Отметим одно из них — если каким-либо образом, например, шнуровым зарядом ВВ, имеющим форму окружности, создать кольцевую волну (кольцевую выпуклость или кольцевую яму), то в стороны от центра кольца волны будут распространяться с обычным законом затухания. Но в сторону центра длина волны будет меняться медленно, и не будет обычного расщепления волны на более мелкие. В соответствии с этим высота волны при приближении к центру будет нарастать и даст всплеск по высоте, в несколько раз превышающей начальную высоту волны.

Устойчивость струй. В круге идей, рассмотренных выше, имеется большая группа задач по устойчивости жидких струй. Классической является проблема устойчивости водяной струи в воздухе. В частности, если заданы выходная скорость и диаметр струи, то какой высоты можно достигнуть струей? Какого расстояния можно достигнуть струей?

В этих постановках воду можно рассматривать как идеальную жидкость. При скорости струи, близкой к скорости звука в воздухе, естественно, будет существенным фактор сжимаемости воздуха. До сих пор до конца не решена проблема затопленной струи — водяной струи, движущейся в воде; в этом случае существенным фактором является вязкость, а при значительных скоростях — турбулентность.

Сюда же относится весьма интересная как принципиально, так и с точки зрения приложений проблема устойчивости жидкого стержня при одновременном растяжении и закручивании. Пусть дана осесимметричная трубка из мягкого железа или меди, осевое сечение которой имеет синусоидальный характер; диаметр трубки 10—15 *мм*, толщина стенки 1—1,5 *мм*.

Опишем, как можно изготовлять такие трубки. Вытачивается матрица, внутренняя поверхность которой

совпадает с внешней поверхностью будущей трубки. В матрицу вставляется цилиндрическая трубка, которая герметически закрыта с одного конца, а с другого конца матрицу нужно завинтить крышкой с небольшим отверстием по оси (рис. 141). В это отверстие под большим давлением нагнетается вода, в результате чего внешняя поверхность вставленной трубки вплотную подходит к матрице. При таком способе отштампованная трубка

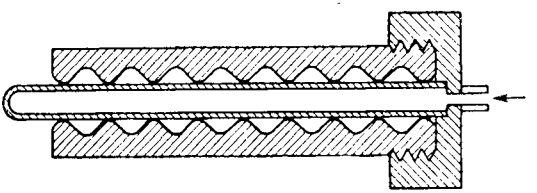


Рис. 141.

будет иметь переменную толщину стенок; чтобы избежать этого, вставляемый в матрицу цилиндр следует предварительно немного выточить снаружи в нужных местах.

Рассматривается два случая: когда трубка пустая и когда она заполнена водой. В каждом случае трубка растягивается в направлении своей оси и, кроме того, при постоянном растяжении она еще закручивается, причем скорость закручивания меняется. Требуется выяснить, в каких случаях волны на поверхности трубки будут сглаживаться (устойчивость) и в каких они будут нарастать (неустойчивость).

Качественно довольно ясно, что при простом растяжении (или растяжении с достаточно малым закручиванием) мы получим устойчивый процесс — волны на поверхности трубки будут сглаживаться. В самом деле, растягивающая сила будет увеличивать диаметр сечений трубок в шейках и уменьшать диаметр сечений в пучностях.

Все изменится, если наряду с растяжением трубка достаточно сильно закручивается. Волокна трубки, расположенные в ее осевом сечении, превратятся в спирали, а растяжение будет сжимать эти спирали, особенно сильно в узких местах, соответствующих шейкам

трубки. Это приведет к дальнейшему сжатию шеек, и процесс будет неустойчивым.

Очень желательно построить количественную модель описанного явления. Предварительно следует выяснить статическую и динамическую устойчивость стержней и трубок (упругих и с пластичностью) при чистом закручивании. При этом нужно рассмотреть два случая: а) расстояние между торцами трубки или стержня не меняется, б) действуют только крутящие силы.

Взрыв в воде. Здесь будут описаны три явления, наблюдаемых при взрыве в воде. Для них не построено количественных теорий и даже качественно еще не все в них ясно.

1) Выше говорилось о том, что если цилиндрическую трубку, заделанную с обеих концов, опустить вертикально в воду и под ней произвести взрыв, то трубка обожмется по законам потери динамической устойчивости — сечение трубки примет волновой характер, причем частота волн будет убывать по мере удаления от нижнего конца. Это явление мы объяснили простой приближенной схемой.

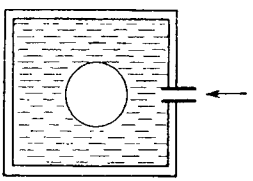


Рис. 142.

Однако в этом эксперименте обнаруживается еще одно интересное явление, которое не укладывается в простейшую схему, — обжатая трубка (см. рис. 138) имеет вид туго заплетенной косы! Как объяснить это явление?

2) Возьмем сферическую оболочку из упругого материала (например, надутый воздухом мяч) и погрузим ее в резервуар с водой, в котором можно создавать большие давления (рис. 142). Считая, что материал становится пластичным за пределами упругости, найти по его характеристикам: а) критическое давление, при котором происходит потеря упругости, б) форму сферической оболочки после того, как она потеряет устойчивость, в) форму потери устойчивости в случае, если давление в воде мгновенно превысит в n раз критическое.

Словом, задача состоит в том, чтобы перенести на случай сферической оболочки схемы статической и динамической неустойчивости, которые выше рассматривались для случая стержней (в связи с этим см. [8]).

3) В одной из стенок толстостенного бака имеется круглое отверстие, в которое можно вставлять тонкие мембраны различной толщины и из разных материалов (железо, медь, свинец и др.). В центре бака, против закрытого мембраной отверстия, производятся взрывы различной мощности, причем после каждого взрыва прогнутая мембрана заменяется новой (рис. 143).

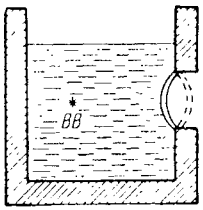


Рис. 143.

В одной серии опытов был обнаружен следующий парадоксальный эффект. При увеличении заряда прогиб мембраны увеличивался до определенной величины, а при дальнейшем увеличении заряда прогиб еще увеличился, но изменил направление — мембрана оказывалась прогнутой навстречу взрыву!

Качественно явление можно объяснить так. При потере устойчивости под действием взрыва на мембрану (как и на стержень, случай которого был рассмотрен в начале главы) действует сила $\mathbf{F}$ не только переменной величины, но и переменного направления. Когда $\mathbf{F}$ направлена во внешность бака, она дает прогиб вовне, а когда внутрь, то и мембрана прогибается вовнутрь. Для построения схемы этого явления нужно прежде всего изучить вопросы потери устойчивости круговых мембран, закрепленных на краю.

Литература

1. Л. И. Седов, Механика сплошной среды, т. II. «Наука», 1970.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Физматгиз, 1963.
3. Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, «Наука», 1966.
4. М. А. Лаврентьев, А. Ю. Ишлинский, Динамические формы потери устойчивости упругих систем, ДАН СССР, 65, № 6, 1949.
5. А. Ю. Ишлинский, Об устойчивости вязкопластического течения полосы и прута, ПММ, т. VII, вып. 2, 1943.
6. В. М. Кузнецов, Е. Н. Шер, Об устойчивости течения идеальной несжимаемой жидкости в полосе и кольце, ПМТФ, № 2, 1964.
7. В. М. Кузнецов, О нестационарном распространении системы трещин в хрупком материале, ПМТФ, № 2, 1968.
8. А. В. Погорелов, Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек, «Наука», 1967.

Глава XI

ВЗРЫВ

Давления, возникающие при взрыве, настолько велики, что в ряде случаев можно пренебречь прочностными и пластическими свойствами среды и силами трения по сравнению с инерционными силами. Если при этом также пренебречь сжимаемостью среды, то получается модель идеальной несжимаемой жидкости. Расчеты действия взрыва в рамках этой модели иногда дают очень хорошее совпадение с экспериментальными данными, например, в теории кумуляции, которую мы рассмотрели в гл. VII. В других случаях с помощью гидродинамики удается рассчитать общие черты явления с тем, чтобы в дальнейшем уточнить их, принимая во внимание неидеальность и сжимаемость реальной среды. Наконец, с помощью гидродинамических представлений удается предсказать принципиально новые практические схемы взрывания. В этой главе мы рассмотрим некоторые вопросы, связанные со взрывами и их применениями.

§ 41. Взрыв в грунте

Импульсная постановка. При использовании для изучения взрывных явлений модели идеальной несжимаемой жидкости часто применяется импульсная постановка задач гидродинамики, суть которой состоит в следующем. Так как взрывные нагрузки характерны своей кратковременностью и большой абсолютной величиной, мы можем считать, что они действуют в бесконечно малый отрезок времени от 0 до τ, а давление в этом

отрезке столь велико, что импульс силы остается конечным, т. е.

$$\lim_{\tau\to 0}\int_0^\tau p\,dt = \Pi \neq 0. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь уравнение движения

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}, \nabla)\,\boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{2}$$

и проинтегрируем его по отрезку $[0, \tau]$, считая, что в начальный момент скорость равна нулю:

$$\boldsymbol{V} = -\int_0^\tau \frac{1}{\rho}\nabla p\,dt.$$

Учитывая малость τ, можно пренебречь смещением частиц и тогда считать, что эта скорость относится к начальной точке поля, а также переменить порядок интегрирования и взятия градиента. Мы получим

$$\boldsymbol{V} = -\nabla\left(\frac{1}{\rho}\int_0^\tau p\,dt\right) = -\nabla\frac{\Pi}{\rho}.$$

Таким образом, течение, возникающее при действии импульсного давления Π, имеет потенциал $-\frac{\Pi}{\rho}$. Для практических оценок величины Π вместо (2) можно пользоваться приближенным выражением

$$\Pi = \bar{p}\tau, \tag{3}$$

где $\bar{p}$ — среднее давление, действующее в течение времени τ.

Сосредоточенный заряд. Пусть заряд с энергией E находится на глубине h от поверхности Земли. Требуется определить начальное поле скоростей, возникающее в грунте после подрыва такого заряда.

Действие взрыва заменяется источником интенсивности A. Геометрия начального поля скоростей определяется потенциалом $A\varphi(x, y, z)$. Если свободная

поверхность совпадает с плоскостью x, y, а заряд расположен на оси z, то гармоническая функция φ имеет вид

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}}, \quad (4)$$

где точка $(0, 0, -h)$ есть центр заложения заряда.

Интенсивность источника A можно определить из энергетических соображений. Эксперименты показывают, что примерно 1/10 всей энергии заряда E связана с массовым движением грунта, а остальная энергия связана с ударной волной. Вычисляя кинетическую энергию жидкости [1]) и приравнивая ее $\frac{E}{10}$, получаем:

$$A = \sqrt{\frac{Er_0}{20\pi\rho}}, \quad (5)$$

где r_0 — радиус заряда, а ρ — плотность жидкости.

Профиль начального поля скоростей на поверхности грунта ($z = 0$) получается из выражения (4) в виде

$$V(r) = \frac{2Ah}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \qquad (r^2 = x^2 + y^2). \quad (6)$$

Радиус видимой воронки выброса R можно определить, если предположить, что на краю воронки скорость достигает некоторой критической величины, характерной для данного вида грунта:

$$V(R) = c. \quad (7)$$

Тогда из формул (5)—(7) легко получить выражение для энергии

$$E = \frac{5\pi\rho c^2}{r_0} h^4 (1 + n^2)^3, \quad (8)$$

где $n = \frac{R}{h}$ — показатель выброса.

---

[1]) Мы пользуемся тем, что для потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости с плотностью ρ и потенциалом φ кинетическая энергия равна $\frac{\rho}{2}\int\limits_D (\nabla\varphi, \nabla\varphi)\, dv = \frac{\rho}{2}\int\limits_{\partial D} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, ds$, где D — область течения, ∂D — ее граница, а $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внешней нормали (мы воспользовались формулой Грина). В нашем случае D — полупространство $\{z < 0\}$ с выброшенным шаром радиуса r_0 с центром $(0, 0, -h)$, потенциал $\varphi = 0$ на плоскости $z = 0$, а интеграл по границе шара от второго слагаемого в (4) равен 0.

Интересно отметить, что при фиксированном радиусе заряда и изменяющейся энергии взрыва геометрически подобные воронки выброса получаются, если энергия пропорциональна четвертой степени глубины.

Для случая обычных взрывчатых веществ энергия взрыва зависит от радиуса заряда. Если обозначить через ε удельную энергию, приходящуюся на единицу массы данного типа ВВ, а через ρ_1 — плотность заряжания, то

$$E = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \rho_1 \varepsilon. \tag{9}$$

Выражая отсюда r_0 и подставляя найденное выражение в (8), получаем

$$E = k (\varepsilon \rho_1 \rho^3 c^6)^{1/4} h^3 (1 + n^2)^{3/4}, \tag{10}$$

где k — некоторая постоянная.

Шнуровые заряды. В последнее время во взрывной практике все большее распространение находят так называемые линейно-распределенные, или шнуровые, заряды. Расчет действия таких зарядов также можно провести в схеме идеальной несжимаемой жидкости. При этом в данном случае можно условно ввести в рассмотрение и прочностные свойства грунта. Это делается при помощи следующей гипотезы: грунт моделируется такой средой, что при скоростях, бо́льших некоторой критической величины c, материал течет как идеальная несжимаемая жидкость; если скорость меньше c, материал ведет себя как абсолютно твердое тело) (ср. с гипотезой, сделанной в конце § 32).

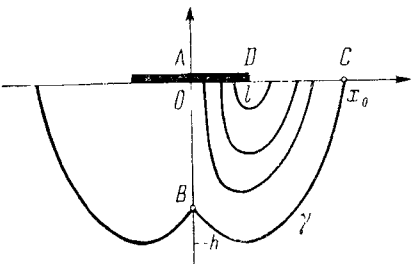


Рис. 144.

Для простоты рассмотрим задачу о поверхностном взрыве плоского шнурового заряда, которая решается в импульсной постановке (В. М. Кузнецов [4]).

Математическая постановка задачи выглядит следующим образом (рис. 144). Требуется найти комплексный

потенциал течения $\omega(z)$ в области G, ограниченной отрезками $[0, x_0]$ и $[-h, 0]$ координатных осей и неизвестной дугой γ, при следующих граничных условиях:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0 & \text{при } y = 0, \quad 0 \leqslant x < l, \\ 0 & \text{при } y = 0, \quad l < x \leqslant x_0, \end{cases}$$

$$\psi = 0 \quad \text{на} \quad \{-h \leqslant y < 0, x = 0\} \quad \text{и на } \gamma, \qquad (11)$$

$$\left|\frac{dw}{dz}\right| = c \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Требуется также определить кривую γ и, в частности, положение точек B и C.

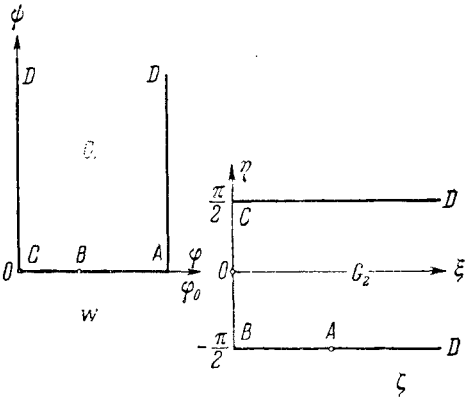


Рис. 145.

Задача решается методом конформных отображений, аналогично тому, как решались струйные задачи в гл. VII. В плоскости комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ область течения G изобразится полуполосой $G_1 = \{0 < \varphi < \varphi_0, \psi > 0\}$ с соответствием точек, указанным на рис. 145. Рассмотрим еще вспомогательное отображение области G_1 в плоскость $\zeta = \xi + i\eta$:

$$\zeta = \log c \frac{dz}{dw}. \qquad (12)$$

Так как на границе области G мы имеем $\eta = \frac{\pi}{2}$ на отрезке $\{l < x < x_0, y = 0\}$, $\eta = -\frac{\pi}{2}$ на отрезках

$\{0 < x < l, y = 0\}$ и $\{x = 0, -h < y < 0\}$ и, кроме того, $\xi = 0$ на γ, то образом G_1 при этом отображении также будет полуполоса $G_2 = \left\{\xi > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \eta < \frac{\pi}{2}\right\}$.

Отображение G_1 на G_2 с нужным соответствием точек можно выразить при помощи элементарных функций. Пусть оно имеет вид $\zeta = F(w)$, тогда из (12) мы получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dw}{dz} = ce^{-F(w)}, \tag{13}$$

из которого находится искомый комплексный потенциал.

Расчеты (см. [4]) дают следующее параметрическое представление профиля воронки:

$$x = \frac{2a}{a+1}\frac{1}{\pi c}\sqrt{(1+\cos\pi\varphi)\left(\frac{1}{a}+\cos\pi\varphi\right)} - \\ - \frac{a-1}{a+1}\frac{2}{\pi c}\log\frac{\sqrt{1+\cos\pi\varphi}+\sqrt{\frac{1}{a}+\cos\pi\varphi}}{\sqrt{2}} + 1 - \frac{1}{\pi c}, \tag{14}$$

$$y = -\frac{2a}{a+1}\frac{\sin\pi\varphi}{\pi c} + \frac{a-1}{a+1}\frac{\varphi}{c},$$

где $\pi c = 1 + \frac{a-1}{a+1}\log\frac{a-1}{2a}$ и φ — параметр, изменяющийся от 0 до $\frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{1}{a}\right)$[1].

Аналогичным образом решается задача о взрыве заглубленного заряда. Заряд при этом рассматривается как плоский источник.

§ 42. Направленный взрыв

Вопрос о направленном выбросе грунта при помощи взрыва имеет большое практическое значение. При производстве ряда взрывных работ (например, сооружении взрывом плотин) возникает задача перемещения некоторой массы грунта в заданном направлении. Известно, что при обычном подземном взрыве, когда свободная поверхность горизонтальна, выброс грунта происходит

[1]) При заданном c величина a определяется из последнего соотношения.

равномерно относительно оси воронки выброса. Если поверхность наклонна, то большая часть грунта выбрасывается в направлении перпендикуляра к поверхности.

Этим обстоятельством на практике пользуются для усиления направленности выброса. Взрыв производится в два приема. Сначала взрывают один небольшой заряд, и при этом создается новая обнаженная поверхность, имеющая больший наклон к горизонту, чем первоначальная. Затем взрывается основной заряд, который выбрасывает грунт в желаемом направлении.

Расположение зарядов. Однако только что описанный способ и аналогичные ему не обеспечивают полной направленности взрыва. Несколько лет назад был предложен принципиально новый способ направленного взрыва, обеспечивающий стопроцентную направленность выброса грунта. В основе его лежит решение следующей задачи (М. А. Лаврентьев, В. М. Кузнецов и Е. Н. Шер, [3]).

Дано тело D, которое представляется как объем несжимаемой жидкости, ограниченный выпуклой поверхностью S. Можно ли, и если можно, то как, расположить на поверхности S слой ВВ, чтобы после подрыва тело D полетело как твердое тело с заданной по величине и направлению скоростью? Задача решается элементарно, если принять следующее дополнительное предположение: скорость детонации бесконечно велика и взрыв слоя создает на тело импульс J, ортогональный поверхности S в каждой ее точке и пропорциональный толщине слоя в этой точке.

При таком постулате (достаточно подтвержденном опытами в широком диапазоне случаев) мы получаем следующую рецептуру: строим две опорные плоскости T_1 и T_2, перпендикулярные вектору $\boldsymbol{v}$ требуемого направления броска и касающиеся S с двух сторон тела; пусть T_1 касается S в точке A, а T_2 — в точке B. В точке B (в направлении броска) толщину δ слоя ВВ принимаем равной нулю: $\delta_B = 0$, в точке A пусть толщина слоя $\delta_A > 0$; в других точках S определяем δ из условия, что толщина пропорциональна удалению точки от плоскости T_2 (рис. 146).

Если принять систему координат x, y, z так, чтобы ось x по направлению совпадала с $\boldsymbol{v}$, то после взрыва

потенциал поля скоростей φ будет иметь вид

$$\varphi = kx, \tag{1}$$

где k определяется через величину скорости v.

Этот метод можно использовать при создании каналов, котлованов, воронок. Пусть, например, нужно удалить из земли длинное тело с треугольным сечением D так, чтобы это тело легло рядом с созданной емкостью. Схема расположения ВВ в этом случае изображена на рис. 147. В силу изложенного выше, скорость v, а следовательно, и положение тела после взрыва определяется величиной δ_0.

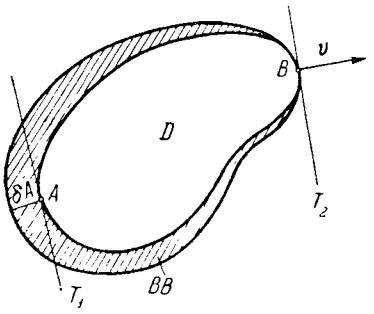


Рис. 146.

На практике, конечно, трудно, да и нецелесообразно, осуществлять обкладку поверхности тела сплошным слоем ВВ. Вместо этого по контуру тела бурятся наклонные скважины и прокладываются канавки (для

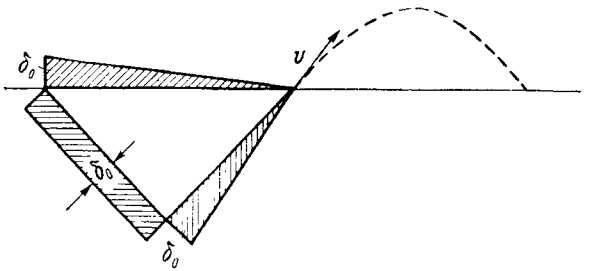


Рис. 147.

верхнего заряда). Линейный закон распределения ВВ по длине скважины осуществляется при помощи патронирования ВВ в 3—4 ступени. Эти и другие практические детали были исследованы экспериментально [5—6] при взрывах в мягком и скальном грунте. Проведение опытных взрывов позволило также внести некоторые поправки в первоначальную схему с учетом сжимаемо-

сти и прочности среды. Не меняя существа модельной задачи, эти поправки относятся к уточнению расчета зарядов, а также последовательности их подрыва.

Закон подобия. Одним из центральных вопросов теории взрыва на выброс грунта является вопрос подобия: пусть в данной породе для получения воронки объемом V требуется сосредоточенный заряд весом Q; какой потребуется заряд, если в той же породе нужно получить воронку объемом kV? Еще много десятков лет назад был предложен закон, по которому объем выброшенного грунта пропорционален кубу диаметра, заряда, т. е. для выброса объема kV нужен заряд весом kQ:

$$\text{если} \quad l_1 = nl, \quad \text{то} \quad Q_1 = n^3 Q. \tag{2}$$

Заметим, что для грунта в весьма широком диапазоне на кубический метр грунта требуется один килограмм наиболее распространенной взрывчатки (тротил).

С увеличением масштабов взрывных работ были обнаружены несоответствия закона (2) опытным данным — при моделировании по этому закону воронка получалась меньше расчетной. Вместо (2) Г. П. Покровским и П. С. Федоровым была выдвинута формула

$$Q_1 = n^{7/2} Q. \tag{3}$$

Эта формула нашла подтверждение в серии опытов, проведенных в 1960 году в районе Ташкента [1]. Максимальный заряд здесь весил 1000 тонн.

Формулу (3) можно объяснить из общих соображений теории размерностей. Для этого заметим, что безразмерная величина отношения радиуса воронки выброса R к глубине залегания должна быть функцией безразмерных комбинаций параметров, определяющих взрыв. Здесь возможны различные варианты.

Если принять, что действие ВВ определяется только его энергией E, а свойства грунта — прочностью p, то безразмерной комбинацией будет E/ph^3, и радиус воронки выброса определится формулой

$$R = hf\left(\frac{E}{ph^3}\right), \tag{4}$$

где f — некоторая функция, подлежащая теоретическому или экспериментальному определению.

Если же роль прочности пренебрежимо мала по сравнению с силой тяжести, то выбирая в качестве определяющих параметров вместо p плотность ρ и ускорение силы тяжести g, из тех же соображений получим

$$R = hf\left(\frac{E}{\rho g h^4}\right). \tag{5}$$

Энергия ВВ пропорциональна его весу, величина h есть характерный линейный размер (масштаб) взрыва. Таким образом, для получения геометрически подобных воронок выброса $\left(\frac{R}{h} = \text{const}\right)$ вес ВВ должен в первом случае изменяться пропорционально кубу линейного размера, а во втором — его четвертой степени. На практике для достаточно мощных взрывов оба параметра существенны, и степень моделирования должна иметь величину в диапазоне от 3 до 4.

Для направленного взрыва, очевидно, определяющим параметром является не энергия, а импульс J, создаваемый взрывом. Ясно также, что параметр g всегда существен. В качестве безразмерной комбинации параметров можно выбрать отношение $J/\rho g h^{7/2}$, и формула для радиуса воронки примет вид

$$R = hf\left(\frac{J}{\rho g h^{7/2}}\right). \tag{6}$$

Для геометрически подобных направленных взрывов будут, следовательно, равны отношения $J/h^{7/2}$, и если принять, что импульс взрыва пропорционален его энергии, т. е. весу ВВ, то мы получим закон (3). В общем случае зависимость импульса от энергии имеет более сложный вид и определяется качеством забивки заряда в камере или шнурах.

Вопрос о подобии и моделировании подземных взрывов еще не выяснен до конца. В последнее время обнаружен ряд новых экспериментальных фактов, не укладывающихся в рамки существующих расчетных схем. Например, прочность грунта, оказывается, существенно меняется с глубиной. Механизм передачи энергии от ВВ к грунту и вопрос о распределении энергии между ударной волной и последующим движением грунта требует как постановки новых экспериментов, так и построения новых теоретических моделей.

§ 43. Камуфлетный взрыв

Здесь мы рассмотрим задачу о расширении полости, которая возникает при подземных взрывах, не сопровождающихся образованием воронки на поверхности Земли, — они называются камуфлетными взрывами.

Паковка. Одной из характерных особенностей деформации грунта, отличающих его от воды и упругих тел, является так называемая паковка: если грунт сильно сжать, а затем снять давление, то конечный объем грунта будет меньше первоначального.

Введем величину

$$\theta = 1 - \frac{\rho_0}{\rho}, \tag{1}$$

характеризующую сжатие грунта (ρ_0 — плотность в отсутствии дополнительного давления). Зависимость сжатия от величины давления показана на рис. 148. В первом приближении эта зависимость схематизируется ломаной, изображенной на рис. 148 пунктиром. При давлениях, не превышающих некоторого критического значения p_*, плотность грунта практически равна ее первоначальному значению ρ_0 (т. е. $\theta = 0$). Когда давление достигает p_*, происходит мгновенная деформация грунта — плотность возрастает до величины ρ_1 и при дальнейшем увеличении давления практически не меняется.

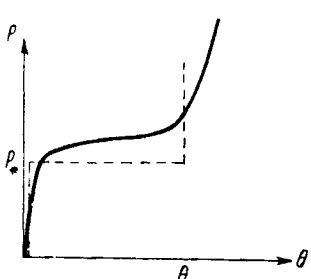


Рис. 148.

Такое поведение грунта и объясняет эффект паковки — при снятии давления плотность близка к ρ_1.

Задача о расширении полости. Пусть в грунте, обладающем описанными выше свойствами, в начальный момент $t = 0$ имеется сферическая полость радиуса a_0, заполненная газом с давлением p_0, бо́льшим критического давления p_*. Требуется определить движение полости и ее конечный радиус.

Прочностными и пластическими свойствами грунта мы пренебрегаем, а давление в полости считаем

меняющимся по адиабатическому закону:

$$p = p_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma}, \tag{2}$$

где γ — постоянная, а $a = a(t)$ — переменный радиус полости.

Сразу же после заполнения полости газами по грунту распространяется ударная волна, которая называется волной паковки. Фронт этой волны мы будем считать сферическим, а радиус сферы обозначим через $R(t)$.

Будем считать, что в шаровом слое $D_t = \{a(t) < r < R(t)\}$ движение среды описывается уравнениями гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости — уравнением движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{3}$$

(где $u = u(r, t)$ — скорость точек среды) и уравнением неразрывности, которое можно записать в виде

$$u = \frac{\lambda(t)}{r^2}, \tag{4}$$

где λ — некоторая функция от времени.

К этим уравнениям следует добавить граничные условия. На внутренней границе D_t — сфере радиуса $a = a(t)$ — давление должно удовлетворять условию (2), а на внешней границе должны выполняться обычные условия на фронте ударной волны. Первое из этих условий выражает закон сохранения масс и записывается в виде

$$\rho_0 \dot{R} = \rho_1 (\dot{R} - u), \tag{5}$$

где $\dot{R}$ — скорость волны паковки (точка обозначает дифференцирование по времени), а $u = u(R, t)$. Второе условие выражает закон сохранения количества движения; в предположении, что давление перед фронтом волны паковки равно критическому давлению p_* [1]), оно имеет вид

$$p - p_* = \rho_0 \dot{R} u, \tag{6}$$

где $u = u(R, t)$ и $p = p(R, t)$ — массовая скорость и давление на фронте волны.

[1]) Это предположение можно обосновать из термодинамических соображений.

Из (4) следует, что

$$\lambda(t) = a^2\dot{a} = R^2, \tag{7}$$

а (5) переписывается в виде $u = \theta_1\dot{R}$, где $\theta_1 = 1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}$ — сжатие грунта. Получаем дифференциальное уравнение $a^2\dot{a} = \theta_1 R^2\dot{R}$, решая которое при начальном условии $a(0) = R(0) = a_0$, находим зависимость между a и R:

$$a^3 = \theta_1 R^3 + a_0^3\frac{\rho_0}{\rho_1}. \tag{8}$$

Далее, подставляя (4), где положено $\lambda(t) = a^2\dot{a}$, в уравнение движения (3) и интегрируя его по r в пределах от $r = a$ до $r = R$, мы найдем

$$(a\ddot{a}+2\dot{a}^2)\left(1-\frac{a}{R}\right)-\frac{\dot{a}^2}{2}\left(1-\frac{a^4}{R^4}\right)=\frac{1}{\rho_1}[p(a,t)-p(R,t)]. \tag{9}$$

Здесь R можно выразить через a по формуле (8), $p(a, t)$ также выражается через a по формуле (2), а из (5), (6) и (7) следует, что

$$p(R,t) = p = p_* + \frac{\rho_0}{\theta_1}\frac{a^4\dot{a}^2}{R^4}. \tag{10}$$

Таким образом, (9) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для радиуса $a = a(t)$ газовой полости. При $t = 0$ задано значение $a(0) = a_0$; из (10) при $t = 0$ мы получаем

$$\dot{a}^2(0) = \frac{p_0 - p_*}{\rho_0}\theta_1, \tag{11}$$

так что начальные условия для этого уравнения известны и, следовательно, закон изменения газовой полости вполне определен.

Приближенное решение. Опыты показывают, что радиус полости довольно быстро становится в 10—20 раз больше первоначального. Поэтому на протяжении большей части движения в (8) можно пренебречь вторым слагаемым в правой части. Мы получим, что $a = \theta_1^{1/3}R$, и тогда (9) после простых преобразований примет вид

$$a\ddot{a} + \frac{\mu}{2}\dot{a}^2 = \frac{p_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\nu} - p_*}{\rho_1\left(1-\theta_1^{1/3}\right)}, \tag{12}$$

где

$$\mu = 3 + \frac{(1-\theta_1)\,\theta_1^{1/3}}{1-\theta_1^{1/3}}.$$

Полагая $x = \frac{\dot{a}^2}{2}$ и замечая, что $\frac{dx}{da} = \frac{dx}{dt}\frac{1}{\dot{a}} = \ddot{a}$, мы получаем для x уравнение типа Бернулли

$$a\frac{dx}{da} + \mu x = \frac{p_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma} - p_*}{\rho_1\left(1-\theta_1^{1/3}\right)}.$$

Оно решается обычным методом вариации постоянного, и его решение, удовлетворяющее начальному условию $x(a_0) = \frac{p_0 - p_*}{2\rho_0}\theta_1$, которое следует из (11), имеет вид

$$\rho_1 x = \frac{p_0\left\{\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma} - \left(\frac{a_0}{a}\right)^{\mu}\right\}}{\left(1-\theta_1^{1/3}\right)(\mu - 3\gamma)} + \frac{p_*\left\{\left(\frac{a_0}{a}\right)^{\mu} - 1\right\}}{\mu\left(1-\theta_1^{1/3}\right)} + \\ + \frac{\theta_1(p_0 - p_*)}{2(1-\theta_1)}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{\mu}. \qquad (13)$$

Простой анализ этого выражения показывает, что скорость расширения газовой полости $\dot{a}$ сначала увеличивается, затем достигает максимального значения и убывает до нуля. Конечный радиус полости $a = a_{\max}$ можно определить из (13), полагая там $x = 0$.

Замечания. Уравнение (9) можно получить и непосредственно из энергетических соображений. При этом можно подсчитать энергию, затрачиваемую на необратимую деформацию грунта. Расчеты показывают, что доля энергии ВВ, передаваемая грунту, в диапазоне значений $\theta = 0{,}1$—$0{,}3$ составляет величину 0,63—0,52, что неплохо согласуется с экспериментальными данными.

Излагаемая здесь модель камуфлетного взрыва была впервые предложена А. Ю. Ишлинским, Н. В. Зволинским и И. З. Степаненко в 1954 году [2]. Позднее появились более сложные модели, учитывающие пластические свойства грунта, переменную паковку, прочностные характеристики и разрушение среды. Эти усложнения модели имеют целью лучшее приближение к натуре. Однако современное состояние наших знаний

о физико-механических свойствах грунтов и продуктов детонации ВВ еще не позволяет поставить и решить задачу точно.

Перегрузка задачи большим количеством трудно определяемых параметров часто оказывается вредной. Конечно, при соответствующей подгонке этих параметров всегда можно добиться совпадения данных расчетов с данными эксперимента. Но цель построения механической модели физического явления состоит в выяснении того вклада, который вносит в общую картину процесса то или иное свойство среды: сжимаемость, прочность и т. д.

Иногда бывает и так, что различные модели формально сводятся к одним и тем же соотношениям. Например, модель грунтовой среды с условием пластичности Прандтля и с постоянной плотностью приводит к дифференциальному уравнению такого же вида, как (9). Разница состоит только в выражениях для коэффициентов.

§ 44. Сварка взрывом

Явление сваривания металлов при взрывах было обнаружено при экспериментах по кумуляции в 1944—46 гг., которые проводились М. А. Лаврентьевым с сотрудниками. На рис. 149 изображен полученный при этих экспериментах двухслойный образец, образовавшийся в результате одновременного обжатия двух кумулятивных конусов из разных металлов. На нем видна основная особенность, характеризующая сварку, — волнообразование на поверхности контакта свариваемых металлов. В тех же экспериментах Н. М. Сытый получал монолитные стержни из пучков медной проволоки, обматывая их детонирующим шнуром.

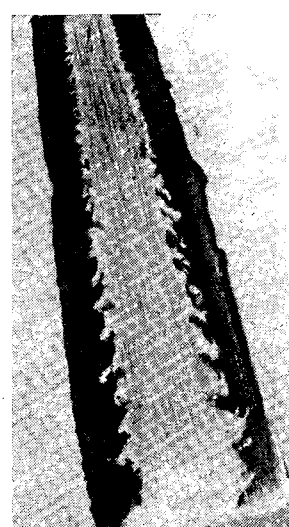


Рис. 149.

Затем в изучении сварки взрывом наступила длительная пауза. Систематические исследования начались в 60-х годах главным образом в СССР и США. Здесь мы изложим некоторые результаты, принадлежащие в основном А. А. Дерибасу и С. К. Годунову.

Простейшая схема. Сварку металлов взрывом можно производить по схеме, которая изображена на рис. 150. Свариваемые пластины устанавливаются в воздухе или в вакууме на некотором расстоянии друг от друга так, чтобы плоскости пластин составляли между собой угол α. Нижняя пластина прочно устанавливается на некоторой опоре, а на поверхности второй (иногда через какой-либо инертный подслой) размещается слой ВВ. Пусть плотности и толщины ВВ, верхней и нижней пластин будут соответственно ρ_0, δ_0, ρ_1, δ_1 и ρ_2, δ_2.

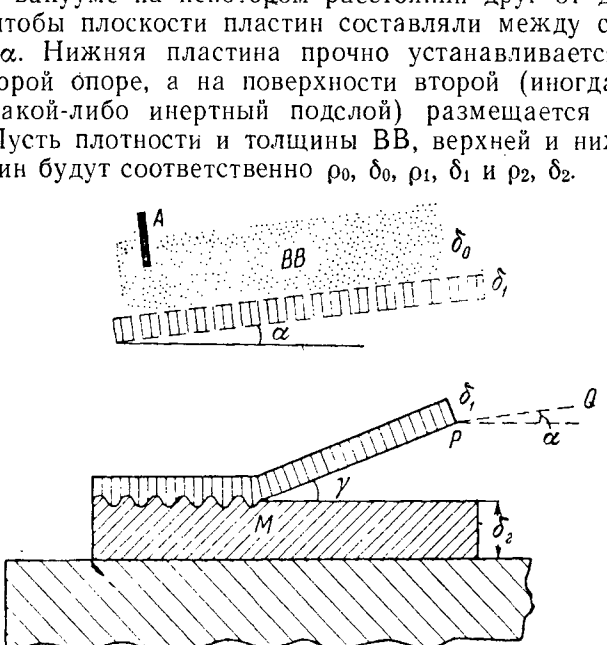


Рис. 150.

Инициирование ВВ происходит у угла в точке A на рис. 150. В результате взрыва метаемая пластина приобретает скорость порядка нескольких сот метров в секунду. Эта скорость V в первом приближении определяется скоростью D детонации ВВ и отношением $r = \frac{\delta_0\rho_0}{\delta_1\rho_1}$ масс ВВ и пластины. Если применить схему одномерного приближения и считать детонацию мгновенной, то для скорости метания можно получить

следующую формулу [8]:

$$V = Dr\sqrt{\frac{3}{(k^2-1)(r^2+5r+4)}}. \qquad (1)$$

Здесь k — показатель адиабаты продуктов взрыва, который для ряда распространенных ВВ можно считать равным 3.

Зная скорость V, можно найти угол соударения γ, который является важным параметром сварки. В естественном предположении об отсутствии сил, действующих вдоль метаемой пластины, скорость V должна быть направлена по биссектрисе угла MPQ на рис. 150 (направление PQ параллельно начальному направлению метаемой пластины), и мы получим, что

$$\gamma = \alpha + 2\arcsin\frac{V}{2D}. \qquad (2)$$

Важным параметром, характеризующим режим соударения, является также скорость точки M контакта пластин, определяющаяся из очевидного соотношения

$$U = D\,\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma}. \qquad (3)$$

Если первоначально пластины устанавливаются параллельно друг другу ($\alpha = 0$), то скорость точки контакта равна скорости детонации.

В окрестности точки контакта при сварке взрывом, как и при схлопывании кумулятивных оболочек, развиваются столь высокие давления, что прочностные свойства металлов становятся несущественными, и в узкой зоне, примыкающей к поверхности контакта, можно пользоваться схемой несжимаемой жидкости. Отличие сварки от кумуляции состоит в том, что при сварке не наблюдаются кумулятивные струи, а вместо этого на поверхностях контакта образуются волны более или менее правильной синусоидальной формы, иногда с вихревыми зонами (рис. 151).

При описании кумуляции в гл. VII мы отмечали, что при очень малых углах α при вершине конуса, меньших некоторого критического значения, определяемого свойствами материалов, устойчивого образования струй не происходит. Заметим, что при сварке взрывом берут как раз такие малые углы наклона пластин (различие между конусом и пластиной сводится к различию между

осесимметричной и плоской задачами и поэтому несущественно).

Явление волнообразования при сварке взрывом долгое время не находило теоретического объяснения. Была,

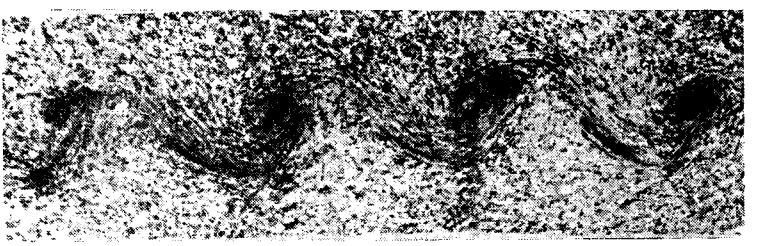


Рис. 151.

однако, экспериментально получена зависимость между длиной волны λ и параметрами соударения, которая в случае, когда метаемая пластина много тоньше неподвижной, имеет вид [9]

$$\lambda = 26\delta_1 \sin^2 \frac{\gamma}{2}. \qquad (4)$$

В эту формулу, кроме толщины метаемой пластины δ_1 и угла соударения γ, не входят другие параметры соударяющихся металлов (в том числе и прочностные), что подтверждает гипотезу о гидродинамическом характере процесса волнообразования при сварке взрывом.

Прежде чем перейти к описанию теоретического объяснения этого процесса, которое было недавно получено С. К. Годуновым и А. А. Дерибасом, приведем предварительный анализ задачи, следуя работе этих же авторов, совместной с А. В. Забродиным и Н. С. Козиным [10].

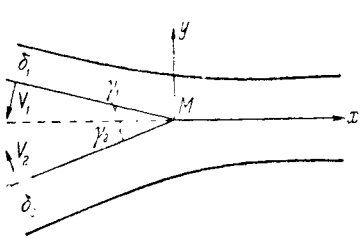


Рис. 152.

Соударение струй под малым углом. Пусть две пластины толщиной δ_1 и δ_2 соответственно, которые мы будем считать плоскими струями невязкой сжимаемой жидкости, соударяются друг с другом так, как это по-

казано на рис. 152. Здесь γ_1 и γ_2 — углы наклона пластин к оси x (так что угол соударения $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$), $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$ — скорости пластин, направленные нормально к пластинам; они связаны со скоростью U точки контакта M очевидными соотношениями

$$U = \frac{|\boldsymbol{V}_1|}{\sin\gamma_1} = \frac{|\boldsymbol{V}_2|}{\sin\gamma_2}. \tag{5}$$

Кроме того, если углы γ_1 и γ_2 малы, а ось x направлена вдоль поверхности контакта, то $\rho_1\delta_1|\boldsymbol{V}_1| = \rho_2\delta_2|\boldsymbol{V}_2|$, где ρ_1 и ρ_2 — плотности пластин.

Уравнения движения мы запишем в акустическом приближении (см. гл. I):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \tag{6}$$

где u и v — компоненты скорости, p — давление, ρ — плотность среды при $V = 0$, а c — скорость звука (для простоты письма мы опускаем индексы 1 и 2, относящиеся соответственно к верхней и нижней пластинам). Мы будем предполагать, что $U < c$, ибо именно в этом случае происходит сварка взрывом, сопровождаемая волнообразованием.

Нас интересует решение системы (6), стационарное в системе координат, связанной с точкой контакта. Поэтому мы положим u, v и p соответственно равными $U + u(x + Ut, y)$, $v(x + Ut, y)$ и $p(x + Ut, y)$, и тогда (6) заменится системой

$$U\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad U\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$
$$U\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0. \tag{7}$$

Из первого уравнения видно, что величина $u + \frac{p}{\rho U}$ является функцией только от y; предполагая движение безвихревым, мы можем считать эту величину равной нулю во всей области течения:

$$u = -\frac{p}{\rho U}. \tag{8}$$

Исключая еще из (7) давление p и вводя обозначение $\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}=k$ (величина под корнем положительна, ибо мы считаем, что $U<c$), мы перепишем эту систему в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial (ky)}\left(\frac{v}{k}\right)=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial (ky)}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v}{k}\right)=0. \tag{9}$$

Отсюда следует, что функция

$$f=u-i\frac{v}{k} \tag{10}$$

является аналитической функцией комплексного переменного $z=x+iky$, и нам остается найти эту функцию, пользуясь граничными условиями задачи.

Примем для простоты, что плотности соударяющихся пластин, а также скорости звука в них одинаковы ($\rho_1=\rho_2=\rho$, $c_1=c_2=c$). Кроме того, будем приближенно

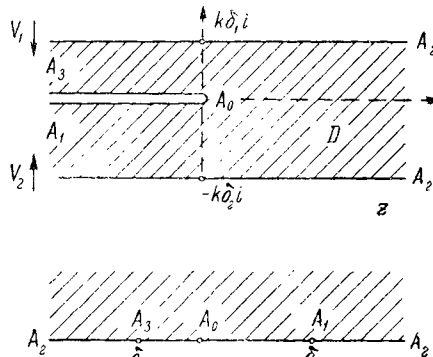


Рис. 153.

считать, что пластины изображаются в плоскости (x, y) полосами $\{0<y<\delta_1\}$ и $\{-\delta_2<y<0\}$. Тогда функция f будет аналитической в полосе $\{-k\delta_2<\operatorname{Im} z<k\delta_1\}$ с разрезом вдоль отрицательной полуоси; эту область мы обозначим буквой D (рис. 153).

Так как на свободных поверхностях пластин давление равно постоянной, которую можно принять равной 0, то в силу (8) там $u=0$. Мы получаем первое гра-

ничное условие задачи: 1) $\operatorname{Re} f = 0$ на всей границе D. Далее, должны выполняться следующие условия на бесконечности (см. рис. 153): 2) $u = \operatorname{Re} f \to 0$ при $x \to \pm\infty$, 3) $v = -k \operatorname{Im} f \to 0$ при $z \to A_2$ (т. е. при $x \to +\infty$), $v \to -|V_1|$ при $z \to A_3$ (т. е. при $x \to -\infty$, $y > 0$), $v \to |V_2|$ при $z \to A_1$ (т. е. при $x \to -\infty$, $y < 0$). Для полного определения f потребуем еще условие: 4) в окрестности точки контакта A_0 ($z = 0$)

$$f(z) \approx \frac{A}{\sqrt{z}}, \tag{11}$$

где A — некоторая постоянная. Последнее условие было получено в результате анализа ряда численных решений двумерной нестационарной задачи о соударении пластин в схеме идеальной жидкости.

Условия 1)—4) позволяют определить функцию f. Для этого отобразим область D конформно на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta > 0$; обратное к этому отображению имеет вид

$$z = \frac{k}{\pi}\left\{\delta_1 \log\left(1 + \frac{\zeta}{\delta_1}\right) + \delta_2 \log\left(1 - \frac{\zeta}{\delta_2}\right)\right\}, \tag{12}$$

причем соответствующие точки обозначены на рис. 153 одинаковыми буквами (см. Л. и Ш., стр. 185). Нетрудно проверить, что всем условиям удовлетворяет функция

$$f(z) = -\frac{iB}{\zeta}, \tag{13}$$

где $B = \frac{\delta_1 |V_1|}{k} = \frac{\delta_2 |V_2|}{k}$. В самом деле, 1) выполняется в силу того, что f принимает на действительной оси чисто мнимые значения, 2) очевидно, 3) следует из того, что точкам A_1 и A_3 соответствуют $\zeta = \delta_2$ и $\zeta = -\delta_1$, а 4) — из того, что в окрестности $\zeta = 0$, как видно из (12),

$$z \approx -\frac{k}{\pi}\frac{\delta_1 + \delta_2}{2\delta_1\delta_2}\zeta^2. \tag{14}$$

Пользуясь найденным решением, можно оценить размер зоны высоких давлений в окрестности точки контакта. Для этого заметим, что в силу соотношений (5) и малости углов γ_1 и γ_2 выражение для B можно приближенно переписать так: $B \approx \frac{2U\delta_1\delta_2}{k(\delta_1 + \delta_2)} \sin\frac{\gamma}{2}$. Тогда,

учитывая еще (14), мы найдем приближенное выражение функции f в окрестности точки контакта $z = 0$:

$$f(z) \approx iU \sin\frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{2\delta_1\delta_2}{k\pi(\delta_1+\delta_2)}}\frac{1}{\sqrt{-z}} = i\frac{UC}{\sqrt{-z}}, \quad (15)$$

где C — сокращенное обозначение для $\sin\frac{\gamma}{2}$, умноженного на корень. Согласно (10) скорость метаемой пластины $v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\operatorname{Im} kf(z)$, следовательно, в окрестности точки контакта

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -U\frac{\partial y}{\partial(x-Ut)} = -\frac{kUC}{\sqrt{Ut-x}}$$

(мы считаем x фиксированным). Отсюда интегрированием находим $y = 2kC\sqrt{Ut-x}$ или, в системе координат, связанной с точкой контакта,

$$y = 2kC\sqrt{-x}. \quad (16)$$

Мы видим, что в окрестности точки контакта свободная поверхность представляет собой параболу. Характерным размером для зоны высоких давлений можно считать радиус кривизны этой параболы в начале координат, т. е. величину

$$R = 2k^2C^2 = \frac{4\delta_1\delta_2}{\pi(\delta_1+\delta_2)}\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}\sin\frac{\gamma}{2} \quad (17)$$

(мы подставили вместо k и C их выражения).

В частности, при $\delta_2 \to \infty$ мы получим отсюда формулу

$$R = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}\,\delta_1 \sin^3\frac{\gamma}{2},$$

сходную с формулой (4) для длины волн, образующихся при сварке взрывом, когда метаемая пластина много тоньше неподвижной. Это сходство делает вероятной гипотезу, что длина волн λ определяется характерным размером R и скоростью U:

$$\lambda \approx \text{const} \cdot R \cdot \left(1-\frac{U^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Такую зависимость, однако, пока не удалось подтвердить экспериментально из-за технических трудностей.

Волнообразование. В многочисленных экспериментах по сварке взрывом обнаружено, что волны на поверхности контакта образуются не в момент соударения, а некоторое время спустя. В силу этого поверхность контакта у передней кромки оказывается гладкой, а волнистость начинается лишь на некотором расстоянии от кромки (рис. 154).

Возникло предположение, что для инициирования процесса волнообразования необходимо некоторое начальное возмущение в точке контакта. Такое возмущение может давать волна разрежения, которая приходит в точку контакта от свободной поверхности метаемой



Рис. 154

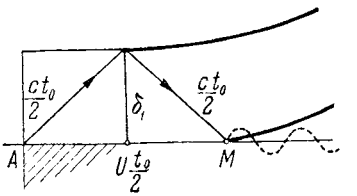


Рис. 155.

пластины. В рамках акустического приближения нетрудно подсчитать время t_0, необходимое для того, чтобы отраженная волна впервые пришла в точку контакта: из рис. 155 видно, что $\left(\frac{Ut_0}{2}\right)^2+\delta_1^2=\left(\frac{ct_0}{2}\right)^2$, где по-прежнему U — скорость точки контакта, а c — скорость звука в метаемой пластинке. Отсюда длина участка AM (рис. 155), до которого еще не доходит отраженная волна:

$$l_0=Ut_0=\frac{2\delta_1 U}{\sqrt{c^2-U^2}}. \qquad (19)$$

Эксперименты показывают, что размер зоны поверхности контакта, в которой волн еще нет, приближенно описывается этой формулой.

Для проверки гипотезы о роли волны разрежения в инициировании волнистости поверхности контакта были поставлены контрольные опыты. В них разрежение в точке контакта создавалось искусственно, при помощи специального уступа в неподвижной пластине. В этих

опытах волны на поверхности контакта начинались сразу за уступом, даже в том случае, когда уступ находился от передней кромки на расстоянии, меньшем l_0.

При этом обнаружилось еще одно важное обстоятельство. Оказалось, что для возбуждения стационарных синусоидальных волн необходимо, чтобы высота уступа h была примерно равной длине волны λ, — если h было заметно больше или меньше λ, стационарные волны не появлялись.

Таким образом, волнообразование при сварке взрывом не следует рассматривать как проявление какой-либо неустойчивости. Более естественно считать, что здесь имеется некоторая автоколебательная система с жестким возбуждением.

Форма колебаний. В рамках акустической модели, описываемой системой дифференциальных уравнений (6), можно исследовать возможные формы колебаний в соударяющихся пластинах [11]. Исключая из уравнений (6) компоненты скорости u и v, мы получим для давления p так называемое волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{20}$$

Это уравнение имеет периодические по времени решения вида

$$p = AZ_\nu(\omega r)\sin(c\omega t + \alpha)\sin(\nu\theta + \beta),$$

где Z_ν — цилиндрическая функция ν-го порядка, r и φ — полярные координаты $\left(r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}\right)$, а A, ω, α и β — произвольные постоянные (см. Л. и Ш., стр. 664).

Если, как и выше, перейти к системе координат, движущейся вместе с точкой контакта, и считать, что источник возмущений расположен в некоторой точке $(x_0, 0)$ этой новой системы, а также выбрать в качестве цилиндрической функции Z_ν функцию Ханкеля первого рода $H_\nu^{(1)}$ то изменение давления

$$p = AH_\nu^{(1)}(\omega r)\sin\left(ck\omega t + \frac{\omega U(x - x_0)}{ck}\right)\sin(\nu\theta + \beta), \tag{21}$$

где теперь $r = \sqrt{\frac{(x - x_0)}{k^2} + y^2}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{ky}{x - x_0}$ и

по-прежнему U — скорость точки контакта, а $k = \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}$. Чтобы удовлетворить граничному условию, по которому $p = 0$ в точках разреза $x < 0$, $y = 0$, мы должны считать, что $\nu = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$, и брать $\beta = 0$ при целых ν и $\beta = \frac{\pi}{2}$ при ν полуцелых.

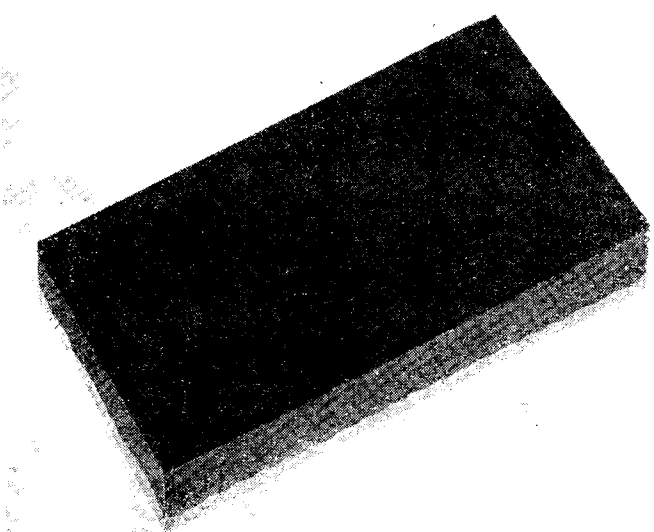


Рис. 156.

Обычно наблюдаемые волны (которые изображены на рис. 156) соответствуют случаю $\nu = 1$, когда давление изменяется по формуле

$$p = AH_1^{(1)}(\omega r) \sin\left(ck\omega t + \frac{\omega U (x - x_0)}{ck}\right) \sin\theta. \qquad (22)$$

В отдельных случаях, если обеспечить прецизионную симметрию режима соударения, удается наблюдать симметричные колебания, соответствующие случаю $\nu = \frac{1}{2}$

(рис. 157). Возможность реализации более высоких гармоник пока остается неясной.

Точку x_0, в которой находится источник возмущений, естественно выбирать в зоне высоких давлений, образующейся вблизи точки контакта; характерный размер R этой зоны мы оценили выше формулой (17). В действительности же источник возмущений не является точечным, а распределен по всей зоне высоких давлений.

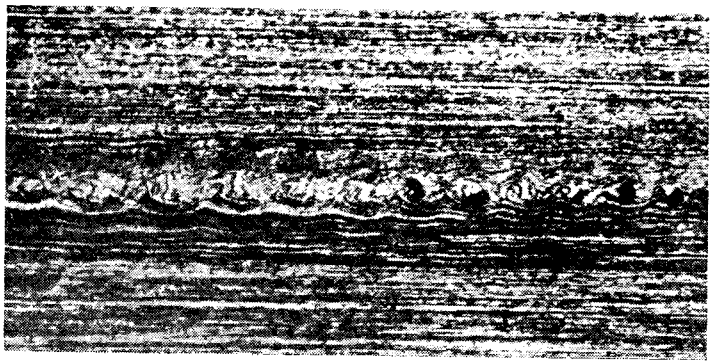


Рис. 157.

Эту зону, таким образом, можно считать источником колебаний, частота которых имеет порядок $\omega \approx \frac{c}{R}$. Для приближенных оценок достаточно взять именно такое значение ω в формуле (22). Более точные расчеты можно было бы провести, если учесть действительное распределение давлений в рассматриваемой зоне и проинтегрировать по x_0 выражения (22).

Следует заметить, что формула (22) описывает реальный волновой процесс лишь на расстояниях от точки контакта, существенно превышающих размер R зоны высоких давлений, но не превосходящих толщины δ_1 метаемой пластины. На больших расстояниях от точки контакта становится существенным влияние свободных границ, и это приводит к экспоненциальному затуханию колебаний.

Отметим еще, что в схеме акустического приближения можно получить выражения не только для давления и для компонент скорости, но и для формы свободной поверхности.

Выделение энергии. Волны, излучаемые осциллятором, который представляет собой зона высоких давлений, быстро затухают, и характерное время затухания τ имеет порядок периода колебаний $\frac{2\pi R}{c}$. Следовательно, для объяснения существования незатухающих колебаний, наблюдаемых при сварке взрывом, необходимо предположить, что в этом процессе происходит подкачка энергии по какому-нибудь нелинейному закону.

Для исследования распределения энергии в зоне соединения при сварке взрывом были поставлены специальные эксперименты [12]. Для сварки подбирались специальные металлы, образующие при соединении термопару, в частности, никель и сталь. Регистрирующий прибор фиксировал электродвижущую силу, возникающую при контакте между метаемой и неподвижной пластинами. Записанная этим прибором кривая напряжение — время на начальном участке имела резкие колебания, которые вызваны взаимодействием ударных волн и волн разрежения, распространяющимся по пластинам. Но примерно через $2 \cdot 10^{-5}$ *сек*, когда процесс соударения заканчивался, кривая приобретала плавный характер, и оказалось возможным найти зависимость температуры соединения от времени.

Обработка результатов этих экспериментов позволила прийти к следующему важному выводу [12]. На границе зоны соударения, в весьма узком слое (примерно на порядок более тонком, чем зона волнообразования) с большой скоростью выделяется конечное количество тепла Q, составляющее примерно 3% от кинетической энергии метаемой пластины. Это определяет температурный режим зоны, в которой происходит рассасывание тепла Q по законам теплопроводности. Остальная часть кинетической энергии метаемой пластины выделяется более или менее равномерно во всем объеме и определяет конечную температуру пластин.

Таким образом, экспериментально установлено, что в узком слое на границе соударения происходит выде-

ление конечной энергии. Эта энергия, по-видимому и является источником, поддерживающим автоколебательный процесс волнообразования при сварке взрывом. Механизм такого выделения энергии и причины, его порождающие, пока еще не исследованы. Наиболее вероятной представляется гипотеза, что решающую роль здесь играет трение между соединяющимися поверхностями. Следует заметить, что процесс сварки можно рассматривать как обратный к процессу образования трещин (см. предыдущую главу), и поэтому выделение энергии при сварке равносильно ее затрате при образовании трещин.

Затопленная струя. Выше мы отмечали, что соударение пластин при сварке взрывом происходит при углах наклона, меньших того критического значения, которое нужно для образования кумулятивной струи. Однако, как видно из решения задачи о соударении струи в гл. VII, существование обратной струи является необходимым следствием закона сохранения количества движения. Возникает естественный вопрос: куда же девается обратная струя при сварке взрывом? В заключение мы, следуя работе [13], покажем, как можно ответить на этот вопрос в рамках схемы несжимаемой жидкости, и еще раз убедимся в эффективности этой схемы.

Результаты численных расчетов нестационарного соударения пластин, приведенные в работе [10], позволяют утверждать, что вблизи поверхности соударения имеется слой, в котором скорости существенно меньше, чем в окружающем потоке. Естественно предположить, что в точке контакта имеется источник, который формирует затопленную струю, движущуюся с меньшей скоростью. В дальнейшем движении под влиянием вязкости эта струя расширяется и постепенно заполняет все течение.

Приведем некоторые расчеты, относящиеся к этой гипотезе. Закон сохранения проекции количества движения на ось y в обозначениях рис. 152 дает $\rho_1\delta_1 U \sin\gamma_1 = \rho_2\delta_2 U \sin\gamma_2$, откуда для малых углов

$$\gamma_1 \approx \frac{\rho_2\delta_2}{\rho_1\delta_1+\rho_2\delta_2}\gamma, \qquad \gamma_2 \approx \frac{\rho_1\delta_1}{\rho_1\delta_1+\rho_2\delta_2}\gamma. \tag{23}$$

Пользуясь законом сохранения проекции количества движения на ось x, легко найти количество движения

в точке контакта

$$J = \rho_1\delta_1 U(1 - \cos\gamma_1) + \rho_2\delta_2 U(1 - \cos\gamma_2)$$

или, с учетом (23),

$$J \approx U\frac{\gamma^2}{2}\frac{\rho_1\delta_1\rho_2\delta_2}{\rho_1\delta_1 + \rho_2\delta_2}. \tag{24}$$

Отсюда скорость в бесконечности после соударения

$$U_\infty \approx \frac{J}{\rho_1\delta_1 + \rho_2\delta_2} = \frac{U\gamma^2}{2}\frac{\rho_1\delta_1\rho_2\delta_2}{(\rho_1\delta_1 + \rho_2\delta_2)^2}. \tag{25}$$

В частном случае $\rho_1 = \rho_2$ с той же точностью имеем:

$$U_\infty = U\frac{2\delta_1\delta_2}{(\delta_1 + \delta_2)^2}\sin^2\frac{\gamma}{2}. \tag{26}$$

Теперь проанализируем высказанную выше гипотезу о том, что расширение затопленной струи происходит вследствие вязкости. Для простоты воспользуемся одномерным уравнением диффузии

$$U\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{27}$$

где $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ — коэффициент кинематической вязкости. Проинтегрируем это уравнение по x от $-\infty$ до ∞ при фиксированном $y \neq 0$:

$$U(U_\infty - U_{-\infty}) = \nu\frac{d^2}{dy^2}\int_{-\infty}^{\infty} u(x, y)\,dx.$$

Учтем теперь, что в наших предположениях $U_{-\infty}$ (скорость затопленной струи в $-\infty$) равна нулю, и введем горизонтальное смещение

$$z(y) = \frac{1}{U}\int_{-\infty}^{\infty} u(x, y)\,dx;$$

тогда предыдущее соотношение перепишется в виде

$$\nu\frac{d^2 z}{dy^2} = U_\infty. \tag{28}$$

Отсюда следует, что отрезки прямых, до начала соударения параллельные оси y, после соударения перейдут в отрезки парабол, формы которых определяются скоростью U_∞ и коэффициентом вязкости.

Специальные эксперименты, описанные в работе [13] показали, что экспериментальные кривые $z(y)$, начиная с некоторого расстояния от оси x, весьма мало отличаются от парабол. По форме этих парабол были определены коэффициенты вязкости различных металлов, и оказалось, что найденные значения согласуются с известными.

Так получено экспериментальное подтверждение гипотезы о существовании затопленной струи, которая в условиях сварки взрывом заменяет струю кумулятивную.

Литература

1. М. М. Докучаев, В. Н. Родионов, А. Н. Ромашов, Взрыв на выброс, Изд-во АН СССР, 1963.
2. А. Ю. Ишлинский, Н. В. Зволинский, И. З. Степаненко, К динамике грунтовых масс, ДАН СССР, т. 95, № 4 (1954).
3. М. А. Лаврентьев, В. М. Кузнецов, Е. Н. Шер, О направленном метании грунта при помощи взрывчатого вещества, ПМТФ, № 4 (1960).
4. В. М. Кузнецов, О форме воронки выброса при взрыве на поверхности грунта, ПМТФ, № 3 (1960).
5. В. М. Кузнецов, Е. Н. Шер, Экспериментальное исследование направленного взрыва в грунте, ПМТФ, № 3 (1962).
6. В. М. Кузнецов, Е. Н. Шер, Масштабный эффект и влияние прочности при направленном взрыве, ПМТФ, № 3 (1969).
7. G. Birkhoff, D. Mc Dongall, E. Pugh, G. Tailor, Explosives with lined cavities, J. Appl. Phys., v. 19, n. 6 (1948).
8. N. E. Noskin, J. Allan, W. Bailey, J. Lethaby, J. Skidmore, The motion of plates and cylinders driven by detonation waves at tangential incidence, IV Symposium on Detonation (1965).
9. А. А. Дерибас, В. М. Кудинов, Ф. И. Матвеенков, В. А. Симонов, О моделировании процесса волнообразования при сварке взрывом, Физика горения и взрыва, № 1 (1968).
10. A. Deribas, S. Godunov, A. Zabrodin, N. Kozin, Hydrodinamic effects in colliding solids, J. Comput. Phys., v. 5, n. 3 (1970).
11. С. К. Годунов, А. А. Дерибас, Волнообразование при сварке взрывом, В сб. «Некоторые вопросы математики и механики» (к семидесятилетию М. А. Лаврентьева), «Наука», 1970.
12. И. Д. Захаренко, Т. М. Соболенко, Тепловые эффекты в зоне соединения при сварке взрывом, Физика горения и взрыва, № 1 (1971).
13. С. К. Годунов, А. А. Дерибас, И. Д. Захаренко, В. И. Мали, Исследование вязкости металлов при высокоскоростном соударении, Физика горения и взрыва, № 1 (1971).